Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 17

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Es sei p eine Primzahl und sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung vom Grad p. Zeige, dass die Galoisgruppe von L über K entweder genau eine oder genau zwei Untergruppen besitzt. Wie viele Zwischenkörper besitzt die Körpererweiterung, wann ist die Erweiterung galoissch?

Aufgabe 17.2. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$. Zeige, dass die Zuordnung

$$H \longmapsto \operatorname{Fix}(H),$$

die einer Untergruppe ihren Fixkörper zuordnet, stets injektiv ist.

Aufgabe 17.3. Sei p eine Primzahl. Erstelle Inklusionsdiagramme für die Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ für $n = 4, 6, 8, 12$. Wie sehen die zugehörigen Inklusionsdiagramme der Untergruppen der Galoisgruppe aus?

Aufgabe 17.4. Es sei $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe

$$\operatorname{Gal}(L|K) \cong (\mathbb{Z}/(p))^n,$$

wobei p eine Primzahl sei. Bestimme die Untergruppen der Galoisgruppen und skizziere ein Inklusionsdiagramm für die Untergruppen, die Zwischenkörper und die Potenzmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 17.5. Bestimme die Nullstellen von $X^6 + 108$ in Beispiel 17.9 und beschreibe, wie die Automorphismen auf diesen Nullstellen wirken. Welche Nullstellen sind konjugiert?

Aufgabe 17.6. Bestimme die Zwischenkörper in Beispiel 17.9.

Aufgabe 17.7.*

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen mit den zugehörigen Fixkörpern $K_1 = \operatorname{Fix}(H_1)$ und $K_2 = \operatorname{Fix}(H_2)$. Zeige, dass der Durchschnitt $K_1 \cap K_2$ gleich dem Fixkörper zu H ist, wobei H die von H_1 und H_2 erzeugte Untergruppe bezeichnet (das ist die kleinste Untergruppe von G, die sowohl H_1 als auch H_2 enthält).

Aufgabe 17.8. Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Beschreibe den Frobeniushomomorphismus als Abbildung von $\mathbb{F}_q^\times \cong \mathbb{Z}/(q-1)$ in sich selbst. Woran erkennt man nach dieser Übersetzung die Bijektivität des Frobenius? Wie sehen die Iterationen aus? Wie kann man die Fixelemente zu einer solchen Iteration als Kern beschreiben?

Aufgabe 17.9. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_9$ mit 9 Elementen. Für welche Untergruppen $H \subseteq \mathbb{F}_9^\times$ ist $H \cup \{0\}$ ein Körper, für welche nicht?

Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie genau zwei Normalteiler enthält (nämlich sich selbst und die triviale Gruppe).

Aufgabe 17.10. Es sei $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung derart, dass die Galoisgruppe einfach sei. Zeige, dass ein Zwischenkörper M, $K \subseteq M \subseteq L$, nur dann galoissch über K ist, wenn er gleich K oder L ist.

Aufgabe 17.11. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G eine Untergruppe besitzt, die kein Normalteiler ist.

Aufgabe 17.12. Es seien $K \subseteq L$ und $R \subseteq S$ Galoiserweiterungen derart, dass ihre Galoisgruppen $\operatorname{Gal}(L|K)$ und $\operatorname{Gal}(S|R)$ isomorph sind. Stifte eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen den Zwischenkörper der ersten und den Zwischenkörpern der zweiten Erweiterung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.13. (3 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung und sei M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Für alle $\psi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ ist $\psi(M) = M$.
(2) Die Untergruppe $\operatorname{Gal}(L|M) \subseteq \operatorname{Gal}(L|K)$ ist nur zu sich selbst konjugiert.

Aufgabe 17.14. (3 Punkte)

Zeige, dass $X^4-5 \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}][X]$ irreduzibel ist. Zeige, dass die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q}[\mathrm{i}] \subseteq \mathbb{Q}[\mathrm{i}][X]/\left(X^4-5\right)$$

galoissch ist, bestimme die Galoisgruppe und sämtliche Zwischenkörper.

Aufgabe 17.15. (3 Punkte)

Es sei S_3 die Gruppe der bijektiven Abbildungen auf einer dreielementigen Menge. Bestimme die Untergruppen von S_3 und welche zueinander konjugiert sind. Welche Untergruppen sind Normalteiler? Man gebe eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe S_3 an und bestimme die zu den Untergruppen gehörenden Zwischenkörper.

Aufgabe 17.16. (3 Punkte)

Sei G eine zyklische Gruppe. Zeige, dass G genau dann einfach ist, wenn G endlich und ihre Ordnung eine Primzahl ist.

Aufgabe 17.17. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $F \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom. Es sei vorausgesetzt, dass die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L von F kommutativ sei. Zeige, dass dann $L \cong K[X]/(F)$ ist.

Abbildungsverzeichnis