Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 48

Übungsaufgaben

Aufgabe 48.1. Es seien $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen $\neq 0$. Zeige, dass diese genau dann äquivalent bezüglich der durch die Untergruppe $(\mathbb{Q}^\times, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot)$ gegebenen Äquivalenzrelation sind, wenn es eine reelle Zahl $t \neq 0$ und ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $r = bt$ und $s = at$ gibt.

Aufgabe 48.2. Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Man mache sich klar, dass in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ die Gleichheit $[r] = [s]$ für zwei reelle Zahlen r, s genau dann gilt, wenn die Differenz $r - s$ eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 48.3. Für reelle Zahlen r, s setzen wir $r \sim s$, wenn es rationale Zahlen $u, v \in \mathbb{Q}$ mit $u \neq 0$ derart gibt, dass

$$r = us + v$$

ist.

(1) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist.
(2) Bestimme die Äquivalenzklasse zu $\frac{3}{7}$.
(3) Man gebe ein Beispiel für zwei reelle Zahlen, die nicht kommensurabel sind, die aber unter $\sim$ äquivalent sind.

Aufgabe 48.4.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei u_i, $i \in I$, eine Basis von U und v_j, $j \in J$, eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Gesamtfamilie $u_i, i \in I, v_j, j \in J$, genau dann eine Basis von V ist, wenn $[v_j]$, $j \in J$, eine Basis des Restklassenraumes V/U ist.

Aufgabe 48.5. Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Zeige

$$V_{i+1}/V_i \cong K$$

für $i = 0, \ldots, n-1$.

Aufgabe 48.6. Der K-Vektorraum V sei die direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2 und es seien $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ Untervektorräume. Zeige

$$V_1 \oplus V_2/\left(U_1 \oplus U_2\right) \cong V_1/U_1 \oplus V_2/U_2.$$

Man interpretiere die Aussage der folgenden Aufgabe im Kontext des Faktorisierungssatzes.

Aufgabe 48.7.*

Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K mit dem Rang r. Zeige, dass es eine $r \times n$-Matrix A und eine $m \times r$-Matrix B, beide mit dem Rang r, mit $M = B \circ A$ gibt.

Aufgabe 48.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum und es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Zeige, dass dies eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\varphi_{V/U} \colon V/U \longrightarrow V/U$$

auf dem Restklassenraum V/U mit der Eigenschaft induziert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/U & \stackrel{\varphi_{V/U}}{\longrightarrow} & V/U \end{array}$$

kommutiert.

Aufgabe 48.9. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Es sei $u_1, \ldots, u_s$ eine Basis von U und $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ eine Basis von V, bezüglich der φ durch die Matrix M beschrieben werde. Durch welche Matrix wird die in Aufgabe 48.8 definierte lineare Abbildung

$$\varphi_{V/U} \colon V/U \longrightarrow V/U$$

bezüglich der Basis $[v_1], \ldots, [v_s]$ von V/U beschrieben?

Zur folgenden Aufgabe vergleiche man Aufgabe 16.22.

Aufgabe 48.10. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Es sei φ_U die Einschränkung von φ auf U und

$$\varphi_{V/U} \colon V/U \longrightarrow V/U$$

die in Aufgabe 48.8 definierte lineare Abbildung. Zeige

$$\det \varphi = \det \varphi_U \cdot \det \varphi_{V/U} .$$

Aufgabe 48.11. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Es sei φ_U die Einschränkung von φ auf U und

$$\varphi_{V/U} \colon V/U \longrightarrow V/U$$

die in Aufgabe 48.8 definierte lineare Abbildung. Zeige, dass für das charakteristische Polynom die Beziehung

$$\chi_\varphi = \chi_{\varphi_U} \cdot \chi_{\varphi_{V/U}}$$

gilt.

Aufgabe 48.12. Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}$ der reelle Vektorraum aller Folgen. Zeige, dass die folgenden Teilmengen Untervektorräume sind.

(1) Die Menge der konstanten Folgen.
(2) Die Menge $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}_+)}$ der Folgen, für die nur endlich viele Folgenglieder von 0 verschieden sind.
(3) Die Menge F der Folgen, die bis auf endlich viele Folgenglieder konstant sind.
(4) Die Menge E der Folgen, die nur endlich viele verschiedene Werte haben.
(5) Die Menge der konvergenten Folgen.
(6) Die Menge N der Nullfolgen.

Welche Beziehungen gelten zwischen diesen Untervektorräumen?

Aufgabe 48.13. Wir betrachten die beiden reellen Folgen

$$x_n = \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } n \text{ gerade}\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und

$$y_n = \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } n \text{ ungerade}\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und wir verwenden einige Bezeichnungen aus Aufgabe 48.12.

(1) Zeige, dass die beiden Folgen x_n und y_n in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/\mathbb{R}^{(\mathbb{N}_+)}$ linear unabhängig sind.
(2) Zeige, dass die beiden Folgen x_n und y_n in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/F$ linear abhängig sind.
(3) Wie sieht es in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/N$ aus?

Aufgabe 48.14. Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}$ der reelle Vektorraum aller konvergenten Folgen und

$$U \subseteq W$$

der Untervektorraum der Nullfolgen. Zeige

$$W/U \cong \mathbb{R}.$$

AUFGABE 48.15. Zeige, dass durch die Abbildung

$$S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\ (u,t) \longmapsto ue^t,$$

ein Gruppenisomorphismus gegeben ist. Wie ist jeweils die Gruppenstruktur gegeben? Skizziere, welche markanten Teilmengen des Zylinders und der gelochten Ebene sich unter diesem Isomorphismus entsprechen.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 48.16. (2 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und den Untervektorraum

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}.$$

Zeige, dass im Restklassenraum $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ zwei komplexe Zahlen genau dann gleich werden, wenn ihre Imaginärteile übereinstimmen.

AUFGABE 48.17. (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2, U seien Untervektorräume. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V/U$$

die kanonische Projektion. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Für die Bildräume gilt
$$\varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) = 0.$$
(2) Es ist
$$U_1 \cap (U_2 + U) \subseteq U.$$
(3) Es ist
$$(U_1 + U) \cap (U_2 + U) \subseteq U.$$

AUFGABE 48.18. (4 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ und es sei $T \subseteq V$ der Ausartungsraum. Zeige, dass auf dem Restklassenraum V/T ein nichtausgeartete symmetrische Bilinearform $\langle -, - \rangle'$ mit

$$\langle [v], [w] \rangle' = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in V$ existiert.

AUFGABE 48.19. (6 (1+3+2) Punkte)

Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V und es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir definieren auf E eine Relation $\sim$ durch

$$P \sim Q \text{ genau dann, wenn } \exists v \in U \text{ mit } P = Q + v\,.$$

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Zeige, dass $F := E/\sim$ ein affiner Raum über dem Restklassenraum V/U ist.
(3) Zeige, dass die kanonische Projektion

$$E \longrightarrow E/\sim$$

eine affine Abbildung ist.