### 必ズ記憶スベキ

# 立体幾何定理及ビ問題

× 1. 二平面ノ交リハ直線ナリ.

2. 三平面ノ交リハ,一線トナルカ,一點ニ會スルカ,或ハ互ニ平行ス.

× 3. 平面上ノ一線ニ平行ナル一線ハ其平面ニ平行ナリ

4. 二ツノ平行平面ヲ他ノ一ツノ平面ニテ截ル片ハ其交リハ平行ス.

× 5. 二雙ノ相交ル二線ガ平行スレバ,其線ニテ決定セラレタル平面ハ平行ス.

× ○ 6. 平面上ノ相交ル二線ニ夫々垂直ナル直線ハ,其平面ニ垂直ナリ.

7. 斜線ハ平面上ノ唯一線ニ直立ス.

8. 一線ガ或平面ニ直立スレバ,之ニ平行シタル線モ亦此平面ニ直立ス.

9. 一線上ノ一點ヨリ之ニ垂直ニ作リタル諸線ハ,同一平面上ニアリ.

10. 同平面上ニアラサル二線ニ共通ナル垂線ハ唯一ツアリ,而テ此距離最モ短シ.

11. 三垂線ノ理 P平面外ノ一點 A ヨリ其平面ニ垂線 AN ヲ作リ,其垂足 N ヨリ,P 平面上ノ任意線

LM ニ垂線 NB ヲ作リ,A ト B トヲ結ベハ AB ハ LM ニ垂直ナリ.

逆ニ,P 平面外ノ一點 A ヨリ其面上ノ任意直線 LM ニ垂線 AB ヲ作リ,其垂足 B ヨリ其平面 P 上ニ於テ更ニ LM ニ垂線 BN ヲ作リ,A ヨリ BN ニ垂線 AN ヲ作レバ AN ハ平面 P ニ直立ス.

× 12. 三面体角ニ於テ,其二平面角ノ和ハ殘ル一平面角ヨリ大ナリ.

× 13 凸立体角ヲナス平面角ノ和ハ四直角ヨリ[illegible]ナリ.

14. 二ツノ三面体角ニ於テ,其平面角夫々等シキ片ハ重子合ハスコヲ得ルカ,或ハ又對稱ナリ.

15. 平行六面体ノ對角線ハ一點ニ會ス.

16. 直六面体ノ一對角線上ノ正方形ハ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ正方形ノ和ニ等シ.

○ 17. 四面体ノ,(1)相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三線ハ一點ニ會ス. (2)各頂點ヲ之ニ對スル面ノ重心ニ結ビタル四線ハ一點ニ會シ,且ツ比 3:1 ニ分カタル. (3)各面ノ外心ヨリ其面ニ作リタル四線ハ一點ニ會シ,此會點ハ四頂點ヨリ等距ナリ. (4)各二面角ノ二等分面ハ一點ニ會シ,此會點ハ四面ヨリ等距ナリ.

18. 三直三面角ヲ平面ニテ截ル片,其截ロノ三角形ノ

垂心ハ，其項點ヨリノ垂足ナリ．(三垂線ノ理ニ依ル)．

**19．** 正四面体ノ高サハ，其足ヨリ他ノ一ツノ面ニ引ケル垂線ノ三倍ナリ．

**20，** 正多面体ハ五種ヨリ多カラズ．

**21．** 高サ及ビ底面相等シキ平行六面体（或ハ柱体）ハ其体積相等シ．

**22．** 三角柱体ハ三ツノ相等シキ三角錐体ニ分ツヿヲ得（此証明法ヲ記憶セヨ）．由テ三角錐体（一般ニ錐体）ノ体積ハ，其底面積ニ高サノ三分ノ一ヲ乗ジタルモノニ等シ．

**23．** 相似多面体ノ体積ハ對應一邊ノ三乗比ナリ．

**24．** 球ノ外面積ハ $4\gamma^2\pi$ ナリ．

附言　之ヲ暗記スルニハ，球ノ外面積ハ之ヲ容ルヽ所ノ圓柱ノ傍面積 ($2\gamma\pi\times2\gamma$) ニ等シト心得ルヲ可トス．

**25．** 球ノ体積ハ $\frac{3}{4}\gamma^3\pi$ ナリ．

附言　之ヲ暗記スルニハ，球ノ体積ハ同高同徑ヲ有スル圓柱ト圓錐トノ体積ノ差 $\gamma^2\pi\times2\gamma-\frac{1}{3}\times\gamma^2\pi\times2\gamma$ ニ等シト考フルモ可ナリ．

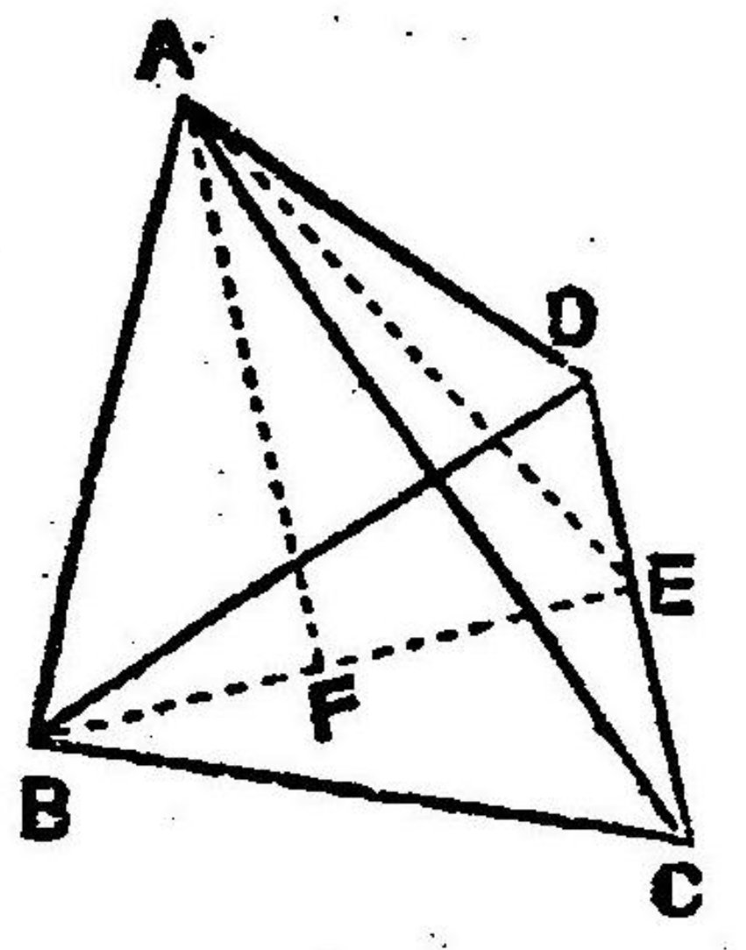
注意　球ノ面積或ハ体積ヲ求ムル等ノ法ハ受驗ニ必要ナラズト雖モ，其面積或ハ体積ヲ求ムル公式ハ必ズ暗記ヲ怠ルヿ勿レ．　其他尚ホ截頭錐体ノ面積及ビ体積ヲ求ムル法ハ教科書ニ就テ研究シ置クノ必要アリ．

### 立体幾何
# 試驗問題解

注意　立体幾何ノ試驗題ハ多ク以上ニ掲ゲタル，定理或ハ問題ノ中ヨリ出ヅルヲ常トスレモ，近來ノ流行ハ次ニ掲ゲタル試驗問題及ビ其解ヲ見バ一班ヲ窺フニ足ラン．

(1)　正四面体ノ稜ノ長サ $a$ 尺ナルモノヽ體積ヲ求ム．

（解）　正四面体ヲ A－BCD トス，DC ノ中點ヲ E トシ BE, AE ヲ結ベ，A ヨリ底面 BCD ニ垂線 AF ヲ下セバ其足ハ底面ナル三角形ノ重心ニ落ツ，而シテ三角形 BCD ハ正三角形ナルガ故ニ F 點ハ BE ヲ二ト一トノ比ニ分ツ



今一邊ノ長サ $a$ 尺ナルトキ　此立体積ヲ V トス

$$BF=BE\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore\ \overline{AF}^2=\overline{AB}^2-\overline{BF}^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=\frac{2}{3}a^2,$$

$$V=\frac{1}{3}\times AF\times\triangle BCD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}a^2$$

**(2)** I.　直圓錐体ノ底圓ノ半徑 $r$. 側傍ノ長サ $l$ ヲ知リテ（A）直圓錐ノ傍面積,（B）直圓錐体ノ体積ヲ表ハス公式ヲ記セ.

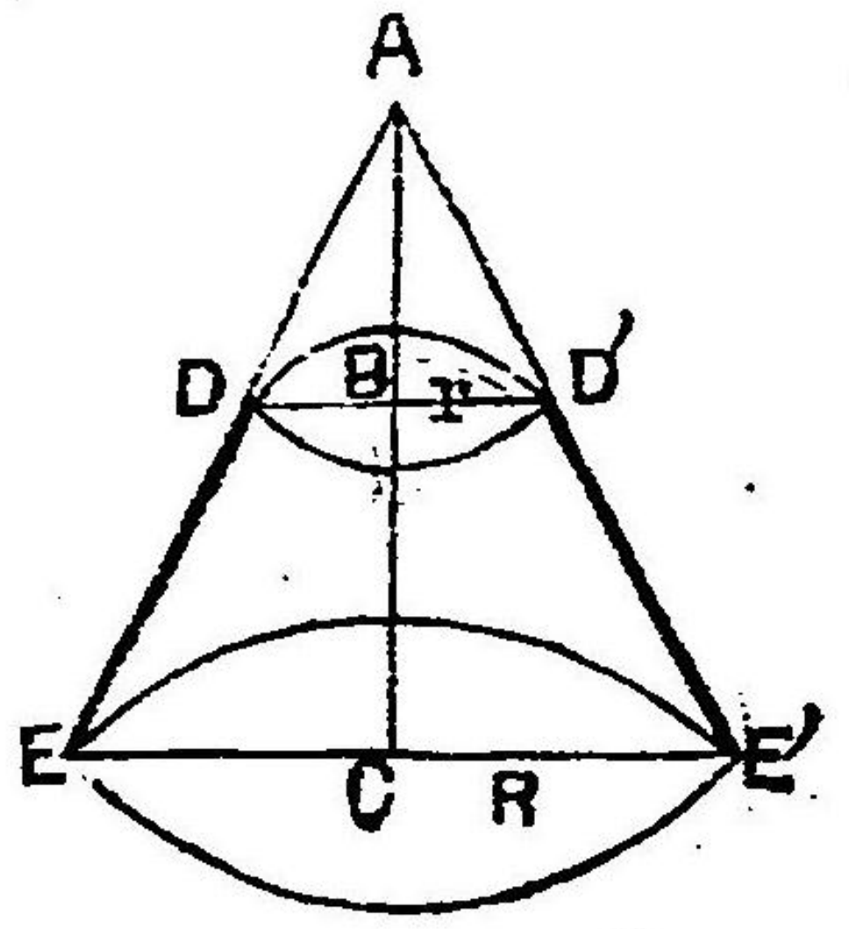
II.　球ノ半徑 $r$ ヲ知リテ（C）球ノ外面積.（D）球ノ体積ヲ表ハス公式ヲ記セ.

III.　直圓錐体ノ体積ヲ知リテ截頭錐ノ体積 $\frac{1}{3}\pi h\times(R^2+Rr+r^2)$ ナルコトヲ証セヨ. 但シ截頭錐ノ上下両圓ノ半徑ヲ $r$, 及ビ R トシ, 其高サヲ $h$ トス.

**（解）** I.（A）$lr\pi$,　（B）$\frac{1}{3}r^2\pi\sqrt{l^2-r^2}$.

II.（C）　$(2r)^2\pi$.　（D）　$\frac{4}{3}r^3\pi$.

III.　截頭圓錐体ヲ DEE′D′ トス, 今此直圓錐ヲ完成セシメ其頂點ヲ A トセヨ, 然ルトキハ求ムル所ノ体積 V ハ次ノ如シ



$$V=(A-EE')-(A-DD')$$

然ルニ $A-EE'=\frac{1}{3}\pi R^2(h+AB)$

$$A-DD'=\frac{1}{3}\pi r^2AB$$

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\pi\{R^2(h+AB)-r^2AB\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $\dfrac{AB+h}{R}=\dfrac{AB}{r}=\dfrac{(AB+h)-AB}{R-r}=\dfrac{h}{R-r}$

$$\therefore\ AB=\frac{r}{R-r}h.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ノ右邊ヲ (1) 式中ニ置キ代フルトキハ

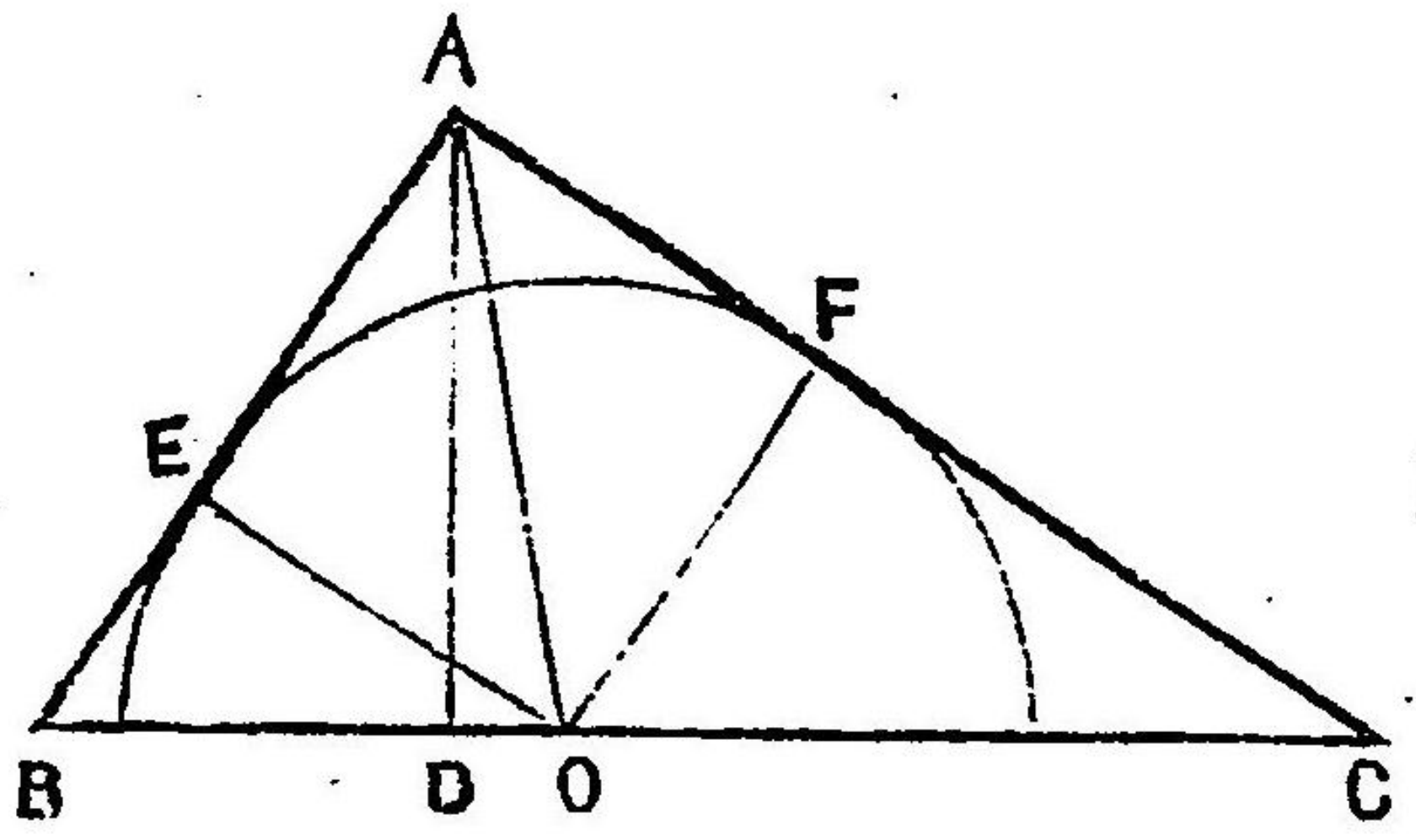
$$V=\frac{1}{3}\pi\left\{R^2\left(h+\frac{r}{R-r}h\right)-r^2\frac{r}{R-r}h\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left\{R^2+\frac{R^2r}{R-r}-\frac{r^3}{R-r}\right\}=\frac{1}{3}\pi h\left\{\frac{R^3-R^2r+R^2r-r^3}{R-r}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\frac{R^3-r^3}{R-r}=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2.).$$

**(3)**　直角三角形ノ直角ニ隣レル二邊夫々四尺及ビ五尺ナリ, 斜邊ヲ軸トシテ此三角形ヲ回轉スルトキ生ズル立体ノ体積及ビ此立体ニ内接スル球ノ体積ヲ計算セヨ.

**（解）**　Aガ直角ナル直角三角形 ABC ニ於テ



$AB=4$,

$AC=5$,

ナルトキ

$BC=\sqrt{4^2+5^2}$

$=\sqrt{41}$,

A ヨリ斜邊ニ下ス垂線ヲ AD トスレバ　AD.BC, AB.AC 何レモ三角形ノ面積ノ二倍ヲ表ハスヲ以テ相等シ

因テ　$AD.\sqrt{41}=4.\times5$,　$\therefore$　$AD=20/\sqrt{41}$,

偖. 三角形ガ回轉シテ生ズル立体ハ二ツノ直角三角形 ABD, ADC ガ BC ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル二ツノ直圓錐ノ和ナリ因テ其躰積ハ

$$\tfrac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.BD+\tfrac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.CD=\tfrac{1}{3}\pi\overline{AD}^2(BD+CD)$$

$$=\tfrac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.\ BC=\tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{20}{\sqrt{41}}\right)^2\sqrt{41}=\frac{400\sqrt{41}\pi}{123}$$

$=65.42$ 立方尺．

次ニ此立体ニ内接スル球ノ体積ヲ計算セン

今 BC ノ上ニ中心ヲ有シ AB, AC ニ切スル半圓ヲ畫キ，之レガ BC ヲ軸トシテ三角形ト共ニ回轉シテ生ズル球ハ明カニ内接スル球ナリ．因テ此半圓ノ半徑ヲ計算スレバ之ニヨリテ其体積ヲ求ムルヿヲ得．

中心 O ヲ切點 D,E ニ連結スルトキ AC.OF, AB.OE ハ夫々三角形AOC, AOBノ面積ノ二倍ヲ表ハス．因テ其和ハ三角形 ABC ノ面積ノ二倍ナリ．故ニ

$$AC\cdot OF+AB.OE(=OF)=AB.AC,$$

$$\therefore\quad (AC+AB).OF=AB.AC,$$

$$OF=\frac{20}{9}$$

因テ求ムル所ノ球ノ体積ハ

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{20}{9}\right)^3=\frac{32000\pi}{2187}=45.97\ \text{立方尺}.$$

# 三角法試驗ノ受方

三角法ノ試驗ヲ受ケントスルニハ，先ヅ此學問ノ組立ヨリ呑ミ込ミテ，平生ニハ如何ニ之ヲ研究シ置キ，受驗ノ間際ニハ如何ニ豫備スベキカヲ心得ザルベカラズ．

**三角法** ハ一口ニ言ヘバ三角形ノ邊ト角トヲ數ニテ表ハシ之ヲ代數式ニテ結ビ合セタル學問ナレ𪜈，其邊ト角トハ固ト異種ノ量ニテ同一ノ計算法ヲ施シ得ベキモノニアラザルヲ以テ，「直三角形ノ斜邊ヲ以テ垂線ヲ除シタル値ヲ其垂線ノ對角ノ正弦ト云フ」ト云ヘル如キ特別ノ規約ヲ作リテ其邊ト角トノ關係ヲ設ケ，是等ヲ基本トシテ此學問ヲ組立テタルモノナレバ，其式ノ上ニハ恆ニ邊ト角トノ關係ヲ示シ之ニ依テ圖形ヲ暗示ス，故ニ此學ノ長所ハ式ガ邊ト角トノ關係ヲ示スニアリテ，之ヲ學ブノ困難モ亦茲ニ存ス；然リ而テ其圖形ヲ暗示セル式ヨリ邊ト角トヲ明ニ認ムル樣ニ習慣ヲ附ケルニハ時日ヲ要ス．是レ三角法ハ二十四時間ニテ其全部ヲ講述シ得ルモ之ヲ學ブニハ少クモ六十時間ヲ要スル所以ニテ其理屈ヲ得テモ其式ヲ見慣ルヽノ容易ナラザルガ爲メナリ；彼ノ初學者ガ $\sin A+\sin B=\sin(A+B)$ トシ，$\cos(-A)=-\cos A$ ト誤解スルガ如キ，代數式ニ慣レテ三角函數ニ慣レザルガ爲メナリ．

**平生ノ研究法** 幾何圖形ヨリ一タビ抽象セラレテ三角函數トナルヤ，其記方ハ代數的ニシテ其扱方ハ圖形的ナルガ爲メニ或規約ヲ設ケテ式ヲ作リ，其成式ヲ次第ニ公式トシテ之ヲ記憶シ且ツ之レガ用法ニ慣ルヽヲ此學問トスルヿハ前述ノ如シ，故ニ主トシテ其公式ヲ暗記スベク，其公式ヲ暗記スルコトハ容易ナラザルヲ以テ其方法ヲ考ヘザルベカラズ．三角公式ハ多數アリテ之ヲ覺エルニ容易ナラズ，又其公式ヲ使ヒ分ケルコトハ益ス容易ナラズ，是ヲ以テ其書ヲ讀ミ進ムニ從テ其書中ヨリ公式ヲ拔キ書キシテ手控ヲ作リ，之ヲ坐右ニ置キテ一ハ暗記ヲ助ケ，一ハ其使ヒ方ニ慣ルヽ樣ニ之ニ依リテ練習スベシ，尤モ公式手控ヲ作ラズトモ强テ公式暗記ガ出來ヌト云フコトモナレケド，斯クセザレバ成効ノ時期ヲ長クスベシ；之ニ依テ平生ニ於テハ必ズ先ヅ

**公式手控ヲ作ルベシ，**

又此手控ヲ用ヒテ公式ノ使ヒ方ニ慣ルヽ樣ニスベシ．

之ヲ要スルニ三角法ハ其公式ヲ見慣ルヽガ第一ノ學習法ニテ之ヲ見慣ルヽニハ是非トモ問題ヲ解キ之レガ練習ヲナサヾルベカラズ；何レノ學科ニテモ練習スレバヨキヿハ當リ前ナレドモ，殊ニ此學ハ理屈ハ僅カニテ練習ガ此學ノ本体ナレバ練習セズシテ此學ヲ得ルヿハ決シテ無カルベシ．

**受驗ノ豫備** 平生ニ於テ以上ノ如クセバ敢テ受驗ノ豫備ニモ及バザルガ如シト雖圧，左ニアラズ；縱令ヒ平生ニ於テ以上述ベタル如クナス圧，一週間打チ捨テ置カバ迂論ノ所ヲ生ジ，二週間ヲ經バ忘レタル所ヲ生ズルガ普通ナリ，試驗ハ生憎ニ其忘レタル所ガ出ルモノニテ，之ヲ未然ニ防クガ豫備ノ効ナリ． 或人ノ實驗談ニ受驗ノ際或公式ヲ生覺エシタル爲メ，丁度之ヲ求ムルヿトナリテ，漸クニ他ヨリ之ヲ誘ヒ求メシテ十五分時ヲ費シタリ；若シ之レガ平生ナラバ三四分時ニテ求メ得ラルベキニ，必ズ間違ヘマジト念ヲ入レタル故ニ斯ク時間ヲ空費シ，加之ノミナラズ無用ニ腦力ヲ使ヒタリト云ヘリ；然リ眞ニ然リ試驗場ニテ公式ヲ思ヒ出サヌヿコソ時刻ニ勞力ニ夫程大ナル損ハナケレ．

自分ニハ豫備充分ナリト思フ圧，倘ホ豫備ヲ怠ルベカラズ，況シヤ其他ノ者ヲヤ；サレバ受驗前ニ迫ラバ少クモ二週前ヨリハ其平生ニ作リ置キタル手控及ビ其書ニ就テ

**公式ノ暗記ニ取掛ルベシ，**

其仕方ハ代數受驗ノ法ニ同ジク，毎日一回十五分時計リニ之ヲ通覽スベシ． 若シ其公式ニ生覺エノ所アラバ，書ヲ伏セ之ヲ書キ試ムベシ；斯クテ充分ニ暗記セラルヽニ至ラバ豫テ書中ニ散在セル其形ノ簡單ニシテ其關係ノ明亮ナル

**基本的題解ヲ記憶スルヿニ務ムベシ，**

三角法ハ固ト圖形ヨリ出テタル式ナレバ，任意ニ數ヲ當

テ揣メテ問題ヲ作ルヿ能ハズ，隨テ問題ノ數少ナキガ故ニ受驗ニハ其ノ多クノ題解ヲ知リ居レルハ大ニ強味アリヽ**試驗ニ出ル問題**ヲ豫想スルヿモ亦試驗ヲ受クル方法ノ要部ナリ．　サテ三角法ガ仮ニ五問出タリトシテ，今之ヲ豫想センニ，其一問ハ三角恒同式ノ証明ナルヿハ先ヅ以テ動カスベカラズ；次ニ其他ノ一問ハ sine 比例カ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ノ直接應用カ，圖形問題カ，實測問題カノ何レカヲ免ルヽヿナシ；其他ノ一問ハ三角方程式カ，下ッテ反函數或ハ消去法ノ何レカナリ；其他ノ二問ハおまけ，即チ　どうでもよき問題，即チ試驗官ノ手當リ任セニテ，特別角ノ函數値ヲ求メシムルカ，$A+B+C=180^0$ ノ制限ノ下ニ起ル相等式ノ証明カ，或ハ $\sin 1(180^0+A)$ ヲ $-\sin A$ ニ變ゼシムルノ類カ，或ハ $\sin(A\pm B)\equiv\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$ ヲ幾何學的ニ証明セヽヨ，ト云ヘルガ如キモノタルベシ;之ヲ此試驗ノ通例トス．

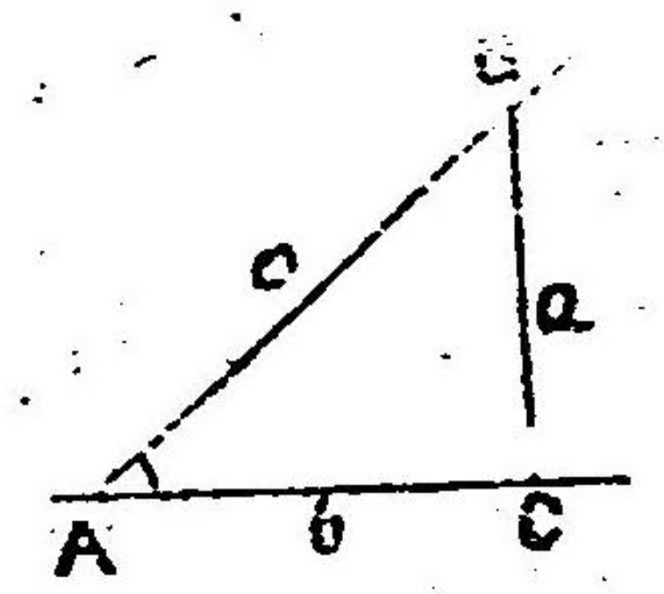
三角法ハ至テ初歩ノ問題ナル故ニ一番受ケ易キ試驗ナリ；又書ニ就テ見ルモ以上述ブル所ニテ大体ハ其受方分リタルベケレ圧，倘ホ注意ヲ促サンガ爲メ，次ニ公式及ビ其必要問題解ヲ示ス；此他足ラザル所ハ習ヒ得タル本ヨリ自ラ補フベシ．

番號 (1) (2)……ヲ附シタル公式ハ常ニ暗記スベキモノ；又番號 (A) (B)……ヲ附シタル公式ハ受驗間際ニ暗記スベキヲ示ス．

# 三角函數ノ定義

$\triangle ABC$ ニ於テ C ヲ直角,又角 A,B,C ノ對邊ヲ $a,b,$ トス

$$
(1)\left\{\begin{array}{ll}
\sin A=\dfrac{a}{c}, & \text{即チ垂÷斜}\\
\cos A=\dfrac{b}{c}, & \text{即チ底÷斜}\\
\tan A=\dfrac{a}{b}, & \text{即チ垂÷底}\\
\cot A=\dfrac{b}{a}, & \\
\sec A=\dfrac{c}{b}, & \\
\operatorname{cosec} A=\dfrac{c}{a}, &
\end{array}\right.
$$



$$a^2+b^2=c^2.$$

此三角函數ノ定義ヲ暗記スルニ就テハ下ノ關係ヲ心得ベシ;sinA, cosA, tanA, ヲ三基本函數ト云フ，而シテ後ノ三ツハ其相反數タリ；即チ

$\sin A$＝垂÷斜　ヲ知レバ　$\operatorname{cosec} A$＝斜÷垂,
$\cos A$＝底÷斜　ヲ知レバ　$\sec A$＝斜÷底
$\tan A$＝垂÷底　ヲ知レバ　$\cot A$＝底÷垂

**記憶法**　上ニ示セル垂÷斜，底÷斜，垂÷底，ハ音便ニヨリ水車，停車，水底ト記憶スレバ更ニ便ナリ．

前ニ掲ゲタル定義ヨリ直ニ．

$$a=c\sin A,\qquad c=a\operatorname{cosec}A,$$

$$\text{(2)}\qquad b=c\cos A,\qquad c=b\sec A,$$

$$a=b\tan A;\qquad b=a\cot A.$$

ヲ得．此關係ハ無雜作ナルモノ故ニ心得居ルベキ筈ナルニ何人モ忘レ易シ，注意スベシ．

---

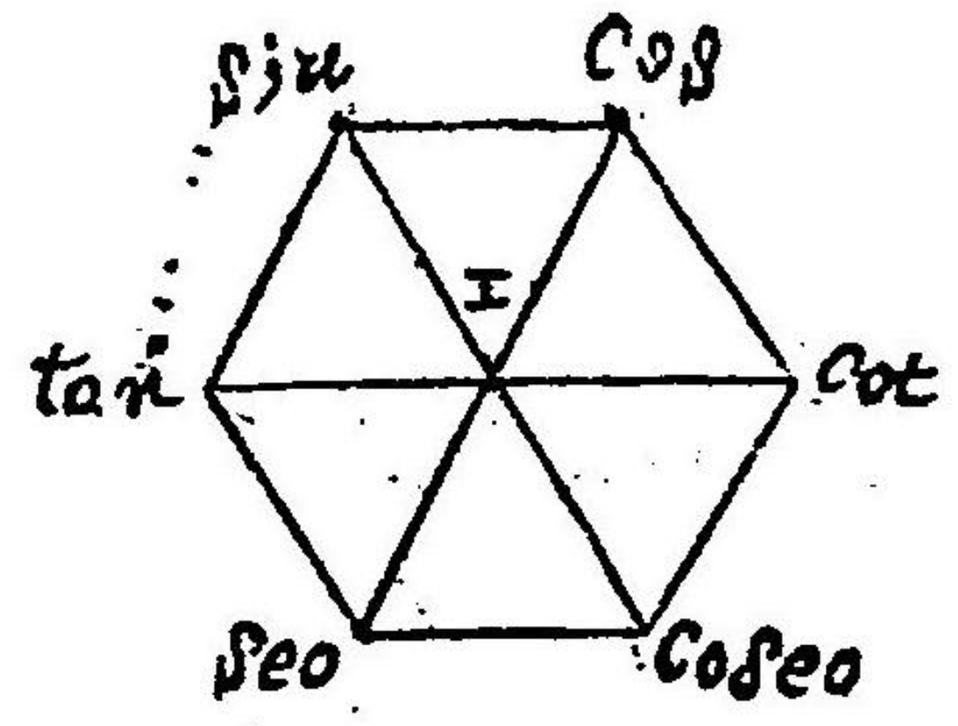
# 單角ノ公式

$$\text{(3)}\quad\begin{cases}\sin^2A+\cos^2A\equiv1,\\ 1+\tan^2A\equiv\sec^2A,\\ 1+\cot^2A\equiv\operatorname{cosec}^2A.\end{cases}$$

$$\text{(4)}\quad\begin{cases}\sin A.\operatorname{cosec}A\equiv1,\\ \cos A.\ \sec A\equiv1,\\ \tan A.\ \cot A\equiv1.\end{cases}$$

$$\text{(5)}\quad\begin{cases}\tan A\equiv\dfrac{\sin A}{\cos A}\equiv\sin A\ \sec A,\\ \cot A\equiv\dfrac{\cos A}{\sin A}\equiv\cos A\ \operatorname{cosec}A.\end{cases}$$

(3) (4) (5) 公式ノじよんそん氏記憶法



圖ノ如ク正六邊形ヲ畫キ其各角項ニ三角函數ヲ配置シ其中心ニ1ヲ記ス，然ル時ハ

I　其對角線ノ兩端ニアル函數ノ積ハ夫々1ナリ，之ニ由テ上ノ (4) ヲ暗記ス．

II　底邊ガ水平ニシテ其下方ニ頂角ヲ有スル正三角形ノ底ノ兩端ノ數ノ平方ノ和ハ其頂角點ノ數ノ平方ニ等シ，之ニ由テ (3) ヲ暗記ス．

III　一角項ノ函數ハ何レモ其兩隣函數ノ積ニ等シ：之ニ由テ (5) 其他 $\sin A=\tan A\cos A$，$\cos A=\sin A\cot A$，等ヲ得．

# 複角ノ公式

(6)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sin(A+B)\equiv\sin A\cos B+\cos A\sin B.\\
&\sin(A-B)\equiv\sin A\cos B-\cos A\sin B.\\
&\cos(A+B)\equiv\cos A\cos B-\sin A\sin B.\\
&\cos(A-B)\equiv\cos A\cos B+\sin A\sin B.
\end{aligned}\right.$$

(7)
$$\left\{\begin{aligned}
&\tan(A+B)\equiv\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.\\
&\tan(A-B)\equiv\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.
\end{aligned}\right.$$

$$\cot(A\pm B)\equiv\frac{\cot A\cot B\mp1}{\cot B\pm\cot A.}.$$

(A)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sin(A+45^0)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A+\cos A).\\
&\cos(A+45^0)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A).\\
&\tan(A+45^0)\equiv\frac{1+\tan A}{1-\tan A}.
\end{aligned}\right.$$

(B)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sin(A+B+C)\equiv\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\\
&\cos A+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C\\
&\cos(A+B+C)\equiv\cos A\cos B\cos C-\cos A\\
&\sin B\sin C-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B.\\
&tg(A+B+C)\equiv\frac{tgA+tgB+tgC-tgAtgBtgC}{1-tgAtgB-tgBtgC-tgCtgA}.
\end{aligned}\right.$$

(8)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sin A+\sin B\equiv2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B).\\
&\sin A-\sin B\equiv2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B).\\
&\cos A+\cos B\equiv2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B).\\
&\underline{\cos B-\cos A\equiv2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)}\sin\tfrac{1}{2}(A-B).
\end{aligned}\right.$$

(9)
$$\left\{\begin{aligned}
&2\sin A\cos B\equiv\sin(A+B)+\sin(A-B).\\
&2\cos A\sin B\equiv\sin(A+B)-\sin(A-B).\\
&2\cos A\cos B\equiv\cos(A+B)+\cos(A-B).\\
&\underline{2\sin A\sin B\equiv\cos(A-B)-\cos(A+B)}.
\end{aligned}\right.$$

(10)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sin(A+B)\sin(A-B)\equiv\sin^2A-\sin^2B,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\equiv\cos^2B-\cos^2A.\\
&\cos(A+B)\cos(A-B)\equiv\cos^2A-\sin^2B,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\equiv\cos^2B-\sin^2A.
\end{aligned}\right.$$

(11)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sin2A\equiv2\sin A\cos A.\\
&\cos2A\equiv\underline{\cos^2A-\sin^2A},\\
&\qquad\;\;\equiv\underline{2\cos^2A-1}.\\
&\qquad\;\;\equiv\underline{1-2\sin^2A}\\
&\tan2A\equiv\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}.
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
&\sin A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos2A}{2}}.\\
&\cos A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2A}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

$$\cot2A=\frac{\cot^2A-1}{2\cot A}$$

(12)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sin3A\equiv3\sin A-4\sin^3A.\\
&\cos3A\equiv4\cos^3A-3\cos A.\\
&\tan3A\equiv\frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}.
\end{aligned}\right.$$

(13)
$$\frac{1-\cos2A}{1+\cos2A}\equiv\tan^2A$$

# 各象限ニ於ケル函數ノ正負號

| | |
|---|---|
| sin + | ***sin*** + |
| cos − | ***cos*** + |
| tan − | ***tan*** + |
| sin − | sin − |
| cos − | ***cos*** + |
| ***tan*** + | tan − |

**記憶法** 第一象限ニテハ各函數悉ク正値ナレバ注意ヲ要セズ; 第二象限ニテハ sin ノミ正値, 第三象限ニテハ tan ノミ正値, 第四象限ニテハ cos ノミ正値ヲ有スルガ故ニ, 之ヲ記憶スルニハ

***s,ta,c*** (スタツク) ト唱フレバ, 第二第三第四象限ニ於ケル函數中ノ正値ノモノヲ記憶シ得ル; 然シテ其他ハ負ナリ. 又 $\sin A \operatorname{cosec} A=1.$ $\cos A \sec A=1.$

$\tan A \cot A=1$ ナレバ, $\sin A$ ト $\operatorname{cosec} A$ $\cos A$ ト $\sec A$, $\tan A$ ト $\cot A$, ハ常ニ同號ヲ有スルモノナリト知ルベシ.

# 特別角ノ三角函數値

| | $0^0$ | $90^0$ _ | 90+ | $180^0$ _ | $180^0$+ | 270 _ | 270 + | $360^0$ _ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *sin* | 0 | 1 | 1 | 0 | −0 | −1 | −1 | −0 |
| *cos* | 1 | 0 | −0 | −1 | −1 | −0 | 0 | 1 |
| *tan* | 0 | ∞ | −∞ | −0 | 0 | ∞ | −∞ | −0 |
| *cot* | ∞ | 0 | −0 | −∞ | ∞ | 0 | −0 | −∞ |
| *sec* | 1 | ∞ | −∞ | -1 | −1 | −∞ | ∞ | 1 |
| *cosec* | ∞ | 1 | 1 | ∞ | −∞ | −1 | −1 | −∞ |

**注意 I** 90− ハ $90^0$ ニ甚タ僅カ小, 90+ ハ $90^0$ ヨリ甚タ僅カ大ナルノ意ヲ示ス. 例バ *tangent* ハ眞ノ $90^0$ ニ於テハ何ノ義ヲモ有セザレ圧其 $90^0$ ノ前後ニ於テ正若クハ負ノ無限大トナルヿ明カナリ.

**注意 II** *sine, cosine, secant, cosecant* ハ四直角毎ニ其値ヲ回歸シ; *tangent, cotangent* ハ二直角毎ニ其値ヲ回歸ス.

| | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| tan | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |
| cot | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |
| sec | $1$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | $\infty$ |
| cosec | $\infty$ | $2$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $1$ |

此表ニ示セル數ハ悉ク暗記セザルベカラズ之ヲ暗記スル仕方ハ最初ノ一段ヲ暗記スレバ第二段ハ第一段ヲ右ト左ト振リ替ヘタル迄ナリ. 第三段ハ

$$\tan 0 \equiv \frac{\sin 0}{\cos 0}$$ ナレバ

第一段ヲ第二段ニテ夫々除スレバ得ベシ;第四段以下ハ初ノ三段ノ相反數ナレバ直ニ知ルヲ得ベシ.

サテ第一段ノ數ヲ記憶スルニハ

$$0,\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}.\quad 1$$

即チ $\sqrt{\frac{0}{4}},\ \sqrt{\frac{1}{4}},\ \sqrt{\frac{2}{4}},\ \sqrt{\frac{3}{4}},\ \sqrt{\frac{4}{4}}$ トナレバ

其其分子ハ 0, 1, 2, 3, 4, 其分母ハ皆 4 ナリト思ヘバヨシ.

$$\sin 75^0 = \cos 15^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\sin 15^0 = \cos 75^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\sin 18^0 = \cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\sin 72^0 = \cos 18^0 = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}.$$

$$\sin 36^0 = \cos 54^0 = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}.$$

$$\sin 54^0 = \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$\tan 15^0 = \cot 75^0 = 2-\sqrt{3}.$$

$$\tan 75^0 = \cot 15^0 = 2+\sqrt{3}.$$

**注意**　第 10 及ビ第 11 頁ニ掲ゲタル特別角ノ三角函數質ハ是非トモ平生ニ於テ暗記シ置クベキモノナリ. 但シ此頁ニ掲ゲタルハ試驗ノ間際ニ記憶スベシ.

# $n.\frac{\pi}{2}\pm\theta$ 弧度ノ函數表

$$(14).\ \begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta.\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta.\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta.\end{cases}\quad\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta.\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta.\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\pi-\theta)=\sin\theta.\\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta.\\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta.\end{cases}\quad\begin{cases}\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta.\\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta.\\ \tan(\pi+\theta)=\tan\theta.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\frac{3}{2}\pi-\theta)=-\cos\theta.\\ \cos(\frac{3}{2}\pi-\theta)=-\sin\theta.\\ \tan(\frac{3}{2}\pi-\theta)=\cot\theta.\end{cases}\quad\begin{cases}\sin(\frac{3}{2}\pi+\theta)=-\cos\theta.\\ \cos(\frac{3}{2}\pi+\theta)=\sin\theta.\\ \tan(\frac{3}{2}\pi+\theta)=-\cot\theta.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(2\pi-\theta)\ \text{即チ}\ \sin(-\theta)=-\sin\theta.\\ \cos(2\pi-\theta)\ \text{即チ}\ \cos(-\theta)=\cos\theta\\ \tan(2\pi-\theta)\ \text{即チ}\ \tan(-\theta)=-\tan\theta.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta,\\ \cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta,\\ \tan(n\pi+\theta)=\tan\theta.\end{cases}$$

茲ニ $n$ ハ正若クハ負ノ整數若クハ零ヲ表ハス

**記憶法** $\pi$ ニ零若クハ整數ノ附キタル𪜈ハ同名ヲ得又 $\pi$ ニ分數ノ附キタルトキハ異名ヲ得，但シ符號ハスタツク法（第 207 頁）ニ依テ決定ス.

例バ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$, $\tan(\frac{3}{2}\pi-\theta)$ ハ $\pi$ ニ分數ガ附テ居ル故ニ其名ハ變ジテ $\sin\theta$, $\cot\theta$ トナル; 又此符號ヲ定ムルニハ $\theta<\frac{1}{2}\pi$ ト假想スレバ $\frac{\pi}{2}+\theta$ ハ第二象限ノ弧度ヲ示スガ故ニ，スタツク法ニ依テ $\cos$ ハ一號ナレバ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$ トナリ，又 $\frac{3}{2}\pi-\theta$ ハ第三象限ノ弧度ヲ示スガ故ニスタツク法ニ依テ $\tan$ ハ ＋號ナレバ $\tan(\frac{3}{2}\pi-\theta)=+\cot\theta$ ナルガ如シ.

又 $\sin(\pi+\theta)$, $\cos(2\pi-\theta)$ ハ $\pi$ ニ整數ガ附テ居レバ同名ニシテ且ツ $\pi+\theta$ ハ第三象限，$2\pi-\theta$ ハ第四象限ノ弧度ナルガ故ニ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ トナルガ如シ.

**注意** 三角法ニテハ二角ノ代數和 $90^0$ ナル𪜈互ニ餘角ヲナシ; 其和 $180^0$ ナル𪜈ハ互ニ補角ヲナスト云フ.

例ヘバ $150^0+(-60^0)=90^0$, $480^0+(-300^0)=180^0$ ナレバ $150,^0\ -60^0$ ハ互ニ餘角，$480,^0\ -300^0$ ハ互ニ補角ヲナスナリ.

# 三角方程式公式

(15) $\boldsymbol{\sin\theta=\sin\alpha}$ ナル𪜈，

$\theta=2n\pi+\alpha$ 或ハ $\theta=(2n+1)\pi-\alpha.$

但シ $\boldsymbol{n}$ハ任意ノ正若クハ負ノ整數若クハ零ヲ表ハス.

$\sin\theta=0$ ナル𪜈， $\theta=n\pi.$

$\sin\theta=+1$ ナル𪜈， $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}.$

$\sin\theta=-1$ ナルトキ， $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}.$

(16) $\boldsymbol{\cos\theta=\cos\alpha}$ ナル𪜈，

$\theta=2n\pi\pm\alpha.$

$\cos\theta=0$ ナル𪜈， $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\cos\theta=+1$ ナル𪜈， $\theta=2n\pi.$

$\cos\theta=-1$ ナル𪜈， $\theta=(2n+1)\pi.$

(17) $\boldsymbol{\tan\theta=\tan\alpha}$ ナル𪜈，

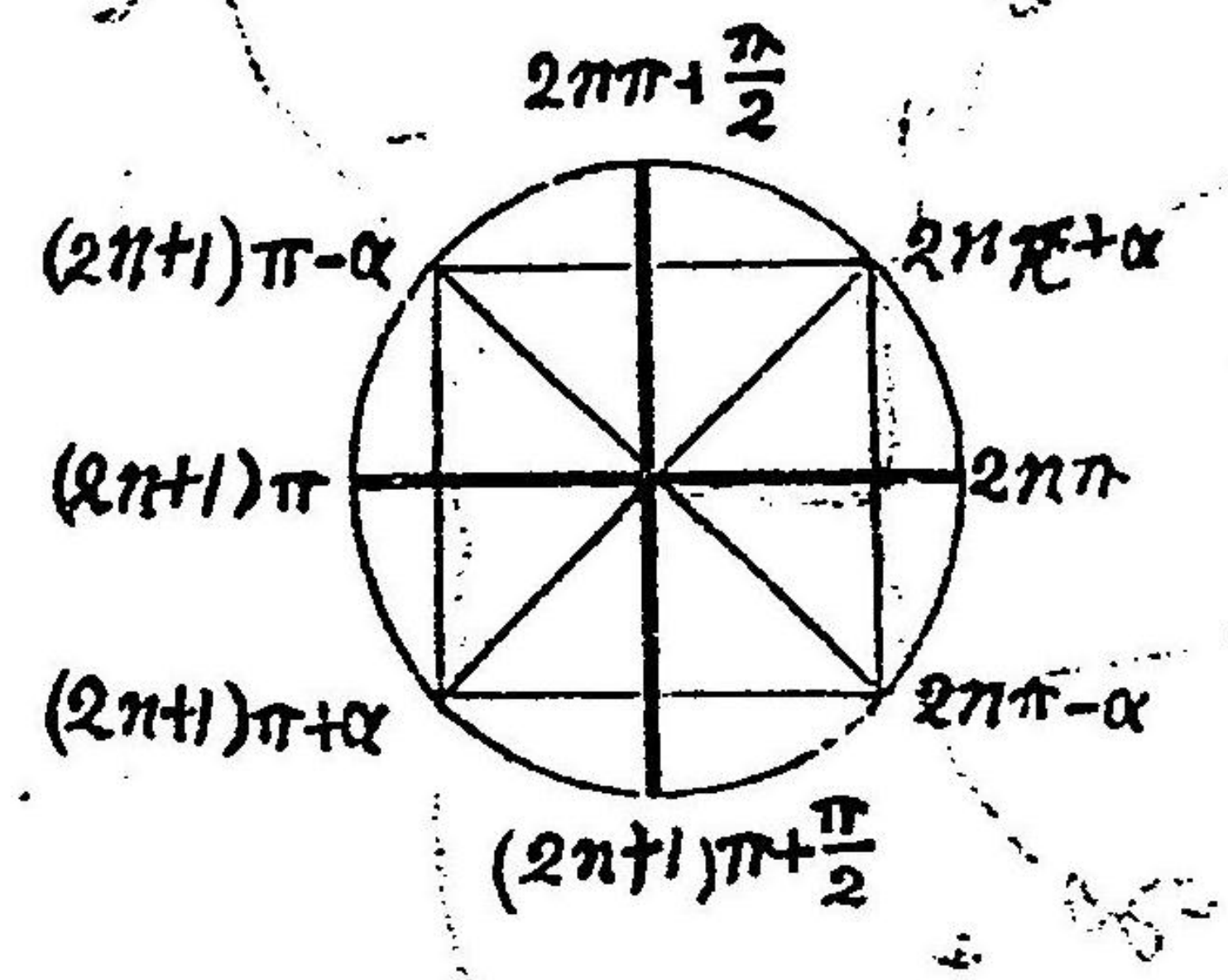
$\theta=n\pi+\alpha.$

$\sin\theta=\pm\sin\alpha$ ナル𪜈， $\theta=n\pi\pm\alpha$

$\cos\theta=\pm\cos\alpha$ ナル𪜈， $\theta=n\pi\pm\alpha;$

$\tan\theta=\pm\tan\alpha$ ナル𪜈， $\theta=n\pi\pm\alpha.$

**記憶法** 此公式ハ必ズ記憶スベキモノナルヲ以テ，茲ニ其法ヲ示サン



上圖ノ如ク書スヿハ容易ナリ.

$\sin\theta=\sin\alpha.$ $\sin\theta=-\sin\alpha,$ ナル𪜈，

上段ノ水平線ノ兩端， 下段ノ水平線ノ兩端，ニ記シタル數ヲ取リテ

$\theta=2n\pi+\alpha,$ $\theta=2n\pi-\alpha,$

或ハ $\theta=(2n+1)\pi-\alpha;$ 或ハ $\theta=(2n+1)\pi+\alpha;$ トス

又 $\cos\theta=\cos\alpha$ $\cos\theta=-\cos\alpha$ ナル𪜈，

右端ノ垂線ノ兩端， 左端ノ垂線ノ兩端，ヲ取リ

$\theta=2n\pi\pm\alpha,$ $\theta=(2n+1)\pi\pm\alpha$ トス.

又 $\tan\theta=\tan\alpha$ $\tan\theta=-\tan\alpha$ ナル𪜈，

右上左下ノ斜線ノ兩端， 左上右下ノ斜線ノ兩端，

ヲ取リテ

$$\theta=2n\pi\alpha,\qquad \theta=n\pi-\alpha,$$

或ハ　$\theta=(2n+1)+\alpha$;　或ハ　$\theta=(2n+1)-\alpha$;

ト記セバ可ナリ; 然レ𪜈之レハ一式ニ纒メテ

$$\theta=n\pi+\alpha,\qquad \theta=n\pi-\alpha;$$

トナスヿヲ得.

茲ニ注意スベキハ總テ中心ヲ貫ク線ノ兩端ニ記シタルニツノ値ハ纒メテ一ツト爲シ得ルヿナリ; 即チ

$2n\pi$　或ハ　$(2n+1)\pi$　ハ　$n\pi$　ニ等シキヲ以テ　$2n\pi+\alpha$　或ハ　$(2n+1)\pi+\alpha$　ハ　$n\pi+\alpha$　トナスヿヲ得; 此他之ニ倣ヘ

例バ　$\sin^2\theta=\frac{1}{4}$　ニ適スベキ　$\theta$　ノ値ヲ求ムルトキ,

$\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$,　即チ　$\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$,

ナルヲ以テ,

$$\theta=\begin{cases}2n\pi+\frac{\pi}{6} & (2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}\\ 2n\pi-\frac{\pi}{6} & (2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}\end{cases}\times$$

$$=n\pi+\frac{\pi}{6},\ \text{或ハ}\ n\pi-\frac{\pi}{6}.$$

# 反函數

$\sin A=a$ ナルトキ, A ハ sine ガ $a$ ナルトキノ任意角ヲ示ス, 今或便宜ニ由テ逆ニ　$A=\boldsymbol{\sin^{-1}a}$　或ハ　**arc sina**　ト記ス.

例バ　$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ ト云フハ　sine ガ $\frac{1}{2}$ ナル値ヲ有ツトキノ總テノ角度ト云フ義, 即チ

$$\sin^{-1}\frac{1}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{6}\text{或ハ}(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}$$

ト云フ義ナリ. 同様ニ

$$\tan^{-1}\sqrt{3}=n\pi+\frac{\pi}{3}.$$

注意　此 $^{-1}$ ハ代數ノ負指數ノ義ニアラズ, 是レ別記號ニシテ; $\sin^{-1}x$　ハ　$(\sin x)^{-1}$　即チ　$\frac{1}{\sin x}$　ノ義ニアラズト知ルベシ.

又　$\sin^{-1}\frac{1}{2}$　ハ前述ノ如ク汎キ意義ヲ有スルヿナルガ, 今其中ニ就テ此式ガ顯ハス最小數値ヲ此式ノ原値ト云フ; 即チ　$\sin^{-1}\frac{1}{2}$　ノ原値ハ　$30^0$　ナリ.

同様ニ　$\cos^{-1}\frac{1}{2}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

ノ原値ハ　$60^0$　$-30^0$,　$135^0$,

ニシテ, 大抵ハ此原値ニ就テ取扱フモノナリ; 例バ

$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}\ \text{ノ如シ.}$$

# 三角形ノ邊ト角

A, B, C ハ三角形ノ角ニシテ, $a$, $b$, $c$ ハ其對邊ナリ. 又 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

$$A+B+C=180^0. \qquad \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=90^0$$

$$\begin{cases}\sin(A+B)=\sin C,\\ \cos(A+B)=-\cos C.\end{cases} \qquad \begin{cases}\sin\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}C,\\ \cos\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{1}{2}C.\end{cases}$$

(18) $$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\phantom{x}}{2R}$$

(19) $$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A,\\ b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B.\\ c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C.\end{cases}$$

(20) $$\begin{cases}a=c.\cos B+b.\cos C,\\ b=a.\cos C+c.\cos A,\\ c=b.\cos A+a.\cos B.\end{cases}$$

(21) $$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}ab.\sin C$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(22) $$\begin{cases}\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}},\\ \sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\end{cases}$$

(23) $$\begin{cases}\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}};\\ \cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}},\\ \cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}.\end{cases}$$

(24) $$\begin{cases}\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{cases}$$

(25) $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

(26) $$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

熟讀シ置クベキ

# 三角法問題解

次ノ恒等式ヲ証セヨ.

1. $$\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}=\tan^2(A+45^0).$$

(解) $$\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}=\frac{\sin 90^0+\sin 2A}{\sin 90^0-\sin 2A}$$

$$=\frac{2\sin(45^0+A)\cos(45^0-A)}{2\cos(45^0+A)\sin(45^0-A)}$$

$$=\frac{\sin(45^0+A)\sin(90^0-\overline{45^0-A})}{\cos(45^0+A)\cos(90^0-\overline{45^0-A})}$$

$$=\frac{\sin^2(45^0+A)}{\cos^2(45^0+A)}=\tan^2(45^0+A).$$

2. $\sin A\cos^3 A-\sin^3 A\cos A=\frac{1}{4}\sin 4A.$

(解) 與ヘラレタル式 $=\sin A\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)$

$$=\tfrac{1}{2}(\sin 2A\cos 2A)$$

$$=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\sin 4A)=\tfrac{1}{4}\sin 4A.$$

3. $2+\tan^2(A+90^0)+\cot^2(A+90^0)=4\,\mathrm{cosec}^2 2A.$

(解) 與式ノ左邊

$$=2+\cot^2 A+\tan^2 A=2.\cot A.\tan A+\cot^2 A+\tan^2 A$$

$$=(\cot A+\tan A)^2=\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=\left(\frac{1}{\sin A\cos A}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2}{\sin 2A}\right)^2=4\,\mathrm{cosec}^2 2A.$$

---

4. $$\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$$

P

(解) $$\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}-\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}},$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)}{\cos A+\cos B}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$$

5. $\tan(45^0+A)-\tan(45-A)=2\tan 2A.$

P

(解) 所設式ノ左邊 $=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}-\frac{1-\tan A}{1+\tan A},$

$$=\frac{4\tan A}{1-\tan^2 A}=2\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=2\tan 2A.$$

6 $\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$

(解) $$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\sin A}{\cos A\sec^2 A}=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

**7.** $\sin A=a,\quad \tan\overset{A}{=}b,$ ナルトキハ,

$b^2=a^2(1+b^2)$ ナリ,之ヲ証セ.

**(解)** $\tan^2 A=\sin^2 A\,sce^2 A=\sin^2 A(1+\tan^2 A)$

$\therefore\quad b^2=a^2(1+b^2).$

✓ **8.** $\tan A=\frac{8}{15}$ ナルトキ $\sin A$ 及ビ $\cos A$ ノ値ヲ求ム.

**(解)** $\sin A=\frac{\pm\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\frac{\pm\frac{8}{15}}{\sqrt{1+(\frac{8}{15})^2}}=\pm\frac{5}{17}.$

又 $\cos A=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+(\frac{8}{15})^2}}=\pm\frac{15}{17}.$

**9.** $\sin 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルヲ知リテ

$\mathrm{cosec}\,15^0=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ナルコトヲ証セ.

**(解)** $\sin 30^0=\sqrt{(1-\cos^2 30^0)}=\frac{1}{2},\ \cos 45^0=\sin 45^0$

$=\frac{1}{\sqrt{2}},$

故ニ $\sin 15^0=\sin(45^0-30^0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$

$\therefore\ \therefore\ \mathrm{cosee}\,15^0=\frac{1}{\sin 15^0}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$

**10.** $\cos(15^0-A)\,see\,15^0-\sin(15^0-A)\,cosce\,15^0$ ヲ簡單ニセヨ.

**(解)** $\cos(15^0-A)\sec 15^0-\cos(15^0-A)\mathrm{cosec}\,15^0$

$=\frac{1}{\sin 15^0\cos 15^0}\{\cos(15^0-A)\sin 15^0$

$-\sin(15^0-A)\cos 15^0\}$

$=\frac{2}{\sin(2\times 15^0)}\sin\{15^0-(15^0-A)\}$

$=\frac{2}{\frac{1}{2}}\sin A=4\overset{\sin}{\cos}A.$

**11.** A, B ガ鋭角ナルトキ $\tan A=\frac{2}{3},\ \tan B=\frac{3}{2},$ ナラバ A+B ノ角ハ何度ナルカ.

**(解)** $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

$=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{0}=\infty.$

茲ニ A 及ビ B ハ鋭角ナリト云フヲ以テ

$A+B=90^0.$

**12.** 三角形 ABC ニ於テ若シ A=2B ナラバ

$a=2b\cos B$ ナルコトヲ証セ.

**(解)** 正弦比例ノ公式ニヨリ

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$ 假設ニヨリ A=2B ナル故

$\frac{a}{\sin 2B}\equiv\frac{a}{2\sin B\cos B}=\frac{b}{\sin B}\quad\therefore\ \frac{a}{2\cos B}=b,$

$\therefore\quad a=2b\cos B,$

**13.** A, B, C, ハ三角形ノ三ツノ角ナリ然ルトキハ

$\sin A+\sin B>\sin C$ ナルコトヲ証セヨ.

（解） 三角形 A, B, C ノ對邊ヲ夫々 $a, b, c$ トスレバ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ ナリ，

故ニ同値分數ノ理ニヨリ

$$\frac{\sin A+\sin B}{a+b}=\frac{\sin C}{c}$$

三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナルヲ以テ

$$a+b>c, \quad \therefore \quad \sin A+\sin B>\sin C.$$

**14.** $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ.

（解） 此兩邊ニ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ乘ズレバ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2}.$$

即チ $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$

$\therefore \quad \theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$

$\therefore \quad \theta=2n\pi-\frac{\pi}{12}$ 或ハ $\theta=2n\pi+\frac{7\pi}{12}.$

但シ $n$ ハ正若クハ負ノ整數若クハ零ヲ表ハス.

**15.** 方程式 $\cos 2A=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos A+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$ ヲ滿足スル A ノ値ヲ求メヨ.

（解） $\cos 2A=2\cos^2A-1$ ナルガ故ニ與ヘラレタル方程式ハ次ノ如シ

$$2\cos^2A-1=(3\sqrt{\ }-\sqrt{2})\cos A+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-I,$$

即チ $2\cos^2A-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos A-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=0.$

$\therefore \quad 2\sqrt{2}\cos^2A-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}\cos A-\sqrt{3}=0,$

即チ $(2\cos A-\sqrt{3})(\sqrt{2}\cos A+1)=0.$

$\therefore \quad 2\cos A-\sqrt{3}=0$ ……………………(1)

或ハ $\sqrt{2}\cos A+1=0$ ……………………(2)

(2)ヨリ $\cos A=\frac{-1}{\sqrt{2}},$

因テ A ノ最小角ハ 135° 即チ弧度法ニテ表ハセバ $\frac{3\pi}{4}$ ナリ，故ニ一般ノ解ハ次ノ如シ.

$$A_1=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4},$$

茲ニ $n$ ハ零或ハ正或ハ負ノ完全數ナリ.

同様ニシテ (1) ヨリ

$$A_2=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

**16.** $3\tan\theta+\cot\theta=5\operatorname{cosec}\theta$ ヲ解ケ.

（解） 本題ハ次ノ如ク誘フコヲ得

$$3\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{5}{\sin\theta}=0.$$

$$\frac{3\sin^2\theta+\cos^2\theta-5\cos\theta}{\sin\theta\ \cos\theta}\equiv\frac{-(2\cos^2\theta+\cos\theta-3)}{\sin\theta\ \cos\theta}$$

$$\equiv\frac{-(2\cos\theta+3)(\cos\theta-1)}{\sin\theta\cos\theta}\equiv\frac{(2\cos\theta+3)(2\sin^2\frac{1}{2}\theta)}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta\cos\theta}$$

$$\equiv\frac{(2\cos\theta+3)\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta\ \cos\theta}=0.$$

茲ニ $2\cos\theta+3$ ハ零ナルコト，又 $\cos\frac{1}{2}\theta$ 及ビ $\cos\theta$

ハ無限大トナルコトナキヲ以テ

$$\sin\theta\ \tfrac{1}{2}\theta=0,$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}\theta=n\pi,$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi.$$

17 $3\operatorname{cosec}^2\theta-8\cot\theta+2=0$ ニ適合スル鋭角 $\theta$ ノ値ヲ見出セ 但シ $\log 30^0 57'=\bar{1}.77791,$

$$\log 30^0 58'=\bar{1}.77820.$$

$$\log 6=\ .77815.$$

(解) $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$ ナルガ故ニ與ヘラレタル方程式ハ $3(1+\cot^2\theta)-8\cot\theta+2=0,$

即チ $3\cot^2\theta-8\cot\theta+5=0,$

$$\therefore\quad (3\cot\theta-5)(\cot\theta-1)=0,$$

$$\therefore\quad 3\cot\theta=5\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \cot\theta=1\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)ヨリ $\theta=45^0,$

(1)ヨリ $\cot\theta=\frac{5}{3},$ 即チ $\tan\theta=\frac{3}{5}=\frac{6}{10},$

$$\therefore\quad \log\tan\theta=\log 6-1=\bar{1}.77815.$$

$$\log\tan 30^0 57'=\bar{1}.77791.$$

$$\log\tan 30^0 58=\bar{1}.77820,$$

$\therefore$ $1'(=60'')$ ノ差 $=.00029$

$$\therefore\quad 60'':x=.00029:(\bar{1}.77815-\bar{1}.77791)$$

$$x=\frac{60''\times.00024}{.00029}=42''8.$$

$$\therefore\quad \theta=30^0 57' 42''8.$$

**18.** $\boldsymbol{\tan^{-1}x+\tan^{-1}y\equiv\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}}.$

(解) $\tan^{-1}x\equiv\alpha,$ トスレバ $\tan\alpha\equiv x;$

又 $\tan^{-1}y\equiv\beta,$ トスレバ $\tan\beta\equiv y.$

爰ニハ $\alpha+\beta$ ヲ tangent ノ反函數ノ形ニテ求ムルヲ目的トス、

今 $$\tan(\alpha+\beta)\equiv\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\equiv\frac{x+y}{1-xy};$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}.$$

**19.** $\sin\theta+\cos\theta$ ノ最大値ヲ求メヨ

(解) $$\sin\theta+\cos\theta\equiv\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$

$$\equiv\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\equiv\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

sine ノ値ハ 1 ヨリ大ナルヿ能ハズ，依テ

此式ノ極大値 $=\sqrt{2},$

然シテ $$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\therefore\quad \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

O **20.** $A+B+C=180^0$ ナルヰ，次ノ關係アリ之ナ證セ

(A) $$\boldsymbol{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$
$$\boldsymbol{=4\sin A\sin B\sin C}$$

（解） 此左邊

$$\equiv 2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$
$$\equiv 2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\{-\cos(A+B)\}$$
$$\equiv 2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$
$$\equiv 2\sin C(2\sin A\sin B)$$
$$\equiv 4\sin A\sin B\sin C.$$

(B) $$\boldsymbol{\cos A+\cos B+\cos C}$$
$$\boldsymbol{=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

（解） 此左邊

$$\equiv 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\quad+1-2\cos^2\frac{1}{2}C$$
$$\equiv 2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{A+B}{2}$$
$$\equiv 1+2\sin\frac{1}{2}C\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$
$$\equiv 1+2\sin\frac{1}{2}C\left\{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C\right\}$$
$$\equiv 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(C) $$\boldsymbol{\sin A+\sin B+\sin C}$$
$$\boldsymbol{=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.}$$

（解） 此左邊$\equiv 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$\equiv 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$\equiv 2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\equiv\cdots\cdots$$

(D) $$\boldsymbol{\tan A+\tan B+\tan C}$$
$$\boldsymbol{=\tan A\tan B\tan C}$$

（解） $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\equiv\tan(A+B)=-\tan C$

此分母ヲ拂フテ轉項スレバ

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

(E) $$\boldsymbol{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}$$
$$\boldsymbol{=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-c}{4}.}$$

（解） 此左邊

$$\equiv\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=2\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi-A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left(\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right)$$

$$\equiv2\cos\frac{\pi-R}{4}\left(2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\right)$$

$$\equiv4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

**21.** $log_{10}2=0.30103$, $log_{10}3=0.47712$, ヲ與ヘテ $log_{10}(cos30^{o})$, $log(5tan60^{o})$, ヲ計算セヨ

**(解)** $log.cos30^{o}=log\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}log3-log2$

$=\frac{1}{2}\times0.47712-0.30103$

$=0.23856-0.30103$

$=-0.06247=\bar{1}.93753$

又 $log(5tan60^{o})=log5+logtan60^{o}$,

$=1-log2+log\sqrt{3}$,

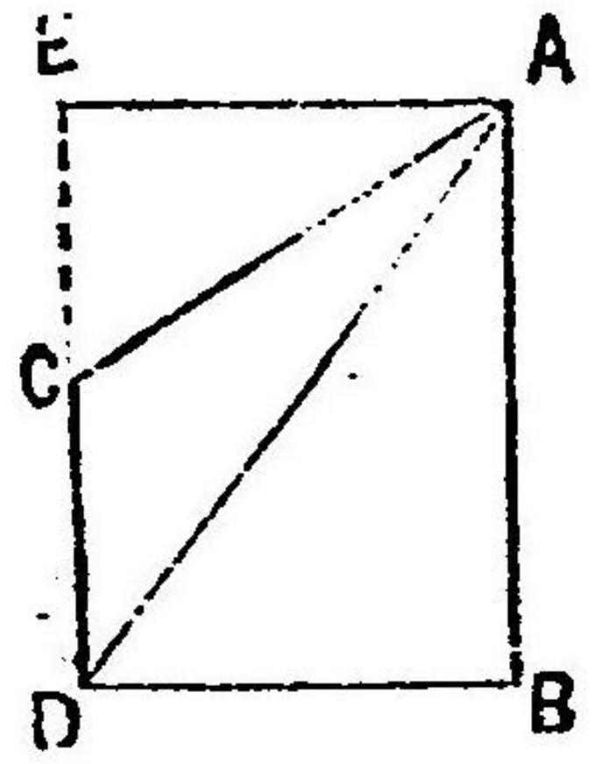
$=1-log2+\frac{1}{2}log3$

$=1-0.30103+\frac{1}{2}\times0.47712$

$=0.93753.$

**22** 塔頂ニアリテ塔下ニ生ズル樹木ノ梢ヲ望ムニ俯角三十度ナリ，又其根ヲ望ムニ六十度ナリ，樹ヨリ塔ノ高キ了幾何ナルカ；但シ其樹ノ高サ二十「メートル」ナリ.

**(解)** ABヲ塔，CDヲ樹木トシ，CDノ延長トAヲ通ズル水平線トノ交點ヲEトスレバ．CEハ求ムル所ノ長サナリ



$\angle CAD=30^{0}$,

$\angle ADC=\angle ACE-\angle CAD=30^{0}$.

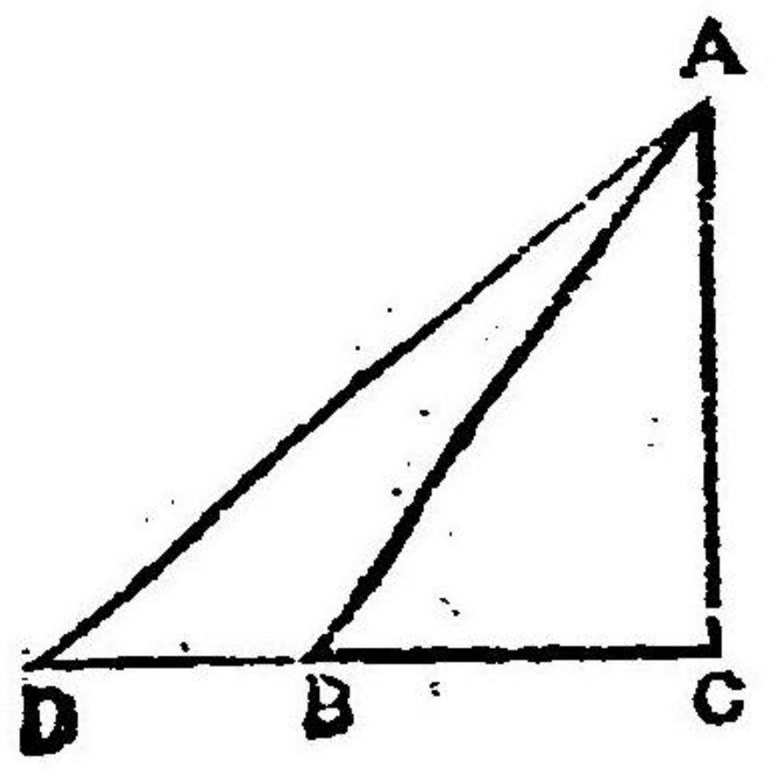
$\therefore\quad CD=AC$,

$CE=AC\,sin30^{0}=20\times\frac{1}{2}=10$尺

**23** 水平面ニ四十五度傾斜セル長サ百尺ノ坂路アリ，傾斜ヲ減ジテ三十度トナサバ坂路ノ長サ幾尺トナルベキカ

但シ答數ハ小數點以下第二位迄ニ止ムベシ

**(解)** ABヲAニ到ル傾斜$45^{0}$ノ坂路，ADヲ同クAニ到ル$30^{0}$ノ坂路トス，三角形 ABD ヨリ正弦ノ關係ニヨリ



$$\frac{AD}{AB}=\frac{sin\,ABD}{sin\,ADB}=\frac{sin\,ABC}{sin\,ADB}$$

$$=\frac{sin45^{0}}{sin30^{0}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AD}=\mathrm{AB}\frac{\sin 45^0}{\sin 30^0}=100\times\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=100\sqrt{2}$$

$$=141.42$$

**24** 三角形アリ其二邊ノ長サ夫々三十尺及ビ三十五尺ニシテ，其夾角六十度ナリ，依テ第三邊ヲ求ム．

（解）$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}=(c-b)^2+2bc-2bc\cos\mathrm{A}$

$$=(b-c)^2+2bc(1-\cos\mathrm{A})$$

$$=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$=(35-30)^2+4\times30\times35\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$=25+4200\times\tfrac{1}{4}\quad(\because\sin30^0=\tfrac{1}{2})$$

$=1075$ $\qquad\therefore\quad a=32.8$尺．

**25** 水平ト三十度ノ角ヲナス斜面上ニ一尺二寸ノ正三角形ヲ置キ其正射影ノ面積ヲ求メヨ．

（解）正三角形ノ面積ハ$\frac{12^2}{4}\sqrt{3}=36\sqrt{3}$ニシテ其正射影ナル三角形ノ面積ハ

$36\sqrt{3}.\cos30^0=12\sqrt{3}$ 平方寸．

**26** 或軍艦ノ甲板ト同水平面ニアル海岸ノ一點ヨリ其檣頭ノ仰角ヲ測リ $2^04'34''$ ヲ得タリ；今檣ノ高サ150尺ナルトキ，其點ヨリ檣ニ至ル水平距離ヲ次ニ與ヘタル對數ヲ用ヒテ計算セヨ．

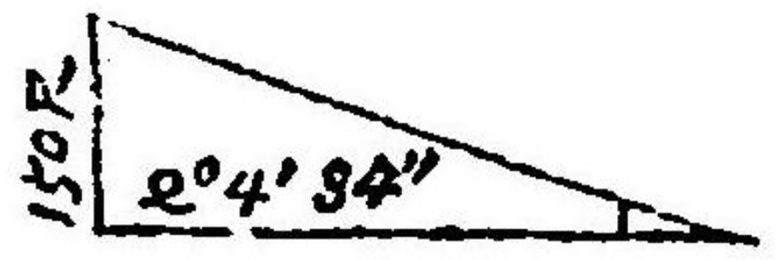
$\log2=.301030$ $\qquad \log3=\cdot477121,$

$\log4.137=\cdot616685,$ $\qquad \mathrm{L}\cot2^04'30''=11\cdot440915,$

$\log4.138=\cdot316790.$ $\qquad \mathrm{L}\cot2^04'40''=11.440333.$

（解）所要ノ距離ハ $x$尺$=150\cot2^04'34'',$

今之ヲ對數ニ依リ計算センニ



$$x=\frac{300}{2}\cot2^04'34''$$

$\therefore\quad \log x=\log300-\log2+\log\cot2^0.4'34'',$

$=\log3+\log100-\log2+\log\cot2^04'39'',$

$\log\cot2^04'30''=1.440915$

$\log\cot2^04'40''=1.440333.$

$582\times\cdot4=233$

$\log\cot2^04'30''=1.440915$

$4''$ニ對シテ 233

$\log\cot\ 2^04'34''=1.440682$

$\log3\qquad=0.477121$

$\log100\qquad=2.000000$

$-\log2\qquad=\bar{1}.698970$

$\log\cot\ 2^04'34''\qquad=1.440682$

$\log x\qquad=3.616772$

……685 ニ對シテ 4137.

$105|87$

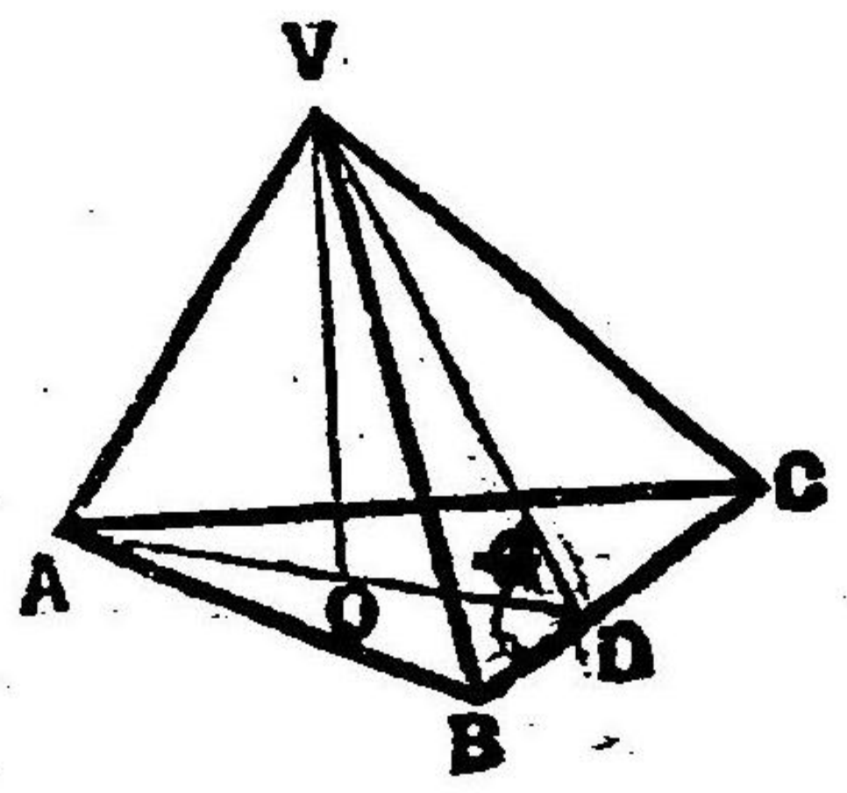
$.83$

$\therefore\quad x=4137.83$尺$=11$町$29$間$3.83$尺

**27** 各稜ノ長サヲ一尺トスル正面四躰ノ作法ヲ述ベ且ツ二面角ハ何度何分ナルカヲ見出セ

但シ $sin70^0=.9397.$ $sin71^0=.9455.$

**(解)**



ABヲ與ヘラレタル稜トス，AB上ニ等邊三角形ABCヲ作リ．此三角形ノ中心Oヨリ其平面ニ垂線OVヲ立テ其上ニV點ヲ

$$AV=AB$$

ナル樣ニトリ，VB，VCヲ結ビ付クレバハ V−ABC 所要ノモノナリ

何トナレバ四面躰 V−ABC ノ各面ハ皆 ABC ニ等シク，且ツ夫等ノ面ノ三ツヅヽナス三面躰角ハ相等シケレバナリ

次ニ二ツノ面ノナス二面角ヲ計算セントス

VヨリBCニ垂線VDヲ引キODヲ結ベバVD，ODノナス平面角ハ二面角ヲ測ル角ナリ，今其平面角ヲαトセバ

$$sin\alpha=\frac{OV}{DV},\quad OV=\sqrt{AV^2-AO^2}$$

$$DV=VB\,sin60^0=VB\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AB.$$

Oハ三角形ABCノ重心ナルガ故ニ

$$AO=\tfrac{2}{3}AD=\tfrac{2}{3}AB.sin60^0=\frac{\sqrt{3}}{3}AB,$$

而シテ $AB=1$

$$\therefore\quad 0V=\sqrt{1-\frac{3}{9}},\quad =\sqrt{\frac{2}{3}},\quad DV=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore\quad sin\alpha=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times(2\times\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times(2\times\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{2\times1.4142}{3}$$

$$=\frac{2.8284}{3}=\cdot9428$$

$$\begin{cases}sin70^0=\cdot9397,\\ sin71^0=.9455,\end{cases}\quad\therefore\quad 1^0(=60')ノ差=.0058,$$

$$\therefore\quad 60':x=\cdot0058:\cdot9428-.9397$$

$$x=\frac{60'\times\cdot0031}{\cdot0058,}=32.$$

$$\therefore\quad x=70^0\,32'.$$

(大尾)

不許
複製

發行所　東京市日本橋區通四丁目七番地　青野文魁堂
印刷所　東京市京橋區弓町十三番地　績文舍
印刷者　東京市京橋區弓町十三番地　松木義弘
發行者　東京市日本橋區通四丁目七番地　青野友三郎
筆述者　桑原兵次郎
口演者　松岡文太郎

明治三十七年六月十日發行
明治三十七年六月七日印刷

定價金卅五錢

（三週間獨習）數學受驗法

教学受験法（二週間予備）

松岡　文太郎／述

M37