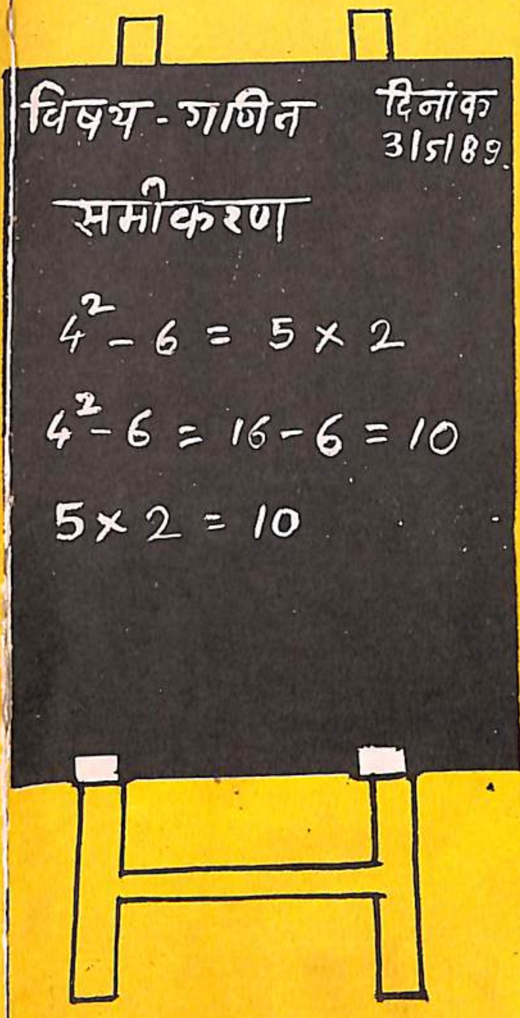
गणिताच्या सोप्या वाटा



(५ वी, ६ वी, ७ वी च्या अभ्यासक्रमावर आधारित)

सौ. मंगला जयंत नारळीकर

‘ गणिताच्या सोप्या वाटा ’

(५वी, ६वी, ७वी च्या अभ्यासक्रमावर आधारीत)

लेखिका

सौ. मंगला जयंत नारळीकर

मनोविकास प्रकाशन

मुंबई

प्रकाशक :
अरविंद घनःश्याम पाटकर,
मनोविकास प्रकाशन,
आमदार निवास, मंत्रालयाशेजारी,
चर्चगेट, मुंबई - ४०० ०३२.

प्रथमावृत्ती

तारीख - १ मे १९८९

प्रिंटर :

POPULAR OFFSET PRINTERS
2-A/3, Dhanraj Industrial Estate,
Sun Mill Lane,
Lower Parel, Bombay - 400 013.

मुखपृष्ठ व आकृत्या :

प्रकाश भगवान परब

लेसर टाईप सेटिंग :
पी. सी. सिस्टिमस,
व्ह्यू मॉडी, फ्लॅट नं. १४,
४९१, गॅब्रीअल स्ट्रीट, माहिम,
मुंबई - ४०० ०१६

किंमत : रु. १०

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांसाठी,

हे पुस्तक तुमच्या पाठ्यपुस्तकाची जागा भरून काढू शकणार नाही. पण पाठ्यपुस्तकात वाचून अथवा शाळेत शिकूनही गणिताचे काही भाग नीट समजले नसतील, विशिष्ट प्रकारची गणितं सोडवता येत नसतील, तर या पुस्तकाची मदत होऊ शकेल. केवळ परीक्षेत मार्क मिळवण्यापुरतं गणित शिकवण्याचा याचा उद्देश नाही, तर गणित विषयाचं नीट आकलन व्हावं, भीति नाहीशी व्हावी व स्वतः गणितं सोडवण्याचा आनंद विद्यार्थ्यांना घेता यावा, पुढे कुठल्याही क्षेत्रात आवश्यक तेवढं गणित शिकण्याची तुमची तयारी असावी हा या पुस्तकाचा उद्देश आहे. पाचवी सहावी व सातवीच्या गणिताचं नीट आकलन होण्यास या पुस्तकाची मदत होईल. भूमिती व आणखी काही भाग यात घेतलेले नाहीत. मुख्य करून ज्या विभागातील गणिते सोडवताना विद्यार्थी गोंधळतात, चुका करतात ते विभाग या पुस्तकात घेतले आहेत. गणिताच्या अभ्यासाला लागताना लक्षात ठेवा–

(1) 2 ते 10 चे पाढे तोंडपाठ असले पाहिजेत. 15 किंवा 20 पर्यंतचे पाढे येत असतील तर अधिक चांगले.

(2) बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रियांचा चांगला सराव हवा. नाहीतर थोडक्यासाठी, रीत बरोबर असूनही गणित चुकण्याची शक्यता आहे.

(3) एखादा विभाग नीट समजला नसेल, तर या पुस्तकातील तसेच पाठ्यपुस्तकातील त्याचे स्पष्टीकरण शांतपणे वाचून पहा. नमुन्याची गणिते लक्षपूर्वक पहा. दोनदा वाचूनही समजलं नाही तर शिक्षक, वरच्या वर्गातील किंवा तुमच्याच वर्गातील हुषार व उत्साही विद्यार्थी यांची मदत घ्या. प्रयत्नाने समजणार नाही असा अवघड भाग

शाळेच्या गणितात नाही.

(4) एकदा तो भाग समजला की त्यावरची भरपूर गणिते सोडवा. प्रथम सोपी व नंतर जरा अवघड. भरपूर उदाहरणे सोडवली की ती रीत पक्की लक्षात राहील.

(5) दररोज पाढे म्हणणे व निदान पाच तरी गणिते सोडवणे हे नियम पाळा. गणितात नक्की प्रगति कराल व चांगले गुण मिळवाल.

पालक वर्ग व शिक्षकांसाठी,

पाचवी, सहावी व सातवीची गणिताची पाठ्यपुस्तके एकंदरीने चांगलीच आहेत. पण या इयत्तांमधील अनेक विद्यार्थ्यांना कधी कधी विषय नीट समजत नाही, गणिते चुकतात व मग या विषयाची भीति वाटू लागते-तो अधिकाधिक नावडता होत जातो. अशा विद्यार्थ्यांना, पाठ्यपुस्तकाला पूरक म्हणून या पुस्तकाचा उपयोग व्हावा अशी अपेक्षा आहे. पाठ्यपुस्तकांत काही ठिकाणी चांगली चित्रे घालून त्या त्या विभागाचं स्पष्टीकरण करणं अधिक चांगलं करता आलं असतं. या पुस्तकात समीकरण व अपूर्णांकांची तुलना या विषयांवर विद्यार्थ्यांना चटकन समजतील अशी चित्रं घातली आहेत. उत्साही शिक्षक याप्रमाणे अनेक चांगली चित्रं तयार करूं शकतील. पाठ्यपुस्तकात वेगवेगळ्या भागात, गणिते सोडवताना वेगवेगळ्या प्रकारची मांडणी करण्यास शिकवले आहे, पण प्रत्येक विभागासाठी वेगळी मांडणी करायला शिकताना विद्यार्थ्यांचा गोंधळ होतो व कुठलीच मांडणी ध्यानात रहात नाही. उलट समीकरणे हाताळण्याची सवय व गुणोत्तरप्रमाणाची चांगली समज असेल, तर अनेक प्रकारची गणिते (उदा० समप्रमाण, सरळव्याज, शेकडेवारी, नफातोटा-कमिशन इ०) एकाच रीतीने करता येतात. म्हणून या पुस्तकात ही एकच पद्धत पक्की करण्यावर भर दिलेला आहे. व्यस्त प्रमाणाची गणितेही, गुणोत्तर प्रमाणाचे उलटे प्रमाण करण्याऐवजी अनेकांवरून एक, एकावरून अनेक यांचा विचार करत, पायरी पायरीने सोडवता येतात. दिलेल्या गणितात कुठले गुणोत्तर समप्रमाणात वापरायचे, कुठले व्यस्त असल्याने उलटे करून वापरायचे याबद्दलही अनेक विद्यार्थी घोटाळा करतात.

विद्यार्थ्यांची गणिताची भीति जाऊन त्यांना त्यात गोडी उत्पन्न व्हावी, आत्मविश्वास वाढावा व परीक्षेत चांगले यश मिळावे असा या पुस्तकाचा उद्देश आहे. एखादा विभाग मुलांना समजला नाही, तर छोटे छोटे दाखले किंवा उदाहरणे देऊन स्पष्ट करावा व मगच त्यावरील गणिते सोडवण्यास शिकवावे. अशा प्रकारची, मुलांना रस उत्पन्न करणारी व चटकन समजणारी उदाहरणे तुम्हाला सुचली, तर जरूर प्रकाशकांकडे किंवा माझ्याकडे पाठवा. पुढच्या आवृत्तीत त्यांचा समावेश करता येईल.

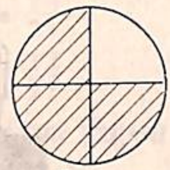
सौ. मंगला नारळीकर.

अनुक्रमणिका

अपूर्णांक

आपण अभ्यासाला सुरुवात अपूर्णांकापासून करू या. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{6}{8}$ या अपूर्णांकांची तुम्हाला माहिती आहे. उदाहरणार्थ $\frac{1}{2}$ भाकरी म्हणजे अर्धी भाकरी - म्हणजेच एका भाकरीचे दोन सारखे भाग करून त्यातला एक घेतला की ती झाली $\frac{1}{2}$ भाकरी.

$\frac{1}{2}$ भाकरी

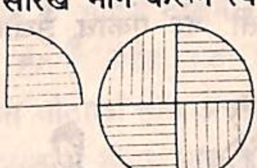


$\frac{3}{4}$ भाकरी

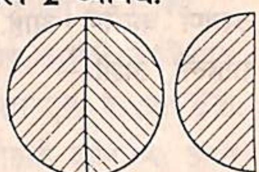
$\frac{6}{7}$ भाकरी

$\frac{3}{4}$ भाकरी म्हणजे एका भाकरीचे चार सारखे भाग करून त्यातले तीन घ्यायचे. $\frac{6}{7}$ भाकरी म्हणजे 7 सारखे भाग करून त्यातले सहा घ्यायचे. $\frac{2}{5}$ भाकरी म्हणजे 5 सारखे भाग करून त्यातले 2 घ्यायचे.

$\frac{2}{5}$ भाकरी



$\frac{5}{4}$ भाकरी

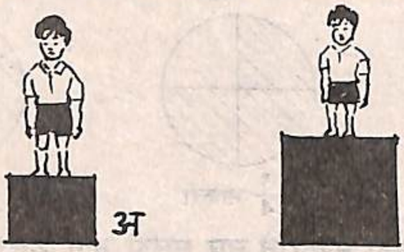


$\frac{3}{2}$ भाकरी

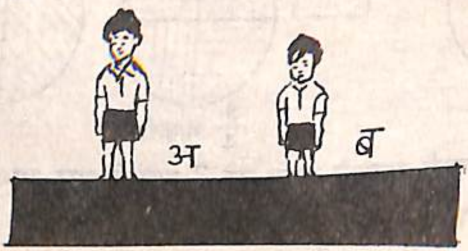
आता $\frac{5}{4}$ भाकरी म्हणजे काय बरं ? सारखे चार भाग केले व त्याच आकाराचे 5 भाग घेतले म्हणजे झाले $\frac{5}{4}$. म्हणजे $\frac{5}{4}$ हा एकाहून मोठा होणार हं ! तसंच $\frac{3}{2}$ म्हणजे अर्धी भाकरी तीन वेळा घ्यायची. आता या सगळ्यावरून एक गोष्ट पक्की ध्यानात ठेवा – अपूर्णांकाचा खालच्या बाजूचा अंक म्हणजेच छेद हा सारखे भाग करण्यासाठी, म्हणजे भागाकार करण्यासाठी वापरायचा. सारखे भाग केले की त्यात एका भागाएवढे एकूण किती भाग घ्यायचे, तर वरच्या अंकाएवढे म्हणजे वरचा अंक किंवा अंश हा गुणायला वापरायचा.

अक्षरांच्या भाषेत अपूर्णांक $\frac{अ}{छ}$ लिहिला, तर एखाद्या वस्तूचा $\frac{अ}{छ}$ भाग म्हणजे छ ने त्या वस्तूला भागायचं आणि अ ने गुणायचं.

अपूर्णांकामध्ये तुलना कशी करायची हे माहीत आहे का ? कुठलेही पूर्ण आकडे दिले असले, जसे 70, 58, 94, 32, तर त्यातला सर्वात मोठा कुठला, लहान कुठला हे तुम्हाला समजतं. पण अपूर्णांकामध्ये लहान मोठा ओळखणं जरा कठीण आहे. कारण अपूर्णांक हे वेगवेगळ्या उंचीवर उभे असलेलया लोकांप्रमाणे असतात.



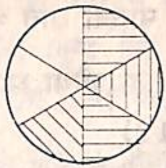
या चित्रांत कुठला माणूस उंच वाटतो ? अ की ब ? ही दोन्ही माणसं वेगवेगळ्या उंचीच्या ठोकळ्यांवर उभी असल्यामुळे लहान मोठा ठरवणं कठीण आहे. ती जर एकाच उंचीच्या ठोकळ्यावर उभी राहिली, अशी –



तर लगेच ओळखता येतं की अ हा ब पेक्षा उंच आहे. अपूर्णांकांचं असंच आहे. त्यांचा पायाचा ठोकळा म्हणजे छेद सारखा असेल, तर त्यांची तुलना करून लहान मोठा ठरवता येतं.

आता छेद सारखा कसा करायचा ? त्यासाठी हे लक्षात असू द्या की कुठल्याही अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला एकाच अंकाने गुणलं तर अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही. जसे $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$

$\frac{2}{3}$



$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

मग हा नियम वापरून कुठल्याही दोन अपूर्णांकाचे छेद समान करणं शक्य आहे ना ? $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{4}{7}$ यांची तुलना करूं. दोन्ही अपूर्णांकांचे छेद $3 \times 7 = 21$ करणं शक्य आहे.

$$\therefore \; \frac{2}{3} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{14}{21}$$

$$\text{व} \; \frac{4}{7} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{12}{21}$$

आता हे अपूर्णांक '21' या एकाच उंचीच्या ठोकळ्यावर उभे राहिले ! मग $\frac{14}{21}$ हा $\frac{12}{21}$ पेक्षा मोठा आहे हे समजतं.

पूर्णांक व अपूर्णांकाची तुलना करताना पूर्णांकाचा छेद 1 असतो. म्हणजेच $3 = \frac{3}{1}$, $12 = \frac{12}{1}$ हे ध्यानांत ठेवा.

$\frac{2}{3}$ हा $\frac{4}{7}$ पेक्षा मोठा आहे हे आपण दाखवलं. गणिताच्या भाषेत $\frac{2}{3} > \frac{4}{7}$ म्हणजेच $\frac{2}{3}$ हा $\frac{4}{7}$ पेक्षा मोठा आहे असंही लिहितात. >, < या चिन्हांचा मनात घोटाळा होत असेल तर एक लक्षात ठेवा. > किंवा < ही खूण वापरताना मोठा आकडा नेहमी कोनाच्या आत, आरामात बसतो तर कोनाचं टोक बिचाऱ्या छोट्या आकड्याला टोचत असतं.

अक्षरांचं गणित किंवा बीजगणित

अक्षरांचं गणित जरा वेगळं दिसलं तरी अवघड नसतं. आकड्यांची मोठमोठी व क्लिष्ट गणितं सोपी करण्यासाठीच अक्षरांचं गणित शोधून काढलेलं आहे. यात 'म', 'न', 'क्ष', 'ग' अशी अक्षरं संख्यांच्या ऐवजी वापरली जातात. 12म म्हणजे 12 × म. तसच न^2 म्हणजे न × न. जसे 4^2 = चाराचा वर्ग = 4 × 4. किंवा क्ष^3 = क्ष चा घन = क्ष × क्ष × क्ष. (तीन वेळा क्ष)

प^{5} = प चा पाचवा घात = प × प × प × प × प (पाच वेळा प)

12^{4} = 12 चा चौथा घात = 12 × 12 × 12 × 12.
(चार वेळा 12)

अक्षरांच्या संख्यांची बेरीज वजाबाकी देखील सोपी असते.

4म + 3म = 7म

10क्ष + 2क्ष + 9क्ष = 21क्ष

15क्ष – 7क्ष = 8क्ष

20ग – 4ग = 14ग

हे समजलं ना ? आता 4न – 10न हे कसं करायचं पहा. 10न हे 4न पेक्षा मोठे आहेत म्हणून 4न मधून 10न वजा करण्याची रीत अशी : 10न मोठे म्हणून, 10न व 4न यांची चिन्हे उलटी करायची व मोठ्या संख्येचं चिन्ह आलेल्या उत्तराला द्यायचं. हे असं का केलं पहा. आता न ही एक लांबी आहे असं समजा. 4न म्हणजे उजवीकडे 4 वेळा न ही लांबी चालून गेलो व मग – 10न म्हणजे विरूद्ध दिशेला किंवा डाव्या बाजूला 10न लांबी चालून गेलो तर आपण पहिल्या जागेपासून कुठे असूं ? पहिली जागा म्हणजे शून्य अंतरावरची जागा म्हणायची.

आकृतीत पहा - 0 पासून 4न उजवीकडे व मग 10 न डावीकडे चालून गेलं की एकूण 6न डावीकडे म्हणजे – 6न अंतर चालून गेल्याप्रमाणे उत्तर येतं की नाही ?

इथे आणखी नीट समजायला हवं असेल तर

4न – 10न = 4न – 4न – 6न = 0 – 6न = – 6न

हे लक्षात घ्या. म्हणजे दोन विरूद्ध चिन्हांच्या एकाच प्रकारच्या पदांची

बेरीज करताना, लहान पदाएवढंच पद मोठ्या पदातून वेगळं काढलं तर विरुद्ध चिन्हांच्या समान पदांची बेरीज शून्य येते. मग मोठ्या पदातून लहान पद काढल्यावर जे उरतं, तेच उत्तर येतं.

अक्षरांच्या बेरजा वजाबाक्या करताना हे लक्षात ठेवा की फक्त सजातीय पदांचीच बेरीज वजाबाकी करता येते. म्हणजे 6ब – 2ब = 4ब, पण 6अ – 2ब म्हणजे 6अ – 2ब असेच लिहावे लागतात. इथे 6अ मधून खरोखर 2ब वजा करता येत नाहीत कारण अ आणि ब हे काय आहेत हे आपल्याला ठाऊक नाही. कुठल्यातरी संख्या आहेत. किंवा वस्तू आहेत एवढंच माहीत आहे. विविध अक्षरांची व संख्यांची बेरीज वजाबाकी होऊन पदावली बनते.

(15म – 4न + 10क्ष), (6अ^2 + 4अब – 7ब), (25क्ष – 36) या सगळ्या पदावल्या आहेत. यांच्या बेरजा वजाबाक्या करताना सजातीय पदांच्या बेरजा वजाबाक्या करायच्या असतात.

उदा० 1. (15म – 4न + 10क्ष) व (4म + 2न) या पदावल्यांची बेरीज अशी करता येते

    15म – 4न + 10क्ष
  + 4म + 2न
  ―――――――――――
    19म – 2न + 10क्ष

∴ (15म – 4न + 10क्ष) + (4म + 2न)
= 19म – 2न + 10क्ष.

एका पदावलीतून दुसरी पदावली वजा करायची असेल तर आतां हे लक्षात ठेवा की एकादं पद वजा करणं म्हणजे त्याचं चिन्ह बदलून बेरीज करणं होय. जसे 5न मधून 2न वजा करणं म्हणजे
5न + (– 2न) = 5न – 2न = 3न
किंवा 6म मधून (– 3म) वजा करणं म्हणजे 6म – (– 3म)
= 6म + 3म = 9म.

तसंच पुढील अधिक उणे चिन्हांचे नियम पाठ करा.

$(-) \times (-) = (+)$, $(+) \times (+) = (+)$, $(-) \times (+) = (-)$, $(+) \times (-) = (-)$

वजा × वजा = अधिक, अधिक × अधिक = अधिक,
वजा × अधिक = वजा, अधिक × वजा = वजा.

जसे –(–क्ष) = क्ष, +(+क्ष) = क्ष, –(+क्ष) = –क्ष, +(–क्ष) = –क्ष

आता दोन पदावल्यांची वजाबाकी कशी करायची पहा -

उदा० (4म + 6न – क्ष) या पदावलीतून (2म – न + 2क्ष) ही पदावली वजा करायची आहे.

म्हणजे (4म + 6न – क्ष) – (2म – न + 2क्ष)

आतां एकादी पदावली वजा करणं म्हणजे तिच्यातील प्रत्येक पद वजा करायचं असतं म्हणजे 2म, –न, 2क्ष ही सगळी पदं वजा करायची आहेत.

$$\left(\begin{array}{l} \quad 4\text{म} + 6\text{न} - \text{क्ष} \\ -\ (2\text{म} - \text{न} + 2\text{क्ष}) \end{array}\right) = \begin{array}{r} 4\text{म} + 6\text{न} - \text{क्ष} \\ +\ -\ 2\text{म} + \text{न} - 2\text{क्ष} \\ \hline 2\text{म} + 7\text{न} - 3\text{क्ष} \end{array}$$

इथे पुन्हा लक्षात घ्या की एकादी पदावली वजा करताना प्रत्येक पद वजा करायचं म्हणजेच प्रत्येक पदाचं चिन्ह बदलून ते मिळवायचं.

आणखी एक उदाहरण पदावल्यांच्या वजाबाकीचं पहा -

उदा० (6म + 7न – 11र) – (10म – 2न – 15र)

$$= \left(\begin{array}{l} \quad 6\text{म} + 7\text{न} - 11\text{र} \\ -\ (10\text{म} - 2\text{न} - 15\text{र}) \end{array}\right) = + \begin{array}{r} 6\text{म} + 7\text{न} - 11\text{र} \\ -\ 10\text{म} + 2\text{न} + 15\text{र} \\ \hline -\ \ 4\text{म} + 9\text{न} + 4\text{र} \end{array}$$

सरावासाठी खालील बेरजा व वजाबाक्या करा.

(1) (8अ + 4ब − क) + (2अ − 6ब + 3क)

(2) (2म + 3न + 4क्ष) + (म − 7न + क्ष)

(3) (7क + 5ख − 2ग) + (− 3क + ख − 2ग)

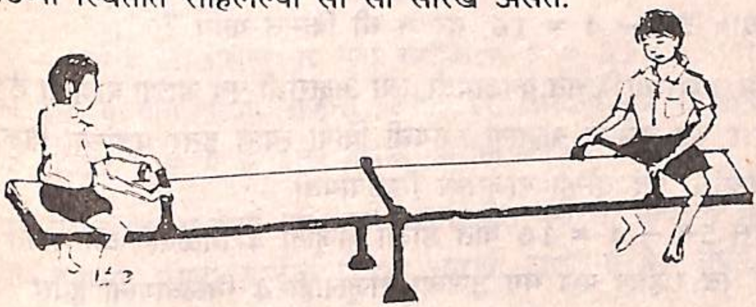
(4) (5अ + 10ब − 25क) − (2अ − 4ब + 10क)

(5) (8क + ख + 4ग) − (− क + 2ख + 3ग)

(6) (4म − न + 13) − (2म − न − 1)

समीकरण

समीकरण म्हणजे दोन पदांची सारखीच किंमत आहे हे दाखवणं. समीकरण हे दोन्ही बाजूंना सारखेच वजन ठेवलेल्या व्यवस्थित तोलून, आडव्या स्थितीत राहिलेल्या सी सॉ सारखे असते.



अशी कल्पना करा की सी सॉ च्या दोन्ही बाजूंना दोन सारख्या वजनाचे भांडखोर जुळे भाऊ आहेत. एका बाजूच्या भावाला काही दिलं तर दुसऱ्या बाजूच्या भावालाही तेवढंच द्यावं लागतं नाही तर त्यांचं भांडण होऊन सी सॉ वाकडा होईल. म्हणजे, समीकरणाच्या डाव्या बाजूवर जी क्रिया करायची, तीच उजव्या बाजूवरही करावी लागते तरच समीकरण बरोबर राहतं.

हे समीकरण पहा :

$$4^2 - 6 = 5 \times 2.$$

यात डाव्या बाजूची किंमत $4^2 - 6 = 16 - 6 = 10$
तसंच उजव्या बाजूची किंमत $5 \times 2 = 10$
म्हणजे डाव्या व उजव्या दोन्ही बाजूंची किंमत सारखीच आहे व हे समीकरण बरोबर आहे. आता डाव्या बाजूमध्ये 5 ही संख्या मिळवली, तर उजव्या बाजूचा जुळा भाऊ भांडेल व उजव्या बाजूलाही 5 ही संख्या मिळवावी लागेल. मग ते समीकरण असं होईल

$4^2 - 6 + 5 = 5 \times 2 + 5$

पुन्हा एकदा नीट लक्षात घ्या की समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर सारखीच गणिती क्रिया केली, तरच नव्याने मिळालेलं समीकरण बरोबर असतं. या नियमाचा उपयोग करून, छोटी छोटी, अक्षरांची समीकरणं सोडवायला शिका.

उदा० 5म − 4 = 16, तर म ची किंमत काय ?

ज्या अक्षराची किंमत काढायची, त्या अक्षराची पदं डाव्या बाजूला ठेवून इतर पदं दुसऱ्या बाजूला न्यायची किंवा त्यात इतर पदांच्या विरूद्ध चिन्हांची पदं दोन्ही बाजूंमध्ये मिळवायची.
जसे 5म − 4 = 16 यात डाव्या बाजूला 4 मिळवले की फक्त म चे पद राहील पण मग उजव्या बाजूलाही 4 मिळवायला हवेत

∴ 5म − 4 + 4 = 16 + 4
∴ 5म = 20
∴ म = 4 (दोनही बाजूंना 5 ने भागले).

दुसऱ्या प्रकारानेही हे लक्षात ठेवता येईल. समजा डाव्या बाजूला फक्त 'म' चे पद ठेवायचे आहे. मग 5म − 4 = 16 यातील − 4 हे पद उजव्या बाजूला नेताना त्याचं चिन्ह बदलून + 4 हे उजव्या बाजूला

येईल $\therefore$ 4म = 16 + 4 (दोन्ही बाजूंमध्ये 4 मिळवून हेच समीकरण मिळते)

$\therefore$ 5म = 20

$\therefore$ म = 4

समीकरणाच्या एका बाजूला असलेलं पद नष्ट करायचं असेल तर दोन्ही बाजूंना त्याच्या विरूद्ध चिन्हाचं तेवढंच पद जोडायचं. जसं इथे – 4 हे डाव्या बाजूचं पद 4 मिळवल्यावर नष्ट झालं पण उजव्या बाजूमध्ये 4 ची भर पडली. म्हणून असंही म्हणता येईल की 5म – 4 = 16 यातील – 4 हे डाव्या बाजूचे पद उजव्या बाजूला आणून 5म = 16 + 4 हे समीकरण मिळालं. म्हणजे डाव्या बाजूचं पद चिन्ह बदलून उजव्या बाजूकडे झालं. पुन्हा लक्षात घ्या की एका बाजूचं पद समीकरणाच्या दुसऱ्या बाजूला नेताना त्याचे चिन्ह बदलावे लागते तरच ते समीकरण बरोबर राहते.

अशा समीकरणांची उत्तरं बरोबर आहेत की नाही याची तपासणी किंवा ताळा करणं सोपं असतं व ते जरूर करा.

जसे — म = 4 असेल तर मूळ समीकरण 5 × 4 – 4 = 16 असं होतं व यात दोन्ही बाजूंची किंमत 16 असल्यामुळे ते बरोबर आहे म्हणून म = 4 हे उत्तर बरोबर असलं पाहिजे.

तेव्हा समीकरण सोडवून अक्षराची जी किंमत येते ती वापरून मूळ समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंची किंमत सारखी आहे ना हेच तपासून पहायचं असतं.

आणखी एक समीकरण सोडवू या.

उदा० खालील समीकरणावरून 'अ' ची किंमत काढा -

6अ – 13 = 15 + 4अ.

आता सगळी अ ची पदे डाव्या बाजूला व संख्या उजव्या बाजूला नेऊ.

$\therefore$ 6अ – 4अ = 15 + 13 (+4अ डावीकडे

$\therefore$ 2अ = 28 नेताना −4अ व −13 उजवीकडे नेताना +13 झाले.)

$\therefore$ अ = 14 (दोन्ही बाजूंना 2 ने भागले).

दोन्ही बाजूंवर सारख्या गणीती क्रिया करत हेच गणित असेही सोडवूं शकाल -

6अ − 13 + 13 = 15 + 4अ + 13 (दोन्ही बाजूंमधे 13 मिळवले)

$\therefore$ 6अ − 4अ = 28 + 4अ − 4अ (दोन्ही बाजूंमधून 4अ वजा केले).

$\therefore$ 2अ = 28

$\therefore$ अ = 14 (दोन्ही बाजूंना 2 ने भागले).

आता अ = 14 ही किंमत घेऊन समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंची किंमत काढूं. डावी बाजू = 6अ − 13 = 84 − 13 = 71

उजवी बाजू = 15 + 4अ = 15 + 56 = 71

दोन्ही बाजूंची किंमत सारखी आली $\therefore$ अ = 14 हे उत्तर बरोबर असले पाहिजे.

सरावासाठी पुढील समीकरणे सोडवून त्यातील अक्षरांच्या किंमती काढा -

(1) 7क + 15 = 4क + 27

(2) 14अ − 7 = 16 − 9अ

(3) 5म + 23 = 9म − 17

(4) 8क − 13 = 3क + 6

(5) 16 − 3क्ष = 4क्ष + 58

काढलेली किंमत वापरून समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंच्या किंमती सारख्या येतात ना ते पहा.

गुणोत्तर प्रमाण

हा भाग अत्यंत महत्त्वाचा आहे. अनेक प्रकारची गणिते या एका पद्धतीने सोडवता येतात. तेव्हा ही पद्धत नीट शिकून घ्या. सोपी आहे, मात्र या पद्धतीने भरपूर गणिते सोडवून सराव करा. तुम्हाला हे माहीत आहेच की सगळ्या मुलांना सारख्या प्रमाणात किंवा समप्रमाणात पेढे वाटायचे असतील तर जेवढी जास्त मुलं असतील त्याच प्रमाणात पेढे लागतील. समजा प्रत्येक मुलाला दोन पेढे द्यायचे आहेत तर आठ मुलांना आठ दुणे 16 पेढे लागतील. नऊ मुलं असतील तर नऊ दुणे अठरा पेढे हवेत. 32 मुलं असली तर $32 \times 2 = 64$ पेढे हवेत. खरं ना ? आता हे गणित समप्रमाणाचं आहे कारण जशी मुलं वाढतील, तसे पेढे वाढणार व मुलं कमी झाली की पेढे कमी लागणार. म्हणजे अशा प्रकारच्या गणितात मुलं व पेढे समप्रमाणात असतात, किंवा $\frac{\text{मुलांची संख्या}}{\text{पेढ्यांची संख्या}}$ हा अपूर्णांक, म्हणजेच मुलं व पेढे यांचं गुणोत्तर प्रमाण कायम असतं. या ठिकाणी हे गुणोत्तर प्रमाण $\frac{\text{मुलांची संख्या}}{\text{पेढ्यांची संख्या}} = \frac{8}{16} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ असं आहे. एका मुलाला दोन पेढे हे प्रमाण ठरलेलं आहे – म्हणजेच मुलं व पेढे यांचं गुणोत्तर प्रमाण $\frac{1}{2}$ असं आहे.

कित्तीही मुलं असली तरी हे प्रमाण किंवा हा अपूर्णांक बदलत नाही. कारण कुठल्याही अपूर्णांकात अंश व छेद दोघांनाही एकाच संख्येने गुणलं किंवा भागलं तर अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही हे ध्यानात असूं द्या. म्हणूनच $\frac{8}{16} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$. $\frac{8}{16}$ मधे अंश व छेद दोघांनाही 8 ने भागलं किंवा $\frac{9}{18}$ मधे अंश व छेद दोघांनाही 9 ने भागलं तर $\frac{1}{2}$ हाच अपूर्णांक येतो. उलट $\frac{1}{2}$ या अपूर्णांकाच्या

अंश व छेद दोघांना 8 ने गुणलं तर $\frac{8}{16}$ मिळतो, 9 ने गुणलं तर $\frac{9}{18}$ हा अपूर्णांक मिळतो.

सोप्या गणितात हे गुणोत्तर प्रमाण सरळ दिलेलं असतं. जरा कठीण गणितात हे शोधावं लागतं. आधी सोपी व मग जरा कठीण अशी गुणोत्तर प्रमाणाची गणितं सोडवून पाहू या.

<u>उदा०</u> एका शाळेतील मुली व मुलगे यांचे गुणोत्तर प्रमाण $\frac{4}{5}$ असे आहे. मुलींची संख्या 76 असेल तर मुलगे किती आहेत ?

$$\frac{\text{मुलींची संख्या}}{\text{मुलग्यांची संख्या}} = \frac{4}{5}$$

आता मुलगे 'क्ष' आहेत असं मानूं

$$\therefore \frac{4}{5} = \frac{76}{\text{क्ष}}$$

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना 5क्ष ने गुणूं

$$\frac{4}{5} \times 5 \times \text{क्ष} = \frac{76}{\text{क्ष}} \times 5 \times \text{क्ष}$$

$$\therefore 4\text{क्ष} = 380$$

$\therefore$ क्ष = 95 $\quad\therefore$ मुलगे 95 आहेत.

या गणितात आपण कशाचा उपयोग केला हे पाहिलंत का ? मुली व मुलगे यांचं गुणोत्तर प्रमाण $\frac{4}{5}$ असं आहे याचा व माहीत नसलेली संख्या क्ष आहे असं मानून एक समीकरण तयार केलं व ते समीकरण सोडवून क्ष ची किंमत काढली. समप्रमाणात वाढणाऱ्या संख्यांची गणितं या पद्धतीने चटकन सोडविता येतात. आणखी एक उदाहरण पहा.

<u>उदा०</u> एका ऑफीसामधे टेबले व खुर्च्या यांचे प्रमाण $\frac{2}{5}$ असे आहे. खुर्च्या 260 आहेत तर टेबले किती ?

इथेही टेबलांची संख्या माहीत नाही ती ट आहे असं मानू मग टेबलांची संख्या व खुर्च्यांची संख्या यांचं गुणोत्तर प्रमाण $\frac{\text{ट}}{260}$ असंही मिळतं व

ते $\frac{2}{5}$ असंही आहे याचा उपयोग करून

$$\frac{ट}{260} = \frac{2}{5}$$ हे समीकरण मिळतं.

मग दोन्ही बाजूंना 260 ने गुणलं तर दोन्ही बाजूंचे छेद जातील (हवंतर 260 × 5 या संख्येनेही गुणू शकता)

मग $\frac{ट}{260} \times 260 = \frac{2}{5} \times 260$ असे समीकरण आले.

$\frac{2}{5} \times 260$ या अपूर्णांकात अंश 2 × 260 व छेद 5 आहे दोघांनाही 5 ने भागलं की अंश = $\frac{520}{5}$ = 104
किंवा $\frac{2 \times 52}{1}$ = 104 असा येतो तर छेद 1 मिळतो.

$\therefore$ ट = 104 किंवा टेबलांची संख्या 104 आहे. आतां किंचित कठीण गणित पहा.

<u>उदा०</u> आठ मुलांना 24 चॉकोलेट वाटली त्याच प्रमाणात चॉकोलेट द्यायची असतील तर 15 मुलांना किती चॉकोलेट लागतील ?

इथे मुलं व चॉकोलेट यांचं गुणत्तर प्रमाण सरळ दिलेलं नाही पण मुलं वाढली तर चॉकोलेट त्याच प्रमाणात वाढतात म्हणून ते समप्रमाणात आहेत. त्यांचं गुणोत्तर प्रमाण माहीत नसलं तरी 8 मुलांना 24 चॉकोलेटं लागतात हे माहीत आहे म्हणून

$\frac{\text{मुले}}{\text{चॉकोलेट}}$ हे गुणोत्तर $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ आहे असं शोधून काढता येतं.

आता 15 मुलांना च चॉकोलेटं लागतात असं मानूं. मग

$\frac{15}{च} = \frac{1}{3}$ हे समीकरण मिळतं. दोन्ही बाजूंना 3च ने गुणलं की

$$\frac{15}{च} \times 3 \times च = \frac{1}{3} \times 3 \times च$$

$\therefore 15 \times 3 = च$

बाजूंची अदलावदल करून च = 45 हे उत्तर मिळतं.

$\therefore$ 15 मुलांना 45 चॉकोलेटं लागतील.

आणखी एक गणीत पहा –

उदा० प्रत्येक पिशवीत सारख्याच गोट्या भरायच्या आहेत. चार पिशव्या भरायला 32 गोट्या लागतात तर 7 पिशव्या भरायला किती गोट्या लागतील ?

पिशव्या व गोट्या सम प्रमाणात वाढतात किंवा कमी होतात म्हणून त्यांचं गुणोत्तर प्रमाण कायम असलं पाहिजे. ते $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ आहे कारण 4 पिशव्या भरायला 32 गोट्या लागतात. आतां 7 पिशव्या भरायला ग गोट्या लागतात असें मानूं. मग $\frac{1}{8} = \frac{7}{ग}$ हे समीकरण मिळाले.

दोन्ही बाजूंना 8ग ने गुणू.

$$\frac{1}{8} \times 8ग = \frac{7}{ग} \times 8ग$$

किंवा ग = 56

∴ 7 पिशव्या भरायला 56 गोट्या लागतील.

आणखी एक उदाहरण पहा – कुठल्या दोन गोष्टींचं गुणोत्तर पहायचं ते काळजीपूर्वक ध्यानांत घ्या.

उदा० सारखेच मणी असलेल्या माळा करायच्या आहेत. 27 मणी असले तर 3 माळा होतात. 63 मणी असले तर किती माळा होतील ?

मणी व माळा सारख्या प्रमाणात वाढतात. म्हणून $\frac{मणी}{माळा}$ हे गुणोत्तर कायम आहे त्याचा उपयोग करू.

$\frac{मणी}{माळा} = \frac{27}{3} = \frac{9}{1}$ (अंश व छेद दोघांनाही 3 ने भागले)

आता 63 मणी असल्यास म माळा होतात असें मानूं. मग

$$\frac{63}{म} = \frac{9}{1}$$

∴ 63 = 9म (म ने दोन्ही बाजूंना गुणले)

$\therefore$ म = 7 (दोन्ही बाजूंना 9 ने भागले व डाव्या व उजव्या बाजूंची अदलाबदल केली).

$\therefore$ 63 मण्यांच्या 7 माळा होतील.

आता आपण $\frac{\text{मणी}}{\text{माळा}}$ हे गुणोत्तर वापरलं. त्याऐवजी $\frac{\text{माळा}}{\text{मणी}}$ हे गुणोत्तर वापरलं. तरी गणित बरोबर येईल.

कारण $\frac{\text{माळा}}{\text{मणी}} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

$\therefore \frac{\text{म}}{63} = \frac{1}{9}$

$\therefore$ म $= \frac{1}{9} \times 63 = 7$ (दोन्ही बाजूंना 63 ने गुणले)

पुन्हा लक्षात ठेवा की कुठल्याही दोन वस्तू एकाच प्रमाणात बदलत असतील तर त्याचं गुणोत्तर कायम असतं. ते गुणोत्तर माहीत झालं की त्या वस्तूंपैकी एकीची संख्या ठाऊक असली तर दुसरीची संख्या काढता येते. त्यासाठी माहीत नसलेल्या संख्येच्या ऐवजी अक्षर मानून, गुणोत्तर प्रमाण दोन प्रकारांनी लिहून समीकरण मांडा व ते सोडवा. आणखी एक उदाहरण पहा.

उदा. 5 ली. गोडे तेलास 65 रु. पडतात. राजश्रीजवळ 104 रु. आहेत. तर तिला त्यात किती तेल घेता येईल ?

पैसे जास्त असतील तर तेल जास्त मिळेल म्हणून ह्या दोन्ही वस्तू समप्रमाणात बदलतात. $\therefore \frac{\text{लीटर तेल}}{\text{रुपये}}$ हे गुणोत्तर कायम आहे.

$\frac{\text{लीटर तेल}}{\text{रुपये}} = \frac{5}{65} = \frac{1}{13}$ (अंश व छेद यांना 5 ने भागले)

104 रु. ना ल लीटर तेल मिळते असे मानूं.

$\therefore \frac{\text{ल}}{104} = \frac{1}{13}$

$\therefore$ ल $= \frac{1}{13} \times 104 = 8$ (दोन्ही बाजूंना 104 ने गुणले)

$\therefore$ 8 लीटर तेल 104 रु. ना. मिळेल.

आता समप्रमाणावरची काही साधी गणित सोडवा. - त्यापूर्वी पुन्हा एकदा लक्षात ठेवा.

गुणोत्तर प्रमाणाची गणितं करताना आपण कुठल्या दोन गोष्टींचं गुणोत्तर घेतो ते नीट पहा. म्हणजेच गुणोत्तराच्या अंशस्थानी कुठली व छेदस्थानी कुठली संख्या आहे ते पहा व त्यात गोंधळ करू नका. माहीत नसलेल्या संख्येसाठी अक्षर याना व गुणोत्तराचा अपूर्णांक पुन्हा, अक्षर वापरून लिहा. दोन्ही प्रकारांनी लिहिलेलं गुणोत्तर एकच आहे याचा उपयोग करून समीकरण लिहा व ते सोडवा. मग अक्षरांची किंमत किंवा जी संख्या शोधायची ती मिळेल.

सरावासाठी गणिते -

(1) तीन किलो तांदळांना 12 रू. पडतात तर 8 किलो तांदळांना किती रूपये पडतील ?

(2) 2 लीटर पेट्रोलमध्ये गाडी 46 किलोमीटर जाते. तर 161 कि. मी. जाण्यासाठी किती पेट्रोल लागेल ?

(3) 35 रु. मधे 5 किलोग्राम साखर मिळते तर 18 कि. ग्राम साखरेला किती रुपये पडतील ?

(4) 100 रु. कर्ज काढल्यास दर वर्षी 18 रु. व्याज द्यावे लागते तर 350 रु. काढल्यास किती व्याज दर वर्षी द्यावे लागेल ?

शेकडेवारी

गुणोत्तर प्रमाणाचा उपयोग करून शेकडेवारीची गणितं कशी करतात ते पाहू. तुम्ही अपूर्णांकांची तुलना करताना पाहिलं कीं वेगवेगळे अपूर्णांक जर एकाच उंचीच्या ठोकळ्यावर उभे असतील, म्हणजे सर्व अपूर्णांकांच्या छेदस्थानी एकच संख्या असेल तर त्यांची तुलना सहज करता येते. अनेकदा अशा प्रकारची तुलना गणितात करताना 100

ही संख्या तुलनेसाठी घेतली की सोपं जातं म्हणून 100 या संख्येबरोबर तुलना केली जाते. शेकडा म्हणजे 100, अशा शेकड्याच्या तुलनेने सोडवायची गणिते म्हणजे शेकडेवारीचे गणिते ही तुलना कशी मदत करते पहा.

उदा. सुरेशला मराठीमध्ये 75 पैकी 39 मार्क मिळाले. रमेशच्या वर्गातला मराठीचा पेपर 50 मार्कांचा होता व त्याला 50 पैकी 28 मार्क मिळाले. कुणाला जास्त मार्क आहेत?

इथे सुरेशला 39 म्हणजे रमेशापेक्षा जास्त मार्क असले तरी सुरेशचे 75 पैकी व रमेशचे 50 पैकी आहेत. म्हणून तुलना सोपी नाही. दोघांचेही पेपर 100 मार्कांचे आहेत मानून प्रत्येकाला 100 पैकी किती मार्क आहेत ते काढू मग तुलना सोपी होईल.

सुरेशला एकूण 75 मार्कांपैकी 39 मार्क आहेत म्हणून त्याचे $\frac{\text{मिळालेले मार्क}}{\text{एकूण मार्क}}$ हे गुणोत्तर $\frac{39}{75} = \frac{13}{25}$ असे आहे.

त्याला 100 पैकी स मार्क मिळतील असे मानले तर

$$\frac{\text{स}}{100} = \frac{13}{25}$$

$$\therefore \text{स} = \frac{13}{25} \times 100 = 52$$

∴ सुरेशला 100 पैकी 52 म्हणजेच शेकडा 52 मार्क आहेत हीच गोष्ट सुरेशला 52 टक्के किंवा 52% मार्क आहेत अशीही लिहितात. टक्के म्हणजे 100 पैकी !

आता $\frac{\text{रमेशचे मार्क}}{\text{एकूण मार्क}}$ हे गुणोत्तर $\frac{28}{50} = \frac{14}{25}$ आहे.

रमेशला 100 पैकी 'र' मार्क असले तर

$$\frac{\text{र}}{100} = \frac{14}{25}$$

$$\therefore \text{र} = \frac{14}{25} \times 100 = 56$$

$\therefore$ रमेशला शेकडा 56 किंवा 56% मार्क आहेत.

$\therefore$ रमेशला (56 − 52 = 4) 4 % मार्क जास्त आहेत.

शेकडेवारीचं किंचित वेगळ्या भाषेतलं गणित पहा -

<u>उदा.</u> घराच्या भाड्याच्या 22% घरपट्टी हा कर द्यावा लागतो. गणोजी दर वर्षी 3300 रु. घरपट्टी देतात तर त्यांना एका वर्षात घरभाडे किती मिळते ?

घरपट्टी ही भाड्याच्या 22% याचा अर्थ 100 रु. घरभाडे असेल तर 22 रु. घरपट्टी द्यावी लागते. घरभाडे जास्त असेल तर घरपट्टी त्या प्रमाणात जास्त होणार म्हणजे दोन्ही समप्रमाणात आहेत व $\frac{\text{घरपट्टी}}{\text{घरभाडे}}$ हे गुणोत्तर प्रमाण कायम आहे. ते $\frac{22}{100}$ असे आहे कारण 100 रु. घरभाडे असेल तर घरपट्टी 22 रु. असते. गणोजी दरवर्षी व रु. घरभाडे घेतात मानले तर हेच गुणोत्तर $\frac{3300}{\text{व}}$ असे येते.

$$\therefore \frac{3300}{\text{व}} = \frac{22}{100}$$

$$\therefore \frac{3300}{\text{व}} \times 100\,\text{व} = \frac{22}{100} \times 100\,\text{व}$$ (दोन्ही बाजूंना 100 व ने गुणले)

$$\therefore 330000 = 22\text{व}$$

$\therefore$ व = 15000 (बाजूंची अदलाबदल करून दोन्ही बाजूंना 22 ने भागले)

$\therefore$ गणोजींना दर वर्षी 15000 रु. घरभाडे मिळते.

आतां हे किंचित् मोठे गणित पहा.

<u>उदा.</u> एका गुदामात 150000 धान्याची पोती आहेत. त्यात 35% ज्वारीची, 30% गव्हाची व बाकीची इतर धान्याची आहेत. तर त्या गुदामात इतर धान्याची किती पोती आहेत?

हे गणित दोन प्रकारांनी सोडवता येते.

प्रथम व ज्वारीची व गव्हाची खरोखर किती पोती आहेत ते काढू. ज्वारीचा पोती ज आणि गव्हाची ग पोती आहेत असें मानू ज्वारीची 35% आहेत म्हणजे एकूण पोती 100 असतील तर ज्वारीची पोती 35 आहेत. $\therefore$ $\frac{\text{ज्वारीची पोती}}{\text{एकूण पोती}} = \frac{35}{100}$

$\therefore$ शिवाय 15000 पोत्यांपैकी ज्वारीची ज आहेत.

$$\therefore \frac{35}{100} = \frac{\text{ज}}{15000}$$

$\therefore$ ज $= \frac{35}{100} \times 15000$ (बाजूंची अदलाबदल करून दोन्ही बाजूंना 15000 न गुणले.

ज = 5250

त्याचप्रमाणे गव्हाची पोती 30 % म्हणजे एकूण पोती 100 असल्यास गव्हाची 30 आहेत गव्हाची पोती ग आहेत असे मानल्यास

$$\therefore \frac{\text{गव्हाची पोती}}{\text{एकूण पोती}} = \frac{30}{100} = \frac{\text{ग}}{15000}$$

$$\therefore \frac{\text{ग}}{15000} = \frac{30}{100}$$

$$\therefore \text{ग} = \frac{30}{100} \times 15000 = 4500$$

आता गव्हाची पोती 4500

ज्वारीची पोती 5250

$\therefore$ गव्हाची व ज्वारीची मिळून पोती 9750 आहेत व इतर धान्याची

$$\begin{array}{r} 15000 \\ -\ 9750 \\ \hline 5250 \end{array}$$ आहेत.

5250 पोती इतर धान्याची आहेत.

हे गणित दुसऱ्या प्रकाराने करताना गव्हाची व ज्वारीची किती

(6) मंदीमुळे कारखान्याच्या कामगारात 18% कपात करण्यात आली तर 2500 कामगारांपैकी किती कामगारांना काढले ?

नफातोटा

एखादी वस्तू एका किमतीस विकत घेऊन दुसऱ्या किमतीस विकली की फायदा म्हणजे नफा, किंवा तोटा होतो. जास्त किंमतीस विकली तर नफा व कमी किमतीस विकली तर तोटा होतो हे तुम्हाला माहीत आहे ना ? विक्रीची किंमत जास्त असेल तर

नफा = विक्री कि. – खरेदी किं.

उलट विक्रीची किंमत कमी असेल, तर

तोटा = खरेदी किं. – विक्री कि.

आता शेकडेवारीच्या भाषेत नफा तोट्याची गणिते कशी करतात ते पाहू. एक लक्षात ठेवा की

नफा किंवा तोटा हा नेहमी खरेदीच्या किंमतीवर शेकडेवारीने मोजला जातो.

100 रु. खरेदीवर 10 रु. नफा झाला तर शेकडा 10 नफा किंवा 10% नफा झाला असे म्हणतात. त्यावेळी विक्रीची किंमत खरेदीपेक्षा 10 रु. जास्त म्हणजे 110 रु. असते.

100 रु. खरेदीवर 10 रु. तोटा झाला तर शेकडा 10 तोटा किंवा 10% तोटा झाला असे म्हणतात. त्यावेळी विक्रीची किंमत खरेदीपेक्षा 10 रु. नी कमी म्हणजे 90 रु. असते.

पण दोन्ही ठिकाणी खरेदीची किंमत 100 रु. आहे.

नफा किंवा तोटा यांची शेकडेवारी माहीत असेल, तर $\frac{\text{नफा}}{\text{खरेदी}}$, किंवा $\frac{\text{तोटा}}{\text{खरेदी}}$ हे गुणोत्तरप्रमाण चटकन मिळते. आता हे उदाहरण पहा.

आहेत हे शोधल्या शिवाय इतर धान्याची किती आहेत हे काढता येते. एकूण पोती 100 असल्यास गव्हाची 30 व ज्वारीची 35 म्हणजे गव्हाची व ज्वारीची मिळून 65 पोती घेतात. म्हणून एकूण पोती 100 असल्यास इतर धान्याची पोती 100 − 65 = 35 असतील.

$$\therefore \frac{\text{इतर धान्याची पोती}}{\text{एकूण पोती}} = \frac{35}{100}$$

इतर धान्याची पोती ध मानूं

$$\therefore \frac{\text{ध}}{15000} = \frac{35}{100}$$

$$\therefore \text{ध} = \frac{35}{100} \times 15000 = 5250$$

∴ इतर धान्याची पोती 5250 आहेत.

आता सरावासाठी पुढील उदाहरणे करा.

(1) प्राप्तीकर करपात्र उत्पन्नाच्या 25% असेल व गजाभाऊंचे करपात्र उत्पन्न 6000 रु. असेल तर त्यांना किती प्राप्तीकर द्यावा लागेल ?

(2) एका गावात 4000 लोक आहेत त्यापैकी 58% लोक साक्षर आहेत तर निरक्षर लोक किती आहेत ?

(3) श्रीपतरावांनी आपल्या 6500 रु. उत्पन्नपैकी 40% शेतीसाठी, 48% घरखर्चासाठी वापरले व उरलेले बँकेत शिल्लक ठेवले तर किती रुपये बँकेत शिल्लक ठेवले ?

(4) मंगेशला 800 रु. पगार आहे. तो 560 रु. घरखर्चाला देतो. उमेशला 900 रु. पगार आहे व तो 576 रु. घरखर्चास देतो. पगाराच्या मानाने कोण जास्त हिस्सा घरखर्चास देतो ?

(5) घरांच्या किंमती एक वर्षात 20% ने वाढल्या. ज्या घरास पूर्वी 6000रु. लागत, त्यांची नवी किंमत काय ?

उदा. रमेशने T.V. एक सेट 2200 रु. ना विकत घेऊन 2860 रु. ना विकला तर त्याला किती टक्के नफा झाला. ?

विक्री – खरेदी = नफा = 2860 – 2200

नफा = 660

आता $\frac{\text{नफा}}{\text{खरेदी}} = \frac{660}{2200}$

किती टक्के नफा हे काढताना खरेदीची किंमत 100 मानावी लागते. नफा जर न % असेल, म्हणजेच 100 रु. खरेदीवर न रु. नफा असेल तर $\frac{\text{नफा}}{\text{खरेदी}} = \frac{\text{न}}{100}$

$\therefore \quad \frac{\text{न}}{100} = \frac{660}{2200}$

$\therefore \quad \text{न} = \frac{66}{220} \times 100$

$\therefore \quad \text{न} = 30$

$\therefore$ रमेशला 30% नफा झाला

आता हे किंचित कठीण गणित पहा -

उदा. हिरालाल ने एका कंपनीच्या शेअरमध्ये 4000 रु. गुंतवले व 360 रु. फायदा मिळवला तर पन्नालल ने 3000 रु. दुसऱ्या कंपनीमध्ये गुंतवून 300 रु. फायदा मिळवला. कुणी जास्त चांगला फायदा मिळवला ?

इथे हिरालालचा फायदा पन्नालालपेक्षा जास्त असला, तरी त्याने अधिक मोठी गुंतवणूक केली होती. तेव्हा तुलना करताना, दोघांच्या नफ्याच्या पायाखालचा ठोकळा, म्हणजे खरेदीची किंमत किंवा गुंतवणूकीची रक्कम सारखी असेल, तर तुलना करता येईल. त्यासाठी दोघांचीही गुंतवणूक 100 रु. मानू. हिरालालचा नफा ह % व पन्नालालचा प% मानूं.

मग $\frac{\text{ह}}{100} = \frac{360}{4000} \quad \therefore \text{ह} = \frac{360}{4000} \times 100 = 9$

तसेच $\frac{प}{100} = \frac{300}{3000}$ $\therefore$ प $= \frac{30000}{3000} = 10$

$\therefore$ हिरालालचा नफा 9%, तर पन्नालालचा 10% आहे.

$\therefore$ पन्नालालचा नफा 1% जास्त आहे.

(खरेदीची किंमत), (विक्रीची किंमत) व (नफा किंवा तोटा) या तीनपैकी कुठल्याही दोन संख्या माहीत असतील, तर तिसरी काढता येते. होय ना ? याशिवाय शेकडा नफा किंवा तोटा काय याचा विचार करून गुणोत्तर प्रमाण लिहिता आले की नफातोट्याची गणिते एकदम सोपी होतात. ही उदाहरणे पहा.

उदा. 1 दिनेशसिंगने एक मोटारगाडी 40,000 ना घेतली व 15% नफा घेऊन विकली तर विक्रीची किंमत काय ?

इथे 15% नफा म्हणजे 100 रु. खरेदी असेल तर 15 रु. नफा आहे.

$\therefore \frac{नफा}{खरेदी} = \frac{15}{100}$ असे गुणोत्तर प्रमाण मिळते.

दिनेशसिंगला 40000 रु. खरेदीवर न रु. नफा झाला असे मानले तर हेच गुणोत्तर प्रमाण $\frac{न}{40000}$ असेही आहे.

$\therefore \frac{न}{40000} = \frac{15}{100}$

$\therefore न = \frac{15}{100} \times 40000 = 6000$

$\therefore$ दिनेशसिंगचा नफा 6000 रु. आहे व विक्रीची किंमत ही 40,000 + 6000 = 46000 रु. आहे.

उदा. 2 - मोहनने रेडिओ 329 रु. ना विकला तेव्हा त्याला 6% तोटा झाला तर त्याची खरेदीची किंमत काय आहे ?

6% तोटा म्हणजे 100 रु. खरेदी असेल, तर 6 रु. तोटा व त्यावेळी विक्रीची किंमत 100 − 6 = 94 रु. असेल. आता आपल्याला प्रत्यक्ष विक्रीची किंमत माहीत आहे म्हणून आपण $\frac{खरेदी}{विक्री}$

हे गुणोत्तर प्रमाण पाहू. ते आहे $\frac{100}{94}$ तसेच मोहनची खरेदी ख रु. असेल तर तेच गुणोत्तर $\frac{ख}{329}$ आहे.

$$\therefore \frac{ख}{329} = \frac{100}{94}$$

$$\therefore ख = \frac{100}{94} \times 329$$

$$\therefore ख = \frac{50}{47} \times 329$$ (अंश व छेद दोघांना 2 ने भागले)

$$\therefore ख = 50 \times 7 = 350 \text{ रु.}$$

∴ खरेदीची किंमत 350 रु. आहे.

पुढील उदाहरण किंचित् मोठं आहे पण थोडा विचार केला तर अवघड नाही.

उदा. 3 - चंद्रकांतने नागपूरहून 30 रु. ना एक याप्रमाणे संत्र्यांच्या 15 करंड्या मागवल्या. त्यांच्यासाठी रेल्वे भाडे 75 रु. द्यावे लागले. नंतर त्याने त्या करंड्या 42 रु. ना एक याप्रमाणे विकल्या तर त्याला किती टक्के नफा झाला ?

इथे खरेदीची किंमत काढताना, मूळ किंमतीत रेल्वे भाडे देखील मिळवले पाहिजे. कारण खरेदीची एकूण किंमत म्हणजे त्या वस्तूसाठी चंद्रकांतने एकूण जेवढा खर्च केला तो. 15 करंड्यांची मूळ किंमत 30 × 15 = 450 रु. व आणण्याचा खर्च 75 रु.

एकूण खरेदीची किंमत = 450 + 75 = 525 रु. झाली.

विक्रीची किंमत 42 × 15 = 630 रु. झाली.

∴ नफा = विक्री – खरेदी

= 630 – 525 = 105 रू.

आता चंद्रकांतला नफा 105 रु. झाला. व तो 525 रु. खरेदीवर झाला.

$\therefore \frac{\text{नफा}}{\text{खरेदी}} = \frac{105}{525} = \frac{1}{5}$

आता नफ्याची टक्केवारी किंवा शेकडेवारी हवी आहे म्हणजे 100 रु. खरेदी असेल तर किती नफा तो काढायचा. तो जर न रु. असेल, तर $\frac{\text{नफा}}{\text{खरेदी}} = \frac{\text{न}}{100} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ न $= \frac{1}{5} \times 100 = 20$

$\therefore$ 20% नफा झाला.

आणखी एक उदाहरण, जरा मोठं असं पहा.

उदा. 4 एका दुकानदाराने 80 रु.ना एक याप्रमाणे 25 साड्या आणल्या. त्यापैकी 15 साड्या 110 रु. ना एक अशा विकल्या व उरलेल्या 80 रु. ना एक याप्रमाणे विकून टाकल्या. तर त्याला किती टक्के नफा झाला ?

या ठिकाणी खरेदीची एकूण किंमत व विक्रीचीही एकूण किंमत काढायची आहे. खरेदीची किंमत = 80 × 25 = 2000 रु.

विक्रीची किंमत पहिल्या 15 साड्यांची = 15 × 110 = 1650

उरलेल्या 10 साड्यांची किंमत = 10 × 80 = 800 रु.

$\therefore$ विक्रीची एकूण किंमत = 1650 + 800 = 2450 रु.

$\therefore$ नफा = विक्री − खरेदी

= 2450 − 2000 = 450 रु.

आता एकूण नफा 450 रु. आहे. त्याची टक्केवारी किंवा शेकडेवारी म्हणजे 100 रु. खरेदीवर किती नफा ते काढायचं आहे. $\frac{\text{नफा}}{\text{खरेदी}} = \frac{450}{2000}$ आहे, नफा न% असेल तर हेच गुणोत्तर $\frac{\text{न}}{100}$ असे आहे.

$\therefore \frac{\text{न}}{100} = \frac{450}{2000}$

$\therefore$ न $= \frac{450}{2000} \times 100 = 22\frac{1}{2}$

$\therefore \quad 22\frac{1}{2}\%$ नफा झाला.

आता सरावासाठी काही गणिते करा व ती करताना लक्षात ठेवा की

(1) नफा किंवा तोटा हा नेहमी खरेदीच्या एकूण किंमतीवर मोजला जातो. म्हणजे शेकडा न नफा किंवा न% नफा असेल तर 100रु. खरेदीवर न रु. नफा असतो.

(2) $\frac{\text{नफा}}{\text{खरेदी}}$, $\frac{\text{तोटा}}{\text{खरेदी}}$, $\frac{\text{खरेदी}}{\text{विक्री}}$, $\frac{\text{विक्री}}{\text{नफा}}$, $\frac{\text{तोटा}}{\text{विक्री}}$ या अनेक गुणोत्तरांपैकी आपल्याला कुठलं गुणोत्तर विचारात घेणं फायद्याचं आहे, सोपं आहे ते गणित वाचून ठरवा.

(3) माहीत नसलेल्या रकमेसाठी अक्षर मानून गुणोत्तर प्रमाण दोन प्रकारांनी मांडा व समीकरण तयार करा. ते सोडवा व अक्षरांची किंमत काढा.

सरावासाठी गणिते -

(1) मोहनने 2 किलो तेलाचा डबा 45 रु. ना घेतला. तो फुटल्यामुळे काही तेल गळून गेले. उरलेले तेल त्याने 36 रु. ना. विकून टाकले. त्याला या व्यवहारात किती टक्के तोटा झाला ?

(2) सूर्यकांतने एक डझन फौंटन पेने 30 रु. ना. घेतली व ती प्रत्येकी 3 रुपयास विकली. त्याला नफा किती टक्के झाला ?

(3) रमेशने एक टी. वी. सेट 3000 रु. ना. घेतला त्याला 15% नफा हवा असेल, तर त्याने तो सेट किती रुपयांना विकावा ?

(4) 300 रु. क्विंटल या दराने 5 क्विटल तांदूळ आणले. ते आणण्यासाठी गाडी भाडे 100 रु. द्यावे लागले. नंतर ते तांदूळ 4 रु. किलो या दराने विकले तर किती टक्के फायदा झाला ?

सरळव्याज

सरळ व्याजाने कर्जाऊ पैसे घेतले तर त्यासंबंधी गणिते देखील गुणोत्तर प्रमाणाचा उपयोग करून, चटकन करता येतात. इथे दरवर्षी व्याजाचा दर तोच कायम असतो. द. सा. द. शे. म्हणजे दर साल दर शेकडा किंवा '100 रु वर प्रत्येक वर्षी असा अर्थ आहे. व्याजाचा दर द. सा. द. शे. क्ष रु. म्हणजे 100 रु. मुद्दल किंवा कर्जाऊ रक्कम असेल तर दर वर्षी क्ष रु. व्याज द्यायचे. म्हणजे $\frac{\text{व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर दर वर्षी कायम असते. व जेवढी वर्षे मुदत असेल, तेवढ्या पटीने व्याज वाढते. साध्या गुणोत्तराच्या गणितापेक्षा ही गणिते किंचित क्लिष्ट असतात कारण $\frac{\text{व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ या गुणोत्तराबरोबरच मुदतीची वर्षे किती याचाही विचार करावा लागतो. पुढील शब्दांचे अर्थही ही गणिते करण्यापूर्वी लक्षात ठेवा. मुद्दल = कर्जाची रक्कम

रास = मुद्दल + व्याज

आता काही नमुन्याची उदाहरणे पहा -

उदा. १ दर साल दर शेकडा 12 रु. दराने, 600रु. कर्जावर 4 वर्षात किती व्याज द्यावे लागेल ?

प्रथम 100 रु. वर 4 वर्षात किती द्यावे लागेल ते पाहू. दर साल दर शेकडा 12 रु. म्हणजे 100 रु. मुद्दलास एका वर्षात 12रु

$\therefore$ 100 रु. मुद्दलास 4 वर्षात $12 \times 4 = 48$ रु. व्याज पडेल.

आता $\frac{\text{4 वर्षांचे व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर मिळेल. ते $\frac{48}{100}$ असे आहे.

600 रु. मुद्दलावर 4 वर्षात 'व' व्याज द्यावे लागेल असे मानले तर

$\frac{\text{4 वर्षांचे व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर $\frac{\text{व}}{600}$ असेही मिळते.

$$\therefore \frac{\text{व}}{600} = \frac{48}{100}$$

$$\therefore \text{व} = \frac{48}{100} \times 600$$

$= 48 \times 6 = 288$ रु.

$\therefore$ 600 रु. मुद्दलावर 4 वर्षांत 288 रु. व्याज द्यावे लागेल.

<u>उदा. 2</u> सुलोचनाने द. सा. द. शे. 15 रु. दराने कर्ज काढले 2 वर्षांनी ते फेडतांना तिला 450 रु. व्याज द्यावे लागले तर तिने किती कर्ज काढले होते ?

इथे मुदत 2 वर्षे आहे म्हणून 100 रु. वर 2 वर्षांत किती व्याज द्यावे लागेल ते पाहू. 100 रु. वर एक वर्षात 15 रु. व्याज

$\therefore$ 100 रु. वर दोन वर्षांत $15 \times 2 = 30$ रु. व्याज द्यावे लागेल.

आतां सुलोचनाचे मुद्दल म मानूं व हे गुणोत्तर दोन प्रकारांनी मांडले तर

$\frac{30}{100} = \frac{450}{म}$ हे समीकरण मिळते.

$\therefore 30\,म = 450 \times 100$ (दोन्ही बाजूं ना 100 म ने गुणले)

$$\therefore म = \frac{450 \times 100}{30} = 1500$$

(इथे $\frac{450 \times 100}{30}$ करताना अंश व छेद दोघांनाही प्रथम 10 ने भागले की $\frac{45 \times 100}{3}$ मिळतात. मग पुन्हा 3 ने अंश व छेद दोघांना भागले की $15 \times 100 = 1500$ हे उत्तर मिळते. चटकन गुणाकार करताना लक्षात ठेवा की अंश व छेद या दोघांच्याही गुणकांत एकक, दशम स्थानी, म्हणजे उजव्या बाजूस शून्ये असली तर अंश व छेद या दोघांतूनही अशी शून्ये सारखीच, काढता येतात म्हणजे अंशाच्या गुणकांतून जेवढी शून्ये काढायची तेवढीच छेदाच्या गुणकांतूनही काढायची.)

<u>उदा. 3</u> द. सा. द. शे. 10 दराने 3600 रु. मुद्दलाचे 1440 रु.

व्याज मिळण्यासाठी किती वर्षे कर्जे द्यावे लागेल ?

इथे 3600 रु. मुद्दलाचे 1440 रु. व्याज येण्यास व वर्षे लागतील असे समजू. मग 100 रु. वर व वर्षात किती व्याज येते ते काढूं. 100 रु. स. 1 वर्षात 10 रु. व्याज.

$\therefore$ 100 रु. स. व वर्षात 10 × व = 10 व रु. व्याज

आता $\frac{\text{व वर्षात व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहिता येईल

$\therefore \frac{1440}{3600} = \frac{10\text{व}}{100}$ (बाजूंची अदलाबदल करून दोन्ही बाजूंना 3600 ने गुणू.)

$\therefore$ 360 व = 1440

$\therefore$ व = 4

$\therefore$ 4वर्षे कर्ज द्यावे लागेल.

उदा. 4 2500 रु. कर्ज रखमाबाईनी सरळव्याजाने काढले. 5 वर्षांनी पैसे परत करताना त्यांना एकूण 3750 रु. परत करावे लागले. तर व्याजाचा दर काय होता ?

एकूण परत केलेली रक्कम = मुद्दल + व्याज = रास

व्याजाचा दर द. सा. द. शे. द रु. आहे असे मानूं.

$\therefore$ 5 वर्षात 100 रु. वर 5 द रु. व्याज होईल.

2500 रु. वर 5 वर्षात 3750 − 2500 = 1250 रु. एवढे व्याज दिले.

$\frac{\text{5 वर्षाचे व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहून

$\frac{5\text{द}}{100} = \frac{1250}{2500}$ असे समीकरण मिळते.

$\therefore$ 5द × 25 = 1250 (दोन्ही बाजूंना 2500 ने गुणले)

$\therefore$ 125द = 1250

$\therefore$ द = 10

$\therefore$ व्याजाचा दर द. सा. द. शे. 10 रु. आहे.

सरळव्याजाची गणिते करताना हे लक्षात ठेवा.

(1) जी संख्या शोधायची तिच्यासाठी अक्षर माना

(2) $\frac{\text{दिलेल्या मुदतीचे व्याज}}{\text{मुद्दल}}$, $\frac{\text{दिलेल्या मुदतीची रास}}{\text{मुद्दल}}$, $\frac{\text{मुदत}}{\text{व्याज}}$
इत्यादि गुणोत्तरांपैकी कुठले गुणोत्तर मांडता येते पहा

(3) 100 रु. मुद्दल घेऊन तेच गुणोत्तर दुसऱ्या प्रकाराने मांडा व समीकरण लिहा.

(4) समीकरणाच्या बाजू दोन भांडखोर जुळ्या भावांसारख्या आहेत हे लक्षात ठेवून दोन्हींवर सारख्याच गणिती क्रिया करा, आवश्यक वाटल्यास बाजूंची अदलाबदल करा व अक्षराची किंमत काढा. आतां सरावांसाठी पुढील उदाहरणे सोडवा.

(1) द. सा. द. शे. 10 दराने 700 रु. ची दामदुप्पट किती वर्षांनी होईल?

(2) द. सा. द. शे. 8 दराने 450 रु. ची. 7 वर्षांची रास किती होईल ?

(3) द. सा. द. शे. 9 दराने हेमाने कर्ज काढले आठ वर्षांनी तिला एकूण 1290 रु. द्यावे लागले तर हेमाने किती वर्ष काढले होते ?

(4) 6400 रु. चे. 7 वर्षांचे व्याज 5376 रु. होते. तर व्याजाचा दर काय असेल?

व्यस्त प्रमाणाची गणिते (काळ काम वेग)

आता पर्यंत ज्या संख्या समप्रमाणात बदलतात, त्यांची गणिते कशी

सोडवतात ते पाहिले. आतां विरुद्ध प्रमाणात बदलणाऱ्या संख्यांची गणिते कशी सोडवावी ते पाहू. तुमच्या 6 वीच्या पुस्तकात अशा गणितांचे गुणोत्तर उलटे असते. याचा उपयोग करून अशी गणिते सोडवून दाखवली आहेत पण या पद्धतीने सोडवताना काही मुलांचा गोंधळ होतो व गुणोत्तर उलटे करून नक्की कधी लिहायचे व कधी तसेच ठेवायचे हे काहींना चटकन समजत नाही. त्यासाठी दुसरी साधी रीत वापरूनही ही गणिते करता येतात. कशी ते पहा -

उदा. एक माणूस एक भिंत बांधायला दहा दिवस घेतो. पाच माणसे मिळून किती दिवसात बांधतील ?

इथे एका माणसाऐवजी जास्त माणसे लावली तर दिवस कमी होतील म्हणून माणसे व कामाला लागणारा वेळ हे व्यस्त प्रमाणात आहेत - त्यापैकी एक कमी झाल्यास दुसरा वाढतो. तेव्हा हे गणित सम प्रमाणाचं नाही. एकाऐवजी पाच माणसं लावली तर ती एका माणसाचं पाच दिवसाचं काम एका दिवसात करतील आणि दोन दिवसात एका माणसाचं दहा दिवसाचं काम करतील होय ना ? म्हणून पाच माणसे तीच भिंत दोन दिवसात करतील.

या ठिकाणी रीत काय आहे पहा - एका माणसाला दिलेलं काम करायला किती दिवस लागतात ते पहा व जास्त माणसे असतील तर त्या माणसांच्या संख्येने दिवसांच्या संख्येला भागा म्हणजे लागणारे दिवस मिळतील.

इथे एका माणसाला दहा दिवस लागतात व एकूण 5 माणसे लावली तर $\frac{10}{5} = 2$ दिवसात काम होईल.

$$\frac{\text{एका माणसाला लागणारा वेळ}}{\text{एकूण माणसांची संख्या}} = \text{एकूण माणसांना लागणारा वेळ}$$

किंवा

एका माणसाला लागणारा वेळ = जास्त माणसांची संख्या × तेवढ्या माणसांना लागणारा वेळ

या पद्धतीत एका माणसाला लागणारा वेळ काढून मग गणित सोडवले जाते. आणखी एक गणित पहा.

उदा. एका टाकीला पाच सारखे नळ आहेत. पूर्ण भरलेली टाकी रिकामी करण्यास दोन नळ सोडून ठेवळे तर 10 तास टाकी रिकामी होण्यास लागतात पाचही नळ सोडले तर टाकी रिकामी होण्यास किती वेळ लागेल ?

इथे नळ जास्त सोडले तर वेळ कमी लागेल.

व्यस्त प्रमाणाचे गणित आहे.

आता आपल्या रीतीप्रमाणे एका नळाला टाकी रिकामी करण्यास किती वेळ लागेल ते प्रथम पाहू. इथे माणसाऐवजी नळ काम करतो.

2 नळ सोडल्यास 10 तास लागतात तर

1 नळ सोडल्यास 20 तास लागतील होय ना ?

मग 5 नळ सोडल्यास त तास लागत असतील तर

$$\frac{\text{एका नळास लागणारे तास}}{\text{एकूण नळ}} = \text{एकूण नळांना लागणारे तास}$$

$$\therefore \frac{20}{5} = \text{त}$$

$$\therefore \text{त} = 4$$

∴ 5 नळ सोडल्यास टाकी 4 तासात रिकामी होईल. इथे मजुरांऐवजी नळ काम करत आहेत असं म्हणाला हरकत नाही. मात्र एका नळाला ठरलेलं काम करायला किती वेळ लागतो ते सरळ दिलेलं नाही ते आपल्याला शोधावे लागले.

आणखी उदाहरण पहा -

उदा. 12 मजूर एक घर 48 दिवसात बांधतात. अशी 2 घरे बांधण्यास किती मजूर लावले तर 32 दिवसात काम पुरे होईल ?

प्रथम 12 मजुरांना एका घरास 48 दिवस लागतात तर ठरलेलं काम म्हणजे 2 घरे बांधण्यास तेवढ्या मजुरांना 48 × 2 = 96 दिवस लागतील.

आता एका मजुराला ठरलेलं काम करायला किती दिवस लागतील ते काढूं.

12 मजुरांना 96 दिवस लागतात.

∴ 1 मजुराला 96 × 12 दिवस लागतील.

कारण एक मजूर 12 मजुरांचं एका दिवसाचं काम करायला 12 दिवस घेईल इथे 96 × 12 हा गुणाकार करून उत्तर काढले नाही तरी चालेल कारण अजून 96 × 12 या संख्येला भागायचं आहे. आता 'म' मजूर लावल्यास ठरलेलं काम 32 दिवसात होत असेल, तर आपल्या नियमाप्रमाणे

$\frac{96 \times 12}{\text{म}} = 32$ हे समीकरण मिळते.

∴ 32म = 96 × 12 (दोन्ही बाजूंची अदलाबदल व दोन्ही बाजूंना म ने गुणले)

$$\therefore \text{म} = \frac{\cancel{96} \times \overset{\overset{3}{\cancel{12}}}{12}}{\underset{\underset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{32}}} = 36$$ (इथे अंश व छेद यांना प्रथम 8 ने व मग 4ने भागले)

∴ 36 मजूर लावले तर 2 घरे 32 दिवसांत बांधतील. इथे 96 × 12 = 1152 हा गुणाकार करण्याचा वेळ वाचला व $\frac{1152}{32}$ हा भागाकारही सोपा झाला हे ध्यानांत घ्या.

उदा. रोज 4 गणिते केल्यास एक गणितांचा संग्रह 12 दिवसात सोडवला जातो. रोज 6 गणिते केल्यास किती दिवसांत संपेल ?

रोज जास्त गणिते केली तर संग्रह सोडवण्यास कमी दिवस लागतात

∴ व्यस्त प्रमाणाचे गणित

रोज 4 गणिते केल्यास 12 दिवस लागतात.

∴ रोज 1 गणित केल्यास 12 × 4 = 48 दिवस लागतील.

∴ रोज 6 गणिते केल्यास $\frac{48}{6}$ = 8 दिवस लागतील.

(कारण $\frac{\text{रोजी 1 गणिताने लागणारे दिवस}}{6}$ = 8 : इथे मजुरांऐवजी रोज सोडवल्या जाणाऱ्या गणितांचा अकडा आहे)

आता आणखी एक गणित पहा - इथे एकाच गणिताचे छोटे छोटे भाग आहेत व ते वेगवेगळ्या पद्धतीने सोडवायचे.

<u>उदा०</u> एका मोटारीला 34 कि.मी. जाण्यास 40 मिनिटे लागतात. तर मोटारीचा ताशी वेग काय ? गाडीचा वेग $\frac{2}{3}$ पट केला तर 272 कि.मी. जाण्यास किती वेळ लागेल ?

मोटारीचा वेग काढताना 1 तास = 60 मिनिटे हे लक्षात ठेवा. 60 मिनिटात मोटर किती कि.मी. जाते, तो मोटारीचा ताशी वेग

∴ मिनिटे व कि.मी. समप्रमाणात आहेत व $\frac{\text{मिनिटे}}{\text{कि.मी.}}$ हे गुणोत्तर प्रमाण कायम आहे.

60 मिनिटात क कि.मी. जात असेल, तर

$\frac{60}{\text{क}} = \frac{40}{34}$ असे समीकरण मिळते.

∴ 60 × 34 = 40 × क (दोन्ही बाजूंना 34 क ने गुणले)

∴ $\text{क} = \frac{6\cancel{0} \times 34}{4\cancel{0}} = 3 \times 17$

∴ मोटारीचा ताशी वेग 51 कि.मी. असा आहे.

आता तो $\frac{2}{3}$ पट केला, तर $\frac{\overset{17}{\cancel{51}}}{1} \times \frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}}$ = 34 कि.मी. होईल.

34 कि.मी. वेगाने 272 कि.मी. जायचे आहे. पुन्हा जास्त वेळ गाडी चालवली तर जास्त कि.मी. जाईल.

$\therefore \dfrac{\text{मिनिटे}}{\text{कि.मी.}}$ हे गुणोत्तर कायम आहे. 272 कि.मी. जाण्यास क्ष मिनिटे लागतात असे मानू.

$$\therefore \frac{60}{34} = \frac{\text{क्ष}}{272}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\overset{30}{\cancel{60}}}{\underset{\cancel{17}}{\cancel{34}}} \times \overset{16}{\cancel{272}} = 480$$

$\therefore$ 272 कि.मी. जाण्यास 480 मिनिटे किंवा $\frac{480}{60} = 8$ तास लागतील.

कधी कधी एकाच उदाहरणाचे वेगवेगळे भाग, वेगवेगळ्या पद्धतीने सोडवावे लागतात याचा आणखी एक नमुना पहा.

उदा० एक भिंत बांधायला 15 मजूरांना 40 दिवस लागतात तर चार भिंती 60 दिवसात पुऱ्या करायला किती मजूर लागतील ?

इथे करायचे काम हे चार भिंती बांधायचे आहे. त्यासाठी एका मजूराला किती दिवस लागतील हे आधी काढू.

15 मजूरांना 1 भिंत बांधायला 40 दिवस तर 15 मजूरांना 4 भिंती बांधायला 40 × 4 = 160 दिवस

आता 15 मजूरांना 160 दिवस लागतात तर 1 मजूराला 160×15 दिवस लागतील.

आपली रीत वापरून

$$\frac{\text{1 मजूराला लागणारे दिवस}}{\text{एकूण मजूर}} = \text{एकूण मजूरांना लागणारे दिवस}$$

$\therefore$ एकूण मजूर य लागतात असे मानले तर

$$\frac{160 \times 15}{\text{य}} = 60$$

$$\therefore 60\text{य} = 160 \times 15$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\overset{8}{\cancel{160}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{60}}} = 8 \times 5 = 40$$

∴ 60 दिवसात काम करण्यास 40 मजूर लावावे लागतील.

सरावासाठी खालील उदाहरणे सोडवा.

(1) आठ घोड्यांना काही हरभरे 112 दिवस पुरतात तर सात घोड्यांना ते किती दिवस पुरतील ?

(2) लीला एका तासात 15 गजरे करते तर गौरी एका तासात 20 गजरे करते. जे गजरे करायला लीलाला चार तास लागले, ते गौरी किती वेळात करेल ?

(3) एक मोटर ताशी 30 कि.मी. वेगाने गेली, तर पुणे सातारा अंतर 4 तासात जाते. मोटारीचा वेग दीडपट केला तर तेच अंतर किती वेळात जाईल ?

दशांश अपूर्णांक

अपूर्णांक जर दशांश पद्धतीने लिहिले तर बेरीज वजाबाकी, गुणाकार भागाकार या क्रिया करणं बरंच सोपं जातं. म्हणून ही पद्धत जरूर शिका. कुठलाही दशांश अपूर्णांक, साध्या व्यवहारी अपूर्णांकासारखा लिहिणं सोपं असतं. आता 32.7 हा दशांश अपूर्णांक पहा. दशांश टिंबाच्या आधीची म्हणजे डाव्या बाजूची संख्या 32 ही पूर्णांक आहे व टिंबाच्या पुढचा भाग हा एकापेक्षा कमी अशा अपूर्णांकाचा आहे. $.7 = \frac{7}{10}$ म्हणून $32.7 = 32\ \frac{7}{10}$. टिंबानंतर जेवढे आकडे

असतील तेवढी शून्यं एकावर ठेवून तो छेद व टिंबानंतरची संख्या हा अंश असा तो अपूर्णांक असतो. आता कुठलीही तीन आकड्यांची संख्या 1000 पेक्षा, 2 आकड्यांची संख्या 100 पेक्षा, एक आकड्याची संख्या 10 पेक्षा व चार आकड्यांची संख्या 10000 पेक्षा लहान असते म्हणून टिंबा नंतरचा अपूर्णांकाचा भाग हा नेहमी एकाहून लहान असतो कारण तो व्यवहारी अपूर्णांकाच्या स्वरूपात लिहिला की अंश हा छेदापेक्ष लहान असतो. पुन्हा एकदा पुढील दशांश - व्यवहारी अपूर्णांक ही रूपे पहा –

$4.73 = 4\frac{73}{100}$

$25.08 = 25\frac{8}{100}$ (इथे टिंबानंतर 0 व 8 हे दोन आकडे आहेत म्हणून छेद 100 व 08 = 8)

$.2 = \frac{2}{10}$

$6.001 = 6\frac{1}{1000}$

आणखी एक गंमत पहा –

$5.2 = 5\frac{2}{10}$

$5.20 = 5\frac{20}{100} = 5\frac{2}{10}$ (10 ने अंश व छेद यांना भागले)

$5.200 = 5\frac{20}{1000} = 5\frac{2}{10}$ (100 ने अंश व छेद यांना भागले)

$\therefore$ 5.2 = 5.20 = 5.200 = 5.2000 = 5.20000 हे लक्षात आलं का ? थोडक्यात, ध्यानांत ठेवण्यासाठी – दशांश अपूर्णांकाच्या बाबतीत दशांश टिंबानंतरची जी संख्या असते तिच्या पुढे कितीही शून्ये लिहिली तरी अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही –

तसेच

3.48 = 03.48 = 003.48

कारण 3 ह्या पूर्णांक आहे व त्या पूर्णांकाच्या आधी कितीही शून्ये दिली तरी संख्या बदलत नाही.

दशांश अपूर्णांकाच्या बेरजा वजाबाक्या अगदी सोप्या असतात. साध्या व्यवहारी अपूर्णांकांची बेरीज वजाबाकी करताना दोन्ही अपूर्णांकांना समान छेद देऊन मग बेरीज किंवा वजाबाकी केली जाते. जसे

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{5+3}{15}=\frac{8}{15}$$

किंवा $$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{8-3}{12}=\frac{5}{12}$$

पण दशांश अपूर्णांकांची बेरीज वजाबाकी सोपी असते.

जसे

$$\begin{array}{r} 3.25 \\ +\ 14.08 \\ \hline 17.33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8.12 \\ -\ 6.75 \\ \hline 1.37 \end{array}$$

म्हणजे दशांश अपूर्णांक एका खाली एक असे लिहा की वरच्या अपूर्णांकाच्या दशांश टिंबाच्या बरोबर खाली, खालच्या दशांश अपूर्णांकाचे टिंब येईल. मग टिंबाकडे लक्ष न देता नेहमीप्रमाणे बेरीज किंवा वजाबाकी करा व उत्तरातही टिंब वरच्या टिंबांच्या खाली लिहा. पण इथे एक काळजी घ्या – दोन्ही संख्यांमधे दशांश टिंबानंतर आकड्यांची संख्या सारखीच ठेवा म्हणजे चूक होणार नाही. जसे – 3.4 + 12.62 करताना

3.4 मधे दशांश टिंबानंतर एकच आकडा आहे म्हणून 3.4 ऐवजी 3.40 लिहू म्हणजे दोन्ही संख्यांमधे दशांश टिंबांनंतर दोन दोन आकडे होतील. मग

$$\begin{array}{r} 3.40 \\ +\ 12.62 \\ \hline 16.02 \end{array}$$

अशी बेरीज करता येईल.

तसेच 9.2 – 5.48 करताना (9.2 = 9.20)

$$\begin{array}{r} 9.20 \\ -\ 5.48 \\ \hline 3.72 \end{array}$$

$\therefore$ अशी वजाबाकी करायची.

सरावासाठी पुढील बेरजा व वजाबाक्या करा.

(1) 425.02 + 107.8

(2) 13.65 + 6.927

(3) 913.04 − 68.72

(4) 49.6 − 24.835

(5) 80.16 − 16.64

आता व्यवहारी अपूर्णांक दशांश अपूर्णांकाच्या रूपात कसे लिहिता येतात ते पहा - $\frac{3}{5}$ चे दशांश रूप हवे असेल तर सरळ भागाकार करायचा व 3 = 3.0 = 3.00 = 3.000 हे लक्षात ठेवायचे. नेहमीप्रमाणे भागाकार करायचा पण दशांश टिंबानंतरचे आकडे खाली उतरवायला सुरुवात केली की भागाकाराच्या संख्येतही दशांश टिंब लिहावे लागते $\frac{3}{5}$ ला दशांश रूप देऊं या –

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 5\overline{)\,3.000} \\ -\ 0 \\ \hline 30 \\ -\ 30 \\ \hline 000 \end{array}$$

या ठिकाणी दशांश टिंबानंतर एक शून्य खाली नेल्यानंतर पूर्ण भाग गेला व बाकी शून्य आल्यामूळे भागाकार पुरा झाला पण

$\frac{3}{4}$ या अपूर्णांकाला दशांश रूप देताना काय होते पहा

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ 4\overline{)\,3.00} \\ -\ 0 \\ \hline 30 \\ -\ 28 \\ \hline 20 \\ -\ 20 \\ \hline 00 \end{array}$$

म्हणजे या ठिकाणी दशांश टिंबानंतरची दोन शून्ये घ्यावी लागली तेव्हा भागाकार पुरा झाला.

कधी कधी व्यवहारी अपूर्णांकाला दशांश रूप देताना भागाकार संपतच नाही. जसे

$\frac{1}{3}$ ला दशांश रूप देताना -

$$\begin{array}{r} 0.333 \\ 3\overline{)\,1.00} \\ -0 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 1 \end{array}$$

म्हणजे दशांश टिंबानंतरची कितीही शून्ये खाली उतरवली तरी भागाकार संपत नाही, बाकी सदैव एक राहते. अशावेळी दशांश टिंबानंतर दोन किंवा तीन स्थाने भरेपर्यंतच भागाकार करतात व त्या व्यवहारी अपूर्णांकाचे दशांश अपूर्णांकात बिनचूक रूपांतर न होता, अंदाजे रूपांतर होते.

दशांश अपूर्णांकांचे गुणाकार व भागाकार देखील अवघड नसतात. ते कसे असतात ते पाहू. प्रथम कुठल्याही दशांश अपूर्णांकाला 10, 100, 1000 इ. संख्यांनी गुणणें किंवा भागणे किती सोपे असते पहा. आधी भागाकार करू.

$$2.5 = 5\frac{5}{10} = \frac{25}{10}$$

$$\therefore \quad \frac{2.5}{10} = \frac{25}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{25}{100} = .25$$

तसेच $42.63 = 42\frac{63}{100} = \frac{4263}{100}$

$$\frac{42.63}{10} = \frac{4263}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{4263}{1000} = 4.263$$

तसेच $\frac{42.63}{100} = \frac{4263}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{4263}{10000} = .4263$

म्हणजेच कुठल्याही दशांश अपूर्णांकाला 10 ने भागणे म्हणजे दशांश टिंब एक स्थान डावीकडे हलवणे. दशांश अपूर्णांकाला 100 ने भागणे म्हणजे दशांश टिंब दोन स्थाने डावीकडे हलवणे. तसेच 1000 ने भागणे म्हणजे दशांश टिंब तीन स्थाने डावीकडे हलवणे.

थोडक्यात एकावर शून्ये असलेल्या संख्येने दशांश अपूर्णांकाला भागताना, एकावर जेवढी शून्ये असतील, तेवढी स्थाने दशांश टिंब डावीकडे न्यावे लागते. पुन्हा काही असेच भागाकार पहा

$\frac{12.6}{10} = 1.26$, $\frac{12.6}{100} = .126$ आणि $\frac{12.6}{1000} = .0126$

या शेवटच्या भागाकारात दशांश टिंब तीन स्थाने डावीकडे न्यायचे आहे. पण टिंबाआधी दोनच आकडे आहेत. आता हे ध्यानात घ्या की $12.6 = 012.6 = 0012.6$. म्हणून दशांश टिंब तीन स्थाने डावीकडे नेताना डावीकडच्या शून्याचा उपयोग होतो व दशांश टिंब कितीही स्थाने डावीकडे नेता येते.

आता सरावासाठी पुढील भागाकार करा.

$\frac{72.4}{10}, \frac{415}{100}, \frac{803.21}{100}, \frac{48}{1000}, \frac{.37}{10}$

आता एकावर शून्ये असलेल्या संख्येने गुणाकार देखील कसा सोपा असतो याची उजळणी करू.

$3.6 \times 10 = \frac{36}{10} \times 10 = 36$

$4.72 \times 10 = \frac{472}{100} \times 10 = \frac{472}{10} = 47.2$

$36.12 \times 100 = \frac{3612}{100} \times 100 = 3612$

$.024 \times 10 = \frac{24}{1000} \times 10 = \frac{24}{100} = .24$

$4.98 \times 1000 = \frac{498}{100} \times 1000 = 498 \times 10 = 4980.$

आता लक्षात आलं ना की एकावर शून्ये असलेल्या संख्येने दशांश अपूर्णांकाला गुणताना, एकावर जेवढी शून्ये त्या संख्येत आहेत तेवढी स्थाने दशांश टिंब उजवीकडे सरकवायचे. आता वरील शेवटच्या गुणाकारात 4.98 ला 1000 ने गुणायचे आहे म्हणजे दशांश टिंब तीन स्थाने उजवीकडे न्यायचे पण दशांश टिंबाच्या उजवीकडे दोनच आकडे आहेत. तरी हे लक्षात घ्या की $4.98 = 4.980 = 4.9800$

म्हणून दशांश अपूर्णांकाच्या उजव्या बाजूच्या शून्यांचा उपयोग होतो, व दशांश टिंब कितीही स्थाने उजवीकडे नेता येतो.

पुन्हा एकदा लक्षात ठेवा की एकावर शून्ये असलेल्या संख्येने भागताना शून्यांच्या संख्येइतकी स्थाने, दशांश टिंब डावीकडे न्यायचे तर तशा प्रकारच्या संख्येने गुणताना, दशांश टिंब शून्यांच्या संख्येइतकी स्थाने उजवीकडे न्यायचे. पूर्णांकाने भागाकार करताना दशांश टिंब डावीकडे न्यायचे कारण असा भागाकार केल्यावर संख्या कमी होते. पूर्णांकाने गुणाकार करताना तेच टिंब उजवीकडे न्यायचं कारण असा गुणाकार केल्यावर संख्या वाढते. हेही लक्षात ठेवा की दशांश चिन्ह उजवीकडे गेलं की संख्या मोठी होते.

$$.0625 < 0.625 < 6.25 < 62.5 < 625$$

सरावासाठी पुढील गुणाकार करा.

41.36×1000, 5.2×100, 2.7645×1000,
36.92×100, 85.04×1000, $.68 \times 10$.

आता कुठल्याही दोन दशांश अपूर्णांकांचा गुणाकार कसा असतो ते पाहू.

उदा० 36.5×1.7 हा गुणाकार करायचा आहे.

हाच गुणाकार $\frac{365}{10} \times \frac{17}{10} = \frac{365 \times 17}{100}$ असाही करता येईल. म्हणजे दशांश टिंब काढून टाकून ज्या पूर्ण संख्या येतात त्यांचा साधा गुणाकार करायचा व मग येग्य जागी दशांश टिंब द्यायचं – जर एकूण छेदामधे $10 \times 10 = 100$ अशी संख्या असेल, तर उजवीकडे दोन आकडे ठेवून टिंब द्यावं लागेल. जसे

$365 \times 17 = 6205$

$\therefore \frac{365 \times 17}{100} = 62.05$

किंवा $36.5 \times 1.7 = 62.05$

थोडक्यात लक्षात ठेवण्यासाठी दोन दशांश अपूर्णांकांचा गुणाकार करताना प्रत्येक संख्येत दशांश टिंबानंतर असलेल्या आकड्यांच्या संख्येची बेरीज करून, तेवढे आकडे गुणाकारात, दशांश टिंबाच्या उजव्या बाजूला ठेवायचे.

नमुन्यासाठी काही उदाहरणे पहा.

उदा (1) 16.8×5

आता
$$\begin{array}{r} 168 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 840 \end{array}$$
असा गुणाकार आहे.

16.5 मधे दशांश टिंबानंतर एक आकडा आहे तर 5 ही पूर्ण संख्या असल्यामुळे 5. अशी लिहिता येते व दशांश टिंबानंतर आकडा नाही म्हणून गुणाकारात दशांश टिंबानंतर $1 + 0 = 1$ आकडा असला पाहिजे. म्हणून $16.8 \times 5 = 84.0$

या ठिकाणी दशांश टिंबानंतर शून्यच आहे व गुणाकार हा पूर्णांक झाला. साध्या रीतीने देखील

$\frac{168}{10} \times 5 = \frac{168}{2} = 84$ असाच गुणाकार येतो.

उदा. (2) 2.05×4.8

इथे 205×48 हा गुणाकार आधी करू

$$\begin{array}{r} 205 \\ \times\ 48 \\ \hline 1640 \\ +8200 \\ \hline 9840 \end{array}$$

तो 9840 असा आला. आता दशांश टिंबानंतर 2.05 मधे 2 व ए4.8 मधे एक आकडा येतो म्हणून गुणाकारात $2 + 1 = 3$ असे आकडे दशांश टिंबानंतर येतात

$\therefore$ गुणाकार $= 9.840 = 9.84$ असा आला. पुन्हा लक्षात असू द्या की दशांश टिंबानंतरच्या अपूर्णांक संख्येच्या शेवटी कितीही शून्ये लिहिली किंवा काढली तरी अपूर्णांक बदलत नाही.

उदा. (3) .12 × 1.63

इथे 12 × 163 हा गुणाकार प्रथम करू. तोच 163 × 12 असा करणं अधिक सोपं आहे.

$$\begin{array}{r} 163 \\ \times\ 12 \\ \hline 1956 \end{array}$$

आता .12 मधे दशांश टिंबानंतर 2 आकडे आहेत व 1.63 मधेही दोन आकडे टिंबानंतर आहेत.

∴ गुणाकारात टिंबाच्या उजव्या बाजूला 2 + 2 = 4 आकडे आले पाहिजेत ∴ .12 × 1.63 = .1956.

उदा. (4) .08 × 1.2

इथे पूर्णांक संख्या केल्यावर 08 म्हणजेच 8 व 12 या दोन पूर्ण संख्या मिळतात. 8 × 12 = 96 आहे. आता .08 मधे दशांश टिंबानंतर 2, 1.2 मधे टिंबानंतर 1 आकडा आहे म्हणून गुणाकारात दशांश टिंबाच्या उजव्या बाजूला 2 + 1 = 3 आकडे हवेत. 96 या पूर्ण संख्येत दोनच आकडे आहेत पण लक्षात ठेवा की पूर्ण संख्येच्या डाव्या बाजूला कितीही शून्ये लिहिता येतात म्हणून 96 = 096 असे लिहून गुणाकार येतो .08 × 1.2 = .096.

सरावासाठी खालील गुणाकार करा.

4.6 × 1.4, 5.2 × 1.15, .8 × 3.72, .16 × 2.5, .03 × 2.9, 18.6 × .13.

आता दशांश अपूर्णांकांचा भागाकार कसा करायचा ते पाहू. उदाहरणार्थ 38.16 ÷ 1.2 हा भागाकार करू या.

भागाकार करताना भाजक हा पूर्णांक करून घेतला की सोपे होते पण भाजक अपूर्णांक असून त्याचा पूर्णांक करायचा म्हणजे 10, 100 किंवा तसल्याच संख्येने गुणायचे मग आपला भागाकार चुकणार नाही का ? 1.2 ऐवजी 12 ने भागले, तर भागाकार कमी येईल पण मग भागाकार चुकू नये म्हणून भाजकाला ज्या संख्येने गुणायचं त्याच

संख्येने भाज्यालाही गुणलं तर भागाकार बदलणार नाही म्हणून भाजकाचा पूर्णांक बनवण्यासाठी ज्या संख्येने भाजकाला गुणायचं त्याच संख्येने भाज्यालाही गुणावं लागतं, किंवा भाजकाचा पूर्णांक करण्यासाठी दशांश टिंब जेवढी स्थाने उजवीकडे सरकवावं लागतं तेवढीच स्थाने भाज्यातील दशांश टिंबही उजवीकडे न्यावं लागतं.

38.16 ÷ 1.2 मध्ये, 1.2 हा भाजक आहे व त्यातील दशांश टिंब एक स्थान उजवीकडे नेलं की तो 12 हा पूर्णांक होतो मग भाज्यातही तेच करून *381.6 असा नवा भाज्य मिळतो. म्हणून 38.16 ÷ 1.2* म्हणजेच 381.6 ÷ 12 हे मिळालं की 381.6 ÷ 12 हा भागाकार नेहमीप्रमाणे करायचा. पण दशांश टिंब द्यायचे. जसे

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 31.8 \\ \cline{2-2}
12 \big) & 381.6 \\
 & -36 \\ \cline{2-2}
 & 21 \\
 & -12 \\ \cline{2-2}
 & 96 \\
 & -96 \\ \cline{2-2}
 & 00
\end{array}
$$

इथे भाज्यातील 38, 1 हे आकडे वापरून झाल्यावर टिंबानंतरचा 6 हा आकडा खाली उतरवताना भागाकारात 31 नंतर टिंब दिले आहे. एरवी भागाकाराची पद्धत तीच.

आणखी एक उदाहरण पहा –

23.8 ÷ .14 इथे भाजक .14 आहे तो 14 करताना दशांश टिंब दोन स्थाने उजवीकडे हलवले. भाज्यात टिंबानंतर एकच आकडा आहे पण नंतर हवी तेवढी शून्ये घेता यतात म्हणून दोन स्थाने दशांश टिंब उजवीकडे नेऊन भाज्य बनतो 2380.

म्हणून 23.8 ÷ .14 = 2380 ÷ 14

आणि

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 170 \\ \cline{2-2}
14 \big) & 2380 \\
 & -14 \\ \cline{2-2}
 & 98 \\
 & -98 \\ \cline{2-2}
 & 000 \\
 & -0 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

याप्रमाणे भागाकारही पूर्णांक म्हणजे 170 आला.

साध्याअपूर्णांकांचा भागाकार कसा करतात आठवते ना ? लक्षात ठेवा की <u>एकाद्या संख्येला व्यवहारी अपूर्णांकाने भागणे म्हणजे तो अपूर्णांक उलटा करून गुणणें होय.</u>

उदाहरणार्थ $48 \div \frac{3}{4} = \overset{16}{\cancel{48}} \times \frac{4}{\cancel{3}} = 64$

किंवा $\frac{56}{9} \div \frac{6}{5} = \frac{\overset{28}{\cancel{56}}}{9} \times \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{140}{27}$

आता दशांश अपूर्णांकांच्या भागाकाराचा नियम बरोबर कसा आहे पहा हं !

$$\begin{aligned} 23.8 \div .14 &= \frac{238}{10} \div \frac{14}{100} \\ &= \frac{238}{10} \times \frac{100}{14} = \frac{2380}{14} \\ &= 2380 \div 14 \end{aligned}$$

आणि दशांश टिंब सरकवण्याच्या नियमाने देखील हाच भागाकार आला ना ?

सरावासाठी पुढील भागाकार करा.

$81.92 \div 1.6$, $3.375 \div 4.5$, $129. \div 1.2$.

ल. सा. वि. / म. सा. वि.

अनेकदा लसावि मसावि नावाचे राक्षस विद्यार्थ्यांचा गोंधळ करतात - हे शब्द छोटे असूनही भयंकर वाटू लागतात. ते काय आहेत हे एकदा नीट समजलं व लक्षात ठेवलं की हेच राक्षस आपल्याला वश होऊ शकतात. यासाठी आधी त्यांचा अर्थ पहा.

ल. सा. वि. = लघुत्तम साधारण विभाज्य

म. सा. वि. = महत्तम साधारण विभाजक

म्हणजे लसावि/मसावि मधला 'सा' एकच असला तरी 'वि' मात्र

वेगवेगळा आहे हं! विभाज्य म्हणजे दिलेल्या संख्यांनी पूर्ण भाग जाणारी संख्या म्हणून ती दिलेल्या संख्यांपेक्षा मोठी असणार तर विभाजक म्हणजे दिलेल्या संख्यांना ज्याने पूर्ण भाग जातो ती संख्या - म्हणून ती दिलेल्या संख्यांपेक्षा लहान असते. तेव्हा लक्षात ठेवा की लघुत्तम म्हणजे सर्वात लहान असा विभाज्य असला तरी तो दिलेल्या संख्यांपेक्षा मोठा, तर महत्तम म्हणजे सर्वात मोठा असा विभाजक असला तरी तो दिलेल्या संख्यांपेक्षा लहान असतो.

म. सा. वि. दिलेल्या संख्या ल. सा. वि.

नमुन्यासाठी आपण 6 व 15 या दोन संख्यांचे लसावि, मसावि काढून पाहू.

6 ने भाग जाणाऱ्या किंवा विभाज्य संख्या 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60 व याहूनही मोठ्या आहेत.

15 ने भाग जाणाऱ्या किंवा विभाज्य संख्या 15, 30, 45, 60, 75, व याहूनही मोठ्या आहेत.

आता दोन्हींच्या विभाज्य संख्यांमध्ये 30, 60, 90 इत्यादी कॉमन किंवा साधारण विभाज्य आहेत. अर्थात् त्यापैकी 30 ही संख्या सर्वात

लहान आहे म्हणून ल. सा. वि. = 30.

इथे आपण काय केलं पहा - 6 व 15 यांचे विभाज्य तपासून दोघांच्याही विभाज्यांपैकी जे कॉमन (साधारण) विभाज्य आहेत, त्यापैकी सर्वात लहान विभाज्य घेतला तोच ल.सा.वि. आहे.

आता म.सा.वि. काढू. यावेळी 6 व 15 या दोन्ही संख्यांचे विभाजक तपासायचे.

6 चे विभाजक 1, 2, 3, 6 (यांनी 6 ला पूर्ण भाग जातो)

15 चे विभाजक 1, 3, 5, 15 (यांनी 15 ला पूर्ण भाग जातो)

आता दोघांचेही कॉमन (साधारण) विभाजक 1 व 3 आहेत त्यापैकी 3 हा सर्वात मोठा आहे.

म्हणून म. सा. वि. = 3.

आणखी एक असेच उदाहरण पाहू.

उदा. 12 व 16 यांचे ल.सा.वि. व म.सा.वि. काढा.

आधी ल.सा.वि. काढू.

12 चे विभाज्य : 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 इत्यादि

16 चे विभाज्य : 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112 इत्यादि

∴ दोघांचेही साधारण विभाज्य हे 48, 96 व याहून मोठे असतील.

∴ ल. सा. वि. = 48

12 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 12

16 चे विभाजक : 1, 2, 4, 8, 16

यापैकी साधारण (कॉमन) विभाजक 1, 2, 4 हे आहेत.

यात 4 सर्वात मोठा

∴ म. सा. वि. = 4

आतां लक्षात ठेवा की 1 हा सर्वच पूर्णांकाचा विभाजक असतो.

वरील पद्धतीने लहान संख्यांचे लसावि मसावि काढणे सोपे असते पण मोठ्या संख्यांना हीच पद्धत वापरली तर फार वेळ लागतो. त्यासाठी एक दुसरी पद्धत वापरणे सोयीचे असते. प्रथम ज्या संख्यांचे लसावि किंवा मसावि काढायचे, त्या संख्यांचे मूळ अवयव पाडून घेतात. मूळ

अवयव म्हणजे मूळ संख्या असलेले विभाजक. लक्षात ठेवा की मूळ संख्या म्हणजे अशी संख्या जिला फक्त 1व ती संख्या स्वतः एवढे दोनच विभाजक आहेत.

2, 3, 5, 7, 11 या मूळ संख्या आहेत. पण 4, 6 या मूळ संख्या नाहीत कारण 2 हा 4 चा, 2 व 3 हे 6 चे विभाजक आहेत.

ल.सा.वि. म.सा.वि काढण्याची सोपी रीत पहा.

उदा. 24 व 60 यांचे ल.सा.वि. म.सा.वि. काढा.

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

आता 24 व 60 या दोघांचीही विभाज्य संख्या असेल, तिला 2 ने 3 वेळा, 3 ने एक वेळा व 5 ने एक वेळा भाग जाईल.

$\therefore$ कुठल्याही साधारण विभाज्याला $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ ने भाग जाईल व $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$ ही संख्याही 24 व 60 यांची विभाज्य आहेच म्हणून व ही संख्याच सर्वात लहान साधारण विभाज्य आहे.

$\therefore$ ल.सा.वि. = 120

आता 1,2,3, $2 \times 3 = 6$, $2 \times 2 = 4$ व $2 \times 2 \times 3 = 12$ एवढे विभाजक दोघांनाही पूर्ण भाग देतात. याहून आणखी कॉमन विभाजक मिळणार नाहीत.

$\therefore$ यातला मोठा भाग = $2 \times 2 \times 3 = 12$ हाच मसावि होय.

लक्षात ठेवायला सोपी रीत अशी - दिलेल्या संख्यांचे मूळ अवयव पाहून घ्या. ल.सा.वि. साठी प्रत्येक मूळ अवयव दिलेल्या संख्यांमध्ये किती वेळा येतो पहा. जास्तीत जास्त किती वेळा येतो, तेवढ्या वेळा तो घ्या व अशा सर्व मूळ अवयवांना घेऊन त्यांचा गुणाकार करा. म.सा.वि. साठी प्रत्येक मूळ अवयव कुठल्याही संख्येत कमीत कमी किती वेळा येतो ते पहा व तितक्या वेळा तो घ्या. अशा सर्व मूळ अवयवांचा गुणाकार म्हणजे म.सा.वि. होय.

24 मध्ये 2 हा तीन वेळा व 60 मध्ये 2 वेळा आहे.

∴ लसावि साठी 2 हा तीन वेळा, 3 हा एक वेळा व 5 एक वेळा घेऊन लसावि = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$ येतो.

प्रत्येक संख्येत 2 हा कमीत कमी दोनदा व 3 एकदा येतो.

∴ मसावि = $2 \times 2 \times 3 = 12$ येतो.

आणखी एक उदाहरण पहा.

उदा. 36 व 54 यांचे लसावि - मसावि काढा.

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

∴ लसावि = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$

मसावि = $2 \times 3 \times 3 = 18$

कुठल्याही संख्येचे मूळ अवयव पाडताना 2, 3, 5, 7, 11 यापैकी कुठल्या मूळ संख्येने दिलेल्या संख्येला पूर्ण भाग जातो ते पहावे लागते. त्यासाठी सोपे व उपयोगी पडणारे नियम पाठ करा व नीट ध्यानात ठेवा. -

1) एखाद्या संख्येच्या एकक स्थानच्या आकड्याला 2 ने पूर्ण भाग जात असेल तर त्या संख्येला 2 ने पूर्ण भाग जातो.

उदा. 30, 42, 64, 18 यांना 2 ने भाग जातो पण 17, 45, 93 यांना 2 ने भाग जात नाही.

2) एखाद्या संख्येतील सर्व आकड्यांची बेरीज करून मिळणाऱ्या संख्येला 3 ने भाग जात असेल, तर मूळ संख्येलाही 3 ने भाग जातो.

उदा. 315 या संख्येमध्ये, $3+1+5 = 9$ व 3 ने 9 ला भाग जातो म्हणून 315 ला 3 ने भाग जातो पण

421 मध्ये, $4+2+1 = 7$ व 3 ने 7 ला भाग जात नाही म्हणून 421 ला 3 ने भाग जात नाही.

3) एखाद्या संख्येत, एकक स्थानी 0 किंवा 5 हा आकडा असेल तर त्या संख्येला 5 ने भाग जातो.

जसे - 315 मध्ये एकक स्थानी 5 आहे म्हणून 315 ला 5 ने भाग जातो.

पण 37, 81, 72, 50124 यापैकी एकाही संख्येला 5 ने भाग जात नाही.

7, 11, 13 या मूळ संख्यांनी दिलेल्या संख्येला भाग जातो का हे प्रत्यक्ष भागाकार करूनच पहा. त्यासाठी लक्षात ठेवण्याजोगा सोपा नियम नाही.

सरावासाठी खालील संख्यांचे मूळ अवयव पाडा

84, 96, 114, 560, 4425, 2400.

लसावि मसावि ची काही खास गणिते पहा.

उदा. 12 व 36 यांचा मसावि व लसावि काढा.

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

दोन्ही संख्यांमध्ये 2 दोन वेळा आहे, 3 हा 12 मध्ये एकदा, 36 मध्ये दोनदा आहे.

∴ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

लसावि $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

म्हणजे दिलेल्या संख्यांपैकीच छोटी संख्या = मसावि व मोठी संख्या = लसावि

तेव्हा लक्षात ठेवा की कधी कधी मसावि हा दिलेल्या संख्यांपैकी छोट्या संख्येएवढा असतो व लसावि हा कधी कधी दिलेल्या संख्यांपैकी मोठ्या संख्येएवढा असतो.

उदा. 56 व 25 यांचा लसावि व मसावि काढा

$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$

$25 = 5 \times 5$

दोन्हींना एकही मूळ संख्या कॉमन किंवा साधारण विभाजक नाही.

∴ 1 हा एकच विभाजक दोघांचा कॉमन आहे.

∴ मसावि = 1

लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 5 \times 5 = 56 \times 25 = 1400$

सरावासाठी खालील संख्यांचे लसावि व मसावि काढा -

(1) 15, 25, 60

(2) 24, 96

(3) 42, 25, 1050

(4) 12, 60, 108

लसावि मसावि चा उपयोग करून गणिते कशी करतात ते पहा -

उदा. 1 एका दुकानदाराकडे निळे कापड 105 मीटर, लाल कापड 60 मीटर व पांढरे कापड 120 मीटर आहे. त्याला प्रत्येक कापडाचे सारख्या लांबीचे तुकडे करायचे आहेत. जास्तीत जास्त किती लांबीचे तुकडे करता येतील?

सगळे तुकडे सारख्या लांबीचे हवेत - तुकड्याच्या लांबीची संख्या असेल, तिने 105, 60 व 120 या सर्वांना पूर्ण भाग गेला पाहिजे म्हणजे तुकड्याच्या लांबीची संख्या 105, 60 व 120 यांची विभाजक आहे व अशी मोठ्यात मोठी संख्या हवी म्हणजे 105, 60 व 120 यांचा मसावि हवा.

$105 = 3 \times 5 \times 7$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$\therefore$ मसावि $= 3 \times 5 = 15$

$\therefore$ कापडाचे तुकडे 15 मीटरचे करता येतील.

उदा. 2 शाळेतील मुलांमध्ये, 20 मुलांच्या, 30 मुलांच्या किंवा 50 मुलांच्या अशा रांगा केल्या तर एकही मुलगा शिल्लक रहात नाही. तर शाळेत कमीत कमी किती मुले असतील?

शाळेतील मुलांच्या संख्येला 20, 30 व 25 ने पूर्ण भाग जातो म्हणून ती संख्या 20, 30 व 25 ची विभाज्य आहे व अशी लहानात लहान संख्या म्हणजे लसावि हवा.

$20 = 2 \times 2 \times 5$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$25 = 5 \times 5$

$\therefore$ लसावि = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$

$\therefore$ शाळेत कमीत कमी 300 मुले असतील.

(300 प्रमाणे 600, 900, 1200 या संख्याही 20, 30, 25 च्या विभाज्य आहेत पण सर्वात छोटी विभाज्य संख्या 300 आहे.)

उदा. 3 एका टोपलीत काही फुले आहेत. त्यातून 20, 15 किंवा 25 फुलांच्या माळा केल्या तर 7 फुले शिल्लक राहतात तर टोपलीत कमीत कमी किती फुले आहेत?

15, 20 किंवा 25 फुलांच्या माळा केल्या तर बरोबर 7 फुले उरतात ती बाजूला काढली तर उरलेल्या फुलांच्या संख्येला 15, 20, 25 यांनी पूर्ण भाग जातो. म्हणून उरलेल्या फुलांची संख्या 15, 20, 25 यांनी विभाज्य आहे व अशी लहानात लहान संख्या म्हणजे त्यांचा लसावि.

$15 = 3 \times 5$

$20 = 2 \times 2 \times 5$

$25 = 5 \times 5$

$\therefore$ लसावि = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$

$\therefore$ 7 फुले बाजूला काढल्यावर उरलेली फुले कमीत कमी 300 आहेत

$\therefore$ एकूण फुले $300+7 = 307$ आहेत.

(वरील उदाहरणातही 300 प्रमाणेच 600, 900, 1200 इत्यादी संख्या 15, 20 व 25 ने विभाज्य आहेत पण सर्वात लहान विभाज्य संख्या 300 आहे)

सरावासाठी पुढील गणिते करा -

(1) सुरेशजवळ 432 लाल गोट्या, 612 पांढऱ्या गोट्या व 900 हिरव्या गोट्या आहेत. त्याला प्रत्येक रंगाच्या गोट्यांची पाकिटे

भरायची आहेत. सगळ्या पाकिटांत गोट्यांची एकच संख्या असली पाहिजे. प्रत्येक पाकिटात जास्तीत जास्त किती गोट्या भरता येतील?

(2) मीनाजवळ शेवंतीची काही फुले आहेत. त्यांच्या माळा करायच्या आहेत. 12 फुलांच्या, 16 फुलांच्या किंवा 18 फुलांच्या माळा केल्या तर सगळी फुले संपतील. तिच्याजवळ कमीत कमी किती फुले असतील?

(3) टोपलीतील संत्र्याचे 25, 30 किंवा 40 चे ढीग केले तर प्रत्येक वेळी 5 संत्री उरतात. तर टोपलीत कमीत कमी किती संत्री असतील?

पुन्हा एकदा लक्षात ठेवा की दिलेल्या संख्यांना पूर्ण भाग देणारा मोठ्यात मोठा विभाजक म्हणजेच मसावि व दिलेल्या संख्यांनी विभाज्य, किंवा दिलेल्या संख्यांनी ज्या संख्येला पूर्ण भाग जातो अशी लहानात लहान संख्या म्हणजे लसावि. मसावि हा कमीत कमी एक व जास्तीत जास्त दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वात छोट्या संख्येइतका असतो. लसावि हा कमीत कमी दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वात मोठ्या संख्येइतका व जास्तीत जास्त दिलेल्या सर्व संख्यांच्या गुणाकाराएवढा असतो.

इयत्ता सातवी साठी जादा पुरवणी

लसावि / मसावि

लसावि आणि मसावि म्हणजे काय व संख्यांचे मूळ अवयव पाडून दिलेल्या संख्यांचे लसावि व मसावि कसे काढायचे हे तुम्ही शिकलात. मोठाल्या संख्यांचे अवयव पाडायला त्रास होतो तेव्हा मसावि शोधण्याची आणखी एक रीत सातवीच्या पुस्तकात आहे. ती अशी -

1. दिलेल्या संख्या M व N असतील आणि N ही M पेक्षा मोठी असेल, तर N ला M ने भागा व बाकी किती येते पहा. बाकी जर N_1 असेल, M व N चा मसावि हा M व N_1 च्या मसावि इतका असतो. दोन संख्यांचा मसावि लिहिण्यासाठी एक पद्धत वापरली जाते. गोल कंसांचा उपयोग त्यात आहे.

$(M, N) = M$ व N चा मसावि.

N ला M ने भागल्यावर q हा भागाकार असेल व $N_2 \neq 0$ बाकी असेल, तर

$N = qM + N_1$ हे समीकरण मिळते. इथे N_1 ही बाकी असल्यामुळे, $N_1 < M < N$ ($N > M$ हे दिलेले आहे.)

आता आपली कंसांची पद्धत वापरून असे लिहिता येईल की

$(M, N) = (M, N_1)$, मात्र N_1 हा शून्य असता नये.

$N_1 < M$ म्हणून आता N_1 ने M ला भागू व बाकी M_1 आल्यास, व M_1 शून्य नसेल, तर $(M,N) = (M, N_1) = (M_1, N_1)$ आणि $M_1 < N_1$ हीच पद्धत पुन्हा वापरून M_1 ने N_1 ला भागायचे व बाकी N_1 असेल, $N_2 \neq 0$. तर $(M_1, N_1) = (M_1, N_2)$ आणि $N_2 < M_1$

आता तुमच्या लक्षात आलं का, की, आपण हळू हळू M व N या ऐवजी अधिकाधिक लहान संख्या वापरतो आहोत ! काही वेळाने अशी स्थिती येते की लहान संख्येने मोठ्या संख्येला पूर्ण भाग जातो व बाकी शून्य उरते. अशा वेळी ती लहान संख्या हाच त्या दोन संख्यांचा मसावि असतो. कारण दिलेल्या दोन संख्यांपैकी एकीने दुसरीला पूर्ण भाग गेला, तर जिने भाग जातो ती संख्या हीच त्या दोघींचा मसावि असते जसे

$(12, 36) = 12$

या नव्या पद्धतीने एक गणित सोडवून पाहू.

उदा. 72 व 119 यांचा मसावि काढा.

इथे $72 < 119$

119 ला 72 ने भागू या.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 72 \overline{)\,119} \\ -\,72 \\ \hline 47 \end{array} \qquad \therefore (72, 119) = (72, 47)$$

आता 72 ला 47 ने भागू या.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 47\overline{)\;72} \\ -\,47 \\ \hline 25 \end{array} \quad \therefore (72,\ 119) = (72,\ 47) = (47,\ 25)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 25\overline{)\;47} \\ -\,25 \\ \hline 22 \end{array} \quad \therefore (47,\ 25) = (25,\ 22)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 22\overline{)\;25} \\ -\,22 \\ \hline 3 \end{array} \quad \therefore (25,\ 22) = (22,\ 3)$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 3\overline{)\;22} \\ -\,21 \\ \hline 1 \end{array} \quad \therefore (72,\ 119) = (22,\ 3) = (3,\ 1) = 1$$

या गणितात 72 व 119 यांना 1 शिवाय दुसरा समान अवयव नाही हे समजले. म्हणून त्यांचा म.सा.वि. 1 आला.

आणखी एक उदाहरण पाहू.

उदा. (119, 154) शोधा

$119 < 152$ म्हणून 119 ने 154 ला भागू.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 119\overline{)\;154} \\ -\,119 \\ \hline 35 \end{array} \quad \therefore (119,\ 154) = (119,\ 35)$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 35\overline{)\;119} \\ -\,105 \\ \hline 14 \end{array} \quad \therefore (119,\ 35) = (35,\ 14)$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 14\overline{)\;35} \\ -\,28 \\ \hline 7 \end{array} \quad \therefore (14,\ 35) = (14,\ 7)$$

आता 7 ने 14 ला पूर्ण भाग जातो म्हणून $(14,\ 7) = 7$,
$\therefore (119,\ 154) = 7$

दिलेल्या दोन संख्यांचा मसावि शोधण्याची ही रीत सोपी आहे ना? मात्र भागाकार करण्याची भरपूर सवय हवी त्यात चुकू नका.

दिलेल्या संख्यांचा लसावि शोधण्याची अशी सोपी रीत सरळ सरळ दिसत नाही. पण एक सूत्र तुम्हाला उपयोगी पडेल. दिलेल्या दोन संख्यांचा गुणाकार हा त्या दोन संख्यांच्या लसावि व मसावि यांच्या गुणाकाराएवढा असतो. म्हणजे M व N या दोन संख्या असतील व A हा त्यांचा मसावि व B हा लसावि असेल तर.

$M \times N = A \times B$

आता A = (M, N) शोधण्याची सोपी रीत वापरून A ची किंमत काढली तर वरील समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना A ने भागून व बाजूंची अदलाबदल करून

$B = \frac{M \times N}{A}$ असे सूत्र मिळते.

सरावासाठी खालील जोड्यांचे मसावि व लसावि काढा.

(1) 48, 68

(2) 172, 120

(3) 120, 195

अपूर्णांक व बीजगणित :

अपूर्णांकांची बेरीज वजाबाकी व गुणाकार भागाकार आपण शिकलो आहोत. एक गोष्ट विसरू नका की <u>एखाद्या व्यवहारी अपूर्णांकाने भागाकार म्हणजेच तो अपूर्णांक उलटा करून त्याने गुणाकार करायचा.</u> जसे

$$\frac{4}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{4}{3}$$

किंवा $\frac{5}{12} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{12} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{8}$

या गणितात आणखी एका गोष्टीचा सराव हवा. अपूर्णांकांचे गुणाकार

करताना आपण अंशा अंशाचे व छेदा छेदांचे गुणाकार करतो. अशा वेळी अंश व छेद यांच्या सामायीक अवयवानें अंश व छेद दोघांना भागून संक्षिप्त रूप देता येते म्हणजेच उत्तरातील अपूर्णांक फार मोठ्या आकड्यांचा न ठेवता शक्य तेवढ्या लहान संख्यांचा होतो.

जसे $\frac{4}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{4\times3}{9}$ अंश व छेद दोघांत 3 हा अयवय आहे, त्याने भागून

$\frac{4\times3}{9} = \frac{4}{3}$ हे संक्षिप्त रूप आले.

$\frac{5}{12} \times \frac{3}{2} = \frac{5\times3}{12\times2} = \frac{5}{4\times2} = \frac{5}{8}$ (इथे 3 या सामायिक अवयवाने अंश व छेद यांना भागले)

दोन अपूर्णांकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करतांना दोन्ही अपूर्णांकाचे छेद समान ठेवून मग अंशांची बेरीज किंवा वजाबाकी करायची असते हे विसरूं नका.

अधिक व उणे संख्यांचा किंवा धन व ऋण संख्यांचा गुणाकार करताना हे नियम विसरू नका.

(धन) × (धन) = धन, (धन) × (ऋण) = (ऋण)

(ऋण) × (ऋण) = धन, (ऋण) × (धन) = (ऋण)

जसे भागाकार म्हणजे उलटा करून गुणाकार तसेच एखादी बहुपदी वजा करणे म्हणजे चिन्ह बदलून बेरीज करणे हेही लक्षात ठेवा. वेगवेगळ्या बहुपदीसाठी कंस वापरा व एखाद्या बहुपदीचं चिन्ह बदलायचं म्हणजे त्यातील प्रत्येक पदाचं चिन्ह बदलायचं हेही विसरूं नका. दोन बहुपदींचा गुणाकार करताना कंस वापरा व ते हळू हळू, एका वेळी एक कंस याप्रमाणे सोडवा.

उदा. (m−3n+4) व (2m+n) या दोन बहुपदीचा गुणाकार करा. (m−3n+4) x (2m+n) हा गुणाकार करताना प्रथम पहिला कंस सोडवू व मग दुसरा.

$(m-3n+4) \times (2m+n) = m \times (2m+n) - 3n \times (2m+n)$
$+ 4\ (2m+n)$
$= 2m^2+mn - 3n\times 2m - 3n\times n + 8m+4n$
$= 2m^2+mn - 6mn - 3n^2 + 8m + 4n$
$= 2m^2 - 5mn - 3n^2 + 8m + 4n$

इथे $-3n$ ने $2m+n$ ला गुणताना कंसातील प्रत्येक पदाला गुणलं आहे तसंच पहिला कंस सोडवून झाल्यावर दुसरा सोडवला आहे. मग सजातीय पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी केली आहे. तसंच $m^2=m\times m$ किंवा $m^3= m \times m \times m$ इत्यादी लक्षात आहे ना? आणखी दोन उदाहरणे पाहू.

उदा. 1 $(2m + n)$ चा वर्ग करा म्हणजेच
$(2m + n) \times (2m + n)$ हा गुणाकार करा.
$(2m+n) \times (2m+n) = 2m \times (2m+n) + n \times (2m+n)$
$= 4m^2+2mn + 2mn + n^2$
$= 4m^2+ 4mn + n^2$

उदा. 2 $(2a-3b)$ व $(2a-3b+4)$ यांचा गुणाकार करा
$(2a-3b) \times (2a-3b+4) = 2a \times (2a-3b+4)-3b \times$
$(2a-3b+4)$
$= 4a^2-6ab+8a - [6ab-9b^2+12b]$
(इथे $3b$ ने कंसातील प्रत्येक पदाला गुणले पण वजा चिन्ह कंसाबाहेर ठेवले)
$= 4a^2-6ab+8a - 6ab+9b^2-12b$
(आता कंसातील प्रत्येक पद वजा केले)
$= 4a^2-12ab+9b^2+8a-12b$

सरावासाठी खालील गुणाकार करा.

(1) $(x-2)\ (y-3)$
(2) $(2x+1)\ (x+3)$
(3) $(3a+4b)\ (2a-b)$
(4) $(4m-n)\ (m+7n-8)$

मिश्रक्रियांची पदावली : कधी कधी एकाच पदावलीत बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार यापैकी कुठल्याही वेगवेगळ्या क्रिया करायच्या असतात. अशा वेळी कुठली आधी व कुठली नंतर करायची याचा गोंधळ होतो. कारण असं पहा -

$4+3\times7-2$ या पदावलीत बेरीज आधी केली व नंतर गुणाकार व नंतर वजाबाकी केली तर $7\times7-2$ व $49-2=47$ असं उत्तर येतं. पण आधी गुणाकार केला तर त्याच पदावलीचं

$4+21-2 = 25-2 = 23$ असं उत्तर येतं. म्हणजे वेगळ्या क्रिया आधी केल्या तर उत्तर वेगळं येऊ शकतं यासाठी नियम असा आहे की आधी सगळ्या गुणाकार व भागाकार यांच्या क्रिया डाव्या बाजूपासून करायच्या. नंतर बेरीज व वजाबाकी या क्रिया डावीकडून उजवीकडे करीत यायचं.

म्हणून $4+3\times7-2 = 7\times7-2 = 49-2 = 47$ हे चूक आहे.

$4+3\times7-2 = 4+21-2 = 25-2 = 23$ हे बरोबर आहे.

आणखी एक उदाहरण पहा -

उदा. $8\div7\times4+5\times2$ ही पदावली सोडवा.

आधी $8\div7\times4$ करू. $8\div7\times4 = \frac{8}{7} \times 4 = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$

मग $5\times2 = 10$ हे सोडवले व पदावलीचे नवे रूप

$4\frac{4}{7} + 10 = 14\frac{4}{7}$ असे उत्तर आहे.

पुनः नियम लक्षात ठेवा : (1) साधारणपणे डावीकडून उजवीकडे गणिती क्रिया करायच्या (2) गुणाकार व भागाकार यांच्या क्रिया आधी करून बेरीज व वजाबाकीच्या क्रिया नंतर करायच्या. सरावासाठी खालील पदावल्या सोडवा.

(1) $5\div2 + 4\times3 \div 8$

(2) $100 - 15\div5\times4 + 8\div2$

(3) $10\times2\div6 + 50\div3 - 4\times2$

या पदावल्या सोडवताना गोंधळ होत असल्यास ज्या पदांमध्ये गुणाकार किंवा भागाकार आहे त्या पदांभोवती कंस घालून ते कंस

वेगवेगळे सोडवले तर चूक होत नाही.

उदा. $5 \div 2 - 4 \times 3 + 17 \times 3 \div 2$

या पदावलीत कंस घालून

$(5 \div 2) - (4 \times 3) + (17 \times 3 \div 2)$ असे रूप येते.

मग $5 \div 2 = 2\frac{1}{2}$, $4 \times 3 = 12$, $17 \times 3 \div 2 = \frac{51}{2} = 25\frac{1}{2}$

$\therefore$ पदावलीची किंमत $(2\frac{1}{2}) - (12) + (25\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2} - 10 + 25\frac{1}{2}$

$= 26 - 10 = 16$ असे उत्तर येते.

ज्यावेळी फक्त बेरीज व वजाबाकी एवढ्याच क्रिया उरतात त्यावेळी सर्व धन संख्यांची बेरीज आधी केली तर सोपे जाते. अपूर्णांकाच्या पदावल्या देखील अशाच सोडवता येतात.

उदा. $\frac{22}{7} - \frac{2}{7} \div \frac{22}{21} + \frac{5}{3}$ ही पदावली सोडवा.

$\frac{22}{7} - \left(\frac{2}{7} \div \frac{22}{21}\right) + \frac{5}{3}$ (भागाकार क्रिया असलेल्या पदाभोवती कंस टाकून)

मग $\frac{2}{7} \div \frac{22}{21} = \frac{2}{7} \times \frac{21}{22} = \frac{3}{11}$

$\therefore \frac{22}{7} - \left(\frac{2}{7} \div \frac{22}{21}\right) + \frac{5}{3} = \frac{22}{7} - \frac{3}{11} + \frac{5}{3}$

आता सर्व अपूर्णांकांना $7 \times 11 \times 3$ हा छेद ठेवू व पदावलीचे नवे रूप

$$\frac{22}{7} - \frac{3}{11} + \frac{5}{3} = \frac{22 \times 33 - 3 \times 21 + 5 \times 77}{7 \times 11 \times 3}$$

$$= \frac{726 - 63 + 385}{7 \times 11 \times 3} = \frac{663 + 385}{7 \times 11 \times 3} = \frac{1048}{7 \times 11 \times 3}$$

$$= \frac{1048}{231}$$

सरावासाठी खालील पदावल्या सोडवा

(1) $\frac{4}{3} - \frac{9}{22} \div \frac{3}{11} + \frac{5}{3} \times \frac{1}{2}$

(2) $\frac{22}{7} \times \frac{4}{11} - \frac{8}{3} - \frac{1}{14} \div \frac{1}{7}$

गुणोत्तर प्रमाण, भागीदारी, सरळ व्याज इत्यादि

आपण गुणोत्तर प्रमाणाचा उपयोग करून अनेक प्रकारची गणिते करायला शिकलो. पण त्यावेळी दोनच संख्यांचे गुणोत्तर विचारात घेत होतो. दोनाहून अधिक, तीन किंवा जास्त संख्याही विशिष्ट गुणोत्तर प्रमाणात असू शकतात. उदा. रमेश, मीना व आनंद यांचे गुण 3:4:5 या प्रमाणात आहेत याचा अर्थ रमेश व मीना यांचे गुण 3:4 या प्रमाणात व मीना व आनंद यांचे गुण 4:5 या प्रमाणात आहेत असा आहे. म्हणजेच रमेशचे गुण $3x$ असले तर मीनाचे $4x$ व आनंदचे $5x$ आहेत. इथे x ही संख्या प्रथम माहित नसते. पण ती शून्य नसते आणि गणितात दिलेल्या इतर माहितीवरून ती शोधता येते. $x = 10$ असेल तर रमेश, मीना व आनंद यांचे गुण 30, 40, 50 असे येतात तर $x = 12$ असेल, तर त्यांचे गुण 36, 48, 60 असे येतील. गुणोत्तर मात्र 3:4:5 असेच आहे. या पद्धतीची गणितं कशी सोडवायची ते पहा.

<u>उदा. 1</u> शेळी, गाय व घोडा यांचा खर्च 1:5:7 या प्रमाणात आहे. या तीनही जनावरांचा खर्च मिळून दरमहा 910 रु. असेल, तर गायीचा दरमहा खर्च किती? शेळी, गाय व घोडा यांचे खर्च 1:5:7 या प्रमाणात आहेत. म्हणून शेळीचा खर्च $1k = k$, गायीचा $5k$ व घोड्याचा $7k$ आहे असे मानू. मग $k + 5k + 7k = 13k = 910$ रु.

$\therefore$ (13 ने भागून) $k = 70$ रु.

आता गायीचा खर्च $5k = 350$ रु. आहे हे उत्तर.

<u>उदा. 2</u> एका वर्गातील मुलगे व मुली यांचे गुणोत्तर 5:3 असे आहे.

मुलग्यांची संख्या 8 ने जास्त आहे तर किती मुलगे व किती मुली आहेत?

मुलगे : मुली = 5:3

∴ मुलग्यांच्या संख्या 5a व मुलींची 3a मानू.

मग मुलग्यांची संख्या ही 2a ने जास्त आहे.

∴ $2a = 8$

∴ $a = 4$

∴ मुलग्यांची संख्या $5 \times 4 = 20$

व मुलींची संख्या $3 \times 4 = 12$ असे उत्तर मिळते.

उदा. 3 एक दुकान उघडताना सोहन, मोहन व रोहन यांनी अनुक्रमे 2000, 3000 व 5000 रु. भांडवल घातले. पहिल्या वर्षी 3200 रु. फायदा झाला तर प्रत्येकाला किती रु. नफा मिळाला?

ज्या प्रमाणात भांडवल, त्या प्रमाणातच नफा किंवा तोटा होणार : आता सोहन, मोहन व रोहन यांच्या भांडवलाचे गुणोत्तर 2000:3000:5000 म्हणजेच 2:3:5 असे आहे. (तीनही संख्यांना एकाच संख्येने (म्हणजे इथे 1000 ने भागले), तर गुणोत्तर तेच राहते).

∴ सोहनचा नफा 2p

मोहनचा नफा 3p

व रोहनचा नफा 5p असे मानूं. मग

$2p + 3p + 5p = 10p = 3200$

∴ $p = 320$

∴ सोहनचा नफा = 640 रु., मोहनचा नफा = 960 रु., रोहनचा नफा = 1600 रु.

उदा. 4 अच्युत, केशव व नारायण यांनी अनुक्रमे 2500, 3000 व 4000 असे भांडवल घालून वर्तमानपत्रे व मासिके यांचे दुकान उघडले. अच्युतने दुकान चालवले म्हणून त्याला दरमहा 300 रु.

नफ्यातून द्यायचे आहेत. पहिल्या महिन्यात 1250 रु. नफा झाला तर तो तिघांनी कसा वाटून घ्यावा?

प्रथम 300 रु. पगार अच्युतला दिला की उरलेला नफा येतो 1250–300 = 950 रु. आता या नफ्याची वाटणी भांडवलाच्या प्रमाणात करायची. अच्युत, केशव व नारायण यांचे भांडवल 25:30:40 किंवा 5:6:8 या प्रमाणात आहे.

∴ अच्युतचा नफा = 5p
केशवचा नफा = 6p
नारायणचा नफा = 8p असे मानू.

∴ $5p + 6p + 8p = 19p = 950$
$p = 50$ रु.

∴ अच्युतचा नफा = 250 रु.
केशवचा नफा = 300 रु.
नारायणचा नफा = 400 रु.

शिवाय अच्युतचा पगार 300 रु.

∴ अच्युत केशव व नारायण यांनी अनुक्रमे (250+300), 300 व 400 रु. घ्यावेत.

सरावासाठी खालील उदाहरणे सोडवा.

(1) राम व शाम यांच्याकडे 8:5 या प्रमाणात रुपये आहेत. रामजवळ शामपेक्षा 84 रु. जास्त असले, तर प्रत्येकाजवळ किती रुपये आहेत?

(2) माया, जया व सोनिया यांनी मिळून खेळण्यांचे दुकान काढले. त्यांचे भांडवल अनुक्रमे 3500, 2000, व 2500 रु. आहे. दुकान सोनियाच्या घरात असल्यामुळे दरमहा नफ्यातून तिला 200 रु. द्यायचे आहेत. पहिल्या महिन्यात 2600 रु. नफा झाला तर तो माया, जया व सोनिया यांनी कसा वाटून घ्यावा.

मिश्र भागीदारी, चक्रवाढ व्याज, व्यस्त प्रमाण इ.

विद्यार्थ्यांना हा भाग या पुस्तकातील सर्वात अवघड भाग असा वाटेल.

हा भाग वाचायला सुरू करण्यापूर्वी गुणोत्तर प्रमाण, सरळव्याज व पहिल्या भागातील व्यस्त प्रमाण हे चांगले समजावून घ्या, हवं तर त्यांची उजळणी करा. त्यानंतर हा अवघड भाग तेवढा कठीण वाटणार नाही.

मिश्र भागीदारी : कधी कधी दोन अगर जास्त लोक वेगवेगळ्या संख्यांचे भांडवल धंद्यात गुंतवतात व त्यांच्या भांडवलाच्या प्रमाणात त्यांना फायदा अगर तोटा मिळतो हे आपण पाहिले. पण जेव्हा दोन माणसे वेगवेगळ्या मुदतीसाठी भांडवल देतात, तेव्हा त्या मुदतीचाही विचार फायदा वाटून घेताना करावा लागतो. अशा वेळी दिलेल्या माहितीचा उपयोग करून प्रत्येकाने एकाच महिन्यासाठी, किंवा एकाच वर्षासाठी किती भांडवल ठेवले आहे हे शोधावे. 200 रु. भांडवल 4 महिन्यासाठी गुंतवले तर ते 800 रु. भांडवल 1 महिन्यासाठी गुंतवल्याप्रमाणें होते. अशा प्रकारचे गणित कसे सोडवता येते ते पहा.

उदा. कमलाने 4000 रु. दोन वर्षांसाठी दुकानात गुंतवले तर लीलाने 6000 रु. 10 महिन्यांसाठी गुंतवले. दुकानाचा फायदा 2600 रु. असेल तर प्रत्येकीने किती फायदा वाटून घ्यावा?

इथे मुदत 2 वर्षे किंवा 24 महिने व 10 महिने अशी वेगवेगळी आहे. म्हणून प्रत्येकीने 1 महिन्यासाठी किती रक्कम गुंतवली ते काढू. कमलाने 4000 रु. 24 महिन्यांसाठी म्हणजेच

$24 \times 4000 = 96{,}000$ रु. एका महिन्यासाठी गुंतवले.

तर लीलाने 6000 रु. 10 महिन्यांसाठी म्हणजेच

$6000 \times 10 = 60{,}000$ रु. एका महिन्यासाठी गुंतवले.

$\therefore$ आता दोघींना नफा $\frac{96000}{6000} = \frac{96}{60} = \frac{8}{5}$ या प्रमाणात वाटायचा. कमलाचा नफा 8p व लीलाचा 5p मानला तर

$8p + 5p = 13p = 2600$

$\therefore p = 200$

∴ कमलचा नफा 1600 रु. व लीलाचा 1000 रु. होईल.

<u>ज्याप्रमाणे दोन अपूर्णांकांची तुलना करण्यासाठी दोघांचाही समान छेद हवा त्याचप्रमाणे दोन वेगवेगळ्या भांडवलांची तुलना करताना दोघांचीही समान मुदत असावी.</u>

आणखी एक उदाहरण याच प्रकारचे पहा -

<u>उदा.</u> एका कुरणात हसनच्या 6 म्हशी 12 दिवस, नागेशच्या 8 म्हशी 10 दिवस व रामलालच्या 5 म्हशी 8 दिवस चरल्या. कुरणाचा एकूण खंड 576 रु. असल्यास प्रत्येकाने किती खंड द्यायचा?

प्रत्येकाने एकच दिवस म्हशी चारल्या असे समजू व तो आकडा काढू. हसनने 6 म्हशी 12 दिवस म्हणजेच $6 \times 12 = 72$ म्हशी एका दिवसात चारल्या असे समजता येईल. त्याचप्रमाणे

नागेशने $8 \times 10 = 80$ म्हशी व रामलालने $5 \times 8 = 40$ म्हशी एकाच दिवसात चारल्या असे समजू म्हणूच त्या तियांचा खंड हा 72:80:40 किंवा 9:10:5 या प्रमाणात असला पाहिजे.

(गुणोत्तर प्रमाणातील सर्व संख्यांना समाईक अवयवाने भागून गुणोत्तर प्रमाणाला संक्षिप्त रूप देणे फायद्याचे असते.)

आता हसनचा खंड 9r, नागेशचा 10r व रामलालचा 5r आहे असे मानूं.

$$\therefore 9r + 10r + 5r = 24r = 576$$

$$\therefore r = 24$$

∴ हसनने $24 \times 9 = 216$ रु.

नागेशने $24 \times 10 = 240$ रु.

व रामलालने 24×5 120 रु. याप्रमाणे खंड द्यायचा.

सरावासाठी पुढील उदाहरणे सोडवा.

(1) एका शेतात नांगरणी करताना जनूभाऊंचे 4 बैल 9 दिवस, शामरावाचे 6 बैल 10 दिवस व काशीनाथचे 7 बैल 4 दिवस आणले होते. त्यासाठी त्या तियांना मिळून 620 रु. दिले तर प्रत्येकाला किती रुपये दिले?

(2) हिरालालने 7000 रु. भांडवल घालून दुकान उघडले. 4 महिन्यांनी पन्नालालनेही दुकानात 8000 रु. भांडवल घातले. वर्ष अखेरीस 7400 रु. फायदा झाला तो कसा वाटून घ्यावा?

चक्रवाढव्याज : पैसे कर्जाऊ देताना काही वेळा पहिल्या वर्षात मुद्दलाचे जर पैसे आणि त्यावरचे व्याज भरता आले नाही तर दुसऱ्या वर्षासाठी व्याज मोजताना पहिल्या वर्षाचे व्याजही कर्जाऊ दिले असे मानून नवे मुद्दल = पहिल्या वर्षाचे मुद्दल + पहिल्या वर्षाचे व्याज असे धरतात. व्याज मोजणीच्या या प्रकारास चक्रवाढव्याज म्हणतात. कारण अशा पद्धतीत दर वर्षी मुद्दलात व व्याजातही वाढ होत राहते. अशा प्रकारची गणितं कशी सोडवतात पहा.

उदा. 1 सुधाकरने 4000 रु. द.सा.द.शे. 10 रु. दराने चक्रवाढव्याजाने कर्जाऊ घेतले. तीन वर्षानंतर त्याने कर्जाची सर्व रक्कम व्याजासह परत केली त्यावेळी त्याला किती रुपये द्यावे लागेल?

व्याजाचा दर 100 रु. ना 10 रु. व्याज असा होता.

∴ पहिल्या वर्षी व व्याज दिले असेल तर गुणोत्तराच्या पद्धतीने

$$\frac{\text{व}}{4000} = \frac{10}{100}$$

$$\therefore \text{व} = \frac{1}{10} \times 4000 = 400 \text{ रु.}$$

दुसऱ्या वर्षी मुद्दल 4000 + 400 = 4400 रु. धरायचे व दुसऱ्या वर्षाचे व्याज ज असेल तर

$$\frac{\text{ज}}{4400} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \text{ज} = \frac{4400}{10} = 440 \text{ रु.}$$

तिसऱ्या वर्षासाठी मुद्दल = 4400 + 440 = 4840

तिसऱ्या वर्षी व्याज ग मानले तर

$$\frac{ग}{4840} = \frac{1}{10}$$

$\therefore$ ग = 484

$\therefore$ तिसऱ्या वर्षा अखेर रास = 4840 + 484

= 5324

$\therefore$ तीन वर्षांच्या अखेरीस सुधाकरला 5324 रु. द्यावे लागले.

उदा. 2 स्वातीने 500 रुपये 2 वर्षासाठी द.सा.द.शे. 11 रु. दराने सरळ व्याजाने कर्जाऊ घेतले, तर ज्योतीने तेवढेच पैसे दोन वर्षांसाठी द.सा.द.शे. 10 रु. अशा चक्रवाढ व्याजाने घेतले. दोन वर्षाअखेर कर्ज फेडताना कुणाला जास्त पैसे द्यावे लागले? किती?

स्वातीने सरळ व्याजाने कर्ज घेतले- 100 रु. वर 2 वर्षात 22 रु. व्याज सरळव्याजाप्रमाणे होते.

$\therefore$ 500 रु. वर 2 वर्षात 22×5 = 110 रु. व्याज होते.

$\therefore$ रास 500 + 110 = 610 रु. झाली.

ज्योतीला पहिल्या वर्षी 5×10 = 50 रु. व्याज झाले.

दुसऱ्या वर्षासाठी 500 + 50 = 550 रु. मुद्दल धरायचे.

100 रु. वर 10 रु. व्याज व 550 रु. वर व व्याज मानू

$$\therefore \quad \frac{व}{550} = \frac{10}{100}$$

$$\therefore व = \frac{550}{10} = 55$$

$\therefore$ ज्योतीला दुसऱ्या वर्षा अखेरीस 550+55 = 605 रु. रास द्यावी लागली.

$\therefore$ स्वातीने 610 – 605 = 5 रु. जास्त दिले.

सरावासाठी पुढील उदाहरणे सोडवा.

(1) 400 रु. कर्जावर द.सा.द.शे. 12 रु. प्रमाणे 2 वर्षांचे चक्रवाढ व्याज किती होईल?

(2) 500 रु. वर द.सा.द.शे. 17 रु. ने सरळव्याजाने, 2 वर्षांनी किती व्याज द्यावे लागेल? त्याच मुदलावर द.सा.द.शे. 16 रु. ने 2 वर्षांत किती व्याज चक्रवाढव्याजाप्रमाणे होईल?

व्यस्त प्रमाण व मिश्र प्रमाण : आपण व्यस्त प्रमाणाची गणिते सोडवायला शिकलो आहोत. त्याच पद्धतीने सातवीचीही व्यस्त प्रमाणाची गणिते सोडवता येतात. लक्षात ठेवण्याचे सूत्र असे की, अनेकावरून एकाचा विचार करायचा व मग पुन्हा एकावरून अनेकांचा विचार उदाहरणार्थ पुढील गणिते पहा -

उदा.1. 5 मजूर रोज 6 तासांप्रमाणे काम करून 28 दिवसात काम संपवतात तर 7 मजूर रोज 8 तासाप्रमाणे काम करून तेच काम किती दिवसात संपवतील?

5 मजूर रोज 6 तासांप्रमाणे 28 दिवस घेतात तर

$\therefore$ 5 मजूर रोज 1 तासाप्रमाणे 28×6 दिवस घेतील

$\therefore$ 1 मजूर रोज 1 तासाप्रमाणे $28\times6\times5$ दिवस घेईल.

$\therefore$ 7 मजूर रोज 1 तासाप्रमाणे $\dfrac{28\times6\times5}{7}$ दिवस घेतील

$\therefore$ 7 मजूर रोज 8 तासाप्रमाणे $\dfrac{28\times6\times5}{7\times8}$ दिवस घेतील

$$\therefore \frac{\overset{4}{\cancel{28}}\times6\times5}{\cancel{7}\times8} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}\times\overset{3}{\cancel{6}}\times5}{\underset{1}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{8}}}} = 15 \text{ दिवस लागतील}$$

हे गणित पायरी पायरीने कसे सोडवले आहे पहा आधी मजूर तेवढेच ठेवून रोज 1 तास काम केल्यास किती दिवस लागतील ते शोधले मग 1 मजूर1 तास काम करत असेल तर लागणारे दिवस काढले इथे अनेकांवरून एकाचा विचार झाला. मग एका ऐवजी जेवढे मजूर लावायचे आहेत त्यांना लागणारे दिवस व मग त्याच मजूरांनी जास्त तास काम केल्यास लागणारे दिवस काढले.

उदा. 2 एक कामगार एका फेरीत 18 विटा नेतो. 22 कामगारांना काही विटा नेण्यास 40 फेऱ्या कराव्या लागल्या. एकूण 24 कामगार

लावले व प्रत्येकाने एका फेरीत 20 विटा नेल्या तर तेवढ्या विटा नेण्यास किती फेऱ्या लागतील?

1 कामगार 1 फेरीत 18 विटा नेतो

∴ 22 कामगार 1 फेरीत 18×22 विटा नेतील

∴ 22 कामगार 40 फेरीत $18 \times 22 \times 40$ विटा नेतील.

∴ नेण्याच्या एकूण विटा = $18 \times 22 \times 40$

∴ एका फेरीत 20 विटा नेल्यास एका कामगारास $\frac{18 \times 22 \times 40}{20}$ फेऱ्या लागतील.

1 कामगारास $18 \times 22 \times 2$ फेऱ्या लागतील

∴ 22 कामगारांस $\frac{18 \times 22 \times 2}{22} = 18 \times 2$ फेऱ्या लागतील.

∴ 22 कामगारांना 36 फेऱ्या लागतील.

या गणितात किती विटा नेल्या हे स्पष्ट सांगितलेले नाही. पण ते सहज शोधता आले व त्यावरून प्रत्येक फेरीत 20 याप्रमाणे एकूण फेऱ्या व त्यावरून अधिक कामगारांच्या किती फेऱ्या लागतील ते चटकन् मिळाले.

यावरून लक्षात घ्या की मिश्रप्रमाणाची किंवा व्यस्त प्रमाणाची पणिते पायरी पायरीने सोडवणे व अनेकांवरून एकाची किंमत, एकावरून अनेकांची किंमत शोधणे या पद्धतीने लवकर सोडवून होतात व चुका होण्याची शक्यता कमी राहते. सरावासाठी खालील गणिते करा.

(1) प्रत्येक मुलीने रोज 12 कागद टाइप केले, तर 9 मुलींना संपूर्ण पुस्तक टाइप करायला 15 दिवस लागले. रोज 15 कागद टाइप करणाऱ्या 18 मुली टाइप करू लागल्या तर ते पुस्तक किती दिवसात टाइप करून होईल?

(2) एका हौदात पाणी भरण्यास 10 मजूर लावले. प्रत्येक मजूर तासाला 11 बादल्या पाणी भरतो. या मजुरांना हौद भरण्यास 7 तास लागले. प्रत्येक मजूर जर 14 बादल्या दर ताशी आणू लागला व 11 मजूर लावले तर किती तास हौद भरण्यास लागतील?

"गणिताच्या सोप्या वाटा" साठी पुरवणी.

पाचवीसाठी उदाहरणसंग्रह.

1. खालील अपूर्णांकांच्या जोड्या तपासून कुठला अपूर्णांक मोठा आहे ते ठरवा व '<' किंवा '>' हे चिन्ह भरा.

(a) $(\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$

(b) $(\frac{8}{11}, \frac{4}{7})$

(c) $(\frac{3}{8}, \frac{2}{7})$

(d) $(\frac{4}{9}, \frac{5}{11})$

2. खालील बेरजा व वजाबाक्या करा.

(a) $\frac{5}{6} + \frac{2}{7}$ (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

(c) $\frac{4}{5} + \frac{1}{2}$ (d) $4 - \frac{9}{10}$

(e) $2 + \frac{1}{3}$ (f) $2 - \frac{1}{3}$

3. a) पुढीलपैकी कोणत्या संख्यांना 3 ने पूर्ण भाग जातो?
41, 42, 60, 32, 72.

b) पुढीलपैकी कोणत्या संख्यांना 5 ने पूर्ण भाग जातो?
21, 40, 32, 65, 90, 123, 485, 2017.

c) पुढीलपैकी कोणत्या संख्यांना 2 ने भाग जातो?
12, 61, 43, 204, 1239, 4260.

4. पुढील अपूर्णांक दशांश अपूर्णांकांच्या रूपात लिहा.

$\frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{32}{10}, \frac{4}{100}, \frac{72}{100}, \frac{64}{1000}, \frac{8}{1000}$

5. खालील भागाकार व गुणाकार चटकन करा.

a) $43.07 \div 10$ b) 132.78×100

c) 59.8 ÷ 100 d) 602.5 × 100

e) 2.94 ÷ 100 f) 6.03 × 10

g) 4.716 ÷ 100 h) 5.89 × 1000

6. खालील संख्यांचे म.सा.वि. काढा.

a) 40, 25.

b) 96, 24, 72.

c) 54, 90, 108

7. खालील संख्यांचे ल.सा.वि. काढा.

a) 24, 56

b) 25, 60

c) 18, 24, 54

8. खालील समीकरणे सोडवून अक्षरांच्या किमती काढा.

a) क + 8 = 25

b) 3ब − 4 = 50

c) 5म + 3 = म + 87

9. नामदेवला दूध विकण्याबद्दल शेकडा आठ रुपये कमिशन मिळते. एका आठवड्यात त्याने 2100 रु. चे दूध विकले तर त्याला किती कमिशन मिळाले?

10. मीना कपडे शिवून पैसे मिळवते व तिच्या कमाईच्या शेकडा 40 रु. आईला घर खर्चासाठी देते. एका महिन्यात तिने प्रत्येकी 10 रु. प्रमाणे 25 ब्लाऊज शिवून पैसे मिळवले तर त्यातले किती आईला दिले?

संहावीसाठी उदाहरणसंग्रह.

1. शाळेतील लहान मुलांना चॉकोलेट वाटायची आहेत. 65

मुलं असतील, तर 260 चॉकोलेट लागतात. 132 मुलांसाठी, त्याच प्रमाणात किती चॉकोलेट लागतील?

2. एका फळबागेत एकूण 1250 झाडे आहेत. त्यातील 60 टक्के आंब्याची, 20 टक्के जांभळाची झाडे आहेत व उरलेली नारळाची झाडे आहेत. तर नारळाची किती झाडे आहेत?

3. सुरेशने एक टी.व्ही. 2400 रु. ला विकत घेतला व तो 22% नफा घेऊन विकला तर विक्रीची किंमत किती?

4. मनोजला दरमहा 850 रु. पगार मिळतो व महेशला दरमहा 1200 रु. मिळतात. मनोज आईजवळ घरखर्चासाठी 510 रु. देतो व महेश 600 रु. देतो. पगाराच्या मानाने कोण घरखर्चासाठी जास्त पैसे देतो?

5. खालील अपूर्णांक दशांश अपूर्णांकांच्या रूपात लिहा.
$\frac{2}{5}$, $3\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{62}{25}$, $2\frac{3}{4}$

6. खालील अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांकांच्या रूपात लिहा.
23.5, 1.07, .84, 60.06

7. पन्नालाल व हिरालाल यांनी मिळून दुकान काढले. पन्नालालने 2500 रु. गुंतवले व हिरालालने 2000 रु. गुंतवले. महिनाअखेरीस 1800 रु. फायदा झाला तर तो कसा वाटावा?

8. दुधाच्या डेअरीचे दुकान एका वर्षासाठी नागेश, रघुनाथ व मोहन यांनी चालवले. नागेश व रघुनाथ यांनी वर्षभरासाठी प्रत्येकी 1500 रु. व 1800 रु. गुंतवले. मोहनजवळ सुरुवातीस पैसे नव्हते पण त्याने तीन महिन्यानंतर 1600 रु. उरलेल्या वेळासाठी गुंतवले. वर्षअखेरीस 4200 रु. फायदा झाला. तो कसा वाटला जाईल?

9. एका फळविक्रेत्याने प्रत्येकी 100 रु. प्रमाणे 6 आंब्याच्या पेट्या घेतल्या. प्रत्येक पेटीत चार डझन आंबे होते. ते आंबे 30 रु. डझन प्रमाणे विकले तर नफा किती टक्के झाला?

10. धर्मेंद्रने 250 रु.स एक याप्रमाणे एक डझन रेडिओ मुंबईहून खरेदी करून आणले. ते कोल्हापूरला आणण्यास रेल्वे खर्च 250 रु. व रिक्षा भाडे 50 रु. लागले. नंतर त्याने ते आपल्या दुकानात 350 रु. ना एक याप्रमाणे विकले तर नफा किती टक्के झाला?

11. एका दुकानदाराने 50 रु. एक याप्रमाणे 15 शर्ट विकत घेतले. त्यातील 12 शर्ट त्याने 70 रु. स एक याप्रमाणे विकले शेवटचे 3 शर्ट कमी किमतीत विकले. एकूण व्यवहारात त्याला शेकडा 30 रु. फायदा झाला तर उरलेले तीन शर्ट त्याने काय किमतीस विकले?

12. रोहिणीजवळ निळ्या, पिवळ्या व लाल रंगाचे मणी अनुक्रमे 240, 180 व 360 आहेत. तिला त्यांच्या, वेगवेगळ्या रंगांच्या माळा बनवायच्या आहेत. सर्व माळांत सारख्याच संख्येचे मणी हवेत. जास्तीत जास्त किती मणी प्रत्येक माळेत घालता येतील?

13. एका शाळेतील मुलांच्या प्रत्येकी 20 जणांच्या किंवा 25 जणांच्या किंवा 30 मुलांच्या रांगा केल्या, तर काहीच मुले उरत नाहीत. शाळेत कमीत कमी किती मुले असतील?

14. रघुनाथजवळ काही लिंबे आहेत. 10 लिंबांचे, 6 लिंबांचे किंवा 15 लिंबांचे असे ढीग केले तर प्रत्येक वेळी 3 लिंबे शिल्लक राहतात तर त्याच्याजवळ कमीत कमी किती लिंबे आहेत?

15. मोहनजवळ 15 लिटर करडईचे तेल, 18 लिटर शेंगदाण्याचे तेल व 9 लिटर तिळाचे तेल आहे. त्याला प्रत्येक प्रकारचे तेल सारख्या आकाराच्या डब्यांत भरून विकायचे आहे. जास्तीत जास्त किती मापाच्या आकाराचे डबे आणता येतील? असे डबे एकूण किती लागतील?

16. पाच किलो तांदूळ सहा माणसांना 15 दिवस पुरतो. तर तो पाच माणसांना किती दिवस पुरेल?

17. चार माणसे काही विटा एक आठवड्यात तयार करतात. त्याच्या तिप्पट विटा करण्यास सात माणसे लावली तर किती दिवस लागतील?

18. सुरेशने धंदा करण्यासाठी 1500 रु. कर्ज घेतले ते 2 वर्षांनी फेडताना एकूण 2100 रु. भरले तर व्याजाचा दर काय होता?

19. खालील गुणाकार करा.

i) $(6a + 7b) \times 8c$

ii) $(5m - n) \times 4$

iii) $(2m - 9n) \times 3m$

20. खालील भागाकार करा.

i) $(16a + 20b) \div 4$

ii) $(9mn + 12m) \div 3m$

iii) $(27a^2 + 108a) \div 9a$

सातवीसाठी उदाहरणसंग्रह

सूचना :- सातवीच्या मुलांनी, अधिक चांगला सराव व्हावा म्हणून प्रथम पाचवी व सहावीचे उदाहरण संग्रह सोडवावे.

1. पुढील अपूर्णांकांना तीन दशांश स्थळांपर्यंत दशांश अपूर्णांकांचे रूप द्या.

$\frac{7}{25}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{52}{25}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{14}{11}$

2. तीन दशांश स्थळापर्यंत भागाकार करा.

$25.4 \div 8$, $4.02 \div 5$,

$83.27 \div 11$, $670.9 \div 7$

3. खालील अपूर्णांकांचे आवर्ती रूप लिहा.

$\frac{2}{13}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{11}$

4. पुढील बहुपदींची बेरीज करा.

i) $(m + 4n - 12) + (3m - 2n + 7)$

ii) $(5a + 2b + 8) + (3a - 6b - 13)$

iii) $(6a - 5b - 2) + (2a + 7b - 8) + (b - 3a)$

iv) $(3m + 5n - 11) + (2m - 13n)$

5. खालील गुणाकार करा.

$(3u - 4v)(7u + 2v)$

$(6a + b - 8)(2a - 3b)$

6. अपूर्णांकांच्या खालील पदावल्या सोडवा.

i) $\frac{3}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$

ii) $\frac{7}{9} - (\frac{3}{4} - \frac{2}{3})$

iii) $40.52 + 23.08 - 36.95$

iv) $\frac{5}{6} + \frac{1}{5} - (\frac{3}{10} - \frac{4}{5})$

7. 8 माणसे एक भिंत तीन दिवसात बांधतात. तर 6 माणसांना तीच भिंत बांधण्यास किती दिवस लागतील?

8. 4 बैलांना 5 दिवसांसाठी 40 पेंड्या चारा लागतो. तर 7 बैलांना 7 दिवसात किती पेंड्या लागतील?

9. मधुकर व सुधाकर यांनी भागीदारीत वर्षभर दुकान चालवले. मधुकरने 5000 रु. भांडवल 10 महिन्यांसाठी घातले तर सुधाकरने 4000 रु. पूर्ण वर्षासाठी घातले. वर्षअखेरीस नफा 1960 रु. झाला. तो दोघांनी कसा वाटून घ्यावा?

10. गजाभाऊंनी दलालामार्फत एक ट्रॅक्टर 3 टक्के दलाली कबूल करून घेतला. ट्रॅक्टरची किंमत 7500 रु. असल्यास गजाभाऊंना एकूण खर्च किती आला?

11. मैनाताईंनी मालूताईंची खानावळ चालवायला घेतली व आलेल्या नफ्यातून 20 टक्के मालूताईंना देण्याचे ठरले. जर वर्ष अखेरीस मैनाताईंनी मालूताईंना 5400 रु. दिले, तर मैनाताईंना वर्षभरात किती नफा मिळाला?

12. सुरेशने धंद्यासाठी द. सा. द. शे. 12 रु. दराने चक्रवाढ व्याजाने 8000 रु. कर्ज काढले; दोन वर्षानंतर कर्जफेड करताना त्याला एकूण किती रुपये भरावे लागले?

13. रघू, धर्मा व भिकू यांनी रसाचे गुऱ्हाळ चालवले. रघूने 4000 रु. भांडवल 6 महिन्यांसाठी, धर्माने 2000 रु. 8 महिन्यांसाठी व भिकूने 2000 रु. भांडवल वर्षभरासाठी घातले. वर्षअखेर 9600 रु. नफा झाला तर प्रत्येकाने किती नफा घ्यावा?

14. शेखर व महेश यांच्या वयांचे गुणोत्तर प्रमाण 9 : 8 आहे व त्यांच्या वयांची बेरीज 85 आहे. तर त्यांची वये काढा?

15. दामोदरपंतांचे शेत नांगरण्यासाठी रामाचे दोन बैल चार

दिवस, भीमाचा एक बैल सहा दिवस तर धर्माचे तीन बैल तीन दिवस वापरले. दामोदरपंतांनी त्यांना एकूण 460 रु. देण्याचे ठरवले तर प्रत्येकाला किती पैसे मिळावेत?

16. कविताचे वय आठ वर्षांनी दुप्पट होईल तर आज तिचे वय काय आहे?

17. सुधाचे वय सरोजपेक्षा चार वर्षांनी जास्त आहे. दोघींच्या वयांची बेरीज 52 आहे. तर प्रत्येकीचे वय काय?

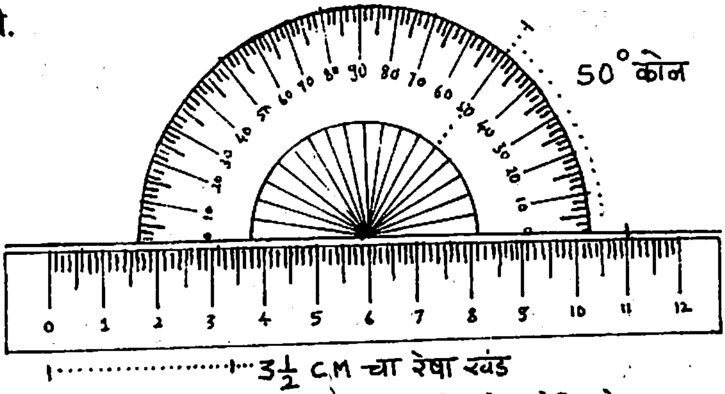
18. गिरिजाच्या जन्माच्या वेळी तिची आजी 60 वर्षांची होती. आज दोघींच्या वयाची बेरीज 90 आहे तर आज गिरिजाचे वय काय?

19. लीलावतीजवळ जेवढे रुपये आहेत, त्याच्या दुप्पट अविनाशजवळ आहेत. दोघांचे मिळून 240 रु. आहेत तर अविनाशजवळ किती रुपये आहेत?

20. सुमतीची मोत्याची माळ तुटली व त्यातले $\frac{3}{4}$ मोती सांडून गेले. उरलेल्या 19 मोत्यांची तिने बांगडी बनवली तर आधी माळेत किती मोती होते?

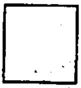
भूमिति

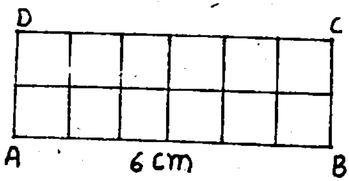
वेगवेगळ्या लांबीचे, पट्टीच्या सहाय्याने रेषाखंड काढणे किंवा कोन मापकाच्या मदतीने पाहिजे तेवढ्या मापाचा कोन काढणे हे तुम्हाला येते ना? किंवा दिलेल्या रेषाखंडाची लांबी देखील पट्टीने मोजता येते. कोन मापकाच्या मदतीने कोन मोजता येतो.

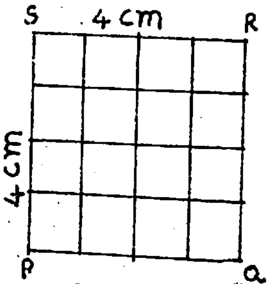


एखाद्या वस्तूचे वजन आपण कसे मोजतो? मोठ्या वस्तूचे वजन किलोग्रॅम मध्ये, वेलदोडा, लवंगा यासारख्या लहान वस्तूचे वजन ग्रॅममध्ये असं मोजतो नाही का? आता लांबी मोजण्याचा सेंटिमीटर किंवा मीटर, वजन मोजण्याचा ग्रॅम किंवा किलोग्रॅम, कोन भोजण्याचा अंश ही वेगवेगळी परिमाणं आपल्याला ठाऊक आहेत. पण एकाद्या सपाट भागाचा आकार किंवा क्षेत्रफळ मोजायला ही परिमाणं चालणार नाहीत. लांबी मोजण्यासाठी सोयीच्या लांबीचेच परिमाण म्हणजे सेंटिमीटर किंवा मीटरची लांबी लागते, वजन मोजण्यासाठी वजनाचेच परिमाण म्हणजे एक किलोग्रॅम किंवा ग्रॅमचे वजन लागते, कोन मोजण्यासाठी लहान, एक अंशाचा कोनच वापरला जातो, तसंच सपाट भागाचे क्षेत्रफळ मोजायला, लहान क्षेत्रफळाचाच तुकडा वापरायचा. आतां सोयीचा,

लहान, कमी क्षेत्रफळाचा तुकडा कुठला बरं? एक सेंटिमीटर बाजू असलेला लहानसा चौरस हा परिमाण म्हणून वापरतात. आकृति मोठी असेल, एखाद्या शेताप्रमाणे, तर एक मीटर बाजू असलेला चौरस सोयीचा पडतो. चौरस म्हणजे सगळ्या बाजू सारख्या लांबीच्या व सगळे कोन ९०° किंवा काटकोन असलेला चौकोन.

 एक चौ. सें.मी. = एक चौरस सेंटिमीटर चे परिमाण





कुठलीही सपाट आकृति असेल तर तिचे क्षेत्रफळ चौरस सें.मी. च्या परिमाणाने मोजता येते. आतां ABCD हा काटकोन चौकोन व PQRS हा चौरस पहा. AB = 6 c.m., BC = 2 c.m. व PQ = 4 c.m. आहे

म्हणून आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे ABCD मधे 12 चौ. सें.मी. व PQRS मधे 16 चौ. सें.मी. व्यवस्थित बसतात. म्हणून ABCD चे क्षेत्रफळ 12 चौ. सें.मी. व PQRS चे क्षेत्रफळ 16 चौ. सें.मी. आहे. काटकोन चौकोन किंवा चौरस आकृतींचे क्षेत्रफळ मोजणे सोपे असते. काटकोन चौकोनाची लांबी × रूंदी = क्षेत्रफळ हा नियम लक्षात ठेवा. मात्र लांबी व रूंदी मोजायला सें.मी. हे परिमाण असेल, तर क्षेत्रफळ चौ. सें.मी. मधे मिळेल. लांबी व रूंदी मीटर मधे मोजली असेल, तर क्षेत्रफळ वरील गुणाकाराने 'चौरस मीटर'

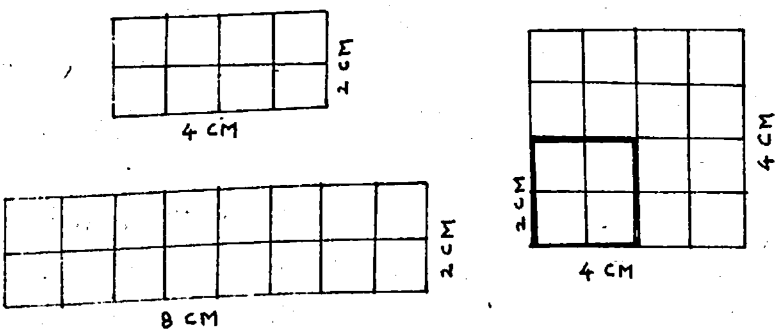
मधे मिळेल. चौरसाची लांबी व रूंदी सारखीच असते म्हणून क्षेत्रफळ = बाजूच्या लांबीचा वर्ग. आतां लक्षात राहील ना?

दोरीच्या लांबीत जेवढे सें.मी. मावतात, तेवढी तिची सें.मी. मधे लांबी. संत्र्याच्या वजनाची बरोबरी करायला जेवढे ग्रॅम लागतात, तेवढे त्याचे वजन.

तसेच, वहीच्या कागदावर जेवढे चौरस सें.मी. बसतात, तेवढे त्याचे क्षेत्रफळ.

काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ = लांबी × रूंदी

काटकोन चौकोनाची लांबी दुप्पट केली, तर क्षेत्रफळ दुप्पट होईल. रूंदी दुप्पट केली तरी क्षेत्रफळ दुप्पट होईल. चौरसाची बाजू दुप्पट केली, तर सगळ्याच बाजू दुप्पट होणार व क्षेत्रफळ चौपट होईल.



वरील तीन आकृत्यांमध्ये हे स्पष्ट केले आहे.

2 सें.मी. × 4 सें. मी. चा काटकोन चौकोन,

2 सें.मी. × 8 सें. मी. चा काटकोन चौकोन,

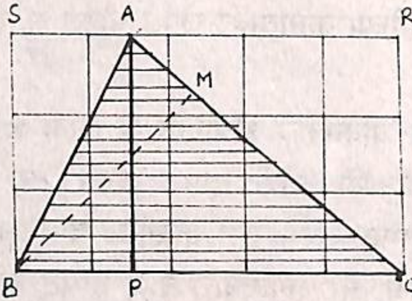
4 सें.मी. × 4 सें.मी. चा चौरस

व 2 सें.मी. × 2 सें.मी. चा चौरस यांची क्षेत्रफळे चौरस सें.मी. मधे मोजून पहा.

त्रिकोणाच्या आकाराचे, किंवा दुसऱ्या सरळ बाजूंच्या

बहुभुजाकृतींचे क्षेत्रफळ मोजणे थोडे अवघड, तरी तुम्हाला जमण्याजोगे असते. यासाठी आणखी एक नियम लक्षात ठेवा :
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ पाया × उंची

तुम्हाला हे पटते का? खालील आकृतीवरून ते स्पष्ट होईल.



ABC या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ मोजायचे आहे. त्यासाठी AP ही लंबरेषा काढली. मग BPAS व APCR हे काटकोन चौकोन पुरे केले. काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ तर आपल्याला मोजता येते. मग BPAS चे क्षेत्रफळ = BP × AP आणि APCR चे क्षेत्रफळ = PC × AP

मग दोन्ही काटकोन चौकोनांचे मिळून किंवा SBCR या मोठ्या काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ = BP × AP + PC × AP

$$= (BP + PC) \times AP = BC \times AP$$

हे लक्षात आले का, की Δ ABP व ΔAPC मिळून Δ ABC बनतो.

Δ ABP = $\frac{1}{2}$ काटकोन चौकोन BPAS

Δ APC = $\frac{1}{2}$ काटकोन चौकोन APCR

$$\therefore \Delta ABC = \Delta ABP + \Delta APC$$
$$= \frac{1}{2}[BPAS + APCR]$$
$$= \frac{1}{2} BC \times AP$$

$= \frac{1}{2}$ पाया × उंची

या ठिकाणी आपण हा नियम भूमितीच्या मदतीने, आकृती काढून व काटकोन चौकोनाच्या क्षेत्रफळाचा नियम वापरून सिद्ध केला आहे. वरील आकृतीमध्ये BC = पाया = 6 सें.मी., AP = उंची = ३ सें.मी. आहे.

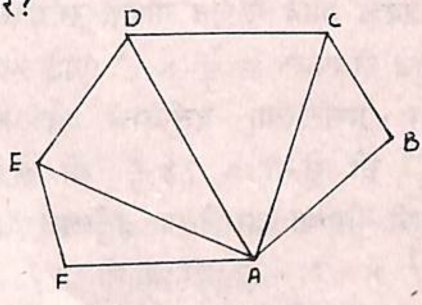
$\therefore$ Δ ABC चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ 6 × 3 चौ. सें.मी.

= 9 चौ. सें.मी. आहे.

आणखी एक गोष्ट लक्षात ठेवा की त्रिकोण कसाही फिरवला, तरी त्याचे क्षेत्रफळ बदलत नाही. म्हणजेच BC ऐवजी AC हा पाया घेतला व B मधून AC वर M लंब रेषा टाकून उंची मोजली,

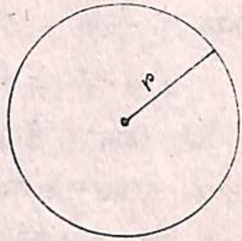
तरी क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$AC × BM म्हणजे $\frac{1}{2}$ BC × AP एवढेच राहील. $\therefore$ $\frac{1}{2}$ AC × BM = $\frac{1}{2}$ BC × AP

आता सगळ्या बाजू सरळ रेषेत असलेल्या बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ कसे काढाल बरे?



उदाहरणासाठी वरील षट्कोन पहा. ABCDEF हा षट्कोन आहे. त्याचे ABC, ACD, ADE व AEF असे भाग पाडले तर या सर्व त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढून त्यांची बेरीज केली, की षट्कोनाचे क्षेत्रफळ मिळेल होय ना?

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढणें मात्र जरा अवघड आहे. कारण वर्तुळाचे भाग त्रिकोणांत पाडता येत नाहीत. तरी वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाचाही नियम आहे. तो तुम्ही सिद्ध करू शकणार नाही. परंतु तो लक्षात ठेवून त्याप्रमाणे दिलेल्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ तुम्ही काढू शकाल.



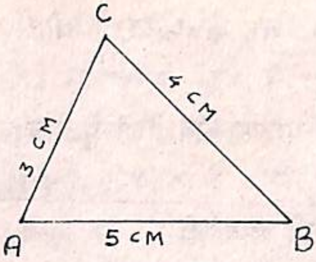
समजा आपल्याजवळ r त्रिज्या असलेलं वर्तुळ आहे. मग त्याचं क्षेत्रफळ हे πr^2 एवढ असतं. π हे ग्रीक अक्षर आहे व त्याचा उच्चार 'पाय' असा करायचा. π ची किंमत अगदी तंतोतंत अशी व्यवहारी अपूर्णांकात लिहिता येत नाही. पण ती किंमत $\frac{22}{7}$ च्या खूप जवळ आहे म्हणून गणिते सोडवताना $\pi = \frac{22}{7}$ घेतात. मग वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \frac{22}{7} \times r^2$ एवढे होते. उदाहरणार्थ 3 सें. मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $\frac{22 \times 9}{7}$ चौ. सें.मी. $= \frac{198}{7}$ चौ. सें.मी. $= 28\frac{2}{7}$ चौ. सें.मी.

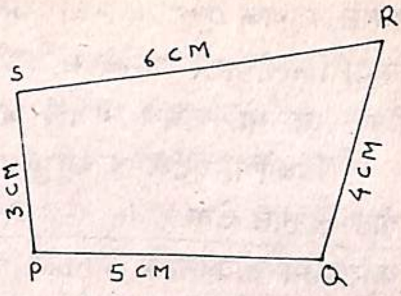
7 सें.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ चौ. सें.मी.

$= 154$ चौ. सें.मी.

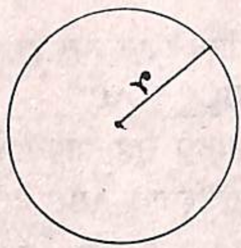
आतां वर्तुळ, त्रिकोण, चौकोन, इतर बहुभुजाकृती यांचे क्षेत्रफळ तुम्हाला काढता येते. या आकृत्यांचे परीघ तुम्हाला मोजता येतात का?





वर **ABC** हा त्रिकोण, **PQRS** हा चौकोन दिला आहे. Δ **ABC** चा परीघ हा 5 सें.मी. + 4 सें.मी. + 3 सें.मी. = 12 सें.मी. आहे. **PQRS** चा परीघ हा 5 सें.मी. + 4 सें.मी. + 6 सें.मी. + 3 सें.मी. = 18 सें.मी. एवढा आहे.

लक्षात ठेवा की परीघ ही एक प्रकारची लांबी आहे. बहुभुजाकृती भोवती, चिकटून, एखादी दोरी गुंडाळली, तर त्या दोरीची लांबी ही बरोबर परीघाएवढी होते. वर्तुळाचा परीघ कसा मोजाल? तर त्याचाही नियम आहे, सूत्र आहे.



समजा **r** सें.मी. त्रिज्या असलेलं वर्तुळ आहे. मग त्याचा परीघ $2\pi \times r = 2 \times \frac{22}{7} \times r$ सें.मी. एवढा असतो.

उदाहरणार्थ 3 सें.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचा परीघ $2 \times \frac{22}{7} \times 3$ सें.मी. $= \frac{132}{7}$ सें.मी. $= 18\frac{6}{7}$ सें.मी. एवढा असतो.

पुन्हा लक्षात ठेवा की एकाद्या आकृतीचा परीघ ही 'लांबी'ची बेरीज

असते. म्हणजे एक प्रकारची लांबीच असते. ती सें.मी. किंवा मीटर किंवा किलोमीटर यामध्ये मोजली जाते तर क्षेत्रफळ हे चौ.सें.मी. किंवा चौ. मी. यामध्ये मोजलं जातं.

त्रिकोण, वर्तुळ व बहुभुजाकृती यांच्या संबंधीची पुढील सूत्रे नीट लक्षात ठेवा.

काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ = लांबी × रूंदी

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ पाया × उंची

त्रिकोणाच्या तीनही कोनांची बेरीज = 180° = दोन काटकोन.

n बाजू असलेल्या बहुभुजाकृतीच्या कोनांची बेरीज

$= [180 \times (n - 2)]^\circ$

$= (2n - 4)$ काटकोन.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = $\pi \times$ (त्रिज्या)^2

वर्तुळाचा परीघ = $2\pi \times$ (त्रिज्या)

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × (समांतर बाजूंची बेरीज) × लंबांतर

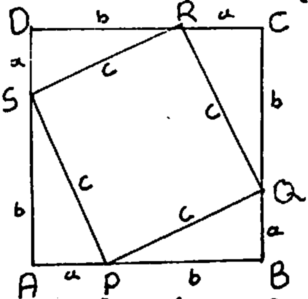
ABC काटकोन त्रिकोणात AB हा कर्ण असेल, तर

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

वर दिलेल्या सूत्रांपैकी शेवटचे सूत्र 'पायथागोरस'चे आहे. तो नियम पुढीलप्रमाणेही लिहितात. ABC या काटकोन त्रिकोणात AB = c, BC = a व CA = b अशा भुजा आहेत व AB = c हा कर्ण आहे असे मानले तर

$c^2 = a^2 + b^2$ हा पायथागोरसचा सिद्धांत आहे. तो सिद्ध करणे अवघड नाही. अनेक प्रकारांनी तो सिद्ध करता येतो. आपण एका सोप्या व आकृतीवरून चटकन समजणाऱ्या पद्धतीने तो सिद्ध करूं.

समजा काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी c व इतर दोन भुजांची लांबी a आणि b अशी आहे. मग एकमेकांशी काटकोन करणाऱ्या भुजांची लांबी a आणि b असेल, तर त्या त्रिकोणाची तिसरी भुजा c असेल व ती काटकोनाच्या समोर असल्यामुळे तीच 'कर्ण' असेल. आता एक चौरस a + b एवढी बाजू असलेला काढा. त्याचे शिरोबिंदू A, B, C, D असे ठेवा.



नंतर चौरसाच्या चारही भुजांवर P, Q, R, S असे बिंदू AB, BC, CD, DA वर अनुक्रमे घ्या की AP = a, PB = b, BQ = a, QC = b, CR = a, RD = b, DS = a, SA = b आकृति पहा.

आतां PQRS हा, चौकोन पुरा करा.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ हे सर्व काटकोन आहेत.

म्हणून ΔAPS, ΔBQP, CRQ व ΔDSR हे काटकोन त्रिकोण आहेत. हे सगळे एकरूपही आहेत कारण त्यांच्या भुजा समान आहेत. म्हणून त्या सर्वांचे कर्ण 'C' आहेत. आता आकृतीवरून पहा की चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ

= $\Delta APS + \Delta BQP + \Delta CRQ + \Delta DSR$ + चौकोन PQRS चे क्षेत्रफळ. शिवाय PQRS या चौकोनाच्या सगळ्या भुजा C एवढ्या, सगळे कोनही काटकोन आहेत. कारण प्रत्येक कोन = $180^0 - (\angle APS + \angle PSA)$ एवढा आहे. व सर्वांची बेरीज मिळून

चार काटकोनाएवढी आहे. म्हणून प्रत्येक कोन काटकोन आहे.
$\therefore$ PQRS हा चौरस आहे व त्याचे क्षेत्रफळ $c \times c = c^2$ एवढे आहे.

$\Delta APS = \Delta BQP = \Delta CRQ = \Delta DSR = \frac{1}{2} a \times b$ आणि ABCD या चौरसाचे क्षेत्रफळ $= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 4 \times \frac{1}{2} a \times b + c^2$

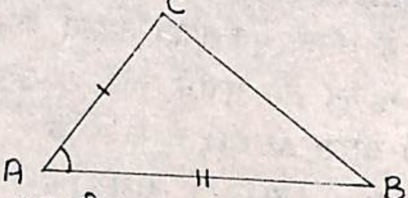
$\therefore a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$

भौमितिक आकृत्या.

अनेकदा दिलेल्या मोजमापांवरून त्रिकोण किंवा चौकोन काढायचा असतो. पट्टी, कंपास इत्यादी साहित्य वापरायचे असते. ती रचना कशी करावी हे निश्चित करण्यासाठी प्रथम अंदाजाने फक्त पेन्सिल वापरून लहानशी आकृति काढून पहावी. मग दिलेली माहिती आकृतीत भरावी व तिचा उपयोग करून कंपास व पट्टी यांनी खरी आकृति कशी काढावी ते ठरवा. आधी कच्ची आकृति काढली तर खूप सोपे होते.

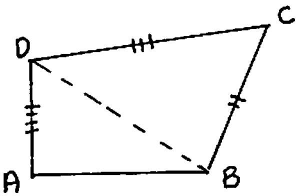
उदा. 1 दोन बाजू व त्या बाजूंमधे समाविष्ट केलेला कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.



समजा की AB ही बाजू AC ही बाजू व $\angle$ CAB दिलेला आहे. मग A हा बिंदू काढून A जवळ $\angle$ CAB एवढा कोन करणाऱ्या दोन जरा मोठ्या रेषा काढा. दोन्ही रेषा AB व AC पेक्षा मोठ्या असूं द्या. मग B आणि C बिंदू या दोन रेषांवर निश्चित करायचे.

AB ही दिलेली लांबी कंपासमध्ये घेऊन A वर कंपासचे टोक ठेवून एका रेषेवर AB एवढ्या अंतरावर कंस काढा व दुसऱ्या रेषेवर AC एवढ्या अंतरावर कंस काढा. मग त्या दोन्ही रेषांवर B आणि C हे बिंदू मिळतील. आता ABC हा त्रिकोण दिलेल्या मापांप्रमाणे आहे.

उदा. चार बाजू व एक कोन दिला असता चौकोन काढणे

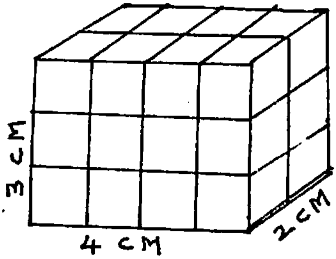


समजा, ABCD या चौकोनात चारही बाजू व $\angle$ A दिला आहे. मग ABD या त्रिकोणात AB, AD व $\angle$ A दिला आहे व Δ ABD काढणे प्रथम शक्य आहे. त्यावरून A, B, D हे बिंदू निश्चित होऊन BD हा कर्णही मिळतो. मग BCD या त्रिकोणाच्या तीनही बाजू माहीत आहेत व B, D हे बिंदूही आहेत. आता कंपासमध्ये BC एवढे अंतर घेऊन, B वर कंपासचे टोक ठेवून मोठा कंस काढा व पुन्हा कंपासमधे CD एवढे अंतर घेऊन D वर टोक ठेवून दुसरा कंस पहिल्या कंसास छेदेल असा काढा. दोन्ही कंसांचा छेदबिंदू हाच 'C' असेल. कारण BC, CD हे दिलेल्या लांबीचे असतील.

घनफळ

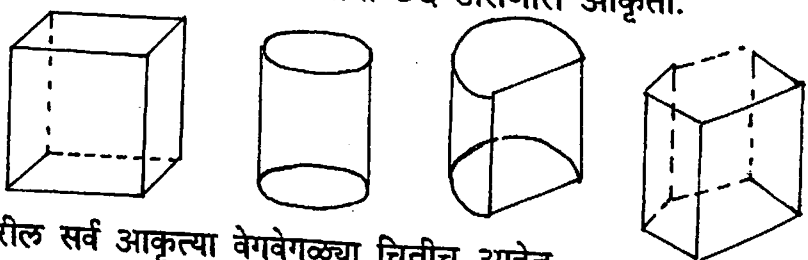
क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी आपण क्षेत्रफळाचेच लहानसे, सोयीचे परिमाण, एक चौरस सें.मी. वापरतो तसेच एखाद्या वस्तूचे घनफळ मोजताना एक घन सें.मी. चे परिमाण वापरतो. एक सें.मी. बाजू असलेला घन घेतला, तर त्याचे घनफळ एक घन सें.मी. असते. एखाद्या ठोकळ्याची लांबी a सें.मी., रूंदी b सें.मी. व उंची h

सें.मी. असेल तर त्यात a × b × h एवढे एक सें.मी. चे ठोकळे मावतील म्हणून त्या ठोकळ्यांचे घनफळ हे a × b × h घन सें.मी. होईल.



आकृतीतील ठोकळ्याची लांबी 4 सें.मी., रूंदी 2 सें.मी. व उंची 3 सें.मी. आहे. तिचे घनफळ $4 \times 2 \times 3 = 24$ घन सें.मी. आहे. ठोकळ्याच्या घनफळाकडे आणखी एका प्रकाराने पहाता येईल. त्याचे घनफळ = पायाचे क्षेत्रफळ × उंची असेही आहे.

एखाद्या चितीचे घनफळ याच नियमाने काढतात. चिती म्हणजे सपाट पृष्ठभागावर उभी राहू शकेल अशी, तळापासून वरच्या पृष्ठभागापर्यंत एकाच आकाराचा छेद असणारी आकृती.



वरील सर्व आकृत्या वेगवेगळ्या चितीच आहेत.

घनाकृति ठोकळे व चिती यांची घनफळे काढायला सोपी असतात तशी इतर घनाकृतींची नसतात.

अकरावी बारावीच्या वर्गात तुम्ही गणिताचा अभ्यास केलात, तर **Calculus** किंवा कलनशास्त्राच्या मदतीने आणखी काही घनाकृतींचे घनफळ व अनेक सपाट आकृतींचे क्षेत्रफळ तुम्ही काढू शकाल.

किंमत – दहा रुपये