Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 55

Übungsaufgaben

AUFGABE 55.1. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K und es seien $L, L_1, \ldots, L_m$ Linearformen auf V. Zeige, dass die Beziehung

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{kern} L_i \subseteq \operatorname{kern} L$$

genau dann gilt, wenn L zu dem von den $L_1, \ldots, L_m$ erzeugten Untervektorraum (im Dualraum) gehört.

AUFGABE 55.2. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x,y) = 5x + 3y$$

auf der Ellipse

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

AUFGABE 55.3. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x,y) = x^2y^3$$

unter der Nebenbedingung

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 7y = 100 \right\}.$$

AUFGABE 55.4.*

Für eine Party soll eine Bowle gemischt werden, wobei 100 Euro zur Verfügung stehen. Die Zutaten sind Orangensaft, Erdbeeren, Rum und Sekt. Die Preisfunktion ist

$$\mathbb{R}_+^4 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z,w) \longmapsto x + y + 5z + 3w.$$

Die Stimmungsfunktion h wird durch

$$h\colon \mathbb{R}_+^4 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z,w) \longmapsto x^3y\sqrt{z}w,$$

beschrieben. Bei welchem Mischungsverhältnis wird die Stimmung optimiert? (Es genügt, den (die) kritischen Punkt(e) für die Lagrange-Bedingung auszurechnen).

AUFGABE 55.5. Man beweise die Formel aus Beispiel 55.6, indem man den durch die Linearform f gegebenen affinen Unterraum linear parametrisiert und das Optimierungsproblem für h auf dem zugehörigen $\mathbb{R}^{n-1}$ betrachtet.

Man löse die folgende Aufgabe direkt und als eine Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen.

Aufgabe 55.6. Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

Aufgabe 55.7. Bestimme sämtliche Tangenten an die Hyperbel

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}.$$

Aufgabe 55.8. Zeige, dass durch

$$[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(\cos^3 t,\ \sin^3 t\right),$$

eine bijektive Parametrisierung der Standardastroide

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x^2 + y^2 - 1\right)^3 + 27x^2y^2 = 0\right\}$$

gegeben ist.

Aufgabe 55.9. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x^2 + y^2 - 1\right)^3 + 27x^2y^2 = 0\right\}.$$

Aufgabe 55.10. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x^2 + y^2 - 1\right)^3 + 27x^2y^2 = 0\right\}$$

unter Verwendung der durch $(x, y) = \left(\cos^3 t,\ \sin^3 t\right)$ gegebenen Parametrisierung (siehe Aufgabe 55.8) von M.

Aufgabe 55.11. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

auf

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20\right\}.$$

Aufgabe 55.12. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$$

auf

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

Aufgabe 55.13. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

auf

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Aufgabe 55.14.*

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x,y) = 3x - 7y$$

auf der Ellipse

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 = 1\right\}.$$

Aufgabe 55.15.*

Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

a) Zeige, dass g in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein lokales Maximum besitzt, wenn die Einschränkung der Funktion

$$y\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto y,$$

auf den Graphen

$$\Gamma = \{(x,y) \mid y = g(x)\}$$

im Punkt $(a, g(a))$ ein lokales Maximum besitzt.

b) Wie steht in dieser Situation der Satz über Extrema mit Nebenbedingungen mit dem eindimensionalen notwendigen Kriterium für ein lokales Extremum in Verbindung?

c) Man gebe ein Beispiel von zwei stetig differenzierbaren Funktionen $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ derart, dass $(Df)_P$ und $(Dh)_P$ linear abhängig sind und dass h auf der Faser zu f durch P kein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 55.16.*

Es soll eine (quaderförmige) Schachtel mit den Seitenlängen $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ angefertigt werden, deren Inhalt gleich

$$abc = 1000\,\mathrm{cm}^3$$

sein soll.

a) Wie müssen a, b, c, gewählt werden, damit der Materialaufwand für die sechs Seiten kritisch (also extremal sein könnte) wird?

b) Ist der Materialaufwand unter der in a) beschriebenen Situation minimal oder maximal?

c) Für die Luxusversion der Schachtel aus Teil a) soll die kleinste Seitenfläche (vorne und hinten) mit einer Goldfolie bedeckt werden. Die Materialkosten für eine solche Seite sind dreimal so hoch wie für eine normale Seite. Für welche Seitenlängen sind nun die Materialkosten extremal?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 55.17. (4 Punkte)

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y, z) \;=\; 3x + 4y + 2z$$

auf dem Ellipsoid

$$M \;=\; \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 4\right\}.$$

Aufgabe 55.18. (4 Punkte)

Bestimme sämtliche Tangenten an die Astroide

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x^2 + y^2 - 1\right)^3 + 27x^2y^2 = 0\right\}.$$

Aufgabe 55.19. (6 (1+2+3) Punkte)

Wir betrachten im Einheitswürfel $E = [-1, 1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ eingeschriebene Vierecke mit den Eckpunkten $(-1 \leq a, b \leq 1)$

$$(1, a, -1),\ (b, 1, -1),\ (-1, -a, 1),\ (-b, -1, 1)\,.$$

(1) Zeige, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.
(2) Unter welcher Bedingung an a, b handelt es sich um ein Quadrat?
(3) Für welche a, b erhält man ein Quadrat mit maximalem Flächeninhalt?

Aufgabe 55.20. (6 Punkte)

Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen derart, dass die Nullfasern $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid f(x, y) = 0\}$ und $N = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid g(x, y) = 0\}$ disjunkt sind und beide nur reguläre Punkte besitzen. Es sei

$$(P, Q) \in M \times N \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

ein Punktepaar, für das der Abstand zwischen solchen Punkten minimal wird. Zeige, dass die zugehörigen Tangenten parallel sind.

Abbildungsverzeichnis