日本水島久太郎原本
義烏陳榥樂書氏譯補

中學物理教科書

第一冊

教科書譯輯社藏版

欽命二品頂戴江南分巡蘇松太兵備道袁

出示曉諭事據留學日本生員陸世芬等稟稱竊生等在日本東京糾集同志創設教科書譯輯社編譯東西教科新書以備各省學堂採用業經稟奉

南洋督部堂准飭派辦處轉飭所屬學堂購用現先譯就中學教科書物理生理植物幾何代數數學等凡六種出版有日惟恐書出之後奸商等暗中翻刻以圖射利為此稟請發給告示曉諭通屬書肆凡教科書譯輯社出版各書一概不准翻印如有違禁者准予送請嚴究并擬將告示刊入卷首以昭儆戒一俟出版後補呈書籍分咨立案以杜奸偽而維教育並具切結聲明生等在日本東京創設教科書譯輯社專擇東西洋教科新書為吾國未經譯出者編輯成書以備各省學堂採用實憫母邦教育之衰為輸入文明之地非僅僅為牟利計現所出中學教科書實由各同志以課程餘陰自輯自譯斷不敢抄襲雷同以圖射利如蹈以上情弊查出願甘究罰等情到道據此合先出示曉諭為此示仰書肆人等一體知悉毋得將該社出版各書翻印漁利自示之後如有違禁准予嚴究不貸其各懍遵切切特示

光緒貳拾捌年陸月　十二　日示

日本水島久太郎原本
義烏陳榥樂書氏譯補

中學物理教科書

第一冊

教科書譯輯社藏版

序

中學教科書之譯建議于去夏而定議于其冬予任譯物理學夫吾國風氣日開士大夫之志西學者挾其聰明才力時以不得一蹴而幾爲恨而物理學一門實爲西學中不可不知之學吾邦所傳頗乏善本學者病焉東文物理教科書以酒井氏書爲首屈一指第篇帙稍緊近于參考書而水島氏所編輯之近世物理學言簡意賅較適中學校教科之用夫以士大夫之志之專也予以淺則陋而西學之不可一蹴而求也予以深則艱斟酌于斯二者之間必使能引初步以入門介深造而入室則中等教科書之體例在是即吾國今日之要務亦在是矣予于物理學不過隸業及之且並非所執之專門顧深維教科之義不敢草率從事二閱月畢其初編同人擬即付梓名曰中等物理教科書不仍近世物理學

舊稱誌實也惟書中字句多與原文相逕庭或有將原文黜竄處蓋教科書期于明理宜以意譯且東文與中文頗多違反若僅顚倒成文恐句語糢糊終有不能索解之弊日人譯西書原有直譯法文不落一字而義則非甚苦于讀者今且廢矣又物理學多專用名目東文名目多可用而有非可仍東文之舊者輙以意創之匪惟異于東文即律以西文字面之常用解法亦多不同後有專門名家者出能以一言定厥名目而仍不失字面之常解者或不予責當亦予諒也、物理致用甚廣其微妙莫罄形容而中學校所用教科書理解較淺然苟譯者率爾操觚則立言必不能得要若夫循途漸進沈思玩索以收全功則有西文各種參考書在是在學者

光緒二十九年正月　樂書氏陳槐自序于讀書最樂齋

原序

夫以編書之難亦古碩學所共云矣今不自揣而輙當其難何歟蓋亦非無故于其間也

竊自束髮讀書以來以魯鈍之資蒙諸先輩名師之嘉許愧未能答然于此中亦略有可自信者當授徒時閱參考書覺英法德諸名家輯著大抵亦得此失彼各有短長斷不可專據一書乃採其精腴加以頻年所領悟授業時即以之爲口授琴且我國之不乏物理學家也大都爲通國所傾仰而亦爲私心所竊喜是故著中等敎科書以資教育之用者原未有缺然猶不能使人泯不足之感而絕無隔靴搔癢之病因不自揣以頻年所用口授琴修輯成書亦秉以答諸先輩名師向者之厚遇

雖然以藐躬之累年攻苦而公之于世實以此編爲始柿實甘澁

尙未可知加以文辭拙陋其何敢擧斥他書而獨謂此書之可用耶唯欲籍此以稍有所稗卽編書之本志如是而已

水島久太郞自叙

原例

此書程度乃專爲中學校師範學校及此外程度相等各學校所用而輯

物理學專門書皆通用法國度量衡然我國普通敎育究不必專用此例故書中所用皆係本國度量衡遇有必不得已始用法國式按日本度量衡雖與中國異然言幾斤幾尺時既非與華式比較即全與華式無異故譯時仍之而讀者即以華式度量衡當之可也

溫度皆用攝氏寒暑表

譯語皆照數學物理學會所編科學字典遇有牴牾則改之予亦數學物理學會中人今乃與會中所編字典相背亦不得已也

書中次序皆照尋常敎科書分卷不稍變更此乃予受業先進與授業後進而知其最爲適當者也唯摩擦電氣冬則空氣乾燥其法易行而入學之期每在夏末秋初故授業當第三卷畢時可先

以第六卷教之

物理學與數學相輔而行初學之人往往苦物理學難解此乃其數理之未明澈所致故本書第一卷比尋常敎科書所用數理採擇較深各章之末附有例題亦較多于他書所以使學者知數理之關係也然好論數理弊或流于空論故欲使讀者知實用所在則于卷末附以淺近易見之理眼前指點而別名之曰雜題

本書眉批論理較深雜于中等教科書中似非所宜然學生正可不讀而教師略一閱及亦非無益夫教師學問必遠出學生之上詎此區區尚有不知故此眉批亦唯于平常授業時偶資談助而已非爲於敎師學識有所增長而設也

當世通人及敎師用本書者如覺其說理簡略或言詞艱澁或刷有缺陷尙望不吝賜敎俾得干重印時更正幸甚

水島久太郎識

譯言十則

一原書各節所論已畢或別有他法載于眉批以資考究者今概改爲附錄而即係於其節之末

一原書眉批論說皆無圖今特補之名曰補圖

一原書遇理極淺易有略去不言者吾國人嚮學伊始其肄業學堂中者固有明師爲之啓發若下帷自勵之士不于淺易先爲說明易致疑惑因作譯輯以補之

一原書論理有時稍涉艱深者亦作譯輯以補之

一原書註釋均別以括弧今皆改爲雙行分註

一雙行分註多隨手加入約增于原書註釋者半殊覺其贅惟初學之人往往於閱書時書中言理已畢而心尙歉然故特于易致疑惑處加入雙行分註以便初學

一此書爲抽暇所譯故行文字句未能甚盡善

一原書係纂輯西書而成卷末附有西文名目表然甚寥寥今皆取附於各名目之下其原表未備者亦從西書採補

一各章例題譯時略爲布算知原書所答間有誤字均已更正惟亦有未曾布算者尙希海內通人代正其誤

一原書記號均用西文字母今仍其舊惟立言體裁有不劃一者譯時亦未及修正然按諸意義則全無參差如言V速度亦言速度V譬猶四尺速度變言速度四尺其意義固無不同也

樂書氏陳　棍識

讀法

凡＞號可徑以大于二字讀之如 $a>b$ 可徑讀爲 a 大于 b

凡＜號可徑以小于二字讀之如 $a<b$ 可徑讀爲 a 小于 b

凡＋號可徑以加字讀之如 $a+b$ 可徑讀爲 a 加 b

凡－號可徑以減字讀之如 $a-b$ 可徑讀爲 a 減 b

凡×號可徑以乘字讀之如 $b\times a$ 可徑讀爲 a 乘 b 又、號有時亦爲乘號而在數目字上側時則以示此字以下皆爲小數

凡÷號可徑以除字讀之如 $b\div a$ 可徑讀爲 a 除 b 又有以一長劃介于兩項間者亦可以除字讀之如 $\frac{b}{a}$ 亦可讀爲 a 除 b 而 $\frac{b}{a}$ 有時亦作 b/a

凡＝號可徑以等于二字讀之如 $a=b$ 可徑讀爲 a 等于 b

凡∞號可徑以依以變三字讀之如 $a\infty b$ 可徑讀爲 a 依 b 以變

又∞號有時宜讀爲無窮大如 $a \div = \infty$ 意爲a等于無窮大讀法∞號在兩項中間者宜讀爲依以變在=號右者宜讀爲無窮大

凡:號可徑以比字讀之如 $a:b$ 可徑讀爲a比b又::號可徑以猶字或等于二字讀之如 $a:b::d:c$ 可讀爲a比b猶d比c或a比b等于d比c

凡√號可徑以開方二字讀之如 $\sqrt{a}$ 可讀爲開a平方 $\sqrt[3]{a}$ 可徑讀爲開a三乘方 $\sqrt[4]{\ }$ 以上類推而 $\sqrt{a}$ 有時寫作 $a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{a}$ 有時寫作 $a^{\frac{1}{3}}$

凡Σ號可徑以和字讀之

凡+號有時宜讀爲正一號有時宜讀爲負然正號即+號有時略去如 $-b=a$ 宜讀爲負b等于正a凡一數就其數目上言則有正無負就其性質上言則有正有負

凡±號可以或加或減讀之有時宜以或正或負讀之

凡( ){ }〔 〕皆爲括弧在括弧內諸項宜視爲一項

凡a^3或a^2等項a字右肩之小字名曰指數 $a^2=a\times a$ 而 $a^{-2}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}$ 凡西文 1 2 3 等字即中文一二三等字今特作表如下其西字下旁註之中文字即相當字

1 一	2 二	3 三	4 四	5 五	6 六	7 七
8 八	9 九					

凡記號所用英文字母可以中文甲乙丙等字或他字當之今作表如下其英字母下旁註之中文字即可視爲相當字

小寫英文字母

a 甲	b 乙	c 丙	d 丁	e 戊	f 己	g 庚	h 辛
i 壬	j 癸	k 子	l 丑	m 寅	n 卯	o 辰	p 巳
q 午	r 未	s 申	t 酉	u 戌	v 亥	w 天	x 地

表

y人　z物

大寫英文字母表

A乾　B坤　C坎　D離　E巽　F兌　G震　H艮

I房　J氐　K角　L軫　M斗　N牛　O女　P箕

Q奎　R婺　S翼　T昴　U參　V畢　W井　X柳

Y亢　Z婁

凡人名以|號記之地名以||號記之非人名又非地名而音譯者以○—○記之

右讀法各則原書所無今欲便于初學故立之

中等物理教科書目錄

總論……一

第八章　力……八九

中等物理教科書

日本水島久太郎原本　無錫胡爾霖校讀
義烏樂書陳　槼譯補　吳縣董瑞椿覆校

總論 (General Principle)

一　科學(Science)宇宙之間。萬類昭象。有因斯有果。有果亦必有因。而實測之餘。即可由因而得果。由果而得因。故于形迹所起之因。知之已確。而據以斷定夫未來之果者。學問分二種。一爲心理學。社會學等。推情度意。以燭世事通變之微也。一爲數學。星學。物理學。化學。生理學。結晶學。地質學。生物學等。觀象研幾。以闡造物化成之妙也。而第二類或總稱之爲科學。

二　物理學(Physics)　物理學者。研究物象以測定其所屬之門類也。各種科學。皆不能出其範圍。然而研究之項。派別流分。故研究生物體內之物質者。謂之生物學。研究地殼之狀者。謂之地質學。研究結晶（物體天然結成四面六面八面等形。曰結晶。物類多結晶者。）之狀者。謂之結晶學、研究人體官能之機關者。謂之生理學。研究原子之配合者。謂之化學。研究天體者。謂之星學。而研究物體及分子之現象（現象者、現出象也下做此）者。謂之物理學。以上各種學問。若論數額時。必藉數學之助。

三　原子及分子(Atom and Molecule)　占宇宙間之位置者爲物質。物質一部。名物體。物體之一小部。小至極微細之點。名分子。而分子尚爲二原子或多原子所合而成。故原子合成分子。分子合成物體也。據此理論。（理論者。謂有如此理。可想像而論之。非待實測而始定也下做此。）一物體屢次碎之。必碎至分子。分子復碎之。必爲原子。而分子具有其物體之本

性。如水爲輕氣養氣所化合而成。任取水一極小之點。小至水一分子。苟其爲水。則必具有水之性。若再分之。則爲輕氣二原子養氣一原子。不復存水之性矣。

附錄　因化合力之故。異類原子。合成分子。而生化合物。然分子之名。要不僅限于化合物。如輕氣一分子。爲輕氣二原子。而二原子俱爲輕氣。非與他原質之原子化合也。

四　重量質量（Weight and Mass）（重量者。重多少之量也。質量者。質多少之量也。）物體必有重。而體與體比。則有輕有重。重者其物體之質量多。輕者其物體之質量少。第初學之人。重量（此後畧言重。）質量二者。混淆莫辨。今特剖析之。質量者。物體所由成之質。之量也。任取一物體。其所含質量。恒準其物而一成不變。故質量之多少。爲自主數。（自主數者。言其所有之數。不視他數爲轉移也）重者。爲地球引力及于物體所生。故重之多少。非物體所得而自

主之數。試取一物體。于赤道權之。于北極權之。其重不同。又試于廣東權之。于上海權之。于北京權之。其重亦不同。蓋地球引力隨地而異故也。又同在一處。而于平地權之。山上權之。其重亦不同。以地球引力。高處少于低處故也。而質量則任至何處。其數不變。故與重截然分。顧。重與質量相關之處。試取物體一部。定其重爲W。其質量爲M。又于此物體削取一部。如其重仍爲M。則其質量不得不仍爲W也。合此二部。質量爲2M。重爲2W。即重與質量。可成比例也。故計重之法。亦可以計質量。如物重百斤。而欲示此物之質量時。即可謂其有百斤之質量。

五. 密度 (Density) 試取木一立方寸、金一立方寸。其容積同。而木輕金重者。以金之密度大木之密度小故也。如金之重爲木之三十倍。即金之密度。爲此木之三十倍。故密度可以示同容質

物體所含質量之多少。

六　物體變化　變化有二。一爲物理上變化(Physical change)雖變化而常仍其舊有之分子。即物體之本性不變也。物理學所研究者也。一爲化學上變化。(Chemical change)變化時或析分子爲原子。或聚原子爲分子。即性質皆變也。化學所研究也。物理上變化甚多。如弦因振動而發音。受電体之吸塵。水之生波。及水凝爲冰等類皆是。

七　物類三態(Three states of Matter)　物體可分二類。一固體。一流體。欲變物體之形而物體生抵抗之力者爲固體。無此力者爲流體。然此不過因吾人所便而分之。不足以昭一定之界限。蓋謂變流體之形而流體無抵抗之力者。非全無此力也。特定其爲無。而亦不致有大誤也。流體又分二類。一液體。一氣體。液體之分子無互引之力。亦無互拒之力。氣體則僅見其有互拒之力。故固

體之分子。常欲靜于一定之位置。氣體之分子。常欲互相離開。液體之分子。不欲靜。亦不欲離。

八　不可入性 (Impenctrability) 二物體不能同時而並居一位盛水之器以石入之。則水之容積見其增。即此性之故。以釘釘木必釘擠開木體。始得而入之。非釘所處之位。仍為木所處之位也。又融鹽於水時。或不見水之增。此非二者能同時並居一位。鹽之分子。入居水分子之間故也。如水分子間之隙。已為鹽填滿。倘加融之不已。則必見容積之增。此外相似者可類推。

九　可分性 (Divisibility) 物體全部。可分為數塊。又可分為無數小塊。故一物體。屢次分之。必分至分子。分子又分之。必得原子。原子可再分與否。實測所不得知。第照化學上之現象以推之。似不能再分。盧修米脫算得輕氣一分子。其直徑約為一纖米突一

億萬分之四。

十　穴性 (Porosity) 物體必有空隙。海綿輕石等物。皆可視見。然即視之若無空隙者。而重壓之。其容積必減。乃穴性之明証也。

附錄　十八世紀末。有人于伊國富路林司試水之受壓性。法以銀製空圓球。滿盛以水。封固而壓搾之。銀球外面水出如汗。當時以爲水無受壓性之証。今可斷其不然。蓋水出如汗。非水之無受壓性。乃銀之有穴性故也。

十一　慣性 (Inertia) 物體皆欲循其故態。靜止之物。無他力以動之。則永不變其位置。運動之物。不能自變其速度。亦不能自變其運動之方向。此類性質。名曰物體之慣性。

十二　不滅性 (Indestructibility) 物質不能消滅。取木燃之。如見其消滅。實則此木之質。變爲灰變爲烟。依然存在宇宙間也。故

自開闢以至今日。物質之數。從無所增減于其間。

附錄　英人賴萊于英女王愛里沙陪司前。試物質之不滅。即其所吸之烟。將烟與灰用法収之。其重適與烟草之重等。以示物質不滅之理。物理學上一故事也。然今日知賴氏說實有誤處。蓋烟與灰總量之和。必重于烟草。以吸烟時烟草燃燒而加以養氣之化合也。

十三　受壓性(Compressibility)物體受壓力。而容積變小。爲穴性之明證。氣體之受壓性最大。固體次之。液體最小。近來論液體者皆想像其無受壓性。

十四　彈性(Elasticity)當變物體之容積及形體時。物體常顯欲復其原積原形之意。名曰彈性。物體之彈性。其顯于壓小時或抽長時者。謂之容積之彈性。其顯于彎曲時扭旋時者。謂之形體

之彈性。

力學源流攷

西歷耶蘇降世三百五十年前。河里脫梯耳分運動爲二。如墜下物體等運動。速度漸增者。稱爲正運動。拋上物體等運動。速度漸減者。稱爲逆運動。而不加以人力。則物體自成圓運動。至千五百九十年。賈里羅研究擺及墜下物體之運動。而得其眞相。故墜下物體加速之相等。遂爲賈里羅所發明。以前則謂二斤物體比一斤物體墜下速度大一倍也。至千六百八十年。牛頓所論運動定理。今日論運動者。皆奉以爲祖。若能力不滅。則僅七十年來所發明。蓋千八百二十年法賴弟所想像而得者也。力學應用諸器械。見于歷史。有同時並有者。故不能確指爲何人所擬。滑車槓桿。巴庇倫人已知用

之。羅馬盛時。嘗用輪軸。埃及人作披賴米（Pyramid）時。嘗用斜面。

第一卷　力學

第一章　總論

十五　力學(Dynamics)　力學者。研求力動于物之法則。以知其終效（終效。猶言終所奏之效也。下倣此。）之學也。

十六　力(Force)　力者。所以生物體變動之媒也。使靜止之物運動。使運動之物靜止。使物體縮小。使物體脹大。皆力爲之。吾人每日所用筋力之力。即含有力字意。而能與筋力同奏厥效者。若風若水等類皆可。如人筋力所動。可以折木。而風吹木而折。即風力動于木之實效也。

十七　力與質量相關係　吾人當動一物體時。可即用力之多少而定物體運動之大小。又所用之力雖同。而用之此物體與

彼物體。有易動不易動之別。易動者其所含質量必少。不易動者。其所含質量必多。故動于物體之力。可據質量多少運動大小而知。然而運動者。猶言變位置也。則欲量運動之大小遲速。而量路(Space)與時(Time)之法。不可不知。

時與路與質量三者。爲物理學根本。凡計量之處。無不據此三者以爲基。

第二章 單位 (Unit)

十八 求數 (Measurement) 有一數欲量而知之則必取一同類之已知數。以與此未知數。相較而求其比。此已知數名爲單位。而比數名爲虛數。故言一數。而單位與虛數恒並舉也。

十九 原單位及合單位 (Fundamental Unit and Derived Unit)

數額之門類甚多。求數之時。各種皆需特別之單位。故單位種類。亦因而多。而時路質量三者。乃各數額之基。故以度此三者之單位。爲原單位。而度此外之數之單位。名曰合單位。

二十　此三者之單位。雖可任意定之。然有二要項如下。

一必使此數易度他數。

二必使此數大小合宜。不過大亦不過小

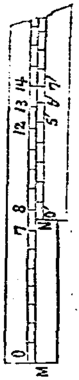
定單位之法。各國不同。故名亦互異。惟法國米突法。最爲簡便。萬國多遵用之。然日用之間。皆各因所便而所用之單位又不同。

二十一　路之單位 (Unit of Space) 有米突英尺等法。米突法。乃西歷一千七百九十五年。法國政府。派打蘭陪路梅生兩人量由北極通過巴黎之子午線而取其長四千萬分之一。定爲單位。名曰一米突。又命波路打于攝氏寒暑表零度時。造一白金方

柱。長一米突。以爲量路單位之標準。然後來學術日新。量子午線之法日進。知全子午線不僅四千萬米突。約爲四千萬三千四百二十米突。英國之單位。則以藏于大藏省之黃銅棒。當攝氏寒暑表（此後器稱攝氏表）零度時。長三英尺即長一碼爲標準。法國米突白金柱。今珍藏于挨希維。

附錄　量長精密之法。用AB二尺。A尺等分之。記以0 1 2 3等度。B尺等分之。記以0′ 1′ 2′ 3′等度。B尺各等分。爲A尺各等分十分之九。今取所量之物。置于A尺下。其端與0度適相對。他端則橫倚于B尺之0′度。如圖。MN爲所量之物。其M端適對A尺0度。其N端橫倚B尺0′度。視B

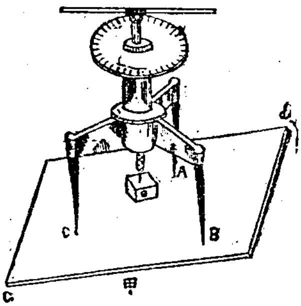
補圖一



尺0′度與A尺相對處。知其在A尺七分八分之間。從0′順數

至7′度處。與A尺14度適相對。則物之長。爲七分七釐也。何以言之。B尺比A尺每度少一釐。故由7′至6′。比14至13。必少一釐。而由7′至5′。比14至12。必少二釐。順次由7′至0′。比14至7。必少七釐。而物爲七分七釐明矣。此法所用之B尺。名之曰遊尺(Vernier)

補圖二

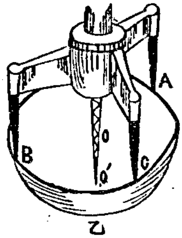


又更精密之法。須用測微螺旋。(Micrometer screw)假定螺旋每旋一周。螺旋幹所進之路爲一分。取所量之物e與螺旋同置于平面板cd上。其螺旋幹垂直(如垂綫之直也)于平面。將螺旋旋之。如物之上面與螺旋尖接觸。則

將物取去。再將螺旋旋之。螺旋與平面板接觸。止不旋。而物取去後。螺旋所進之路。即爲物之高。螺旋所旋之次數可知。即物高可知矣。迴旋之分數。（言不滿一周也）有種種法。可以測定。如圖。陰螺旋之項。附以圓盤。盤周千等分之。記以度數。此盤裝置活動。務使螺旋當欲量板上之物之高時。其柄正指o度。然後旋之。如旋十八次又過o度五百三十四度。而螺旋適觸接于平面。則物高爲一寸八分五釐三毫四絲也。

利用此法以測球面鏡等之曲率半徑。如圖。測微螺旋之三足ABC。其製爲足尖聯以線。可成一三等邊三角形。命螺旋尖觸接平面時之點爲o。此o點爲三等邊三角形之中心點。故oA爲容此三角形之圓之半徑。即 $oA=\frac{1}{\sqrt{3}}BA$ 也。當螺旋旋至o時。視螺旋柄指圖盤周何度。然後取球面凹鏡。載ABC

于其上。再將螺旋旋之。螺旋觸于鏡之o′點。oo′爲此時螺旋所進之路。其長可據旋轉次數及盤周度數而知。而此球之截面ＡＢＣ。其半徑爲Ａo。而截部之高爲oo′。故定Ｒ爲曲率半徑。據幾何定理。



$$oo':Ao::Ao:2R-oo' \qquad \frac{AB^2}{3}=oo'(2R-oo')$$

ＡＢ爲已知數。故Ｒ可算而知。

單位比較第一表（英法二國比較）

一纖米突	(Centimeter)	等于	○、三九三七英寸 (Inch)
一米突	(Meter)	等于	三、二八○九英尺 (Feet)
一基米突	(Kilometer)	等于	○、六二一四英里 (Miles)
一英寸		等于	二、五四○○纖米突
一英尺		等于	○、三○四八米突

	一英里	等于	一、六〇九三基米突
法	一纖米突	等于	十咪里米突(Millimeter)
	一特米突(Decimeter)	等于	十纖米突
	一米突	等于	十特米突
	一疊加米突(Decameter)	等于	十米特
	一海克米突(Hectometer)	等于	十疊加米突
	一基米突	等于	十海克米突
英	一英尺	等于	十二英寸
	一碼(yard)	等于	三英尺
	一英里	等于	一七六〇碼

二十二　時之單位(Unit of Time)　時之單位。各國多用秒。用秒有二法。一爲恒星時之秒。地球對一恒星自旋一周。定爲一日。

而每日之時皆同。絕少差變。星學用之。一爲太陽時之秒。今日對太陽之子午綫。下日又對太陽。定爲一日。而地球每日自轉一次。又繞太陽而行。今日對太陽之子午綫。下日對太陽。下二日又對太陽。每日皆畧有差異。故將一年內之日平均之。定爲每日之眞長。謂之太陽平均日。吾人尋常所用鐘錶。皆此平均之時。物理學所用者亦同。一日分二十四時。即一點鐘爲一時一時分六十分。一分分六十秒。今將上二種時法比較如下。

單位比較第二表

一秒 太陽時	等于	一、〇〇二七秒 恆星時
一時 太陽時	等于	一時〇分九、八五六五秒 恆星時
一秒 恆星時	等于	〇、九九七三秒 太陽時
一時 恆星時	等于	〇時五九分五〇、一七〇四秒 太陽時

二十三　質量之單位 (Unit of Mass) 質量單位。有斤兩葛蘭磅等法。葛蘭爲法國法。以藏于其國揆希維之白金塊爲標準。即西歷一千七百九十五年法廷所設考察會造一白金塊。其質量與攝氏表三、九度時一方纖米突之清水等。(攝氏表三、九度以清水密度最多之温度)而名之爲一葛蘭。今日則量得攝氏表三、九度時。一立方纖米突之清水。約爲一、〇〇〇〇一三葛蘭。磅爲英國法。以藏于其國大藏省之白金塊爲標準。今將英法二國之法比較如下。

單位比較第三法 (英法二國比較)

一葛蘭 (Gram)	等于	一五、四三二二格林 (Grains)
一基葛蘭 (Kilogram)	等于	二、二〇四六磅 (Pounds)
一格林	等于	〇、〇六四八葛蘭
一磅	等于	〇、四五三六基葛蘭

法

一纖葛蘭(Centigram)等于十咪里葛蘭
一特葛蘭(Decigram)等于十纖葛蘭
一葛蘭　等于十特葛蘭
一疊加葛蘭(Decagram)等于十葛蘭
一海克葛蘭(Hectogram)等于十疊加葛蘭
一基葛蘭　等于十海克葛蘭

英

一兩(Ounce)　等于四三七五格林
一磅　等于一六兩
一噸(Ton)　等于二二四〇磅 一五六八〇〇〇〇格林

以上所記三種單位。即原單位。此外合單位。皆由此三者綜合而成。

二十四　CGS法　選定單位。用CGS法最爲簡便。此法

以一纖米突爲路之單位。一秒爲時之單位。一纖葛蘭爲質量之單位。其餘合單位。皆可本此作之。

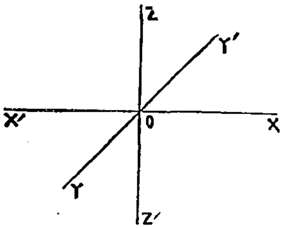
第三章　速度及加速度(Velocity and Accleration)

二十五　質點 (Particie)　質點之大小。非目所可見。第想像而定之。故反言以明此義。則謂之有質點而無質點之大也可。即取一物體碎之。碎至甚微。此甚微之點。爲漸近于質點也。

二十六　位置及運動 (Position and Motion)　位置不能孤立而定。故必對比而知。欲知一點之位置。宜先擇定一處。而後知此一點離此處若何遠。在此處若何方向。不然。則此一點位置無由定也。運動者猶言位置之變也。

附錄　定一點位置。法之最簡者。可作三直綫。各以直角交于

一點。如圖。ZZ′XX′YY′三直綫相交于O點。其XOZ角。XOZ′角。XOY角。XOY′角。X′OY′角。X′OZ角。X′OZ′角。均爲九十度直角。O點謂之原點。三直綫謂之軸。（XX′爲左右軸。YY′爲前後軸。ZZ′爲上下軸）



補圖三

任意點P之位置。如在O點之上前右。則可即P點至XOZ面XOY面ZOY面之距離而定之。今定P至ZOY面之距離（常用X字表之）爲三寸。至ZOX面之距離（常用Y字表之）爲七寸。至XOY面之距離（常用Z字表之）爲五寸。則由原點沿OX軸量至三寸處。由此所出一直線與OY平行而量取其七寸之點。再由此點作一線與OZ平行而量取其五寸之點。爲P之位置也。然前後左右上下各殊。故P點有八位置。其分別之法。可用代數正

負之記號以別之。常法。X爲正。X'爲負。Y爲正。Y'爲負。Z爲正。Z'爲負。而P點八位置。可列之如下。

x=+3	Y=+7	z=+5	在上前右
x=+3	Y=-7	z=+5	在上後右
x=+3	Y=+7	z=-5	在下前右
x=+3	Y=-7	z=-5	在下後右
x=-3	Y=+7	z=+5	在上前左
x=-3	Y=-7	z=+5	在上後左
x=-3	Y=+7	z=-5	在下前左
x=-3	Y=-7	z=-5	在下後左

轉言以明之。即直角相交之三平面。其界域共分八部。此八部內。各可居以P八點之一。此法爲法國人第加脫所創。謂之加

脫香法。

又法用一原綫（用橫綫）OX。命O爲原點。定任意點P至O之長及方向。須用二角。常法通過O點直引一綫OZ。用ZOP角及ZOP、ZOX二面間之角以定之。

如P點在一已定之平面上。則定方向。僅須一角。加脫香法之三軸。僅用二軸。取P點至此二軸之距離出二直線各與軸平行相交。其交點即P點之位置。

位置不能孤舉而定。運動亦然。如犬西走。則以犬比他物而見犬之西走也。正言以明之。即視地球爲靜止之物而見犬之西走也。

二十七　平均速度(Mean-Velocity)從A點動至B點。費時T秒。以T抄除AB。定爲每抄所行之路。名曰平均速度。平均者。謂

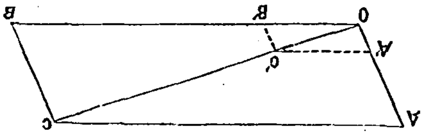
速度在路上。或增或減。雖不一律。可平均而取中數以立算也。一律之速度。謂之等速度運動 (Uniform Motion) 不一律之速度。謂之變速度運動。(Variable Motion)

二十八　變速度運動之速率　算變速度運動之速率。當取極短時內之速度。平均計算之。如火車之速度。偶于一處見其千分之一秒走二寸。則每秒可謂之走二〇〇〇寸也。蓋如此極短之時之內。火車速度。即視爲等速運動。亦無大差。故極短之時之平均速度。即謂爲其時之眞速度亦可。

二十九　平行四邊法 (Parallogramatic Method)　二力所生之二運動。同時加于一物體。若二運動之方向同。其速度固爲二運動之速度之和。若不同。則速度必不能等于二運動之速度之和。設如帆之速度。每秒爲OB。船夫行船速度爲OA。而觀其終

效。則船能于一秒末由O至C。此理可不必泥于一秒。試即萬分之一秒以觀船之經路若何則可將OACB平行四邊形縮爲萬分之一觀之。其理仍悉與一秒同。故船必由O至C′以OA′C′B′必各爲OACB之萬分之一也。而船前進之路。常在OC對角一直線上可知。故二運動之終效。爲能使船一秒末由O至C。而徑路成一直綫。凡無論若何二運動。其合成之速度。皆可本此法求之。故可立法而名曰平行四邊形法。

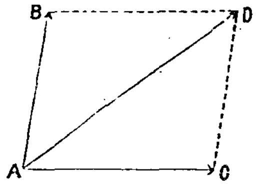
第一圖



照加于物體一點上二速度之方向大小所由表之二綫。作一平行四邊形。其對角綫即可以表合成速度之方向大小。

三十　運綫 (Vector) 表速度方向及大小之綫。謂之運綫。尋常ＡＢ等綫。僅名爲綫。而此云運綫。以其含一定之方向及速度之小大而別之也。故單速度之運綫。即表其速度之方向大小。而平行四邊形法。可舉其要如下。以下凡示速度加速度與力等之圖解。皆此運綫

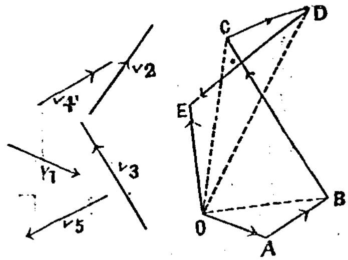
照表二速度之二運綫作一平行四邊形。其對角線爲合成速度之運線。



三十一　速度之合成及分解 (Composition and Resolution of Velocity) 加二速度或二以上速度于物體之一點。其終效可本下法而知。今假定五速度 V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 同時加于Ｏ點。欲知其終效如何。可由Ｏ點引 V_1 之運線ＯＡ。V_2 之運綫ＡＢ。其合成速度爲ＯＢ。次引 V_3 運綫ＢＣ。則ＯＢ ＢＣ二運線之合成運綫爲ＯＣ

即V V_2 V_3之終效爲OC也。再引V_4之運線CD。得合成速度之運線OD。再引V_5之運線DE。得合成速度之運線OE。即V_1 V_2

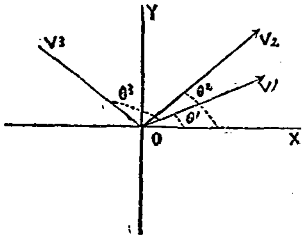
第三圖



V_3 V_4 V_5同時加于O點之終效。爲OE也。故欲知集于一點許多速度之終效。即由此點起。順次將各速度之運線聯爲折線。折線之終點。與原點(即受諸速度之點)聯之。即合成速度之運線。而反言之。則。單速度可分爲二速度或二以上多速度。如第二圖。速度AD分之。可爲AB、A'C二速度。第三圖OE分之。可爲OA、A'B、B'C、C'D、D'E五速度也(此後合成速度畧言合速度。)

附錄　如動于O點之V_1 V_2 V_3等速度。皆同在一平面上。則求

合速度。較爲簡便。法用加脫香之ＯＸ及ＯＹ二軸。V_1之方向與ＯＸ所作之角命爲θ_1。V_2 V_3之方向與ＯＸ所作之角爲θ_2 θ_3先將V_1分之。得 $V_1\cos\theta_1$（θ爲角度下倣此 cos.見四十五節）與ＯＸ同方向。得$V_1\sin\theta_1$與ＯＹ同方向。再將V_2 V_2分之。得$V_2\cos\theta_2$及$V_3\cos\theta_3$與ＯＸ同方向。得$V_2\sin\theta_2$及$V_3\sin\theta_3$與ＯＹ同方向。故ＯＸ之方向。得



補圖四

$$V_1\cos\theta_1+V_2\cos\theta_2+V_3\cos\theta$$

ＯＹ之方向。得

$$V_1\sin\theta_1+V_2\sin\theta_2+V_3\sin\theta_3$$

即V_1 V_2 V_3分爲ＯＸ及ＯＹ方向二速度也。今試以Ｘ示ＯＸ方向速度之大小。以Ｙ示ＯＹ方向速度之大小。此二速度之

合速度命爲R。則

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

如求R之方向。試命R與OX所作之角爲θ。則

$$\tan\theta=\frac{Y}{X}$$

又如V_1 V_2 V_3等不同在一平面上。求合速度。須用OX OY OZ三軸。V_1與OX之間之角。命爲α_1。與OY之間之角。命爲β_1。與OZ之間之角。命爲γ_1。V_2 V與OX OY OZ之間之角。各命爲α_2 β_2 γ_2 α_3 β_3 γ_3。然後照前法將V分之。與OX同方向。得$V_1\cos\alpha_1$ 與OY同方向得$V_1\cos\beta_1$ 與OZ同方向。得$V_1\cos\gamma_1$ V_2 V_3分之。理同上。故OX之方向。得

$$V_1\cos\alpha_1+V_2\cos\alpha_2+V_3\cos\alpha_3$$

OY之方向。得

$$V_1\cos\beta_1+V_2\cos\beta_2+V_3\cos\beta_3$$

OZ之方向。得

$$V_1\cos\gamma_1+V_2\cos\gamma_2+V_3\cos\gamma_3$$

即VVV等速度。分爲OXOYOZ之方向三速度也。此三速度之合速度。命爲R。而以X示OX方向之速度之大小。Y示OY方向之速度之大小。Z示OZ方向之速度之大小。則

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

又R與OX之間之角命爲α。與OY之間之角命爲β。與OZ之間之角命爲γ。則

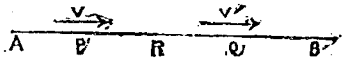
$$X=R\cos\alpha \qquad Y=R\cos\beta \qquad Z=R\cos\gamma$$

故R之方向可知。

三十二　加速度 (Acceleration)　加速度者。速度變化之平均

也。今試定A爲物體初動之點。t秒之末。以速度V動于P點。t'秒之末以速度V'動于Q點。此二速度之差爲$V'-V$而時之差則爲$t'-t$故$\frac{V'-V}{t'-t}$爲$t'-t$間每秒之速度之差。而即爲PQ間之平均加速度。若此加速度爲等加速度則$\frac{V'-V}{t'-t}$可爲PQ間任意一點R之加速度。若不爲等加速度。則照量變速度運動法。就R左右取極近兩點。此兩點之距既極近。則此二點之間之平均加速度。可爲在R點時之加速度。

第四圖



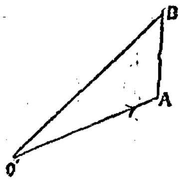
譯輯　等加速度者。如原速度十尺。第一秒末加三尺速度。第二秒末又加三尺。即每秒加三尺也。故第一秒之末。速度爲十三尺。第二秒之末。速度爲十六尺。第三秒之末。速度爲十八尺。以下類推。不等加速度者如第一秒末加三尺。第二秒加四尺。第三秒加

二尺。其所加者。非若每秒三尺之各相等也。

三十三 加速度之合成及分解 (Composition and Resolution of Acceleration) 速度有方向有大小。而加速度亦有方向有大小。故亦可以運綫表之。即論速度時所用運綫各條之理。皆可用之于加速度也。如加二加速度于一物體。欲求合加速度如何。則可用平行四邊形法求之。如許多加速度同時加于一物體。欲求其合加速度。又一加速度欲分爲許多加速度。其圖解均與論速度時所載者同。玆不復贅。

三十四 耗道葛辣非 (Hodograph) 物體運動時。其運綫初爲oA。繼則速度變而運綫亦變爲oB。而加速度可即以AB表之。何以言之。以oA與AB之合速度爲oB故也。而各瞬時間此合速度之運綫。皆通過原點o。則各瞬時間運綫之端之

第五圖

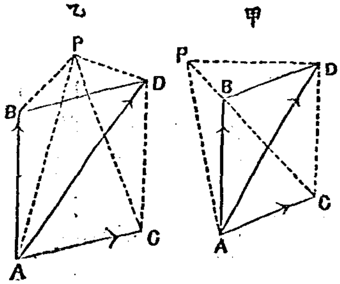


軌跡（運線末點接踵之迹）必成一曲綫可知。此曲綫名曰耗道葛辣非。而耗道葛辣非之方向。即以示加速度之方向。此乃伊里羊魯焉呀米頓創立之法也。

三十五　速度能率 (Moment of Velocity)

一物體之速度。以運綫ＡＢ表之。任取一點Ｐ。由Ｐ點至ＡＢ作一垂綫。此垂綫與ＡＢ綫相乘之積。名爲速度ＡＢ對Ｐ點之能率。故速度對一點之能率。即以速度之運綫爲底邊。所對點爲頂點之三角形面積之二倍。而速度有方向。故能率分正負。常例以速度方向繞所對之點。左旋（錶針

第六圖



旋時相反之向為正。右旋為負。即ＡＢ之能率。如甲圖為正。如乙圖為負也。又諸速度能率之和。與諸速度之合速度之能率等。

附錄　諸速度能率之和。與諸速度之合速度之能率等。可證之如下。如上圖。取ＡＢＡＣ二速度。其合速度為ＡＤ。今欲易于證明。定所對Ｐ點與ＡＢＣ同在一平面上。

$$\triangle pAD = \triangle BAD + \triangle PBD \pm \triangle PAB'$$

上式(±)號。為或加或減之意。如甲圖宜取(+)號。如乙圖宜取(−)號。又ＰＡＣ與ＡＢＤ與ＰＢＤ各三角形。其底邊皆相等。故各面積之比。猶各三角形之高之比。即

$$\triangle BAC + \triangle PBD = \triangle PAC$$

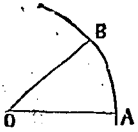
以入前式。得

$$\triangle PAD = \triangle PAC \pm \triangle PAC$$

故可知ＡＤ之能率。即爲ＡＣＡＢ能率代數法之和。而ｐＡＤ爲以合速度運綫爲底邊ｐ爲頂點之三角形。若由ｐ作一垂綫于ＡＤ。其面積之大小。視乎合速度運綫之大小。即視ＡＢＡＣ二速度之大小。可不言而明矣。如以運綫表之。則可使運綫之方向垂綫于能率之面。(即表能率之三角形)而取其長以定能率之大小。

三十六　角速度(Angular Velocity)　一物體運動時。成ＡＢ經路。如由Ａ至Ｂ用ｔ秒。則可取一任意點ｏ。而$\frac{AOB}{t}$名爲對ｏ點之平均角速度。此角速度。有時或增或減。法可取極小之時。以定運動所對之點之眞角速度。一與變速度運動所論者同。

第七圖



第三章例題

一　每一點鐘速度二十里。問每秒速度得若干尺。

解　一里爲一二九六〇尺。故二十里得二五九二〇〇尺。而此數爲三六〇〇秒所進之數。故每秒速度得七十二尺。

二　每一點鐘加速度二十里。問每秒加速度若干。

解　定一點鐘爲時之單位。其速度加二十里。如以秒爲單位。照第一題。其速度爲差七十二尺。故每秒之加速度

$72 \div 3600 = .02$尺 即二分

三　設如有人行船。其速度每秒四尺。河廣三百尺。河流之速度每秒三尺。今欲由此岸逢彼岸。其船横衝河流而過。當于何地點上陸。又船所行之航路若干。

解　船行速度與河流速度。爲四與三之比。故船所行航路。爲以三百尺與二百二十五尺爲隣邊所作矩形之對角線。以四與三之比。猶三百與二百二十五之比也。而上陸之地點。即對岸下流二百二十五尺。航路之長爲

$\sqrt{300^2+225^2}=375$ 尺。

四　每秒加速度二纖米突。問每一點鐘加速度若干。

答　六十六里。

五　二速度相交成直角。其一速度爲每秒五尺。而合速度爲每秒十三尺。問成直角之他速度若干。

答　每秒十二尺。

六　相等二速度之合速度。仍與原二速度等。問二速度間之角若干度。

答 [illegible]百二十度。

七 設有人順流行船。每秒速度八尺。若逆流而行。每秒速度二尺。今將船頭直指對岸而行。由此岸到對岸時。費鐘五秒。問河濶若干尺。

答 一千五百尺。

八 一物體西向行。其速度一秒十二尺。五秒以前。此物體之速度爲東向二十三尺。問其間每秒平均加速度若干。

答 西向每秒七尺。

第四章 運動 (Motion)

三十七 等速度運動 (Uniform Motion) 運動之最簡易者。爲等速度運動。因無加速度之故。其耗道葛辣非爲一點。即速度之

方向大小不變而經路成一直線也。故即前章所論。將速度命爲V。所行之路命爲s。所費之時命爲t。

$$v=\frac{s}{t}\qquad s=vt\qquad t=\frac{s}{v}$$

vts三數之中。有二已知數。其餘一數即可求而知。故此理毋庸他說之申明也。

附記

前言合單位由原單位綜合而成。（二十三節）例以速度。其關係爲時除路。故欲表其單位與原單位之因應。常以$\frac{L}{T}$略記之。L所示者爲路。T所示者爲時。又他處有幷用M者。其所示爲質量。凡示此等因應之式。謂之示位式。(Dimension) 速度之示位式爲L一乘。T負一乘。又加速度爲以時除速度。故其示位式爲$\frac{L}{T^2}$。此等示位式傅里愛創立之。

三十八　等加速度運動 (Uniformly Accelerated Motion) 等加速度運動。速度雖變。而加速之方向大小常不變。故耗道葛辣非。可成一直綫。此運動分二類。一直綫運動。一拋物綫運動。

三十九　等加速度直綫運動 (Uniformly Accelerated Rectilinear Motion)　等加速度直綫運動。速度之方向與加速度方向。同在一直綫上。何以言之。試視第五圖。如oA與AE同方向。則oB之方向。亦必與oAB同也。速度之方向既不變。故運動之經路必爲一直綫可知。

今定在A點時之速度爲V_0。在B點時之速度爲V。AB之距離爲S。行過此距離所需之時爲t。命加速度爲α。則照加速度定義。得

$$\alpha = \frac{V-V_0}{t} \qquad V = V_0 + \alpha t \qquad t = \frac{V-V_0}{\alpha}$$

然以α加速度運動。費去t秒。物體可由A至B。與以$\frac{V+V_0}{2}$運動。費去t秒所行者等。故

$$S=\frac{V_0+V}{2}t=V_0t+\frac{1}{2}t^2$$

如靜止之物體。其運動由A點起。順次以α加速度運動。而速度漸加。則上式之$V_0=o$。故得

$$V=\alpha t \qquad V^2=2\alpha S \qquad S=\frac{1}{2}\alpha t^2$$

四十　下落物體。(Falling Bodies) 地球表面上物體。即離表面不遠之物體。由眞空中下落。爲等加速度運動。據實驗法所測。物體眞空中下落。其加速度每秒爲三十二英尺餘。此數常以g。字示之。故g與前式之α意同。以其同爲等加速度也。靜止之物從眞空中下墜。一秒之末。其速度爲g。即三二尺餘。其下墜之路

爲$\frac{g}{2}$。即十六尺餘。三秒之末。其速度爲$3g$。即九六尺餘。其下墜之路。爲$\frac{9g}{2}$。即一四四尺餘。故此時所用算式一與前節同。今特再舉之。

$$V=gt \qquad S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad V^2=2gS$$

上式之V爲t秒末之速度。S爲t秒間下墜之路之長。若物體原有向下之速度V_0。則

$$V=V_0+gt \qquad S=V_0t+\frac{1}{2}gt^2 \qquad V^2=V_0^2+2gS$$

附錄　落下之物體。其等加速度爲g。唯離地球不甚遠之物體爲然。蓋g之加速度。由地球之引力而生。而此力之減。爲地心與物體之心距離平方之反比。故流星石等遠距離物體。其測下墜速度之法。當用他法以求之。今試離地心取S　S′二點。下落物體速度。在S點時爲V。在S′點時爲V′。而由S至S′所

費之時爲t。如S與S′相離甚近。則加速度a爲$\frac{v'-v}{t}$。此數必爲$\frac{k}{S^2}$上式k爲一定之數。故照方程式寫之。

$$\frac{k}{S^2}=\frac{v'-v}{t}$$

而$\frac{S-S'}{t}$爲平均速度。故

$$\frac{S-S'}{t}=\frac{v+v'}{2}$$

此式與前式相乘。

$$\frac{k(S-S')}{S^2}=\frac{v'^2-v^2}{2}$$

又S與S′可視爲相等。故

$$2k\left(\frac{1}{S'}-\frac{1}{S}\right)=V'^2-V^2$$

亦不致與眞數大差。而地球表面上之加速度爲g。今命地球之半徑爲R。則

$$g=\frac{k}{R^2}$$

故

$$2gR^2\left(\frac{1}{S'}-\frac{1}{S}\right)=V'^2-V^2$$

上式之S S′無論其位置若何。而布算皆可合理。如流星石等極遠距離物體下落。則 $S=\infty$ （∞號言無窮遠也。見讀法。） $V=0$

故

$$2gR^2\frac{1}{S'}=V'^2$$

即物體落至地球表面上時。S′與R等。略去空氣阻力不算。得

$$V'^2=2gR$$

四十一　拋上物體運動(Motion of Vertical Projectiles)一物體于眞空中向上擲之。其受g之引力。與下落者不同。如初擲之時。其速度爲V。一秒之末。速度減g。二秒之末。速度減2g。三秒之末。速度減3g。順次遞減。速度減盡。則復下落。惟任取物體經路之一點。其上升時至此點之速度。與再下落時至此點之速度。大小同而方向異。故物體落至原處時。其速度仍爲V。又由初擲之點。升至最高點所費之時。與由最高點落至初擲之點所費之時同。而上

擲物體V_0之方向。既與g之方向相反。故上節公式中之g。宜用減號。即宜以$-g$代上節公式中之g也。其餘仍與上節公式同。即

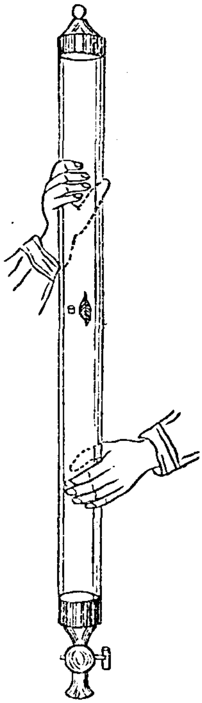
$$V = V_0 - g t \qquad S = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$V^2 = V_0^2 - 2g s$$

故$V_0 = g t$或$t = \frac{V_0}{g}$為原速度V_0減盡之時。亦即為達最高點之時。此後時再增。則v為負數。此負數所以示物體下降之速度。

四十二　真空中實驗　凡物體下落時。如石等類。其物體重

第八圖



者。速度常大。如紙等類。其物體輕者。速度常小。此乃空氣之阻力

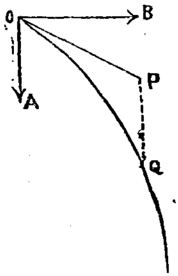
使然。如圖。以羽毛及銅塊同入一玻璃管中。抽去管中空氣。然後使羽毛銅塊下落。其降下之速度。彼此皆同。可視而見。從可知無空氣阻力。則羽毛與銅塊。雖輕重不同。而降下之加速度則同。

四十三　拋物綫運動 (Parabolic Motion)　拋物綫運動。其加速度之方向大小雖不變。而速度之方向與加速度之方向不同。故不僅速度之大小變。而速度之方向亦變。今試以 α 加速度加于V速度。此二者之方向不同。先可分V速度爲二。一與 α 加速同方向。命爲OA。一與 α 加速度成直角。命爲OB。然後將二分速度分別視之。OB之方向。每秒進行之速度皆等于OB。成等速度運動。而OA之方向。照直綫運動之理。第一秒末。其速度爲 $OA+\alpha$ 第二秒末。爲 $OA+2\alpha$。第三秒末爲 $OA+3\alpha$ 而t秒之末爲 $OA+t\alpha$。故t秒之末。物體速度之方向大小。爲 $OA+\alpha t$ 與OB之

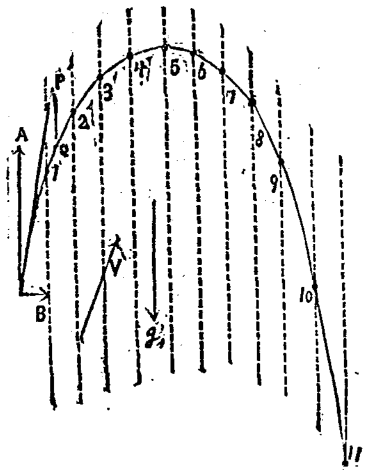
合速度。照平行四邊形法。此合成速度為 $\sqrt{OB^2+(OA+ta)^2}$。故定第九圖(見下節)中Q點為t秒末物體之位置。定OP為vt。則PQ為t秒間加速度Q所行之路。而其數等于 $\frac{1}{2}at^2$。

四十四　拋射體運動 (Motion of projectiles) 一物于真空中任

第九圖



第十圖



意擲之。此物體所受之加速度。恒爲g。故成拋物綫運動。今將物體原有之速度。命爲V。如第十圖。分速度V爲OA與OB二分速度。其地平綫之方向。每秒之速度恒爲OB。其垂直之方向。物體所受之等加速度。與下落之物體不同。（四十一節）故Q爲物體t秒後之位置。

$$OP = vt \qquad PQ = \frac{1}{2}gt^2$$

今消去t。得

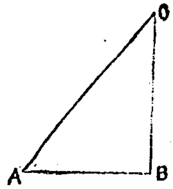
$$PQ = \frac{g}{2V^2}OP^2$$

此公式所以示OP與PQ之關係。即PQ視OP之自乘爲比例也。而OP爲經路所成曲線之切線。凡曲綫之具此關係者。名曰拋物綫。

四十五　三角大意 (Principle of Trigonomitry) 欲研究以上所

說運動之理。不能不用三角法。故記三角大要如下。試設一ＡＢＣ直角三角形。Ｂ爲直角。則 $\frac{BC}{AC}$ 爲Ａ角之正弦。以 $\sin A$ 記之。$\frac{AB}{AC}$ 爲Ａ角之餘弦。以 $\cos A$ 記之。$\frac{CB}{AB}$ 爲Ａ角之正切。以 $\tan A$ 記之。$\frac{AB}{CB}$ 爲Ａ角之餘切。以 $\cot A$ 記之。$\frac{AC}{AB}$ 爲Ａ角之正割。以 $\sec A$ 記之。$\frac{AC}{CB}$ 爲Ａ角之餘割。以 $\mathrm{cosec}\, A$ 記之。而Ａ角

第十一圖



之正弦。即Ｃ角之餘弦。Ａ角之正切。即Ｃ角之餘切。Ａ角之正割。即Ｃ角之餘割。又 $\sin^2 A$ 意爲 $(\sin A)^2$。

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad 2\sin A \cos A = \sin 2A$$

四十六　拋射物體之運動公式　物體拋射之速度爲Ｖ。其速度之方向與地平綫之間之角爲 θ。分速度Ｖ爲二分速度。一ＯＮ。垂直于地平綫。一ＯＭ。與地平綫同方向。則

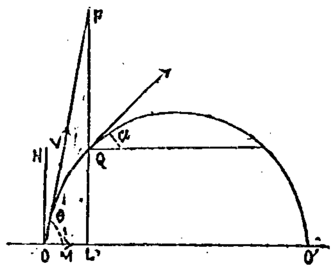
$$OM = V\cos\theta$$

$$ON = V\sin\theta$$

故欲求t秒後物體之速度V′。照四十三節所言。此速度V′必爲 $V\cos\theta$ 及 $V\sin - gt$ 之合速度。

$$V' = \sqrt{V^2\cos^2\theta + (V\sin\theta - gt)^2}$$

$$= \sqrt{V^2 - 2Vgt\sin\theta + g^2t^2}$$



上式中之$-g$。因速度ON之方向與加速度g相反。故用負號。四十一節

四十七　如欲求V′之方向。試定其方向與地平綫之角爲α。

得 $\tan\alpha = \dfrac{V\sin\theta - gt}{V\cos\theta}$

四十八　如求物體t秒後之位置。試定物體所在之位置爲Q點。

$$PQ = \frac{1}{2}gt^2 \qquad OP = Vt$$

$$OL = OP\cos\theta = Vt\cos\theta$$

$$LP = OP\sin\theta = Vt\sin\theta$$

$$LQ = OP\sin\theta - PQ$$

$$= Vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

$$OQ = OL^2 + LQ^2$$

據以上數式。Q點之位置可求矣。

四十九　如欲求物體所達之最高點及所費之時，可徑視此物體爲上射之直線運動。即視爲分速度ON垂直上射之直線運動也。蓋此處所云最高點。與物體以O-N速度上射之直線運動所達之最高點同高。而所費之時。亦與ON速度上射之直線運動所費去者同。今假定所費之時爲t。高爲H

$ON=gt$　　$t=\frac{1}{g}V\sin\theta$

$ON^2=2gH$　　$H=\frac{1}{2g}V^2\sin\theta$

五十　如欲求物體達地平線之遠及所費之時。試命OO′爲R。所費之時爲T。則所費之T與物體以ON速度垂直上射至最高點R。復落至原位置所費之時同。故T等于上節公式t之二倍。R爲物體以OM速度進行之等速度運動T秒末所達之遠。故

$$T=2t=\frac{2}{g}V\sin\theta$$

$$R=OM\,T=V\cos\theta\,\frac{2}{g}V\sin\theta$$

$$=V^2\frac{1}{g}\sin 2\theta$$ 四十五節

附錄　物體不論若何方向投之。欲其所達之處最遠。則必審定一能使 $\sin 2\theta$ 爲最大數之方向投之。此時 θ 爲四十五度。

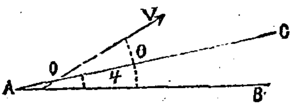
則 $\sin 2\theta$ 最大。即所達之處最遠。故欲使物體達最遠之處。宜使拋射時速度之方向與地平之間之角爲四十五度。即

$$R=\frac{V^2}{g}\sin 90^\circ=\frac{V^2}{g}$$

也。然此須定空氣爲無阻力。

又于斜面上拋射物體。其斜面與地平線成角度 φ。今欲求物體所達之處之遠。如圖。AC爲斜面。AB爲地平線。斜面與地

補圖五



之平線所作之角度爲 φ。試將物體以V之速度于AC斜面上O點投射之。速度V方向與地平綫所作之角度爲 θ。（與斜面所作之角度爲 $\theta-\varphi$）將V分爲二分速度。一與AC同方向。其速度爲 $V\cos(\theta-\varphi)$。一垂直于AC面上。其速度爲 $V\sin(\varphi-\theta)$。又加速度 g 亦照上所分二方

向分爲二分加速度。一爲$-g\sin\varphi$。一爲$-g\cos\varphi$。試假定所達之遠爲R_1。所費之時爲T_1。則T_1與物體以速度$V\sin(\theta-\varphi)$直綫運動。其方向垂直于斜面上。上升至最高點。復下歸于原位置所費之時同。R_1爲$V\cos(\theta-\varphi)$速度每秒末遞減去等加速度$g\sin\varphi$運動至T_1秒末所達之遠。故

$$2V\sin(\theta-\varphi)=T_1 g\cos\varphi$$

$$T_1=\frac{2V\sin(\theta-\varphi)}{g\cos\varphi}$$

$$R_1=V\cos(\theta-\varphi)T_1-\frac{1}{2}g\sin\varphi T_1^2$$

$$=\frac{2V^2\cos\theta\sin(\theta-\varphi)}{g\cos^2\varphi}$$

$$=\frac{V^2}{g}\left\{\sin(2\theta-\varphi)-\sin\varphi\right\}\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

如R_1爲最遠。則$\sin(2\theta-\varphi)$之數必最大。故抛上時。將速度V與地平綫所作θ角善爲審定。若

則

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$

$$R_1 = \frac{v^2}{g}(1 + \sin\theta).$$

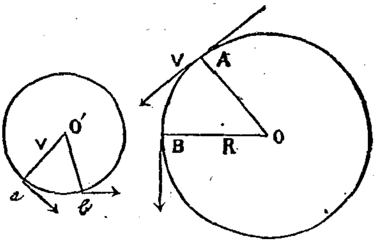
附記　有時著述家往往稱減速度。即速度與加速度反向。物體上擲。其速度遞減是也。然所謂減速度者。僅以加速度之負數表之足矣。故減速度之言。頗覺無謂。畧去不用。

五十一　向心加速度運動。　加速度之方向。常向于一定點。故生此運動。本章中所載者。僅以下之等速度圓運動及單弦運動屬此。

五十二　等速度圓運動 (Uniform Motion in A circle) 等速度圓運動。其速度變方向而不變大小。且其經路成一圓圈。故名之。設如V之速度。成一以O爲中心點之等速度圓運動。則速度V之方向。在A點時。必爲此點之切線。然無論在何點上。速度之大

小恒不變。故試以O′爲原點。作耗道葛辣非。可得一以O′點爲中心之圓。即速度在A點時。運線爲O′a。在B點時。運線爲O′b。則ab二點速度可表AB間加速度。故于耗道葛辣非上虛擬

第十三圖



一點。物體動至A點時。此點在a。物體動至B點時。此點在b。若是。則此虛擬點之速度可以表物體運動之加速度。虛擬點至a時。其速度之方向。爲耗道葛辣非上之a點之切線。故與O′a成直角。即加速度之方向。與物體在此點時速度之方向。常成直角也。故此加速度。恒向于圓心一點。又此虛擬點之運動。亦成一等速度圓運動。物體周圓周一周。此點亦轉一周。故定虛擬點之速度爲a。

則V與a之比。猶二圓周之長之比。而二圓周之長之比。猶二圓之半徑之比。二圓之半徑。一爲R。一爲V。

$$V : a = OA : O'a' = R : V$$

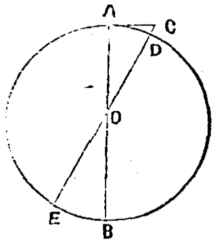
$$\therefore a = \frac{V^2}{R}$$

上式所以示加速度之大小。即速度V半徑R之等速度圓運動。其向圓心之加速度。常爲V^2/R也。此加速度生于向心力。(Central force) 而向心力之反力爲遠心力。(Centrefugal force) 向心力與遠心力相等而相反向。故無此加速度加于物體。則物體必離圓心飛去。

譯輯　凡物體受一力作用後。其運動常成一直線。若無他物體之摩擦等力以阻之。亦永不變其速度。故等速度圓運動時。物體所受者。最少必有二力作用。如以石繫于絲端。使成圓運動。細審

之。絲實較緊于前。則絲之方向有力焉將絲切斷之。石即飛去。與絲之方向成直角。即飛去之方向。爲圓周上一點（即切時物適在其處之點）之切線也。故石之等速度圓運動。實二分速度相合而成。一分速度爲圓周上切線。一分速度爲絲張力（張力注見第二十節）所生此張力所生速度。常與切線成直角。而向圓心。如圖。ＡＤＢＥ爲圓運動之經路。ＡＣ爲Ａ點之切線。其長所以示物體在Ａ時速度之大小。今定物體速度一秒之間可由Ａ達Ｃ。然因與他速度合成之故。一秒之末。不在Ｃ而在Ｄ。則他速度之大小。即可以物體一秒間由Ｃ至Ｄ之長短而定之。故ＣＤ即以示他速度之大小也。反言以明之。圓運動時。物體常欲循切線之方向而行。而爲向心力所引。如以象皮絲繫石。使成等速圓運動。石之

補圖六



慣性。常欲循切線而行。而象皮絲能將此性不斷制之。故絲雖易于引長。而苟不切斷。即能使石向中心成一等速度圓運動也。如將絲切斷。石循切線之方向飛去。如止石使不運動。則象皮絲又收縮如前。而當運動時。此二力之終效。爲等速度圓運動。則等速度圓運動。必爲此二力所生二速度合成之運動明矣。

定AC之速度爲V。定CD之平均速度爲V_1。何以言平均速度也。以一秒間行近圓心之路之長爲CD。其速度各點不同。初遲終速。恰如下落之物。初落時速度爲零。一秒之末速度爲三十二尺餘也。照幾何定理。$CD \cdot CE = AC^2$ 今定r爲圓之半徑。則

$$V_1(2r+V_1)=V^2$$

即

$$2rV_1+V_1^2=V^2$$

此處V_1比V。其數甚小。而V_1自乘之數尤小。故V_1^2可以畧去。即

$$2rV_1=V^2$$

然V_1爲CD之平均速度。一秒之始。速度爲零。則一秒之末速度必爲$2V_1$。轉言以明之。一秒之間。CD上之速度。爲由零變爲$2V_1$也。而此爲等速度。且常向圓心。故以α代$2V_1$。則

$$\alpha r = V^2$$

$$\therefore \alpha = \frac{V}{r}$$

即半徑r速度V之等速度圓運動。其向心之加速度常爲$\frac{V^2}{r}$也。

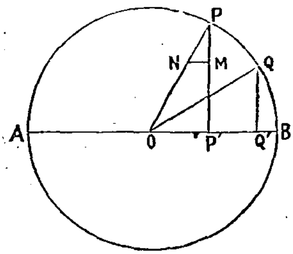
五十三　變速度圓運動　變速度圓運動。可分加速度爲二。一圓徑之方向。一切線之方向。圓徑之方向。所以使運動成圓圈。而與速度之變大變小無關係。即速度自乘半徑除之所得之商也。切線之方向。所以使速度變大變小。而與方向無關係。故其法與加速度直綫運動法同。

五十四　曲率半徑 (Radius curvature)　運動不成圓圈而成

任意之曲線。法將曲線一小部視爲圓周之一小部。故任意曲線運動。可定爲各圓運動所聯合而成。凡將曲線之一部。視爲圓周之一部時。此圓之半徑。爲曲綫此一部之曲率半徑。

五十五　單弦運動(Simple Harmonic Motion)單弦運動。爲直綫運動。其加速度常向一定點。而加速度之大小。恒與此點之距離相比例。

第十四圖



凡論單弦運動。須先懸擬一等速度圓運動。然後証明較易。今成取一假設點。定其速度爲V。成半徑R中心點O之等速度圓運動。而假設點之位置。印影于通過O點之直綫AB上。此印影點之運動。即單弦運動也。如圖假設點P之加速度爲PN。PN即$\frac{V^2}{R}$。

恒向圓心O點。分此加速度爲二。一PM。垂直于AB綫。一NM。與AB同方向。而印影點之運動在AB綫上。故PM與此運動無關係。其有關係者。僅NM即印影點之加速度在P′點時。僅NM也。而此加速度常向O點。今以α表之。

$$\alpha = NM \qquad NM : P'O :: PN : PO :: \frac{v^2}{R} : R$$

$$\therefore \alpha = P'O\frac{v^2}{R^2}$$

而$\frac{v^2}{R^2}$爲一定之數以K代之。

$$\alpha = K\,OP'$$

此爲印影點在P時之加速度。K數一定不變。故加速度恒視OP′之距離爲比例。而此運動名曰單弦運動也。假設點之經路。謂之標準圓。(Circle of Reference) 標準圓之半徑。謂之動幅。(Amplitude) 假設點周經路一周所費之時。謂之周期。(Period) 以2π

除BOP角。（π即圓周率）謂之位相。(Phase) 如運動始于假設點Q。則BOQ角。謂之初角。(Epoch)

假設點之速度爲V。其在B點時之加速度爲$\frac{V^2}{R}$此與RK等。因

$$\frac{V^2}{R} = RK \quad \therefore V = R\sqrt{K}$$

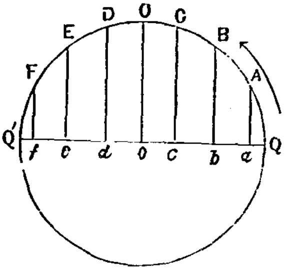
又命周期爲T。則T等于$\frac{2\pi R}{V}$。故

$$T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{K}}$$

而
$$K = \frac{\alpha}{OP} \quad \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{OP}{\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{距離}{加速度}}$$

譯輯　木星之衛星（繞木星之小星）軌道。與地球軌道略同在一平面上故實則繞木星而行。成一圓圈。而自地球視之。竟成一直線。其往復速度。在兩端時最小。漸近中點漸大。爲單弦運動也。故凡等速度圓運動。如向圓面垂直視之爲圓。斜視之爲楕圓。橫視之爲直線。今試定物體初在之點爲Q。將圓周十六等分之。如物體每秒

進圓周十六分之一。則一秒之末。由Q至A命QOA角爲θ。而一秒末物體印影之位置爲Oa。等于$R\cos\theta$。二秒末物體印影之位置爲Oβ。等于$R\cos 2\theta$ t秒末物體印影之位置。等于$R\cos t\theta$。以x入之。作方程式。$x=R\cos t\theta$



補圖七

如$t\theta=0°$ 則$\cos 0°=1$ ∴$x=R$ 如$t\theta=90°$ 則$\cos 90°=0$ ∴$x=0$

如$t\theta=180°$ 則$\cos 180°=-1$ ∴$x=-R$ 如$t\theta=270°$ 則$\cos 270°=0$ ∴$x=0$

如$t\theta=360°$ 則$\cos 360°=1$ ∴$x=R$

物體循圓周而行無已時。故其印影點亦左右性復無已時。

定物體之速度爲V。則向心之加速度必爲$\frac{V^2}{R}$。一秒之末。物體

由Q至A。試將此時向心之加速度$\frac{V}{R}$二分之。一平行QQ′。一垂直于QQ′。平行于QQ′之量。爲$\frac{V^2}{R}\cos\theta$。垂直者爲$\frac{V^2}{R}\sin\theta$。此二者惟$\frac{V^2}{R}\cos\theta$與單弦運動有關係。然物體在B時。此分加速度爲$\frac{V^2}{R}\cos2\theta$。在C時爲$\frac{V^2}{R}\cos3\theta$。在O時爲零。即運動遠圓心時因有此分加速之故。而物體之速度小。近圓心點時。因無此分加速之故。而物體之速度大也。

此運動分正負二向。由左趨右時爲正。由右趨左時爲負。而以位相表物體所在之位置。則取物體由圓心點O正向前行。至此Q位置所費之時。以周期除之即得。如物體由O至Q。復回至a。計費六秒。其位置以$\frac{6}{16}$之位相表之是也。

附錄　設如AB直線上。有一單弦運動之物體。又于其運動時。加以與AB成直角之等速度運動。其合成之運動。狀如波

之曲線。故此曲線名爲弦波線。大洋之中。水深岸遠。其波時現此形。近海岸處。因海岸及海底之阻礙。波形甚爲複雜。然其種種變化。要皆本于弦運動。故凡波運動。無不由弦運動而成。研究此理。乃物理學一切要處。

第四章例題

定地球引力之加速度。每秒三十二尺。空氣阻力畧去不算

一　由輕氣球放下一石。十五秒後。在輕氣球人聞石落地聲。定聲音速度爲每秒千尺。問輕氣球高若干尺。

解　定高爲 x 尺。則石下落所費之時。爲 $15-\frac{x}{1000}$ 照四十節公式。得高二千五百尺。

二　試取一石垂直上擲之。其速度爲V. t 秒後又取一石照前之方向上擲之。速度亦爲V。問二石相遇之點之高.

解　定高爲 x 尺。先擲之石所達之最高點爲 $\frac{V^2}{2g}$ 故 $\frac{t}{2}$

爲先擲之石。由最高點下落。行過經路$\frac{V^2}{2g}-x$所費之時。即

$$\frac{V^2}{2g}-x=\frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad \therefore x=\frac{g}{2}\left(\frac{V^2}{g^2}-\frac{t^2}{4}\right)$$

三　設如有竿直立。其距發炮處之遠爲二十尺。今炮與地平線之角爲四十五度。而炮子適梢竿頂而過。炮子出口時。速度每秒八十尺。問竿高幾何。

解　地平與垂直之兩分速度。同爲$\frac{80}{\sqrt{2}}$。故砲子至竿處其所費之時爲$20\div\frac{80}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$　而引力所引下之路爲$\frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=2$尺。故竿高爲十八尺。

四　問下落物體六秒後之速度。四秒間之經路。由第二秒末至第六秒末之經路。

答　百九十二尺。　二百五十六尺。　五百十二尺。

五　今有一物體。以四百尺之速度垂直上擲之。問二秒末及十

五秒末之速度若何。最高點之高若何。至最高點所費之時若何。二十秒末物體離地之高又若何。

答　三百三十六尺。上向。　八十尺。下向。　二千五百尺。

十二秒半。　一千六百尺。

六　試于塔頂落石。石落下 a 尺時。又有人于塔身他處落石。此人之落石處。下于塔頂 b 尺。今二石同時至地。問塔高幾何。

答　$(a+b)^2 \div 4a$

七　試取一物體于離地平面一百四十四尺高之處。以每秒百尺之速度橫擲之。問物體至地時。其地平距離若何。又至地時物體速度若何。

答　三百尺。　每秒百三十八尺餘。

八　試取一物體。以四百尺速度與地平面作三十度角拋之。問

垂直之分速度若干。

答　二百尺。

九　試求上題最高點之高。及達最高點所費之時。

答　六百二十五尺。　六秒二五。

十　試于每秒七十二尺速度之輪船上。取一物體。以每秒九十六尺之速度垂直上擲之。問五秒末物體所在之位置及速度。

答　離射出點地平距離三百六十尺。高八十尺。速度九十六尺餘。

十一　向心加速度每秒四十五尺。半徑二十尺之等速圓運動。若猝將加速度除去。問物體飛去之速度幾何。

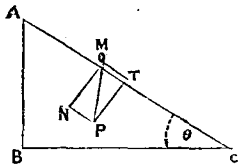
答　三十尺。

第五章　定軌運動

五十六　定軌運動　質點運動之經路。予以定軌。即能使之常循定軌面動。此章中僅于地球引力所生之運動。取載斜面及擺二者。

五十七　斜面運動(Motion on An Inclined Plane)質點運動于眞空中斜面上。謂之斜面運動。即質點之經路。限于斜面。常在斜面上運動也。此運動之加速度原爲g。向下而無所增減。今因斜面與地平面成θ角。故加速度之原方向。雖爲MP。而此處宜分爲二分加速度。一垂直于AC斜面上。一

第十五圖



與AC平行。即MN與MT所示者是也。然質點常依此斜面而

行。故此運動與分加速度MN無關係。惟MT之分加速度循A C方向。爲此運動之加速度。照四十節四十四節所說速度與加速度同方向或不同方向。其所生之運動。爲直線運動。或爲拋物線運動。今 $MT = MP\sin\theta = g\sin\theta$。故前兩節所載公式。若以 $g\sin\theta$ 代 g。即可用之于此運動也。試定靜止質點由A落至C經路之長爲S 命至C點時之速度爲V。則照從前公式。

$$V^2 = 2g\sin\theta\, S \qquad AB = S\sin\theta$$

$$\therefore V^2 = 2gAB$$

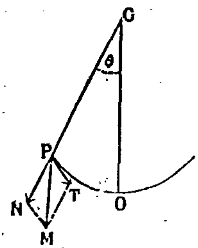
即由A落至B點之速度與由A落至C點之速度等。故質點當下落時。可不問其在斜面上不在斜面上。若所達之點。同在一水平面上。其速度必同。

五十八　單擺運動(Motion of Simple Pendulum)懸一質點于無

質量之絲。凡物體必有質量。故絲就不至于無質量。無質量云者。因絲之質量甚小。雖視爲無質量亦無礙也。而手動之質點又受地球之引力。生擺動。謂之單擺運動。此運動之加速度爲PMsinθ。其經路則常在以絲長爲半徑之球面定軌內。

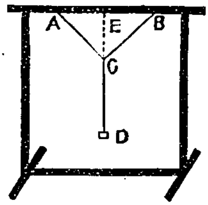
絲之一端爲C。故C爲球面之中心。O爲球之最下點。質點在P時。成PCO角。命爲θ。分PM爲二分加速度。一與CP同方向。如PN。一與CP成直角。如PT。照斜面運動理。PN分加速度。與球面成直角。與此運動毫無關係。故PN可以不論。其有關係者。僅PT。即此時之加速度爲g sinθ也。如P之速度方向常在POC一平面上則運動總不離此平面而質點之經路。常在一圓周上。

十六圖



附錄　白賴克伯路恩擺。法將絲兩端固定之于ＡＢ兩點ＡＢ之長畧短于絲。取絲之中點Ｃ以他絲繫之。如ＣＤ。而懸質點于Ｄ。故此擺之形如Ｙ字。今徑定絲爲無質量。以少許速度任意方向動之。細察其運動如何。知此運動可定爲兩單擺所合之運動。其一即Ｙ字平面上長ＣＤ之單擺。其二乃與此平面成直角長ＤＥ之單擺。此兩單弦運動之合運動。視ＤＣ與ＤＥ之長若何。質點之經路。可成種種曲線。

補圖八



五十九　欲明單擺運動之理。非用深算理不可。然定θ角爲極小之角此理亦容易可知因θ角極小時。$\sin\theta$可定爲等于θ故加速度爲$g\theta$即$g\frac{OP}{CP}$（號所示者爲弧）命絲長爲Ｌ。以代ＯＰ。得$g\frac{OP}{L}$故加速度之大小。視弧之長短爲比例。正言之。此運動之加速度

視O與質點所在位置之距離爲比例也。故爲單弦運動。此運動之周期定爲T。照五十五節。得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{距離}}{\text{加速度}}} = 2\pi\sqrt{(OP) \div g\frac{OP}{L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

L爲擺之長。故周期視擺長之平方根爲此例。（平方根。猶言開平方。下仿此）又據上式。則周期T爲定數。與θ角無關係。故θ角既小。雖運動畧有高低其周期常不變。而名之爲擺之等時性(isochronism)鐘擺即此理之應用也。

附錄　如質點速度方向不在POC一平面上。可分爲二分速度。一與平面平行。一與平面成直角。然則此擺之運動。乃兩單弦運動所合而成也。兩單弦運動之周期相等。照位相及動幅之關係若何。質點經路成種種橢圓。其周期各與其單弦運動之周期等。

譯輯　擺之搖動數之比。爲擺長倍數平方根之反比。今定此擺之長爲L他擺之長爲2L其周期爲T與T′。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}} \qquad \therefore \frac{T}{T'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

以K代上式之2則K爲擺長任意倍數。故

$$\frac{T}{T'} = \frac{1}{\sqrt{K}} \qquad \frac{T}{T'} = \left(\frac{1}{\text{擺每秒搖動數}}\right) \div \left(\frac{1}{\text{K倍長擺每秒搖動數}}\right)$$

今命兩擺每秒搖動次數爲P P′。

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{1}{P}\right) \div \left(\frac{1}{P'}\right) = \frac{P'}{P} = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

即兩擺搖動次數之比。猶擺長平方根之反比也。

第五章例題

一　一擺每秒搖動二十五次。他擺每秒搖動三十次。問二擺之長之比若何。

解　搖動數之比。猶擺長倍數平方根之反比。故兩擺之

長之比爲 $\left(\frac{1}{25}\right)^2 : \left(\frac{1}{30}\right)^2 = 1.44 : 1$

二 四十五度角之斜面上之靜止物體。依斜面落下。問三秒之末。速度若干尺。

答 六十八尺弱。

三 若前題之角爲三十度。問第三秒末至第六秒末所行之經路若干。

答 二百十六尺。

四 問每秒搖動一次之擺之長。

答 八寸餘。

五 每秒搖動一次之擺。移之他處。其搖動次數。一日遲二秒。問兩處地球引力之比若何。

答 $1 : .99953$

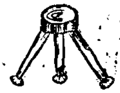
第六章 迴旋

六十 堅固體(Rigid body)聚質點而成體。其諸質點錯綜之位置。一定不變者。謂之堅固體。

六十一 運動如意 以上所論各運動之外。別有一種迴旋運動。欲使其與他運動分別。故以上所論各運動。時或稱射動。而速度名綫速度。堅固體當射動時。其所結成此體各質點。嚮同向。行同距。若將物體一質點靜止之。此堅固體之各部。可同時歸于靜止。而迴旋運動（此後畧稱迴運動或旋運動。）爲繞一靜止點之運動。故取一不限于定軌之質點。其運動有三。前後左右上下射動是也。然物體爲堅固體時此三者之外。猶可以前後左右上下三綫爲軸。而繞動于其周。故其運動有六。即有六如意運動也。試取一箱置于平面

上。僅有三如意運動。何以言之。以其僅可以前後左右進行。及繞上下軸之周而旋轉。故僅有三如意運動也。從可知固體予以一平面之定軌。即失去三如意運動。然失去一如意運動時。因固體之一點。在平面上。限于定軌使然。（因此定軌之故。物體不能成直角于平面之射動。故失去一如意運動）故上所言失去三如意運動。其在平面上必三點限于定軌。物體在一平面上。祇之雖適合。實則三點與平面相接。已足使物體安定。故器械用三脚臺即此理也。又僅一方向射動之器械。其在平面上。必有五點限于定軌。試將三圓柱脚之端。使成球形。而置二脚于陷道中。此二脚各有二點與陷道相接。其在平面上之脚。一點與平面相接。故失去五如意運動。僅餘一射動。凡器之臺之若此者。名爲滑機。如欲使六如意運動。全數失去。可將三柱圓球脚。一置在平面上。一置在陷道中。

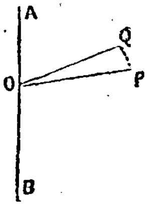
補圖九



一置在三角錐形穴中。在平面上脚。失去一如意運動。在陷軌中脚。失去二如意運動。在三角錐形穴中脚。失去三如意運動
臺若此者。名爲死機。

六十二　廻旋量　射動及廻旋。爲論堅固體運動者所共當講究。射動時。各質點之線速度。絕無異同。而旋運動時。可明之如下。

試取AB線爲動軸。質點初在P點。t秒之後。在Q點。如PQ與AB成直角。則POQ角。可以示廻旋之度數。



第十七圖

今假定此角爲θ。質點相結合之位置。雖廻旋而毫無變更。故各質點廻旋之度數皆爲θ。而$\frac{\theta}{t}$爲此時廻旋之平均角速度。試命爲ω則各點之線速度。爲以ω乘各點至AB軸之距離之積。

六十三　廻旋之運線 (Vector of Rotation) 交一線于廻旋軸。而以其長示廻旋之角速度。此線爲有大小有方向之一運線。足包

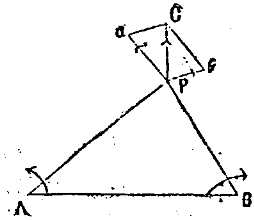
括廻旋之一切性質。故廻運動亦可以一運線表之。第表線速度時之運線。可平行于原線而任意移之。而廻運動之運線。其位置必不離廻旋軸。爲二種運線微異之處。廻旋既可表以運線。凡論線速度所用運線之法。亦可用之于此。試假定一點靜止之堅固體。同時受二旋運動則表此二旋運動之運綫可共通過靜止點而相切。故可將此二者作一平行四邊形。而以其對角綫表合成廻轉。而許多廻轉角速度。皆可依此合之。或分一廻旋角速度爲通過一靜止點之軸之許多廻旋角速度。亦可照用此法。然堅固體當受許多廻運動時。其軸常不會于一點。而運線仍可相會。故必用他法。然後可求也。

六十四　平行軸周異向二等角速度之合成。(Composition of Two Angular Velocities Equal and in Opposite Directions about Parallel

Axes）如圖垂直綫于紙面二軸爲AB。繞二軸之二旋運動。其速度均爲ω而反向。欲知其合運動如何。試任取一點P。照A周之角速度ω作直角于AP之綫速度Pa。照B周之角速度ω作直角于BP之綫速度Pb。而

$$\omega AP = Pa \quad \omega BP = Pb$$

第十八圖

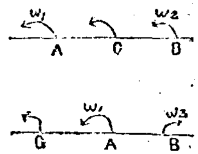


故此二角速度所生之合運動。爲PC之綫速度運動也。而PaCr三角形之Pa Ca兩邊。與AP BP成直角。故PaC角。等于APB角。又Pa與Ca之比。猶AP與BP之比。故PaC與APB兩三角形爲相似形。即PC與AB成直角。而其長爲ωAB也。ε與AB均爲一定之數。與P點位置無關係。故不論P點位置如何。此二角速度所生運動。爲直角于AB方向之PC。

轉言之，不論P在何點，皆爲同向速度PC，即合運動爲直綫射動也，據此可將A周之角速度ω分爲B周之角速度ω。（與圖所示反向）及線速度PC.

六十五　平行軸周二角速度之合成(Composition of Two Angular Velocities about Parallel Axles)　如圖，垂綫于紙面二軸AB之周之角速度爲ω_1 ω_2。今欲求其合運動。

第十九圖



可分AB于C，使

$$\omega_1 AC = \omega_2 BC$$

又ω_1可分爲C周之角速度ω_1及直角于AC之線速度$\omega_1 AC$而ω_2亦可分爲C周之角速度ω_2及直角于BC之線速度$\omega_2 BC$此二線速度相等而反向，故A周B周之角速度合成C周之角速度$\omega_1+\omega_2$也。如ω_1與ω_2反向，則C點在AB

二點之外。餘仍與前同理。而其合角速度爲 ω_1 與 ω^2 之差。

六十六　許多迴旋之合運動(Cmposition of Rotations)前言一旋運動可分爲任意平行軸周之等角速度及線速度。今一物體同時受許多角速度。各迴旋軸。雖不會于一點。試任取一點將各角速度分之。可得通過此點軸周之等角速度及線速度。故假定所受者爲五角速度。則得通過此點五軸周之角速度及五線速度也。即六十三節所說。其所合者。爲一角速度及一線速度。可不言而知也。故不論若何角速度相合時。常成一角速度及一線速度。六十四節與六十五節。即其例矣。惟六十四節之合角速度爲零。而僅餘線速度。六十五節之合線速度爲零。而僅餘角速度。則以二節各自表明其理。要非歧異而難歸一致也。

第七章 伸縮 (Strain).

六十七 彈性體 (Elastic Body) 集合之質點可變其相互位置之物體。謂之彈性體。如象皮塊之易變其形是也。

六十八 伸縮 堅固體僅有射動及廻旋運動。彈性體則于此二者之外。更有伸縮運動。伸縮者。即變結成此彈性體質點相互位置之運動之謂也。此運動所以說明分子間之關係。然非用簡淺算理所能說明。故此處僅畧言伸縮之爲何狀而已。其艱深之法。姑置不論。

一物體中量取其A·B一短直線。物體受力之作用而生伸縮。使A點在A′點。B點在B′點。而A′B′—AB爲綫之長之差。以AB除之。即$\frac{A'B'-AB}{AB}$爲伸縮所變AB線之比率。此比率謂之引量。

延長之引量爲正。縮短之引量爲負。引量所以量伸縮之大小也。

六十九　伸縮定理　伸縮所變化。略舉如下。

一　一直線之一小部。伸縮後仍可爲一直線。而常變易其方向。

蓋直綫當伸縮之後。或成曲綫。而曲線一小部。則可視爲直線。故所取者爲一小部。則謂之伸縮後仍爲直線也可。

二　平行綫之一小部。伸縮後仍平行。而常變易其方向。

一直綫當伸縮後。可仍爲一直綫。則平行直綫。當伸縮後。雖變易其方向。而其度仍與所平行之綫同。故仍平行。

三　矩形伸縮後。可變成平行四邊形。

照定理第二條。矩形二對邊。伸縮後仍相平行。故可成平行四邊形。

四　圓可變成橢圓。

此條可爲橢圓定義。即取圓錐形之斜切面以當橢圓。則其爲平切面伸縮後之形不待言也。平切面爲圓

五　球體可變成橢圓體。

此條與第四條同理。蓋球形可視爲多圓所集合而成。因伸縮之故。各圓皆變成橢圓。而其所集合之球體。亦變成橢圓所集合之球。然橢圓體有三軸。各直角相交。此三軸名爲伸縮之主軸。而橢圓體周離中心之最遠點與最近點。皆在三軸之端。故伸縮時有一主軸方向之引量最大。有一主軸方向之引量最小。

七十　正伸縮　伸縮時三主軸僅變其長短而方向仍不變。即前之位置與後之位置相平行。名曰正伸縮。試取鐵丸熱之。其體積膨大。即此正伸縮之運動也。

七十一　分行　(Shear)　彈性體伸縮時。其一平面全不動。而他質點皆與此面平行而動。謂之分行。如黏糖于板上。糖與板黏附之面全不動。餘則平行于所黏之面而動。其不動之面。謂之分行面。此運動一邊之引量爲正。則他邊之引量必爲負。即一邊延長。一邊必縮短也。凡伸縮不論其狀態若何。皆可分爲分行及正伸縮二者。分行與旋運動相當。正伸縮與射動相當。

第八章　力　(Force)

七十二　牛頓定法　上數章所言者。僅說明運動之情狀如何。而物體何以動。則必有動之因焉。論物體之動之因。實爲力學主眼所在。而有確當之三法。此三法創自牛頓。故名爲牛頓三法。

第一　物體若不受外界作用。使之變其狀態。則必恒靜止。或

恒成一直線之等速運動。此外界之作用。名爲力。

此法名慣性法。蓋物體皆有欲循其本態之性。而名之爲慣性。即十一節所說者是也。故無外界作用。則靜止之物體。常循其靜止之本態。運動之物體。亦常循運動之本態。而不變其方向與速度。然在地球上之物體。皆受地球引力之外界作用。而妨其運動。又受空氣之抵拒。而妨其運動。故如上所言之等速運動。不可得見也。

第二　物體運動變化之量。與加于物體之力相比例。而變化所由起。則在力之方向。

此法可以說明力之性質。何則物體運動變化之量。由于加速度。苟知加速度之若何。即可明力之若何也。然此法可渾舉物體運動變化之量以爲言。則不問力之加于靜止體與運動體。而其能

奏夫終效也同。

第三　一物體與他物體以力。則他物體能還以力。所與力與所還力。相等而反向。

照此法則力不能孤舉。以有原力必有反力。（原力即所與之力。反力即所還之力。）也。而二力總稱之爲倂力。此法殆可視爲表明第一法之理。何則物體之慣性恒欲守其故態。而外界作用恒欲變其故態。二者相反故也。如將生此倂力之二物體合而目爲一物體。則無所謂外界作用。而反力即無由見。

附錄　第一法言無外界作用。則動體必常爲等速運動。夫等速運動之言之如何。必爲同時行同距也。易言之。即第一點鐘行二里。第二點鐘所行亦二里也。而第一點鐘之二里。與第二點鐘之二里。其相等與否。不難量而知之。故同距之言。可無疑

義。惟第一點鐘與第二點鐘。並非同時。所以不能與同距之言比較。然則欲知同時之爲如何。以錶當乎。曰未也。錶之用爲取其針所行之路以定時刻。即定錶針爲等速運動。以定時刻也此不獨錶爲然。即以一年一日量時。亦無非定地球爲等速運動以量之也。故凡量時所用者。皆無不以等速運動爲本。因之不能用以說明等速運動之如何。第畧言等速運動者。同時進同距也。今試下一說焉。同時者。乃等速運動。進同距之遠所用之時也。其誰不非笑之。予竊以爲可定第一法爲等速運動之定義。然後言等速運動爲物體不受外界作用之運動。則同時爲此等運動之物體進等距離所用之時。自不待言而明矣。顧牛頓以來。物理學家。皆以此爲運動之第一法。今故仍沿之以爲運動之定法。以此外並無所不合也。

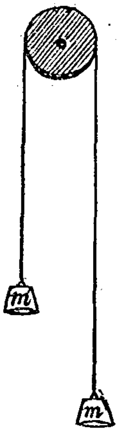
七十三　力之單位　(Unit of Force)　試假設質量相等三物體受相等之力。各同方向。今命質量爲m。力爲f。力所生之加速度爲α。而將此三物體視爲一物體。其質量爲3m。所動之力爲3f。加速度仍爲α。即加速度相等時。則力視質量之多少爲比例。又照前節之第二法。則同一物體。其加速之大小。視所受力之大小爲比例。故($f \propto m\alpha$)（∝號爲相因而變之意。即$m\alpha$之數大。則力f因之而大。$m\alpha$小則力f因之而小。故f大小。因$m\alpha$之大小而變也。）試以一定數K入之。得　$f=Km\alpha$。而定力之單位法。常以一單位力于一單位時內。動于一單位質量之物體。生一單位加速度。定之。故　$f=m\alpha$。而力之示位式。因之爲$[MLT^{-2}]$。若所用以定力單位之時路質之單位爲CSG法。則力一單位。謂之一功。Dyne。又一物體由眞空下落。如從前所說。物體受地球引力所生之加速度。每秒約九百八十纖米突。試以g代九百八十之數。則下落

物體爲一單位質量時。此物體與地球之引力。照CSG法。即爲g功。而此力名爲一葛蘭之力。故質量爲m葛蘭時。即爲mg功

附錄　以一功爲力之單位。其數甚小。故實用時。常取百萬功。名曰美加功。爲力之單位。

七十四　阿梯吾特器　照上節所言。加f力于m質量之物體。其加速度必爲$\frac{f}{m}$　阿梯吾特器。即以表明此理之器也。如圖。

二十圖



二物體之質量爲m m′。以繫于一絲之兩端。而懸絲于極光之圓軸上。如m′等于m。則二物體靜止不動。如m′小于m。則地球引力。m邊大。m′邊小。故m邊下降。而m′邊上升。而其加速度大小如何。不難求而知之。m所受之力爲mg。m′所受之力爲m′g。故足以生此加速度之力。爲二邊所受力

之差$mg-m'g$。而所運動之質量爲$m+m'$。故加速度爲$\frac{(m-m')g}{m+m'}$

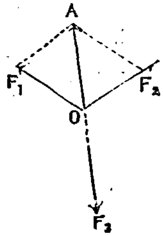
七十五　合力及分力(Resultant and Components)二力用于一質點。等量而反向。則物體必靜止。靜止之物體謂之穩定。(Equilibrium) 然使二力非等量非反向時。欲知其終效如何。則照以上所說。力有大小有方向可知。故力可以運綫表之。而二運綫之合量。爲平行四邊形之對角綫。故求二力之合量。亦可照平行四邊形法以求也。凡求速度所用者。皆可用之于此。故其法不復再述。

七十六　穩定要項(Condition of Equilibrium)　許多力動于一質點而物體穩定。可任取一方向將力分之。此方向之許多力之分力之和必爲零。不然。則此方向餘有力。即此方向餘有運動也。故方向不同之二力。不能使物體穩定。（等量反向二力不在此例）

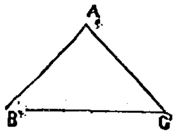
七十七　三力穩定(Equilibrium of Three Forces)　一平面上

之三力。動于物體而穩定。則三力必會于一點。何以言之。如圖。F_1 F_2 二力引長之必會于一點。命此點爲 o。二力之合力爲 O A。此合力與 F_3 等量而反向。故穩定。故 F_3 之方向大小。亦可以 A O 表之。即 F_3 與 O A 同在一直綫上也。故 F_3 引長之亦必通過 O 點。

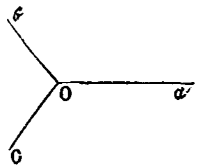
二十一圖



附錄　三力動于一質點。欲知其合力如何。照所前所說。取三力之運綫作折綫。原點與折綫終點聯之。即爲合力運綫。故此三力當穩定時。終點必在原點上。即終點與原點合爲一點也。而三運綫可成一三角形。今命爲 A B C。再取 O 點引 o a。o b。o c 三運綫以表 B C。C A。A B 三力。則



補圖十



$boc = \pi - A$　　$aob = \pi - C$

$coa = \pi - B$

然據三角法定理。三角形三邊之比。猶各邊對角之正弦之比。即

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{oa}{\sin boc} = \frac{ob}{\sin coa} = \frac{oc}{\sin aob}$$

此法名賴美定理。即三力動于一點而穩定。則各力各與他二力方向所作之正弦相比例也。

七十八　力之能率 (Moment of Force) 作力之運線。而于運線外任取一點。此點離運線之距離。與運線相乘之積謂為力對此點之能率。其理與速度能率同。而諸力能率之和。亦與合力之能率等。

七十九　平行二力之併合 (Composition of Two Parallel Forces)

如圖平行二力 F F′ 動于 A B 二點。欲知其合力如何。可假定合力動于 O 點。而以 R 表之。據此則于 O 點動以與 R 等量而反向之力。此三力之合力必爲零。而三力對此點之能率亦必爲零矣。今三力對 O 點之能率爲。

$$O \quad F.OA \quad F'.OB$$

故

$$O + F.OA + F'.OB = O$$

而

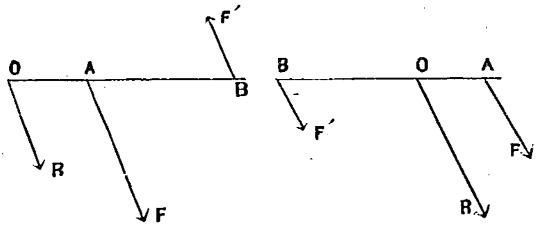
$$AB - AO = BO$$

故

$$F.OA - F'(AB - OA) = O$$

即 $OA = \frac{F'AB}{F+F'}$

O A 之長可知。合力所動之點即可知。詳言之。即以 F 與 F′ 之比分 A B 爲兩部而得此

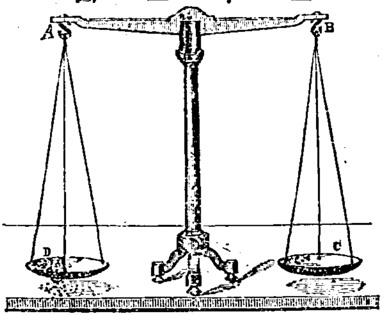


第二十二圖

O點也。O點名平行力中心點。而三力之合力等于零。則R＝F十F'可知。即F F'二力之合力方向大小可知。

八十　天平(Balance)天平爲用上理以量重之器。如圖。置所量之物于秤盤D。置錘銅于秤盤C。而支A B于n點。物體與錘

圖三十二



銅之重力動于A點B點。如n爲A B之中點。則物體與錘銅等重。其對n點能率之和必爲零。故二力與皮臺之反力成穩定。然造A B桿。欲使n適在A B中點甚爲難得。故量重欲求精密。宜用代衡法。法以所量物置之秤盤D。以他物置之秤盤C。穩定後。將D盤所量物取出。而以錘銅入之。使與C盤物相穩定。故n點雖不在A B桿之中點。而D盤

錘銅與所量物之重必等。故所量物之重可以知之較精。又求An與Bn之差。可用交衡法。試以m質量之物體入D盤。以錘銅入C盤。如穩定時錘銅之質量爲m'。可將m'質量之錘銅取出。而移D盤之m質量入之。又以錘銅入D盤。如穩定時D盤內錘銅質量爲m''。則

$$mg.An = m'g.Bn \qquad mg.Bn = m''g.An$$

$$\therefore \frac{An}{Bn} = \frac{m'\,Bn}{m''\,An} \qquad \therefore \frac{An}{Bn} = \sqrt{\frac{m'}{m''}}$$

m' m''爲已知數。即An與Bn可知矣。

八十一　對力 (Couple)　以上所說二平行力或二以上之數多平行力。其合力既可求而知矣。今有f f'二平行力。等量而反向。若照七十九節公式。其合力爲零。即$Ao=\frac{F\,AB}{F+F}$右邊之分母爲零也而所動之O點在無窮遠。無由定其位置。此反向而等量之二平行力。謂之對

力。二力相離之距謂之對力柄。(Arm of Couple) 試命柄長爲AB。任取一點O。求二力對O點能率之和。而由O至f與由O至f′兩距離之和。與AB等。今命能率之和爲M。命O至f至f′兩距離爲a b。

$$M = f.a + f'.b = f.AB$$

如O點在f f′之外定a>b則$+f'b$宜作$-f'b$

故不論所對之O點在何處。即對于力平面上任取一點。其能率之和常相等也。此和名對力能率之和。故對力之能率。恆爲柄長乘力之積。

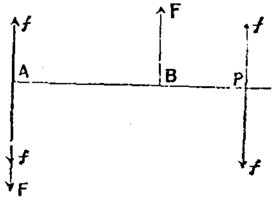
八十二、對力定理 說明如下

第一 在一直線柄上二對力。其能率相等時。則二對力相等

如圖AB爲柄。F爲對力。任于AB線上取一點P。定

$$AP = m\,AB$$

二十四圖



然後于P點動以與F平行而自相反向之二等力f。于A點亦然。此f四力。與不加等。而P點向下之f力。與B點F力之合力爲$F-f$。照七十九節。此二平行力中心點。其距P點必爲$\frac{FBP}{F-f}$今欲使此中心點在A點上。則必先使

而
$$mAB = AP = \frac{FBP}{F-f}$$
$$BP = AP - AB = AB(m-1)$$
$$\therefore\ mAB = \frac{FAB(m-1)}{F-f} \quad \therefore\ m(F-f) = F(m-1)$$

即
$$F = mf$$

故使Ff二力之比爲m。則在P點向下之力f。與在B點之F力之合力。動于A點。其量爲$F-f$而向上。而與在A點之F力。

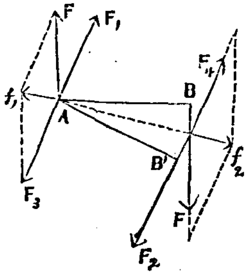
及在A點向上之f力。其量爲$F-f$而向下者。可以消去而穩定。故六力之中。惟餘在P點向上之f力。與在A點向下之f力而成對力。即以AB爲柄F之對力。與以AP爲柄f之對力等也。而F對力之能率。爲$F.AB$。f對力之能率爲$fAP=mABf=m.AB\frac{F}{m}=F.AB$。故二能率相等。所以對力僅視其能率之大小何如。可不論其力之大小何如。對力能率。用以量物體旋轉之度。

第二　將對力柄之一端照對力所作之平面上。旋以任意角度。其對力仍不變。

柄AB力F之對力。于所作平面上。取一點B'。其由A至B'之距與AB等。試加F同量之$F_1F_2F_3F_4$四力于AB'兩點。如圖。此四力各與AB'成直角。而在一點上。各兩兩反向。故四力可自相穩

定。則加此于F對力上。與不加毫無異。而在A點之F F_3二力之合力爲f_1。在B點之F F_4二力之合力爲f_2。兩邊所作之平行四邊形互相等。故f_1與f_2等。且同在B A B′角平分綫之一直綫上而反向。故此二合力自相穩定。而F之六力。僅餘F_1 F_2二力。爲對

二十五圖

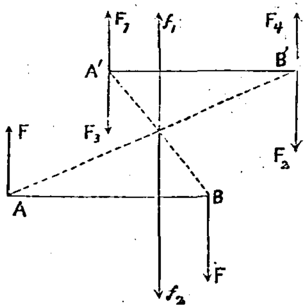


力。故以A B爲柄之F對力。與以A B′爲柄之F對力等。而A B′柄之F對力。可視爲A B′柄之F對力繞A點周而廻轉者。即定理所論之要旨也。

第三　力相等柄相平行。而柄之長又相等之二對力。其量必相等。

柄A B力F。爲已有之對力。照A B作一平行綫。取A′ B′等于A

B。于A′B′二點上。加以與F等量之四力F_1 F_2 F_3 F_4。此四力如圖所示。各與A′B′綫成直角而反向。故四力自相穩定。與不加等。而



在A點之F力。與在B′點之F_4力。成一合力f_1。而其平行力中心點爲AB′之中點O。其量爲2F。又在B點之F力與在A′點之F_3力。成一合力f_2。其平行力中心點。爲A′B之中點O。其量亦爲2F。而與f_1反向。故f f_2自相穩定。而F六力。僅餘F_1 F_2二力。爲對力。其柄A′B′與AB等。

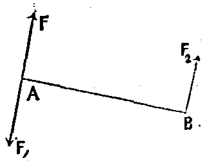
第四　二對力所作二平面相平行。其能率相等。則此二對力必相等。

此爲總括前三條之定理。即由第一條所言對力之能率相等。可

不問柄之長短如何。而能率等則二對力必相等。及第二條所言對力之柄。可任意旋之。故同一平面上之對力。可不問其柄之長短如何。而能率相等時。則二對力必相等。又照第三條所言。對力可任意移之于平行之平面上。故平行之平面上之對力。其能率相等時。則二對力必相等。所以對力若知其能率大小。廻轉方向。平面方向。則足以定之。其廻轉之方向。爲所以廻物體之方向。故能率有正負。平面之方向。爲力與柄所作之方向。此二方向及能率大小相等。則對力必等。故對力可徑以一線表之。法以線長表能率之量。而以與此線成直角之面。表對力之平面。且欲明能率之正負。則以此線之方向。由左向右由右向左表之。故此線可以表對力三要項。而此線爲可以表對力矣。又此線所以表方向與大小。故亦爲運線之一種。而求數多對力之合力。皆與速度上運

線所表者同。對力不可與他力混。故欲別尋常力于對力。或稱尋常力爲單力。

第五　同一平面上之單力及對力之合力。可以單力表之。



A爲單力所動之點。而此平面上。又有一能率M之對力。今欲求其合力。則可使之成柄長$\frac{M}{F}$力F之對力。何以言之。以能率仍爲M也。故使此對力之柄之端在A。使力之方向與F平行。如圖A點之F F_1二力相穩定。所餘者惟F_2力。即合力也。故合力之方向大小。均與單力等。惟其間之距離必爲$\frac{M}{F}$。

第六　用于一點之單力。可分爲用于他任意點之相等力。及與對此任意點之單力能率相等之對力。

此爲第五條之反。故其理無俟再述。

附錄　對力單力。雖共可以運綫表之。而對力之運綫。僅以平行爲限。其位置所在。可任意移改。單力不然。以所動常在同一線上也。故其差恰如綫速度運綫與角速度運綫之差。

八十三　用于堅固體之任意力 (Any Forces on a Rigid Body)

照以上所說。則任意數力用于堅固體之諸點。其合力可視爲單力及偶力二者。何以言之。以照上節第六條定理。此數力皆可分爲用于同一點之單力及相當之對力故也。

附錄　任意之諸力動于堅固體。其合力可爲ＯＡ單力。及ＯＢ對力。分ＯＢ爲二力。一爲ＯＡ方向。一與此相直角。成ＯＭ　ＯＮ二對力。照上節第五條定理。ＯＡ與ＯＮ對力之合力。可爲一單力。而此單力與ＯＡ之方向大小相等。今假命爲Ｏ′Ａ′。此Ｏ′點之位置。可取ＯＯ′直角于ＮＯＡ面。而使其長等于$\frac{ON}{OV}$

以定之又。oM之對力。與此單力平行。故可移之于o′點。使與單力之運綫同一方向。即任意諸力動于堅固體之合力。可爲動于一點之單力及同方向之對力。而表此合力方向位置之運綫。名潘瑣軸。或名中心軸。

然此處所宜留意者。求對力與合單力即oA單力之合力時。此合單力任意動于何點。其方向大小不變。何則以動于堅固體之數單力。可分之爲動于任意點同量同向之單力及相當之對力故也。單力之方向大小。不關于點之位置。而對力則照此點之位置所在。大小方向。即因而差。合對力當極小時。合單力之位置。直在潘瑣軸中。何以言之。照上理。合單力動于任意點o。可得合對力oB。如移此合單力于潘瑣軸。則合對力爲oM。而oM爲oB乘AOB角餘弦之數。其量必小于OB。

又潘瑣軸僅有一根。欲證明之。可假定爲有二根。一爲OA。其合單力爲F。合對力爲C。一O′A′。其合單力爲F′。合對力爲C′。此二者爲同此諸力之合力。故在O′A′之單力對力。若與在OA之單力對力方向相反。必穩定。而F與F′之方向大小相等。故F與-F′成一對力。其面與C及-C′之面成直角。即此對力與C及C′對力不同在一平面上。而決不得穩定也。則與假定之意相抵牾矣。故不能有二條中心軸。

第八章例題 凡言棒題。其重力可定爲在棒之中點

一長六尺之棒。一端懸七斤。他端懸三斤。棒重二斤。問穩定時。棒所支之點。當在何處。

解 試定其在距一端之x尺處。則對此點諸力之能率。必等于零。故 $7x-2\left(\frac{6}{2}-x\right)-3(6-x)=0 \therefore x=2$尺

二 阿梯吾特器之絲。其兩端所懸物體之重。爲三與一之比。問加速度若干。

答 每秒十六尺。

三 如上題兩端之重爲十九與二十一之比。當速度爲每秒六尺時。問下墜之經路若干。

答 十一尺二寸五分。

四 三力動于一質點。其運綫爲AB。AC。BC。則合力之運綫爲AC之二倍。試證明之。

五 棒長四尺。重一斤。一端懸重九斤。他端懸重十五斤。今欲使之穩定。當支于棒之何處。

答 距十五斤端一尺二寸五分。

六 重五斤長六尺之棒。支于一端A點。又支于離他端一尺之

B點。今于距A點二尺處懸重二十磅。問A B兩支柱受壓力若干。

答　A處十四斤。B處十一斤。

七　一物體在天平之左盤時。與右盤之錘銅五十兩相穩定。在右盤時。與左盤之錘銅五十一兩相穩定。問物體眞重若干。

答　五〇、四九五七兩餘

八　三力A B。B C。C A動于一堅固體。其合力爲對力。而對力之大小。視A B C三角形面積爲比例。試證明之。

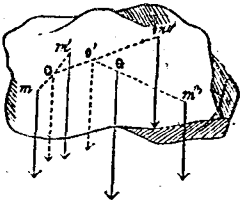
九　三角形A B C之B角爲直角。F力動于A點。其方向與A C成直角而與三角形同在一平面上。若于C B二點。與F力平行。動以$2F$ $-3F$二力。問三力合成後之對力能率若干。

答　$F(AB^2-2BC^2)\div AC$

第九章　重力與重心

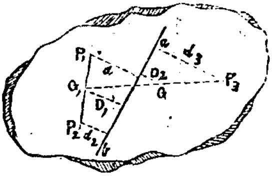
八十四　引力(Attraction)結成物體之分子。其性質若何。今日尙不能確知。然據實測所已知者。則二物體實有互引之力。此互引之力。名曰引力。而引力之强弱。與二物體之相乘積相正比例。與二物體距離之自乘積相反比例。物體下落。乃此引力之現象也。即因物體與地球互引之力而下落也。地球與物體間之引力。名之爲重力。(Gravitation)

八十五　重心(Centre of Gravity)試定m m' m'' m'''等爲結成物體之分子。此各分子與地球互引之力。即各分子之重。而皆垂直向下。故m m'二分子與地球之引力。其合力必動于m m'之中心点O。此合力與動于m''點之引力之合力。動于O′點。其位置爲200、



第二十八圖

$=O'm''$。而動于O'點之合力。又與動于m'''點之引力成合力。而動于G點。其位置為$3O'G=Gm'''$。即動于m m′ m″ m‴等點之引力。其合力可通過一定點也。故結成物體無數分子之重量之合力。名為此物體之重量。而合力所動之定點。名曰重心。亦名質量中心點。



插圖十一

附錄　質量m^1 m_2 m_3諸質點。在P_1 P_2 P_3等位置。試定在P_1 P_2二質點之重心為G_1。而由m_1 m_2 G_1至任意面a b之距離。命為d_1 d_2 D_1。而

$$m_1P_1g=m_2P_2g \quad \therefore (d_1-D_1)m_1=(D_1-d_2)m_2$$

$$\therefore D_1=\frac{m_1d_1+d_2m_2}{m_1+m_1}$$

照上。定P_3至此任意面之距離為d_3。求在G_1之質

點 m_1+m_2、與 P_3 之 m 質點之重心 G_2。可命 G_2 至此任意面之距離爲 D_2。則 $D_2=\frac{m_1d_1+m_2d_2+m_3d_3}{m_1+m_2+m_3}$

順次可得此任意面至諸質點之重心之距離。(即至全物重心之距離)今命此距離爲 D。全物體重心爲 G。

$$D=\frac{m_1d_1+m_2d_2+m_3d_3+\cdots\cdots}{m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots}$$

即 $D=\frac{\Sigma md}{\Sigma m}$ (Σ號爲類似項之和之意)

分母 Σm 爲物體之全量。而此任意面若通運 G 點時。則 D 爲零。

故 $\Sigma md=0$

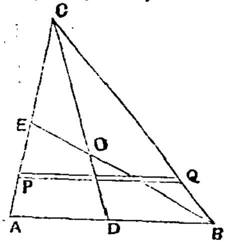
八十六　均勻體 (Homogeneous Body) 物體之各部。其性質皆等。即密度相等是也。此等體謂之均勻體。故均勻體之重心。可即其形而徑定之。又線與面雖不得謂之體。然求重心時。則線與面亦可謂之體。即線者較諸其長而厚濶極小之體也。面者較諸其

濶而極薄之體也。以下略舉求均勻體重心之法。其不明言非均勻體者。皆可視爲均勻體。

八十七　三角形板之重心(Centre of Gravity of Triangular Lamina)

三角形板。即三角形面。其重心在由各角點至對邊中點之平分綫交點上。何以言之。三角形ＡＢＣ。可視爲平行于ＡＢ邊之無數直綫若圖中ＰＱ所集合而成。而此無數綫之重心。皆適在中點。此無數中點之軌迹。聯之即成一直綫ＣＤ故重心必在ＣＤ綫上可知。又可視爲平行

二十九圖



于ＡＣ邊之無數直綫。所集合而成。而此無數直綫之重心。皆在中點。此無數中點之軌迹。爲ＢＥ。故重心必在ＢＥ綫上可知。而交ＣＤ于Ｏ。故Ｏ爲三角形重心。蓋此三角形之重心。在ＣＤ綫

上。亦在ＢＥ綫上。則必在二綫之公有點上可知。而交點爲二綫公有之點也。若易ＡＣ邊而視三角形爲無數直綫平ＣＢ邊所集合而成。得無數綫中點軌迹之直綫。與ＣＤ交于Ｏ點爲重心。理亦同。照幾何定理。Ｏ點分ＣＤ綫爲二部。其比爲二比一。即

$OC : OD = 2 : 1$

八十八　錐體重心 (Centre of Gravity of Pyramid) 三角錐體可視爲平行于一面之無數三角相似面所集合而成。故求重心可照上節理求之。即由各角點至各對面重心點之直綫交點。爲三角錐體重心。而照幾何定理。此交點所分直綫二部之比。爲三與一之比也。此不獨三角錐體爲然。凡各種角錐體莫不若是。故凡角錐體之重心。皆可取自頂角點至底面重心點之直綫分爲二部。而取其比爲三與一以定之。（上部三 下部一） 又圓錐體亦可視爲角錐

體。故求圓錐體之重心法亦同。

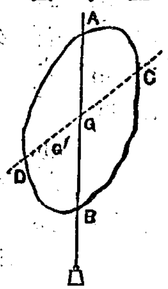
八十九　圓及圓球之重心 (Centre of Gravity of Circle and Spher)

圓形可視爲平行之無數直綫集合而成。而聯平行諸弦中點之綫。皆交于圓心。故重心即在圓心。又照上理。而圓球體之重心。即在球之中心點可知。

九十　求任意形物體之重心(Determination of Centre of a Body)

實測物體重心法。任取物體一點A懸之。其垂直向下之方向爲AB。又任取一點C懸之。其垂直向下之方向爲CD。AB與CD交于G點。即重心。何以言之。如重心不在G而在G′。則體重之合力必向下而動于G′點。而物體懸于A點。因反力向上之故成對力。使物體廻旋。必不靜止矣。故物體靜止時。其垂直向下

三十圖



之方向。爲A B與C D。則其重心必在此二綫上。而二綫之交點。必爲重心點可知。

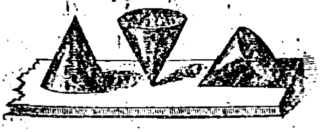
九十一　垂直向下(Vertically Downward)物體與地球引力。爲動于質量之中心點。故地球引物體時。其力常向地球質量之中心點。即地心垂直向下。即向地球中心之謂也。而與垂直向下成直角者。爲地平之方向。惟地球爲球形。故地球表面上各處之地平。其方向皆不同。

九十二　物體直立　地球重力常動于物體之重心而向下。故能使物體有常降下之勢。而物體靜止時。必有與此力反對之力。如直立一物體于卓上。面物體壓卓之力向下。而有與此反向之力。即卓推物體向上之力。與之相抵。故物體靜止。此反力僅動于物體之底面。與卓相接之面故欲使此力與地球之重力相抵。則通過

物體重心垂直向下之直綫不可不在此底面內。否則物體必顚覆。

九十三　穩定諸態 (Different States of Equilibrium)　如五十圖。物體懸于一點時。其重心常向地球之中心。即此物體當靜止時。其重心常在最下之位置。若稍變其位置。則重心較上于前。故即現欲復其原位置之狀。此類穩定。謂之安態。(Stable)

第三十一圖



又置橢圓體長端于平面。與平面觸于一點。重心向下通過此點。原可穩定。而重心不在最下之位置。反在最上之位置。故位置畧變時。重心即向下而動。不肯復歸其原位置。且愈欲遠其原位置。此類穩定。謂之非安態。(Unstable)　又如置一圓球體于平面上重心常向下。通過球面與平面接觸之點。故穩定。然球體不論如

何置之。其重心皆在同高之位置。當位置畧變時。重心雖不復歸于原體置。而亦不欲遠其原位置。此類穩定。謂之半安態(Neutral)故將圓錐體之底立于一平面上。則爲安態穩定。將圓錐尖立于平面上。則爲非安態穩定。如其周面立于平面上。則爲半安態穩定。

第九章例題

一　空心球外半徑八寸。內半徑五寸。二球心之距離一寸。問重心在球何處。

解　動于二球中心點之二重力。其比爲 8^3 與 5^3。如反向時。其合力所動之點。即空心球之重心。定此點離空心球之中心點爲 x 寸。(與二球之中心點在同一直線上)則 $8^3x=5^3(1+x)$。得 x 約三分二厘三毫。

二　將圓柱體一部尖之。使成圓錐形。圓錐高二寸。餘部圓柱體高五寸。問重心在何處。

答、離圓柱底面中心點高二寸八分五厘餘。

三　附相等三重于三角形板之角端。其重心仍不變。試言其理。

四　阿梯吾特器所懸二物體。其重相等。如絲之重。畧去不算。試證明其爲何種安態。

答　半安態。

五　一棒之兩端。以等力引之。爲安態。如推之。爲非安態。試言其理。

第十章　功用及能力

九十四　功用(Work)一物體每秒受F力。對此力之方向行

S路。則力乘所行之路。即FS之積。名物體所作之功用之量。故功用之宗位式爲[ML^2T^{-2}]。

附錄　計功用之全量。雖不論時。然將人力馬力或機器力所作之功用相比較。不可不論。馬能致重五十基葛蘭于二米突之高。其功用爲百基葛蘭米突。(功用之單位。爲力乘所行之路。故量功用須重與路並舉。)如不論時之長短若何。是亦馬能作之功用也。故機器每云有若干功用。此功用乃指機器在單位時內所顯功用之大小而言。如馬每秒平均之功用爲五百五十八尺磅(尺磅爲英國單位法。基葛蘭米突爲法國之法。)或二十六基葛蘭米突。名一馬力。而十馬力之機器。即每秒有五千五百尺磅功用也。又每秒之功用爲一亙耳。名一瓦梯。電氣工學中用之。

九十五　能力。(Energy)　物體所以成功用之本量。謂之能力。

故能力以所作功用量之。而其單位與功用同。單位有多種。或以每秒一磅力動一尺路之功用爲單位。此法名曰尺磅。或以一基葛蘭力動一米突路之功用爲單位。此法名曰基葛蘭米突。而CGS法。則以一功力動一纖米突之功用爲單位。名曰愛格。千萬愛格。名曰豆耳。而一基葛蘭。爲一〇〇〇g功。一米突爲一〇〇纖米突。故一基葛蘭米突之作用。爲一〇〇〇〇〇g愛格。即九八豆耳弱也。又一基葛蘭米突。爲七、二三三一尺磅。故一尺磅之四分之三。其數約爲一豆耳。

九十六　能力之量　舉m質量之物體。必用mg之力。此mg力舉物體至h高。則其功用之量爲(mgh)又此物體當歸復于原位置時。可照從前受力所成之功用。而還以作用。故此物體在h高時。其能力爲(mgh)又運動之物體。其運動可以成功用。故有能力

可知。而量運動物體之能力。如以m質量之物體。垂直向上擲之。任取高之一點。物體在此點。其速度爲V。由此再升上h高。其速度爲V′。照四十節。

$$V^2 - V'^2 = 2gh \qquad \therefore \quad mh = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV'^2}{2}$$

而(mgh)爲運動物體行h路對重力所作之功用。因此功用之故。動體之速度V減爲V′。即由V減至V′時。物體所失去之能力爲$\frac{mV^2}{2}-\frac{mV'^2}{2}$也。速度當全失時。則運動所生之能力已爲零。故V之速度全失。其所成作用爲$\frac{mV^2}{2}$。據此則m質量之物體。當速度爲V時。其所有能力爲$\frac{mV^2}{2}$可知。

九十七　動能力與還原能力(Kinetic Enugy and Potantial Energy)

能力分二類。一動能力。乃運動物體之能力。前節之$\frac{mV^2}{2}$是也。一還原能力。如在高處之物。壓縮于器內之彈性體。錶內所卷之法

條等所有之能力是也。

附錄　物體之還原能力。非單即一物體可見。牛頓運動第三法。原力常與反力相依附。故用力時必有二物體。還原能力即由此二物體間之關係而起者也。所以此物體之還原能力。不能僅屬此物體一邊。凡言物體還原能力。常含有視他物體爲靜止不動之意于其中。如石在高處。有還原能力。是因對有地球而有是能力。如無地球。石亦無所謂還原能力矣。即石在高處。雖地球亦可定其有還原能力也。而論此等運動時。則視地球爲靜止之物體。因而還原能力。僅舉而歸于石之一邊。錶內法條之還原能力亦然。即因有阻法條寬弛之物而還原能力始顯也。此外類推。

功用與能力之例甚多。（參照卷末例題）茲設一例以明之。設有棒照地

平位置而固定其一端。身體重百斤之人。以手攀挂于他端。則此攀桂之端下于前二寸。若人由高六尺墜至棒。則棒當撓下若干。此例可說明如下。凡棒撓下之路之長短。常與力之大小相比例。百二十五節 故

$$100 = 2K$$

上式K爲棒之彎撓比率。同一物體時。數恒一定。今定人墜至棒所撓下路爲x尺。此x尺。可即所作功用而知。蓋撓下力常與棒端抵力相比例。甫撓時。抵力爲零。漸撓下抵力漸增。撓下至x抵力增至Kx。平均抵力爲$\frac{Kx}{2}$。故此時功用即對$\frac{Kx}{2}$之力。行x尺。而成$\frac{Kx^2}{2}$功用也。又此功用爲人體下墜之動能力100×6所成。同此功用。故二者必相等。

$$\frac{Kx^2}{2} = 100\times6 \quad \therefore \quad \frac{500x^2}{2} \quad 600$$

$\therefore x^2 = 2{,}4$ 尺　$\therefore x = 1{,}54$ 尺

九十八　能力不滅 (Conservation of Energy)　m質量之物體。在S高時。速度爲V。墜下至S'高時。其能力若何。試命在S'處之速度爲V'。照四十節。　$V'^2 - V^2 = 2g(S - S')$

而此時之動能力爲 $\frac{1}{2}mV'^2$。　物體至地面時。其還原能力爲零。（量還原能力。常取在一處之能力。與在所欲量處之能力之差。以定其大小。故定一可爲標準之位置之能力爲零。以量他位置之能力。）物體在S'高處之還原能力爲(mgS')。今命兩種能力之和爲T。

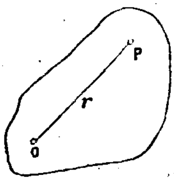
$$T = \frac{1}{2}mV'^2 + mgs' = \frac{1}{2}m\left[V^2 + 2g(s - s')\right] + mgs'$$

$$= \frac{1}{2}mV^2 + mgs$$

而 $\frac{1}{2}mV^2$ 爲在S高時之動能力。mgs爲在S高時之還原能力。故S'高時之能力。與S高時之能力等。S'爲任意所定之高。故下落物體。其高不論在何處。而能力無所增減。即能力不滅也。

九十九　迴旋半徑及慣性能率(Radius of Gyration and Moment of Inertia)　M質量之物體。繞O軸而迴旋。其角速度爲ω。試取在P點一極小之m質點。其迴旋之速度必爲$\omega \cdot op$。故定OP之距離爲r。此質點之動能力必爲$\frac{1}{2}mr^2\omega^2$。而此物體乃m質量之無數小質點集合而成。故各質點動能力之和。即此物體

第三十二圖



之動能力。而各質點動能力之和。爲$\frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2$定$\Sigma mr^2=MR^2$此R爲迴旋半徑。常以K表之。即物體繞一點而迴旋。而迴旋之動能力。與集此無數質點于離所繞點之迴旋半徑K處之動能力$\frac{1}{2}MK^2\omega^2$相等。MK^2名慣性能率。常以I表之。今略舉數種慣性能率如下。求此需用積分。故其法畧去不戴。

物形 質量M	迴旋軸之位置	慣性能率

細棒長l	通過棒中心成直角	$\frac{1}{12}Ml^2$
矩形薄板邊α b	通過中心與a邊平行	$\frac{1}{12}Mb^2$
同仝	通過中心直角板面	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
矩體邊a b c	通過中心與a邊平行	$\frac{1}{12}M(b^2+c^2)$
圓形薄板半徑r	通過中心直角板面	$\frac{1}{2}Mr^2$
同仝	圓徑	$\frac{1}{4}Mr^2$
球半經r	球徑	$\frac{2}{5}Mr^2$
二等邊三角形板底a高b	通過頂角點與板面直角	$\frac{1}{2}M(b^2+\frac{a^2}{12})$
正多角形板邊a角中徑r	通過中心點與板面直角	$\frac{1}{2}M(r^2+\frac{a^2}{12})$

附錄　一物體對任意迴旋軸周之慣性能率。爲通過重心相平行迴旋軸周之慣性能率。與此二軸之距離之自乘積乘質量之和。試于P點取一極小之質量m。離此點任意設一軸。又

通過重心設一軸。平行于任意軸。而由此點引二綫直角交于二軸。其二交點命爲ＣＧ。則ＰＣＧ爲直角于二軸之面上之三角形。由Ｐ作垂綫于ＣＧ。而交于Ｎ點。照幾何定理。

$$PC^2 = PG^2 + GC^2 - 2GCGN$$

而Ｐ爲隨意所定之點。故全物體內所含有之衆質點。皆可以Ｐ視之。

$$\Sigma mPC^2 = \Sigma mPG^2 + \Sigma mGC^2 - \Sigma 2GCGNm$$

定全物體之質量爲Ｍ。則

$$\Sigma mPC^2 = \Sigma mPG^2 + GC^2M - 2GC^2 \Sigma mGN$$

而照八十五節附錄。

$$\Sigma mGN = O$$

故

$$\Sigma mPC^2 = \Sigma mPG^2 + GC^2M$$

即對任意軸之慣性能率。爲通過重心平行軸之慣性能率與二軸之距之自乘積乘質量之和也。此理應用處甚多。如邊a之方板。使之廻旋于通過中心垂直板面之軸之周。定板之質量爲M。若測知其慣性能率爲$\frac{1}{2}Ma^2$。則通過角點垂直板面之軸之慣性能率。其爲

$$\frac{1}{6}Ma^2+\frac{1}{2}Ma^2=\frac{2}{3}Ma^2$$

可求而知。

軸與薄板成直角。而通過板之任意點。其慣性能率爲通過此點而平臥于板中。直角相交二軸周之能率之和。試取oXoY爲直角相交臥于板中之二軸。任于板中P處取一極小之質點m。由P點出二垂綫與oXoY直角相交。今命相交之二點爲MN。則

照上得

$$OP^2 = PM^2 + PN^2$$

$$\Sigma mOP^2 = \Sigma mPM^2 + \Sigma mPN^2$$

即通過此任意點而平臥于板中直角相交二軸周之能率之和也。據此。凡物體爲薄板時。其平臥于板中直角交二軸。不論所交者在板之何點。而能率之和必等。

一百　複擺(Compound Pendulum)一物體繞O點之周而迴轉。試將此物體視爲擺。其一搖動所費之時命爲T。則可以下式

$$T = 2\pi K\sqrt{\frac{1}{gh}}$$

表之。式中K爲物體對O點之迴旋半徑。h爲由O至物體重心之距離。凡尋常所用鐘內之擺。皆係此種。名曰複擺。複擺之周期。與長$\frac{K^2}{h}$之單擺同。故$\frac{K^2}{h}$謂爲複擺之長。常以L表之。即不問

單擺複擺。而長同。則周期同也。擺可用以測地球重力之大小。試定二處重力所生之加速度爲g g'。擺在二處之周期爲T T'。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\qquad T'=2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}$$

$$\therefore\ \frac{T^2}{T'^2}=\frac{g'}{g}$$

故知一處之重力若干。則視擺在此處一搖動所費之時多少。而移此擺于他處。視其一搖動所費之時多少。他處之重力。即可以算而知也。

第十章例題

一　長二尺之細棒。固定其一端。而略加以振動。問周期如何。

解　四尺之棒。通一軸于中心點而迴旋之。其慣性能率爲此之二倍。故迴旋半徑互相等。而爲$4\sqrt{\frac{1}{12}}$。即周期爲

$$2\pi\cdot 4\sqrt{\frac{1}{12g}}=13\cdots\text{秒。}$$

第十一章　摩阻

百〇一　摩阻（Friction）靜止之物體。以力動之。據牛頓運動定法。物體必生運動。然加以力而物體猶不運動。此時必有一與所加之力相反對者。名曰摩阻。故摩阻不能孤見。乃妨礙他力而起于二物接觸之面之力也。摩阻分二種。一名動摩阻。(Kinetic Fricticon)一名靜摩阻。(Static Friction)靜摩阻爲未運動之物體驟不能動之力。動摩阻爲于已運動之物體。反向而欲阻其運動之力。

附錄　動摩阻與靜摩阻之關係若何。或全無關係。物理學家先進。頗難言之。二物體間之動摩阻。常小于靜摩阻。故二者若無關係。而當動一靜止之物體時。其勝過靜摩阻之力。必大勝于動摩阻。果爾則物體初動時。必非徐徐而動。其欲止亦必非

徐徐而止。即驟然動驟然止也。而種種試驗所及。登基及游英格二人藉唐葺之助。得運動物體徐徐而止之發明。故此二種摩阻力。原同爲一種。當生運動時。可徐徐變此種爲他種也。

百〇二　毛霖法　毛霖試驗摩阻而發明二則如下。

第一　常例動一物體時。其摩阻力之大小。與直壓力相比例。而與觸接面之大小無關係。

此物體靜止于他物體上。此物體之重。即爲壓力。而無他力與壓力相關係。壓力垂直于觸接面。所謂直壓力是也。今欲將有摩阻之物體活之。此壓力之外。于觸接面方向。尙有一摩阻力。故動于二物體觸接面間之力之合力。不垂直于觸接面。此合力名曰總壓力。反言之。則總壓力分爲二分力。其垂直于觸接面者即直壓力。其平行于觸接面者即摩阻力。常例云者。雖可舉尋常所見者

以爲例。若極粗糙之面。或此物體尖部觸于他物體時。則不能照此法。

第二　常例動摩阻之大小。與物體之速度無關係。

此法所云常例。若速度極大時。則不能據以爲例。

百〇三　摩阻比率　摩阻力不能單顯其用。亦決不能勝所動之外力。唯摩阻力。可使物體守其靜止之態。故即此使守靜止之原因。而物體初動時。其摩阻力因而最多。設有一初動之物體其摩阻力爲F。直壓力爲N。又取一定數K。照第一法。

$$F=KN$$

此定數K。名爲物體間摩阻之比率。(Coefficient of Friction) 故K之數小。則物體必滑。

附錄　試驗摩阻比率取一物體作一板面。而載他物體于其

上。徐徐將板面側之。若板面在地平面上側至θ角。而物體始下行。定物體之重爲W。即爲物體所動之力。今將W分之。一板面之方向。一與板面成直角。即分爲$W\sin\theta$與$W\cos\theta$也。$W\sin\theta$因摩阻力之故相抵銷。$W\cos\theta$爲直壓力。定摩阻比率爲U。則U爲此二力之比。故

$$U=\tan\theta$$

而測知θ角爲若干度。即摩阻比率可知矣。此θ角名摩阻角。(Angle of Repose)

百〇四　試驗所得物體之摩阻比率。畧舉于下。

鋼鐵與鋼鐵	〇、三五一
同其間以油塗之	〇、一一八
同其間以水塗之	〇、三〇八
鋼鐵與黃銅	〇、一九五

同其間以油塗之	〇、一四六
同其間以水塗之	〇、一〇五
鋼鐵與瑪瑙	〇、二〇〇
同其間以油塗之	〇、一〇七
同其間以水塗之	〇、一六六

此等比率之大小。全視乎表面磋磨之精粗。茲不過取其平均數而已。

百〇五　液體摩阻　液體與固體間之摩阻力。速度非極大時則與速度自乘積相比例。又比兩固體間之摩阻力小。故固體塗以油與水等物。則所塗處與液體相摩阻如前節表。其比率常較小。是也。

第十一章例題

一　十斤之物體。在四十五度角之斜面上。沿此面以十五斤力上引之。問加速度若何。其摩阻比率爲〇、四一四。

解　分十斤力爲斜面方向。及直角于斜面之二分力各爲 $5\sqrt{2}$ 而直角于斜面之力爲直壓力。故摩阻力爲 $5\sqrt{2}\times 414$。今沿斜面引上之力爲十五斤。而沿斜面向下之力爲摩阻力與斜面方向力 $5\sqrt{2}$ 之和。此向上力向下力之差。生加速度度。故

$$a\,\frac{10}{32}=15-5\sqrt{2}\,(1+414)$$

由此得 a 加速度爲十六尺許。

二　摩阻此率〇、八。物體二十五斤。于平面上橫動之。問當用力若干

答　二十斤以上

三　一物體可靜止于四十五度角之斜面上。如在平面上橫動之。則所用之力比直舉時所費者多。試證明之。

第十二章　衝突

百〇六　運動量(Momentum)　質量乘速度之積。名運動量。故動體之質量爲M。動至t秒。其速度之差爲V。則每秒運動量之差爲$\frac{vM}{t}$。而$\frac{v}{t}$爲加速度。故運動量之差。爲質量乘加速度之積。而力亦爲質量乘加速度之積。因之動于動體之力。可即運動量之差而知。又以F力動之物體。極短時之後。以F′力動。其運動量之差爲$(F-F')t$　t即極短之時也。

百〇七　衝突(Impact)　設有非彈性之m及m′質量二球。以V及V′之速度。在同一直綫上運動。而V V′同方向。定m′球在前。

m球在後。如V大于V'。則此二球必有時衝突。當衝到之瞬時內。可定爲有力動于二球體間。命爲R。此後則二球合爲一體。而前進之速度。二球體皆等。命此皆等之公速度爲u。故m球運動量之差如下式。即

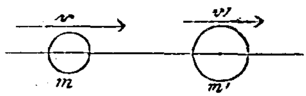
$$運動量之差 = mu - mv = R$$

而m'球運動量之差如下式。即

$$運動量之差 = m'V' - m'u = -R$$

一邊所動之力爲R。一邊所動之力爲反力-R。而其

三十三圖



量之大小相等。故

$$m(v-u) = m'(u-v') \quad \therefore \quad u = \frac{mv+m'v'}{m+m'}$$

$$R = mv - mu = \frac{mm'(v-v')}{m+m'}$$

又

百〇八　衝躍　如上節所說之二球體爲彈性體。則甫衝突

時。其形畧變。(即畧凹入也)而旋欲復其原形。因之生出此球衝他球之力。而二球仍相離開。此力常比上節之R力小。試命爲R'。定

$$R' = eR$$

e爲衝躍比率。其數恒小于一。而同物體時。常爲一定之數。凡彈性體。衝躍以前。一與非彈性體同。其理已具于上節。玆不必復述。惟衝躍之後。二物體仍相離開。故二球之速度仍不同。今命m球之速度爲u'。m'球之速度爲u''。而甫衝到之瞬時內。如上節所說。其公速度爲u。則此時m m'二球之運動量爲mu及$m'u$以後離開而運動量變成mu'及$m'u''$。故

$$\text{m球運動量之差} = mu - mu' = eR$$

$$m'\text{球運動量之差} = m'u - m'u'' = -eR$$

得

$$u' = u - \frac{eR}{m} = \frac{mv + m'v' - em'(v-v')}{m+m'}$$

$$u'' = \frac{mv + m'v + em(v - v')}{m + m'}$$

又有時虛擬一e等于一之物體名曰完全彈性體。(Perfectly Elastic Bodies) 非彈性體時 e 爲零。

附錄　照以上所說二球之質量爲 m m'。速度爲 V V'。衝躍後速度爲 u' u''。而衝躍前二球所有運動量之和爲 m V + m' V' 衝躍後運動量之和爲 mu' × m' u''。即

$$\frac{m}{m+m'}\left\{(mV + mV') - em'(V - V')\right\} + \frac{m'}{m+m'}\left\{(mV + m'V') + em(V - V')\right\} = mV + m'V'$$

與衝躍前二球所有運動量之和絕無增減。故二球之運動量。不因衝躍而變也。蓋視二球爲一系相聯者然。又視質量悉集于其重心點。則二球運動量之和。即此重心點之運動量。雖有衝突。而不受系外之力。故運動量之無所變于前。亦自然之理

有如是也。

又卽以上所論。其二球動能力之和。未衝躍前爲 $\frac{m}{2}V^2+\frac{m'}{2}V'^2$

既衝躍後爲 $\frac{m}{2}u^2+\frac{m}{2}u'^2$ 卽

$$\frac{m}{2(m+m')^2}\left\{mV+m'V'-cm'(V-V')\right\}^2+\frac{m'}{2(m+m')^2}\left\{mV+m'V'+cm(V-V')\right\}^2=\frac{1}{2(m+m')}\left\{(mV+m'V')^2+cmm'(V-V')\right\}=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}m'V'^2-\frac{mm'(v-v')(1-e)}{2(m+m')}$$

而 e 常小于一。故衝躍後之動能力。常失去若干。而小于衝躍前之動能力。夫此若干動能力何以失去則以作有功用故也。

蓋二球衝突時。其動能力略消費于生熱生響等功用也。

一〇九　設如有 m 質量之球。由 h 高下落至地面。而與地面衝突之後。復返躍至 h′ 高。亦可用上節公式。而此處 V′=〇。故

$$u=\frac{mv-cm'v}{m+m'}$$

式中m′爲地球質量。V爲m球衝突時速度。而m球由h高下墜。故

$$V=\sqrt{2gh}$$

又地球質量比m球質量爲無窮大。故$\frac{m}{m'}$可定爲零。即

$$V=-e\sqrt{2gh}$$

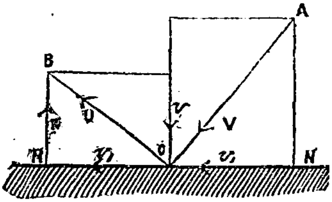
此m球返躍至h′高。則

$$u=\sqrt{2gh'}\qquad\therefore\ h'=e^2h$$

故量得h h′之高若何。而e即可知。

百十　斜衝突　以上各節所論二球。運動在同一直綫上。此種衝突。名曰直衝突。此外又有異方向而不在同一直綫上之衝突。名斜衝突。斜衝突與摩阻力有關係。故研究所及。其理頗艱深。茲特略去摩阻力而約略論之。

百十一　無摩阻之物體。當斜衝突時。可將未斜衝突以前之速度分之。一照在斜衝突處二球中心所聯直綫之方向。一與此線成直角。設有 m m′ 二球。m 球速度。分之爲 V V_1 m 球速度。分之爲 V' V'_1。如 V_1 V'_1 直角于 V V'。則與此衝突無關係。而 V 與 V'。照前二節所論。可以變成 u' u''。故衝突後復相離開。而 m m′ 二球之速度。爲 $\sqrt{u'^2+V_1^2}$ 及 $\sqrt{u''^2+V_1'^2}$



三十四圖

百十二　如 m 球以 V 之速度照 A C 方向與地球表面相衝突。衝突後又以 U 之速度照 C B 方向返躍。可將速度分之。一爲地平方向之分速度 V_1。其量不因衝突而變。一爲垂直于地平面之分速度 v。其量因衝突而變成 u。照上　$u=-cv$

故 $U=\sqrt{u^2+v_1^2}=\sqrt{e v^2+v_1^2}$

而 $v=V\sin AcN \quad v_1=V\cos AcN$

故 $U=V\sqrt{e^2\sin^2 AcN+\cos^2 AcN}$

又欲知u之方向如何。則

$$\tan BcM=\frac{u}{v}=e\frac{v}{v_1}=e\tan ACN$$

故u之方向可知。

第十二章例題

一 設有靜止之B球。離壁二十尺。又有A球向壁前進。其速度每秒二十四尺。A球與B球衝躍前進。B球遇壁衝躍後。又返與A球衝躍。問二球第一次衝躍至第二次衝躍所費之時若干。其二球質量。彼此相等。二球遇壁後之衝突比率爲$\frac{1}{2}$。

解　照題意其爲直衝突可知。用百〇八節公式。而改V′爲O　故衝躍後A球之速度。每秒六尺。B球之速度。每秒十八尺。而衝突于壁之後。其速度爲九尺。試定所求之時爲t。而定二球第二次衝突。在離壁a尺處。則

$$t=\frac{10-a}{6}=\frac{20}{18}+\frac{a}{9}$$

由上式得t等于二秒。

二　質量相等之二完全彈性體衝突時。其速度彼此交換。試證明之。

三　今有人面壁而立。人與壁相距六尺。試取一球以四十五度角向壁斜擲之。如球遇壁後之衝突比率。爲二分之一。則此球復可歸于原位置。問球擲出時之速度若干尺。

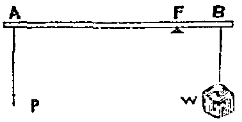
答　二十四尺

第十三章　簡單機器

百十三　簡單機器(Simple machines)　本以上各章所論之理。作簡單機器。日用間可得種種便利。簡單器械。即槓桿。斜面。尖劈。輪軸。滑車。螺旋六者是也。

百十四　槓桿、(Lever) 如圖。P與W二力動于A B二點。而穩定于F尖臺上。即于A點用P力。可以舉重量W也。而B爲重所懸之點。故B名重點。A爲力所用之點。故A名力點。F爲支槓桿之點。故F名支點。凡器械有此三點者。皆可謂之槓桿。而照三點之位置。槓桿又分三類。第一類支點在力點重點中間。第二類重點在力點支點中間。第三類力點在重

三



點支點中間。茲順序記之如下。

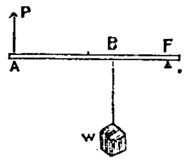
第一類　力點(Power)支點(Fulcrum)重點(Weight)如三十五圖

第二類　力點　重點　支點　如三十六圖

第三類　重點　力點　支點　如三十七圖

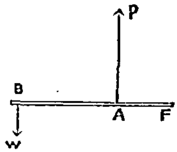
以上三類。形雖各異。要其對支點二力能率之和等于零必相穩定。又由支點至動于力點重點二力運線之距離。名槓桿柄。(Arms of a Lever) 故動于槓桿上力之能率。爲力乘柄之積。今將槓桿穩定時。力與重相比較。得式如下。

三十五圖

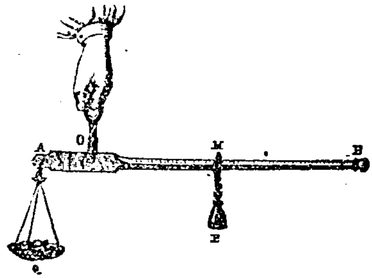


$$P.AF = W.BF \therefore \frac{W}{P} = \frac{AF}{BF}$$

百十五　利率與效率 (Advantage and Efficiency) 用器械時。所用之力與所欲擧之重之力常不相等。此二力之比爲$\frac{W}{P}$。名曰



三十七圖



三十八圖

此器械之利率。故利率大之器械。可用小力舉大重。又因器械自身之重與摩阻等原由。消費幾分力于無用之處。而所餘用于有用處之力。以總力除之。所得之商。名效率。故效率常小于一。

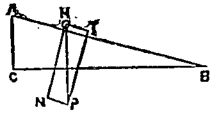
百十六　常用秤　(Steelyard)　常用秤即第一類槓桿之應用。如圖。定支點O爲秤身之重心。或秤身本可視爲無重。錘之重爲P其位置在M。又秤盤內物體之重爲Q。故秤桿穩定時。則

$$P.OM=Q.OA \therefore Q=P\frac{OM}{OA}$$

即Q重之太小。視OM距離之長短爲

比例也。故于桿上記以等分度數。即可用以量重。

百十七　斜面(Inclined Plane)　小力致鉅重于高處。宜籍斜面之助。如圖。A B之平面。側于地平面上。則A B謂之斜面。今試定A B爲無摩阻之面。物體上此面時。其重以M P線表之。分M P所表之力爲二。一與斜面平行。一與斜面成直角。而以M T線與M N綫表之。M N爲壓于斜面上之壓力。與引上物體之力無關係。若上推物體之力。能勝于M T之力。即可使物體沿斜面上行。故W重在斜面上。以F力沿斜面當之。使不下行。而適靜止于斜面上。則



第三十九圖

$$F:W::MT:MP::AC:AB$$

即　力:重::斜面之高:斜面之長

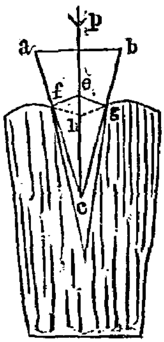
而 $\frac{AC}{AB}$ 爲斜面側于地平面之角之正弦。(第四第五節) 此角小時。則正弦

亦小。故此角甚小時。可以小力籍斜面而致鉅重于高。車夫引車在斜面上左轉右轉。即斜面之長增。而此角可因而小。以便省其引車之力故也。以上不過爲當然之理論。（見三節）至于實用。則因摩阻之故。推物體上斜面時。其力必大于MT。又以平行于底BC之力推物體。而物體適靜止于斜面上。則

力：重：：斜面之高：斜面之底

百十八　尖劈（Wedge）　尖劈之用。乃以其鋒置于木縫。而用力鎚之。使木撑裂。其理與斜面同。如圖P爲從上壓下之力。分爲二力。使各直角于尖劈之兩面。各分力之量爲W。則尖劈擠木之力。即此兩面所

四十圖



接觸于木之f g二處直角之W力所擠也。故P力可以a h表

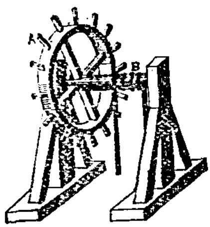
之W力可以eg表之而

$$P : W :: eh : cg :: ab : ac$$

即所要壓下之力之大小視c角之大小爲比例也。故其理與斜面無異。

百十九　輪軸(Wheel and Axle)　輪軸卷擧重之繩于軸周以擧重。其理與槓桿同。如圖。力用于A輪時。B軸必廻轉。而繩遂爲軸所卷。繩下瑞所懸之重。因之漸卷而漸擧于高。今命A輪廻轉圓之半徑爲r。則r爲力點離軸心之距離。B軸之半徑命爲r'。如用P力于力點與W重相穩定。則

第四十一圖



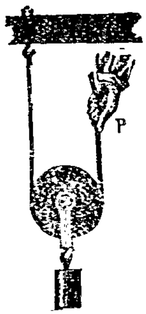
$$P : W :: r' : r$$

然當實用輪軸時。將繩卷曲而力費去。因支輪軸處之摩阻。而力

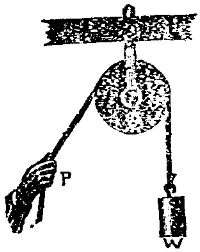
則費去。輪軸自身之重。旋轉時必需力。而力又費去。

百二十　滑車(Pulley)　滑車種種不同。如圖。W為重。P為力。如

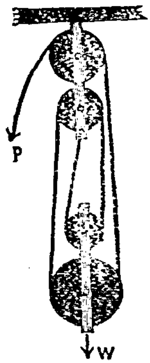
四十二圖



四十三圖



四十四圖

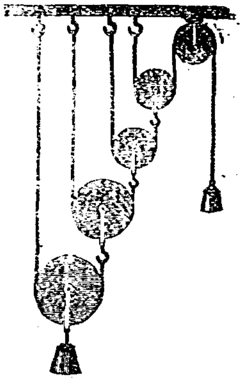


P力與重相穩定時。欲知力與重之比。可即力之功用而知。四十三圖。W上行之路之長。即P力引下之路之長。故P與W等。四十二圖。試將W擡上一寸。繩即寬餘二寸。則W上一寸P必上二寸可知。故

$$W = 2P$$

別法。繩之張力。（以力引物而物緊張。名物之張力。）不論何處。皆與手力P等。今所舉之重為二條張力P之繩所同舉

四十五圖



故所舉之重必為2P即（本係一條。宜視為二條。）W等2P于也。四十四圖所舉之重。為四條張力P之繩所同舉。故W等于4P。

將四十四圖之W檯上一寸。繩即寬餘四寸。則W行一寸路。P必行四寸路可知。故 $W=4P$

四十五圖所舉之重。為十六條張力P之繩所同舉。故

$$W=16P$$

又檯W上一寸。繩即寬餘十六寸。則W行一寸路。P必行十六寸路可知。蓋照四十二圖。W上一寸。P上二寸。故此處B上二寸。順次B上二寸。則C上四寸。C上四寸。則D上八寸。而D上八寸時。繩寬餘十六寸。則P必下十六寸也。故

$$W=16P$$

然滑車常消費幾分力于無用之處。猶輪軸因摩阻等類。其力種種費去也。

附錄　四十三圖繩之兩端。懸以 m m' 二質量之物體。即爲阿梯吾特之器。（七十四節）求此兩物體之加速度。可用圓柱形之滑車。其質量命爲 M。半徑命爲 r。定繩質爲極柔軟。各部可隨意彎曲毫不費力。又定懸滑車之軸轉動時。毫無摩阻。則 m m' 之速度爲 V 時。滑車必以 $\frac{V}{r}$ 之角速度旋轉。其慣性能率爲 $\frac{Mr^2}{2}$。故其動能力爲 $\frac{Mv^2}{4}$。（九十九節）即全體之動能力之總數。爲

$$\frac{1}{2}v^2\left(m+m'+\frac{M}{2}\right)$$

至極小時 t 後。速度變爲 v'。m 所下之路。m' 所上之路。各爲 $\frac{v+v'}{2}t$ 而減小之還元能力。爲

$$\frac{V+v'}{2}t(m-m')g$$

增多之動能力。爲

$$\frac{1}{2}(V^2-V'^2)(m+m'+\frac{M}{2})$$

此二者互相等。故

$$tg(m-m')=(V-V')(m+m'+\frac{M}{2})$$

而 $\frac{V-V'}{t}$ 爲加速度 α。故

$$\alpha=\frac{m-m'}{m+m'+\frac{M}{2}}g$$

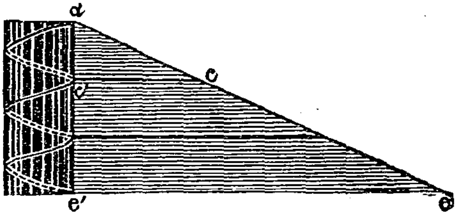
與七十四節公式略異。

百二十一　螺旋(Screw)　試取紙作一 a e e′ 直角三角形。而卷之于圓柱。如四十八圖。此三角形之斜邊。即成一螺線。沿螺線刻成陽紋經路。如四十七圖。即爲螺旋。照螺旋陽紋經路。于相合圓筒內面。刻

四十六圖

四十七圖

第四十八圖



成陰紋。如四十六圖。成陰螺旋。其陽紋者爲陽螺旋。二者配合。將陽螺旋旋之。其運動依圓柱軸之方向而動。故螺旋之理。全與斜面無異。螺旋一旋轉。當斜面之長 a c。螺旋一級。當斜面之高 a c′。而所以舉物體或壓物體之W力。依圓柱軸之方向而動。旋螺旋之P力。依圓柱切綫之方向而動。（直三角形底邊之方向。）故命 h 爲螺旋一級（Thread of Screw）之高。命圓柱之半徑爲 r。據百十七節之理。得

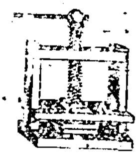
$$P : W = h : 2\pi r$$

百二十二　螺旋壓縮器（Screw Press）　用螺旋時。常籍槓桿之助。以其便于迴轉也。如圖。其柄即槓桿。所以迴螺旋。如柄長時。可

用小力而大使物體壓縮。此時柄端即爲力所動之點。其至圓柱心之距離。命爲R。則

$$P:W=h:2R\pi$$

四十九圖



第十三章例題（畧去器械自身之重及摩阻不算。）

一　于四十四圖滑車上懸三磅重于P端。十六磅重于W端。則其所生之加速度若何。

解　如W以a之加速度下行。此加速度必爲重與繩張力之差。十六磅物體之質量爲$\frac{16}{g}$。即$\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$也。而下行之力$\frac{1}{2}a$。即重減去張力之差。故張力爲$16-\frac{1}{2}a$。又P上行之加速度爲4a。照上理。其繩之張力爲$\frac{3}{32}4a+3$。而此張力爲W端張力四分之一。故

$$4\left(\frac{3}{32}4a+3\right)=16-\frac{a}{2}$$

由上式算得加速度 a 爲每秒二尺。

二　第一類槓桿支點離重點六尺。離力點二尺。如用力三磅而穩定。問所懸之重若干。

答　一磅。

三　上題之支點力點互易。則懸重若干。

答　〇、七五斤。

四　設有平行于底邊之力。當W重之物體。使靜止于四十五度角之斜面上。問斜面所受壓力若干。

答　$\sqrt{2}$ W。

五　設有等重二物體。懸于繩之兩端。將繩一端置之四十五度角之斜面上。他端則通過斜面頂點而下垂至地。問地所受之壓力若干。

答　爲物體之重○二九三餘

六　由螺旋壓縮器之中心至力點之距離爲三尺。其利率二○○。問螺旋級高若干。

答　九分四厘二毫餘。

第十四章　固體本性

百二十三　引長彈性(Elasticity of Tractiar) 固體皆具有引長之彈性。試取物體一片。用力引之。必略長于前。取去此力。則仍復其原形。即引長之彈性也。試驗上測得一物體引長之多少。與所用之力之大小相比例。與物體之長相比例。與横切面積相反比例。故取一L長之棒。其横切面爲一平方咪里米突。而懸一葛蘭于其一端而下垂之。定棒引長之量爲e。可得公式。

$$e = EL$$

上式之E。凡同物質時。爲一定之數。而數甚小。故以 $\frac{1}{E}$ 爲彈性比率。今略舉數種物體之彈性比率如下。

鍛鐵	二〇八六九
鋼鐵	一八八〇九
白金	一七〇四四
銅	一二五〇〇
黃銅	八五四三
玻璃	七九一七至七〇一五
大理石	二三九〇
鉛	一八〇三
松木	一一一三

上表鍛鐵之彈性比率最大。故引長時必費力最多。又以力壓物體時。其厚減小。理與引長時同。茲不復述。

附錄　吾人尋常所謂彈性體。蓋指象皮等物。加以小力而形狀即變者。如名分子受變動而欲歸復于原位置之力爲彈力。則鐵最富此力。氣體最乏此力。故氣體殆與彈性體及彈力大之體相反。然彈性不能無限制。若過此限。則所變之形狀。不能歸復其原形。彈性之物體。此限大時。彈力小。此限小時。彈力大。如鍛鐵（橫切面一平方咪里米突）以二萬基葛蘭懸之。其長當可引作二倍。而實則不然。蓋未引長至二倍時。其體早已引斷也。此引斷之故。爲二萬基葛蘭之重力。超過鍛鐵彈性限所致。然所懸之重。不必二萬基葛蘭。試以十五基葛蘭懸之。其長已增一千三百

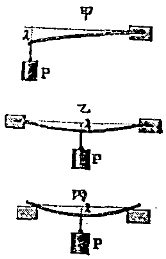
五十四分之一。此一千三百五十四分之一之增長。即將十五基葛蘭取去。亦不復縮短而復其原形。以其限已過故也。至與此相反之氣體。則任以若干壓力壓之。當取去壓力時。其容積即可復原。

百二十四　扭旋彈性 (Elasticity of Torsion)　試取一固體之棒而固定其一端。然後用力扭旋之。如取去此力。則物體仍復其原形。此性名曰扭旋彈性。而用力時其廻轉角度之大小。與力之大小相比例。與棒之長相比例。與棒之橫切面之自乘積相反比例。

百二十五　彎撓彈性 (Elasticity of Flexure)　試取固體棒而固定其一端。以力彎其他端。則棒曲。若取去此力。棒仍復其原形。此性名曰彎撓彈性。弓即此理也。今將棒照水平位置而固定其

一端。棒之橫切面爲矩形面。以B重懸諸他端。命懸重之端下行

第五十圖



之路爲a。則a與T重相正比例。與棒長之三乘積相正比例。與橫切面矩形橫邊之廣狹相反比例。直邊之三乘積相反比例。又a因懸重時所懸之法而不同。如甲圖乙圖丙圖。其懸法各異。而a之比。爲

$$64:1:4$$

之比是也。

百二十六　固性(Tenacity)　折固體時。固體生抵抗之力。此性名曰固性。物類中最富此性者爲鐵。然固性不僅因物質而殊。亦因物體之形而殊。如物體之橫切面。其積相等時。則角柱形弱于圓柱形。圓柱形又弱于圓筒形。動物骨及竹等物。因此理之故。其

固性增而堅固增。

百二十七　硬度(Hardness)　兩物體相觸致時。其抵拒强弱之度。謂之硬度。以玻璃置于鐵面爬之。能使鐵面生傷痕。若置鐵于玻璃面爬之。則不能。故鐵軟于玻璃。硬度最大者爲金剛石。次則爲珂琅瑙及水晶等。金屬中如鐵等物。其硬度因鍛法而殊。試將鐵熾熱急冷之。其硬度必增。

附錄　鋼鐵熾熱而驟冷之。可非常增其硬度脆度。若再熱而徐冷之。則硬度脆度皆大減。尋常金類。其性質大都相似。惟錫一分銅四分之合金。强熱而驟冷之。反增延性展性。其體柔。若徐冷之。則脆如玻璃。

百二十八　脆度(Brittleness)脆度大時。其物體必易碎。玻璃即其例也。硬度大之物體。此性常大。如上節所言各金屬。鍛時驟冷

之。硬度增而脆度亦相與俱增。故欲使之不脆。熱後須徐冷之。

百二十九　延性（Ductility）　銅絲銀絲等類。可用力引長之。此性名曰延性。白金最富此性。一兩白金。可引為三四十里長之線。次則此性以銀為富。

百三十　展性（Malleability）　展性者。物體可延引為薄板之性也。與延性甚相似。而微有不同。展性之最富者為金。極薄之金箔。疊之四萬重。始厚分許。取白金與金比。其延性勝于金。而展性遜于金。

第一卷雜題

一　問木片沈于水中時。何以生泡。

答　穴性之故。

二　欲躍過一澗。人必先奔馳。何歟。

答　奔馳之速度。與躍時之速度相加。則速度大。

三　取履敲之而泥土頓落。何歟。

答　省。

四　馬猝止時。騎馬人向前仆。何歟。

答　省。

五　以卵擊石而卵碎。何歟。

答　石之反力。

六　以己手執帶竭力將己身舉之。終不能舉。何歟。

答　無外界之力。故不能擧。

七　置風車于船上。向帆吹之。船果可前進歟。

答　省。

八　桶水以棒迴旋之。水點向外飛去。何歟。

答　遠心力使然。

九　其泡沫却聚于中央。何故。

答　省。

十　地球兩極何以成扁平狀。

答　因地球當初迴轉時。赤道上部分。向外拋而湧出之故。

十一　鐵道彎曲處。何以外軌略高于內軌。

答　省。

十二　重力兩極最大。赤道最小。其理安在。
答　赤道離地心遠。兩極離地心近。又赤道處因地球旋轉之故。常欲拋物向外。
十三　負物之人。身向前傴。何歟。
答　所以使重心垂直于兩足之中間。
十四　大腹人行路。頭常倚後。何歟。
答　省。
十五　以長箸夾菜。覺手較難。何歟。
答　箸即第三類槓桿。故箸長時。則費手力多。
十六　拔指環時。濡指以唾。較易拔。何歟。
答　摩阻減小之故。
十七　人立于無摩阻之板上。宜如何立法。乃可前進。

答　省。

第一卷例題

一　設如從高處落石。十秒至地。今欲使其八秒至地。向下擲時。當用若干速度。

答　七十二尺。

二　設如二人對臨淵濱投石。淵濶十一尺。投石之速度。一每秒二十四尺。一每秒二十尺。其方向皆與地平相平行。問二石當于何處相衝突。

答　至兩邊之地平距離。一爲六尺。一爲五尺。垂直距離一尺。

三　二球半徑之比。爲三比二。其質量之比。爲五比三。問密度之比如何。

答　四十比八十一。

四　設有向東行之物體。其質量爲m。其速度爲v。今欲使向南行。其速度仍爲v。問此用力之總量及方向若何。

答　向西南 $mV\sqrt{2}$。

五　二物體相距一尺。其引力爲百功。今相距五尺。問引力當有幾功。

答　四功。

六　取銅絲彎作正方形之三邊。如定邊長爲a。則此彎後銅絲之重心。當在離中心 $\frac{a}{6}$ 處。試證明之。

七　設有ABC直角三角形之板。A爲直角。今取板懸諸B角。則由B垂直于地平面上之BD綫。與BC邊成C角。與AB邊成A角。試證明之。

八　將半徑r之圓柱體。下端削成半圓球。置于平面上。如所餘上部圓柱之高等于$r\sqrt{2}$。則爲安態穩定。試證明之。（半圓球之重心離半徑爲八分之三。）

九　五相等力用于五等邊形各角點。而各與心點至角點之直線同方向。試證明相隣二力之合力。等于餘三力之合力。

十　設有ab二船。在相近之處。a船人以繩緊b船而引之。則a船速度爲十尺。如二船質量之比爲十七與五之比。問此時b船速度若干。

答　三十四尺。

十一　等速度運動之物體。其速度每秒十尺。今裂爲二。一得十五尺速度。一得八尺速度。其進行方向。仍與前同。問裂後二質量之比若干。

答　二比五。

十二　今有運動之彈性球體。衝突前與壁成六十度角。衝突後則角比前差九十度。試證明其衝突比率爲三分之一。

十三　九磅重之物體。在摩阻比率三分之二之平面上行六尺。問功用若干。

答　三十六尺磅。

十四　設有人能引在地平面上之重三百斤。問于 $\frac{1}{80}$（即斜面長與高之比爲八十與一之比）之斜面上。能引重幾何。其摩阻比率。各爲 $\frac{1}{10}$。

答　二百六十六斤餘。

十五　彈丸速度每秒四十米突。中的時陷進二纖米突。如彈丸質量爲二十葛蘭。問此時的之平均抵力若干。

答　八千萬功。

十六　物體重一磅。由高處下落二十八尺時。其速度爲每秒十六尺。問空氣之平均抵力若干。

答　〇、二磅力。

十七　問質量 m 之物體。其動能力爲 e。有若干運動量。

答　$\sqrt{2em}$。

十八　二物體之動能力相等。其運動量之比。爲一與二之比。而二物體速度。則爲二與一之比。質量則爲一與四之比。試證明之。

十九　半徑之輪。其旋轉之速度爲 V。問對中心點之角速度若干。

答　$\frac{v}{r}$。

二十　絲長五尺。僅勝十磅之重。且須徐徐挂之。今一端所挂之

重爲四磅。手持他端搖之。使成等速圓運動。問絲斷時。速度應若干尺。其重力宜視爲與圓運動無關係。

答　二十尺

二十一　定地球爲每日旋轉一次。若猝止不轉。則赤道上之重力變成若干。地球半徑長六四〇〇〇〇〇〇〇纖米突。重力爲九八〇功。

答　九八三、三八餘。

二十二　上題地球之旋轉速度當加幾倍。則重力消失。

答　約十七倍。

二十三　設AB及BC二棒。以直角固接于B。如二棒之重相等。問取A點懸之。則由A垂直向下之綫。通過BC何處。

答　三分之二處。

二十四　上題B處加以重。能使BC平否。

答　不能。

二十五　設有力推m質量之物體。能使升至h高。若所推物體之質量半于m時。當升至若何高。

答　四h高。

二十六　今有重十磅。以二力支定之。一與地平面成三十度角。一照地平方向。問二力各若干。

答　二〇磅。一七、三二磅。

二十七　槓桿長四尺。一端懸重三磅。一端懸重十磅。如支于離十磅端一尺處而穩定。問槓桿重若干。

答　重一磅。

二十八　將絲之一端固定之。而繫他端以質點。使在平行于地

平之平面上。成等速度圓運動。如絲長爲c。絲與地平面之角爲四十五度。問周期如何。等速度圓運動之半徑爲$\frac{c}{\sqrt{2}}$而遠心力與重力之合力。必與絲之方向同在一直線上。即遠心力等于重力。然後可使所懸質點成等速度圓運動也。故圓運動之速度可知。而周期亦可知矣。

答　$2\pi\sqrt{\frac{c}{g\sqrt{2}}}$。

二十九　球之質量m半徑r。如以直徑爲軸而旋之。其角速度爲ω。問動能力若干。參照九十九節。

答　$\frac{1}{5}mr^2\omega^2$

三十　半徑r之圓柱。由三十度角之斜面上滾下。如滾下時圓柱之周面。常緊依于斜面。問滾下十二尺時。其速度若干。料面長十二尺。高必爲六尺。故滾下十二尺時。所失之還元能力爲6mg。而失去之還原能力。即增此數之動能力。故落下之速度定爲v。圓柱迴轉之角速度定爲ω。其動能力必爲$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}mr^2\omega^2$而圓柱周面常緊依于斜面。故$\omega r=v$。據此可得所求。

答　十六尺。

光緒二十八年七月十五日出版　定價大洋六角

不許翻刻

著作者　水島久太郎

譯補者　陳槐樂書氏

發行所　神田區駿河臺鈴木町十八番地　教科書譯輯社

印刷所　日本八尾活版所