

## Elliptische Kurven

### Arbeitsblatt 9

#### Aufgaben

AUFGABE 9.1. Zeige, dass in  $SL_2(\mathbb{Z})$  mit  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Beziehungen  $S^2 = -\text{Id}$  und  $(ST)^3 = -\text{Id}$  gelten.

AUFGABE 9.2.\*

Wir betrachten die Matrizen  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  aus  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es ist

$$ST \neq T^n S$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

(2) Die von  $T$  erzeugte Untergruppe in  $SL_2(\mathbb{Z})$  ist kein Normalteiler.

AUFGABE 9.3. Zeige, dass in der Modulgruppe  $SL_2(\mathbb{Z})/\pm \text{Id}$  die Relationen  $S^2 = \text{Id}$  und  $(ST)^3 = \text{Id}$  gelten.

AUFGABE 9.4.\*

Zeige, dass durch die Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{H} \longrightarrow U(0, 1), z \longmapsto \frac{z - i}{z + i},$$

und

$$\psi: U(0, 1) \longrightarrow \mathbb{H}, w \longmapsto \frac{(w + 1)i}{1 - w},$$

eine biholomorphe Abbildung zwischen der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  und der offenen Einheitskreisscheibe  $U(0, 1)$  gegeben ist.

AUFGABE 9.5. Zeige, dass die Modulsstitution eine Gruppenoperation auf der oberen Halbebene ist.

## AUFGABE 9.6.\*

Finde für das Gitter  $\Gamma = \langle 3 + i, -1 + 2i \rangle$  das Element  $\tau$  im Fundamentalbereich  $D$  derart, dass  $\Gamma$  streckungsäquivalent zu  $\langle 1, \tau \rangle$  ist.

AUFGABE 9.7. Finde für das Gitter  $\Gamma = \langle 3 + 7i, 2 - 5i \rangle$  das Element  $\tau$  im Fundamentalbereich  $D$  derart, dass  $\Gamma$  streckungsäquivalent zu  $\langle 1, \tau \rangle$  ist.

AUFGABE 9.8. Finde für das Gitter  $\Gamma = \langle \sqrt{5} + i, 3 - \sqrt{2}i \rangle$  das Element  $\tau$  im Fundamentalbereich  $D$  derart, dass  $\Gamma$  streckungsäquivalent zu  $\langle 1, \tau \rangle$  ist.

AUFGABE 9.9. Finde für das Gitter  $\Gamma = \langle 1, -e + \pi i \rangle$  das Element  $\tau$  im Fundamentalbereich  $D$  derart, dass  $\Gamma$  streckungsäquivalent zu  $\langle 1, \tau \rangle$  ist.

AUFGABE 9.10. Es sei  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ . Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $\Gamma$  ist streckungsäquivalent zu einem Gitter in  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \subseteq \mathbb{C}$ .
- (2)  $\Gamma$  ist streckungsäquivalent zu einem Gitter in  $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i \subseteq \mathbb{C}$ .
- (3)  $\Gamma$  ist streckungsäquivalent zu einem Gitter der Form  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$  mit  $\tau \in D$  und  $\tau \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ .

AUFGABE 9.11. Es sei

$$\varphi: \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

eine bijektive  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung und sei  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Zeige, dass  $\varphi$  einen Diffeomorphismus und Homomorphismus der reellen Lie-Gruppe

$$\bar{\varphi}: \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/\varphi(\Gamma)$$

induziert, dass dies aber kein Homomorphismus von komplexen Lie-Gruppen sein muss.

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3