Die Dimensionsformel

Die folgende Aussage heißt *Dimensionsformel*.

Satz 25.1. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{kern}\varphi) + \dim(\operatorname{bild}\varphi).$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Definition 25.2. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang}\varphi := \dim(\operatorname{bild}\varphi)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{kern}\varphi) + \operatorname{rang}\varphi$$

ausdrücken.

Beispiel 25.3. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Lösungsraum ist

$$L = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

und dies ist der Kern von φ. Der Kern ist also eindimensional und daher ist die Dimension des Bildes nach der Dimensionsformel gleich 2.

Korollar 25.4. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.1 und Lemma 24.14. □

Verknüpfung von linearen Abbildungen und Matrizen

Lemma 25.5. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K mit Basen*

$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m\,.$$

Es seien

$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) \;=\; (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)).$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildungskette

$$U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W\,.$$

Bezüglich der Basen werde ψ durch die $n \times p$-Matrix $B = (b_{jk})_{jk}$ und φ durch die $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ beschrieben. Die Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ wirkt auf einen Basisvektor u_k folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(u_k) &= \varphi(\psi(u_k)) \\
&= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \varphi(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) w_i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{ik} w_i .$$

Dabei sind diese Koeffizienten $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ gerade die Einträge in der Produktmatrix $A \circ B$. $\square$

Daraus folgt beispielsweise, dass das Produkt von Matrizen assoziativ ist.

Invertierbare Matrizen

Definition 25.6. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

gibt.

Definition 25.7. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M. Man schreibt dafür

$$M^{-1} .$$

Lineare Abbildungen und Basiswechsel

Lemma 25.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bezüglich der Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. $\square$

Korollar 25.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{u}}(\varphi) = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 25.8. □

Definition 25.10. Zwei quadratische Matrizen $M, N \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix B mit $M = BNB^{-1}$ gibt.

Nach Korollar 25.9 sind zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ die beschreibenden Matrizen bezüglich zweier Basen ähnlich zueinander.

Eigenschaften von linearen Abbildungen

Lemma 25.11. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.*
(2) *φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.*
(3) *Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spaltenvektoren von M. (1). Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i,$$

wobei s_{ij} der i-te Eintrag des j-ten Spaltenvektors ist. Daher ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij}\right) w_i .$$

Dies ist genau dann 0, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij} = 0$ für alle i ist, und dies ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = 0.$$

Dafür gibt es ein nichttriviales (Lösungs-)Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist. (2). Siehe Aufgabe 25.3. (3). Sei $n = m$. Die erste Äquivalenz folgt aus (1) und (2). Wenn φ bijektiv ist, so gibt es die (lineare) Umkehrabbildung φ^{-1} mit

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Id}_W \text{ und } \varphi^{-1} \circ \varphi = \operatorname{Id}_V .$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu φ^{-1}. Die Matrix zur Identität ist die Einheitsmatrix. Nach Lemma 25.5 ist daher

$$M \circ N = E_n = N \circ M$$

und somit ist M invertierbar. Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen. $\square$

Auffinden der inversen Matrix

Verfahren 25.12. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Seite zunächst die Matrix M steht und in der rechten Seite die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Seite die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Seite die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2)\,.$$

Wenn man das Inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist.) der linken Seite mit der rechten Seite multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 = M_1^{-1}E^{-1}EM_2 = M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$N = E_n^{-1}N = M^{-1}E_n = M^{-1}.$$

Beispiel 25.13. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 25.12 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$

Abbildungsverzeichnis