И. С. Громека, Очеркъ теоріи капиллярныхъ явленій. Теорія поверхностнаго сцѣпленія жидкости, *Матем. сб.*, 1879, том 9, номер 3, 435–500

ОЧЕРКЪ ТЕОРІИ КАПИЛЛЯРНЫХЪ ЯВЛЕНІЙ.

Теорія поверхностнаго сцѣпленія жидкости.

(Читано въ Математическомъ Обществѣ 21-го октября 1878 года).

И. С. Громеки.

Ньютонъ описалъ въ своей „Оптикѣ" восхожденіе воды внутри капиллярной трубки или между параллельными и вертикальными пластинками и далъ объясненіе того закона, найденнаго опытомъ *Юрина*, согласно которому это возвышеніе обратно пропорціонально діаметру трубки или разстоянію между пластинками. Объясненіе Ньютона основано на соображеніяхъ, справедливость которыхъ внѣ сомнѣнія, но онъ не далъ имъ достаточнаго развитія. Самыя раннія попытки къ построенію математической теоріи капиллярныхъ явленій были предприняты *Даніиломъ Бернулли* [1]) и *Клеро* [2]). Бернулли самъ сознается, что не могъ опредѣлить закона этихъ явленій. Клеро не далъ аналитическаго вывода Юринова закона, и заключенія, къ которымъ онъ пришелъ, были еще слишкомъ неопредѣленны. Первый удачный опытъ теоріи капиллярныхъ явленій принадлежитъ *Сегнеру*, [3]) который пред-

[1]) Hydrodynamique. 1738.
[2]) Théorie de la figure de la terre. 1741.
[3]) De figuris superficierum fluidorum. Comment. soc scient. Gott. 1751.

положилъ, что взаимодѣйствіе между жидкими частицами простирается лишь на разстоянія непримѣтныя. Разсмотрѣвъ это дѣйствіе, онъ вывелъ условіе равновѣсія жидкости, изслѣдовалъ видъ поверхности, которую принимаютъ жидкія капли и доказалъ, что высота такой поверхности обратно пропорціональна радіусу кривизны.

Въ 1805 году *Юнгъ* [1]) представилъ Лондонскому Королевскому Обществу разсужденіе о сцѣпленіи жидкостей. Допустивъ въ поверхностномъ слоѣ жидкости существованіе особой силы—сцѣпленія, Юнгъ вывелъ уравненіе поверхности, ограничивающей тяжелую жидкость,и обнаружилъ постоянную величину угла, подъ которымъ эта поверхность встрѣчается со стѣнками трубки. Онъ разсмотрѣлъ кромѣ того много частныхъ вопросовъ этой теоріи, причемъ достигъ почти всѣхъ тѣхъ заключеній, къ которымъ впослѣдствіи привели ученыхъ дальнѣйшія изслѣдованія въ этой области. Юнгъ предполагалъ дать своей теоріи болѣе подробное развитіе, но былъ остановленъ въ своихъ изслѣдованіяхъ появленіемъ въ свѣтъ теоріи капиллярности *Лапласа* [2]) и ограничился только нѣкоторыми замѣчаніями на это сочиненіе.

Лапласъ объяснилъ капиллярныя явленія взаимнымъ притяженіемъ частицъ и этимъ создалъ строгую теорію этихъ явленій, вполнѣ согласную съ общими принципами теоретической механики. Но онъ не обнаружилъ постоянной величины угла, подъ которымъ поверхность жидкости встрѣчается съ поверхностью сосуда. Этотъ пробѣлъ былъ пополненъ *Гауссомъ* [3]) который, сохранивъ основныя допущенія

---

[1]) An Essay on the cohaesion of fluids. Phil. Transact. 1805.

[2]) Mécanique céleste. T. IV.

[3]) Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequlibrii. Gauss Werke. T. V.

Лапласа, вывелъ теорію капиллярныхъ явленій изъ принципа возможныхъ скоростей.

Пуассонъ въ 1831 г. издалъ свою „Nouvelle théorie de l'action capillaire", также основанную на допущеніи частичныхъ взаимодѣйствій. Въ этомъ сочиненіи было принято въ соображеніе то быстрое измѣненіе плотности, которое необходимо должно имѣть мѣсто относительно частицъ жидкости, лежащихъ въ ея поверхностномъ слоѣ. Различные вопросы теоріи были разсмотрѣны и изслѣдованы Пуассономъ съ такою полнотою, что вся теорія казалась исчерпана въ его трудѣ. Оставалось только связать эту теорію съ общею теоріею равновѣсія жидкостей при помощи принципа возможныхъ скоростей. Задача эта была указана и исполнена *А. Ю. Давидовымъ* [1]) въ его диссертаціи, относящейся къ этому предмету. Въ этомъ сочиненіи А. Ю. Давидовъ подчинилъ теорію капиллярности общимъ правиламъ аналитической механики, причемъ принялъ въ соображеніе и тѣ физическія обстоятельства, которыя существенно относятся къ этому предмету.

Въ 1859 г. *Paul Du Bois-Reymond* [2]) защитилъ въ Берлинѣ диссертацію, также посвященную теоріи капиллярности. Изложивъ съ особенною тщательностью теорію потенціала капиллярныхъ силъ, онъ далъ затѣмъ въ своей диссертаціи рядъ подготовительныхъ формулъ [3]), представляющихъ преобразованіе нѣкоторыхъ интеграловъ, распространенныхъ на поверхность, чрезъ интегралы распространенные на контуръ ея. Нѣкоторыя изъ любопытныхъ формулъ этихъ можно

---

[1]) Опредѣленіе поверхности жидкости, заключенной въ сосудѣ. 1851.— Теорія капиллярныхъ явленій. А. Ю. Давидова. 1851.

[2]) De aequilibrio fluidorum. Dissertatio inauguralis. 1859.

[3]) Тамъ-же, § 6.

встрѣтить у Лапласа и Пуассона; впрочемъ Du Bois-Reymond вывелъ ихъ путемъ самостоятельнымъ,—разсматривая варіяцію поверхности. Вопросы, касающіеся теоріи капиллярности, Du Bois-Reymond приводитъ къ четыремъ основнымъ задачамъ. Рѣшеніе послѣдней изъ нихъ, которая относится къ равновѣсію плавающаго тѣла, основано на ошибочномъ предположеніи и привело автора къ неправильнымъ заключеніямъ о соотношеніи, существующемъ между всѣмъ объемомъ плавающаго тѣла и тою частью его, которая смочена жидкостью [1].

Между тѣмъ, какъ теорія, основанная Лапласомъ, въ трудахъ упомянутыхъ ученыхъ и нѣкоторыхъ другихъ, достигла значительнаго развитія и извѣстной законченности, способъ, предложенный Юнгомъ, развивался гораздо медленнѣе и нѣкоторое время находилъ себѣ мало послѣдователей.

Въ 1845 и 1846 г. Гагенъ [2]) въ цѣломъ рядѣ статей вновь разсмотрѣлъ съ этой точки зрѣнія, какъ общую теорію капиллярности, такъ и многіе частные вопросы ея. Съ тѣхъ поръ многіе физики (Plateau, Lamarle, Van der Mensbrugghe и другіе) пользовались гипотезою о поверхностномъ сцѣпленіи жидкостей при разсмотрѣніи капиллярныхъ явленій. Число такихъ послѣдователей Юнга въ новѣйшее время постоянно возрастаетъ. Перелистывая первыя книжки журнала *Almeida*, посвященнаго физикѣ, мы находимъ нѣсколько замѣтокъ, касающихся теоріи капиллярности и цѣлую полемику между послѣдователями обоихъ направленій. Сначала *Moutier* [3]) помѣстилъ замѣтку съ цѣлью показать преимущество Лапласовой теоріи. Возобновляя упрекъ, который и прежде

---

[1]) Тамъ-же, § 12, Problema IV.

[2]) Denkschriften der Berl. Ak. 1845, 1846.

[3]) Journal d'Almeida. T. I.

не разъ дѣлали теоріи Юнга, будто-бы она основана лишь на аналогіи между поверхностнымъ слоемъ жидкости и упругою пластинкою, Moutier доказываетъ, что теорія частичныхъ притяженій можетъ объяснить всѣ капиллярныя явленія безъ помощи гипотезы о существованіи упругой пластинки на поверхности жидкаго тѣла. Въ томъ же томѣ помѣщено письмо *Van-der-Mensbrugghe*'а, который горячо оспариваетъ мнѣніе Moutier, будто бы понятіе о натяженіи, если таковое и существуетъ, по меньшей мѣрѣ безполезно. Замѣтивъ, что понятіе это не исключаетъ справедливости Лапласовой теоріи, и упомянувъ о попыткѣ *Ламарля* [1]) объяснить натяженіе именно на основаніи этой теоріи, Mensbrugghe указываетъ на труды *Quincke*, *Lüdtge* и многихъ другихъ. „Столь многочисленные вопросы", пишетъ Mensbrugghe, „разсмотрѣнные, если не разрѣшенные этими учеными, достаточно доказали величайшую пользу этого воззрѣнія, которое не замедлитъ быть принятымъ въ курсахъ физики". Я привожу отрывокъ изъ этой полемики, какъ характеристику тѣхъ мнѣній, которыя высказываются объ этомъ предметѣ въ послѣднее время. Въ томъ же изданіи Almeida встрѣчаемъ мы попытку, которую предпринялъ *Duclaux* [2]) къ осуществленію мысли, высказанной Mensbrugghe'омъ,—основать на принципѣ поверхностнаго сцѣпленія жидкости элементарную теорію капиллярныхъ явленій. Подобная же элементарная теорія изложена въ учебникѣ *Grashoff*'а.

Приведенный выше бѣглый обзоръ нѣкоторыхъ главнѣйшихъ сочиненій, касающихся теоріи капиллярныхъ явленій, ясно обнаруживаетъ въ ней два направленія, которыя не

[1]) Comptes rendus, T. 64, 1867. Замѣтка Ath. Dupré.

[2]) Sur la capillarité. Duclaux. Extrait d'un travail inédit: „Théorie élémentaire de la capillarité". Journal d'Almeida. 1872.

только значительно различаются между собою въ своихъ основаніяхъ, но даже, въ изложеніи нѣкоторыхъ авторовъ, становятся прямо враждебными другъ другу. Въ настоящей статьѣ я рѣшаюсь предложить вниманію читателей особую точку зрѣнія на теорію поверхностнаго сцѣпленія жидкости. Взглядъ этотъ способенъ—мнѣ кажется—примирить оба сказанныя направленія, а также снять съ теоріи Юнга то главнѣйшее обвиненіе, которое ставятъ ей ея противники, утверждая, что она не имѣетъ достаточнаго основанія въ общихъ принципахъ раціональной механики.

Теоретическое разсмотрѣніе тѣхъ вопросовъ, которые ведутъ къ представленію о частичныхъ силахъ, значительно облегчается черезъ введеніе вспомогательнаго понятія о давленіи. *Коши* [1]) опредѣлилъ давленіе, какъ равнодѣйствующую силу нѣкоторой системы частичныхъ взаимодѣйствій и показалъ, что вліяніе этихъ взаимодѣйствій на равновѣсіе частицъ всякаго тѣла можетъ быть опредѣлено, коль скоро извѣстно давленіе въ каждой точкѣ внутри тѣла. Послѣ того понятіе о давленіи съ пользою было употребляемо при изслѣдованіи равновѣсія и движенія нѣкоторыхъ физическихъ тѣлъ, каковы твердыя упругія тѣла, жидкости, претерпѣвающія внутри треніе и т. п.. Примѣненіе этого понятія къ разсмотрѣнію капиллярныхъ явленій ведетъ къ теоріи поверхностнаго сцѣпленія и, указавъ такимъ образомъ принципу этой теоріи мѣсто между общими принципами механики, вмѣстѣ съ тѣмъ устраняетъ ея разногласіе съ теоріею Лапласа.

Я счелъ умѣстнымъ предпослать изложенію теоріи сцѣпленія обозрѣніе тѣхъ общихъ теоремъ о давленіи, которыя найдены были Коши и потомъ были приняты многими авторами и вошли въ нѣкоторые учебные курсы.

---

[1]) См. Статику Moignau стр. 616.

Что касается аналитическаго способа, которымъ я пользовался, то онъ основывается преимущественно на уравненіяхъ (§ 3, уравненія 7-ое и 8-ое), представляющихъ соотношеніе между извѣстными интегралами, изъ которыхъ одни распространяются на часть кривой поверхности, а другіе на контуръ этой поверхности. Какъ я уже имѣлъ случай замѣтить, указанія на эти уравненія встрѣчаются у Лапласа и Пуассона. Въ полномъ же своемъ объемѣ уравненія эти были выведены Du Bois-Reymond'омъ, при помощи нѣкоторыхъ геометрическихъ соображеній, но, къ сожалѣнію, они прошли незамѣченными или, можетъ быть, были пренебрегаемы тѣми авторами, которые занимались этимъ предметомъ въ послѣднее время. Между тѣмъ уравненія эти одинаково пригодны, какъ для вывода главнѣйшаго изъ условій капиллярнаго равновѣсія, относящагося къ свободной поверхности жидкаго тѣла, такъ и для доказательства тѣхъ теоремъ, которыя относятся къ различнымъ частямъ объема жидкости и составляютъ—такъ сказать—общую часть теоріи капиллярныхъ явленій.

Съ помощью этихъ уравненій можетъ быть доказано, на основаніи условій равновѣсія капиллярныхъ силъ, и то замѣчательное предложеніе теоріи капиллярности, которое представляетъ какъ-бы обобщеніе Архимедова закона. Когда какое нибудь тѣло свободно плаваетъ надъ горизонтальнымъ уровнемъ жидкости, то вокругъ его поверхности, подъ вліяніемъ капиллярныхъ силъ, нѣкоторая часть жидкости поднимается или опускается, причемъ сумма массъ, вытѣсненныхъ вблизи уровня, равна суммѣ тѣхъ массъ, которыми прежнія замѣнены. Предложеніе это, установленное Лапласомъ, было доказано имъ изъ разсмотрѣнія широкаго канала, наполненнаго жидкостью и состоящаго изъ двухъ вертикальныхъ сообщающихся колѣнъ. [1]) Недостаточность такого объясненія, съ точки зрѣнія теоріи, была замѣчена Пуассономъ [2]), который указалъ на важность имѣть выводъ этой теоремы, основанный на общихъ уравненіяхъ математической теоріи капиллярности. Впрочемъ самъ Пуассонъ далъ такой выводъ только для частнаго случая, предполагая плавающее тѣло ограниченнымъ поверхностью вращенія, коей ось помѣщена вертикально. [3]) Въ концѣ моей статьи (§§ 24—29) я предлагаю доказательство этой теоремы въ самыхъ общихъ допущеніяхъ. При этомъ я обращаю также вниманіе на относительное положеніе центровъ тяжести разсматриваемыхъ массъ, о чемъ не упоминаютъ ни Лапласъ, ни Пуассонъ. Вопросомъ о положеніи этихъ точекъ занимался—сколько мнѣ извѣстно—только Du Bois-Reymond [4]), но, какъ выше замѣчено, неправильное предположеніе привело его въ этомъ вопросѣ къ формуламъ, очевидно несправедливымъ.

---

[1]) Laplace. Mécanique Celéste. T. IV, Supplément. p. 34.
[2]) Poisson. Nouvelle théorie de l'action capillaire, p. 168.
[3]) Jbid. p. 160—168.
[4]) De aequilibrio fluidorum, § 12, Problema IV.

Вообразимъ внутри нѣкотораго физическаго тѣла весьма малую площадку, и съ одной ея стороны возставимъ нормаль, которой направленіе означимъ черезъ n. Вещество, лежащее вокругъ этой площадки, раздѣляется ею на двѣ части, изъ которыхъ каждая претерпѣваетъ со стороны другой нѣкоторое дѣйствіе. Такое дѣйствіе, испытываемое тою частью вещества, которая заключаетъ въ себѣ нормаль n, называемъ давленіемъ, если оно направлено по этой нормали; въ противномъ случаѣ—натяженіемъ. Условимся натяженіе называть отрицательнымъ давленіемъ. Величину давленія будемъ относить къ единицѣ площади, и опредѣлимъ относящееся къ точкѣ M (x, y, z) давленіе площадки съ нормалью n проложеніями его X_n, Y_n, Z_n на оси координатъ. Проложенія внѣшней силы, дѣйствующей на вещество при точкѣ M и отнесенной къ единицѣ массы, пусть будутъ X, Y, Z, плотность—ρ, элементъ объема $dxdydz=d\Omega$, элементъ площади ds.

Условія равновѣсія тѣла заключаются въ уравненіяхъ:

$$(1)\ \int X\rho d\Omega+\int X_n ds=0,\ \int Y\rho d\Omega+\int Y_n d\Omega=0,\ \int Z\rho d\Omega+\int \dot{Z}_n ds=0,$$

и

$$(2)\quad \begin{aligned} &\int\rho(Zy-Yz)d\Omega+\int(Z_ny-Y_nz)ds=0,\\ &\int\rho(Xz-Zx)d\Omega+\int(X_nz-Z_nx)ds=0,\\ &\int\rho(Yx-Xy)d\Omega+\int(Y_nx-X_ny)ds=0,\end{aligned}$$

которыя должны имѣть мѣсто для каждой произвольной части разсматриваемаго тѣла, и въ которыхъ первые интегралы относятся къ объему этой части, а вторые къ его поверхности. Нормаль n въ послѣднихъ направлена внутрь этой части.

Прилагая уравненія (1) къ объему весьма малаго тетраэдра и пренебрегая первыми членами, которые при этомъ будутъ весьма малыя величины высшаго порядка, найдемъ:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
X_n &= X_x csnx + X_y csny + X_z csnz\\
Y_n &= Y_x csnx + Y_y csny + Y_z csnz\\
Z_n &= Z_x csnx + Z_y csny + Z_z csnz.
\end{aligned}
$$

Преобразовавъ при помощи найденныхъ уравненій интегралы $\int X_n ds, \int Y_n ds, \int Z_n ds$ въ ур. (1), получимъ слѣдующія уравненія равновѣсія въ каждой точкѣ тѣла:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\rho X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\\
\rho Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\\
\rho Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Преобразовавъ затѣмъ вторые интегралы уравненій (2) при помощи уравненій (3) и извѣстныхъ формулъ Грина, и принявъ въ расчетъ уравненія (4) находимъ

$$
(5)\qquad X_y = Y_x,\ Y_z = Z_y,\ Z_x = X_z.
$$

Уравненія (3) и (5) обусловливаютъ особое эллипсоидальное распредѣленіе давленій на различныя площадки въ одной и той же точкѣ M. Если для каждой площадки построимъ по величинѣ и направленію давленіе, ей соотвѣтствующее, то концы полученныхъ такимъ образомъ линій лежатъ на поверхности втораго порядка. Когда давленія по всѣмъ направленіямъ имѣютъ одинаковый знакъ, то это поверхность эллипсоида. Всегда существуютъ три взаимно перпендикулярныя площадки, испытывающія лишь нормальныя давленія. Эллипсоидъ давленій можетъ быть эллипсоидомъ вращенія, и въ такомъ случаѣ всякая площадка, проходящая черезъ ось испытываетъ одно и тоже по величинѣ нормальное давленіе.

Эллипсоидъ давленій можетъ быть и шаромъ; тогда давленія всѣ равны между собою и нормальны. Нормальное направленіе давленій на всѣ площадки въ данной точкѣ влечетъ за собою равенство всѣхъ этихъ давленій и наоборотъ.

Вліяніе внутреннихъ силъ на равновѣсіе каждаго элемента тѣла представлено въ уравненіяхъ (4) выраженіями, стоящими въ скобкахъ. Оно можетъ быть замѣнено одною силою, отнесенною къ единицѣ объема, проложенія которой ξ, η, ζ на оси координатъ

$$\xi = -\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)$$

$$\eta = -\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)$$

$$\zeta = -\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z z}{\partial z}\right).$$

Чтобы разсмотрѣть работу внутреннихъ силъ, вообразимъ что каждая частица перемѣщена и находится въ движеніи; если черезъ u, v, w назовемъ приращенія координатъ x, y, z точки M а черезъ t время, то уравненія движенія будутъ:

$$\begin{aligned} &\xi + \rho X = \rho \frac{d^2u}{dt^2} \\ (6) \qquad &\eta + \rho Y = \rho \frac{d^2v}{dt^2} \\ &\zeta + \rho Z = \rho \frac{d^2w}{dt^2}. \end{aligned}$$

Путь δu, δv, δw означаютъ весьма малыя измѣненія новыхъ координатъ частицы $x+u$, $y+v$, $z+w$. Умножая первое изъ уравненій (6) на $\delta u dx dy dz$, второе на $\delta v dx dy dz$, третье на $\delta w dx dy dz$, складывая и интегрируя въ предѣлахъ всего тѣла, получаемъ уравненіе

$$(7) \qquad \int \rho \left(\frac{d^2u}{dt^2}\,\delta u + \frac{d^2v}{dt^2}\,\delta v + \frac{d^2w}{dt^2}\right) d\Omega =$$

$$= \int \rho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) d\Omega + \int (\xi \delta u + \eta \delta v + \zeta \delta w) d\Omega,$$

Преобразуемъ послѣдній интегралъ, представляющій работу всѣхъ частичныхъ силъ. Положимъ при этомъ нормальную составляющую внѣшняго давленія въ нѣкоторой точкѣ поверхности равною P; перемѣщеніе этой точки, проложенное на внутреннюю нормаль $=\delta\varepsilon$, т. е.

$$\delta\varepsilon = \delta u \cos nx + \delta v \cos ny + \delta w \cos nz.$$

Кромѣ того, положимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha,\ \frac{\partial v}{\partial y} = \beta,\ \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma,\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi,\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \chi,\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \psi.$$

Величины эти суть аргументы деформаціи (u, v, w). Послѣ этого будемъ имѣть

$$\int (\xi \delta u + \eta \delta v + \zeta \delta w) d\Omega =$$

$$= \int P \delta\varepsilon ds + \int (X_x \delta\alpha + Y_y \delta\beta + Z_z \delta\gamma + Y_z \delta\varphi + Z_x \delta\chi + X_y \delta\psi) d\Omega.$$

Первый членъ правой части представляетъ работу внѣшнихъ давленій, второй—работу внутреннихъ силъ. Выраженіе это показываетъ, какъ и можно было предвидѣть, что внутренія силы производятъ работу лишь при деформаціи тѣла. Отнесенная къ единицѣ объема, работа эта есть

$$\delta F = X_x \delta\alpha + Y_y \delta\beta + Z_z \delta\gamma + Y_z \delta\varphi + Z_x \delta\chi + X_y \delta\psi.$$

Очевидно, что всѣ условія равновѣсія тѣла содержатся въ одномъ уравненіи

$$\int \rho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) d\Omega + \int P \delta\varepsilon ds + \int \delta F d\Omega = 0,$$

которое выражаетъ собою, что въ положеніи равновѣсія тѣла возможная работа всѣхъ дѣйствующихъ на него силъ равна нулю. Приравнивая въ этомъ уравненіи нулю коэффиціенты при каждомъ изъ произвольныхъ перемѣщеній, мы можемъ получить всѣ вышеприведенныя условія равновѣсія тѣла.

Дѣлая различныя допущенія о свойствахъ внутреннихъ давленій тѣла, мы можемъ съ помощью уравненій, приведенныхъ выше, изслѣдовать равновѣсіе и выразить главнѣйшія механическія свойства нѣкоторыхъ простѣйшихъ видовъ физическихъ тѣлъ.

1) Пусть внутри нѣкотораго тѣла силы X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y имѣютъ въ каждой точкѣ отрицательный знакъ. Внутренняя работа δF такого тѣла положительна при отрицательныхъ величинахъ приращеній $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\varphi$, $\delta\chi$, $\delta\psi$ и наоборотъ отрицательна при положительныхъ величинахъ этихъ перемѣщеній. Внутреннія силы такого тѣла противодѣйствуютъ растяженію въ какомъ либо направленіи и содѣйствуетъ сжатію тѣла. Такое тѣло обладаетъ *сцѣпленіемъ* между своими частицами.

Пусть *внутри* тѣла всѣ эти силы X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, имѣя отрицательный знакъ, настолько значительны, что въ сравненіи съ ними можно пренебречь плотностью тѣла и внѣшними силами въ уравненіяхъ равновѣсія. Только въ весьма тонкомъ слоѣ тѣла вблизи его поверхности примемъ давленія перемѣнными и достигающими на самой поверхности данныхъ положительныхъ значеній. Уравненія равновѣсія для каждаго внутренняго элемента, находящагося на замѣтномъ разстояніи отъ поверхности тѣла, будутъ въ этомъ случаѣ:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0.$$

Единственными же условіями равновѣсія, которымъ подлежитъ разсматриваемое тѣло относительно внѣшнихъ силъ, остаются уравненія (1) и (2), отнесенныя только ко всему тѣлу. Тѣло, охарактеризованное такимъ образомъ, есть идеальное твердое тѣло.

2) Назвавъ черезъ c, λ, μ три существенно положительныхъ величины, положимъ, что внутри нѣкотораго тѣла:

$$-X_x = c + \lambda\theta + 2\mu\alpha, \quad -Y_z = \mu\varphi$$

$$-Y_y = c + \lambda\theta + 2\mu\beta, \quad -Z_x = \mu\chi$$

$$-Z_z = c + \lambda\theta + 2\mu\gamma, \quad -X_y = \mu\psi.$$

Внутренняя работа такого тѣла есть:

$$\delta F = -c\delta\theta - \delta\left[\frac{\lambda\theta^2}{2} + \mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{\mu}{2}(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2)\right],$$

гдѣ $\theta = \alpha + \beta + \gamma$ означаетъ коэффиціентъ кубическаго расширенія. Членъ $-c.\delta\theta$ представляетъ работу сцѣпленія стремящагося сжать данный элементъ объема. Остальная часть выражаетъ работу силы одинаково противодѣйствующей въ любомъ направленіи всякой деформаціи. Такую силу называемъ силою упругости; охарактеризованное такимъ образомъ тѣло есть простѣйшій видъ изотропно-упругаго тѣла.

3) Внутри жидкаго тѣла, находящагося въ равновѣсіи, давленіе всегда направлено перпендикулярно къ той площадкѣ, на которую оно дѣйствуетъ. Это одно изъ наиболѣе характеристическихъ свойствъ жидкости. Поэтому въ каждой точкѣ жидкости эллипсоидъ давленій есть шаръ, и

$$Y_z = Z_x = X_y = 0,$$

$$X_x = Y_y = Z_z = p,$$

гдѣ p есть существенно положительная величина. Возможная работа внутреннихъ силъ жидкости

$$\delta F = p\delta\theta$$

положительна при расширеніи; внутреннія силы жидкости содѣйствуютъ расширенію. Таковы въ дѣйствительности газы. Замѣтимъ здѣсь, что допущенія о свойствахъ давленій, конечно, не исчерпываютъ собою характеристики разсматриваемаго тѣла. Плотность тѣла можетъ находиться въ опредѣленной зависимости отъ давленій или независимо отъ нихъ подлежать особымъ условіямъ. Это характеристическое соотношеніе между плотностью и давленіемъ для газа при постоянной температурѣ можетъ быть представлено уравненіемъ $p=k\rho$, гдѣ k постоянное, и допускаетъ какія угодно измѣненія $\delta\theta$. Разсмотримъ теперь несжимаемую жидкость. Она характеризуется уравненіемъ $\rho=$пост., откуда $\delta\theta=0$. Слѣдовательно $\delta F=p\delta\theta=0$. Внутреннія силы въ идеальной несжимаемой жидкости не производятъ работы; онѣ не содѣйствуютъ деформаціи и не препятствуютъ ей. Такова зависимость, которая, для жидкости, существуетъ между удобоподвижностью ея частицъ, неизмѣняемостью объема и нормальнымъ направленіемъ давленій.

I.

Общія условія равновѣсія жидкости.

1. Жидкость обладаетъ въ каждой точкѣ своей давленіемъ, дѣйствующимъ на всякую площадку нормально и слѣдовательно постояннымъ въ этой точкѣ для всѣхъ площадокъ. Эллипсоидъ давленій есть въ этомъ случаѣ шаръ, а уравненія равновѣсія, какъ извѣстно

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho X,\ \frac{\partial p}{\partial y}=\rho Y,\ \frac{\partial p}{pz}=\rho Z,$$

гдѣ p означаетъ давленіе, ρ—плотность, X, Y, Z—проложенія дѣйствующихъ на жидкость внѣшнихъ силъ. Такую жидкость будемъ называть совершенною или идеальною жидкостью.

2. Но наблюденіе обнаруживаетъ нѣкоторыя особыя механическія свойства тѣхъ частицъ жидкости, которыя прилегаютъ къ поверхностямъ, отдѣляющимъ ее отъ другихъ сосѣднихъ тѣлъ. Вообразимъ находящуюся въ равновѣсіи жидкость и мысленно выдѣлимъ въ ней весьма тонкій слой, прилегающій къ одной изъ такихъ поверхностей, напр. къ поверхности свободной. Въ этомъ слоѣ пусть будутъ заключены всѣ тѣ частицы жидкости, которыя, находясь вблизи разсматриваемой поверхности, подчинены дѣйствію особыхъ силъ. Пусть толщина этого слоя будетъ вездѣ постоянна; назовемъ ее черезъ η. Допустимъ, что каждая площадка, лежащая въ немъ и проходящая черезъ нормаль къ поверхности, испытываетъ перпендикулярное дѣйствіе (давленіе или натяженіе), и что величина a этого дѣйствія зависитъ вопервыхъ отъ разстоянія ε между площадкою и поверхностью по нормали и вовторыхъ отъ положенія, занимаемаго на поверхности основаніемъ этой нормали. Допущенія эти равносильны предположенію, вполнѣ естественному, что въ разсматриваемомъ слоѣ эллипсоиды давленій суть эллипсоиды вращенія, коихъ оси совпадаютъ съ нормалями къ поверхности. Проведемъ на поверхности линейный элементъ dl и построимъ на немъ перпендикулярно къ поверхности элементъ площади, проникающій черезъ весь поверхностный слой. Дѣйствіе, испытываемое этою площадью, будетъ $dl\int_0^\eta a d\varepsilon$ и направлено въ касательной плоскости перпендикулярно къ dl. Полагая $\int_0^\eta a d\varepsilon = q$, представимъ величину этого дѣйствія въ видѣ $q.dl$, откуда заключаемъ что q есть дѣйствіе на поперечное сѣченіе поверхностнаго слоя, отнесенное къ единицѣ длины. Если знакъ его положителенъ, это—давленіе, въ противномъ случаѣ—натяженіе или, вѣрнѣе, сцѣпленіе. Величина же q пусть будетъ нѣкоторая конечная, не смотря на весьма малую величину η; иначе нельзя было-бы и ожидать какихъ либо особыхъ свойствъ въ поверхностномъ слоѣ.

Давленіе q, дѣйствуя на весьма тонкую поперечную площадь поверхностнаго слоя съ напряженіемъ конечной величины, обусловливаетъ особую зависимость между внѣшнимъ давленіемъ, испытываемымъ жидкостью, внутреннимъ ея давленіемъ вблизи поверхности и кривизною поверхности. Чтобы опредѣлить эту зависимость, выразимъ условія равновѣсія нѣкоторой части поверхностнаго слоя, ограниченной весьма узкою поперечною поверхностью, проведенною ортогонально къ поверхности свободной черезъ нѣкоторую замкнутую линію $\int dl$ на этой послѣдней. Мы пренебрежемъ при этомъ внѣшними силами, такъ какъ масса разсматриваемаго слоя весьма мала сравнительно съ его поверхностью и контуромъ.

Возьмемъ нѣкоторую точку M на свободной поверхности внутри контура $\int dl$; назовемъ черезъ ds элементъ поверхности при точкѣ M, черезъ n направленіе нормали, идущей изъ M внутрь жидкости. Пусть P будетъ внѣшнее давленіе въ точкѣ M. Продолжая нормаль n, на разстояніи η встрѣтимъ нѣкоторую точку M' на противуположной поверхности слоя, и пусть p будетъ гидростатическое давленіе въ этой точкѣ. Вслѣдствіе весьма малаго разстоянія η между M и M', мы можемъ приписать этимъ точкамъ однѣ и тѣже координаты (x, y, z). Проведя нормали длиною въ η въ концѣ каждаго изъ элементовъ dl контура, разобьемъ упомянутую поперечную поверность на элементы, отличающіеся отъ разсмотрѣнной выше площади параллелограмма $\eta . dl$ на безконечно малое высшаго порядка. Дѣйствіе, испытываемое такимъ элементомъ тоже отличается отъ $q . dl$ на безконечно малое высшаго порядка, и направленіе его весьма мало уклоняется отъ линіи, проведенной перпендикулярно къ dl на касательной плоскости. Назвавъ внѣшнее направленіе такой линіи черезъ m, будемъ поэтому имѣть слѣдующія уравненія равновѣсія для разсматриваемой части поверхностнаго слоя:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\int (P-p) csnx ds - \int q csmx dl = 0\\
&\int (P-p) csny ds - \int q csmy dl = 0\\
&\int (P-p) csnz ds - \int q csmz dl = 0.
\end{aligned}
$$

$$\int(P-p)(y\,csnz-z\,csny)ds-\int q(y\,csmz-z\,csmy)dl=0$$

$$(2)\qquad \int(P-p)(z\,csnx-x\,csnz)ds-\int q(z\,csmx-x\,csmz)dl=0$$

$$\int(P-p)(x\,csny-y\,csnx)ds-\int q(x\,csmy-y\,csmx)dl=0.$$

3. Чтобы изъ этихъ уравненій извлечь изслѣдованіе равновѣсія поверхностнаго слоя жидкости, приведемъ здѣсь теорему, характера чисто геометрическаго, принадлежащую къ теоріи кривыхъ поверхностей. Разсмотримъ, какъ въ предъидущемъ, часть нѣкоторой поверхности, ограниченную контуромъ $\int dl$. Величины R_1 и R_2 пусть будутъ радіусы кривизны главныхъ сѣченій поверхности въ точкѣ M. Знакъ каждаго изъ нихъ считаемъ положительнымъ, если центръ кривизны его сѣченія лежитъ на направленіи нормали n, отрицательнымъ въ противномъ случаѣ. F пусть будетъ нѣкоторая функція точки. Подъ символами

$$\frac{d.}{dx} \text{ и } \frac{d.}{dy}$$

будемъ понимать частныя производныя, взятыя по этимъ перемѣннымъ отъ нѣкоторой функціи x, y, z, въ которой предварительно z исключено при помощи уравненія поверхности. Въ остальномъ сохранимъ обозначенія предъидущаго параграфа. Возьмемъ распространенный на часть поверхности внутри $\int dl$ интегралъ

$$(3)\int\left[\frac{d(F.csnx)}{dx}+\frac{d(F.csny)}{dy}\right]dx\,dy=\int F(csnx\,dy+csny.dx).$$

Условимся считать направленіе l контура противуположнымъ направленію часовой стрѣлки для глаза, помѣщеннаго на положительномъ концѣ оси z. Въ такомъ случаѣ

$$dx=-dl.cslx,\quad dy=dl.csly,$$

и

$$-\int\left[\frac{d(F.csnx)}{dx}+\frac{d(F.csny)}{dy}\right]dxdy=\int F(cslx\,csny-csly\,csnx)dl.$$

Но $cslxcsny - cslycsnx = \pm csmz$, и $dxdy = \pm csnzds$, смотря потому, составляетъ ли нормаль n острый или тупой уголъ съ осью z. Слѣдовательно:

$$(4) \qquad \int F.csmzdl = -\int \left[\frac{d(F.csnx)}{dx} + \frac{d(Fcsny)}{dy}\right] csnzds.$$

Между тѣмъ изъ теоріи кривыхъ поверхностей извѣстно, что

$$(5) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{dcsnx}{dx} + \frac{dcsny}{dy}\right),$$

вслѣдствіе чего

$$(6) \qquad \int F.csmzdl = \int F.\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) csnzds - \int\left(\frac{dF}{dx} csnx + \frac{dF}{dy} csny\right) csnzds.$$

Полагая въ этомъ послѣднемъ уравненіи F сначала постоянною величиною, имѣемъ:

$$(7) \qquad \int csmzdl = \int\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) csnzds.$$

Полагая затѣмъ въ уравненіи (6) вопервыхъ $F=y$, находимъ

$$\int ycsmzdl = \int y.\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) csnzds - \int csnycsnzds.$$

Такимъ же точно способомъ докажемъ вовторыхъ, что

$$\int zcsmydl = \int z.\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) csnyds - \int csnzcsnyds,$$

и, вычитая это уравненіе изъ предъидущаго, находимъ:

$$(8)\quad \int(y\cos mz - z\cos my)dl = \int\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(y\cos nz - z\cos ny)ds \text{ *)}.$$

4. Уравненія (7) и (8), а также болѣе общее уравненіе (6), представляя преобразованіе извѣстныхъ интеграловъ, распространенныхъ на поверхность чрезъ интегралы по контуру, вмѣстѣ съ тѣмъ содержатъ въ себѣ, какъ частные случаи, нѣкоторыя извѣстныя предложенія объ интегралахъ, взятыхъ по плоскому контуру. Такъ

1) полагая въ уравненіи (7) $R_1 = R_2 = \infty$, имѣемъ

$$\int \cos mz\, dl = 0,$$

извѣстное свойство интеграла по плоскому контуру. Примѣнимъ, вовторыхъ, уравненіе (6) къ плоскости, взявъ y и z въ этой плоскости и положивъ $F = y$. Замѣчая что въ этомъ случаѣ $R_1 = R_2 = \infty$ и $\cos ny = \cos nz = 0$, имѣемъ:

$$\int y \cos mz\, dl = 0,$$

другое извѣстное свойство плоскаго интеграла. Наконецъ тоже уравненіе (6) примѣнимъ опять къ плоскому контуру въ плоскости zy и положимъ $F = z$. Такъ какъ вообще

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{-\cos nx} = \frac{\frac{dz}{dy}}{-\cos ny} = \frac{1}{\cos nz},$$

то, въ случаѣ $F = z$, послѣдній членъ уравненія (6) будетъ

$$\int(\cos^2 nx + \cos^2 ny)ds.$$

Слѣдовательно, такъ какъ $\cos nx = 1$, $\cos ny = 0$,

$$\int z \cos mz\, dl = \int ds,$$

третье извѣстное свойство плоскаго интеграла.

*) Уравненія (4) и (7) приведены въ сочиненіяхъ Лапласа и Пуассона. *Laplace* Mécanique Céleste, T. IV. Supplément à la theorie de l'action capillaire. p. 12—14. *Poisson*, Nouvelle théorie de l'action capillaire p. 159, p. 73—74. Уравненія (8) вмѣстѣ съ (7) выведены были Du Bois-Raymond'омъ въ его „Dissertatio inauguralis de aequilibrio fluidorum“, 1859, изъ разсмотрѣнія варіяціи поверхности.

5) Вообразимъ весьма тонкій матеріяльный слой на поверхности нѣкотораго тѣла. Пусть на контуръ этого слоя дѣйствуетъ натяженіе, постоянное по величинѣ, касательное къ поверхности тѣла и перпендикулярное къ контуру. Допустимъ, что натяженіе на каждой площадкѣ проходящей черезъ нормаль къ поверхности направлено перпендикулярно къ площадкѣ. Результатомъ натяженія, приложеннаго къ контору, явятся вопервыхъ, натяженія въ каждой поперечной площадкѣ слоя и, вовторыхъ, нормальныя давленія на покрытую, слоемъ поверхность тѣла. Поставимъ себѣ задачею опредѣлить тѣ и другія. Задача эта, какъ увидимъ ниже, можетъ быть вполнѣ рѣшена съ помощью уравненій (6), (7), (8). Натяженіе должно имѣть постоянную величину, давленіе равно произведенію этой величины, умноженной на сферическую кривизну поверхности въ данной точкѣ.

6. Мы возвращаемся теперь къ уравненіямъ (1). Третье изъ нихъ, на основаніи (6), принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\int (P-p)\, csnz ds - \int q \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) csnz ds =$$

$$-\int \left(\frac{dq}{dx}\, csnx + + \frac{dq}{dy}\, csny\right) csnz ds,$$

или иначе:

$$\int \left[P - p - q\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{dq}{dx}\, csnx + \frac{dq}{dy}\, csnx \right] csnz ds = 0.$$

Такъ какъ это условіе относится ко всякой части поверхности, какъ бы она ни была мала, то

$$P - p - q\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{dq}{dx}\, csnx + \frac{dq}{dy}\, csny = 0.$$

въ каждой точкѣ поверхности жидкаго тѣла. Если же на время выберемъ ось z по нормали, то увидимъ, что найденное условіе распадается на два отдѣльныхъ:

(9) $$P-p=q\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

(10) $$\frac{dq}{dx}\,csnx+\frac{dq}{dy}\,csny=0,$$

или

$$\left(\frac{dq}{dx}\,csnx+\frac{dq}{dy}\,csny\right)csnz=0.$$

Представимъ себѣ функцію q произшедшею отъ нѣкоторой функціи точки $q=f\ (x,\ y,\ z)$, въ которой z исключено при помощи уравненія поверхности. При этомъ

$$\frac{dq}{dx}=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{dq}{dy}=\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Но

$$csnx:\ csny:\ csnz=\frac{\partial z}{\partial x}:\ \frac{\partial z}{\partial y}:\ -1;$$

поэтому

$$\frac{dq}{dx}=\frac{\frac{\partial q}{\partial x}csnz-\frac{\partial q}{\partial z}\,csnx}{csnz},$$

$$\frac{dq}{dx}=\frac{\frac{\partial q}{\partial y}csnz-\frac{\partial q}{\partial z}\,csny}{csnz}.$$

Отсюда выводимъ слѣдующія равенства:

$$\frac{dq}{dx}\,csnxcsnz=\frac{\partial q}{\partial x}\,csnzcsnx-\frac{\partial q}{\partial z}\,cs^2nx$$

$$\frac{dq}{dy}\,csnycsnz=\frac{\partial q}{\partial y}\,csnzcsny-\frac{\partial q}{\partial z}\,cs^2nz$$

$$0=\frac{\partial q}{\partial z}\,csnzcsnz-\frac{\partial q}{\partial z}\,cs^2nz.$$

Складывая эти равенства, находимъ:

$$\left(\frac{dq}{dx} csnx + \frac{dq}{dy} csny\right) csnz =$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x} csnx + \frac{\partial q}{\partial y} csny + \frac{\partial q}{\partial z} csnz\right) csnz - \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Обозначивъ частную производную функціи q по нормали n черезъ $\frac{\partial q}{\partial n}$, дадимъ предъидущему уравненію такой видъ:

$$\left(\frac{dq}{dx} csnx + \frac{dq}{dy} csny\right) csnz = \frac{\partial q}{\partial n} csnz - \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Вслѣдствіе условія (10) каждая часть этого равенства должна равняться нулю. А такъ какъ направленіе линіи z было совершенно произвольнымъ, то изъ сказаннаго условія вытекаютъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial n} csnz$$

(11) $$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial n} csny$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial n} csnx.$$

Назовемъ теперь черезъ t направленіе линіи касательной къ поверхности. При этомъ $cs(n, t) = 0$. Измѣненіе функціи q по этой линіи опредѣлится частною производною

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x} csxt + \frac{\partial q}{\partial y} csyt + \frac{\partial q}{\partial z} cszt.$$

Изъ уравненій (11) заключаемъ

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial n} cs(n, t) = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что функція q имѣетъ на поверхности постоянную величину.

7. Итакъ поверхностный слой жидкости обладаетъ давленіемъ или сцѣпленіемъ, имѣющимъ постоянную величину на всемъ протяженіи слоя. Полагая теперь въ уравненіяхъ (1) и (2) q величиною постоянною, увидимъ, что на основаніи уравненій (7) и (8) всѣ они приводятся къ одному (9). Мы нашли слѣдовательно два условія равновѣсія поверхностнаго жидкаго слоя:

$$P-p=q\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\qquad (12)$$

$$q=const,$$

которыя показываютъ, что въ вышеприведенныхъ предположеніяхъ конечная разность между внѣшнимъ давленіемъ на жидкость и ея гидростатическимъ давленіемъ въ той же точкѣ поверхности пропорціональна сферической кривизнѣ послѣдней и что постоянное отношеніе между этими величинами есть сцѣпленіе или поперечное давленіе поверхностнаго слоя, отнесенное къ единицѣ длины *).

8. Чтобы разрѣшить вопросъ о знакѣ q мы должны обратиться къ наблюденію и опыту. Свойства и законы частичныхъ взаимодѣйствій слишкомъ мало извѣстны намъ, чтобы, основываясь на знаніи ихъ, мы могли *a* priori разъяснить предложенный вопросъ **). Но наблюденіе показываетъ, что вблизи поверхности, раздѣляющей жидкость отъ воздуха, или двѣ жидкости одну отъ другой, всегда тѣ частицы подле-

---

*) Условія эти были выведены Hagen'омъ для двухъ частныхъ видовъ поверхности: поверхности цилиндрической и поверхности вращенія. Pogg. Annalen. 1846, 67, стр. 20—24. „Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten".

**) *Poisson*, „Nouvelle théorie de l'action capillaire". p. 102, 103. Разсуждая о знакѣ силы H, вполнѣ соотвѣтствующей по своему значенію нашему сцѣпленію q, Poisson признаетъ невозможность *a* priori опредѣлить этотъ знакъ.

жатъ большему давленію, которыя лежатъ внутри выпуклой части раздѣляемаго пространства. Слѣдовательно въ уравненіи (12) при положительной величинѣ кривизны $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ всегда замѣчается $P < p$ и наоборотъ; значитъ q есть величина отрицательная,

$$q = -\alpha^2.$$

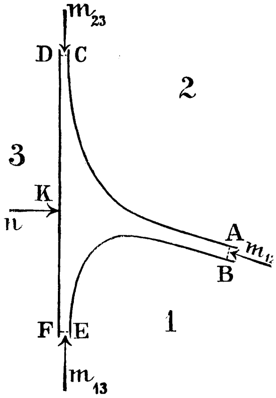
Т.-е. поверхностный слой, отдѣляющій жидкость отъ воздуха или отъ другой жидкости, обладаетъ всегда *сцѣпленіемъ*.

Что касается поверхностнаго слоя жидкости, который образуется вблизи стѣнокъ твердаго тѣла, то къ нему уравненіе (12) прилагается вполнѣ, но предъидущее заключеніе о знакѣ q сюда не относится.

9. Для большей опредѣленности въ дальнѣйшемъ разсужденіи представимъ себѣ жидкость (1) заключенною въ сосудъ и въ остальной части своей поверхности прикасающеюся къ другой жидкости (2). Вещество сосуда означимъ цифрою (3). Согласно предъидущему, мы представляемъ себѣ 1) между обѣими жидкостями слой изъ частицъ принадлежащихъ обѣимъ жидкостямъ, имѣющій постоянную толщину η_{12} и находящійся подъ дѣйствіемъ постояннаго по величинѣ сцѣпленія $\alpha_{12}^2 = -q_{12}$, 2) другой поверхностный слой жидкости (1), прилегающій къ тѣлу (3) съ толщиною η_{13} и поперечнымъ дѣйствіемъ q_{13}, наконецъ 3) слой жидкости (2) вблизи стѣнокъ (3), кого толщина η_{23} и поперечное давленіе q_{23}. Теперь мы предположимъ, что каждый изъ этихъ трехъ слоевъ имѣетъ постоянную толщину лишь на нѣкоторомъ, впрочемъ весьма маломъ, разстояніи отъ линіи, по которой поверхность раздѣла жидкостей встрѣчается со стѣнками сосуда. Такимъ образомъ вокругъ этой линіи образуется кольцеобразное пространство, наполненное жидкими частицами, которыя находятся подъ дѣйствіемъ особыхъ силъ и равновѣсіе которыхъ подлежитъ особымъ условіямъ.

Чрезъ нѣкоторую точку K упомянутой линіи проведемъ нормальную къ ней плоскость. Пусть фигура $ABEFDC$

представляетъ сѣченіе этой плоскости съ разсматриваемымъ кольцеобразнымъ пространствомъ. Пусть AB, CD, EF, представляютъ ближайшія къ K перпендикулярныя къ плоскости фигуры поперечныя сѣченія слоевъ, за предѣлами которыхъ слои принимаютъ постоянную толщину. Пусть m_{12}, m_{23}, m_{13} означаютъ направленія линій, лежащихъ въ нормальной къ dl_{123} плоскости и перпендикулярныхъ къ поперечнымъ сѣченіямъ слоевъ AB, CD, EF. Пусть n означаетъ направленіе нормали, возставленной въ точкѣ K къ стѣнкѣ сосуда и идущей внутрь жидкостей.



Фиг. 1.

Расмотримъ теперь тѣ особыя условія равновѣсія, коимъ подлежатъ жидкія частицы внутри весьма малаго цилиндра, имѣющаго основаніемъ площадь $ABEFDC$, а высотою линейный элементъ dl_{123}, проэктирующійся въ точкѣ K. Допустимъ: 1) что давленіе на сторону цилиндра $DF\times dl_{123}$ нормально и равно r_{123}, 2) что давленіе на основанія цилиндра не оказываетъ замѣтнаго вліянія на его равновѣсіе по незначительной своей величинѣ, и 3) позволимъ себѣ пренебречь вліяніемъ внѣшнихъ силъ вслѣдствіе весьма малой массы внутри цилиндра и внѣшними гидростатическими дввленіями вслѣдствіе весьма малаго протяженія линій BE и AC. Послѣ этого условіе равновѣсія разсматриваемаго объема будетъ

$$(13)\qquad q_{12}csm_{12}x+q_{13}csm_{13}x+q_{23}csm_{23}x+r_{123}csnx=0,$$

гдѣ x означаетъ направленіе какой нибудь линіи.

При $x \parallel dl_{123}$ уравненіе это обращается въ тождество. Называя уголъ (m_{13}, m_{12}) черезъ i и полагая въ уравненіи (13) $x \parallel m_{13}$, имѣемъ $csm_{12}x=csi$, $csm_{13}x=1$, $csm_{23}x=-1$, $csnx=0$, откуда

$$q_{12}csi+q_{13}-q_{23}=0.$$

Если же возьмемъ $x \parallel n$, причемъ $csm_{13}x = csm_{23}x = 0$, $csm_{12}x = -sini$, $csnx = 1$, то изъ (13) имѣемъ:

$$-q_{12}sini = r_{123} = 0.$$

И такъ уравненіе (13) обусловливаетъ слѣдующія два соотношенія:

$$(14)\qquad csi = \frac{q_{23} - q_{13}}{q_{12}}.$$

$$(15)\qquad r_{123} = q_{12}sini.$$

Изъ нихъ видимъ, что i и r_{123} суть величины постоянныя на всемъ протяженіи линіи $\int dl_{123}$, по которой поверхность, раздѣляющая обѣ жидкости, пересѣкаетъ поверхность твердаго тѣла. i—это тотъ уголъ, подъ которымъ встрѣчаются эти двѣ поверхности; будемъ его называть угломъ прикосновенія. Постоянство этого угла, выражаемое уравненіемъ (14), подтверждается во многихъ случаяхъ опытомъ, если только соблюдены извѣстныя предосторожности. Что касается силы r_{123}, то она существенно отрицательна, такъ какъ $sini > 0$, а $q_{12} < 0$. Отсюда заключаемъ, что частицы поверхностнаго слоя жидкости, прилегающія къ стѣнкамъ сосуда, подлежатъ дѣйствію особой силы, направляющей ихъ къ этимъ стѣнкамъ. Силу эту будемъ называть силою прилипанія.

Изъ уравненія (15) явствуетъ, что при $i < 90^0$ $q_{23} < q_{13}$, а при $i > 90^0$ $q_{23} > q_{13}$. Если же давленіемъ q_{23} имѣемъ право пренебречь (напр. когда вторая жидкость есть воздухъ), то заключаемъ, что q_{13} положительно или отрицательно смотря потому, будетъ ли $i < 90^0$ или $i > 90^0$. Въ первомъ случаѣ частицы поверхностнаго слоя жидкости (1), прилегающаго къ сосуду (3) находятся въ состояніи особеннаго сдавленія; во второмъ случаѣ онѣ обладаютъ сцѣпленіемъ, подобно слою, раздѣляющему двѣ жидкости.

10. Изложивъ выше нѣкоторыя соображенія о внутреннихъ силахъ, дѣйствующихъ въ различныхъ частяхъ жидкой массы, мы вывели условія равновѣсія этихъ отдѣльныхъ частей.

Представимъ теперь всѣ эти условія въ совокупности. Пусть по прежнему жидкость (1) одною частью своей поверхности прикасается къ жидкости (2), а остальною повехностью—къ твердому тѣлу (3). Назовемъ черезъ ρ_1 и ρ_2 плотности обѣихъ жидкостей, черезъ p_1 и p_2 давленіе внутри или на поверхности каждой изъ нихъ, черезъ p_3 давленіе на поверхность твердаго тѣла. Обозначимъ черезъ ds_{12}, ds_{13}, ds_{23} элементы трехъ раздѣляющихъ поверхностей. Черезъ n_{21} означимъ направленіе нормали къ нѣкоторому элементу ds_{12}, идущей отъ (2) жидкости внутрь первой, а противуположное направленіе той же нормали чрезъ n_{12}, такъ что для всякаго направленія прямой z

$$csn_{21}z = -csn_{12}z;$$

въ такомъ же смыслѣ будемъ понимать и обозначенія n_{31}, n_{21}. Назовемъ черезъ A_{21} сферическую кривизну для нѣкотораго элемента ds_{12}, считая радіусъ кривизны положительнымъ, когда онъ лежитъ на направленіи n_{21}, и подобнымъ же образомъ условимся въ обозначеніяхъ A_{31}, A_{32} для сферической кривизны какаго либо элемента ds_{13} или ds_{23}. Тогда

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \rho_1 X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho_1 Y, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} = \rho_1 Z$$

внутри (1) жидкости,

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \rho_2 X, \quad \frac{\partial p_2}{\partial y} = \rho_2 Y, \quad \frac{\partial p_2}{\partial z} = \rho_2 Z$$

внутри (2) жидкости;

(16) $p_2 - p_1 = q_{12} A_{21}$ на протяженіи повехности $\int ds_{12}$,

$p_3 - p_1 = q_{13} A_{31}$ на поверхности $\int ds_{13}$,

$p_3 - p_2 = q_{23} A_{32}$ на поверхности $\int ds_{23}$,

$r_{123} = q_{12} sin i$,

$csi = \dfrac{q_{23} - q_{13}}{q_{12}}$ на протяженіи линіи $\int dl_{123}$,

по которой пересѣкаются три упомянутыя поверхности.

11. Разсмотрѣнныя выше силы q_{12}, q_{13} и r_{123}, дѣйствующія лишь на поверхностныя частицы жидкости (1), мы называемъ капиллярными силами: q_{12} есть сцѣпленіе поверхностнаго слоя, r_{123}—сила прилипанія частицъ поверхностнаго слоя къ стѣнкамъ сосуда. Выразимъ возможную работу всѣхъ этихъ частичныхъ силъ, когда частицамъ жидкости сообщены весьма малыя перемѣщенія. Пусть координаты всякой точки x, y, z получили приращенія δu, δv, δw. Согласно обозначеніямъ §§ 2 и 9 назовемъ черезъ m_{12} направленіе линіи касательной къ поверхности $\int ds_{12}$ въ нѣкоторой точкѣ контура $\int dl_{123}$, перпендикулярной къ соотвѣтственному элементу dl_{123} и лежащей внѣ $\int ds_{12}$; въ подобномъ же смыслѣ будемъ понимать обозначенія m_{13}, m_{23}. Перемѣщеніе нѣкоторой точки, лежащей на поверхности, проложенное на нормаль n_{21}, назовемъ черезъ δn_{21}, т.-е положимъ:

$$\delta u . csn_{21}x + \delta v . csn_{21}y + \delta w . csn_{21}z = \delta n_{21}.$$

Перемѣщеніе точки, лежащей на контурѣ, проложенное по направленію m_{12}, назовемъ чрезъ δm_{12}, положивъ

$$\delta u csm_{12}x + \delta v csm_{12}y + \delta w csm_{12}z = \delta m_{12}.$$

Подобно этому условимся и въ обозначеніяхъ δn_{31}, δm_{13}, δm_{23}. Внутреннюю работу сцѣпленія q_{12}, отнесенную ко всей поверхности $\int ds_{12}$, назовемъ черезъ $\delta\pi_{12}$, работу q_{13} черезъ $\delta\pi_{13}$, работу силы прилипанія r_{123}, отнесенную къ единицѣ длины, $\delta\tilde{\omega}_{123}$.

Для поверхности $\int ds_{12}$ имѣемъ уравненіе

$$\delta\pi_{12} + \int (p_2 - p_1)\delta n_{21} ds_{12} - q_{12}\int \delta m_{12} dl_{123} = 0,$$

выражающее, что работа всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на поверхностный слой вблизи $\int ds_{12}$, равна нулю. Отсюда, на основаніи (16)

$$\delta\pi_{12} = q_{12}\left[-\int A_{21}\delta n_{21} ds_{12} + \int \delta m_{12} dl_{123}\right].$$

Но теорія кривыхъ поверхностей учитъ, что выраженіе, стоящее здѣсь множителемъ при q_{12}, представляетъ варіяцію поверхности $\int ds_{12}$, т.-е. что

$$-\int A_{21}\delta n_{21}\,ds_{12}+\int \delta m_{12}\,dl_{123}=\delta\int ds_{12}.$$

И такъ

$$\delta\pi_{12}=q_{12}\delta\int ds_{12}. \tag{17}$$

Точно также находимъ внутреннюю работу въ поверхностномъ слоѣ жидкости (1) вблизи тѣла (3)

$$\delta\pi_{13}=q_{13}\delta\int ds_{13}. \tag{18}$$

Для опредѣленія работѣ $\delta\omega_{123}$ внутреннихъ силъ въ кольцеобразномъ пространствѣ вблизи линіи $\int dl_{123}$ имѣемъ уравненіе

$$\delta\omega_{123}+q_{12}\delta m_{12}+q_{13}\delta m_{13}+q_{23}\delta m_{23}+r_{123}\delta n_{31}=0,$$

ибо здѣсь слѣдуетъ пренебречь, какъ работою внѣшнихъ силъ, такъ и работою внѣшнихъ давленій p_1 и p_2. На основаніи уравненія (13) имѣемъ отсюда

$$\delta\omega_{123}=0. \tag{19}$$

Изъ уравненій (17), (18) и (19) видимъ, что капиллярныя силы жидкости на протяженіи поверхности прикосновенія ея съ каждымъ отдѣльнымъ тѣломъ (жидкимъ или твердымъ) имѣютъ потенціалъ, который равенъ произведенію величины этой поверхности на постоянную величину сцѣпленія или давленія въ поперечномъ слоѣ *).

Извѣстно, что для всякаго тѣла всѣ условія его равновѣсія заключаются въ одномъ уравненіи, выражающемъ, что возможная работа всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ равна нулю. Напишемъ такое уравненіе для разсматриваемой жидкости (1), заключенной въ сосудѣ (3) и прикасающейся къ

*) Существованіе этого потенціала впервые было обнаружено Гауссомъ. Gauss Werke, T. V. Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibri.

другой жидкости (2). Назовемъ потенціалъ внѣшнихъ силъ черезъ U, т.-е. положимъ

$$\delta U = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

а коэффиціентъ кубическаго расширенія черезъ

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Возможная работа внѣшнихъ силъ есть

$$\iiint \rho_1 . \delta U dx dy dz,$$

гдѣ интеграція распространена на весь объемъ данной жидкости. Работа внѣшнихъ давленій на обѣихъ поверхностяхъ

$$\int p_2 \delta n_{21} ds_{12} \text{ и } \int p_3 \delta n_{31} ds_{13}.$$

Кромѣ того на поверхность кольцеобразной части, лежащей при пересѣченіи первыхъ двухъ, дѣйствуютъ силы r_{123}, производящія работу

$$r_{123} \int \delta n_{31} dl_{123}.$$

Наконецъ работа внутреннихъ силъ въ массѣ жидкости есть

$$\iiint p_1 \delta\theta . dx dy dz,$$

а въ каждомъ изъ поверхностныхъ слоевъ

$$\delta\pi_{12} = q_{12} \delta \int ds_{12} \text{ и } \delta\pi_{13} = q_{13} \delta \int ds_{13}.$$

И такъ

$$(20) \quad \iiint \rho_1 \delta U dx dy dz + \iiint p_1 \delta\theta dx dy dz + \int p_2 \delta n_{21} ds_{12} + q_{12} \delta \int ds_{12} +$$
$$+ \int p_3 \delta n_{31} ds_{13} + q_{13} \delta \int ds_{13} + r_{123} \int \delta n_{31} dl_{123} = 0.$$

Изъ этого уравненія, приравнивая въ немъ нулю коэффиціенты при каждомъ произвольномъ перемѣщеніи, можно воспроизвести всѣ найденныя выше условія равновѣсія (§ 10). Разсмотрѣніе отдѣльныхъ членовъ уравненія (20) еще разъ, съ новой точки зрѣнія, знакомитъ насъ съ эффектами силъ, дѣйствующихъ на различныя части жидкости. Такъ четвертый членъ положителенъ, если $\delta\int ds_{12} < 0$, ибо $q_{12} = -\alpha^2_{12}$ величина существенно отрицательная; слѣдовательно сцѣпленіе направлено къ тому, чтобы уменьшить часть поверхности, на контуръ которой оно дѣйствуетъ. Величина q_{13} можетъ имѣть положительный знакъ; тогда работа $q_{13}\delta\int ds_{13}$ положительна при $\delta\int ds_{13} > 0$. Въ этомъ случаѣ внутреннія силы поверхностнаго слоя близъ $\int ds_{13}$ стремятся расширить эту поверхность, и, еслибы не было и не явилось впослѣдствіи другихъ силъ, то подъ вліяніемъ такаго дѣйствія жидкость разлилась бы весьма тонкимъ слоемъ по поверхности сосуда. Третій и пятый члены представляютъ работу внѣшнихъ давленій, сжимающихъ жидкость, между тѣмъ какъ второй членъ есть работа внутреннихъ давленій, противодѣйствующихъ этому сжатію. Наконецъ послѣдній членъ уравненія (20) обнаруживаетъ еще разъ притяженіе частицъ, лежащихъ вблизи контура $\int dl_{123}$, къ стѣнкамъ сосуда. Такимъ образомъ уравненіе (20) представляетъ какъ-бы общую картину тѣхъ дѣйствій внѣшнихъ и внутреннихъ, которыя вліяютъ на равновѣсіе жидкости, заключенной въ сосудъ.

12. Способъ, употребленный въ предъидущемъ для вывода общихъ уравненій теоріи капиллярности, нѣсколько отличается отъ тѣхъ способовъ, которые для тойже цѣли даны были *Лапласомъ и Пуассономъ* и которые впослѣдствіи были въ различныхъ направленіяхъ развиты и дополнены многими авторами. Вмѣсто того, чтобы изслѣдовать—по ихъ примѣру—отдѣльныя взаимодѣйствія между каждыми двумя частицами, мы разсматриваемъ давленія,—равнодѣйствующія весьма большаго числа такихъ частичныхъ силъ. Вслѣдствіе этого теорія значительно упрощается, и сокращается число гипотезъ. При такомъ способѣ изложенія этой теоріи мы явственнѣе видимъ произволъ каждаго изъ сдѣланныхъ допущеній; намъ поэтому легче предложить и разсмотрѣть возможныя въ нихъ измѣненія. Такъ напримѣръ, вмѣсто произвольнаго допущенія въ § 9 о нормальномъ давленіи на площадку $DF \times dl_{123}$, можно принять

это дѣйствіе, направленнымъ къ ней косо, но все таки заключающимся въ плоскости нормальной къ dl_{123}. Тогда, называя черезъ u_{123} проложеніе этого дѣйствія на направленіе m_{13}, получаемъ вмѣсто уравненія (14) такое:

$$(21) \qquad csi = \frac{q_{23} - q_{13} - u_{123}}{q_{12}}.$$

Величина u_{123} не зависитъ отъ постоянныхъ величинъ q_{12}, q_{13}, q_{23}. Поэтому, если допустимъ ее постоянною на всемъ протяженіи линіи $\int dl_{123}$, то изъ уравненія (21) заключаемъ, что уголъ прикосновенія i имѣетъ постоянную величину на всемъ контурѣ, зависящую, однако, кромѣ поверхностныхъ сцѣпленій и давленій данной жидкости, еще и отъ другихъ факторовъ. Наблюденіе подтверждаетъ такую гипотезу, показывая, что при различныхъ условіяхъ уголъ прикосновенія для однѣхъ и тѣхъ же жидкостей, прикасающихся къ одному и тому же твердому тѣлу, можетъ быть различенъ. Величина u_{123}, слѣдовательно, можетъ подъ вліяніемъ неизслѣдованныхъ, но по всей вѣроятности весьма разнообразныхъ причинъ, измѣняться. Если она способна быть$=q_{23}-q_{13}-q_{12}$, то $csi=1$, $i=0$; въ этомъ случаѣ стѣнка вещества (3) вполнѣ смачивается жидкостью (1).

II.

Свойства поверхности, раздѣляющей двѣ жидкости.

13. Поверхность, раздѣляющая двѣ жидкости, опредѣляется, вслѣдствіе уравненій равновѣсія ихъ (§ 10) особымъ уравненіемъ съ частными производными. Ограничиваясь случаемъ, когда изъ внѣшнихъ силъ дѣйствуетъ лишь тяжесть, называя напряженіе ея черезъ g и направивъ ось z по отвѣсу, имѣемъ

$$p_1 = g\rho_1 z + c_1, \quad p_2 = g\rho_2 z + c_2,$$

если черезъ c_1 и c_2 обозначимъ двѣ постоянныя и положительныя величины. Во всѣхъ точкахъ поверхности, раздѣляющей жидкости (1) и (2), удовлетворяется уравненіе

$$(22) \qquad g(\rho_2-\rho_1)z+c_2-c_1=q_{12}A_{21}.$$

Взявъ координаты x, y за независимыя перемѣнныя и разсматривая z какъ функцію ихъ, замѣтимъ, что сферическая кривизна A_{21} поверхности зависитъ отъ частныхъ производныхъ втораго порядка этой функціи по независимымъ перемѣннымъ. Общая интеграція уравненія (22) представляетъ неодолимыя препятствія. Но, не прибѣгая къ такой интеграціи, мы можемъ изъ этого уравненія при помощи формулъ § 4 извлечь изслѣдованіе различныхъ общихъ свойствъ поверхности тяжелаго жидкаго тѣла.

1) Изслѣдуемъ условіе, при которомъ данная масса жидкости (1) можетъ находиться въ равновѣсіи внутри жидкости (2), не прикасаясь къ какому либо твердому тѣлу. Умножая обѣ части уравненія (22) на $csn_{21}zds_{12}$ и интегрируя обѣ части по всей замкнутой поверхности $\int ds_{12}$, получаемъ

$$(23)\, g(\rho_2-\rho_1)\int zcsn_{21}zds_{12}+(c_2-c_1)\int csn_{21}zds_{12}=q_{12}\int A_{21}csn_{21}zds_{12}.$$

Назовемъ объемъ занятый данною жидкостью черезъ V и замѣтимъ, что

$$\int zcsn_{21}zds_{12}=-V;\ \int csn_{21}zds_{12}=0.$$

На основаніи уравненія (7) интегралъ $\int A_{12}csn_{21}zds_{12}$, распространенный на замкнутую поверхность, также равенъ нулю. Поэтому изъ уравненія (23) слѣдуетъ

$$g(\rho_1-\rho_2).V=0,$$

откуда видно, что для равновѣсія данной массы одной жидкости внутри другой необходимо, чтобы плотности ихъ были равны между собою, $\rho_1=\rho_2$. Выводъ этотъ подтверждается прекрасными опытами *Плато*, который помѣщалъ масло внутри раствора алкоголя въ водѣ. При этомъ поверхность масла принимала форму почти шарообразную, что согласно съ уравненіемъ (22), изъ котораго при $\rho_1 = \rho_2$ получаемъ $A_{12} = const.$,—условіе, которому между всѣми непрерывными замкнутыми поверхностями удовлетворяетъ лишь поверхность шара.

2) Возвратимся къ случаю, когда жидкость (1) заключена въ сосудѣ. Изслѣдуемъ условіе, при которомъ поверхность ея можетъ заключать въ себѣ плоскую часть. Полагая въ уравненіи (22) $A_{21} = 0$, получаемъ $z = const$; т. е. плоская часть поверхности,—если она существуетъ,—должна быть горизонтальна. Далѣе замѣтимъ, что всякая непрерывная, не имѣющая особыхъ точекъ, поверхность, содержащая въ себѣ плоскую часть, обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ. Элементы ея, непосредственно прилегающія къ плоской части, всегда обращены своею выпуклостью къ продолженію этой плоскости. Принявъ эту плоскость за плоскость координатъ xy, представимъ уравненіе (22) въ видѣ:

$$g(\rho_2 - \rho_1) z = q_{12} A_{21}. \tag{24}$$

Но, согласно только что сдѣланному замѣчанію и изложенному въ § 10 условію о знакѣ A_{21}, имѣемъ для элементовъ, прилегающихъ къ плоской части при $z > 0$ $A_{21} > 0$, при $z < 0$ $A_{21} < 0$. Слѣдовательно и выраженія $g(\rho_2 - \rho_1)$ и q_{12} должны при этомъ быть одинаковаго знака. Но $q_{12} = -\alpha_{12}^2$ существенно отрицательно. Итакъ условіе, при которомъ возможна плоская часть поверхности, состоитъ въ томъ чтобы нижняя жидкость была тяжелѣе верхней, чтобы ρ_1 было $> \rho_2$. Выводъ этотъ вполнѣ оправдывается самымъ обыкновеннымъ наблюденіемъ.

3) Наблюденіе показываетъ, что въ большинствѣ случаевъ уголъ i, подъ которымъ встрѣчается поверхность $\int ds_{12}$ съ поверхностью сосуда, на всемъ протяженіи линіи ихъ пересѣченія имѣетъ постоянную величину. Поверхность жидкости будетъ поэтому вблизи стѣнокъ сосуда поверхностью кривою. На нѣкоторомъ разстояніи отъ стѣнокъ она можетъ становиться плоскою. Но можетъ ли внутри этой плоской части явиться

возвышеніе или углубленіе? Покажемъ, что этого не бываетъ. Напишемъ уравненіе поверхности

$$g(\rho_2-\rho_1)z=q_{12}A_{12},$$

отнесенное къ плоскому уровню. Помножимъ обѣ его части на $csn_{21}zds_{12}$ и проинтегрируемъ въ предѣлахъ предполагаемаго возвышенія или углубленія и окружающей его плоской части поверхности. Замѣтимъ, что $\int zcsn_{21}zds_{12}=-V$ или же $\int zcsnzds=+V$, гдѣ V объемъ, заключенный между предполагаемою кривою частью и продолженіемъ горизонтальнаго уровня. На основаніи уравненія (7)

$$\int A_{21}csn_{21}zds_{12}=\int csmzdl,$$

а такъ какъ контуръ $\int dl$, къ которому отнесенъ послѣдній интегралъ, лежитъ на плоскости, то $csmz=0$; слѣдовательно изъ уравненія поверхности слѣдуетъ

$$g(\rho_1-\rho_2).\,V=0,$$

т. т. возвышенія такаго не существуетъ. Итакъ, если поверхность жидкости заключаетъ въ себѣ плоскій уровень, то возвышающаяся надъ нимъ или лежащая ниже часть поверхности прилегаетъ непосредственно къ стѣнкамъ сосуда.

14. Остановимся подробнѣе на томъ случаѣ, когда поверхность жидкости содержитъ плоскую часть, которую, какъ и выше, примемъ за плоскость xy. Проведемъ на кривой части поверхности замкнутый контуръ $\int dl$ и черезъ него вертикальный цилиндръ до встрѣчи съ плоскостью xy. Между этими тремя поверхностями заключенъ объемъ V, наполненный либо первою, либо второю жидкостью, смотря потому, лежитъ ли кривая часть поверхности выше или ниже уровня. Умножая обѣ части уравненія (24) на $csn_{21}zds_{12}$, интегрируемъ ихъ внутри контура $\int dl$ и получаемъ, на основаніи уравненія (7),

$$g(\rho_2-\rho_1)\int zcsn_{21}zds_{12}=q_{12}\int csmzdl.$$

Но $\int z csn_{21} z ds_{12} = -V$ въ случаѣ когда поверхность поднимается надъ уровнемъ $z=0$, и $\int z csn_{21} z ds_{12} = V$ въ противномъ случаѣ. Итакъ

(25)
$$g(\rho_1 - \rho_2)V = q_{12}\int csmz dl \text{ въ первомъ случаѣ, и}$$
$$g(\rho_1 - \rho_2)V = -q_{12}\int csmz dl \text{ во второмъ.}$$

Уравненія эти весьма наглядно показываютъ, что вѣсъ жидкости поднимается надъ уровнемъ или опускается подъ нимъ силою капиллярнаго сцѣпленія, приложеннаго къ контуру ея поверхности.

15. Примѣнимъ выведенныя уравненія къ опредѣленію вѣса жидкости, поднятаго или опустившагося внутри погруженной въ нее цилиндрической трубки. Положимъ сначала, что трубка помѣщена вертикально; считая объемъ отъ горизонтальнаго уровня, имѣемъ по предъидущему

(26)
$$g(\rho_1 - \rho_2)V = q_{12}\int csmz dl, \text{ или}$$
$$g(\rho_1 - \rho_2)V = -q_{12}\int csmz dl,$$

въ обоихъ сказанныхъ случаяхъ. Здѣсь интеграція относится къ контуру, по которому пересѣкается поверхность жидкости со стѣнками трубки. Когда эта линія горизонтальна, то $csmz = -csi$, и $\int dl = L$, если L означаетъ длину поперечнаго сѣченія внутренней поверхности трубки. Поэтому мы имѣемъ въ сказанномъ предположеніи

(27)
$$g(\rho_1 - \rho_2)V = -q_{12}Lcsi, \text{ или}$$
$$g(\rho_1 - \rho_2)V = q_{12}Lcsi,$$

смотря по тому, находится ли поверхность $\int ds_{12}$ выше или ниже уровня. Но вообще линія $\int dl$ не горизонтальна. Называя въ такомъ случаѣ черезъ dL проэкцію каждаго элемента dl на плоскость xy, имѣемъ $csmz dl = -csi . dL$. Съ помощью этого соотношенія выводимъ изъ уравненій (26) точно такое же выраженіе (27) для объема V, какъ и при горизонтальномъ положеніи контура.

Вообразимъ, что объемъ V жидкости (1) заключенъ внутри трубки между двумя горизонтальными плоскостями, и пусть H означаетъ разстояніе между ними. Будемъ называть H среднею высотою объема V. Полагая затѣмъ $q_{12} = -\alpha^2_{12}$, представимъ первое изъ уравненій (27) въ такомъ видѣ:

$$g(\rho_1 - \rho_2)\Omega . H = \alpha^2_{12} . L . csi, \tag{28}$$

гдѣ Ω есть площадь поперечнаго сѣченія внутренней поверхности трубки.

Если же это сѣченіе есть кругъ, то, называя черезъ R радіусъ его, имѣемъ

$$H = \frac{2\alpha^2_{12}}{g(\rho_1 - \rho_2)} . \frac{csi}{R}, \tag{29}$$

извѣстную формулу Iurin'a.

16. Разсмотримъ жидкость (1) внутри цилиндрической трубки, помѣщенной наклонно, подъ угломъ γ къ горизонтальной плоскости. Для большей простоты разсужденія ограничимся тѣмъ случаемъ, когда жидкость (1) поднимается надъ горизонтальнымъ уровнемъ $z=0$. Поверхность жидкосту внутри трубки имѣетъ прежнее уравненіе (24). Чтобы опредѣлить объемъ V, заключенный между продолженіемъ горизонтальнаго уровня, стѣнками трубки и поверхностью, раздѣляющею обѣ жидкости, назовемъ черезъ Z длину линіи, идущей параллельно къ оброзующей цилиндра, отъ нѣкоторой точки поверхности до встрѣчи съ плоскостью xy, такъ что $Z sin\gamma = z$. Тогда

$$V = -\int Z csn_{21} Z ds_{12},$$

гдѣ интеграція распространена лишь на поверхность, раздѣляющую внутри трубки обѣ жидкости, ибо на стѣнкахъ трубки $csnZ=0$, а въ точкѣ уровня $Z=0$. Слѣдовательно

$$g(\rho_1 - \rho_2) V . sin\gamma = -g(\rho_1 - \rho_2)\int z csn_{21} Z ds_{12},$$

или, вслѣдствіе уравненія поверхности,

$$g(\rho_1-\rho_2)V\sin\gamma=q_{12}\int A_{21}csn_{21}Zds_{12},$$

а отсюда, на основаніи уравненія (7),

$$g(\rho_1-\rho_2)V\sin\gamma=q_{12}\int csmZdl.$$

Называя по прежнему черезъ dL проэкцію элемента dl на плоскость, перпендикулярную къ образующей цилиндра, а черезъ L длину сѣченія такой плоскости съ внутреннею поверхностью трубки и замѣчая, что опять $csmZ:dl= -csi.dL$, получаемъ:

$$(30)\qquad g(\rho_1-\rho_2)V\sin\gamma= -q_{12}L.csi.$$

Вообразимъ весь объемъ V внутри трубки ограниченнымъ сверху горизонтальною плоскостью; пусть высота ея надъ уровнемъ будетъ H, а отрѣзокъ образующей цилиндра между этою плоскостью и плоскостью уровня—K. Тогда

$$K\sin\gamma=H,\ V=\Omega.H.$$

Слѣдовательно

$$(31)\qquad g(\rho_1-\rho_2)\Omega.H= -q_{12}L.csi.$$

Условимся, какъ и въ предъидущемъ, называть H среднею высотою объема V. Изъ сравненія уравненій (28) и (31) заключаемъ, что средняя высоста, на которую поднимается или опускается въ данной трубкѣ извѣстная жидкость, не зависитъ отъ угла, подъ которымъ трубка наклонена къ горизонтальной плоскости *).

17. Уравненія (27), (28) и (30) справедливы не только для внутренней, но и для внѣшней поверхности трубки. Они даютъ также выраженія объема жидкости, поднимающейся или опускающейся вокругъ тѣла, имѣющаго цилиндрическую по-

---

*) *Laplace*, Mécanique Céleste, T. IV., Supplém. p. 32; *Poisson*, Nouvelle théoric de l'action capillaire, p. 75.—*Moutier*, journal Almeida, T. I. Moutier разсматриваетъ этотъ случай при помощи особыхъ геометрическихъ соображеній относительно варіяціи поверхности.

верхность. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ такое тѣло, погруженное частью въ жидкость (1), частью въ жидкость (2), и пусть поверхность, раздѣляющая обѣ жидкости на нѣкоторомъ разстояніи отъ погруженнаго тѣла есть горизонтальная плоскость, которую примемъ за плоскость xy. Пусть опять γ означаетъ уголъ наклоненія образующей цилиндра къ горизонтальной плоскости, и $Z sin\gamma = z$. Уравненіе поверхности $\int ds_{12}$,

$$g(\rho_2-\rho_1)z=q_{12}A_{21},$$

умножимъ въ обѣихъ частяхъ на $csn_{21}Z$, и, проинтегрировавъ на протяженіи всей кривой части $\int ds_{12}$ вокругъ погруженнаго тѣла, находимъ

$$g(\rho_2-\rho_1)sin\gamma.\int Z csn_{21}Z.ds_{12}=q_{12}\int A_{21}csn_{21}Zds_{12}.$$

А такъ какъ объемъ V поднятой вокругъ тѣла жидкости

$$V=-\int Z csn_{21}Zds_{12},$$

то

$$g(\rho_1-\rho_2)V.sin\gamma=q_{12}\int A_{21}csn_{21}Zds_{12}.$$

Отсюда, на основаніи формулъ (7),

$$g(\rho_1-\rho_2)Vsin\gamma=q_{12}\int csmZdl.$$

Если же черезъ dL обозначить проэкцію элемента dl на плоскость, перпендикулярную къ образующей цилиндра, а черезъ L длину всего поперечнаго сѣченія этой поверхности, то $csmZdl=-csi.dL$ на поверхности цилиндра. Что же касается той части контура $\int dl$, которая принадлежитъ горизонтальному уровню, то на ней $\int csmZdl=0$ вслѣдствіе формулъ (7).

Итакъ

$$g(\rho_1-\rho_2)V.sin\gamma=-q_{12}.L.csi.$$

18. Разсмотримъ случай, когда внутри вертикально погруженной трубки находятся одна надъ другою нѣсколько жид-

костей. Число ихъ пусть будетъ μ, и каждую мы обозначимъ особою цифрою 1, 2, 3..... μ. Первая изъ нихъ внѣ трубки имѣетъ горизонтальный уровень и прикасается къ жидкости (μ). Надъ (1) жидкостью, которая внутри трубки занимаетъ выше уровня объемъ V_1, находится въ трубкѣ нѣкоторый объемъ V_2, занятый жидкостью (2), и т. д., кончая объемомъ $V_{\mu-1}$, содержащимъ жидкость (μ—1). Послѣдняя прикасается сверху къ жидкости (μ), которая черезъ открытый верхній конецъ трубки свободно сообщается съ остальною частью жидкости (μ), наполняющею пространство надъ горизонтальнымъ уровнемъ. Сумму всѣхъ названныхъ объемовъ означимъ черезъ V_μ, т. е. положимъ

$$V_\mu = V_1 + V_2 + \ldots + V_{\mu-1}.$$

Элементъ поверхности, отдѣляющей жидкость (1) отъ (2), пусть будетъ ds_{12}, второй отъ третьей—ds_{23}, и т. д. до поверхности, раздѣляющей жидкости (μ—1) и (μ). Элементъ поверхности этой пусть будетъ $ds_{\mu-1,\mu}$, а элементъ поверхности, раздѣляющей внѣ трубки жидкости (1) и (μ),—$ds_{1,\mu}$. Сферическую кривизну въ какой либо точкѣ для каждой изъ этихъ поверхностей назовемъ чрезъ

$$A_{21},\ A_{32}, \ldots A_{\mu,\mu-1} \text{ и } A_{\mu,1},$$

считая радіусъ кривизны положительнымъ тогда, когда онъ направленъ отъ жидкости, обозначенной первымъ индексомъ, къ жидкости, обозначенной вторымъ индексомъ. Давленія и плотности внутри этихъ жидкостей назовемъ

$$p_1,\ p_2 \ldots p_\mu \text{ и } \rho_1,\ \rho_2 \ldots \rho_\mu.$$

На основаніи уравненій параграфа (10) имѣемъ

$$p_2 - p_1 = q_{12}A_{21},\ p_3 - p_2 = q_{23}A_{32}, \ldots p_\mu - p_{\mu-1} = q_{\mu-1,\mu}A_{\mu,\mu-1}$$

и

$$p_\mu - p_1 = q_{1,\mu}A_{\mu,1},$$

для поверхностей $\int ds_{12}$, $\int ds_{23}$ и т. д., причемъ подъ q_{12}, q_{23} и т. д. слѣдуетъ понимать постоянныя по величинѣ сцѣпленія въ поверхностныхъ слояхъ, прилегающихъ къ $\int ds_{12}$, $\int ds_{23}$ и т. д. Согласно уравненіямъ того же параграфа, имѣетъ внутри каждой изъ жидкостей

$$p_1 = g\rho_1 z + c_1,\ p_2 = g\rho_2 z + c_2, \ldots . p_\mu = g\rho_\mu z + c_\mu,$$

гдѣ c_1, $c_2, \ldots c_\mu$ означаютъ нѣкоторыя постоянныя величины. Поэтому уравненія поверхностей, раздѣляющихъ жидкости внутри трубки, будутъ

$$\begin{aligned} &g(\rho_2-\rho_1)z + c_2 - c_1 = q_{12}A_{21},\\ (32)\qquad &g(\rho_3-\rho_2)z + c_3 - c_2 = q_{23}A_{23},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &g(\rho_\mu-\rho_{\mu-1})z + c_\mu - c_{\mu-1} = q_{\mu-1,\mu}.A_{\mu,\mu-1}, \end{aligned}$$

а уравненіе поверхности $\int ds_{1,\mu}$

$$(33)\qquad g(\rho_\mu-\rho_1)z + c_\mu -_1 = q_{1,\mu}A_{\mu,1}$$

Принимая плоскій горизонтальный уровень, принадлежащій послѣдней поверхности за плоскость xy, имѣемъ $c_1 = c_\mu$. Умножимъ теперь каждое изъ уравненій (32) соотвѣтственно на

$$csn_{21}zds_{12},\ csn_{32}zds_{23}, \ldots \ldots cosn_{\mu,\mu-1}zds_{\mu-1,\mu}$$

и проинтегрируемъ каждое на протяженіи его поверхности. Полученныя затѣмъ уравненія сложимъ. Замѣчая, что

$$V_1 = -\int zcsn_{21}zds_{12},\quad V_\mu = -\int zcosn_{\mu,\mu-1}zds_{\mu-1,\mu},$$

$$V_2 = \int zcsn_{21}zds_{12} - \int zcsn_{32}zds_{23},\quad V_3 = \int zcsn_{32}zds_{23} - \int zcsn_{43}zds_{34}$$

и т. д., что, кромѣ того

$$\int csn_{21}zds_{21} = \int csn_{32}zds_{32} = \ldots . = \int cosn_{\mu,\mu-1}zds_{\mu-1,\mu} = \Omega,$$

гдѣ Ω есть прощадь поперечнаго сѣченія трубки, мы получимъ послѣ сложенія помянутыхъ интеграловъ уравненіе:

$$g(\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \rho_{\mu-1} V_{\mu-1} - \rho_\mu V_\mu) =$$

(34)
$$q_{12}\int A_{21} csn_{21} z ds_{21} +$$

$$+ q_{23}\int A_{32} csn_{32} ds_{23} + \ldots . q_{\mu-1,\mu}\int A_{\mu,\mu-1} csn_{\mu,\mu-1} z ds_{\mu-1,\mu}.$$

Назовемъ черезъ dl_{12}, dl_{23}, и т. д. элементы контуровъ поверхностей $\int ds_{12}$, $\int ds_{23}$ и т. д., черезъ m_{12}, m_{23} и т. д. внѣшнія направленія касательныхъ къ этимъ поверхностямъ и перпендикулярныхъ къ контурамъ линій, чрезъ i_{12}, i_{23} и т. д. углы соприкосновенія поверхностей со стѣнками трубки, черезъ L поперечное сѣченіе трубки. Тогда

$$csm_{12} z dl_{12} = -csi_{12}.dL,\ csm_{23} z dl_{23} = -csi_{23} dL \text{ и т. д.},$$

и на основаніи уравненій (7)

$$\int A_{21} csn_{21} z ds_{12} = \int csm_{12} z dl_{12} = -L csi_{12},$$

$$\int A_{32} csn_{32} z ds_{23} = \int csm_{23} z dl_{23} = -L csi_{23} \text{ и т. д.}$$

Вставляя эти выраженія въ уравненіе (34) и полагая $q_{12} = -\alpha^2_{12}$, $q_{23} = -\alpha_{23}{}^2$ и т. д., получаемъ

(35)
$$g(\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \ldots + \rho_{\mu-1} V_{\mu-1} - \rho_\mu V_\mu) =$$
$$(\alpha^2_{12} csi_{12} + \alpha^2_{23} csi_{23} + \ldots + \alpha^2_{\mu-1,\mu} csi_{\mu-1,\mu}).L.$$

Уравненіе это даетъ соотношеніе между объемами жидкостей въ капиллярной трубкѣ для этого столь общаго случая. Оно показываетъ, что общій вѣсъ поднятыхъ въ трубкѣ надъ уровнемъ жидкостей поддерживается капиллярнымъ сцѣпленіемъ, дѣйствующимъ на контуры ихъ поверхностей.

Обозначая вещество трубки цифрою 0 и называя поперечныя давленія поверхностныхъ слоевъ жидкостей 1, 2,.....μ, прилегающихъ къ стѣнкамъ трубки черезъ $q_{0,1}$, $q_{0,2} \ldots q_{0,\mu}$ имѣемъ, согласно уравненіямъ параграфа 9-го,

(36)
$$q_{12} csi_{12} + q_{01} - q_{02} = 0$$
$$q_{23} csi_{23} + q_{02} - q_{03} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_{\mu-1,\mu} csi_{\mu-1,\mu} + q_{0,\mu-1} - q_{0,\mu} = 0.$$

Складывая эти равенства, получаемъ

$$q_{12}csi_{12}+q_{23}csi_{23}+\ldots+q_{\mu-1,\mu}csi_{\mu-1,\mu}=q_{0\mu}-q_{01},$$

вслѣдствіе чего уравненію (35) можетъ быть данъ такой видъ:

$$(37)\quad g(\rho_1 V_1+\rho_2 V_2+\ldots+\rho_{\mu-1} V_{\mu-1}-\rho_\mu V_\mu)=(q_{01}-q_{0\mu}).L$$

Изъ послѣдняго уравненія заключаемъ, что общій вѣсъ поднятыхъ внутри трубки надъ уровнемъ жидкостей зависитъ отъ вещества нижней и верхней жидкости и отъ вещества трубки. Если же верхняя жидкость (μ), какъ это бываетъ въ большинствѣ случаевъ, представляющихся наблюденію, остается одна и таже (воздухъ), то единственные факторы, вліяющіе на вѣсъ жидкостей, поднятыхъ въ капиллярной трубкѣ, суть вещество трубки и вещество нижней жидкости *).

19. Слѣдуетъ однако замѣтить, что уравненіе (37) выведено въ предположеніи (§ 9), что стѣнки трубки оказываютъ на близлежащія частицы поверхностнаго слоя, раздѣляющаго двѣ жидкости, только нормальное дѣйствіе. Принимая относительно этой силы болѣе общія допущенія (см. § 12), положимъ вмѣсто уравненій (36),

$$(38)\quad \begin{aligned} &q_{12}csi_{12}+q_{01}-q_{02}+u_{012}=0\\ &q_{23}csi_{23}+q_{02}-q_{03}+n_{023}=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &q_{\mu-1,\mu}csi_{\mu-1,\mu}+q_{0,\mu-1}-q_{0,\mu}+\mu_{0,\mu-1,\mu}=0,\end{aligned}$$

гдѣ каждый изъ послѣднихъ членовъ имѣетъ постоянную величину на протяженіи всего контура, къ которому относит-

---

*) *Laplace*, Méc. Cel. Supplément au X livre, p. 26. *Poisson*, Nouvelle Théorie, p. 76; p. 142. Выводъ Пуассона совпадаетъ съ уравненіемъ (37), такъ какъ верхняя жидкость въ примѣрѣ, разсматриваемомъ имъ въ §§ 69—71, есть воздухъ, котораго плотность и капиллярное дѣйствіе полагается равнымъ нулю—*Quincke*. Pogg. Annal. 1870. стр. 45—46. Имѣя въ виду преимущественно соотношенія, выражаемыя уравненіемъ (34), Квинке утверждаетъ, что упомянутый вѣсъ зависитъ лишь отъ формы раздѣляющихъ поверхностей.

ся содержащее его уравненіе, и зависитъ отъ трехъ веществъ, указанныхъ цифрами его индекса. Мы допустили кромѣ того (§ 12), что величины эти могутъ быть измѣнены вліяніемъ другихъ неизвѣстныхъ причинъ, что вполнѣ согласуется съ опытными изслѣдованіями. Складывая уравненія (38) и обращаясь къ уравненію (35), мы получимъ взамѣнъ уравненія (37) новое:

$$
(39)\qquad \begin{gathered} g(\rho_1 V_1+\rho_2 V_2+\ldots\ldots+\rho_{\mu-1} V_{\mu-1}-\rho_\mu V_\mu= \\ (q_{01}-q_{0\mu}).L+(u_{012}+u_{023}+\ldots\ldots+u_{0,\mu-1,\mu}).L. \end{gathered}
$$

Уравненіе это показываетъ, что общій вѣсъ нѣсколькихъ жидкостей въ капиллярной трубкѣ можетъ зависѣть отъ свойствъ всѣхъ этихъ жидкостей и вещества трубки, а также отъ нѣкоторыхъ другихъ неизслѣдованныхъ причинъ и такимъ образомъ обнаруживаетъ неточность уравненія (37).

Случай наклонной капиллярной трубки, содержащей нѣсколько жидкостей, легко можетъ быть изслѣдованъ съ помощью пріемовъ, изложенныхъ въ трехъ послѣднихъ параграфахъ. Получатся уравненія, подобныя (35), (37), (39), только въ лѣвыхъ частяхъ каждаго уравненія явится множителемъ синусъ угла наклоненія трубки къ горизонту.

20. Вообразимъ каплю жидкости (1), окруженную жидкостью (2) и лежащую на горизонтальной плоской поверхности твердаго тѣла (3) или же висящую подъ такою же поверхностью этого тѣла. Уравненіе поверхности капли таково:

$$
(40)\qquad g(\rho_2-\rho_1)z+c_2-c_1=q_{12}A_{21}.
$$

Замѣтимъ, что сферическая кривизна A_{21} всегда положительна въ высшей точкѣ капли, лежащей на плоскости, а также и въ нисшей точкѣ капли висящей. Имѣя въ виду это обстоятельство, заключаемъ изъ уравненія (40), что сферическая кривизна A_{21} положительна во всякой точкѣ поверхности капли, лежащей надъ плоскостью, въ томъ случаѣ, когда $\rho_1 > \rho_2$. Точно также сферическая кривизна A_{21} положительна на поверхности капли висящей при $\rho_1 < \rho_2$.

Остановимся сначала на случаѣ капли, лежащей надъ поверхностью тѣла (3). Принявъ за плоскость xy какую либо горизонтальную плоскость, пересѣкающую поверхность капли, назвавъ черезъ B сферическую кривизну поверхности на этомъ сѣченіи и полагая $q_{12} = -\alpha_{12}^2$, имѣемъ

$$(41) \qquad g(\rho_2 - \rho_1)z = \alpha^2_{12} B - \alpha^2_{12} . A_{21}.$$

Умножая обѣ части этого уравненія на $csn_{21} z ds_{12}$, интегрируя на протяженіи поверхности капли надъ плоскостью xy и называя черезъ V объемъ части капли, отсѣченной этою плоскостью, черезъ Ω площадь сѣченія, получаемъ

$$g(\rho_1 - \rho_2) V = \alpha^2_{12}(B\Omega - \int csmz dl)$$

Слѣдовательно $B\Omega > \int csmz dl$. Положимъ теперь, что поверхность капли есть поверхность вращенія и назовемъ черезъ R радіусъ кривизны меридіональнаго сѣченія, a черезъ r радіусъ круглаго горизонтальнаго сѣченія въ нѣкоторой точкѣ поверхности на плоскости xy. Тогда $csmz$ имѣетъ на всемъ контурѣ постоянную величину;

$$\Omega = \pi r^2, \; B = \frac{1}{R} + \frac{csmz}{r}, \quad \int csmz dl = 2\pi r . csmz.$$

Вставляя эти выраженія въ вышеприведенное неравенство, находимъ, что

$$\frac{1}{R} > \frac{csmz}{r},$$

а такъ какъ въ правой части послѣдняго неравенства имѣемъ величину существенно положительную, *) то заключа-

*) Въ самомъ дѣлѣ, еслибы $csmz$ могъ быть отрицательнымъ въ нѣкоторой точкѣ меридіанальнаго сѣченія, то между этою точкою и высшею точкою поверхности находился бы рядъ точекъ, въ коихъ $csmz$ положителенъ, а R отрицателенъ,—обстоятельство, невозможность котораго доказывается.

емъ, что кривизна меридіанальнаго сѣченія капли въ этомъ случаѣ положительна. Если же $\rho_1<\rho_2$, то заключеніе подобное предъидущему для капли лежащей на плоскости не можетъ быть сдѣлано.

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію капли, висящей подъ плоскою поверхностью нѣкотораго тѣла. Поверхность капли имѣетъ по прежнему уравненіе (41), если примемъ за плоскость xy нѣкоторую плоскость, пересѣкающую каплю, и по прежнему назовемъ черезъ Ω площадь, а черезъ B сферическую кривизну этого сѣченія. Умножая обѣ части уравненія (41) на $csn_{21}zds_{12}$, интегрируя на протяженіи отсѣченной части поверхности капли и называя черезъ V объемъ отсѣченной части капли, получаемъ

$$g(\rho_1-\rho_2)V=-\alpha^2_{12}(B\Omega+\int csmzdl).$$

Слѣдовательно, въ предположеніи $\rho_1<\rho_2$,

$$(42)\qquad B\Omega+\int csmzdl>0.$$

Если же допустимъ, что капля ограничена поверхностью вращенія и воспользуемся прежними обозначеніями, то

$$\Omega=\pi r^2,\ B=\frac{1}{R}-\frac{csmz}{r},\ \int csmzdl=2\pi rcsmz.$$

Поэтому, на основаніи (42), имѣемъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{1}{R}>-\frac{csmz}{r}.$$

Выраженіе въ правой части этого неравенства положительно. Поэтому радіусъ кривизны меридіанальнаго сѣченія поверхности висящей капли, при $\rho_1<\rho_2$, всегда положителенъ. Если же, въ случаѣ висящей капли, $\rho_1>\rho_2$, то заключеніе, подобное предъидущему, не имѣетъ мѣста.

Соображенія эти приводятъ къ слѣдующему выводу. Капля, лежащая на поверхности твердаго тѣла и ограниченная поверхностью вращенія, можетъ представить въ ея меридіанальномъ сѣченіи изгибъ въ томъ только случаѣ, когда вещество капли легче окружающей жидкости. Напротивъ, меридіанальное сѣченіе капли висящей можетъ имѣть изгибъ только тогда, когда вещество капли тяжелѣе окружающей жидкости. Въ этихъ свойствахъ поверхности сказывается стремленіе легкой капли подняться и оторваться отъ тѣла, къ которому она прилипла, и стремленіе тяжелой капли упасть *).

Чтобы опредѣлить объемъ всей капли, положимъ плоскость xy на поверхности тѣла и назовемъ черезъ L контуръ капли. Изъ уравненія (41), умножая обѣ части его на $csn_{21}zds_{12}$ и интегрируя по кривой поверхности капли, находимъ

$$g(\rho_1-\rho_2)V=\alpha^2_{12}(B\Omega-L\sin i) \tag{43}$$

для капли, лежащей на твердомъ тѣлѣ, а для капли висящей

$$g(\rho_1-\rho_2)V=\alpha^2_{12}(-B\Omega+L\sin i),$$

понимая попрежнему подъ i постоянный уголъ прикосновенія.

21. Вообразимъ каплю жидкости (1), окруженную другою жидкостью (2), лежащую или висящую на наклонной плоскости. Изслѣдуемъ условія, при которыхъ возможно такое равновѣсіе. Пусть φ означаетъ уголъ, подъ которымъ плоскость наклонена къ горизонту. Если выберемъ за ось y горизонтальную линію, лежащую, на наклонной плоскости, то уравненіе послѣдней будетъ

$$z=x\,tg\varphi.$$

Уравненіе поверхности капли, какъ и прежде, таково:

$$g(\rho_2-\rho_1)z+c_2-c_1=q_{12}A_{21}.$$

Преобразуемъ координаты, такъ чтобы ось x' шла внизъ по нормали къ наклонной плоскости, а ось y' оставалась въ

*) *Du Bois-Raymond* въ одной изъ своихъ статей о капиллярности Pogg. Ann. 1870, 139 стр. 263—265) указываетъ невозможность изгиба въ меридіанальномъ сѣченіи тяжелой капли. Онъ не изслѣдуетъ впрочемъ тѣхъ случаевъ, когда возможна отрицательная кривизна этого меридіанальнаго сѣченія.

направленіи оси y, причемъ $z=z'sin\varphi+x'cs\varphi$. Уравненіе поверхности въ новыхъ координатахъ будетъ

$$g(\rho_2-\rho_1)(z'sin\varphi+x'cs\varphi)+c_2-c_1=q_{12}A_{21}.$$

Умножимъ обѣ части этого уравненія на $csn_{21}z'ds_{12}$ и проинтегрируемъ на протяженіи поверхности капли. Замѣтивъ, что $csn_{31}z'=0$ на наклонной плоскости и что слѣдовательно интегралы, распространенные на поверхность капли,

$$\int csn_{21}z'ds_{12}=0,\ \int z'csn_{21}z'ds_{12}=-V,$$

гдѣ V объемъ капли, получаемъ уравненіе:

$$g(\rho_1-\rho_2)V.sin\varphi=q_{12}\int A_{21}csn_{21}z'ds_{12}.$$

Отсюда, на основаніи уравненія (7),

$$g(\rho_1-\rho_2)V.sin\varphi=q_{12}\int csm_{12}z'dl.$$

Называя черезъ k внѣшнее направленіе линіи, проведенной въ нѣкоторой точкѣ контура $\int dl$ перпендикулярно къ его элементу по наклонной плоскости, а черезъ i уголъ прикосновенія поверхности капли къ этой плоскости, имѣемъ $csm_{12}z'=csicskz'$, и

$$g(\rho_1-\rho_2)V.sin\varphi=q_{12}csi.\int cskz'dl.$$

А такъ какъ, на основаніи уравненій (7), $\int cskz'dl=0$, то слѣдовательно

(44) $$g(\rho_1-\rho_2)V.sin\varphi=0.$$

Отсюда заключаемъ, что капля жидкости, отличающейся своею плотностью отъ плотности окружающаго вещества, не можетъ находиться въ равновѣсіи на гладкой наклонной плоскости. Предъидущее уравненіе можетъ быть удовлетворено лишь допущеніемъ $sin\varphi=0$, $\varphi=0$; т. е. жидкая капля можетъ лежать или висѣть только на горизонтальной плоскости.

Выводъ этотъ вытекаетъ изъ допущенія постояннаго угла прикосновенія, что, въ свою очередь, есть слѣдствіе предположеннаго выше (см. § 9) нормальнаго дѣйствія стѣнки на прилегающія къ ней частицы поверхностнаго слоя жидкостей. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ предположеніи

$$q_{12} csm_{12} z' + (q_{13} - q_{23}) cskz' = 0,$$

$$q_{12} \int csm_{12} z' dl = (q_{23} - q_{13}) \int cskz' dl = 0.$$

Но если допустить (§ 12) возможность тангенціальнаго дѣйствія u_{123}, которое, по направленію k, оказываетъ вещество наклонной плоскости на прилежащія частицы поверхностнаго слоя $\int ds_{12}$, то

$$q_{12} csm_{12} z' + (q_{13} - q_{23}) cskz' + u_{123} cskz' = 0,$$

слѣдовательно

$$q_{12} \int csmz' dl = -\int u_{123} cskz' dl.$$

Правая часть этого равенства можетъ не равняться нулю, но для этого необходимо, чтобы u_{123} было величиною перемѣнною. Называя въ такомъ предположеніи $P = -\int u_{123} cskz' dl$, получаемъ уравненіе

$$g(\rho_1 - \rho_2) V.sin\varphi = P.$$

Итакъ, чтобы объяснить равновѣсіе капли на гладкой наклонной плоскости, слѣдуетъ допустить тангенціяльное, перемѣнное по величинѣ, дѣйствіе вещества наклонной плоскости на прилегающія къ ней частицы. Уголъ прикосновенія опредѣляется въ этомъ случаѣ изъ слѣдующаго уравненія

$$csi = \frac{q_{23} - q_{13} - u_{123}}{q_{12}}.$$

Слѣдовательно, когда жидкая капля находится въ равновѣсіи на наклонной плоскости, то уголъ прикосновенія имѣетъ по контуру поверхности величину перемѣнную.

22. Вообразимъ каплю жидкости (1), находящуюся въ равновѣсіи на боковой поверхности твердаго тѣла (3) цилиндрической формы и окруженную другою жидкостью (2). Пусть нижнее направленіе образующей цилиндра составляетъ съ отвѣсною линіею уголъ $90^0-\varphi$. Взявъ въ новой системѣ координатъ ось y' въ горизонтальномъ направленіи, а ось z' направивъ внизъ по образующей цилиндра, будемъ имѣть

$$z=z'sin\varphi+x'cs\varphi,$$

и, слѣдовательно, для поверхности капли,

$$g(\rho_2-\rho_1)(z'sin\varphi+x'cs\varphi)+c_2-c_1=q_{12}A_{21}.$$

Умножимъ обѣ части этого уравненія на $csn_{21}z'ds_{12}$ и проинтегрируемъ на протяженіи поверхности $\int ds_{12}$. Замѣтивъ далѣе, что $csnz'=0$ на всей боковой поверхности цилиндра и обозначивъ объемъ капли черезъ V, найдемъ, что

$$g(\rho_1-\rho_2)V.sin\varphi=q_{12}\int csm_{12}z'dl.$$

Если уголъ i прикосновенія поверхности капли съ поверхностью твердаго тѣла имѣетъ на контурѣ постоянную величину, то интегралъ въ правой части послѣдняго уравненія равенъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ черезъ k внѣшнее направленіе линіи, касательной къ цилиндру и перпендикулярной къ контуру въ какой нибудь его точкѣ, имѣемъ $csm_{12}z'=csi\ cskz'$, и

$$\int csm_{12}z'dl=csi.\int cskz'dl,$$

или, на основаніи уравненія (7),

$$\int csm_{12}z'dl=csi\int A_{13}csn_{13}z'ds_{13},$$

гдѣ послѣдній интегралъ распространяется на часть цилиндрической поверхности, смоченную каплею. Такъ какъ на этой поверхности $csnz'=0$, то $\int A_{13}csn_{13}z'ds_{13}=0$. Итакъ, при постоянномъ углѣ прикосновенія i,

(45) $$g(\rho_1-\rho_2)V.sin\varphi=0.$$

Чтобы это уравненіе было удовлетворено, необходимо, чтобы $\varphi=0$, т. е. цилиндръ долженъ быть помѣщенъ горизонтально. На боковой поверхности наклоненнаго цилиндра жидкая капля не можетъ удержаться въ равновѣсіи.

Если же примемъ дѣйствіе вещества (3) на частицы поверхностнаго слоя при $\int ds_{12}$ имѣющимъ тангенціяльную составляющую, то будемъ въ состояніи объяснить и равновѣсіе капли на поверхности наклоннаго цилиндра. Но величина u_{123} этой составляющей должна быть перемѣнною по контуру капли. Слѣдовательно и уголъ прикосновенія i капли, находящейся въ равновѣсіи на боковой поверхности наклоннаго цилиндра, долженъ имѣть на контурѣ перемѣнную величину *).

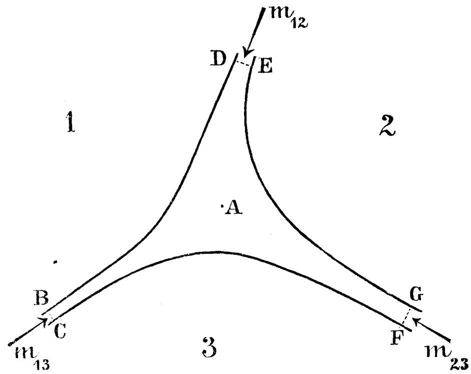
III.

Равновѣсіе плавающихъ тѣлъ.

23. Представимъ себѣ три жидкости (1), (2) и (3), находящіяся въ равновѣсіи, и положимъ, что поверхности, раздѣляющія ихъ, встрѣчаются на одной линіи $\int dl_{123}$. Элементы поверхностей, раздѣляющихъ жидкости, назовемъ соотвѣтственно черезъ ds_{12}, ds_{23}, ds_{31}. При каждой изъ поверхностей $\int ds_{12}$, $\int ds_{23}$, $\int ds_{31}$ представляемъ себѣ слой изъ частицъ обѣихъ прилежащихъ жидкостей, имѣющій постоянную толщину на замѣтныхъ разстояніяхъ отъ линіи $\int dl_{123}$. Вблизи послѣдней находится кольцеобразное пространство, наполненное частицами всѣхъ трехъ жидкостей, находящимися въ особыхъ условіяхъ равновѣсія. Въ точкѣ M на линіи $\int dl_{123}$ вообразимъ нормальную къ ней плоскость. Пусть фигура

*) Въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ о капиллярности разсматривается случай капли, находящейся въ равновѣсіи между двумя наклонными плоскостями. Линія пересѣченія послѣднихъ принимается горизонтальною. Необходимость такаго допущенія, при постоянномъ углѣ i, явствуетъ изъ уравненія (45). См. *Poisson*, Nouvelle théorie, p. 250.

BDEGF представляетъ на ней сѣченіе поверхностей, ограничивающихъ помянутое кольцеобразное пространство. *BC*, *ED*, *FG* представляютъ поперечныя сѣченія, за предѣлами которыхъ поверхностные слои имѣютъ уже постоянную толщину. Чтобы изслѣдовать условія равновѣсія тѣхъ частицъ, которыя заключены внутри кольцевидной части пространства, коей



Фиг. 2.

сѣченіе есть *BDEGF*, разсмотримъ весьма малый цилиндръ, имѣющій основаніемъ эту фигуру, а высотою элементъ dl_{123}. Согласно основнымъ гипотезамъ теоріи, на стороны цилиндра $DE \times dl_{123}$, $GF \times dl_{123}$, $CB \times dl_{123}$ дѣйствуютъ силы q_{12}, q_{23}, q_{31} по направленіямъ m_{12}, m_{23} m_{31} линій, перпендикулярныхъ къ dl_{123} и касательныхъ къ поверхностямъ $\int ds_{12}$, $\int ds_{23}$, $\int ds_{31}$. Что касается другихъ силъ, дѣйствующихъ на частицы разсматриваемаго цилиндра, то 1) допустимъ, что давленіе на основанія цилиндра на столько незначительно, что не вліяетъ на его равновѣсіе и 2) позволимъ себѣ пренебречь вліяніемъ тяжести вслѣдствіе весьма малой массы внутри цилиндра и внѣшними гидростатическими давленіями вслѣдствіе весьма малаго протяженія линій *DB*, *EG*, *FC*. Условія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на частицы внутри цилиндра, выражаются поэтому уравненіемъ:

(46) $$q_{12} csm_{12}x + q_{23} csm_{23}x + q_{31} csm_{31}x = 0,$$

гдѣ x означаетъ направленіе произвольной линіи.

Условія эти совпадаютъ съ тѣми, коимъ подлежитъ равновѣсіе трехъ силъ q_{12}, q_{23}, q_{31}, дѣйствующихъ на матеріальную точку. Если назовемъ углы (m_{31}, m_{12}), (m_{12}, m_{23}), (m_{23}, m_{31}) черезъ i_1, i_2, i_3, то условія эти представлены будутъ въ уравненіяхъ:

$$(46)\qquad \frac{q_{12}}{sini_3}=\frac{q_{23}}{sini_1}=\frac{q_{31}}{sini_2};\ i_1+i_2+i_3=360^0.$$

Уравненія эти показываютъ, между прочимъ, что изъ линій q_{12}, q_{23}, q_{31}, можно составить треугольникъ, въ которомъ противъ этихъ сторонъ лежатъ соотвѣтственно углы дополняющіе i_3, i_1, i_2, до 180^0 *).

Чтобы равновѣсіе трехъ жидкостей было возможно, необходимо, чтобы наибольшее изъ трехъ сцѣпленій q_{12}, q_{23}, q_{31} было менѣе суммы двухъ остальныхъ. При выполненіи этого условія можно по даннымъ величинамъ q_{12}, q_{23}, q_{31} опредѣлить углы i_1, i_2, i_3 изъ уравненій (46). Мы видимъ, что углы эти для каждыхъ трехъ данныхъ жидкостей имѣютъ постоянныя величины. Если же наибольшая изъ силъ q болѣе или равна суммѣ двухъ остальныхъ, то равновѣсіе невозможно. Капля одной изъ такихъ жидкостей не можетъ плавать надъ поверхностью, раздѣляющею двѣ другія жидкости. Можетъ, напротивъ, случиться, что такая капля расплывется надъ этою поверхностью и покроетъ ее весьма тонкимъ слоемъ.

24. Вообразимъ каплю жидкости (1), плавающую надъ поверхностью, раздѣляющею жидкости (2) и (3). Положимъ, что поверхность эта на нѣкоторомъ разстояніи вокругъ капли становится горизонтальною плоскостью, которую и примемъ за плоскость xy. Для большей опредѣленности разсужденія предположимъ что капля вся находится ниже горизонтальнаго уровня. На основаніи уравненій параграфа 10-го, имѣемъ

$$p_1=g\rho_1 z+c_1,\ p_2=g\rho_2 z+c_2,\ p_3=g\rho_3 z+c_3$$

внутри каждой изъ трехъ жидкостей, и

$$p_2-p_1=q_{12}A_{21},\ p_1-p_3=q_{13}A_{13},\ p_3-p_1=q_{23}A_{32}$$

---

*) Теорема эта принадлежитъ *Neumann*'у и была изложена въ диссертаціи *Du Bois Raymond*'a („De aequilibrio fluidorum“, 1859, стр. 16, Problema III).

на каждой изъ трехъ разсматриваемыхъ поверхностей $\int ds_{12}$, $\int ds_{13}$ и $\int ds_{23}$. Отсюда выводимъ уравненія этихъ поверхностей:

$$
\begin{aligned}
&g(\rho_2-\rho_1)z+c_2-c_1=q_{12}A_{21},\\
(47)\qquad &g(\rho_1-\rho_3)z+c_1-c_3=q_{13}A_{13},\\
&g(\rho_3-\rho_2)z+c_3-c_2=q_{23}A_{32}.
\end{aligned}
$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $csn_{21}zds_{12}$, второе на $csn_{13}zds_{13}$, третье на $csn_{32}zds_{23}$, проинтегрируемъ последнее на протяженіи кривой части поверхности $\int ds_{23}$, а первыя два на протяженіи тѣхъ поверхностей, къ которымъ они относятся. Сложивъ полученныя уравненія, находимъ:

$$
\begin{aligned}
&g(\rho_2-\rho_1)\int zcsn_{21}zds_{12}+g(\rho_1-\rho_3)\int zcsn_{13}zds_{13}+\\
&+g(\rho_3-\rho_2)\int zcsn_{32}zds_{23}+(c_2-c_1)\int csn_{21}zds_{12}+\\
(48)\qquad &+(c_1-c_3)\int csn_{13}zds_{13}+(c_3-c_2)\int csn_{32}zds_{23}=\\
&q_{21}\int A_{21}csn_{21}zds_{12}+q_{13}\int A_{13}csn_{13}zds_{13}+q_{23}\int A_{32}csn_{32}zds_{23}.
\end{aligned}
$$

Правая часть этого уравненія на основаніи уравненія (7) можетъ быть преобразована въ слѣдующее выраженіе:

$$\int(q_{12}csm_{12}z+q_{13}csm_{13}z+q_{23}csm_{23}z)\,dl_{123},$$

которое вслѣдствіе уравненія (46) равно нулю. Равна также нулю и сумма трехъ послѣднихъ членовъ въ лѣвой части уравненія (48). Въ самомъ дѣлѣ, при сдѣланномъ нами выборѣ плоскости xy, имѣемъ $c_2=c_3$. Остающіеся два члена изъ числа разсматриваемыхъ будутъ поэтому

$$
\begin{aligned}
&(c_2-c_1)\int csn_{21}zds_{12}+(c_1-c_2)\int csn_{13}zds_{13}=\\
&(c_2-c_1)\int csn_{21}zds_{12}+(c_2-c_1)\int csn_{31}zds_{13}=\\
&(c_2-c_1)\left[\int csn_{21}zds_{12}+\int csn_{31}zds_{13}\right].
\end{aligned}
$$

Послѣднее выраженіе равно нулю потому, что сумма обоихъ интеграловъ, распространенныхъ въ совокупности на замкнутую поверхность, уничтожается. Итакъ уравненіе (48) принимаетъ слѣдующій упрощенный видъ

$$g(\rho_2-\rho_1)\int zcsn_{21}zds_{12}+g(\rho_1-\rho_3)\int zcsn_{13}zds_{13}+$$
$$+g(\rho_3-\rho_2)\int zcsn_{32}zds_{23}=0.$$

Перемѣнивъ въ немъ порядокъ членовъ и вспоминая, что

$$csn_{21}z=-csn_{12}z;\; csn_{13}z=-csn_{31}z;\; csn_{32}z=-csn_{23}z,$$

находимъ уравненіе:

(49)
$$g\rho_3\left(\int zcsn_{32}zds_{23}+\int zcsn_{31}zds_{13}\right)+g\rho_1\left(\int zcsn_{12}zds_{12}+\int zcsn_{13}zds_{13}\right)-$$
$$-g\rho_2\left(\int zcsn_{12}zds_{12}+\int zcsn_{32}zds_{23}\right)=0.$$

Назовемъ объемъ капли (1) черегъ V_1, объемъ той части жидкости (3), которая находится ниже уровня, черезъ V_3, и наконецъ весь объемъ жидкости (2), вытѣсненной изъ подъ уровня, черезъ $V_2=V_1+V_3$. Очевидно, что

$$\int zcsn_{32}zds_{23}+\int zcsn_{31}zds_{13}=V_3,$$
$$\int zcsn_{12}zds_{12}+\int zcsn_{13}zds_{13}=V_1,$$
$$\int zcsn_{12}zds_{12}+\int zcsn_{32}zds_{23}=V_2.$$

Вслѣдствіе этого получаемъ изъ (49).

(50)
$$g\rho_2 V_2=g\rho_1 V_1+g\rho_3 V_3,$$

откуда заключаемъ, что вѣсъ жидкости, вытѣсненной изъ подъ горизонтальнаго уровня, равенъ суммѣ вѣсовъ тѣхъ жидкастей, которыми первая замѣнена.

Хотя въ предъидущемъ было предположено, что капля (1) вся лежитъ ниже уровня поверхности $\int ds_{23}$, но съ помощью указанныхъ пріемовъ легко изслѣдовать каждый изъ остальныхъ случаевъ, которые можетъ представить положеніе капли относительно горизонтальной плоскости xy. Во всѣхъ этихъ случаяхъ общій вѣсъ жидкостей, вытѣсненныхъ вблизи горизонтальнаго уровня, равенъ общему вѣсу тѣхъ жидкостей, которыми прежнія замѣнены. Соотношеніе это представляетъ какъ бы обобщеніе Архимедова закона.

25. Умножимъ первое изъ ур—ій (47) на $(xcsn_{21}z - zcn_{21}x)ds_{12}$, второе на $(xcsn_{13}z - zcsn_{13}x)ds_{13}$, третье на $(xcsn_{32}z - zcs_{32}x)ds_{23}$. Проинтегрируемъ потомъ каждое уравненіе на протяженіи той поверхности къ которой оно относится, ограничиваясь для послѣдней поверхности кривою ея частью, и сложимъ полученныя уравненія. Находимъ

$$
(51)\qquad
\begin{aligned}
&g(\rho_2-\rho_1)\int(zxcsn_{21}z - z^2csn_{21}x)ds_{12} + \\
&+ g(\rho_1-\rho_3)\int(zxcsn_{13}z - z^2csn_{13}x)ds_{13} + \\
&+ g(\rho_3-\rho_2)\int(zxcsn_{32}z - z^2csn_{32}x)ds_{32} + \\
&+ (c_2-c_1)\int(xcsn_{21}z - zcsn_{21}x)ds_{12} + \\
&+ (c_1-c_3)\int(xcsn_{13}z - zcsn_{13}x)ds_{13} + \\
&+ (c_3-c_2)\int(xcsn_{32}z - zcsn_{32}x)ds_{32} = \\
&= q_{21}\int A_{21}(xcsn_{21}z - zcsn_{21}x)ds_{21} + \\
&+ q_{13}\int A_{13}(xcsn_{13}z - zcsn_{13}x)ds_{13} + \\
&+ q_{32}\int A_{32}(xcsn_{32}z - zcsn_{32}x)ds_{32}.
\end{aligned}
$$

На основаніи уравненія (8) правая часть уравненія (51) обращается въ выраженіе

$$
\begin{aligned}
&\int[x(q_{21}csm_{21}z + q_{13}csm_{13}z + q_{32}csm_{32}z) - \\
&z(q_{21}csm_{21}x + q_{13}csm_{13}x + q_{32}csm_{32}x)]dl_{123},
\end{aligned}
$$

которое, вслѣдствіе уравненій (46), обращается въ нуль.

При сдѣланномъ выше выборѣ плоскости xy величина $c_3 = c_2$, и потому послѣдній членъ лѣвой части уравненія (51) уничтожается. Вспоминая затѣмъ, что $csn_{21}z = -csn_{12}z$ и т. д., дадимъ суммѣ двухъ предпослѣднихъ членовъ выраженіе

$$
\begin{aligned}
&(c_2-c_1)[\int xcsn_{21}zds_{21} + \int xcsn_{31}zds_{31}] - \\
&(c_2-c_1)[\int zcsn_{21}xds_{21} + \int zcsn_{31}xds_{31}],
\end{aligned}
$$

изъ котораго усматриваемъ, что сумма этихъ двухъ членовъ также равна нулю. Упростивъ такимъ образомъ уравненіе (51), напишемъ его снова, измѣнивъ порядокъ членовъ

$$
\begin{aligned}
(52)\qquad & g\rho_1\left[\int zxcsn_{12}zds_{12}+\int zxcsn_{13}zds_{13}\right]+\\
& +g\rho_3\left[\int zxcsn_{31}zds_{31}+\int zxcsn_{32}zds_{32}\right]-\\
& -g\rho_2\left[\int zxcsn_{12}zds_{12}+\int zxcsn_{32}zds_{32}\right]-\\
& -g\rho_1\left[\int z^2csn_{12}xds_{12}+\int z^2csn_{13}xds_{13}\right]-\\
& -g\rho_3\left[\int z^2csn_{31}xds_{31}+\int z^2csn_{32}xds_{32}\right]+\\
& +g\rho_2\left[\int z^2csn_{12}xds_{12}+\int z^2csn_{32}xds_{32}\right]=0.
\end{aligned}
$$

Назовемъ теперь черезъ $\overline{x}_1$, $\overline{y}_1$, $\overline{z}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{y}_2$, $\overline{z}_2$, $\overline{x}_3$ $\overline{y}_3$, $\overline{z}_3$ координаты центра тяжести объемовъ V_1, V_2, V_3, и замѣтимъ, что

$$
\begin{aligned}
& \int zxcsn_{12}zds_{12}+\int zxcsn_{13}zds_{13}=V_1\overline{x}_1,\\
& \int zxcsn_{31}zds_{31}+\int zxcsn_{32}zds_{32}=V_3\overline{x}_3,\\
& \int zxcsn_{12}zds_{12}+\int zxcsn_{32}zds_{32}=V_2\overline{x}_2,\\
& \int z^2csn_{12}xds_{12}+\int z^2csn_{13}xds_{13}=0,\\
& \int z^2csn_{31}xds_{31}+\int z^2csn_{32}xds_{32}=0,\\
& \int z^2csn_{12}xds_{12}+\int z^2csn_{32}xds_{32}=0.
\end{aligned}
$$

Вслѣдствіе этихъ соотношеній уравненіе (52) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$
(53)\qquad \rho_2 V_2\overline{x}_2=\rho_1 V_1\overline{x}_1+\rho_3 V_3\overline{x}_3.
$$

Умножая первое изъ уравненій (47) на $(ycsn_{21}z-zcsn_{21}y)ds_{12}$, второе на $(ycsn_{13}z-zcsn_{13}y)ds_{13}$, третье на $(ycsn_{32}z-zcsn_{32}y)ds_{32}$, интегрируя и пользуясь вышеуказанными преобразованіями, докажемъ, что

$$
(54)\qquad \rho_2 V_2\overline{y}_2=\rho_1 V_1\overline{y}_1+\rho_3 V_3\overline{y}_3
$$

Если же умножимъ уравненія (47) соотвѣтственно на $(xcsn_{21}y - ycsn_{21}x)ds_{12}$ и т. д., то исполнивъ указанныя преобразованія, получимъ только тождество $0=0$, но не выведемъ никакаго новаго соотношенія. Изъ уравненій (53) и (54) слѣдуетъ, что центръ тяжести той части жидкости (2), которая вытѣснена изъ подъ горизонтальнаго уровня, лежитъ на одной вертикальной прямой съ общимъ центромъ тяжести тѣхъ жидкостей, которыми первая замѣнена.

Въ предъидущемъ было допущено, что капля (1) вся лежитъ ниже горизонтальнаго уровня. Но примѣняя вышеприведенныя преобразованія ко всѣмъ случаямъ, которые можетъ представить положеніе капли относительно уровня, убѣдимся, что всегда общій центръ тяжести жидкостей, вытѣсненныхъ вблизи уровня, лежитъ на одной отвѣсной линіи съ общимъ центромъ тяжести тѣхъ жидкостей, которыми первыя замѣнены.

26. Разсмотримъ дѣйствіе капиллярныхъ силъ на твердое тѣло (3), вполнѣ погруженное въ жидкость (1), понимая подъ капиллярнымъ дѣйствіемъ разность между дѣйствующими на поверхность тѣла силами и гидростатическими давленіями, которыя имѣли-бы мѣсто при отсутствіи силъ капиллярныхъ. Называя черезъ N_x, N_y, N_z проложенія на оси x, y, z равнодѣйствующей силы капиллярнаго дѣйствія, а черезъ M_x, M_y, M_z проложенія его равнодѣйствующей пары, имѣемъ (см. § 10):

$$
(55)\qquad
\begin{aligned}
N_x &= -\int (p_3 - p_1) csn_{31} x\, ds_{13},\\
N_y &= -\int (p_3 - p_1) csn_{31} y\, ds_{13},\\
N_z &= -\int (p_3 - p_1) csn_{31} z\, ds_{13},\\
M_x &= -\int (p_3 - p_1)(ycsn_{31} z - zcsn_{31} y)\, ds_{13}\\
M_y &= -\int (p_3 - p_1)(zcsn_{31} x - xcsn_{31} z)\, ds_{13}\\
M_z &= -\int (p_3 - p_1)(xcsn_{31} y - ycsn_{31} x)\, ds_{13}.
\end{aligned}
$$

Отсюда, на основаніи уравненій (16),

$$N_x = -q_{13}\int A_{31} csn_{31} x ds_{13},$$

$$N_y = -q_{13}\int A_{31} csn_{31} y ds_{13},$$

$$N_z = -q_{13}\int A_{31} csn_{31} z ds_{13},$$

$$M_x = -q_{13}\int A_{31}(ycsn_{31}z - zcsn_{31}y) ds_{13},$$

$$M_y = -q_{13}\int A_{31}(zcsn_{31}x - xcsn_{31}z) ds_{13},$$

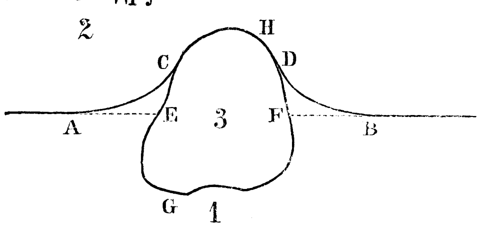
$$M_z = -q_{13}\int A_{31}(xcsn_{31}y - ycsn_{31}x) ds_{13}.$$

Такъ какъ интегралы эти распространены на замкнутую поверхность, то вслѣдствіе уравненій (7) и (8) они уничтожаются. Итакъ

$$N_x = N_y = N_z = M_x = M_y = M_z = 0,$$

т. е. капиллярныя силы не оказываютъ никакаго дѣйствія на тѣло, вполнѣ въ жидкость погруженное.

27. Опредѣлимъ капиллярное дѣйствіе жидкостей (1) и (2) на твердое тѣло, погруженное частью въ (1), частью во (2) жидкость. Поверхность, раздѣляющую обѣ жидкости, на нѣкоторомъ разстояніи отъ разсматриваемаго тѣла, примемъ горизонтальною и возьмемъ плоскость этого уровня за плоскость xy. Для большей опредѣленности разсужденія положимъ, что нижняя жидкость (1) вблизи поверхности тѣла (3) поднимается надъ горизонтальнымъ уровнемъ. Допустимъ также, что въ кривой части поверхности $\int ds_{12}$ около тѣла (3) не погружено никакое другое тѣло.



Фиг. 3.

Пусть чертежъ представляетъ сѣченіе разсматриваемой системы вертикальною плоскостью. Условимся на этотъ разъ обозначать черезъ ds элементъ поверхности тѣла (3), а черезъ n внѣшнее направленіе нормали къ нему. Капиллярное дѣйствіе приводится къ одной силѣ и одной вращающей парѣ; проложенія первой на оси x,

y, z назовемъ N_x, N_y, N_z, проложенія второй—M_x, M_y, M_z. Тогда на основаніи уравненій §§ 9 и 10, имѣемъ

$$
\begin{aligned}
&N_x = -\int(p_3-p_1)csnxds-\int(p_3-p_2)csnxds-r_{123}\int csnxdl_{123},\\
(56)\quad &N_y = -\int(p_3-p_1)csnyds-\int(p_3-p_2)csnyds-r_{123}\int csnydl_{123},\\
&N_z = -\int(p_3-p_1)csnzds-\int(p_3-p_2)csnzds-r_{123}\int csnzdl_{123},
\end{aligned}
$$

гдѣ въ правой части каждаго уравненія первый интегралъ распространенъ на часть поверхности $\int ds_{13}$, сѣченіе которой на чертежѣ представлено линіею EGF, а второй на остальную часть этой поверхности. Уравненія (56) можно видоизмѣнить слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{aligned}
&N_x = -\int(p_3-p_1)csn_{31}xds_{13}-\int(p_3-p_2)csn_{32}xds_{23}+\\
&\qquad+\int(p_2-p_1)csnxds-r_{123}\int csnxdl_{123},\\
(57)\quad &N_y = -\int(p_3-p_1)csn_{31}yds_{13}-\int(p_3-p_2)csn_{32}yds_{23}-\\
&\qquad-\int(p_2-p_1)csnyds-r_{123}\int csnydl_{123},\\
&N_z = -\int(p_3-p_1)csn_{31}zds_{13}-\int(p_3-p_2)csn_{32}zds_{23}-\\
&\qquad-\int(p_2-p_1)csnzds-r_{123}\int csnzdl_{123},
\end{aligned}
$$

гдѣ въ правой части каждаго интеграла третьи члены относятся къ той части поверхности твердаго тѣла, сѣченіе которой представлено на чертежѣ линіями CE, DF. Замѣчая далѣе, что $p_1=g\rho_1 z+c_1$, $p_2=g\rho_2 z+c_2$ и пользуясь уравненіями (16), находимъ

$$
\begin{aligned}
N_x &= -q_{13}\int A_{31}csn_{31}xds_{13}-q_{23}\int A_{32}csn_{32}xds_{23}+\\
&\quad+g(\rho_2-\rho_1)\int zcsnxds-r_{123}\int csnxdl_{123},\\
N_y &= -q_{13}\int A_{31}csn_{31}yds_{13}-q_{23}\int A_{32}csn_{32}yds_{23}+\\
&\quad+g(\rho_2-\rho_1)\int zcsnxds-r_{123}\int csnydl_{123},\\
N_z &= -q_{13}\int A_{31}csn_{31}zds_{13}-q_{23}\int A_{32}csn_{32}zds_{23}+\\
&\quad+g(\rho_2-\rho_1)\int zcsnzds-r_{123}\int csnzdl_{123},
\end{aligned}
$$

гдѣ третьи интегралы относятся къ упомянутой части $\int ds_{13}$, сѣченіе которой представлено на чертежѣ линіями CE, DF. Отсюда, вслѣдствіе уравненій (7)

$$N_x = -\int (q_{13} csm_{13} x + q_{23} csm_{23} x + r_{123} csnx) dl_{123} +$$

$+ g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsnxds$ и т. д., а затѣмъ, въ силу уравненій (13),

$$(58)\qquad \begin{aligned} N_x &= q_{12}\int csm_{12} x dl_{123} + g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsnxds, \\ N_y &= q_{12}\int csm_{12} y dl_{123} + g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsnyds, \\ N_z &= q_{12}\int csm_{12} z dl_{123} + g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsnzds. \end{aligned}$$

Написавъ теперь уравненіе поверхности $\int ds_{12}$

$$g(\rho_2 - \rho_1) z = q_{12} A_{21},$$

умноживъ обѣ части его послѣдовательно на

$$csn_{21} x ds_{12},\ csn_{21} y ds_{12},\ csn_{21} z ds_{12}$$

и интегрируя на протяженіи кривой части этой поверхности, находимъ, что

$$q_{12}\int csm_{12} x dl_{123} = q_{12}\int A_{21} csn_{21} x ds_{12} = g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsn_{21} x ds_{12} \text{ и т. д.}$$

Поэтому уравненія (58) могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$(59)\qquad \begin{aligned} N_x &= g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsn_{21} x ds_{12} + g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsnxds, \\ N_y &= g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsn_{21} y ds_{12} + g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsnyds, \\ N_z &= g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsn_{21} z ds_{12} + g(\rho_2 - \rho_1)\int zcsnzds, \end{aligned}$$

гдѣ каждый изъ интеграловъ имѣетъ выше указанные предѣлы. Называя черезъ V объемъ той части жидкости (1), которая дѣйствіемъ капиллярныхъ силъ поднята выше горизонтальнаго уровня (сѣченіе этого объема представлено на чертежѣ фигурами ACE, BDF), находимъ изъ уравненій (59):

$$N_x = 0,\ N_y = 0,\ N_z = g(\rho_1 - \rho_2) V.$$

Примѣняя къ опредѣленію M_x, M_y, M_z соображенія, предпосланныя уравненіямъ (56), (57), находимъ

$$M_x = -q_{13}\int A_{31}(ycsn_{31}z - zcsn_{31}y)\,ds_{13} -$$
$$-q_{23}\int A_{32}(ycsn_{32}z - zcsn_{32}y)\,ds_{23} +$$
$$+g(\rho_2 - \rho_1)\int(zycsnz - z^2csny)\,ds - r_{123}\int(ycsnz - zcsny)\,dl_{123}, \text{ и т. д.},$$

а отсюда, на основаніи уравненій (8),

$$M_x = -\int[y(q_{13}csm_{13}z + q_{23}csm_{23}z + rcsnz) -$$
$$-z(q_{13}csm_{13}y + q_{23}csm_{23}y + zcsny)]\,dl_{123} +$$
$$+g(\rho_2 - \rho_1)\int(zycsnz - z^2csny)\,ds, \text{ и т. д.}$$

Вспомнивъ затѣмъ уравненія (13), получаемъ

$$M_x = q_{12}\int(ycsm_{12}z - zcsm_{12}y)\,dl_{123} +$$
(61)
$$+g(\rho_2 - \rho_1)\int(zycsnz - z^2scny)\,ds, \text{ и т. д.}$$

Съ помощью же уравненія поверхности $\int ds_{12}$ заключаемъ отсюда:

$$M_x = g(\rho_2 - \rho_1)\int(zycsnz - z^2csny)\,ds,$$
(62)
$$M_y = g(\rho_2 - \rho_1)\int(z^2csnx - zxcsnz)\,ds,$$
$$M_z = g(\rho_2 - \rho_1)\int(zxcsny - zycsnx)\,ds,$$

гдѣ интегралы распространены уже не только на поверхность, сѣченіе которой представлено линіями CE, DF, какъ послѣдніе члены уравненій (61), но на всю кривую поверхность, ограничивающую объемъ V. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ означаютъ координаты центра тяжести этого объема. Тогда, вслѣдствіе уравненій (62),

(63) $$M_x = g(\rho_1 - \rho_2)V\bar{y},\quad M_y = -g(\rho_1 - \rho_2)V\bar{x},\quad M_z = 0.$$

Изъ уравненій (60) и (63) заключаемъ, что капиллярное дѣйствіе испытываемое тѣломъ можетъ быть замѣнено одною отвѣсною силою $g(\rho_1 - \rho_2).V$, приложенною къ центру тяжести объема поднятой надъ уровнемъ жидкости.

Если же поверхность жидкости (1) вблизи поверхности тѣла опускается, то, называя черезъ V объемъ той части жидкости (2), которая лежитъ ниже уровня, а черезъ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ координаты центра тяжести этого объема, покажемъ, что

$$(64)\qquad \begin{aligned} &N_x=0,\ M_x= -g(\rho_1-\rho_2)V.\bar{y} \\ &N_y=0,\ M_y= +g(\rho_1-\rho_2)V.\bar{x} \\ &N_z= -g(\rho_1-\rho_2)V,\ M_z=0, \end{aligned}$$

такъ что въ этомъ случаѣ капиллярное дѣйствіе имѣетъ направленіе, противуположное силѣ тяжести.

28. Для опредѣленія условій равновѣсія твердаго тѣла (3), свободно плавающаго надъ поверхностью, которая раздѣляетъ двѣ жидкости (1) и (2) имѣетъ плоскую горизонтальную часть на нѣкоторомъ разстояніи вокругъ этого тѣла, назовемъ черезъ P_x, P_y, P_z проложенія на оси координатъ равнодѣйствующей силы гидростатическихъ давленій, испытываемыхъ поверхностью тѣла (3), а черезъ Q_x, Q_y, Q_z проложенія равнодѣйствующей ихъ пары. Обозначая черезъ V_3 объемъ всего тѣла (3), черезъ V_1 нижнюю, а черезъ V_2 верхнюю его часть, отсѣченныя продолженіемъ уровня, черезъ ρ_3 плотность тѣла (3), имѣемъ слѣдующія условія его равновѣсія:

$$(65)\qquad P_x+N_x=0,\ P_y+N_y=0,\ P_z+N_z+g\rho_3V_3=0,$$

$$(66)\ Q_x+M_x+g\rho_3V_3\bar{y}_3=0,\ Q_y+M_y-g\rho_3V_3\bar{x}_3,\ Q_z+M_z=0,$$

если черезъ

$$\bar{x}_1,\ \bar{y}_1,\ \bar{z}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{y}_2,\ \bar{z}_2,\ \bar{x}_3,\ \bar{y}_3,\ \bar{z}_3$$

обозначены координаты центра тяжести объемовъ V_1, V_2, V_3.

Такъ какъ

$$P_x=0,\ P_y=0,\ P_z= -g\rho_1V_1-g\rho_2V_2,$$

то изъ уравненій (65) первыя два удовлетворяются тождественно. Изъ третьяго уравненія

$$g(\rho_1-\rho_2)V-g\rho_1 V_1-g\rho_2 V_2+g\rho_3 V_3=0$$

въ случаѣ, когда поверхность $\int ds_{12}$ возвышается надъ уровнемъ, и

$$-g(\rho_1-\rho_2)V-g\rho_1 V_1-g\rho_2 V_2+g\rho_3 V_3=0$$

въ противномъ случаѣ. Видоизмѣняя и сокращая эти уравненія, получаемъ

(67) $$\rho_1 V+\rho_3 V_3=\rho_2 V+\rho_1 V_1+\rho_2 V_2$$

въ первомъ случаѣ, и

(68) $$\rho_2 V+\rho_3 V_3=\rho_1 V+\rho_1 V_1+\rho_2 V_2,$$

во второмъ. Отсюда слѣдуетъ, что, въ случаѣ равновѣсія плавающаго тѣла, сумма массъ, вытѣсненныхъ вблизи горизонтальнаго уровня, равна суммѣ тѣхъ массъ, которыми первыя замѣнены. Предложеніе это есть какъ-бы обобщеніе Архимедова закона *).

29. Замѣтимъ, что въ уравненіяхъ (66)

$$Q_z=0,\ Q_y=g\rho_1 V_1\bar{x}_1+g\rho_2 V_2\bar{x}_2,\ Q_x=-g\rho_1 V_1\bar{y}_1-g\rho_2 V_2\bar{y}_2.$$

Поэтому первое и второе изъ уравненія (66) даютъ

---

*) *Laplace*, Méc. Cél. T. IV. Supplément, p. 34. Доказательство, которое даетъ Laplace теоремамъ, выражаемымъ уравненіями (63) и (64), не имѣетъ математическаго характера. Повторяя это доказательство Пуассонъ (Nouvelee théorie, p. 168) указываетъ на важность имѣть выводъ этой теоремы, основанный на общихъ уравненіяхъ теоріи капиллярности. Впрочемъ самъ Пуассонъ даетъ такой выводъ только для частнаго случая,—предполагая что погруженное тѣло ограничено поверхностью вращенія, коей ось помѣщена вертикально (Nouvelle théorie, p. 161—168).—*Du Bois-Reymond* въ своей диссертаціи (De aequilibrio fluidorum, 1859), касаясь этого предмета, даетъ общія формулы и теоремы, очевидно несправедливыя (p. 17, Theorema IV).

$$\rho_1 V\overline{x}_1 + \rho_3 V_3\overline{x}_3 = \rho_1 V_1\overline{x}_1 + \rho_2 V_2\overline{x}_2 + \rho_2 V\overline{x},$$

(69)

$$\rho_1 V\overline{y}_1 + \rho_3 V_3\overline{y}_3 = \rho_1 V_1\overline{y}_1 + \rho_2 V_2\overline{y}_2 + \rho_2 V\overline{y},$$

въ случаѣ, когда поверхность $\int ds_{12}$ возвышается надъ уровнемъ. Въ противномъ же случаѣ:

$$\rho_2 V\overline{x} + \rho_3 V_3\overline{x}_3 = \rho_1 V_1\overline{x}_1 + \rho_2 V_2\overline{x}_2 + \rho_1 V\overline{x},$$

(70)

$$\rho_2 V\overline{y} + \rho_3 V_3\overline{y}_3 = \rho_1 V_1\overline{y}_1 + \rho_2 V_2\overline{y}_2 + \rho_3 V\overline{y}.$$

Что касается перваго изъ уравненій (61), то оно тождественно удовлетворяется.

Изъ уравненій (69) и (70) заключаемъ, что общій центръ тяжести массъ, вытѣсненныхъ вблизи уровня плавающимъ тѣломъ, лежитъ на одной отвѣсной линіи съ общимъ центромъ тяжести тѣхъ массъ, которыми первыя замѣнены.