# 第五章　线性系统理论引论


§5－0　引言 ………………………………………… 5－0－1

§5－1　线性系统的数学描述 …………………… 5－1－1

5－1－1　线性系统的经典描述方法 …………… 5－1－1

一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法…… 5－1－1

1. 用微分方程来描述 ………………………… 5－1－1

2. 用传递函数来描述 ………………………… 5－1－2

3. 用频率特性来描述 ………………………… 5－1－4

4. 用脉冲过渡函数来描述 …………………… 5－1－4

5. 借助图形来描述（仪号流程图） ………… 5－1－7

二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法…… 5－1－16

1. 用差分方程来描述 ………………………… 5－1－16

2. 用Z传递函数来描述 ……………………… 5－1－17

三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法…… 5－1－18

四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法…… 5－1－19

5－1－2　线性系统的现代描述方法 …………… 5－1－19

一、线性系统的状态空间描述 ………………… 5－1－19

1. 线性、连续系统的状态空间描述 ………… 5－1－19

2. 线性、离散系统的状态空间描述 ………… 5－1－25

二、线性系统的结构图表示 …………………… 5－1－27

三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵 ……… 5－1－28

四、常系数、线性、离散系统的Z传递矩阵 …… 5－1－29

五、随机线性系统的数学描述 ………………………… 5－1－30

§5－2 线性系统的最佳设计 ………………………… 5－2－1
5－2－1 最佳设计问题的提出 ………………………… 5－2－1
5－2－2 最佳设计的性能指标 ………………………… 5－2－4
5－2－3 最佳滤波原理 ………………………… 5－2－7
一、维纳最佳滤波原理 ………………………… 5－2－7
二、卡尔曼滤波原理 ………………………… 5－2－14
5－2－4 最佳控制原理 ………………………… 5－2－19
一、确定性系统最佳控制原理 ………………………… 5－2－19
二、随机性系统最佳控制原理 ………………………… 5－2－21
三、随机性系统最佳控制问题的分解原理 ………… 5－2－23

§5－3 线性系统的基本特性 ………………………… 5－3－1
5－3－1 引言 ………………………… 5－3－1
5－3－2 线性系统的可观文性 ………………………… 5－3－2
一、系统可观文性概念 ………………………… 5－3－2
二、系统完全状态可观文性准则 ………………………… 5－3－2
三、系统一致可观文性概念 ………………………… 5－3－14
5－3－3 线性系统的可控性 ………………………… 5－3－29
一、系统可控性概念 ………………………… 5－3－29
二、系统完全状态可控性准则 ………………………… 5－3－30
三、系统完全轨出可控性准则 ………………………… 5－3－39
四、系统一致可控性概念 ………………………… 5－3－40

5－3－4　线性系统的稳定性 ………………………… 5－3－57

一、系统稳定性概念 ………………………………… 5－3－57

1. 系统的描述 ………………………………… 5－3－57

2. 平衡状态 ………………………………… 5－3－58

3. 稳定性概念 ………………………………… 5－3－58

二、李雅普诺夫直接法 ………………………………… 5－3－61

三、线性系统的稳定性准则 ………………………… 5－3－68

四、线性系统稳定性的一般形式 ………………… 5－3－80

五、利用李雅普诺夫函数

估计系统时间常数的上界 ………………… 5－3－83

§5－4　线性系统的不变易及其规范形式 ……… 5－4－1

5－4－1　状态矢易的线性变换及

系统的不变易 ……………… 5－4－1

5－4－2　线性系统的若唐规范形式 ……………… 5－4－3

5－4－3　线性系统的可控规范形式 ……………… 5－4－25

5－4－4　线性系统的可观宊规范形式 ………… 5－4－31

§5－5　常系数、线性系统的实现问题 ………… 5－5－1

5－5－1　常系数、线性系统的可控实现 ……… 5－5－1

5－5－2　常系数、线性系统的可观宊实现 …… 5－5－7

5－5－3　常系数、线性系统的并联形实现 …… 5－5－9

一、并联可控实现 ………………………………… 5－5－9

二、并联可观宊实现 ………………………………… 5－5－13

5－5－4　常系数、线性系统的串联形实现 …… 5－5－15
5－5－5　常系数、线性系统的最小实现 ……… 5－5－21

§5－6　状态反馈问题 ……………………… 5－6－1
5－6－1　反馈问题 ……………………… 5－6－1
5－6－2　极点配置问题 ………………… 5－6－8
一、单输入单输出系统的极点配置问题 ……… 5－6－9
二、特殊情况下多输入多输出系统的
极点配置问题 ……… 5－6－18
5－6－3　稳定性问题 ………………… 5－6－26
一、能稳定性 ……………………… 5－6－26
二、衰减速度 ……………………… 5－6－28
三、减少反馈量 ……………………… 5－6－29
四、输出反馈的稳定性 ……………… 5－6－33
5－6－4　分离性控制问题 ……………… 5－6－35

§5－7　观测器原理 ……………………… 5－7－1
5－7－1　引言 ……………………… 5－7－1
5－7－2　观测器和"可检测系统" ………… 5－7－1
一、观测器构成的基本思想 ………… 5－7－1
二、观测器和"可检测系统" ………… 5－7－5
5－7－3　观测器的基本关系 …………… 5－7－13
5－7－4　基本观测器 ………………… 5－7－26
5－7－5　降维观测器 ………………… 5－7－29

一、单轨入单轨出系统的降维观父口 …………… 5－7－31

二、多轨入多轨出系统的降维观父口 …………… 5－7－39

5－7－6 用观父口构成状态反馈 ……………… 5－7－46

§5－8 灵敏度分析 ……………………………… 5－8－1

5－8－1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移以及开环零点，极点偏移间的关系…… 5－8－1

5－8－2 比较灵敏度 ……………………… 5－8－8

5－8－3 轨道灵敏度函数 …………………… 5－8－19

§5－9 线性系统的对偶尻理 ………………… 5－9－1

5－9－1 线性系统的可观父性与可控性之间的对偶特性 ………… 5－9－1

5－9－2 随机最佳估计和确定性最佳控制之间的对偶特性 ……… 5－9－2

5－9－3 对偶系统和对偶尻理 ……………… 5－9－5

5－9－4 线性系统的对偶关系式 …………… 5－9－7

# 第六章　最佳泸波原理


§ 6 − 0　引言 ········································ 6 − 0 − 1

§ 6 − 1　估计问题 ···································· 6 − 1 − 1

6 − 1 − 1　统计估计问题 ······························ 6 − 1 − 1

一、最小方差估计 ······································ 6 − 1 − 1

二、极大验后估计 ······································ 6 − 1 − 5

三、极大似然估计 ······································ 6 − 1 − 6

四、举例 ·············································· 6 − 1 − 7

6 − 1 − 2　线性估计 ·································· 6 − 1 − 18

一、线性最小方差估计 ·································· 6 − 1 − 18

二、最小二乘估计 ······································ 6 − 1 − 24

6 − 1 − 3　估计问题小结 ······························ 6 − 1 − 28

一、几种估计方法的比较 ································ 6 − 1 − 28

二、几种估计方法间的关系 ······························ 6 − 1 − 30

§ 6 − 2　线性最佳泸波原理 ···························· 6 − 3 − 1

6 − 2 − 1　离散、线性系统的最佳泸波原理 ·············· 6 − 2 − 1

一、概述 ·············································· 6 − 2 − 1

二、卡尔曼泸波疏式 ···································· 6 − 2 − 3

三、卡尔曼泸波的性质 ·································· 6 − 2 − 21

四、白噪声情况下一般线性系统的泸波疏式 ················ 6 − 2 − 21

五、有色噪声情况下线性系统的泸波 ······················ 6 − 2 − 28

六、举例 ………………………………………… 6－2－44
6－2－2　连续、线性系统的最佳泸波原理 …… 6－2－67
一、连续、线性系统的最佳泸波问题 …………… 6－2－67
二、等效的离散、线性系统 ……………………… 6－2－68
1. 将白噪声过程视为白噪声序列的
极限情况 ……… 6－2－68
2. 等效的离散、线性系统 ……………………… 6－2－72
三、连续、线性系统泸波的基本砾式 …………… 6－2－74
四、举例 ………………………………………… 6－2－81

§6－3　最佳泸波的稳定性和误差分析 ………… 6－3－1
6－3－1　最佳泸波的稳定性 …………………… 6－3－1
一、最佳泸波的稳定性概念 ……………………… 6－3－1
二、稳定性准则 ………………………………… 6－3－2
6－3－2　最佳泸波的误差分析 ………………… 6－2－8
一、误差协方差矩阵微分方程和
差分方程的解析解 …………… 6－3－8
1. 误差协方差矩阵微分方程的解析解 ………… 6－3－8
2. 误差协方差矩阵差分方程的解析解 ………… 6－3－18
二、误差协方差矩阵的上、下界 ………………… 6－3－22
三、误差协方差矩阵的渐近特性 ………………… 6－3－33

§6－4　模型误差分析，最佳泸波的
发散现象和克服发散的方法 ……… 6－4－1

6－4－1　模型误差分析 …………………………… 6－4－1
一、模型误差分析的一般方法 ………………… 6－4－1
二、特殊情况的讨论 ……………………………… 6－4－6
6－4－2　泸波的发散现象 ………………………… 6－4－15
6－4－3　克服发散的方法 ………………………… 6－4－16
一、限定下界法 ………………………………… 6－4－16
二、状态扩充法 ………………………………… 6－4－20
三、渐消记（衰减记忆泸波） ………………… 6－4－22
四、限定记忆泸波 ……………………………… 6－4－31
五、自适应泸波 ………………………………… 6－4－35

## §5－9　线性系统的对偶原理

通过上面的各节的讨论，使我们会发现线性系统的一个重要特性，即所谓对偶特性，下面具体讨论。

### 5－9－1　线性系统的可观察性与可控性之间的对偶特性

由第三节的讨论，使我们知道，如果有系统数学模型为

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)u(t) \\ Y(t)=C(t)X(t) \end{cases} \tag{5-9-1}$$

则其是完全状态可观察的充要条件是：可观察性矩阵

$$M(t_0,t_N)=\int_{t_0}^{t_N}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_0)dt \tag{5-9-2}$$

是正定的。它是完全状态可控的充要条件是：可控性矩阵

$$W(t_0,t_N)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)dt \tag{5-9-3}$$

是正定的。

在式（5－9－3）中，如果作下面的代换

$$\begin{cases} \Phi(t_0,t)\Longrightarrow\Phi^T(t,t_0) \\ B(t)\Longrightarrow C^T(t) \end{cases} \tag{5-9-4}$$

则由式（5－3－2）得

$$W(t_0,t_N)=\int_{t_0}^{t_N}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_0)dt$$
$$=M(t_0,t_N) \qquad (5\text{-}9\text{-}5)$$

由此可知，在具有代换关系（5－9－4）时，系统的可控性矩阵与其可观察性矩阵相同，这就是系统的可控性与其可观察性之间的对偶特性。

## 5－9－2 随机最佳估计和确定性最佳控制之间的对偶特性

由第二节的讨论知道，如果有线性系统数学模型

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)u(t) \\ Y(t)=C(t)X(t) \end{cases} \qquad (5\text{-}9\text{-}6)$$

则使二次型性能指标

$$J=X^T(T)S(T)X(T)+\int_{t_0}^{T}\{X^T(t)Q(t)X(t)+u^T(t)R(t)u(t)\}dt$$
$$(5\text{-}9\text{-}7)$$

达到极小的最佳控制矢量 $u^*(t)$ 为

$$u^*(t)=-\Lambda(t)X(t) \qquad (5\text{-}9\text{-}8)$$

式中

$$\begin{cases} \Lambda(t)=R^{-1}(t)B(t)P(t) \\ -\dot{P}(t)=P(t)A(t)+A^T(t)P(t)-P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+Q(t) \end{cases}$$

而如果有线性系统数学模型

$$\begin{aligned}\dot{X}(t)&=A(t)X(t)\\ Y(t)&=C(t)X(t)+V(t)\end{aligned}\qquad(5-9-10)$$

并且

$$E\{\ (t)\}=0,\quad COV\{\omega(t),\omega(\tau)\}=E\{\ (t)\omega^T(t)\}$$
$$=Q(t)\delta(t-\tau);$$

$$E\{V(t)\}=0\quad,\quad COV\{V(t)V(\tau)\}=E\{V(t)V^T(t)\}$$
$$=R(t)\delta(t-\tau)\qquad;$$

$$COV\{\ (t)V(\tau)\}=0\quad,\quad COV\{X(0)\omega(t)\}=0\quad,$$

$$COV\{X(0)V(t)\}=0;$$

$$E\{X(0)\}=\bar{X}(0)=\mu_0\quad,\quad COV\{X(0)X(0)\}$$
$$=Var\{X(0)\}=P(0)$$

时，则使二次型性能指标

$$J=E\{\tilde{X}^T(t)X(t)\}=E\{[X(t)-\hat{X}(t|t)]^T[X(t)-\hat{X}(t|t))\}\qquad(5-9-11)$$

达到极小的状态矢量$X(t)$的最佳估计$\hat{X}(t|t)$为

$$\dot{X}(t|t)=A(t)\hat{X}(t|t)+K(t)[Y(t)-C(t)\hat{X}(t|t))\qquad(5-9-12)$$

式中

$$\begin{aligned}K(t)&=P(t,t)C^T(t)R^{-1}(t)\\ \dot{P}(t,t)&=A(t)P(t,t)+P(t,t)A^T(t)\\ &\quad-P(t,t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t,t)+Q(t)\end{aligned}\qquad(5-9-13)$$

在式（5－9－13）中，如果作如下面的代换

$$A(t) \Rightarrow A^T(t)$$
$$C(t) \Rightarrow B^T(t) \qquad (5-9-14)$$

则得

$$K^T(t)=(R^{-1}(t))^T B^T(t)P^T(t,t) \qquad (5-9-15)$$
$$\dot{P}^T(t)=P^T(t,t)A(t)+A^T(t)P^T(t,t)$$
$$-P^T(t,t)B(t)(R^{-1}(t))^T B^T(t)P^T(t,t)$$
$$+Q^T(t)$$

考虑到 $P(t,t)$ 是对称矩阵，$R^{-1}(t)$ 和 $Q(t)$ 也是对称矩阵，则式（5－9－14）可改写成：

$$K^T(t)=R^{-1}(t)B^T(t)P(t,t) \quad ; \qquad (5-9-16)$$
$$\dot{P}(t,t)=P(t,t)A(t)+A^T(t)P(t,t)$$
$$-P(t,t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t,t)+Q(t)$$

比较式（5－9－9）和式（5－9－15）得：

$$K^T(t)=A(t) \quad ; \qquad (5-9-17)$$
$$\dot{P}(t,t)=-\dot{P}(t)$$

由此可知，当具有代换关系（5－9－14）时，我们可由随机最佳估计问题的解，求得确定性最佳控制问题的解。这就是随机最佳估计和确定性最佳控制之间的对偶特性。

## 5－9－3　对偶系统和对偶原理

上述代换关系（5－9－4）和（5－9－14）、以及 $\dot{P}(t_1,t)=-\dot{P}(t)$ 实际上是用系统

$$\dot{Z}(t)=-A^T(t)Z(t)-C^T(t)\xi(t)-n(t)$$

$$\eta(t)=B^T(t)Z(t)+m(t)+D^T(t)\xi(t)$$

（5－9－18）

代替了系统

$$\begin{aligned}\dot{X}(t)&=A(t)X(t)+B(t)u(t)+w(t)\\ Y(t)&=C(t)X(t)+V(t)+D(t)u(t)\end{aligned}\qquad(5-9-19)$$

因为系统（5－9－18）是由系统（5－9－19）经过下面二个变化得到的：

(1)用伴随自由系统代替原自由系统，即用

$$\dot{Z}(t)=-A^T(t)Z(t)$$

代换

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)$$

(2)互换输入输出约束，即用 $-C^T(t)$ 代替 $B(t)$，用 $B^T(t)$ 代换 $C(t)$。

系统（5－9－18）和（5－9－19）分别画在图5－9－1上。

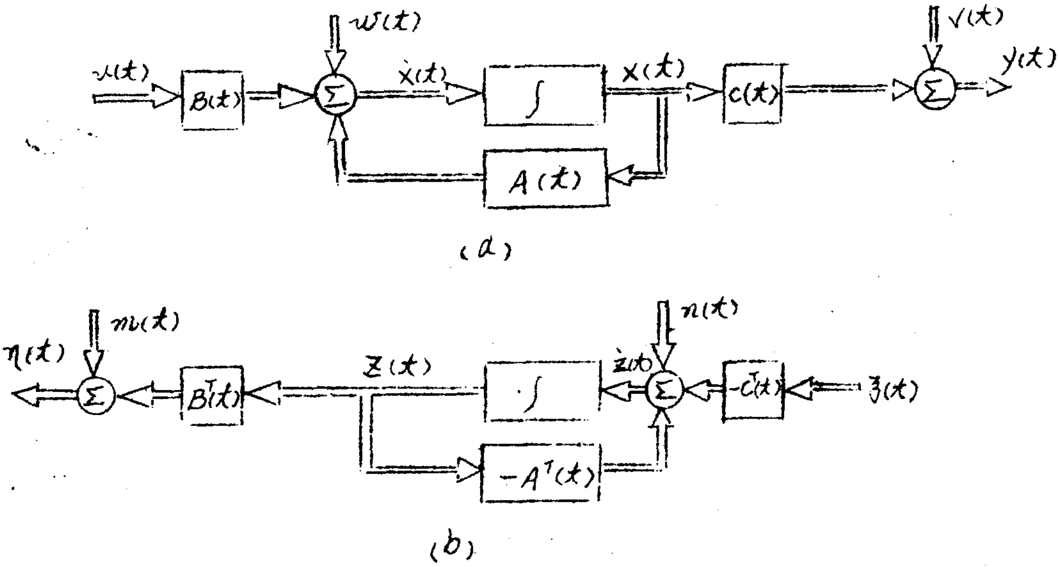


图 5—9—1：(a)系统（5—9—19），

(b)系统（5—9—18）

由图 5—9—1 可见，系统（5—9—18）的结构图可由系统（5—9—19）的结构通互换所有轨入轨出，倒转时间方向（$\dot{Z}(t)$是负，而$\dot{X}(t)$是正）而得到。系统（5—9—18）称为系统（5—9—19）的对偶系统。由对偶系统方程（5—9—18）可得到其转移矩阵为：

$$\Psi(t, t_0) = \Phi^T(t_0, t) \qquad (5\text{—}9\text{—}20)$$

式中

$\Psi(t, t_0)$　　系统（5—9—18）转移矩阵；

$\Phi(t, t_0)$　　系统（5—9—9）转移矩阵。

由对偶系统的特点和式（5—9—5）和（5—9—17）可以

得到对偶原理：系统（5－9－19）为完全状态可观察（可控）的充要条件是其对偶系统（5－9－18）完全状态可控（可观察）的充要条件。也就是说，系统（5－9－19）为完全状态可观察（可控）的充要条件是：其对偶系统（5－9－18）为完全状态可控（可观察）的；确定性系统（当系统（5－9－19）中$w(t)$和$V(t)$等于零时）的最佳控制问题等阶于它的对偶系统（5－9－18）的随机最佳估计问题。综上所述，线性系统的可观察性与可控性，估计与控制互为对偶。

上述对偶原理在设计系统时，与分解原理一起是很有用的。

### 5－9－4　线性系统的对偶关系式

线性系统的可观察性与可控性，估计与控制之间的对偶特性，可以由严格的数学关系式来描述的。当系统（5－9－19）和其对偶系统（5－9－18）的轨入随机干扰$w(t)$、$n(t)$和观察误差$V(t)$和$m(t)$为零时，求它们状态矢量$Z(t)$和$X(t)$的内积对时间的导数得：

$$\frac{d}{dt}(Z(t),X(t))=\frac{d}{dt}\{Z^T(t)X(t)\}$$

$$=\dot{Z}^T(t)X(t)+Z^T(t)\dot{X}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&=[-A^T(t)Z(t)]^T X(t)+Z^T(t)A(t)X(t)-[C^T(t)\xi(t)]^T X(t) \\
&\quad +Z^T(t)B(t)u(t) \\
&=-\xi^T(t)C(t)X(t)-\xi^T(t)D(t)u(t)+\xi^T(t)D(t)u(t) \\
&\quad +Z^T(t)B(t)u(t) \\
&=-\xi^T(t)[C(t)X(t)+D(t)u(t)]+[D^T(t)\xi(t) \\
&\quad +B^T(t)Z(t)]^T u(t) \\
&=-\xi^T(t)\cdot Y(t)+\eta^T(t)u(t) \qquad (5-9-21)
\end{aligned}
$$

由此得：

$$
Z^T(t_1)X(t_1)-Z^T(t_0)X(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}[\eta^T(t)u(t)-\xi^T(t)Y(t)]dt \qquad (5-9-22)
$$

关系式（５－９－２２）是系统（５－９－１９）和其对偶系统（５－９－１８）之间存在的一个恒等关系，并称为系统（５－９－１９）和其对偶系统（５－９－１８）之间的对偶关系式。

上述线性系统的对偶特性，可用对偶关系式（５－９－２２）直接推出，下面以可控性和可观察性之间的对偶特性为例说明。

设系统（５－９－１８）是完全状态可控的，并设 $u(t)\equiv 0$ 则这时对偶关系式（５－９－２２）就变为

$$Z^T(t_1)X(t_1)-Z^T(t_0)X(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}-\xi^T(t)Y(t)dt$$

(5—9—23)

由于假设系统(5－9－18)是完全状态可控的，因此总可选择合理的$\xi^T(t)$，把给定的$Z^T(t_0)$在时刻$t_1$引到原点，即使得$Z(t_1)=0$，设$n$个控制为$\xi_1^T(t)$，$\xi_2^T(t)$，…$\xi_n^T(t)$。并且$\xi_i^T(t)$能把状态

$$\begin{cases} Z_i^T(t_0)=[Z_{i1}(t_0),Z_{i2}(t_0),\cdots,Z_{in}(t_0)] \quad ; \\ Z_{ij}(t_0)=\delta_{ij} \end{cases} \qquad (5\text{—}9\text{—}24)$$

引到零状态，即有

$$-Z_i(t_0)X(t_0)=-\int_{t_0}^{t_1}\xi_i^T(t)Y(t)dt$$

(5—9—25)

再令

$$H(t)=\begin{bmatrix}\xi_1^T(t)\\ \xi_2^T(t)\\ \vdots \\ \xi_n^T(t)\end{bmatrix} \qquad (5\text{—}9\text{—}26)$$

则得

$$-\begin{bmatrix} Z_1^T(t_0) \\ Z_2^T(t_0) \\ \vdots \\ Z_n^T(t_0) \end{bmatrix} X(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} H(t)Y(t)d\tau$$

由式（5－9－24）可知：

$$-\begin{bmatrix} Z_1^T(t_0) \\ Z_2^T(t_0) \\ \vdots \\ Z_n^T(t_0) \end{bmatrix} = -I_{n\times n}$$

因此最后得

$$X(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} H(t)Y(t)dt \qquad (5-9-27)$$

式（5－9－27）说明，如果系统（5－9－18）是完全状态可控的，那末系统（5－9－19）的任意初始状态 $X(t_0)$ 就可由它根据系统的轨出唯一地确定，因此系统（5－9－19）就必是完全状态可观察的。

相反，设系统（5－9－18）是完全状态可观察的，并设 $\xi^T(t)\equiv 0$，这时对偶关系式（5－9－22）就变为：

$$Z^T(t_1)X(t_1) - Z^T(t_0)X(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \eta^T(t)u(t)dt \qquad (5-9-28)$$

由于假设系统（$5-9-18$）是完全状态可观察的，因此对于$n$个独立起始状态$Z_i^T(t_0)$　（$i=1,2,\cdots,n$），总有$n$个独立的轨出$\eta_i^T(t)$存，（否则就不能由$\eta_i^T(t)$唯一地确定$Z_i^T(t_0)$），因此有

$$\begin{cases} Z_i^T(t_1)X(t_1)-Z_i^T(t_0)X(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\eta_i^T(t)u(t)dt \\ i=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{5-9-29}$$

将上式写成矩阵形式，得

$$\begin{bmatrix} Z_1^T(t_1) \\ Z_2^T(t_1) \\ \vdots \\ Z_n^T(t_1) \end{bmatrix} X(t_1)=\begin{bmatrix} Z_1^T(t_0) \\ Z_2^T(t_0) \\ \vdots \\ Z_n^T(t_0) \end{bmatrix} X(t_0) + \int_{t_0}^{t_1}\begin{bmatrix} \eta_1^T(t) \\ \eta_2^T(t) \\ \vdots \\ \eta_n^T(t) \end{bmatrix} u(t)dt \tag{5-9-30}$$

令

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} \eta_1^T(t) \\ \eta_2^T(t) \\ \vdots \\ \eta_n^T(t) \end{bmatrix} \tag{5-9-31}$$

并设$Z_i^T(t_0)$具有式(5－9－24)形式，则得

$$\Psi(t_1)X(t_1)=X(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)u(t)dt \qquad (5-9-32)$$

式中

$$\Psi(t_1)=\begin{bmatrix} Z_1^T(t_1) \\ Z_2^T(t_1) \\ \vdots \\ Z_n^T(t_1) \end{bmatrix} \qquad (5-9-33)$$

由于$\Phi(t)$的行矢量$\eta_i^T(t)$，$i=1,2,\cdots,n$是线性独立的，因此$\Phi^T(t)\Phi(t)$是满秩的，这样就有

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t)\Phi^T(t)dt \qquad (5-9-34)$$

是非异的，因此，如果设

$$u_0(t)=-\Phi^T(t)W^{-1}(t_0,t_1)X(t_0) \qquad (5-9-35)$$

则将式(5－9－35)代入式(5－9－32)得：

$$\begin{aligned}&\Psi(t_1)X(t_1)\\ &=X(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t)\Phi^T(t)W^{-1}(t_0,t_1)X(t_0)dt\\ &=X(t_0)-\int_{0}^{t_1}\Phi(T)\Phi^T(t)dtW^{-1}(t_0,t_1)X(t_0)\\ &=X(t_0)-W(t_0,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)X(t_0)=0\end{aligned}$$

(5－9－36)

由于$\Psi(t_1)$是由$Z_i^T(t_1)$所排成的矩阵（见式（5—9—33））而$Z_i^T(t_1)$是在独立起始条件$Z_i^T(t_0)$（见式（5－9－24））时系统（5－9－18）的轫出，由此可知$Z_i^T(t_1)$也是独立矢量，所以$\Psi(t_1)$是非异的（实际这时的$\Psi(t_1)$是系统（5—9—18）的转移矩阵），这样要使（5－9－36）成立，就必需有

$$X(t_1)=0 \qquad (5\text{—}9\text{—}37)$$

这就是说，如果（5－9－18）是完全状态可观察的，那末任何给定起始状态矢量$X(t_0)$总有形如式（5－9－35）的控制矢量$u_0(t)$，在$t_1$时刻，将$X(t_0)$引到零状态，即$X(t_1)=0$，因此系统是完全状态可控的。

这样，我们就直接从对偶关系式（5－9－22）推得了线性系统的可观察性与可控性之间的对偶特性。从对偶关系式（5—9—22）还可直接推得线性系统的最佳估计与最佳控制之间的对偶特性，除此之外，也可直接推得有限时间调节与观察口之间的对偶特性，这里从略。

上述线性系统的可观察性与可控性之间的对偶特性，在线性系统描述的规范形式，和线性系统的实现那两节，读者只要比较一下结果，就可看得非常明显。