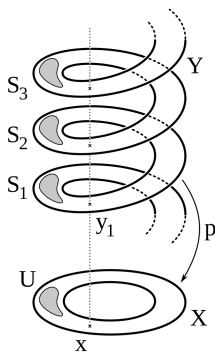


## Riemannsche Flächen

### Vorlesung 6

Nach Satz 2.1 ist eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen riemannschen Flächen lokal biholomorph äquivalent zu einer Potenzierung  $w \mapsto w^k$ . Für  $z \neq 0$  besteht das Urbild von  $z$  unter dieser Abbildung aus den  $k$  verschiedenen  $k$ -ten Wurzeln von  $z$ . Insbesondere sind außerhalb von gewissen Ausnahmenmengen (den Verzweigungspunkten) holomorphe Abbildungen zumindest lokal von einer topologisch einfachen Bauart. Das topologisch relevante Konzept ist das einer Überlagerung.

### Überlagerungen



DEFINITION 6.1. Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine stetige Abbildung

$$p: Y \longrightarrow X$$

heißt *Überlagerung*, wenn es eine offene Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  und eine Familie diskreter topologischer Räume  $F_i$ ,  $i \in I$ , derart gibt, dass  $p^{-1}(U_i)$  homöomorph zu  $U_i \times F_i$  (versehen mit der Produkttopologie) ist, wobei die Homöomorphismen mit den Abbildungen nach  $U_i$  verträglich sind.

Eine Abbildung der Form

$$U \times F \longrightarrow U$$

mit einem diskreten Raum  $F$  nennt man *triviale Überlagerung* von  $U$ , der Überlagerungsraum besteht einfach aus  $F$ -vielen disjunkten Kopien des Basisraumes  $U$ . Zu  $P \in F$  nennt man dann die zu  $U$  homöomorphe Teilmenge

$U \times \{P\}$  ein Blatt der Überlagerung über  $U$ . Lokal ist jede Überlagerung trivial, nach Definition liegen ja kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \longrightarrow & U_i \times F_i \\ p \searrow & & \downarrow \\ & & U_i \end{array}$$

mit horizontalen Homöomorphismen vor. Deshalb sind hauptsächlich globale Eigenschaften einer Überlagerung interessant. Unter schwachen Voraussetzungen (siehe Lemma 6.4) gibt es nur einen diskreten Raum  $F$ .

BEISPIEL 6.2. Zu  $n \in \mathbb{N}_+$  ist

$$\varphi: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, w \longmapsto w^n,$$

eine Überlagerung. Sei  $z \in \mathbb{C}^\times$  und  $w \in \mathbb{C}^\times$  ein Punkt mit  $w^n = z$ . Es sei  $w \in V \subseteq \mathbb{C}^\times$  eine offene Umgebung, die homöomorph auf  $U := \varphi(V)$  abbildet. Eine solche Menge gibt es nach Korollar 1.11 und wegen  $\varphi'(w) = nw^{n-1} \neq 0$ . Die Menge der  $n$ -ten komplexen Einheitswurzeln ist

$$E_n = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1\} = \{e^{\frac{2\pi ki}{n}} \mid k = 0, \dots, n-1\},$$

siehe Lemma 21.11 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Wir können  $V$  verkleinern und dadurch erreichen, dass für alle  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\zeta \neq 1$  die offenen Mengen  $V$  und  $\mu_\zeta(V)$  disjunkt sind. Dann ist

$$\varphi^{-1}(U) \cong \bigsqcup_{\zeta \in E_n} \mu_\zeta(V) \cong U \times E_n.$$

BEISPIEL 6.3. Die Abbildung

$$\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times, w \longmapsto \exp w,$$

ist eine Überlagerung. Zu einem Punkt  $z \in \mathbb{C}^\times$  und einem Punkt  $w \in \mathbb{C}$  mit  $\exp w = z$  gibt es nach Korollar 1.11 eine offene Umgebung  $w \in V \subseteq \mathbb{C}$ , die homöomorph auf  $U := \exp(V)$  abbildet. Durch Verkleinern von  $V$  können wir annehmen, dass die offenen Mengen  $V$  und  $V + 2\pi ki$  für  $k \neq 0$  disjunkt sind. Dann ist

$$\exp^{-1}(U) \cong \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} (V + 2k\pi i) \cong U \times \mathbb{Z}.$$

LEMMA 6.4. Es sei  $p: Y \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $X$  zusammenhängend. Dann ist

$$p^{-1}(x) \cong p^{-1}(y)$$

für alle  $x, y \in X$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $p: Y \rightarrow X$  eine beliebige Überlagerung und  $U_i, i \in I$ , eine Überdeckung von  $X$ , über den die Überlagerung trivialisiert. Für  $x, y \in U_i$  ist

$$p^{-1}(x) = F_i = p^{-1}(y).$$

Sei nun  $X$  zusammenhängend,  $x \in X$  und

$$T := \{y \in X \mid p^{-1}(y) \cong p^{-1}(x)\} \neq \emptyset.$$

Dann ist  $T$  offen, denn es enthält zu jedem seiner Punkte noch eine offene Umgebung, über der  $p$  trivialisiert. Aus dem gleichen Grund ist aber auch  $X \setminus T$  offen. Da  $X$  zusammenhängend ist, gilt  $T = X$ .  $\square$

Somit hängt die Mächtigkeit einer Faser einer Überlagerung eines zusammenhängenden Raumes nicht von der Wahl des Punktes ab. In Beispiel 6.2 ist  $F = \mathbb{Z}/(n)$  und in Beispiel 6.3 ist  $F = \mathbb{Z}$ .

DEFINITION 6.5. Eine stetige Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt *lokaler Homöomorphismus*, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $x \in U$  derart gibt, dass  $\varphi(U)$  offen in  $Y$  ist und dass die Einschränkung

$$U \longrightarrow \varphi(U)$$

ein Homöomorphismus ist.

LEMMA 6.6. *Eine Überlagerung  $p: Y \rightarrow X$  ist ein lokaler Homöomorphismus.*

*Beweis.* Sei  $y \in Y$ . Zu  $x = p(y) \in X$  gibt es eine offene Umgebung  $x \in U$  derart, dass  $p^{-1}(U)$  die disjunkte Vereinigung von zu  $U$  homöomorphen offenen Mengen ist. Auf einer dieser Mengen muss  $y$  liegen.  $\square$

Zu einer offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  ist die Inklusion ein lokaler Homöomorphismus, aber im Allgemeinen keine Überlagerung.

LEMMA 6.7. *Ein lokaler Homöomorphismus  $p: Y \rightarrow X$  ist eine offene Abbildung.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 6.11.  $\square$

KOROLLAR 6.8. *Eine Überlagerung  $p: E \rightarrow X$  ist eine offene Abbildung.*

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 6.6 und Lemma 6.7.  $\square$

Bei einer Überlagerung gibt es enge Beziehungen zwischen zusätzlichen Strukturen auf dem Basisraum und auf dem Überlagerungsraum.

SATZ 6.9. *Es sei  $p: Y \rightarrow X$  eine Überlagerung von topologischen Räumen, wobei  $X$  eine riemannsche Fläche sei. Dann gibt es eine eindeutige Struktur einer riemannschen Fläche auf  $Y$  derart, dass  $p$  zu einer holomorphen Abbildung wird.*

*Beweis.* Nach Aufgabe 6.7 ist mit  $X$  auch  $Y$  hausdorffsch. Für eine offene Teilmenge  $V \subseteq Y$ , die homöomorph auf  $p(V)$  abgebildet wird, muss die komplexe Struktur auf  $V$  die von  $p(V)$  zurückgezogene holomorphe Struktur sein. Dies ergibt sich aus Satz 2.3, da eine holomorphe bijektive Abbildung bereits biholomorph ist. Es kann also höchstens eine komplexe Struktur auf  $Y$  derart geben, dass die Abbildung holomorph wird. Zur Existenz überdecken wir  $X$  mit offenen Mengen  $U_i$ ,  $i \in I$ , über denen  $p$  trivialisiert und wobei die  $U_i$  zusammenhängende Kartengebiete mit Karten

$$\alpha_i: U_i \longrightarrow U'_i \subseteq \mathbb{C}$$

sind. Es sei  $V_{i,j_i}$ ,  $j_i \in J_i$ , die disjunkte Zerlegung von  $p^{-1}(U_i)$ . Wir definieren Karten auf  $V_{i,j_i}$  durch

$$\beta_{i,j_i} := \alpha_i \circ p_{j_i}: V_{i,j_i} \longrightarrow U'_i.$$

Seien  $V_{i,j_i}$  und  $V_{k,\ell_k}$  zwei solche Mengen. Dann ist

$$p(V_{i,j_i} \cap V_{k,\ell_k}) = U_i \cap U_k$$

und die Holomorphie der Übergangsabbildung folgt aus der Holomorphie der Kartenwechsel auf  $X$ .  $\square$

Diese Aussage gilt auch allgemeiner für komplexe Mannigfaltigkeiten.

## Liftungen

Eine grundlegende Eigenschaft von Überlagerungen ist es, dass Wege und Homotopien entlang der Überlagerung geliftet werden können.

**DEFINITION 6.10.** Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Zu einer stetigen Abbildung  $p: Y \rightarrow X$  und einem stetigen Weg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow X$$

nennt man einen stetigen Weg

$$\tilde{\gamma}: [0, 1] \longrightarrow Y$$

mit

$$\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$$

eine *Liftung* von  $\gamma$ .

**SATZ 6.11.** *Es sei  $p: Y \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $\gamma: I \rightarrow X$  ein stetiger Weg und  $z \in Y$  ein Punkt mit  $p(z) = \gamma(0)$ . Dann gibt es genau einen stetigen Weg*

$$\tilde{\gamma}: I \longrightarrow Y$$

*mit der Eigenschaft, dass  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  und  $\tilde{\gamma}(0) = z$  ist.*

*Beweis.* Zu jedem Punkt  $x \in \gamma(I)$  gibt es eine offene Umgebung  $U_x$  derart, dass  $p$  oberhalb von  $U_x$  trivialisiert, d.h.  $p^{-1}(U_x)$  ist die disjunkte Vereinigung von zu  $U_x$  über  $p$  homöomorphen offenen Teilmengen von  $Y$ . Aufgrund der Kompaktheit von  $\gamma(I)$  gibt es somit endlich viele offene Mengen  $U_1, \dots, U_n$  mit dieser Eigenschaft und mit  $\gamma(0) \in U_1$ , mit  $U_i \cap U_{i+1} \cap \gamma(I) \neq \emptyset$  für alle  $i$  (da  $\gamma(I)$  zusammenhängend ist) und mit  $\gamma(1) \in U_n$ . Es sei  $x_i = \gamma(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$  mit aufsteigenden Zeitpunkten  $t_i$ . Es sei  $V_1$  diejenige zu  $U_1$  homöomorphe Teilmenge von  $Y$ , die  $x_1$  enthält. Dann gibt es für den auf  $[0, t_1]$  eingeschränkten Weg nur die Liftung  $p|_{V_1}^{-1} \circ \gamma|_{[0, t_1]}$ . Dieser Weg hat für  $t_1$  einen eindeutigen Endpunkt in  $Y$ , sagen wir

$$z_1 = \tilde{\gamma}(t_1).$$

Dazu gehört wiederum eine eindeutige offene Menge  $V_2 \subseteq Y$  homöomorph zu  $U_2$  und es gibt eine eindeutige Fortsetzung von dem bisher konstruierten  $\tilde{\gamma}$  nach  $[t_1, t_2]$ . So induktiv fortfahrend erhält man die gesamte eindeutige Liftung des Weges.  $\square$

## Decktransformationen

DEFINITION 6.12. Es sei  $p: Y \rightarrow X$  eine Überlagerung von  $X$ . Ein Homöomorphismus  $f: Y \rightarrow Y$  mit  $p \circ f = p$  heißt *Decktransformation* der Überlagerung.

DEFINITION 6.13. Es sei  $p: Y \rightarrow X$  eine Überlagerung von  $X$ . Die Menge der Decktransformationen von  $Y$  über  $X$ , versehen mit der Hintereinanderschaltung, heißt *Decktransformationsgruppe* der Überlagerung. Sie wird mit  $\text{Deck}(Y|X)$  bezeichnet.

BEISPIEL 6.14. Zur Überlagerung

$$\varphi: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, w \longmapsto w^n,$$

ist die Decktransformationsgruppe gleich der Gruppe der  $n$ -ten komplexen Einheitswurzeln

$$E_n = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1\} = \{e^{\frac{2\pi ki}{n}} \mid k = 0, \dots, n-1\},$$

siehe Lemma 21.11 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Dabei wirkt eine Einheitswurzel  $\zeta$  durch die Multiplikation

$$\mu_\zeta: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, z \longmapsto \zeta z,$$

als Decktransformation. Die Gesamtzuordnung

$$E_n \longrightarrow \text{Deck}(\mathbb{C}^\times|\mathbb{C}^\times)$$

ist offenbar injektiv und ein Gruppenhomomorphismus. Bei einer beliebigen Decktransformation

$$\theta: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

ist  $\zeta := \theta(1)$  eine  $n$ -te Einheitswurzel. Daraus folgt  $\theta = \mu_\zeta$  mit Lemma 6.16.

BEISPIEL 6.15. Zur Überlagerung

$$\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times, w \longmapsto \exp w,$$

ist die Decktransformationsgruppe gleich der Gruppe der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ . Dabei wirkt  $n \in \mathbb{Z}$  durch die Addition

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, w \longmapsto w + n2\pi i,$$

als Decktransformation. Dass es sich um eine Decktransformation handelt beruht auf den Periodizitätseigenschaften der komplexen Exponentialfunktion, siehe Satz 21.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Daraus ergibt sich auch, dass

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Deck}(\mathbb{C}|\mathbb{C}^\times)$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Nach Lemma 6.16 ist dies sogar ein Isomorphismus.

LEMMA 6.16. *Es sei  $p: Y \rightarrow X$  eine Überlagerung. Dabei sei  $Y$  hausdorffsch, lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend. Dann ist eine Decktransformation, die einen Fixpunkt besitzt, bereits die Identität.*

*Beweis.* Es sei  $\varphi$  die Decktransformation. Wir betrachten die Menge

$$\{y \in Y \mid \varphi(y) = y\},$$

die nach Voraussetzung nicht leer ist. Wir zeigen, dass sie sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Wegen  $Y$  hausdorffsch ist die Fixpunktmenge nach Aufgabe 6.20 abgeschlossen. Es sei  $y \in Y$  ein Fixpunkt mit

$$p(y) = x.$$

Es sei  $U$  eine offene Umgebung, worüber die Überlagerung trivialisiert. Wegen der Voraussetzung über den lokalen Wegzusammenhang können wir annehmen, dass  $U$  wegzusammenhängend ist. Es sei  $V$  die entsprechende offene Umgebung von  $y$ . Dann ist  $V$  und somit auch  $\varphi(V)$  zusammenhängend und wegen  $\varphi(y) = y \in V$  ist bereits  $\varphi(V) \subseteq V$ . Somit gilt für  $y' \in V$  die Bedingung  $\varphi(y') \in V \cap p^{-1}(p(y')) = \{y'\}$ , also ist  $\varphi$  auf  $V$  die Identität. Die Fixpunktmenge ist also auch offen. Aufgrund des Zusammenhangs von  $Y$  ist sie dann gleich ganz  $Y$ .  $\square$

DEFINITION 6.17. Eine Überlagerung

$$p: Y \longrightarrow X$$

heißt *normal*, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  und jedem Punktepaar  $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$  eine Decktransformation

$$\varphi: Y \longrightarrow Y$$

mit  $\varphi(y_1) = y_2$  gibt.

Die Überlagerungen aus Beispiel 6.2 und aus Beispiel 6.3 sind normal.

## Endliche Überlagerungen

DEFINITION 6.18. Eine Überlagerung  $p: Y \rightarrow X$  heißt *endlich*, wenn jede Faser eine endliche Menge ist.

Eine stetige Abbildung heißt endlich (im topologischen Sinne), wenn die Fasern endliche Mengen sind und wenn die Abbildung eigentlich ist, also Urbilder von kompakten Mengen stets wieder kompakt sind.

SATZ 6.19. *Es sei  $p: Y \rightarrow X$  eine surjektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen mit  $Y$  ein Hausdorffraum und  $X$  lokal wegzusammenhängend. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  $p$  ist eine endliche Überlagerung.
- (2)  $p$  ist eine Überlagerung und endlich.
- (3)  $p$  ist ein lokaler Homöomorphismus, der endlich ist.

*Beweis.* Von (1) nach (2). Es sei  $T \subseteq X$  kompakt mit dem Urbild  $S := p^{-1}(T)$ . Es sei

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$$

eine offene Überdeckung. Zu jedem Punkt  $y \in S$  gibt es ein  $j(y)$  mit  $y \in W_{j(y)}$ . Es sei  $y = y_1 \in S$  und seien  $y_2, \dots, y_n$  die weiteren Punkte, die auf  $x = p(y)$  abbilden. Zu den offenen Umgebungen  $y_k \in W_{j(y_k)}$  gibt es eine offene Umgebung  $x \in U_x \subseteq X$ , über der  $p$  trivialisiert und mit  $y_k \in V_k \subseteq p^{-1}(U_x) \cap W_{j(y_k)}$ , wobei  $V_k$  das Blatt zu  $y_k$  bezeichnet. Diese offenen Mengen bilden eine verfeinerte Überdeckung der Ausgangsüberdeckung. Die  $U_x$  bilden dann eine offene Überdeckung von  $T$  und somit gibt es davon eine endliche Teilüberdeckung  $U_1, \dots, U_m$ . Die zugehörigen Blätter  $V_{j_k}$  bilden dann eine endliche Überdeckung von  $S$ .

Von (2) nach (3) ist klar.

Von (3) nach (1). Sei  $x \in X$  ein Punkt und seien  $y_1, \dots, y_n$  die Urbildpunkte von  $x$ . Zu jedem  $y_j$  gibt es eine offene Umgebung  $V_j$ , die homöomorph auf  $U_j$  abbildet. Man betrachtet die offene Menge

$$U := \bigcap_{j \in J} U_j$$

und ersetzt die  $V_j$  durch  $V_j \cap p^{-1}(U)$ . Durch eine weitere Verkleinerung können wir erreichen, dass  $U$  und damit auch die  $V_j$  wegzusammenhängend ist. Wir behaupten, dass  $\bigcup_{j \in J} V_j$  das Urbild von  $U$  ist. Nehmen wir an, es gebe einen Punkt  $y$  mit  $p(y) \in U$ , der auf keinem  $V_j$  liegt. Wir betrachten einen Verbindungsweg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow U$$

von  $p(y)$  nach  $x$ . Das Urbild von  $\gamma([0, 1])$  ist kompakt. Es enthält die kompakten Kopien innerhalb von  $V_j$ . Zu  $y$  gibt es eine offene Umgebung  $V$ , die

homöomorph nach  $X$  abbildet und darin gibt es eine Liftung des Teilweges durch  $y$ . Es sei  $s$  das Supremum der reellen Zahlen  $t$ , für die eine stetige Liftung  $\tilde{\gamma}$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = y$  definiert ist. Wegen Aufgabe 6.15 ist die Liftung eindeutig und dieser Weg ist auf  $[0, s[$  definiert. Aufgrund der Eigentlichkeit ist dies auch für  $s$  definiert. Wegen der lokalen Homöomorphie gibt es bei  $s < 1$  eine offene Umgebung von  $\tilde{\gamma}(s)$ , die homöomorph auf eine offene Teilmenge von  $X$  abbildet und somit würde es eine weitere Fortsetzung des Liftungsweges geben. Also ist  $s = 1$  und somit endet die Liftung in einem der Punkte über  $x$ , sagen wir in  $y_1$ . Dann muss aber diese Liftung mit der Liftung innerhalb von  $V_1$  übereinstimmen und damit ist selbst  $y \in V_1$ .  $\square$

In der Situation der vorstehenden Aussage ist, wenn der Basisraum zusammenhängend ist, die Anzahl der Elemente einer jeden Faser konstant. Man spricht von der *Blätterzahl* von  $p$ .



## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Covering map.svg , Autor = Benutzer Johannes Spielmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9