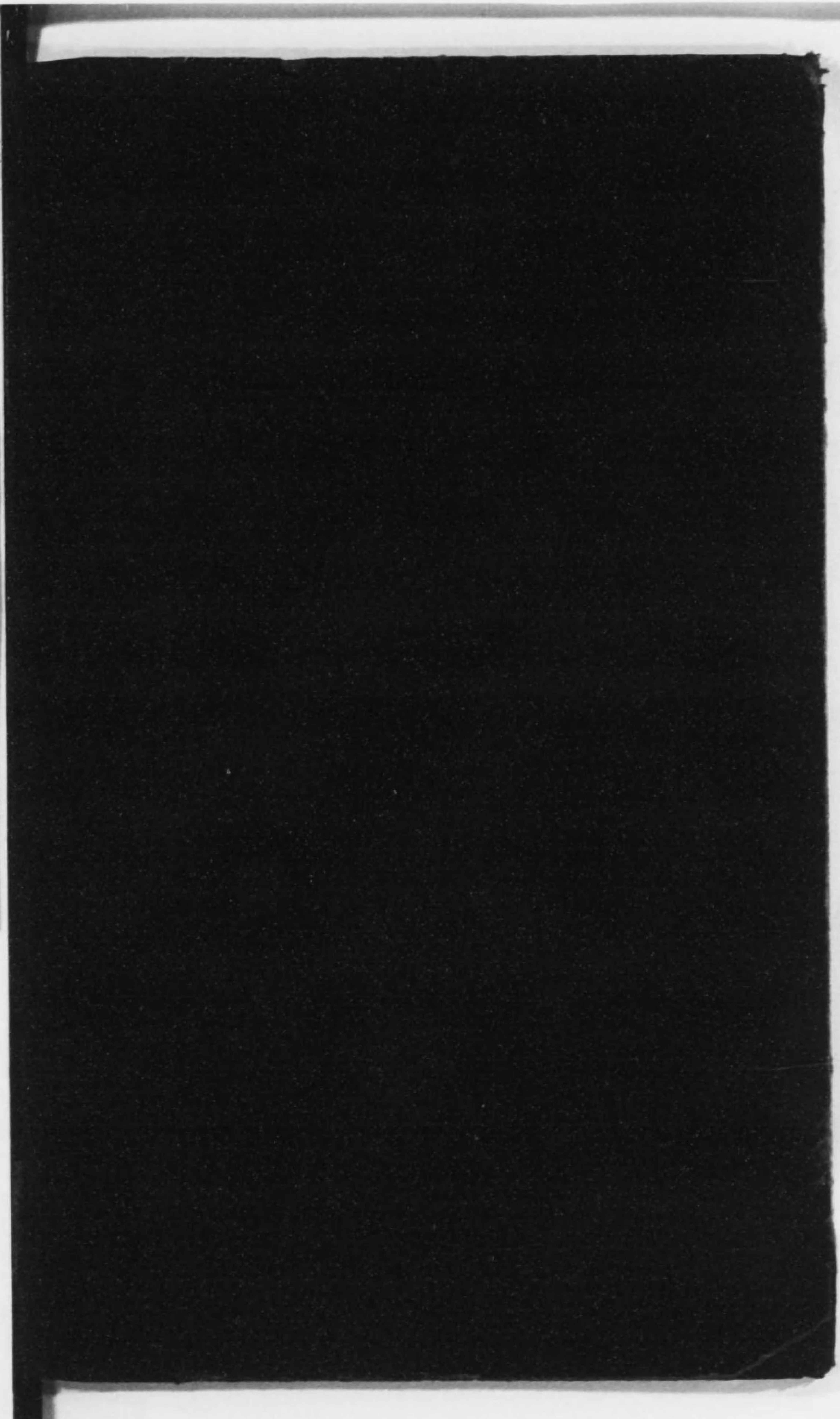
始



平面三角法

藤野了祐 著

1931

東京 冨山房發行 神田

緒　言

本書ハ高等學校又ハ専門學校ノ教科用トシテ著ハシタモノデアリマス。

ナルベク簡單ニ,シカモ理論應用ヲ通ジテ重要ナル事項ハ最モ確實ニ理解サセルヤウニ努メタツモリデアリマス。

本書ノ初版ハ大正二年ニ出シタノデスガ,同十二年ノ關東大震災ノタメ原型ヲ燒失シ,爾來改訂ノ餘暇ヲ得ナカツタ次第デス。

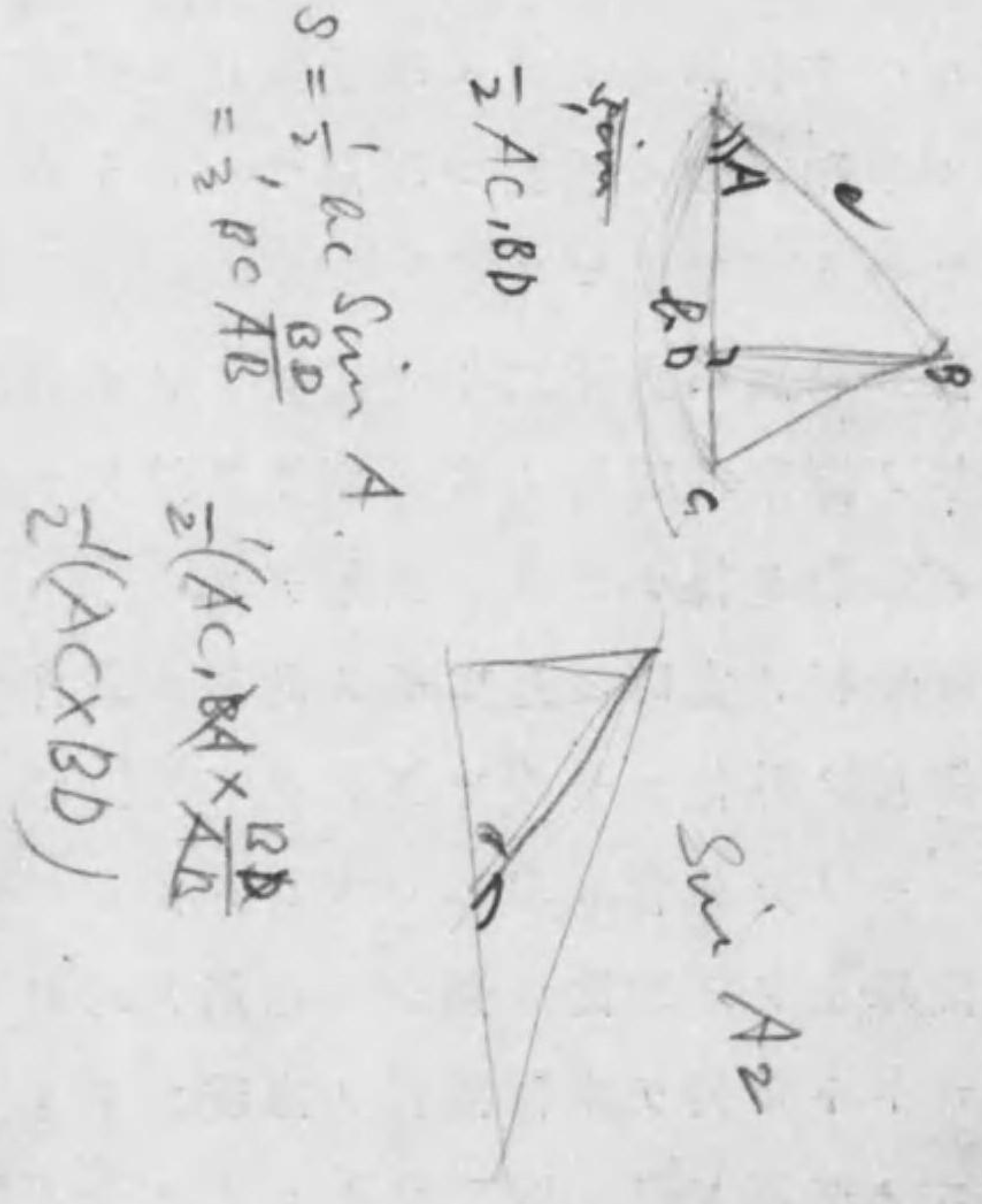
初版發行ノ當時ハ邦文デノ此種ノ著作ハ一二ノ譯書ノ外,他ニナカツタノデスガ,近年同ジ目的ノモノガ相當ニ現ハレマシタ,併シデキルダケ簡單ナノト,理論ニ偏セズ應用ヲ疎カニシナイコトトニ於テ,本書獨自ノ意義ガアルト思ヒマスノデ,再ビ世ニ問フコトニイタシタ譯デアリマス。

勿論最近ノ傾向ヲ顧慮シテ舊版ニ大改訂ヲ施シマシタ,併シ尚不備ノ點モ少ナクナイデセ

ウ,大方諸賢ノ御示教ヲ切ニ希望イタシマス。

昭和六年三月

著者識ス



目　次

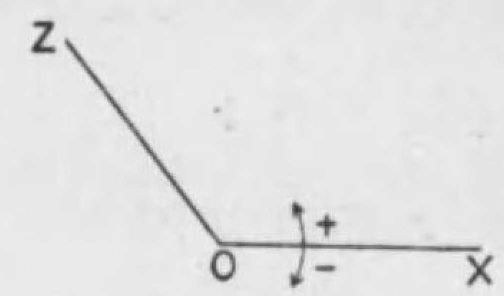
平面三角法

第一章

角

1. 角ノ正負

角ヲ,一ツノ半直線 OX[1] ガソレヲ含ムーツノ平面ノ上デ其原點[2]ノ周リヲ廻ツテデキルモノト見做シ,其ノ廻轉ノ量ヲ以テデキタ角ノ大サトシ,單位ヲ適當ニ定メテ計ル.



又其ノ廻轉ノ向キガ二通リアルカラ之ヲ區別スルノニ正負ノ符號ヲ用ヒル,通常時計ノ針ノ廻轉ノ向キト反對ノ向キヲ正ノ向キ,同ジ向キヲ負ノ向キトスルノガ習慣デアル.

半直線ガ其原點ノ周リヲ幾周リデモ廻ルコトガデキルカラ正又ハ負ノ任意ノ大サノ角ガデキル.

又半直線ガ少シモ廻ラナイトキハ角ノ大サガ0デ

---

(1)(2) 無限直線ヲ其上ノ或一點デ二ツニ分ケ其一方ヲ考ヘルトキ之ヲ半直線トイヒ,其點ヲ此半直線ノ原點トイフ.

アルトイフ.

因テ結局任意ノ實數値ヲ有スル角ガアルコトトナル.

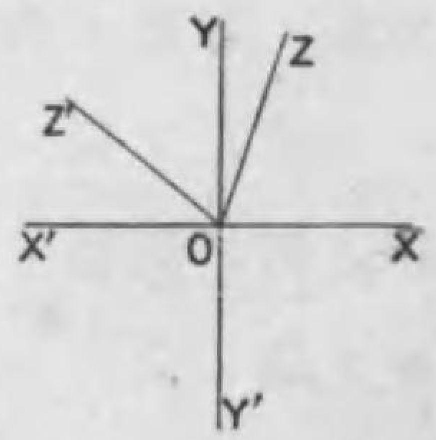
角ヲ作ル半直線ノ最初ノ位置 OX ヲ此角ノ**首邊**トイヒ,其ノ最後ノ位置 OZ ヲ其**終邊**トイフ.

OX ガ首邊,OZ ガ終邊ナル角ヲ ∠XOZ トイフ. 又此角ノ大サヲ α トスルトキ OZ ガ OX ト α ナル角ヲナストイフ.

2. 象限

半直線 OX 及之ト正ノ直角ヲナス半直線 OY ヲ取リ,其延長ヲ夫々 OX′, OY′ トスルトキ,二直線 XX′, YY′ ニヨッテ平面ガ四ツニ分ケラレル.

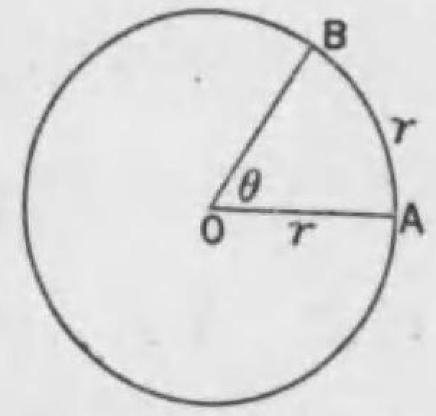
其各ヲ**象限**トイヒ, ∠XOY, ∠YOX′, ∠X′OY′, ∠Y′OX 内ノ部分ヲ夫々**第一象限**,**第二象限**,**第三象限**,**第四象限**トイフ.



OX ヲ首邊トスル角ノ終邊ガ或象限内ニアレバ此角ヲ其象限ノ角トイフ. 例ヘバ上圖ノ ∠XOZ ヲ第一象限ノ角, ∠XOZ′ ヲ第二象限ノ角トイフ.

3. 弧度法

角ノ單位ニ直角ヲ用ヒルコト又六十分法(度,分,秒デ計ル法)ヲ用ヒルコトハ讀者ノ既ニ知ッテヰルコトトシテ,コヽニハ弧度法トイフ他ノ一法ヲ述ベル.



半徑 r ナル圓ニ於テ半徑ト等長ノ弧ニ對スル中心角ヲ θ トスレバ,全圓周ニ對スル中心角ハ 4R∠ ダカラ,幾何學ノ定理ニヨッテ

$$\theta : 4R\angle = r : 2\pi r$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{2}{\pi} R\angle$$

故ニ任意ノ圓ニ於テ半徑ト等長ノ弧ニ對スル中心角ノ大サハ一定デアル.

此ノ一定ノ角ヲ **Radian** トイヒ,之ヲ單位トシテ角ヲ計ル方法ヲ**弧度法**トイフ.

角ヲ Radian デ計ッタ數値ヲ此角ノ**弧度**トイフ.

サテ
$$1 \text{ rad.} = \frac{2}{\pi} R\angle$$

$$\therefore \quad \pi \text{ rad.} = 2R\angle = 180^\circ$$

此關係式ニヨッテ角ノ弧度ト度分秒デ表ハサレタモノトノ間ノ換算ガ容易ニデキル. 例ヘバ

$$2\pi \text{ rad.} = 360^\circ$$

$$\frac{\pi}{2}\text{ rad.}=90^\circ$$

$$1\text{ rad.}=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ17'44''.8\text{ 强}$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{rad.}=0.01745329\text{ rad. 强}$$

$$1'=0.0002908882\text{ rad. 强}$$

$$1''=0.0000048481\text{ rad. 强}$$

注意 今後角ヲ Radian デ計ツタトキニ限リ通例單位ノ名ヲ略スルコトニスル.

問題

1. n 邊ノ正多角形ノ一角ノ弧度ヲ求メヨ.

2. 三角形ノ角ガ等差級數ヲナシ,其ノ最小角ノ度數ト最大角ノ弧度トノ比ガ $60:\pi$ ニ等シイ. 各ノ角ヲ求メヨ.

X **3.** 首邊ガ同一デアツテ終邊ガ相合スル無數ノ角ノ中ノ任意ノ一ツヲ α トスレバ,コノスベテノ角ハ $2n\pi+\alpha$ デ表ハサレルコトヲ示セ. 但シ n ハ任意ノ整數(正, 0, 負)デアル.

X **4.** n ガ任意ノ整數ナルトキ次ノ三組ノ角ハ全體トシテハ同一デアルコトヲ示セ.

$$n\pi+\frac{\pi}{2},\quad n\pi-\frac{\pi}{2},\quad 2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

493780 40° 10×180° 45° 180° 90°

X **5.** n ガ任意ノ整數ナルトキ $2n\pi+\alpha$ 及 $(2n+1)\pi-\alpha$ ナル二組ノ角ハ合ハセテ $n\pi+(-1)^n\alpha$ デ表ハサレルコトヲ示セ.

101800 5

1800°+

3π−α

X. 5π = π−α

第二章

線分

4. 線分ノ正負

一ツノ直線上ノ一ツノ線分ノ長サヲ,其ノ一端カラ他端ニ向ツテ計ツタモノト見做シ,其ノ二通リノ向キヲ區別スルノニ正負ノ符號ヲ用ヒル,右圖デハ左カラ右ヘノ向キヲ正トシ,從テ右カラ左ヘノ向キヲ負トスルノガ習慣デアル.

又線分ノ兩端ヲ A, B トスルトキ A カラ B ニ向ツテ計ツタ長サヲ **AB** デ表ハスコトニスル. 從テ AB ト BA トハ符號ガ相反シテ絕對値ガ相等シイ. 卽チ

(1) $$\mathbf{AB=-BA}$$

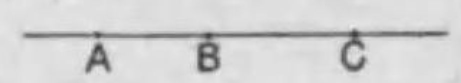
又兩端ガ相合スル線分例ヘバ AA ヲモ考ヘルコトトシ,其長サハ 0 デアルトイフ.

定理 一直線上ニ三點 A, B, C ガアレバ

(2) $$\mathbf{AB+BC=AC}$$

證明 先ヅ右ノ甲圖デ此式ノ成リ立ツコトハ明カデアル.

甲圖



從テ次ノ乙圖デハ

$$AB=AC+CB$$

$$\therefore\ AC=AB-CB$$

$$=AB+BC\quad \text{[1ニヨル]}$$

乙 圖

次ニ丙圖デハ

丙 圖

$$CB=CA+AB$$

$$\therefore\ -CA=AB-CB$$

$$\therefore\ AC=AB+BC\quad \text{[1ニヨル]}$$

系 一直線上ニ幾ツカノ點 A, B, C, D, ……K, L ガアレバ

(3) $$\mathbf{AB+BC+CD+\cdots\cdots+KL=AL}$$

如何ニモ,本定理ニヨツテ

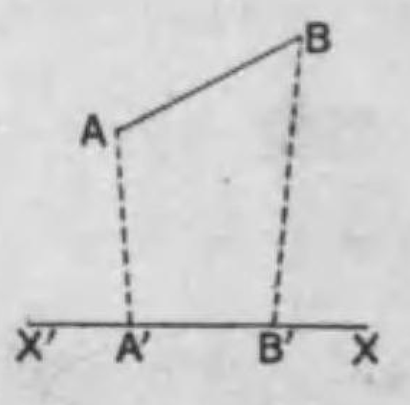
$$AC=AB+BC$$
$$AD=AC+CD$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$AL=AK+KL$$

此等ノ等式ヲ邊々加ヘ合ハセレバ

$$AL=AB+BC+CD+\cdots\cdots+KL$$

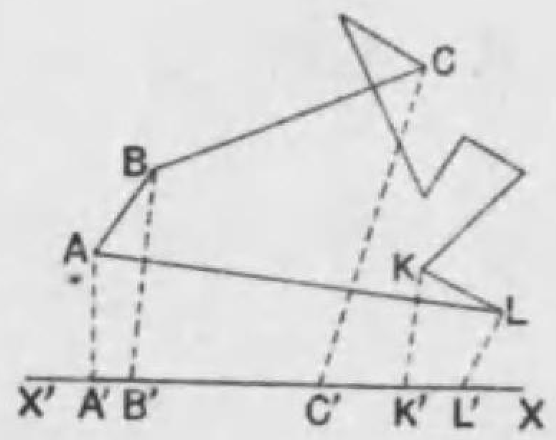
5. 直射影

一ツノ線分ノ兩端 A, B カラ一ツノ直線 XX′ (AB ト同ジ平面上ニナクテモイヽ)ニ垂線 AA′, BB′ ヲ引クトキ線分 A′B′ ヲ線分 AB ノ直線 XX′ 上ニ



於ケル**直射影**(或ハ**正射影**)又ハ略シテ單ニ**射影**トイフ.

定理 屈折線 ABC……KL (同一平面ノ上ニナクテモイヽ)ノ各邊 AB, BC, ……, KL ノ一直線 XX′ 上ニ於ケル直射影ノ和ハ其兩端ヲ結ブ線分 AL ノ同ジ直線 XX′ 上ニ於ケル直射影ニ等シイ.



即チ右圖デハ

$$A'B'+B'C'+\cdots\cdots+K'L'=A'L'$$

證明 略スル. [前節系參照]

系 多角形 ABC……KLA (平面多角形又ハ捩多角形)ノ各邊 AB, BC, ……, KL, LA ノ一ツノ直線上ニ於ケル直射影ノ和ハ零ニ等シイ.

問 題

1. 一直線上ニ三點 O, A, B ガアルトキハ $AB=OB-OA$ ナルコトヲ示セ.

2. 一直線上ニ三點 O, A, B ガアルトキ AB ノ中點ヲ M トスレバ $OM=\frac{1}{2}(OA+OB)$ ナルコトヲ示セ.

3. 一直線上ニ四點 A, B, C, D ガアルトキハ $AC+BD=AD+BC$ ナルコトヲ示セ.

4. 一直線上ニ四點 A, B, C, D ガアツテ AB, AC, AD ガ調和級數ヲナストキハ $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{CD}$ ナルコトヲ示セ.

第三章

三角函數

6. 函數

例ヘバ「半徑ガrナル圓ノ周ヲcトスレバ

$$c=2\pi r$$

デアル」トイフヤウナトキノrハドンナ値デモイヽ. 此場合ニrヲ變數トイフ.

一般ニ,一ツノ問題ヲ取扱フ間ニ色々ノ値ヲ代表スル文字ヲ**變數**トイフ.

上ノ例デcモ亦色々ニ變ル卽チ色々ノ値ヲ代表スルカラ變數デアル.

2ヤπハ變ラナイ,此等ヲ**常數**トイフ.

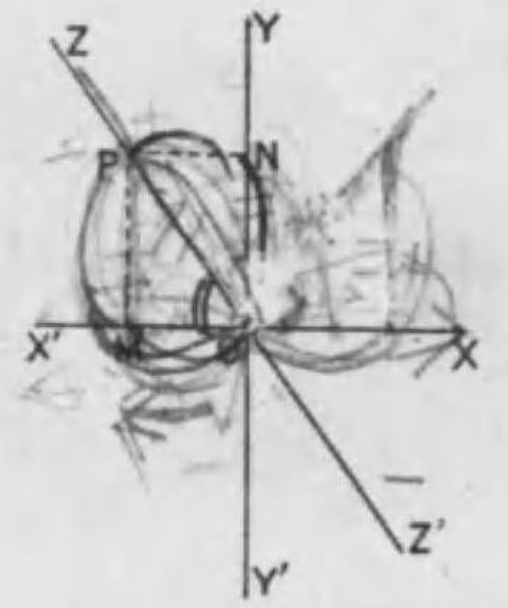
サテrモcモ變數ダガ,若シrガ定マレバcモ定マル. 此時ニcヲrノ函數トイフ.

一般ニ,二ツノ變數x, yガアツテxニ或値ヲ與ヘルトキ之ニ應ジテyノ値ガ定マルトキハyヲxノ**函數**トイフ.

上ノ例デ,rガ定マレバcガ定マルト考ヘタトキハcヲrノ函數トイフガ,若シcガ定マレバrガ定マルト考ヘタトキハrヲcノ函數トイフ.

7. 三角函數ノ定義

一ツノ半直線OX,及之ト$+\frac{\pi}{2}$ノ角ヲナス半直線OY,及OXト任意ノ角αヲナス半直線OZヲ取リ,其延長ヲ夫々OX′, OY′, OZ′トシ,其ノ正負ノ向キニ關シテ次ノ規約ヲ設ケル.



(a) 直線XX′上デハOカラXヘノ向キヲ正ノ向キ(從テ其反對ノ向キヲ負ノ向キ)トスル.

(b) 直線YY′上デハOカラYヘノ向キヲ正ノ向キトスル.

(c) 直線ZZ′上デハOカラZヘノ向キヲ正ノ向キトスル.[1]

此規約ノ下ニ於テ

第一 ZZ′上ニOカラ0ニ等シクナイ任意ノ線分OPヲ取リ, OPノYY′上ニ於ケル直射影ONノOPニ對スル比ヲ$\angle\alpha$ノ**正弦**ト名ヅケ,之ヲ$\sin\alpha$ト記ス. 卽チ

$$\sin\alpha=\frac{ON}{OP}$$

---

(1) 規約(c)ハ規約(a)ノ下ニ半直線OXガ圖ノヤウニ符號ヲ附ケタマヽデOノ周リヲαダケ廻ツタモノト見做スコトニ當ル.

規約(b)ハ規約(c)ノ特別ノ場合ニ過ギナイ.

今 OP ノ XX′ 上ニ於ケル直射影ヲ OM トシ, YY′ ニ平行ナル直線ノ正負ノ向キハ YY′ ノソレニ同ジイトスレバ

$$ON=MP$$

故ニ又
$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}$$

第二 OP ノ XX′ 上ニ於ケル直射影 OM ノ OP ニ對スル比ヲ $\angle\alpha$ ノ**餘弦**ト名ヅケ,之ヲ $\cos\alpha$ ト記ス. 卽チ

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}$$

第三 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ヲ $\angle\alpha$ ノ**正切**ト名ヅケ,之ヲ $\tan\alpha$ (又ハ $\mathrm{tg}\,\alpha$) ト記ス. 卽チ

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

又
$$\tan\alpha=\frac{MP}{OP}\div\frac{OM}{OP}=\frac{MP}{OM}$$

第四 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ヲ $\angle\alpha$ ノ**餘切**ト名ヅケ,之ヲ $\cot\alpha$ (又ハ $\mathrm{ctg}\,\alpha$) ト記ス. 卽チ

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

又
$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

又
$$\cot\alpha=\frac{OM}{MP}$$

第五 $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ ヲ $\angle\alpha$ ノ**正割**ト名ヅケ,之ヲ $\sec\alpha$ ト記ス.

卽チ

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

又
$$\sec\alpha=\frac{OP}{OM}$$

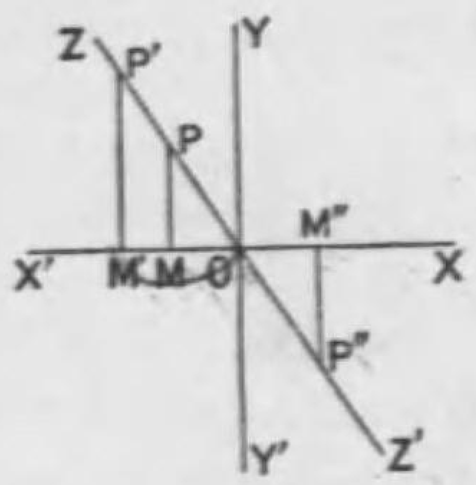
第六 $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ ヲ $\angle\alpha$ ノ**餘割**ト名ヅケ,之ヲ $\mathrm{cosec}\,\alpha$ (又ハ $\csc\alpha$) ト記ス. 卽チ

$$\mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

又
$$\mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{OP}{MP}$$

此ノ六ツハ何レモ $\angle\alpha$ ノ函數デアル,此等ヲ通稱シテ $\angle\alpha$ ノ**三角函數**(又ハ**圓函數**(1))トイフ.

定マツタ角ノ三角函數ハ夫々一定デアル.



例ヘバ右圖デ終邊 OZ 上ニ任意ノ線分 OP, OP′ ヲ取リ又 OZ′ 上ニ任意ノ線分 OP″ ヲ取リ,其等ノ XX′ 上ニ於ケル直射影ヲ夫々 OM, OM′, OM″ トスレバ,先ヅ △OPM, △OP′M′, △OP″M″ ハ皆等角ダカラ相似デアル,而シテ OP ト OP′, OM ト OM′, MP ト M′P′ トハ皆同符號デアリ, OP ト OP″, OM ト OM″, MP ト M″P″ トハ皆異符號ダカラ

(1) 定マツタ圓ニ於テ弧ヲ與ヘレバ之ニ對スル中心角ガ定マリ,從テ其角ノ三角函數ガ定マル. 故ニ三角函數ハ圓弧ノ函數デアルト考ヘラレル,因テ此等ノ函數ノコトヲ圓函數トモイフノデアル.

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{M''P''}{OP''},\qquad \frac{OM}{OP}=\frac{OM'}{OP'}=\frac{OM''}{OP''}$$

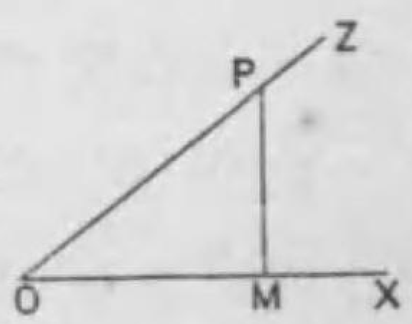
因テ上ノ角ノ正弦及餘弦ハ夫々一定,從テ他ノ三角函數モ亦夫々一定デアル.

注意1. 線分 OP ヲ必ズ半直線 OZ ノ上ニ取ルコトニスレバ, OP ハ常ニ正トナツテ便利デアルカラ今後ハスベテ之ニ倣フコトニスル.

注意2. 線分 OP ヲ長サノ單位ニ等シク取レバ,其ノ YY′ 及 XX′ 上ニ於ケル直射影ヲ表ハス數ハ夫々此角ノ正弦及餘弦ニ等シイ.[1]

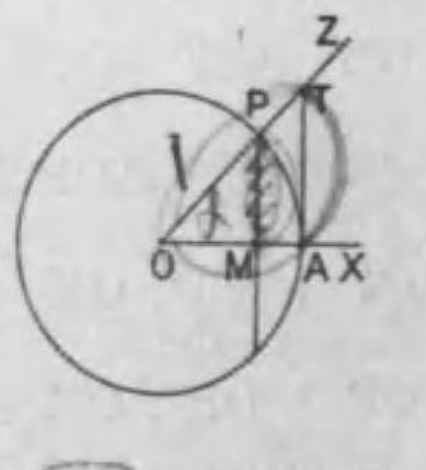
8. $2n\pi+\alpha$ ノ三角函數

任意ノ角ノ三角函數ハ角ノ首邊ニ對スル其終邊ノ位置ダケニヨツテ定マル. サテ同ジ首邊ニ對シテ



(1) O ヲ中心トシテ半徑ガ1ナル圓(之ヲ**單位圓**トイフ)ヲ畫キ,之ガ∠α ノ首邊 OX ト交ル點ヲ A, 終邊 OZ ト交ル點ヲ P トシ, P カラ直線 OX ニ引イタ垂線ノ足ヲ M, 又 A カラ圓ニ引イタ切線ガ OZ ト交ル點ヲ T トスレバ

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=MP,\quad \tan\alpha=\frac{AT}{OA}=AT,\quad \sec\alpha=\frac{OT}{OA}=OT$$



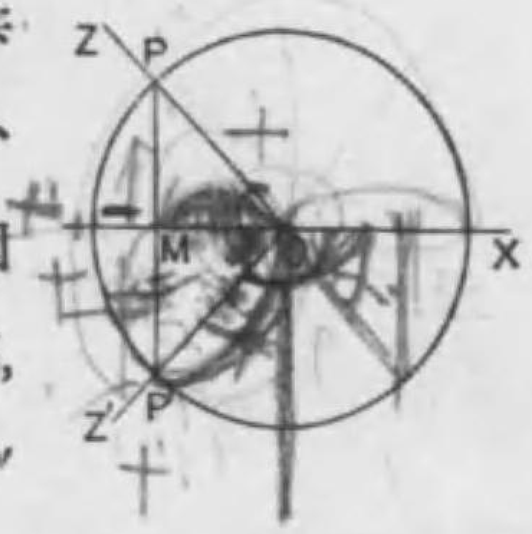
即チ $\sin\alpha$ ハ P ヲ通ツテ OX ニ垂直ナル弦ノ一部, $\tan\alpha$ ハ A カラ引イタ切線ノ一部, $\sec\alpha$ ハ O カラノ割線ノ一部ニナル. コレガ正弦,正切,正割トイフ語ノ由來デアル. 餘弦,餘切,餘割ノ由來ハ第16頁ノ脚註ヲ見ヨ.

或角 α ニ 2π ノ整數倍ヲ加減シタ角即チ $2n\pi+\alpha$ (n ハ任意ノ整數) ノ終邊ハ α ノ終邊ニ一致スル. 故ニ $2n\pi+\alpha$ ノ三角函數ハ α ノソレニ等シイ. 即チ

$$\sin(2n\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\therefore\qquad \tan(2n\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad 等.$$

9. $-\alpha$ ノ三角函數

二角 α ト $-\alpha$ トガ首邊 OX ヲ共有スルトキハ其等ノ終邊 OZ, OZ′ ハ首邊ニ就テ明カニ對稱デアル. 因テ O ヲ中心トスル一ツノ圓ガ OZ, OZ′ ト交ル點ヲ夫々 P, P′ トシ, PP′ ト直線 OX トノ交點ヲ M トスレバ, PP′ ハ OX ニ垂直デアツテ MP ト MP′ トハ絕對値ガ相等シク符號ガ相反スル. 故ニ

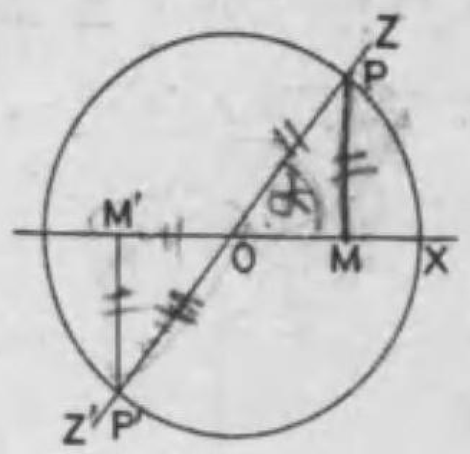


$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\therefore\qquad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha \qquad 等.$$

10. $\alpha\pm\pi$ ノ三角函數

同ジ首邊ニ就テハ $\alpha\pm\pi$ ノ終邊 OZ′ ハ α ノ終邊 OZ

ノ延長ノ位置ニアル. 因テ O ヲ中心トスル一ツノ圓ガ OZ, OZ′ ト交ル點ヲ夫々 P, P′ トシ, 線分 OP, OP′ ノ首邊 OX 上ニ於ケル直射影ヲ夫々 OM, OM′ トスレバ, MP ト M′P′ 及 OM ト OM′ ハ夫々絶對値ガ相等シク符號ガ相反スル. 故ニ



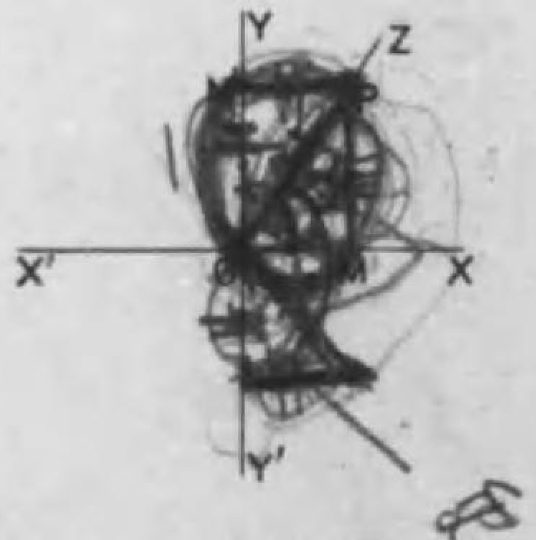
$$\sin(\alpha\pm\pi) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha\pm\pi) = -\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \tan(\alpha\pm\pi) = \tan\alpha \quad \text{等.}$$

11. $\frac{\pi}{2}+\alpha$ ノ三角函數

OX ヲ首邊トスル角 α ノ終邊ヲ OZ トシ, OX ト $-\frac{\pi}{2}$ ノ角ヲナス半直線 OY′ ヲ作レバ, OY′ ヲ首邊トシ $\frac{\pi}{2}+\alpha$ ニ等シイ角ノ終邊ハ明カニ OZ デアル. ソコデ OZ 上ニ任意ノ線分 OP ヲ取リ,其ノ OX 及 OY′ 上ニ於ケル直射影ヲ夫夫 OM 及 OM′ トスレバ,先ヅ



$$\sin\alpha = \frac{OM'}{OP}, \quad \cos\alpha = \frac{OM}{OP} \quad (\text{首邊ハ}OX)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{OM}{OP}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{OM'}{OP} \quad (\text{首邊ハ}OY')$$

サテ OX ヲ首邊トスルトキノ OM ノ正ノ向キト OY′ ヲ首邊トスルトキノ OM ノ正ノ向キトハ同一デアリ, OX ヲ首邊トスルトキノ OM′ ノ正ノ向キト OY′ ヲ首邊トスルトキノ OM′ ノ正ノ向キトハ相反スル. 故ニ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

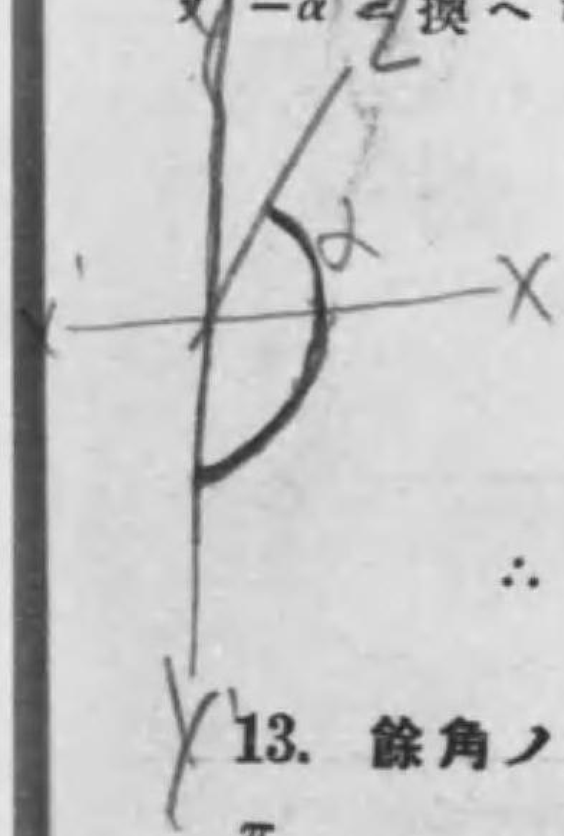
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha \quad \text{等.}$$

12. 補角ノ三角函數

$\pi-\alpha$ ヲ α ノ**補角**トイフ. 例ヘバ 30° ノ補角ハ 180°−30°=150°, 又 420° ノ補角ハ 180°−420°=−240° デアル.

サテ第10節 $\pi+\alpha$ ノ三角函數ヲ與ヘル公式ニ於テ α ヲ $-\alpha$ ニ換ヘレバ次ノ式ヲ得ル.



$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)$$

$$=\sin\alpha \quad [\text{第 9 節}]$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(-\alpha)$$

$$=-\cos\alpha \quad [\text{同上}]$$

$$\therefore \quad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha \quad \text{等.}$$

13. 餘角ノ三角函數

$\frac{\pi}{2}-\alpha$ ヲ α ノ**餘角**トイフ. 例ヘバ 18° ノ餘角ハ

$90^\circ-18^\circ=72^\circ$, 又 -135° ノ餘角ハ $90^\circ-(-135^\circ)=225^\circ$ デアル.

サテ第11節ノ公式ニ於テ α ヲ $-\alpha$ ニ換ヘレバ

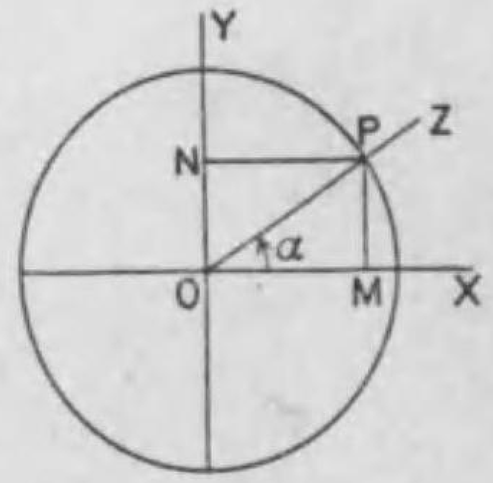
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(-\alpha)$$
$$=\cos\alpha \ ^{(1)} \qquad [第9節]$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin(-\alpha)$$
$$=\sin\alpha \qquad [同上]$$
$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha \quad 等.$$

問題

1. $\alpha-\frac{\pi}{2}$ ノ三角函數ヲ α ノ三角函數デ表ハセ.
2. $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ ノ三角函數ヲ α ノ三角函數デ表ハセ.

14. 正弦ノ變化

半直線 OX ヲ首邊トスル角ヲ α トシ, O ヲ中心トスル一ツノ圓ガ其終邊 OZ ト交ル點ヲ P トシ, OP ノ OY 上ニ於ケル直射影ヲ ON トスレバ



$$\sin\alpha=\frac{ON}{OP}$$

而シテ OP ハ一定デアル.

(1) 即チ減角ノ餘弦ハ其餘角ノ正弦ニ等シイ. 實ハ「餘弦」トイフ語ハ「餘角ノ正弦」ノ略語デアル. 餘切,餘割モ同樣.

サテ α ガ 0 ナルトキハ ON ハ 0 デアツテ, α ガ 0 カラ段々增セバ ON モ段々增シ, 竟ニ α ガ $\frac{\pi}{2}$ ニ達スレバ ON ハ半徑卽チ OP ニ等シクナル. 故ニ $\sin\alpha$ ハ此間 0 カラ次第ニ增シテ竟ニ 1 ニ達スル.

次ニ α ガ $\frac{\pi}{2}$ ヲ超エルト ON ハ段々小サクナリ, 竟ニ α ガ π ニ達スレバ ON ハ 0 トナル. 故ニ $\sin\alpha$ ハ此間 1 カラ次第ニ減ツテ竟ニ 0 ニナル.

公式 $\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \quad$ [第12節]

ニヨレバ, 角ガ $\frac{\pi}{2}$ カラ π マデ增ス間ノ正弦ノ變化ハ角ガ $\frac{\pi}{2}$ カラ 0 マデ減ル間ノ正弦ノ變化ト全ク等シイコトガワカル.

α ガ π カラ增シテ $\frac{3\pi}{2}$ ニ至ル間 ON ハ負デアツテ, 其絕對値ハ段々增シ竟ニ半徑ニ等シクナル. 故ニ $\sin\alpha$ ハ 0 カラ次第ニ減ツテ -1 ニ至ル.

同樣ニ α ガ $\frac{3\pi}{2}$ カラ 2π ニ至ル間 $\sin\alpha$ ハ -1 カラ次第ニ增シテ竟ニ 0 ニナル.

公式 $\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \quad$ [第10節]

ニヨレバ, 角ガ π カラ 2π マデ增ス間ノ正弦ノ變化ハ角ガ 0 カラ π マデ增ス間ノ正弦ノ値ノ符號ヲ變ヘタモノノ變化ト全ク等シイコトガワカル.

角ガ 2π カラ更ニ增セバ $\sin\alpha$ ハ前ノ變化ヲ同ジ順序ニ幾回デモ繰返スダケデアル. [第8節]

α ガ 0 カラ負ノ向キニ變化スルトキハ $\sin\alpha$ ハ前ノ

變化ヲ逆ノ順序ニ繰返シテ限リナク循環スル. [第8節]

15. 餘弦ノ變化

前節ノ圖デ OP ノ OX 上ニ於ケル直射影ヲ OM トスレバ

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}}$$

サテ α ガ 0 ノトキハ OM=OP デアツテ, α ガ 0 カラ段々増セバ OM ハ次第ニ減リ α ガ $\frac{\pi}{2}$ ニ達スレバ OM ハ 0 ニナル. 故ニ $\cos\alpha$ ハ此間 1 カラ次第ニ減ツテ 0 ニナル.

次ニ α ガ $\frac{\pi}{2}$ カラ π マデ増ス間 OM ハ負デアツテ其絶對値ハ 0 カラ段々増シテ終ニ半徑ニ等シクナル. 故ニ $\cos\alpha$ ハ此間 0 カラ次第ニ減ツテ -1 ニ至ル.

同様ニ α ガ π カラ $\frac{3\pi}{2}$ ニ至ル間 $\cos\alpha$ ハ -1 カラ次第ニ増シテ 0 ニナリ, α ガ $\frac{3\pi}{2}$ カラ 2π ニ至ル間 $\cos\alpha$ ハ 0 カラ次第ニ増シテ終ニ 1 ニナル.

公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ [第11節]

ニヨレバ,角ガ 0 カラ 2π マデ増ス間ノ餘弦ノ變化ハ角ガ $\frac{\pi}{2}$ カラ $2\pi+\frac{\pi}{2}$ マデ増ス間ノ正弦ノ變化ト全ク等シイコトガワカル.

16. 正切ノ變化

定義ニヨツテ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

先ヅ α ガ 0 ノトキハ

$$\sin\alpha=0,\quad \cos\alpha=1\qquad \therefore\ \tan\alpha=0$$

α ガ 0 カラ $\frac{\pi}{2}$ マデ増ス間 $\sin\alpha$ ハ段々増シ $\cos\alpha$ ハ段々減ルカラ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 卽チ $\tan\alpha$ ハ次第ニ増ス,而シテ α ガ $\frac{\pi}{2}$ ニ近ヅクニ從ヒ $\sin\alpha$ ハ限リナク 1 ニ近ヅキ $\cos\alpha$ ハ如何ホドデモ 0 ニ近ヅクカラ $\tan\alpha$ ハドレホドデモ大キクナル.

α ガ丁度 $\frac{\pi}{2}$ ニ等シイトキハ $\cos\alpha=0$ ダカラ $\tan\alpha$ 卽チ $\tan\frac{\pi}{2}$ ハ存在シナイ.

α ガ僅カニ $\frac{\pi}{2}$ ヲ超エレバ $\sin\alpha$ ハ正 $\cos\alpha$ ハ負ダカラ $\tan\alpha$ ハ急ニ負ニナリ其絶對値ハ極メテ大キイ,而シテ α ガソレカラ π マデ増ス間 $\sin\alpha$ ハ正デアツテ段々減リ $\cos\alpha$ ハ負デアツテ其絶對値ガ段々増スカラ $\tan\alpha$ ハ負デアツテ其絶對値ハ次第ニ減ル,卽チ $\tan\alpha$ ハ次第ニ増ス.

α ガ π ニナレバ

$$\sin\alpha=0,\quad \cos\alpha=-1\qquad \therefore\ \tan\alpha=0$$

公式 $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ [第12節]

ニヨレバ,角ガ $\frac{\pi}{2}$ カラ π マデ増ス間ノ正切ノ變化ハ角ガ $\frac{\pi}{2}$ カラ 0 マデ減ル間ノ正切ノ値ノ符號ヲ變ヘタモノノ變化ト全ク等シイコトガワカル.

α ガ π カラ更ニ增セバ $\tan\alpha$ ハ前ノ變化ヲ同ジ順序ニ幾回デモ繰返スダケデアル. [第10節]

注意 角ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ小サクテ $\frac{\pi}{2}$ ニ限リナク近ヅクトキ其正切ガ如何ホドデモ大キクナルコトヲ次ノヤウニ書キ表ハス.

$$\tan\alpha \underset{\alpha\to\frac{\pi}{2}-0}{\longrightarrow} +\infty$$

又角ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ大キクテ $\frac{\pi}{2}$ ニ限リナク近ヅクトキ正切ガ負デアツテ其絕對値ガ如何ホドデモ大キクナルコトヲ次ノヤウニ書キ表ハス.

$$\tan\alpha \underset{\alpha\to\frac{\pi}{2}+0}{\longrightarrow} -\infty$$

又此ノ二ツヲ合セテ $\tan\frac{\pi}{2}$ ハ無限大デアルトイヒ,之ヲ

$$\tan\frac{\pi}{2}=\infty$$

ト略記スルコトガアル.

17. 餘切,正割,餘割ノ變化

$\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\mathrm{cosec}\,\alpha$ ハ夫々 $\tan\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ ノ逆數ダカラ,其變化ハ前三節ノ結果カラ容易ニワカル.

今各三角函數ノ變化ヲ表ニ記セバ次ノ通リデアル.

$\angle\alpha$	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	π	$\to$	$\frac{3\pi}{2}$	$\to$	2π
$\sin\alpha$	0	增	1	減	0	減	-1	增	0
$\cos\alpha$	1	減	0	減	-1	增	0	增	1
$\tan\alpha$	0	增	$+\infty \vert -\infty$	增	0	增	$+\infty \vert -\infty$	增	0
$\cot\alpha$	$\vert +\infty$	減	0	減	$-\infty \vert +\infty$	減	0	減	$-\alpha \vert$
$\sec\alpha$	1	增	$+\infty \vert -\infty$	增	-1	減	$-\infty \vert +\infty$	減	1
$\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\vert +\infty$	減	1	增	$+\infty \vert -\infty$	增	-1	減	$-\infty \vert$

上ノ表カラ直ニ次ノ事實ガワカル.

(1) 正弦及餘弦ノ最大値ハ $+1$, 最小値ハ -1, 從テ正弦及餘弦ノ絕對値ハ 1 ヨリ大キクナルコトガデキナイ.

(2) 正切及餘切ハ任意ノ實數値ヲ取ルコトガデキル.

(3) 正割及餘割ハ $+1$ ト -1 トノ間ノ値ヲ取ルコトガデキナイ,卽チ其絕對値ハ 1 ヨリ小サクナルコトガデキナイ.

(4) 第一象限內デハ各三角函數ハ悉ク正,第二象限內デハ正弦ハ正,餘弦及正切ハ負,第三象限內デハ正弦及餘弦ハ負,正切ハ正,第四象限內デハ正弦及正切ハ負,餘弦ハ正デアル.

18. 三角函數ノ Graph

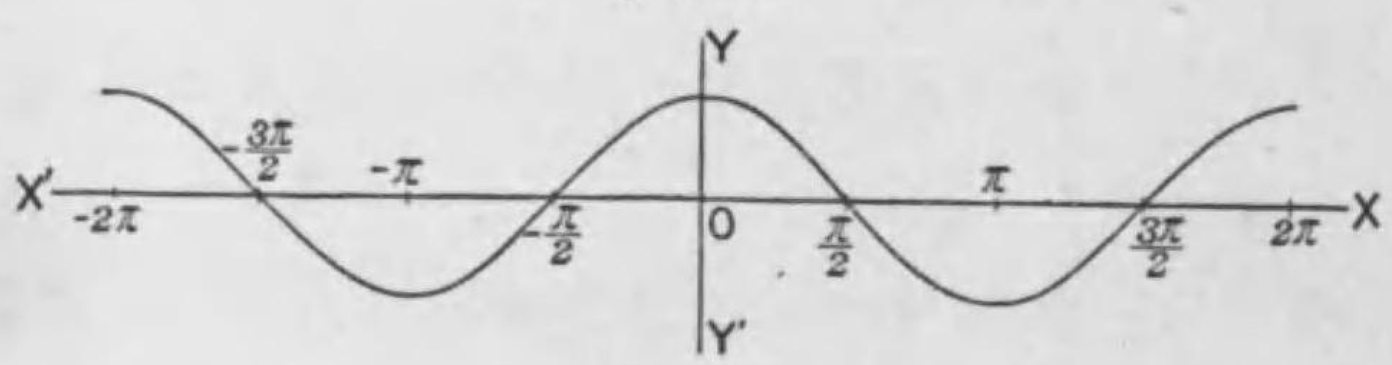
半直線OX及之ト$+\frac{\pi}{2}$ノ角ヲナス半直線OYヲ取リ,其延長ヲ夫々OX′, OY′トシ,直線XX′上デハOカラXヘノ向キヲ正ノ向キ,直線YY′又ハ之ニ平行ナル直線上デハOカラYヘノ向キヲ正ノ向キトスル.

サテXX′ノ上ニ變數xノ大サヲ表ハス長サOM(任意ノ單位デ計ツタモノ)ヲ取リ,MカラOYニ平行線ヲ引キ其上ニxノ函數yノ値ヲ表ハス長サMP(任意ノ單位デ計ツタモノ)ヲ取レバ,xノ變化ニ伴フ點Pノ軌跡ハ或曲線トナル. 之ヲ函數yノ **Graph** トイフ.

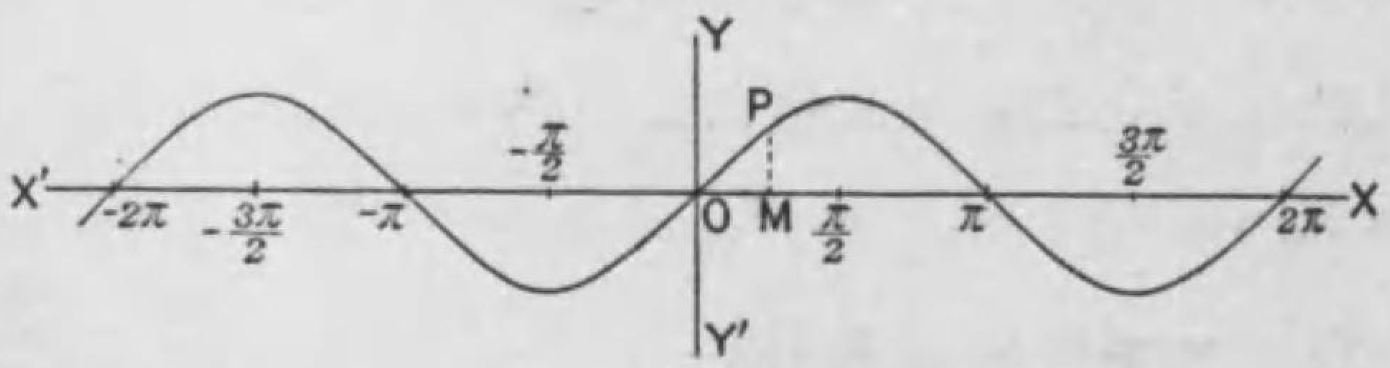
$y=\sin x$, $y=\cos x$ 等ノ Graph ヲ夫々**正弦曲線,餘弦曲線**等トイフ.

次ノ圖ハ角xヲ弧度法デ計リ,其單位ノ長サト同ジモノヲ其三角函數yノ單位ノ長サニ用ヒテ畫イタGraph デアル.

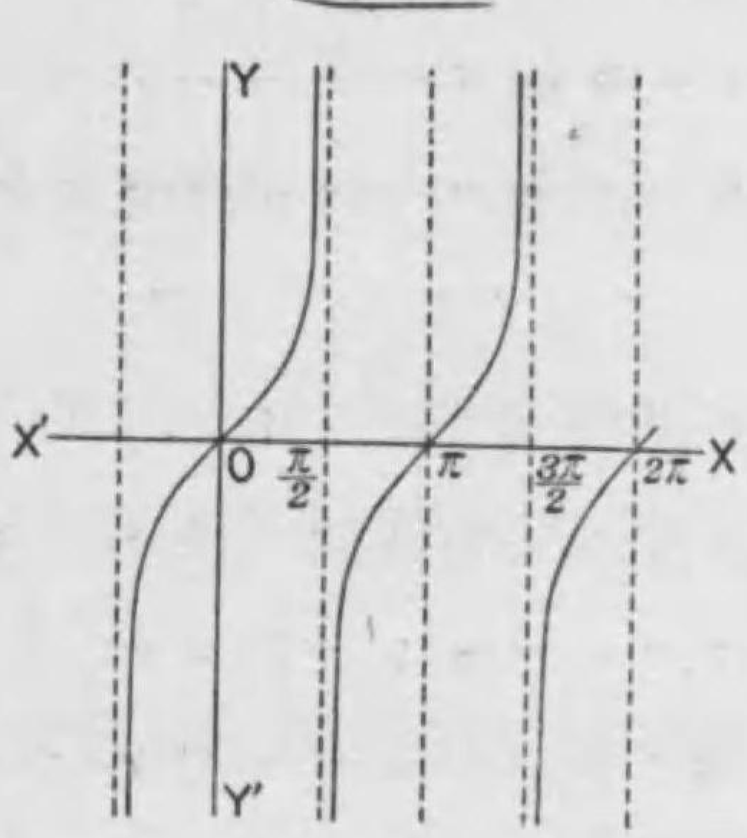
$y=\sin x$



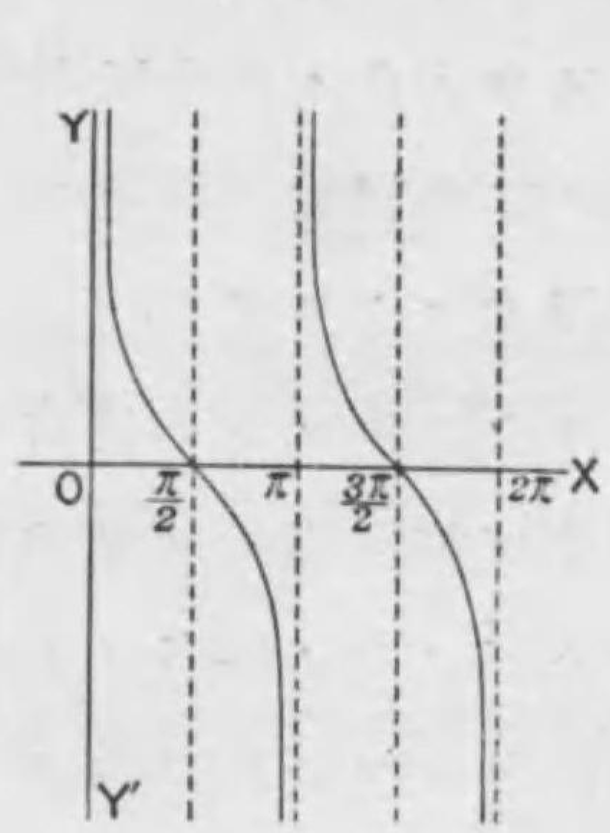
$y=\cos x$



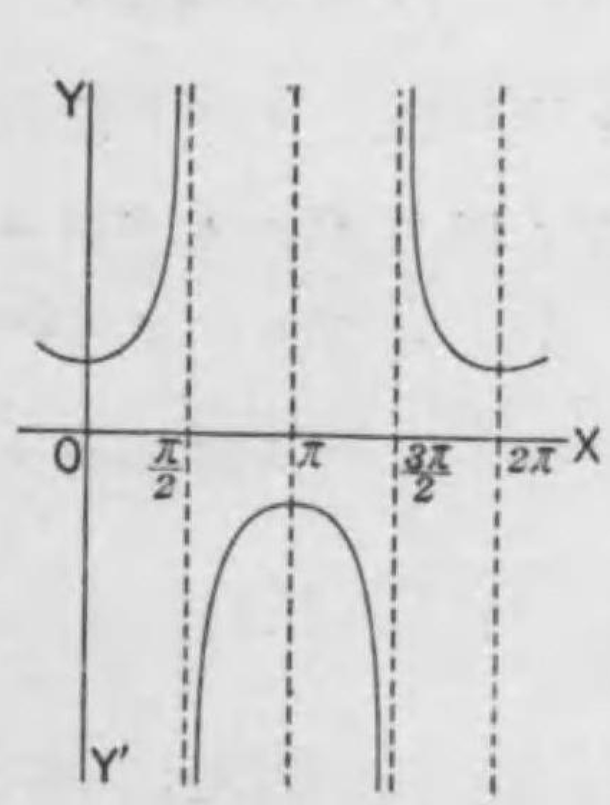
$y=\tan x$



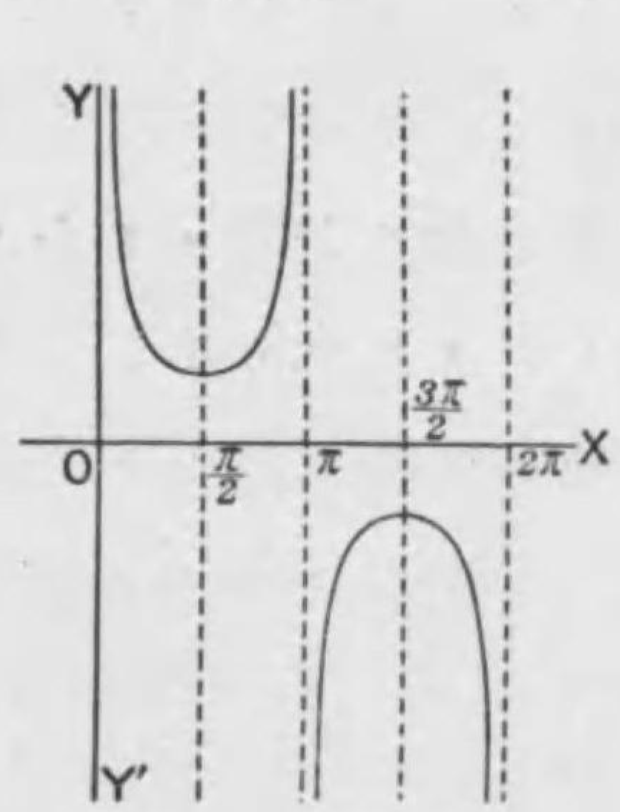
$y=\cot x$



$y=\sec x$



$y=\operatorname{cosec} x$



問　題

次ノ各式ノGraphヲ畫ケ. ($0\leqq x\leqq 2\pi$)

1. $\sin 2x$　　**2.** $\sin x+\cos x$

3. $\tan x+\cot x$

19. 角ヲ簡單ニスルコト

任意ノ角ノ三角函數ヲ $0°$ カラ $90°$ マデノ間ノ角ノ同名ノ三角函數デ表ハスコトガデキル. 但シ符號ダケハ變ルコトモアル.

カウスルコトヲ通常**角ヲ簡單ニスル**トイフ.

先ヅ第9節ニヨツテ負ノ角ノ三角函數ヲ求メルコトハ正ノ角ノ同名ノ函數ヲ求メルコトニ歸スル.

次ニ一ツノ正ノ角カラ $360°$ ヲ引ケルダケ引ケバ $360°$ ヨリ小サイ角ニナル,此角ノ三角函數ガ元ノ角ノ同名ノ三角函數デアル. [第8節]

次ニ此角ガ $180°$ 以上ナラバ第10節ニヨツテ此角ノ三角函數ヲ $180°$ ヨリ小サイ角ノ同名ノモノデ表ハスコトガデキル.

次ニ此角ガ鈍角ナラバ第12節ニヨツテ其補角ナル鋭角ノ同名ノモノニ直スコトガデキル.

例ヘバ $\sin(-1388°)=-\sin 1388°$

$$=-\sin(1388°-360°\times 3)=-\sin 308°$$
$$=\sin(308°-180°)=\sin 128°$$
$$=\sin(180°-128°)=\sin 52°$$

但シ實際ニハ必ズシモ上ノ手順ヲ踏マナクテモイイ. 例ヘバ

$$\sin(-1388°)=-\sin 1388°=-\sin(360°\times 4-52°)$$

$$=-\sin(-52°)=\sin 52°$$

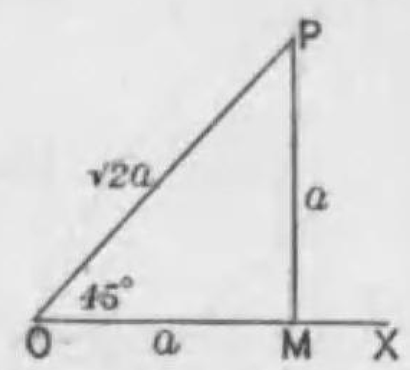
又異名ノ三角函數デモイヽトスレバ,任意ノ角ノ三角函數ヲ $0°$ カラ $45°$ マデノ角ノ三角函數デ表ハスコトガデキル. 例ヘバ

$$\sin(-1388°)=\sin 52°$$
$$=\cos(90°-52°)=\cos 38° \quad [第13節]$$

20. 45°, 60°, 30° ノ三角函數

第一 $45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ノ三角函數

直角三角形 OMP ニ於テ $\angle O=45°$ トシ, $OM=a$ トスレバ $MP=a$ 從テ $OP=\sqrt{2}a$ 故ニ



$$\sin 45°=\frac{MP}{OP}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45°=\frac{OM}{OP}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45°=\frac{MP}{OM}=\frac{a}{a}=1$$

$$\cot 45°=\frac{1}{\tan 45°}=1$$

第二 $60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ノ三角函數

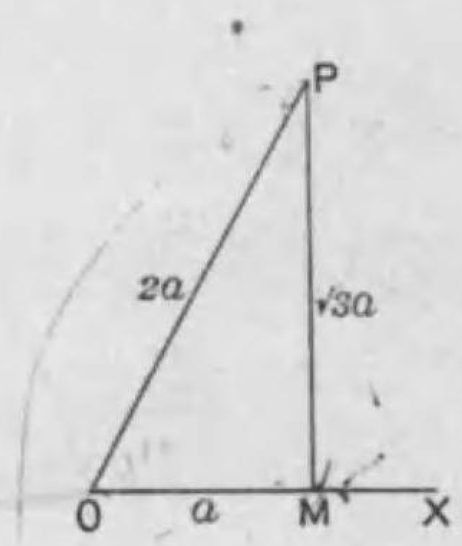
直角三角形 OMP (次頁ノ圖) ニ於テ $\angle O=60°$ トシ, $OM=a$ トスレバ $\angle O$ ハ正三角形ノ一角ダカラ $OP=2a$ 從テ $MP=\sqrt{3}a$ 故ニ

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$



第三　$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ノ三角函數

30° ハ 60° ノ餘角ダカラ前ノ結果ト第13節トカラ直ニ

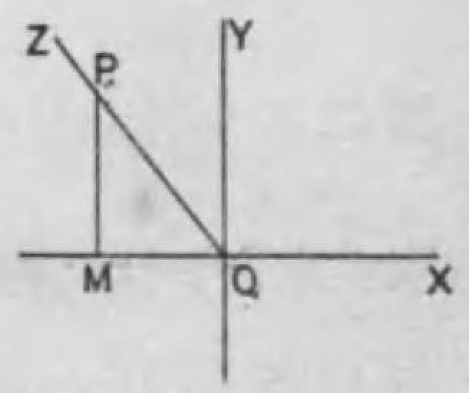
$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\quad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cot 30^\circ=\sqrt{3}$$

ヲ得ル.

21. 一ツノ角ノ三角函數ノ間ノ關係

一ツノ角 α ノ終邊 OZ 上ニ 0 デナイ任意ノ線分 OP ヲ取リ,其ノ首邊上ニ於ケル直射影ヲ OM トスレバ MP, OM ガ正デモ負デモ又ドチラカガ 0 デアッテモ常ニ



$$MP^2+OM^2=OP^2$$

$$\therefore\quad \frac{MP^2}{OP^2}+\frac{OM^2}{OP^2}=1$$

卽チ　　$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$

此式ハ通例略シテ次ノヤウニ書ク.

(1)　　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ [1]

此式ト第7節ニ述ベタ $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ ノ定義卽チ

(2)　　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$　　垂/底

(3)　　$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(4)　　$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$

(5)　　$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

ト合セテ五ツノ式ヲ三角函數間ノ基礎ノ關係式トイフ.

此ノ五ツノ式ハ皆獨立ナル式デアル,言ヒ換ヘレバ其中ノ一ツノ式モ他ノ式カラ導クコトハデキナイ.何トナレバ先ヅ(2)以下ハ夫々 $\tan\alpha$ 等ノ定義ダカラ勿論獨立デアル,又(1)ハ正弦餘弦間ノ關係デ正切以下ニ無關係デアル卽チ(2)以下ノ定義トハ獨立デアル.

(1) 一般ニ m ガ正ノ整數ナルトキハ $(\sin\alpha)^m$ $(\cos\alpha)^m$ ナドヲ略シテ夫夫 $\sin^m\alpha$, $\cos^m\alpha$ ナドト書ク.

又三角函數ノ間ニハ上ノ五ツノ外ニ獨立ナ等式ハ一ツモナイ．何トナレバ六ツノ三角函數ノ間ニ六ツノ獨立ナ等式ガアルトスレバ各三角函數ハ皆一定ノ値ヲ有シナケレバナラヌコトニナルカラデアル．

併シ上ノ五ツノ關係式カラ導キ得ル恒等式ハ限リナクアル．次ニ最モ必要ナモノ二三ヲ示サウ．

上ノ(2)及(3)カラ

$$(6)\qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

此ハ既ニ第7節ニモ記シタ．

又(1)ノ兩邊ヲ夫々 $\cos^2\alpha$ 及 $\sin^2\alpha$ デ割レバ

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

卽チ

$$(7)\qquad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$

$$(8)\qquad 1+\cot^2\alpha=\mathrm{cosec}^2\alpha$$

問　題

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ．

1. $\mathrm{cosec}A-\sin A=\cot A\cos A$

   $\sec A-\cos A=\tan A\sin A$

   $\tan A+\cot A=\sec A\,\mathrm{cosec}A$

2. $\tan^2A-\sin^2A=\tan^2A\sin^2A$

   $\cot^2A-\cos^2A=\cot^2A\cos^2A$

   $\sec^2A+\mathrm{cosec}^2A=\sec^2A\,\mathrm{cosec}^2A$

3. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$

4. $\dfrac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\mathrm{cosec}\theta}{1+\sec\theta}=\cot^3\theta$

5. $\dfrac{\tan\alpha+\sec\alpha-1}{\tan\alpha-\sec\alpha+1}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

---

6. $\sin x+\sin^2x=1$ ナルトキハ $\cos^2x+\cos^4x=1$ ナルコトヲ示セ．

7. $\cos A=\cos x\sin C$, $\cos B=\sin x\sin C$ ナルトキハ $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$ ナルコトヲ示セ．

8. $\dfrac{\cos^4A}{\cos^2B}+\dfrac{\sin^4A}{\sin^2B}=1$ ナルトキハ $\dfrac{\cos^4B}{\cos^2A}+\dfrac{\sin^4B}{\sin^2A}=1$ ナルコトヲ示セ．

9. $\cot^2A=\dfrac{\cos^2B}{\tan^2C}+\dfrac{\sin^2B}{\tan^2D}$ ナルトキハ

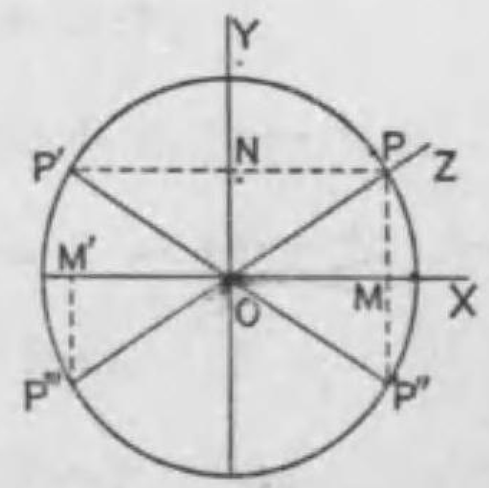
   $\mathrm{cosec}^2A=\dfrac{\cos^2B}{\sin^2C}+\dfrac{\sin^2B}{\sin^2D}$ ナルコトヲ示セ．

10. 不等式 $x^2-2x\cos\alpha+1\geqq0$ ヲ證明セヨ．（但シ x ハ實數）

11. $\sin x+\cos x=a$ ナルトキ $\tan x+\cot x$ ノ値ヲ a デ表ハセ．

12. $a\sin\theta+b\cos\theta=c$, $a'\sin\theta+b'\cos\theta=c'$ カラ θ ヲ追出セ．

22. 同ジ正弦ヲ有スル角



半直線 OX ヲ首邊トスル一ツノ角 α ノ終邊 OZ トOヲ中心トスル圓トノ交點ヲPトシ, OP ノ OY 上ニ於ケル直射影ヲ ON ト

スレバ

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OP}}$$

サテ OP ハ一定ダカラ首邊ヲ共有シテ α ト同ジ正弦ヲ有スル角 θ ニ就テハ ON ガ絶對値ニ於テモ符號ニ於テモ α ノソレニ等シイコトガ必要且十分デアル．故ニ θ ノ終邊ハ OP ニ一致スルカ又ハ OY ニ關スル OP ノ對稱ノ位置 OP′ ニ一致スルコトガ必要十分デアル．

前ノ場合卽チ θ ノ終邊ガ OP ニ一致スル場合ニハ θ ハ α ニ 2π ノ整數倍ヲ加減シタモノニ等シイ,卽チ

$$\theta=2n\pi+\alpha \quad (n \text{ ハ任意ノ整數})$$

次ニ OX ニ關スル OP ノ對稱ノ位置ヲ OP″ トスレバ, $-\alpha$ ノ終邊ハ OP″ ニ一致シ從テ $-\alpha$ ニ π ヲ加ヘタ角卽チ $\pi-\alpha$ ノ終邊ハ OP′ ニ一致スル．故ニ後ノ場合卽チ θ ノ終邊ガ OP′ ニ一致スル場合ニハ θ ハ $\pi-\alpha$ ニ 2π ノ整數倍ヲ加減シタモノニ等シイ,卽チ

$$\theta=2n\pi+(\pi-\alpha) \quad (n \text{ ハ任意ノ整數})$$

因テ一角 α ト同ジ正弦ヲ有スル角 θ ノ總テノ値ハ次ノ式デ與ヘラレル．

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \theta=2n\pi+\alpha\\&(2)\quad \theta=(2n+1)\pi-\alpha\end{aligned}\right\}\quad (n \text{ ハ任意ノ整數})$$

(1), (2) ヲ纏メテ

$$(3)\quad \theta=n\pi+(-1)^n\alpha \quad (n \text{ ハ任意ノ整數})$$

ト書クコトモデキル．

23. 同ジ餘弦ヲ有スル角

前節ノ圖デ OP ノ OX 上ニ於ケル直射影ヲ OM トスレバ

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}}$$

故ニ首邊ヲ共有シテ α ト同ジ餘弦ヲ有スル角 θ ニ就テハ OM ガ絶對値ニ於テモ符號ニ於テモ α ノソレニ等シイコトガ必要且十分デアル．故ニ θ ノ終邊ハ OP ニ一致スルカ又ハ OX ニ關スル OP ノ對稱ノ位置 OP″ ニ一致スルコトガ必要十分デアル．

因テ θ ハ α 又ハ $-\alpha$ ニ 2π ノ整數倍ヲ加減シタモノニ等シイ,卽チ一角 α ト同ジ餘弦ヲ有スル角 θ ノ總テノ値ハ

$$\theta=2n\pi\pm\alpha \quad (n \text{ ハ任意ノ整數})$$

24. 同ジ正切ヲ有スル角

第22節ノ圖デ

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM}}$$

サテ OP 卽チ $\sqrt{\mathrm{OM}^2+\mathrm{MP}^2}$ ハ一定ダカラ OM 及 MP ガ同ジ割合ニ增減スルコトハデキナイ. 故ニ首邊ヲ共有シテ α ト同ジ正切ヲ有スル角 θ ニ就テハ OM 及 MP ノ絕對値ハ夫々 α ノソレニ等シク其符號ハ共ニ α ノニ等シイカ又ハ共ニ α ノニ反スルコトガ必要十分デアル. 故ニ θ ノ終邊ハ OP ニ一致スルカ又ハ OP ノ正反對ノ位置 OP‴ 卽チ $\pi+\alpha$ ノ終邊ニ一致スルコトガ必要十分デアル.

因テ一角 α ト同ジ正切ヲ有スル角 θ ノ總テノ値ハ

$$(1)\qquad \theta=2n\pi+\alpha$$
$$(2)\qquad \theta=(2n+1)\pi+\alpha \qquad (n\text{ ハ任意ノ整數})$$

(1),(2) ヲ纒メテ

$$(3)\qquad \theta=n\pi+\alpha \qquad (n\text{ ハ任意ノ整數})$$

ト書クコトモデキル.

注意 餘切,正割,餘割ハ夫々正切,餘弦,正弦ノ逆數ダカラ,同ジ餘切,同ジ正割,又ハ同ジ餘割ヲ有スル角ハ夫夫同ジ正切,同ジ餘弦,又ハ同ジ正弦ヲ有スル角ニ等シイ. 故ニ一角 α ト同ジ餘切,同ジ正割,同ジ餘割ヲ有スル角ノ總テノ値ヲ與ヘル式ハ夫々

$$n\pi+\alpha,\quad 2n\pi\pm\alpha,\quad n\pi+(-1)^n\alpha \qquad (n\text{ ハ任意ノ整數})$$

デアル.

25. 逆三角函數

$\sin y=x$ ナルトキ角 y ヲ名ヅケテ數 x ノ**逆正弦**トイヒ,記號 $\sin^{-1}x$ デ表ハス. 卽チ $\sin^{-1}x$ ハ數 x ヲ正弦トスル角ノ意,從テ

$$\sin y=x \quad ト \quad y=\sin^{-1}x \quad ト$$

ハ全ク同ジ事實ヲ表ハス.

逆餘弦,逆正切等卽チ $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ 等ノ意義モ之ニ倣フ.[1]

$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ 等ハ何レモ x ノ函數デアル,此等ヲ通稱シテ x ノ**逆三角函數**トイフ.

正弦,餘弦ノ絕對値ハ 1 ヨリ大キクナイカラ $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ ニ於テハ x ハ -1 カラ $+1$ マデノ間ノ數デナケレバナラヌ. 又 $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ ノ x ハ任意ノ實數値デイヽ.

角ヲ與ヘレバ其三角函數ハ唯一ツニ定マルガ數ヲ與ヘタトキ其逆三角函數ハ無數ノ値ヲ有スル.[前三節] 例ヘバ $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ ノ一ツノ値ハ $\frac{\pi}{6}$ ダカラ其ノ一般ノ値ハ $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ (n ハ任意ノ整數) デアル.

サテ $-1\leqq x\leqq +1$ ナルトキ $-\frac{\pi}{2}$ カラ $+\frac{\pi}{2}$ マデノ間ニ $\sin^{-1}x$ ガ唯一ツアリ,0 カラ π マデノ間ニ $\cos^{-1}x$ ガ唯一

(1) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ 等ノ代リニ夫々 $\arcsin x$, $\arccos x$ 等ノ記號ヲ用ヒル人モアル.

ツアル. 此等ヲ夫々 $\sin^{-1}x$ 及 $\cos^{-1}x$ ノ**主値**トイフ.

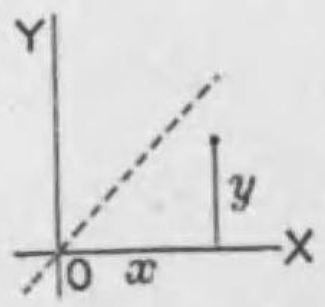
又 x ガ任意ノ實數値ナルトキ $-\frac{\pi}{2}$ ト $+\frac{\pi}{2}$ トノ間ニ $\tan^{-1}x$ ガ唯一ツアリ, 0 ト π トノ間ニ $\cot^{-1}x$ ガ唯一ツアル. 此等ヲ夫々 $\tan^{-1}x$ 及 $\cot^{-1}x$ ノ主値トイフ.

逆三角函數ノ Graph ハ次ノヤウニシテ簡單ニ求メラレル.

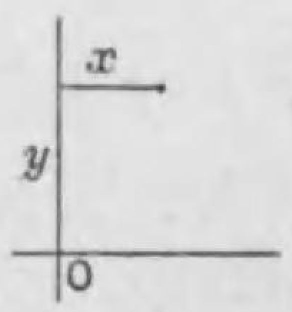
例ヘバ $y=\sin^{-1}x$ ハ $\sin y=x$ ト同ジデアツテ此式ハ第18節ニ示シタ正弦曲線 $y=\sin x$ ニ於ケル x ト y トヲ入レ換ヘタモノニ過ギナイ.

サテ次ノ甲圖デ ∠XOY ノ二等分線ヲ折目トシテ其ノ兩方ノ部分ヲ折返スト乙圖トナリ, x ト y トガ入レ換ハル.

(甲圖)



(乙圖)

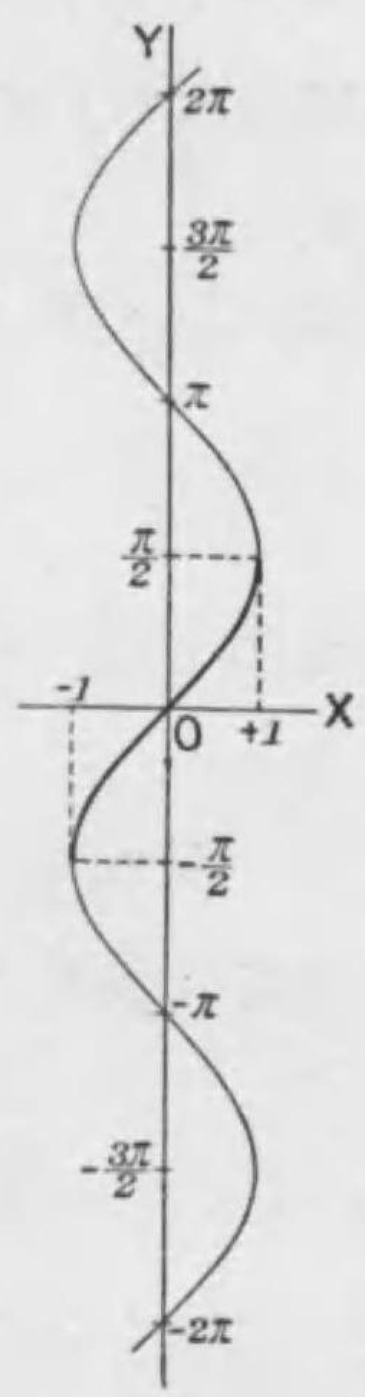


故ニ $\sin^{-1}x$ ノ Graph ハ $\sin x$ ノ Graph [第22頁] ヲ ∠XOY ノ二等分線ヲ折目トシテ折返シタモノデアル. (次頁ノ圖之ヲ逆正弦曲線トイフ. 特ニ太イ部分ハ其主値ヲ示ス.)

逆餘弦曲線等卽チ $y=\cos^{-1}x$ 等ノ Graph モ同樣ニシテ畫ケル.

逆三角函數ノ主値ノ間ノ最モ必要ナ關係式トシテ次ノ二ツガアル.

$y=\sin^{-1}x$



$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

證明 $\sin^{-1}x=y$

ト置ケバ $\sin y=x$

∴ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=x$

サテ $\sin^{-1}x$ ノ主値ニ就テハ

$$-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq+\frac{\pi}{2}$$

∴ $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{\pi}{2}-y\leqq\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

卽チ $0\leqq\frac{\pi}{2}-y\leqq\pi$

故ニ $\frac{\pi}{2}-y$ ハ $\cos^{-1}x$ ノ主値デアル.

∴ $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=y+\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\frac{\pi}{2}$

後ノ式モ同樣ニシテ證明スルコトガデキル.

26. 一ツノ三角函數ヲ以テ他ノ三角函數ヲ表ハスコト

一ツノ三角函數ノ値ヲ知レバ第21節ニ記シタ五ツ

ノ基礎關係式ニヨツテ他ノ五ツノ三角函數ノ値ヲ求メルコトガデキル.

例 $\sin x$ ヲ與ヘテ他ノ三角函數ヲ求メヨ.

解
$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$\cos x$ ニ關スル此二次方程式ヲ解ケバ

$$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

從テ
$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

等ヲ得ル.

サテ上ノヤウニ單ニ代數的ニ解イテ得タ $\cos x$ ノ二ツノ値ガ果シテ求メル三角函數ノ値トシテ採用シ得ルカドウカハ調ベテ見ナケレバワカラヌ.

$\sin x$ ガ與ヘラレタトキ, x ノ一ツノ値ヲ α トスレバ, 其ノ一般ノ値ハ $2n\pi+\alpha$ 及 $(2n+1)\pi-\alpha$ デアル.(n ハ任意ノ整數) 故ニ

$$\cos x=\cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

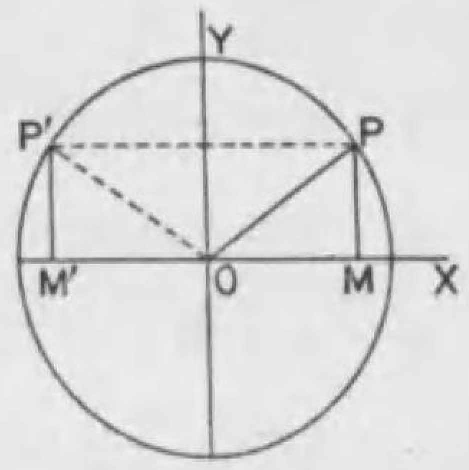
又ハ
$$\cos x=\cos\{(2n+1)\pi-\alpha\}=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

卽チ
$$\cos x=\pm\cos\alpha$$

ナル二ツノ値ヲ得ル. 故ニ上ノヤウニ代數的ニ解イテ得タ二ツノ値ガ何レモ採用サレ得ルコトガワカル.

圖ニヨツテ之ヲ說明スルコトモデキル.

先ヅ正弦ヲ與ヘタトキ此正弦ヲ有スル角ハ無數ニアル. 今



其ノ一ツノ角ノ終邊ヲ OP トスレバ,總テノ角ノ終邊ハ OP 若クハ其ノ OY ニ關スル對稱ノ位置 OP′ デアツテ, OP ヲ終邊トスル角ノ餘弦ハ $\frac{OM}{OP}$, OP′ ヲ終邊トスル角ノ餘弦ハ $\frac{OM'}{OP'}=-\frac{OM}{OP}$ 故ニ餘弦トシテ二ツノ値ヲ得ルコトガワカル.

注意 二數ノ平方ノ和ガ 1 ニ等シイトキハ此二數ヲ夫々正弦及餘弦トスル一ツノ角ガ必ズ存在スル.

何トナレバ,二數 a, b ガアツテ

$$a^2+b^2=1$$

ナラバ,a ノ絕對値ハ 1 ヨリ大キクナイカラ先ヅ正弦ガ a ニ等シイ角ハ無數ニアツテ,此等無數ノ角ノ餘弦ノ値ニハ

$$\pm\sqrt{1-a^2}=\pm\sqrt{b^2}=\pm b$$

ノ二通リアルカラ,其中デ餘弦ガ b ニナルモノモアルカラデアル.

問題

1. $\tan x$ ヲ與ヘテ $\sin x$ 及 $\cos x$ ヲ求メヨ.

2. $\cos x=0.7$ ヲ與ヘテ $\tan x$ ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ. 但シ x ハ正ノ鋭角トスル.

3. $\frac{\sin A}{\sin B}=p$, $\frac{\cos A}{\cos B}=q$ ナルトキ $\tan A$ 及 $\tan B$ ヲ p, q デ表ハ

セ.

4. $0\leqq x\leqq 1$ ナラバ $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

又 $-1\leqq x\leqq 0$ ナラバ $\sin^{-1}x=-\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

ナルコトヲ示セ. 但シ各邊ハ何レモ主値ヲ示スモノトスル.

5. $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ ヲ證明セヨ. 但シ各邊ハ何レモ主値ヲ示スモノトシ,又 a 及 x ハ何レモ正ノ數トスル.

27. 三角方程式

未知角ノ三角函數ヲ含ム方程式ヲ**三角方程式**トイフ. 三角方程式ヲ解クトハ之ニ適合スル未知角ノ値ヲ求メルコトデアル.

三角方程式ノ標準ノ形ハ次ノ三ツデアル.

第一 $\sin x=\sin\alpha$ ヲ解ケ.

解 求メル角 x ハ既知角 α ト同ジ正弦ヲ有スル角デアル. 故ニ x ノ總テノ値ハ第22節ニヨツテ次ノ通リデアル.

$$\begin{cases} x=2n\pi+\alpha \\ x=(2n+1)\pi-\alpha \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} n\text{ハ任意ノ整數} \\ \text{今後モ之ニ倣フ} \end{array}\right)$$

或ハ纒メテ

$$x=n\pi+(-1)^n\alpha$$

第二 $\cos x=\cos\alpha$ ヲ解ケ.

解 求メル角 x ハ既知角 α ト同ジ餘弦ヲ有スル角デアル. 故ニ x ノ總テノ値ハ第23節ニヨツテ

$$x=2n\pi\pm\alpha$$

第三 $\tan x=\tan\alpha$ ヲ解ケ.

解 前ニ倣ヒ第24節ニヨツテ

$$x=n\pi+\alpha$$

其他ノ三角方程式ハ適當ニ變形シテ上ノ標準ノ形ニ直シ,其上デ解ク.

例 1. $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ解ケ. 但シ x ハ $0°$ ト $360°$ トノ間ノ角トスル.

解
$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore\quad \sin x=\sin 60°$$

故ニ x ノ總テノ値ハ

$$2n.180°+60° \quad 及 \quad (2n+1).180°-60°$$

サテ n ガ 1 以上ノトキハ上ノ二式ハ何レモ $360°$ ヨリ大キクナルシ,又 n ガ負ナラバ何レモ $0°$ ヨリ小サクナル. 故ニ求メル角ハ上ノ式ニ於ケル $n=0$ ノ場合デアツテ,卽チ

$$x=60° \quad 及 \quad x=120°$$

デアル.

例 2. $\tan x+\cot x=2$ ヲ解ケ.

解 $\cot x$ ヲ $\tan x$ デ表ハセバ

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$$

卽チ
$$\tan^2 x-2\tan x+1=0$$

$\tan x$ ニ關スル此二次方程式ヲ解イテ

$$\tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}$$

故ニ x ノ一般ナル値ハ

$$x=n\pi+\frac{\pi}{4}$$

問題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

1. $\sin x=0$	**2.** $\sin x=1$	**3.** $\sin x=-1$
4. $\cos x=0$	**5.** $\cos x=1$	**6.** $\cos x=-1$
7. $\tan x=0$	**8.** $\cot x=0$	**9.** $\sin^2 x=1$
10. $\cot\theta=2\cos\theta$	**11.** $2\sin\theta=3\cot\theta$	**12.** $\sin^3 x+\cos^3 x=0$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

13. $\sin(x-y)=\frac{1}{2}$, $\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 但シ $0<x,y<\pi$ トスル.

14. $\sin x=-\frac{1}{2}$, $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

15. 方程式 $\sin x=m+\frac{1}{m}$ ハ m ノ値ニ拘ラズ不可能ナルコトヲ示セ.

16. 方程式 $\sec^2 x=\frac{4ab}{(a+b)^2}$ ハ $a=b$ ナルトキダケ解キ得ルコトヲ示セ.

17. $\sin x+2\cos x=1$ ヲ解ケ.

註 $\sin x$ 又ハ $\cos x$ ニ關スル無理方程式ニ直シテ解ケ.

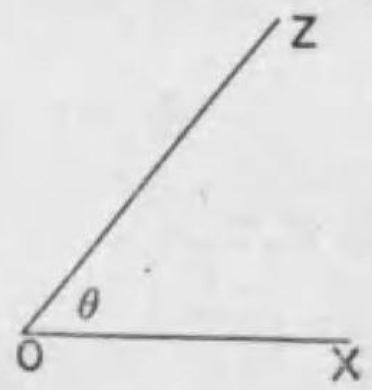
第四章

二ツ以上ノ角ノ三角函數

28. 二ツノ半直線ノナス角

二ツノ半直線 OX, OZ ノ一ツヲ首邊トシ,廻轉ノ向キノ正負ハ隨意ニ定メルコトトシ,今一ツヲ終邊トスル總テノ角ヲ此ノ二ツノ半直線ノナス角トイフ.

其中デ最小正角ヲ θ トスレバ OX, OZ ノ一ツヲ首邊他ヲ終邊トスル角ノ一ツハ其ノ廻轉ノ向キノ定メ方ニヨツテ θ 又ハ $-\theta$ ニ等シイ. 故ニ二ツノ半直線ノナス總テノ角ハ



$$2n\pi\pm\theta \qquad (n\text{ ハ任意ノ整數})$$

デ表ハサレル.

サテ $\cos(2n\pi\pm\theta)=\cos(\pm\theta)=\cos\theta$

ダカラ,二ツノ半直線ノナス總テノ角ハ同ジ餘弦ヲ有スル.

29. 直射影ノ定理

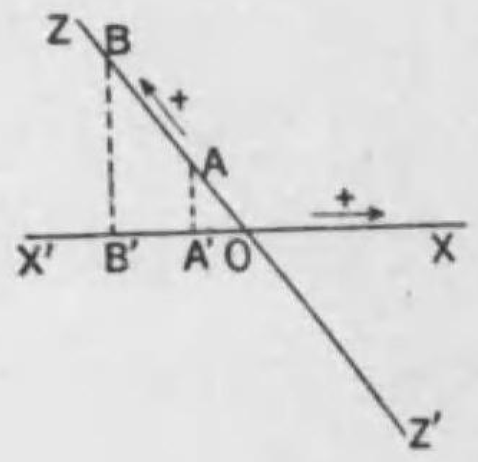
定理 直線 ZZ′ 上ニ於ケル一ツノ線分 AB ノ他ノ直線 XX′ 上ニ於ケル直射影 A′B′ ハ XX′ ノ正ノ向キトZZ′ ノ正ノ向キトノナス角 θ ノ餘弦ヲ AB ニ掛ケタ積

ニ等シイ.

即チ $$A'B'=AB.\cos\theta$$

證明

第一 ZZ′トXX′トガOデ相交ルトシ,半直線 OX ヲ XX′ ノ正ノ向キトシ,又 AB ヲ ZZ′ ノ正ノ向キトスレバ,θノ最小正値ガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ隨ツテ AB ノ直射影 A′B′ ハ正ノ向キ又ハ負ノ向キトナル. 故ニ A′B′ ト AB$\cos\theta$ トハ同符號デアル.



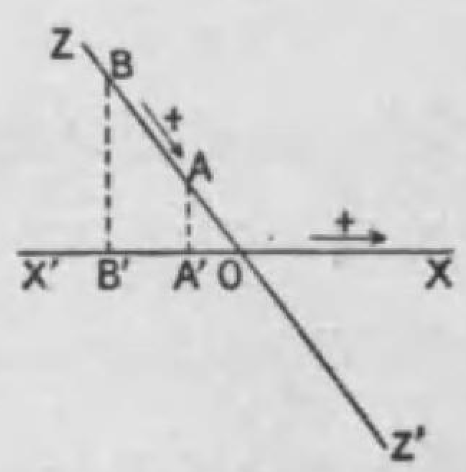
又 $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}$$

$$\therefore\quad A'B'=AB\times\frac{OB'}{OB}$$

デアツテ, $\frac{OB'}{OB}$ ノ絶對値ハ $\cos\theta$ ノ絶對値ニ等シイ. 故ニ A′B′ ノ絶對値ハ AB.$\cos\theta$ ノ絶對値ニ等シイ. 因テ

$$A'B'=AB.\cos\theta$$

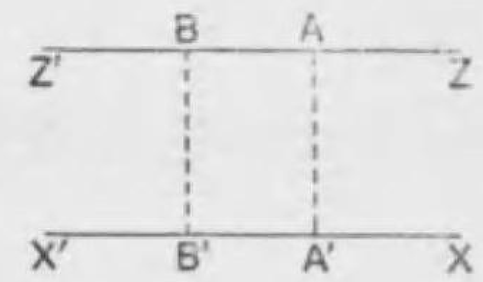
第二 若シ AB ヲ ZZ′ ノ負ノ向キトスレバ,θノ最小正値ガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ隨ツテ A′B′ ハ負又ハ正ノ向キトナル. 故ニ A′B′ ト AB.$\cos\theta$ トハ同符號デアル.



又前ト同様ニシテ A′B′ ト AB.$\cos\theta$ ノ絶對値ノ相等シイコトガワカル. 因テ

$$A'B'=AB.\cos\theta$$

第三 ZZ′ ガ XX′ ニ平行ナルトキハ,双方ノ正ノ向キガ同ジイカ又ハ相反スルカニ隨ツテθノ最小正角ハ0又ハπトナル. 故ニ



$$\cos\theta=1 \quad 又ハ \quad \cos\theta=-1$$

而シテ此場合ニハ夫々

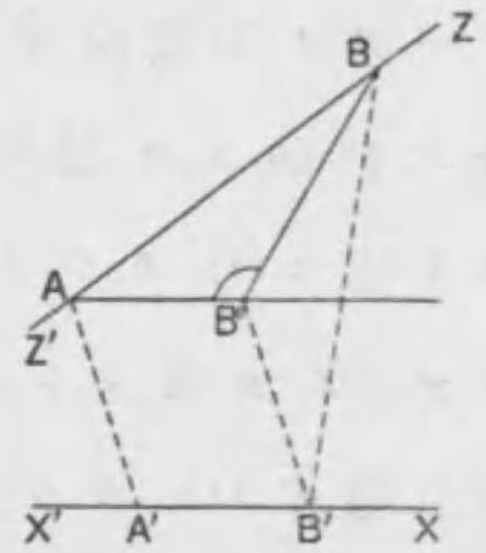
$$A'B'=AB \quad 又ハ \quad A'B'=-AB$$

$$\therefore\quad A'B'=AB.\cos\theta$$

第四 ZZ′ ガ XX′ ニ垂直ナルトキハθノ最小正値ハ $\frac{\pi}{2}$ デアツテ A′B′ ハ0ダカラ,此場合ニモ

$$A'B'=AB.\cos\theta$$

第五 ZZ′ ト XX′ トガ同ジ平面上ニナイトキハ,A カラ XX′ ニ同ジ向キノ平行線(正ノ向キガXX′ノト同一ナモノ)ヲ引キ,其上ニ AB ノ直射影 AB″ ヲ作レバ,先ヅ二直線 ZZ′,XX′ ノ正ノ向キノナス角θトハ二直線 ZZ′, AB″ ノ正ノ向キノナス角ノコトデアリ,且ツ ZZ′, AB″ ハ同ジ平面ノ上ニアルカラ前ノ證明ニヨツテ



(1)　$AB''=AB.\cos\theta$

而シテ　$BB''\perp AB''$

$AB''\,/\!/\,XX'$

$\therefore$　$BB''\perp XX'$

$\therefore$　平面 $BB'B''\perp XX'$

$\therefore$　$B'B''\perp XX'$

故ニ四邊形 $AA'B'B''$ ハ矩形デアツテ,其對邊 AB'', $A'B'$ ノ正ノ向キガ同一ダカラ

(2)　$AB''=A'B'$

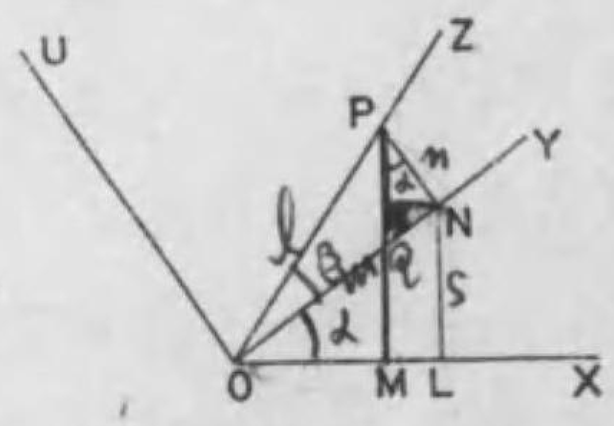
ソコデ(1),(2)カラ

$A'B'=AB.\cos\theta$

因テ本定理ハ一般ニ證明サレタ.

30. 二ツノ角ノ和ノ三角函數

一ツノ半直線ガ OX カラ發シテ $\angle\alpha$ ダケ廻ツテ OY ニ來テ更ニ OY カラ $\angle\beta$ ダケ廻ツテ OZ ニ來タトスレバ,此半直線ガ OX カラ發シテ $\angle(\alpha+\beta)$ ダケ廻レバ明カニ OZ ニ來ル.



今 OZ ノ上ニ 0 ニ等シクナイ任意ノ線分 OP ヲ取リ P カラ OX, OY ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引キ, N カラ OX ニ

垂線 NL ヲ引ケバ

(1)　$OM=OL+LM$

サテ OM ハ OP ノ OX 上ニ於ケル直射影ダカラ

(2)　$\boxed{OM=OP\cos(\alpha+\beta)}$

次ニ OL ハ ON ノ OX 上ニ於ケル直射影ダカラ

$\boxed{OL=ON\cos\alpha}$

又 ON ハ OP ノ OY 上ニ於ケル直射影ダカラ

$\boxed{ON=OP\cos\beta}$

$\therefore$　(3)　$OL=OP\cos\alpha\cos\beta$

次ニ LM ハ NP ノ OX 上ニ於ケル直射影デアル.

今 NP ノ符號ヲ $\angle\beta$ ノ首邊 OY ニ就テ考ヘレバ, NP ノ正ノ向キハ O カラ OY ト $+\frac{\pi}{2}$ ノ角ヲナス半直線 OU ノ向キデアルカラ之ト OX トノナス一ツノ角ハ $\alpha+\frac{\pi}{2}$ トナル. 故ニ

$$LM=NP\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-NP\sin\alpha$$

而シテ　$\sin\beta=\frac{NP}{OP}$

$\therefore$　$NP=OP\sin\beta$

$\therefore$　(4)　$LM=-OP\sin\alpha\sin\beta$

(2),(3),(4) ヲ (1) ニ代入スレバ

$$OP\cos(\alpha+\beta)=OP\cos\alpha\cos\beta-OP\sin\alpha\sin\beta$$

$\therefore$　(5)　$\mathbf{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

此式ハ二角ノ和ノ三角函數ヲ其ノ各角ノ三角函數デ表ハス基礎ノ關係式デアツテ,之ヲ餘弦ノ**加法定理**トイフ.

此式ニ於テ β ノ代リニ $\dfrac{\pi}{2}+\beta$ ヲ置ケバ

$$\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$$

卽チ　$$-\sin(\alpha+\beta)=-\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$$

$\therefore$ (6)　$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

ヲ得ル. 之ヲ正弦ノ加法定理トイフ.

(5),(6) ニ於テ β ヲ $-\beta$ ニ代ヘレバ次ノ二式ヲ得ル.

(7)　$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

(8)　$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

又　$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ ガ何レモ 0 デナイ場合ニハ此ノ分母分子ヲ $\cos\alpha\cos\beta$ デ割ツテ

(9)　$$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

ヲ得ル. 此式ニ於テ β ヲ $-\beta$ ニ代ヘレバ

(10)　$$\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

31. 三ツノ角ノ和ノ三角函數

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$$

sin α cos β cos γ + cos γ sin β cos γ

$$\therefore\quad \boldsymbol{\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha}$$

+ cos α cos β sin γ −

$$\boldsymbol{+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$$

$$=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

sin α cos β sin γ − sin α sin β cos γ

$$\boldsymbol{-\cos\beta\sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ガ何レモ 0 デナイ場合ニハ此分母分子ヲ $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ デ割ツテ

$$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}}$$

ヲ得ル.

32. 二倍角ノ三角函數

第30節ノ (6),(5),(9) ニ於テ $\alpha=\beta$ ト置ケバ直ニ次ノ三ツノ式ヲ得ル.

(1)　$$\boldsymbol{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

(2)　$$\boldsymbol{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

(2)′ $$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

(3) $$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

33. 三倍角ノ三角函數

第31節ノ公式ニ於テ $\alpha=\beta=\gamma$ ト置ケバ

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha$$

∴ $$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

又 $$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$$

∴ $$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

又 $$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

34. 半角ノ三角函數

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 \qquad \text{[第 27 頁 (1)]}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \qquad \text{[前頁 (2)]}$$

$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ニ關スル此聯立方程式ヲ解ケバ

(1) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

(2) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

此二式ノ複符號ハ獨立デアル.

∴ (3) $$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

コレガ $\cos\alpha$ ヲ以テ $\frac{\alpha}{2}$ ノ三角函數ヲ表ハス公式デアル.

サテ $\cos\alpha$ ガ與ヘラレタトキ, α ノ一ツノ値ヲ α' トスレバ, 其ノ一般ノ値ハ $2n\pi\pm\alpha'$ (n ハ任意ノ整數), 從テ $\frac{\alpha}{2}$ ノ一般ノ値ハ $n\pi\pm\frac{\alpha'}{2}$ デアル. 因テ $\sin\frac{\alpha}{2}$ 及 $\cos\frac{\alpha}{2}$ ノ一般ノ値ハ

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(n\pi\pm\frac{\alpha'}{2}\right) = \sin n\pi\cos\frac{\alpha'}{2} \pm \cos n\pi\sin\frac{\alpha'}{2} = \pm\sin\frac{\alpha'}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\left(n\pi\pm\frac{\alpha'}{2}\right) = \cos n\pi\cos\frac{\alpha'}{2} \mp \sin n\pi\sin\frac{\alpha'}{2} = \pm\cos\frac{\alpha'}{2}$$

デアッテ何レモ二ツノ値ヲ得ル. 故ニ上ノ代數的解法ノ結果ガ何レモ採用サレ得ルコトガワカル.

又 $$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{[第 32 節 (3)]}$$

$\tan\frac{\alpha}{2}$ ニ關スル此方程式ヲ解ケバ

(4) $$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$$

コレガ $\tan\alpha$ ヲ以テ $\tan\frac{\alpha}{2}$ ヲ表ハス公式デアル.

$\tan\alpha$ ガ與ヘラレタトキ, α ノ一ツノ値ヲ α' トスレバ, 其ノ一般ノ値ハ $2n\pi+\alpha'$ 及 $(2n+1)\pi+\alpha'$ [n ハ任意ノ整數] 從

テ $\frac{\alpha}{2}$ ノ一般ノ値ハ $n\pi+\frac{\alpha'}{2}$ 及 $n\pi+\frac{\pi+\alpha'}{2}$ 故ニ $\tan\frac{\alpha}{2}$ ノ値トシテ $\tan\frac{\alpha'}{2}$ 及 $\tan\frac{\pi+\alpha'}{2}\left(=-\cot\frac{\alpha'}{2}\right)$ ナル二通リヲ得ル.

故ニ上ノ代數解ノ結果ガ何レモ用ヒラレルコトガワカル.

35. 二ツノ角ノ正弦又ハ餘弦ノ積ヲ和ニ及和ヲ積ニ直ス公式

正弦,餘弦ノ加法定理ニヨツテ直ニ次ノ式ヲ得ル.

(1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

(2) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$

又此ノ四ツノ式ニ於テ

$$\alpha+\beta=\mathrm{A},\qquad \alpha-\beta=\mathrm{B}$$

即チ $$\alpha=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2},\qquad \beta=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$$

ト置ケバ

(5) $\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}=2\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$

(6) $\sin\mathrm{A}-\sin\mathrm{B}=2\sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$

(7) $\cos\mathrm{A}+\cos\mathrm{B}=2\cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$

(8) $\cos\mathrm{A}-\cos\mathrm{B}=2\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}$

36. 雜例

例 1. $\tan 15^\circ$ ヲ求メヨ.

解 $$\tan15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)$$
$$=\frac{\tan60^\circ-\tan45^\circ}{1+\tan60^\circ\tan45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

即チ $$\tan15^\circ=2-\sqrt{3}$$

例 2. $\sin18^\circ$ ヲ求メヨ.

解 $$\sin36^\circ=\cos(90^\circ-36^\circ)=\cos54^\circ$$

今 18° ヲ θ デ表ハセバ,上ノ等式ハ

$$\sin2\theta=\cos3\theta$$

即チ $$2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

トナル. サテ $\cos\theta=\cos18^\circ\neq0$ ダカラ,此式ノ兩邊ヲ $\cos\theta$ デ割リ

$$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3=4(1-\sin^2\theta)-3$$

即チ $$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$$

$\sin\theta$ 即チ $\sin18^\circ$ ハ正ダカラ此二次方程式ノ正根ヲ取ツテ

$$\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

注意 $$\cos18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

例 3. $\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$ ノ値ヲ求メヨ. 但シ各ノ逆函數ハ何レモ其主値ヲ示スモノトスル.

解 $\tan^{-1}\frac{1}{5}=x,\ \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)=y$ ト置ケバ

$$\tan x=\frac{1}{5},\qquad \tan y=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad \tan(x+y)=\frac{\frac{1}{5}-\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}}=-1$$

サテ x, y ハ逆正切ノ主値ダカラ

$$0<x<\frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2}<y<0$$

$$\therefore \quad -\frac{\pi}{2}<x+y<\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad x+y=-\frac{\pi}{4}$$

例 4. $A+B+C=\pi$ ナルトキ,次ノ關係式ヲ證明セヨ.

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

解 $$A+B+C=\pi \qquad [\text{假設}]$$

$$\therefore \quad A=\pi-(B+C)$$

$$\therefore \quad \cos A=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$$

$$\therefore \quad \cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C$$

$$\therefore \quad (\cos A+\cos B\cos C)^2=\sin^2B\sin^2C$$

$$=(1-\cos^2B)(1-\cos^2C)$$

$$\therefore \quad \cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

別解 $$\sin A=\sin(\pi-A)=\sin(B+C)$$

$$\therefore \quad \sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C$$

同様ニ $$\sin B=\sin C\cos A+\cos C\sin A$$

$$\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

此ノ三ツノ式カラ $\sin A, \sin B, \sin C$ ヲ追出ス. 先ヅ第一式ノ $\sin A$ ヲ後ノ二式ニ代入スレバ

$$\sin B=\sin C\cos A+\cos C(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$$

$$\sin C=(\sin B\cos C+\cos B\sin C)\cos B+\cos A\sin B$$

即チ $$\sin B(1-\cos^2C)=\sin C(\cos A+\cos B\cos C)$$

$$\sin C(1-\cos^2B)=\sin B(\cos A+\cos B\cos C)$$

$$\therefore \quad (1-\cos^2C)(1-\cos^2B)=(\cos A+\cos B\cos C)^2$$

$$\therefore \quad \cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

例 5. $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$ ナルトキ, A, B, C ノ間ノ關係ヲ求メヨ.

解 原式ヲ變形シテ

$$\cos^2A+2\cos A\cos B\cos C+\cos^2B\cos^2C$$

$$=1-\cos^2B-\cos^2C+\cos^2B\cos^2C$$

即チ $$(\cos A+\cos B\cos C)^2=(1-\cos B)(1-\cos^2C)$$

$$=\sin^2B\sin^2C$$

$$\therefore \quad (\cos A+\cos B\cos C+\sin B\sin C)(\cos A+\cos B\cos C-\sin B\sin C)=0$$

即チ $$\{\cos A+\cos(B-C)\}\{\cos A+\cos(B+C)\}=0$$

即チ $$\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A-B-C}{2}=0$$

$$\therefore \quad A\pm B\pm C=(2n+1)\pi$$

例 6. 次ノ三ツノ式カラ θ 及 ϕ ヲ追出セ.

$$\sin\theta+\sin\phi=a$$

$$\cos\theta+\cos\phi=b$$

$$\cos(\theta-\phi)=c$$

解 初ノ二式ノ兩邊ヲ平方シテ相加ヘレバ

$$2+2\cos(\theta-\phi)=a^2+b^2$$

$$\therefore \quad 2+2c=a^2+b^2$$

問　　題

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

1. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$[(1)] $=\cos^2 B-\cos^2 A$

$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

2. $\cot(A\pm B)=\dfrac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A}$

$\cot(A+B+C)=\dfrac{\cot A+\cot B+\cot C-\cot A\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C-\cot C\cot A-\cot A\cot B}$

3. $\tan(45°\pm A)=\dfrac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$

4. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$

5. $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}$

6. $\sin(30°+A)+\sin(30°-A)=\cos A$

$\cos(30°-A)-\cos(30°+A)=\sin A$

7. $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$,　　$\cos 2A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

8. $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$

$\tan\left(45°\pm\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{1\pm\sin A}{\cos A}$

9. $\operatorname{cosec} A=\tan\dfrac{A}{2}+\cot A=\cot\dfrac{A}{2}-\cot A$

$\sec A=\tan A+\tan\left(45°-\dfrac{A}{2}\right)$

10. $\tan(45°+A)=2\tan 2A+\tan(45°-A)$

11. $\cos 36°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$,　　$\sin 36°=\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

(1) 太字デ書イテアル問題ハ特ニ必要ナモノデアル.

12. $4\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)=\sin 3A$

13. $\tan A+\tan(60°+A)+\tan(120°+A)=3\tan 3A$

14. $\sin^3 A+\sin^3(120°+A)+\sin^3(240°+A)=-\dfrac{3}{4}\sin 3A$

15. $\tan(p+q)A-\tan pA-\tan qA=\tan(p+q)A\tan pA\tan qA$

16. $\cot A+\cot 2A+\cot 4A=\operatorname{cosec} 4A(2+2\cos A+3\cos 4A)$

17. $\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)=0$

$\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)=0$

$\cos A\sin(B-C)\cos(B+C-A)+\cos B\sin(C-A)\cos(C+A-B)$

$+\cos C\sin(A-B)\cos(A+B-C)=2\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$

$A+B+C=\pi$ ナルトキ次ノ各等式ヲ證明セヨ.

18. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

19. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

20. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

21. $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

---

22. $A+B+C+D=2\pi$ ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ.

$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D=4\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A+C}{2}\sin\dfrac{A+D}{2}$

23. $\sin A=\sin B$,　$\cos A=\cos B$ ナルトキハ

$A-B=2n\pi$　　(n ハ任意ノ整數)

ナルコトヲ示セ.

24. $\tan 2\theta=-\dfrac{24}{7}$ ヲ與ヘテ $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ ヲ求メヨ.

25. $\cos\theta=\dfrac{\cos\phi-e}{1-e\cos\phi}$ ナルトキハ

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{\phi}{2}$

ナルコトヲ示セ.

26. $\tan 7°30' = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ ヲ示セ.

27. $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$ ヲ示セ.

28. $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A})$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A} \mp \sqrt{1-\sin A})$$

ヲ證明シ, $\sin 330°$ ヲ以テ $\sin 165°$ ヲ表ハス式ヲ作レ.

29. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C$ ナルトキ A, B, C ノ間ノ關係ヲ求メヨ.

30. 逆函數ノ一般ノ値ニ就テ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$$

31. $a^2<1$ ナルトキ逆函數ノ主値ニ就テ次ノ式ノ成リ立ツコトヲ證明セヨ.

$$2\tan^{-1}a=\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}$$

又此式ハ逆函數ノ一般ノ値ニ就テハ必シモ成リ立タナイコトヲ示セ.

32. $\sin\alpha$ ガ與ヘレラレタトキ $\tan\frac{\alpha}{3}$ ノ値ハ六通リアルコトヲ示セ.

33. $a\sin\theta+b\cos\theta=c$, $a'\tan\theta+b'\cot\theta=c'$ カラ θ ヲ追出セ.

34. $x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$ カラ θ ヲ追出セ.

35. $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$, $\cos(\theta+\phi)=c$ カラ θ, ϕ ヲ追出セ.

37. 三角函數ヲ含ム式ヲ對數計算ニ適スルヤウニ直スコト

二ツノ數ノ對數ガ與ヘラレタトキ此二數ノ積及商ノ對數ハ容易ニ求メラレルガ,其ノ和又ハ差ノ對數ヲ求メルコトハ容易デナイ. 所ガ三角法ノ計算ニハ殆ド皆對數ヲ用ヒルカラ,計算スベキ式ノ中ニハ,極メテ簡單ナ加減ノ外和又ハ差ヲ含マナイヤウニシナケレバナラナイ,卽チ常ニ積又ハ商ノ形ニ直スコトヲ要スル.

第35節ニ示シタ (5), (6), (7), (8) ノ四式ハ此目的ニ用ヒラレル根原ノ公式デアル. 此外ニ同ジ目的ニ使ハレル式ガ頗ル多イ,就中第54頁ノ問題4, 5 第55頁ノ問題18ナドハ最モ有用ナモノデアル.

38. 二項式 $a\cos\theta+b\sin\theta$ ヲ積ノ形ニ直スコト

$$a\cos\theta+b\sin\theta=a(\cos\theta+\frac{b}{a}\sin\theta)$$

今 $\tan\phi=\frac{b}{a}$ ト置ケバ

$$a\cos\theta+b\sin\theta=a\left(\cos\theta+\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\sin\theta\right)$$

$$\therefore \quad (1) \qquad a\cos\theta+b\sin\theta=\frac{a\cos(\theta-\phi)}{\cos\phi}$$

コヽニ用ヒタ ϕ ノヤウナ角ヲ**補助角**トイフ.

注意 1. $\tan\phi=\dfrac{b}{a}$ トスレバ

$$\cos\phi=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

此複符號ノ中,+ノ方ヲ取レバ上ノ結果ハ次ノヤウニモ書ケル.

$$\text{(2)}\qquad a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\phi)$$

注意 2. $a\cos\theta+b\sin\theta$ ヲ書キ直シテ

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right)\quad \text{トスレバ}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1\quad \text{ダカラ}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\phi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\phi$$

ト置クコトガデキル(第37頁ノ注意). サウスレバ直ニ(2)ガ得ラレル.

注意 3. $\cos(\theta-\phi)$ ノ最大値ハ 1,最小値ハ -1 デアル. 故ニθガ變ルトキ $a\cos\theta+b\sin\theta$ ノ最大値ハ $\sqrt{a^2+b^2}$, 最小値ハ $-\sqrt{a^2+b^2}$ デアル.

注意 4. 特ニ $a=1,\ b=\pm1$ ト置ケバ

$$\text{(3)}\qquad \cos\theta\pm\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta\mp\frac{\pi}{4}\right)$$

ヲ得ル.

此結果ハ又次ノヤウニシテモ求メラレル.

$$\cos\theta+\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\theta$$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$\cos\theta-\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin\theta$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

39. 等差級數ヲナス角ノ正弦ノ和又ハ餘弦ノ和ヲ積ノ形ニ直スコト

第一 $S=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$

$$+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

此式ノ兩邊ニ $2\sin\dfrac{\beta}{2}$ ヲ掛ケレバ

$$2S\sin\frac{\beta}{2}=2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}+2\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}$$

$$+2\sin(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}+\cdots\cdots+2\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\left\{\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right\}+\left\{\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)\right\}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\left\{\cos\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)\right\}$$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)$$

$$=2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}$$

$$\therefore \quad (1) \qquad \mathbf{S}=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

第二 $\quad S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$

$$+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

此式ノ兩邊ニ $2\sin\dfrac{\beta}{2}$ ヲ掛ケレバ前ト同樣ニシテ同樣ノ結果ガ得ラレル．併シ此式ノ右邊ヲ悉ク正弦ニ直シテ前ノ結果ヲ用ヒル方ガ便利デアル．即チ

$$S=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-2\beta\right)+\cdots\cdots$$

$$+\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\alpha-(n-1)\beta\right\}$$

此ハ前ノ正弦ノ式ニ於テ α ヲ $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ ニ代ヘ β ヲ $-\beta$ ニ代ヘタモノデアル．故ニ

$$S=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\left(-\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad (2) \qquad \mathbf{S}=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\left(-\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

注意 (1)及(2)ニ於テ特ニ $\beta=\alpha$ ト置ケバ

$$(3) \quad \sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cdots\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\ \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$(4) \quad \cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots\cdots+\cos n\alpha=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\ \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

又特ニ $\beta=\dfrac{2\pi}{n}$ ナルトキハ

$$\sin\frac{n\beta}{2}=\sin\pi=0$$

$$\therefore \qquad S=0$$

例ヘバ $\quad \sin\alpha+\sin(\alpha+120°)+\sin(\alpha+240°)=0$

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+120°)+\cos(\alpha+240°)=0$$

40. 方程式 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ ノ解キ方

$\tan\phi=\dfrac{b}{a}$ ナル補助角ヲ用ヒ此方程式ノ左邊ヲ變形スレバ

$$\frac{a\cos(\theta-\phi)}{\cos\phi}=c \qquad \text{[第57頁 I]}$$

之カラ $\theta-\phi$ ガワカリ,從テ θ ガ求メラレル．

此方程式ガ解ケルタメノ條件ハ

$$\cos^2(\theta-\phi)\leqq1$$

即チ $\quad \dfrac{c^2}{a^2}\cos^2\phi\leqq1$

而シテ $\quad \cos^2\phi=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

$$\therefore \qquad c^2\leqq a^2+b^2$$

注意 係數ガ簡單ナトキハ $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ ヲ $\tan\dfrac{\theta}{2}$ デ表ハシ(第54頁ノ問題7ヲ見ヨ)．此方程式ヲ書直シテ

$$a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)+b\left(\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)=c$$

トシ, $\tan\dfrac{\theta}{2}$ ニ關スル此二次方程式ヲ解イテモイヽ.

結果ハ

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{b\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}$$

トナル. 併シ係數ガ繁雜ナトキハ二次方程式ノ根ハ對數計算ニ適シナイ形デアルコトニ注意セネバナラヌ.

又 $\sin\theta$ ノ代リニ $\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$ ヲ置キ代ヘ此方程式ヲ書直シテ

$$a\cos\theta\pm b\sqrt{1-\cos^2\theta}=c$$

トシテ, $\cos\theta$ ニ關スル此無理方程式ヲ解イテモイヽ. 併シ此場合ニハ根ガ對數計算ニ適シナイ上ニ方程式ノ兩邊ヲ平方スルタメニ入リ込ム餘分ノ根ヲ除クノガ通常相當ニ煩ハシイ.

41. 雜例

例 1. 方程式 $a\tan\theta+b\cot\theta=c$ ヲ解ケ.

解 $\tan\theta$ 及 $\cot\theta$ ヲ $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ デ表ハセバ

$$\frac{a\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{b\cos\theta}{\sin\theta}=c$$

分母ヲ拂ツテ

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=c\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore\quad a(1-\cos2\theta)+b(1+\cos2\theta)=c\sin2\theta$$

卽チ $$(a-b)\cos2\theta+c\sin2\theta=a+b$$

因テ前節ノ解ニ倣ツテ解クコトガデキル.

此方程式ガ解ケルタメノ條件ハ前例ノ結果ニヨツテ

$$(a+b)^2\leqq(a-b)^2+c^2$$

卽チ $$4ab\leqq c^2$$

注意 係數ガ簡單ナトキハ $\cot\theta$ ヲ $\tan\theta$ デ表ハシ

$$a\tan\theta+\frac{b}{\tan\theta}=c$$

トシテ解クガヨイ. 結果ハ

$$\tan\theta=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4ab}}{2a}$$

トナル.

例 2. $\tan A+\tan B+\tan C-\tan(A+B+C)$ ヲ對數計算ニ適スル式ニ直セ.

解 $$原式=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}-\frac{\sin(A+B)}{\cos C\cos(A+B+C)}$$ [第54頁5]

$$=\frac{\sin(A+B)\{\cos C\cos(A+B+C)-\cos A\cos B\}}{\cos A\cos B\cos C\cos(A+B+C)}$$

サテ $$\cos C\cos(A+B+C)-\cos A\cos B$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(A+B+2C)+\cos(A+B)\}-\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$$

$$=-\sin(B+C)\sin(C+A)$$

$$\therefore\quad 原式=-\frac{\sin(B+C)\sin(C+A)\sin(A+B)}{\cos A\cos B\cos C\cos(A+B+C)}$$

コレガ求メル結果デアル.

例 3. $\dfrac{a-b}{a+b}$ ヲ對數計算ニ適スル式ニ直セ.

解 $$\tan\phi=\frac{b}{a}$$

ナル補助角 ϕ ヲ取レバ

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{1-\tan\phi}{1+\tan\phi}=\tan(45°-\phi)$$

例 4. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x+y=\alpha,\quad \frac{\sin x}{\sin y}=m$$

解 第二ノ式ヲ變形シテ

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{m-1}{m+1}$$

$$\therefore\quad \frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{m-1}{m+1}\qquad [第 54 頁 4]$$

$$\therefore\quad \tan\frac{1}{2}(x-y)=\frac{m-1}{m+1}\tan\frac{\alpha}{2}$$

之カラ常ニ $x-y$ ガ求メラレル,因テソレト第一ノ式トカラ x, y ガ求メラレル.

注意 $m=\tan\phi$ トオケバ $\frac{m-1}{m+1}=\tan(\phi-45°)$

例 5. 方程式 $2\cos^2 x+3\sin x-(m+2)=0$ ヲ解キ,且ツ m ノ實數値ニツイテ吟味セヨ.

解 $\cos x$ ヲ $\sin x$ ニ直シテ

$$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-(m+2)=0$$

$$\therefore\quad 2\sin^2 x-3\sin x+m=0$$

$\sin x$ ニ關スル此二次方程式ヲ解ケバ

$$(1)\qquad \sin x=\frac{3\pm\sqrt{9-8m}}{4}$$

此根ガ $\sin x$ ノ値トシテ用ヒラレルタメニハ

$$(2)\qquad -1\leqq\frac{3\pm\sqrt{9-8m}}{4}\leqq 1$$

ナルコトガ必要十分デアル.

先ヅ(1)ノ右邊ガ實數ナルタメニハ

$$9-8m\geqq 0$$

$$\therefore\quad (3)\qquad m\leqq\frac{9}{8}$$

ソコデ此範圍内デ二重不等式(2)ヲ解カウ.

(2)ノ分母ヲ拂ツテ

$$-4\leqq 3\pm\sqrt{9-8m}\leqq 4$$

$$\therefore\quad -7\leqq\pm\sqrt{9-8m}\leqq 1$$

$$(第一)\qquad -7\leqq\sqrt{9-8m}\leqq 1$$

此場合ニ初ノ不等式ハ當然成リ立ツ. 後ノガ成リ立ツタメニハ

$$9-8m\leqq 1$$

$$\therefore\quad m\geqq 1$$

故ニ $1\leqq m\leqq\frac{9}{8}$ ナルトキニ限リ上ノ二根ノ中ノ大キイ根ガ用ヒラレル.

$$(第二)\qquad -7\leqq-\sqrt{9-8m}\leqq 1$$

此場合ニ後ノ不等式ハ當然成リ立ツ. 初ノガ成リ立ツタメニハ

$$49\geqq 9-8m$$

$$\therefore\quad m\geqq -5$$

故ニ $-5\leqq m\leqq\frac{9}{8}$ ナルトキニ限リ小サイ根ガ用ヒラレル.

以上ノ吟味ヲ纏メテ次ノ結果ヲ得ル.

$m<-5$ ナラバ不可能, $-5\leqq m<1$ ナラバ $\sin x$ ノ小サイ値ダケガ用ヒラレル, $1\leqq m\leqq\frac{9}{8}$ ナラバ $\sin x$ ノ二根ガ共ニ用ヒラレル, $\frac{9}{8}<m$ ナラバ不可能.

例 6.[1] 方程式 $(m-1)\sin^2x-3m\sin x+2m=0$ ヲ解キ,且ツ m ノ實數値ニツイテ吟味セヨ.

解 $\sin x$ ニ關スル此二次方程式ヲ解ケバ

$$\sin x=\frac{3m\pm\sqrt{m(m+8)}}{2(m-1)} \tag{1}$$

先ヅ(1)ノ右邊ガ實數ナルタメニハ

$$m(m+8)\geqq 0$$

$$\therefore \quad m\geqq 0 \quad 又ハ \quad m\leqq -8 \tag{2}$$

次ニ此範圍内ニ於テ二重不等式

$$-1\leqq\frac{3m\pm\sqrt{m(m+8)}}{2(m-1)}\leqq 1 \tag{3}$$

ヲ解ケバイヽノダガ,直接ニ此不等式ヲ解クノハヤヽ煩ハシイ.因テ他ノ方法ヲ示サウ.

上ノ $\sin x$ ノ二根ト1又ハ -1 トノ大小ハ原方程式ノ二次ノ項ノ係數 $m-1$ ノ符號ト原方程式ノ左邊ノ $\sin x$ ノ代リニ1及 -1 ヲ代入シテ得ル二式

$$(m-1).1^2-3m.1+2m=-1$$

及

$$(m-1)(-1)^2-3m(-1)+2m=6m-1$$

ノ符號トニ關係スル. 此二式ヲ夫々 $f(1)$, $f(-1)$ デ表ハサウ. 即チ

$$f(1)=-1, \quad f(-1)=6m-1 \tag{4}$$

因テ吟味ノ段階トスベキ m ノ値ハ $1, \frac{1}{6}, 0, -8$ デアル. ソコデ

(第一) $m>1$ ナラバ $m-1$ 正. $f(1)$ ハ負. $f(-1)$ ハ正. 即チ $f(1)$ ト $m-1$ トガ異符號ダカラ1ハ二根ノ間ニアルシ, $f(-1)$ ト $m-1$ トガ同符號ダカラ -1 ハ二根ノ外ニアル即チ此場合ニハ小サイ根ヨリモ小サイ. 從テ大キイ根ハ1ヨリ大キクテ用ヒラレズ,小サイ根

(1) 本例ハ省イテモイヽ

$\frac{3m-\sqrt{m(m+8)}}{2(m-1)}$ ハ1ト -1 トノ間ニアッテ用ヒラレル.

(第二) $m=1$ ナラバ原方程式ハ

$$-3\sin x+2=0 \qquad \therefore \quad \sin x=\frac{2}{3}$$

コレハ用ヒラレル.

(第三) $1>m>\frac{1}{6}$ ナラバ $m-1$ ハ負, $f(1)$ ハ負, $f(-1)$ ハ正. 故ニ -1 ハ二根ノ間ニアルシ, 1ハ二根ノ外ニアル即チ大キイ根ヨリ大キイ. 從テ小サイ根ハ -1 ヨリ小サクテ用ヒラレズ,大キイ根 $\frac{3m-\sqrt{m(m+8)}}{2(m-1)}$ ハ1ト -1 トノ間ニアッテ用ヒラレル.

(第四) $m=\frac{1}{6}$ ナラバ二根ハ -1 及 $\frac{2}{5}$ トナッテ何レモ用ヒラレル.

(第五) $\frac{1}{6}>m>0$ ナラバ $m-1$ ハ負, $f(1)$ ハ負, $f(-1)$ ハ負. 故ニ1モ -1 モ共ニ二根ノ外ニアル. ソコデ此等ガ大キイ根ヨリ大キイカ小サイ根ヨリ小サイカヲ見分ケルタメニ二根ノ和ノ半分(此ハ確ニ二根ノ間ニアル)ト較ベテ見ヨウ.

二根ノ和ノ半分ヲ t トスレバ

$$t=\frac{3m}{2(m-1)}$$

因テ

$$t-1=\frac{m+2}{2(m-1)}<0 \qquad \therefore \quad t<1$$

$$t-(-1)=\frac{5m-2}{2(m-1)}>0 \qquad \therefore \quad t>-1$$

因テ1ハ大キイ根ヨリ大キク -1 ハ小サイ根ヨリ小サイコトガワカル. 結局二根ハ何レモ1ト -1 トノ間ニアッテ用ヒラレル.

(第六) $m=0$ ナラバ等根0ヲ得テ用ヒラレル.

(第七) $m=-8$ ナラバ等根 $\frac{4}{3}$ ヲ得ル,此ハ用ヒラレナイ.

(第八) $m<-8$ ナラバ $m-1$ ハ負, $f(1)$ ハ負, $f(-1)$ ハ負. 故ニ1モ -1

モ共ニ二根ノ外ニアル．ソコデ二根ノ和ノ半分ヲtトスレバ

$$t-1=\frac{m+2}{2(m-1)}>0 \qquad \therefore \quad t>1$$

因テ1ハ小サイ根ヨリ小サイ．從テ二根ハ何レモ1ヨリ大キクテ用ヒラレナイ．

以上ノ吟味ヲ經メテ次ノ結果ヲ得ル．

$m>\frac{1}{6}$ナラバ一根$\frac{3m-\sqrt{m(m+8)}}{2(m-1)}$$\left(特ニ\ m=1\ ナラバ\ \frac{2}{3}\right)$ガ用ヒラレ，$\frac{1}{6}\geqq m\geqq 0$ナラバ二根ガ共ニ用ヒラレル，$m<0$ナラバ解ガナイ．

雜　題

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ．

1. $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120°)+\cos^2(\alpha-120°)=\frac{3}{2}$

2. $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin5\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\sin3\alpha$

3. $\sin A=\sin(36°+A)-\sin(36°-A)+\sin(72°-A)-\sin(72°+A)$

   $\cos A=\sin(54°+A)+\sin(54°-A)-\sin(18°+A)-\sin(18°-A)$

4. $\frac{\sin A+\sin3A+\sin5A+\sin7A}{\cos A+\cos3A+\cos5A+\cos7A}=\tan4A$

5. $\frac{\cos3A}{\cos A}-\frac{\cos6A}{\cos2A}+\frac{\cos9A}{\cos3A}-\frac{\cos18A}{\cos6A}$

   $=2(\cos2A-\cos4A+\cos6A-\cos12A)$

6. $\tan(A+60°)\tan(A-60°)+\tan A\tan(A+60°)$

   $+\tan(A-60°)\tan A=-3$

7. $\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)=\sin^2\alpha$

次ノ各式ヲ對數計算ニ適スルヤウニ直セ．

8. $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$

   $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

9. $1-\cos^2A-\cos^2B-\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C$

10. $(a^6+b^6)^{\frac{1}{3}}$　$\left[\frac{b^3}{a^3}=\tan\varphi\ ト置ケ．\right]$

11. $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$　$\left[\frac{b}{a}=\tan\varphi\ ト置ケ．\right]$

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ．

12. $\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\cdots\cdots+\sin(2n-1)\alpha$

13. $\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$

14. $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\cos^2\{\alpha+(n-1)\beta\}$

15. $\sin\alpha\sin2\alpha+\sin2\alpha\sin3\alpha+\cdots\cdots+\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha$

16. $\operatorname{cosec}x+\operatorname{cosec}2x+\operatorname{cosec}4x+\cdots\cdots+\operatorname{cosec}2^{n-1}x$ (第54頁9ヲ見ヨ)

17. $\sec\alpha\sec2\alpha+\sec2\alpha\sec3\alpha+\cdots\cdots+\sec n\alpha\sec(n+1)\alpha$

次ノ各方程式ヲ解ケ.

18. $\cos\theta=\cos7\theta$ **19.** $\tan\theta=\tan3\theta$

20. $\cos2\theta=\sin3\theta$ **21.** $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta=0$

22. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=3\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

23. $\sin5\theta\cos3\theta=\sin9\theta\cos7\theta$

24. $\tan2\theta=8\cos^2\theta-\cot\theta$ **25.** $\tan x-\tan2x=\sin x$

26. $\sin x+\sin2x+\sin3x=1+\cos x+\cos2x$

27. $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **28.** $\tan x-\cot x=1$

29. $\tan x+\sec2x=1$

30. $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=d$

31. $4\sin\alpha\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)=\sin3\alpha$ $(\sin\alpha\neq0)$

32. $\sin^4x+\cos^4x=m$

33. $\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\tan^{-1}(-7)$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

34. $x+y=\alpha$, $\sin x+\sin y=m$

35. $\sin x=\sqrt{2}\sin y$, $\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}\cos y$

次ノ各等式ヲ證明セヨ.

36. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

37. $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

38. $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$ 但シ各逆函數ハ何レモ其主値ヲ示ス.

---

39. $A+B+C=\pi$ ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$\begin{aligned}&\sin nA+\sin nB+\sin nC\\&\quad=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}\qquad(n\text{ 奇數})\\&\quad=-4\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}\qquad(n\text{ 偶數})\end{aligned}$$

40. $\sin\theta+\sin\varphi=a$, $\cos\theta+\cos\varphi=b$ ヲ知ツテ $\tan\frac{\theta-\varphi}{2}$ ノ値ヲ求メヨ.

41. $\tan\theta+\tan\varphi=x$, $\cot\theta+\cot\varphi=y$, $\theta+\varphi=\alpha$ カラ θ,φ ヲ追出セ.

42. $x=a\cos\theta+b\cos2\theta$, $y=a\sin\theta+b\sin2\theta$ カラ θ ヲ追出セ.

43. $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$, $\frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{by\cos\theta}{\sin^2\theta}=0$ カラ θ ヲ追出セ.

44. $\cos A=\tan B$, $\cos B=\tan C$, $\cos C=\tan A$ $(0^\circ<A,B,C<180^\circ)$ ナラバ $\sin A=\sin B=\sin C=2\sin18^\circ$ ナルコトヲ示セ.

45. 方程式 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ ノ任意ノ二根ヲ α,β トスルトキ,次ノ式ヲ證明セヨ.

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{a}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{b}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{c}$$

又 $\alpha+\beta$ ガ此方程式ノ根ナルタメニハ $a=c$ ナルベキコトヲ證明セヨ.

46. θ ガ變ルトキ次ノ各式ノ最大値及最小値ヲ求メヨ.

(1) $a\sin(\theta+\alpha)+b\sin(\theta+\beta)$

(2) $a\sin^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$

(3) $\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\quad(a,b>0)$

47. $x+y=\alpha$ ヲ與ヘテ $\sin x\sin y$ ノ最大値ヲ求メヨ.

48. $x+y+z=\alpha\ (0<x,y,z<\pi)$ ヲ與ヘテ $\sin x\sin y\sin z$ ノ最大値ヲ求メヨ.

第五章

三角函數ノ表ニ關スル理論

42. 角ノ弧度ニ關スル主要ナル定理

定理 1. 半徑 r ナル圓ニ於テ一ツノ中心角ノ弧度ヲ θ トシ,此中心角ニ對スル弧ノ長サヲ l トスレバ

$$l=r\theta,\qquad \theta=\frac{l}{r}$$

證明 長サ r ナル弧ニ對スル中心角ノ弧度ハ1ダカラ,幾何學ノ定理ニヨツテ

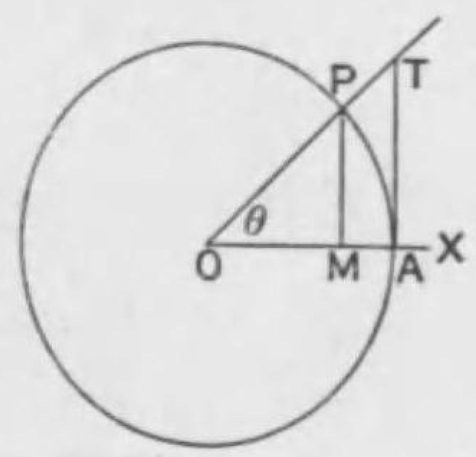
$$l:r=\theta:1$$

$$\therefore\quad l=r\theta,\qquad \theta=\frac{l}{r}$$

定理 2. 一ツノ正ノ鋭角ノ弧度ヲ θ トスレバ

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

證明 OX ヲ首邊トスル一ツノ鋭角ヲ θ トシ O ヲ中心トスル一ツノ圓ト θ ノ首邊及終邊トノ交點ヲ夫夫 A, P トシ,P カラ半徑 OA ニ引イタ垂線ノ足ヲ M トシ,A ニ於ケル切線ガ OP ノ延長ト交ル點ヲ T トスレバ,幾何學デ知ツテキルコトニヨリ



$$MP < \widehat{AP} < AT$$

$$\therefore \quad \frac{MP}{OP} < \frac{\widehat{AP}}{OA} < \frac{AT}{OA} \qquad [OP=OA]$$

即チ　$\sin\theta < \theta < \tan\theta$

定理 3.　角ガ限リナク0ニ近ヅクトキ其弧度ヲθトスレバ $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 及 $\frac{\tan\theta}{\theta}$ ハ限リナク1ニ近ヅク.

證明　先ヅθガ正ノ鋭角デアルトシ,前定理ノ不等式ノ各邊ヲ $\sin\theta$ デ割レバ

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore \quad 1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

サテθガ限リナク0ニ近ヅケバ$\cos\theta$ハ限リナク1ニ近ヅクカラ,之ト1トノ間ニ夾マレル數 $\frac{\sin\theta}{\theta}$ モ亦限リナク1ニ近ヅク.

次ニ　$$\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}$$

デアッテθガ限リナク0ニ近ヅケバ $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 及 $\frac{1}{\cos\theta}$ ハ何レモ限リナク1ニ近ヅクカラ其積 $\frac{\tan\theta}{\theta}$ モ亦限リナク1ニ近ヅク.

θガ負デアッテモ

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}, \quad \frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{\tan(-\theta)}{-\theta}$$

ダカラ同ジ結果ヲ得ル.

此事實ヲ「θガ0ナル極限ニ於テ $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 及 $\frac{\tan\theta}{\theta}$ ノ極限ハ1デアル」トイヒ,之ヲ次ノヤウニ書キ表ハス.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

本定理ハ次ノヤウニモ言ヘル.

θノ絕對値ガ甚ダ小サイトキハ$\sin\theta$及$\tan\theta$ハ何レモ殆ドθニ等シイ.

定理 4.　θガ正ノ鋭角ナルトキハ

$$\theta > \sin\theta > \theta - \frac{\theta^3}{4}$$

$$1 - \frac{\theta^2}{2} < \cos\theta < 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{16}$$

證明　先ヅ定理2ニヨッテ

$$\theta > \sin\theta$$

次ニ
$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\tan\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

サテ　$$\sin\frac{\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \tan\frac{\theta}{2} \qquad [定理2]$$

$$\therefore \quad \sin\theta > 2.\frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{\theta^2}{4}\right)$$

即チ　$$\sin\theta > \theta - \frac{\theta^3}{4}$$

次ニ $$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \cos\theta>1-2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \qquad \text{[定理 2]}$$

即チ $$\cos\theta>1-\frac{\theta^2}{2}$$

次ニ,上ノ證明ニヨツテ

$$\sin\frac{\theta}{2}>\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3$$

即チ $$\sin\frac{\theta}{2}>\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^3}{32}$$

$$\therefore \quad \cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}<1-2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^3}{32}\right)^2$$

即チ $$\cos\theta<1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{16}-2\left(\frac{\theta^3}{32}\right)^2$$

$$\therefore \quad \cos\theta<1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{16}$$

43. 三角函數表ノ作リ方

任意ノ角ノ三角函數ハ0°カラ90°マデノ同名ノ三角函數デ表ハスコトガデキルカラ[第19節],結局此間ノ三角函數表ヲ作リサヘスレバイヽ.

コヽデハ例トシテ1′オキノ表ノ作リ方ヲ述ベル.他ノ場合モ同様デアル.

先ヅ1′ノ弧度ヲθトスレバ

$$\theta=\frac{\pi}{180\times60}=\frac{3.141\,592\,653\,589\,79\ldots\ldots}{10800}$$

$$=0.000\,290\,888\,208\,665\ldots\ldots$$

$$\frac{\theta^3}{4}<\frac{1}{4}\times0.0003^3<0.000\,000\,000\,007$$

サテ sin1′ ハ θ ト $\theta-\frac{\theta^3}{4}$ トノ間ニ夾マレル數デアツテ,θ ト $\theta-\frac{\theta^3}{4}$ トハ小數第十一位マデ全ク一致スルカラ, sin1′ ノ小數第十一位マデ正シイ値ハ

$$\sin1'=0.000\,290\,888\,20$$

又 $$1-\frac{\theta^2}{2}=0.999\,999\,957\,692\,025\,029\ldots\ldots$$

$$\frac{\theta^4}{16}<\frac{1}{16}\times0.0003^4<0.000\,000\,000\,000\,000\,6$$

サテ cos1′ ハ $1-\frac{\theta^2}{2}$ ト $1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{16}$ トノ間ニ夾マレル數デ,此ノ二ツハ小數第十五位マデ全ク一致スルカラ, cos1′ ノ小數第十五位マデ正シイ値ハ

$$\cos1'=0.999\,999\,957\,692\,025$$

カヤウニ sin1′ 及 cos1′ ノ値ガワカツタカラ,其倍角ノ正弦及餘弦ヲ求メルコトガデキル,從テ1′オキノ正弦及餘弦ノ表ガ作レル.

カウシテ30°マデ進メバ,公式

$$\sin(30^\circ+A)=\cos A-\sin(30^\circ-A)$$
$$\cos(30^\circ+A)=\cos(30^\circ-A)-\sin A \qquad \text{[第54頁 6]}$$

ニヨツテ容易ニ30°カラ45°マデノ角ノ正弦及餘弦ガ計算デキル. 45°マデ進メバソレヨリ大キイ角ノ正弦及

餘弦ハ公式

$$\sin(45^\circ+A)=\cos(45^\circ-A)$$

$$\cos(45^\circ+A)=\sin(45^\circ-A)$$

ガアルカラ,計算セズニワカル.

正切ハ其定義

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

ニヨツテ求メル. 45°マデ進メバ其上ハ公式

$$\tan(45^\circ+A)=2\tan 2A+\tan(45^\circ-A)$$ [第54頁10]

ニヨツテ容易ニ求メラレル.

餘切ハ公式

$$\cot A=\tan(90^\circ-A)$$

ニヨツテ,計算セズニワカル.

正割及餘割ハ公式

$$\sec A=\tan A+\tan\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)$$

[第54頁9]

$$\operatorname{cosec} A=\tan\frac{A}{2}+\cot A$$

ニヨツテ容易ニ求メラレル. secA, cosecA ノ中ドレカ一ツヲ90°マデ算出スルカ又ハ兩方ヲドレモ45°マデ算出スレバ其他ノ部分ハ計算セズニワカル.

注意 30°以下ノ角ノ正弦及餘弦ヲ求メル上ノ方法ハ,唯カウシテ求メラレルトイフコトヲ示シタニ過ギナイ,實際ハ一層簡便ナ方法ガアル,併シ其理論ハ本書ノ程度ヲ超エル.

44. 三角函數表ノ比例挿入法ノ原則

定理 角ガ極メテ僅カ變ルトキノ三角函數ノ變化ハ殆ド角ノ變化ニ比例スル.[1]

證明 $\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$

今 h(弧度)ガ極メテ小サクテ

$$\sin\frac{h}{2}\fallingdotseq\frac{h}{2},\quad \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\fallingdotseq\cos x$$ [2]

トスレバ

$$(1)\qquad \sin(x+h)-\sin x\fallingdotseq h.\cos x$$

次ニ

$$\cos(x+h)-\cos x=-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

h ガ極メテ小サクテ

$$\sin\frac{h}{2}\fallingdotseq\frac{h}{2},\quad \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\fallingdotseq\sin x$$

トスレバ

$$(2)\qquad \cos(x+h)-\cos x\fallingdotseq h(-\sin x)$$

次ニ

$$\tan(x+h)-\tan x=\frac{\sin h}{\cos x\cos(x+h)}$$

h ガ極メテ小サクテ

$$\sin h\fallingdotseq h,\qquad \cos(x+h)\fallingdotseq\cos x$$

---

(1) 一般ニ「變數ガ極メテ僅カ變ルトキノ函數ノ變化ガ殆ド其變數ノ變化ニ比例スル」トイフコトヲ**比例挿入法ノ原則**(又ハ**比例部分ノ原則**)トイフ. 此事ハ函數ノ Graph デアル曲線ノ極僅カノ部分ハ常ニ直線ト見做シテイヽトイフコトニ當ル. 大抵ソレデイイコトハ認メラレルダラウ.

(2) ≒ ハ「殆ンド等シイ」トイフ記號.

ト置ケルトスレバ

$$(3)\qquad \tan(x+h)-\tan x \doteqdot h.\sec^2 x$$

即チ角ガ變ルトキノ正弦,餘弦,正切ノ變化ハ殆ド角ノ變化ニ比例スル.

注意 コヽニ述ベタ理論ハ甚ダ粗雜デアルガ,元來三角函數ノ表ハ殆ド實用ニ使ハナイカラ,十分ナ吟味ハ略スル.

45. 三角函數ノ對數表ノ作リ方

前々節ニ述ベタヤウニシテ三角函數ノ値ガワカレバ普通ノ對數表ニヨツテ其對數ヲ求メルコトガデキル.

但シ多クノ三角函數ノ對數表ニハ印刷ノ便ヲ謀ツテ眞ノ對數ニ10ヲ加ヘタモノヲ記シテアル. 之ヲ**表對數**トイヒ,通例記號Log(又ハ略シテL)デ表ハス.

0°カラ45°マデノ正弦及餘弦ノ對數ガワカレバ其上ノ正弦及餘弦ノ對數ハ公式

$$\log\sin(45^\circ+A)=\log\cos(45-A)$$

$$\log\cos(45^\circ+A)=\log\sin(45^\circ-A)$$

ニヨツテ計算セズニワカルシ,正切ノ對數ハ公式

$$\log\tan A=\log\frac{\sin A}{\cos A}=\log\sin A-\log\cos A$$

ニヨツテ容易ニ求メラレルシ,其他ノ三角函數ノ對數

ハ公式

$$\log\cot A=\log\frac{1}{\tan A}=-\log\tan A$$

$$\log\sec A=-\log\cos A$$

$$\log\operatorname{cosec}A=-\log\sin A$$

ニヨツテ直ニワカル.

注意 實際ニハ45°以下ノ角ノ正弦及餘弦ノ對數ヲ其三角函數ニヨラズニ角カラ直接ニ求メル方法ガアル,併シ其理論ハ本書ノ程度ヲ超エル.

46. 三角函數ノ對數表ノ比例挿入法ノ原則

豫備ノ定理 hガxニ比ベテ相當ニ小サイトキ,次ノ二ツノ式ガ成リ立ツ.

$$(1)\quad \log\sin(x+h)-\log\sin x \doteqdot \mu h\cot x-\frac{1}{2}\mu h^2\operatorname{cosec}^2 x$$

$$(2)\quad \log\tan(x+h)-\log\tan x \doteqdot \frac{2\mu h}{\sin 2x}-\frac{2\mu h^2\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

但シ log ハ常用對數, $\mu=0.43429448\cdots\cdots$[1]

證明[2] $\sin(x+h)=\sin x\cosh+\cos x\sinh$

而シテ $\cos h\doteqdot 1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{16}$, $\sin h\doteqdot h-\frac{h^3}{4}$

故ニ今hガ相當ニ小サクテh^3以上ヲ省略シテモイヽトスレバ

$$\sin(x+h)=\sin x\left(1-\frac{h^2}{2}\right)+h\cos x$$

---

(1) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots=2.7182818285$ 弱ヲ記號eデ表ハシ, $\log e=0.43429448$ 强ヲ記號μデ表ハス. μヲ常用對數ノ Modulus トイフ.

(2) 稍繁雜ダカラ略シテモイヽ.

$$\therefore \quad \frac{\sin(x+h)}{\sin x}=1+h\cot x-\frac{h^2}{2}$$

$$\therefore \quad \log\frac{\sin(x+h)}{\sin x}=\log\left(1+h\cot x-\frac{h^2}{2}\right)$$

$$\therefore \quad =\mu\left[\left(h\cot x-\frac{h^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(h\cot x-\frac{h^2}{2}\right)^2+\cdots\cdots\right]$$ [1]

$$\fallingdotseq \mu h\cot x-\frac{1}{2}\mu h^2(1+\cot^2 x) \quad [h^3\text{ 以上ハ省ク}]$$

$$\therefore \quad (1) \quad \log\sin(x+h)-\log\sin x \fallingdotseq \mu h\cot x-\frac{1}{2}\mu h^2\operatorname{cosec}^2 x$$

此式ニ於テ x ノ代リニ $90°-x$, h ノ代リニ $-h$ ト置ケバ

$$\log\sin(90°-x-h)-\log\sin(90°-x)\fallingdotseq -\mu h\cot(90°-x)-\frac{1}{2}\mu h^2\operatorname{cosec}^2(90°-x)$$

$$\therefore \quad (1)' \quad \log\cos(x+h)-\log\cos x \fallingdotseq -\mu h\tan x-\frac{1}{2}\mu h^2\sec^2 x$$

(1) カラ (1)′ ヲ邊々相引ケバ

$$[\log\sin(x+h)-\log\cos(x+h)]-[\log\sin x-\log\cos x]$$
$$\fallingdotseq \mu h(\tan x+\cot x)-\frac{1}{2}\mu h^2(\operatorname{cosec}^2 x-\sec^2 x)$$

即チ $\quad (2) \quad \log\tan(x+h)-\log\tan x \fallingdotseq \dfrac{2\mu h}{\sin 2x}-\dfrac{2\mu h^2\cos 2x}{\sin^2 2x}$

定理 角ガ極メテ僅カ變ルトキノ三角函數ノ對數ノ變化ハ殆ド角ノ變化ニ比例スル.

證明 豫備ノ定理(1),(2)ニ於テ h ガ極メテ小サクテ其平方ヲ含ム項ヲ省イテモイヽモノトスレバ

$$\log\sin(x+h)-\log\sin x \fallingdotseq h.\mu\cot x$$

$$\log\tan(x+h)-\log\tan x \fallingdotseq h.\frac{2\mu}{\sin 2x}$$

---

(1) 代數學デ證明スル次ノ定理ニヨル.

定理 x ノ絕對値ガ 1 ヨリ小サイトキハ

$$\log(1+x)=\mu\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

即チ此場合ニハ角ガ變ルトキノ正弦及正切ノ對數ノ變化ハ殆ド角ノ變化ニ比例スル.

次ニ
$$\log\cos x=\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$\log\cot x=\log\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

ダカラ餘弦及餘切ノ對數ノ變化モ亦殆ド角ノ變化ニ比例スル.

又
$$\log\sec x=-\log\cos x$$
$$\log\operatorname{cosec} x=-\log\sin x$$

ダカラ正割及餘割ノ對數ノ變化モ亦殆ド角ノ變化ニ比例スル.

47. 前節ノ吟味

前節ニ述ベタ比例挿入法ノ原則ハ極メテ大體ノコトヲ示シタニ過ギナイ,因テ次ニ委シク吟味ショウ.

對數表ニハ七桁ノ表,五桁ノ表,四桁ノ表ナド色々ノ種類ガアルシ又其體裁ニモ幾ラカノ違ヒガアル. ココデハ 1′ オキノ五桁ノ對數表ヲ用ヒルモノトシテ說明スル.

第一 角 x ガ $0°$ ニ近イトキハ $\operatorname{cosec}x$ ハ大キイカラ前節ノ公式(1)ニ於テ h^2 ノ項ヲ省クコトガデキナイ,故ニ此場合ニハ正弦ノ對數ノ變化ハ角ノ變化ニ比例シ

ナイ,卽チ比例挿入法ノ原則ガ成リ立タナイ.

例ヘバ $x=3°$, $h=1'$ トスレバ

$$h=0.00029\cdots\cdots,\quad \mu=0.434\cdots\cdots,\quad \operatorname{cosec} 3°=19.1\cdots\cdots$$

因テ $\frac{1}{2}\mu h^2\operatorname{cosec}^2 x$ ハ殆ド 0.00001 ニ等シイ. 故ニ此場合ニ此項ヲ省ケバソノタメニ起ル誤差ハ小數第五位ニ影響ヲ及ボス恐ガアル. 卽チ

3° 以下ノ角ノ正弦ノ對數ニ就テハ比例挿入法ヲ用ヒルコトガデキナイ.

又 $\cos x=\sin(90°-x)$ ダカラ

87° 以上ノ角ノ餘弦ノ對數ニ就テハ比例挿入法ヲ用ヒルコトガデキナイ.

第二 角 x ガ 0° 又ハ 90° ニ近イトキハ $\sin 2x$ ハ小サイカラ前節ノ公式(2)ニ於テ h^2 ノ項ヲ省クコトガデキナイ,故ニ此場合ニハ正切ノ對數ノ變化ハ角ノ變化ニ比例シナイ,卽チ比例挿入法ノ原則ガ成リ立タナイ.

例ヘバ $x=3°$ 又ハ 87°, $h=1'$ トスレバ

$$\sin 6°=\sin 174°=0.1045\cdots\cdots$$

又 $\cos 6°$ ハ殆ド 1 ニ等シイシ $\cos 174°$ ハ殆ド -1 ニ等シイ.

因テ $\frac{2\mu h^2\cos 2x}{\sin^2 2x}$ ノ絕對値ハ殆ド 0.00001 ニ等シイ. 故ニ此場合ニ此項ヲ省ケバソノタメニ起ル誤差ハ小數第五位ニ影響ヲ及ボス恐ガアル. 卽チ

3° 以下又ハ**87° 以上**ノ角ノ正切ノ對數ニ就テハ比例挿入法ヲ用ヒルコトガデキナイ.

又 $\cot x=\tan(90°-x)$ ダカラ

87° 以上又ハ**3° 以下**ノ角ノ餘切ノ對數ニ就テハ比例挿入法ヲ用ヒルコトガデキナイ.

第三 角 x ガ 90° ニ近イトキハ $\cot x$ ハ小サク從テ前節ノ公式(1)ノ右邊ハ極メテ小サクナルカラ,角ガ少シク變ツテモ對數ハ殆ド變ラナイ.

例ヘバ $x=87°$, $h=1'$ トスレバ

$$h=0.00029\cdots\cdots,\quad \cot 87°=0.052\cdots\cdots$$

因テ $\mu h\cot x$ ハ 0.00001 ヨリ小サイ. 故ニ此場合ニハ 1′ 以内ノ角ノ變化ハ正弦ノ對數ニ何等ノ影響ヲ與ヘナイ. 故ニ

87° 以上ノ角ニ於テハ正弦ノ對數ニヨツテ角ヲ定メルコトガデキナイ.

又 $\cos x=\sin(90°-x)$ ダカラ

3° 以下ノ角ニ於テハ餘弦ノ對數ニヨツテ角ヲ定メルコトガデキナイ.

注意 此場合ニ角ヲ與ヘテ其正弦又ハ餘弦ノ對數ヲ求メルコトニハ障リハナイ,何トナレバ比例挿入法ヲ用ヒル要ガナイカラデアル.

第四 比例挿入法ヲ用ヒ得ル部分ニ於テ,與ヘラレ

タ對數ニヨツテ角ヲ求メルニハ,與ヘラレタ對數ト表ノ中デ最モ之ニ近イ對數トノ差ヲ d, 表差(表ノ中デ與ヘラレタ對數ヲ夾ム引續イタ二ツノ對數ノ差)ヲ Δ トスレバ, $1'$未滿ノ角ハ $1'\times\dfrac{d}{\Delta}$ デ求メルノデアル. 故ニ若シ與ヘラレタ對數ニ ε ダケノ誤差ガアルトスレバ角ノ眞ノ値ハ $1'\times\dfrac{d\pm\varepsilon}{\Delta}$ トナルカラ角ノ上ニ $1'\times\dfrac{\varepsilon}{\Delta}$ ダケノ誤差ガアルコトニナル. 因テ Δ ノ大キイホド此誤差ハ小サクナル,卽チ表差ノ大キイホド精密ナ結果ヲ得ル. サテ

$$\log\tan(x+h)-\log\tan x=\log\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\log\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\log\sin(x+h)-\log\cos(x+h)-\log\sin x+\log\cos x$$
$$=\{\log\sin(x+h)-\log\sin x\}+\{\log\cos x-\log\cos(x+h)\}$$

卽チ正切ノ表差ハ正弦及餘弦ノ表差ノ和ニ等シイ, 故ニ勿論正弦又ハ餘弦ノ表差ノ何レヨリモ大キイ. 因テ

角ヲ求メルニハ其ノ正弦又ハ餘弦ニヨルヨリモ正切ニヨツテ求メル方ガ精密デアル.

注意 $$\frac{\tan(x+h)}{\tan x}=\frac{\cot x}{\cot(x+h)}$$

$$\therefore\quad \log\tan(x+h)-\log\tan x=\log\cot x-\log\cot(x+h)$$

故ニ正切及餘切ノ表差ハ相等シイ. 因テ之ヲ正切及餘切ノ通差トイフ.

48. S, T ノ表

比例挿入法ノ用ヒラレナイ場合ニ與ヘラレタ角ノ三角函數ノ對數又ハ與ヘラレタ對數ニ應ズル角ヲ求メルタメニハ,其範圍ダケ1秒オキナドノ細カイ表ヲ作ツテ置クノモアルガ,通常次ノ方法ガ用ヒラレル.

$1''$ノ弧度ヲ α トスレバ

$$\log\sin n''=\log\sin n\alpha=\log\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}.n\alpha\right)$$
$$=\log\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}+\log\alpha+\log n$$

同樣ニ $\log\tan n\alpha=\log\dfrac{\tan n\alpha}{n\alpha}+\log\alpha+\log n$

サテ角ガ3°以下ノトキハ $\dfrac{\sin n\alpha}{n\alpha}$ 及 $\dfrac{\tan n\alpha}{n\alpha}$ ハ殆ド1ニ等シイカラ其對數ハ殆ド0ニ等シク,又

$$\alpha=0.0000048481\cdots\cdots$$
$$\therefore\quad \log\alpha=\bar{6}.68557$$

デ一定ノ數デアル. 故ニ $\log\dfrac{\sin n\alpha}{n\alpha}+\log\alpha$ ヲ s, $\log\dfrac{\tan n\alpha}{n\alpha}+\log\alpha$ ヲ t (或ハ此等ニ10ヲ加ヘタモノヲ夫々 **S, T**) ト置ケバ s, t ハ何レモ $\bar{6}.68557$ ニ極メテ近イ數(從テ S, T ハ何レモ 4.68557 ニ極メテ近イ數)デアル. 實際ニ s, t ヲ計算スレバ角ノ$1'$ノ差ニ對シテ s, t ノ變化ハ0.00001ニ達シナイ,從テ$1'$未滿ノ端下ヲ四捨五入シテモ s, t ノ値ノ小數第五位目ニハ影響シナイ. 故ニ s, t (又ハ

S, T) ノ 1′ オキノ五桁ノ表ヲ作ツテ用ヒル.

此表ニヨレバ**3°以下**ノ角ノ正弦及正切ノ對數ハ次ノ式デ精密ニ求メラレル.

$$(1)\qquad \mathbf{L\sin}\, n'' = \mathbf{\log}\, n + \mathbf{S}$$

$$(2)\qquad \mathbf{L\tan}\, n'' = \mathbf{\log}\, n + \mathbf{T}$$

例 $\log\sin 2^\circ 1' 23''$ 及 $\log\tan 2^\circ 1' 23''$ ヲ求メヨ.

$$2^\circ 1' 23'' = 7283'' \quad \log 7283 = 3.86231$$

ソコデ $2^\circ 1'$ ノ所ノ S, T ヲ見レバ

$$S = 4.68549, \qquad T = 4.68575$$

$$\therefore\ \log\sin 2^\circ 1' 23'' = 3.86231 + 4.68549 - 10 = \underline{\bar{2}.54780}$$

$$\log\tan 2^\circ 1' 23'' = 3.86231 + 4.68575 - 10 = \underline{\bar{2}.54806}$$

又 $\log\sin n''$ 若クハ $\log\tan n''$ ガ與ヘラレタトキハ,先ヅ表ニヨツテ n'' ノ近似値ヲ求メ次ニ之ニ應ズル S 若クハ T ヲ求メレバ

$$(1)'\qquad \mathbf{\log}\, n = \mathbf{L\sin}\, n'' - \mathbf{S}$$

$$(2)'\qquad \mathbf{\log}\, n = \mathbf{L\tan}\, n'' - \mathbf{T}$$

ニヨツテ精密ニ n ヲ求メルコトガデキル.

例 $\mathrm{L}\sin x = 8.21648$ カラ x ヲ求メヨ.

先ヅ普通ノ三角函數ノ對數表ニヨツテ

$$x = 0^\circ 57' \text{ 弱}$$

ナルコトガワカル. ソコデ $0^\circ 57'$ ノ所ノ S ヲ見レバ

$$S = 4.68555$$

故ニ $x = n''$ トスレバ

$$\log n = 8.21648 - 4.68555 = 3.53093$$

コレカラ $\quad n = 3395.7$

$$\therefore\ \underline{x = 0^\circ 56' 35''.7}$$

87°以上ノ角ノ餘弦又ハ3°以下ノ角ノ餘切, 87°以上ノ角ノ正切及餘切ハ夫々次ノ公式ニヨツテ3°以下ノ角ノ正弦又ハ正切ニ導カレル.

$$\cos x = \sin(90^\circ - x)$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\tan(90^\circ - x)}$$

$$\cot x = \tan(90^\circ - x)$$

故ニ此等ノ角ノ三角函數ノ對數又ハ與ヘラレタ對數ニ應ズル角ハ S, T ノ表ニヨツテ精密ニ求メラレル.

注意 前節第三ニ述ベタ通リ 90°ニ近イ角 x ノ正弦ガ與ヘラレタトキハ直接ニ角ヲ求メルコトガデキナイ. 此場合ニハ

$$\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(90^\circ - x)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}$$

ニヨツテ角ヲ求メル. ($x>84^\circ$ ナラバ $45^\circ - \frac{x}{2} < 3^\circ$)

又 0°ニ近イ角 x ノ餘弦ガ與ヘラレタトキハ直接ニ角ヲ求メルコトガデキナイ. 此場合ニハ

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

又ハ $\quad \tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

ニヨツテ角ヲ求メル. ($x<6^{\circ}$ ナラバ $\frac{x}{2}<3'$)

問　題

次ノ各式ノ極限値ヲ求メヨ.

1. $m\sin\frac{a}{m}$ $[m\to\infty]$　**2.** $\frac{\sin n^{\circ}}{n}$ $[n\to 0]$　**3.** $\frac{\tan p\theta}{\tan q\theta}$ $[\theta\to 0]$

4. $\dfrac{\pi\sin\frac{\pi x}{2}}{4x\cos\frac{\pi x}{2}}$ $[x\to 0]$　**5.** $\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ $[x\to a]$

6. $\frac{\sin 4\theta\cot\theta}{(1-\cos 2\theta)\cot^{2}2\theta}$ $[\theta\to 0]$　**7.** $\frac{\tan 2\theta-2\tan\theta}{\theta^{3}}$ $[\theta\to 0]$

---

8. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ナルトキ θ ガ增セバ $\frac{\sin\theta}{\theta}$ ハ減リ, $\frac{\tan\theta}{\theta}$ ハ增スコトヲ證明セヨ.

9. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ナルトキ $\theta-\sin\theta<\tan\theta-\theta$ ナルコトヲ證明セヨ.

第六章

三角形ノ性質

本章以下デハ三角形,四邊形等ノ邊及角ハスベテ其絕對値ヲ取ルコトニスル.

又 △ABC ノ角ヲ夫々 A, B, C, 之ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c デ表ハスコトニスル.

49. 直角三角形ニ關スル定理

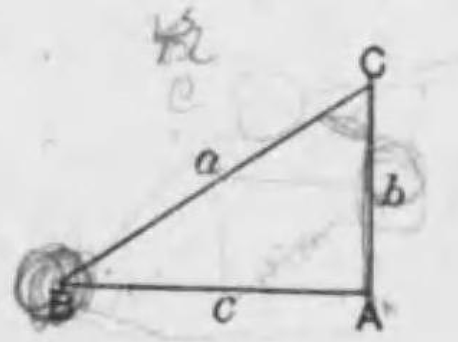
定理 直角三角形ニ於テ

(1) 一ツノ鋭角ニ對スル邊ノ長サハ斜邊ノ長サニ此角ノ正弦ヲ掛ケタ積ニ等シイ.

(2) 斜邊ト共ニ一ツノ鋭角ヲ夾ム邊ノ長サハ斜邊ノ長サニ此角ノ餘弦ヲ掛ケタ積ニ等シイ.

(3) 一ツノ鋭角ニ對スル邊ノ長サハ其邊ト共ニ直角ヲ夾ム邊ノ長サニ此角ノ正切ヲ掛ケタ積ニ等シイ.

證明 直角三角形ヲ ABC トシ, ∠A ヲ直角トショウ.



一ツノ鋭角 B ヲ, BA ヲ首邊 BC ヲ終邊トスル角ト考ヘレバ

$$\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a},\qquad \cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a},$$

$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$$

$\therefore$ (1) $\boldsymbol{b=a\sin B}$

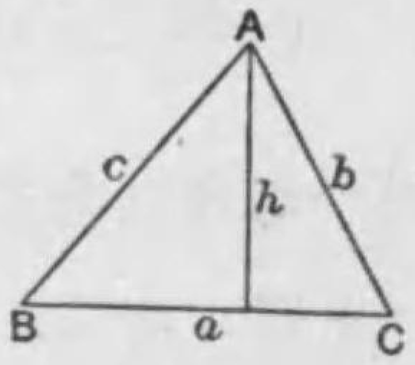
(2) $\boldsymbol{c=a\cos B}$

(3) $\boldsymbol{b=c\tan B}$

50. 正弦ノ法則

定理 三角形ノ邊ハ其對角ノ正弦ニ比例スル.

證明 △ABC ノ頂點 A カラノ高サヲ h トスレバ



$\sin B=\dfrac{h}{c}$, $\sin C=\dfrac{h}{b}$ [B, C ノ中ノ一ツガ鈍角又ハ直角デモ]

$$\therefore\quad c\sin B=h=b\sin C$$

$$\therefore\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

同様ニ $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

此結果ハ三角形ノ邊ト角トノ間ノ基礎ノ關係式デアッテ之ヲ**正弦ノ法則**又ハ**正弦比例式**トイフ.

三角形ノ三ツノ邊及三ツノ角ノ間ニハ上ノ二ツノ正弦比例式ト幾何學ノ公式

$$\boldsymbol{A+B+C=180^\circ}$$

ト合ハセテ三ツヨリ外ニ獨立ナ等式ハ一ツモナイ.

何トナレバ此外ニ尚一ツノ獨立ナ等式ガアルトスレバ,三角形ノ二邊或ハ一邊一角ヲ與ヘタトキ他ノ邊及角ハ皆一定ノ値ヲ有シ從テ三角形ガ全ク定マラネバナラヌカラデアル.

併シ上ノ三ツノ關係式カラ導キ得ル恒等式ハ限リナクアル. 次節以下ニ最モ必要ナルモノヲ述ベル.

51. 餘弦ノ法則

$$A=180^\circ-(B+C) \qquad \text{[前節]}$$

$$\therefore\quad \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B$$

故ニ正弦比例式ニヨッテ

$$\boldsymbol{a=b\cos C+c\cos B}$$

同様ニ $$\boldsymbol{b=c\cos A+a\cos C}$$

$$\boldsymbol{c=a\cos B+b\cos A}$$

此結果ヲ**餘弦ノ第一法則**トイフ.

此三式ノ兩邊ニ夫々 $a, -b, -c$ ヲ掛ケテ邊々加ヘ合ハセレバ

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$$

同様ニ $$\boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B}$$

$$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C}$$

此結果ヲ**餘弦ノ第二法則**トイフ.

52. 正切ノ法則

正弦比例式ニヨツテ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}$$

卽チ
$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{b-c}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

サテ
$$\frac{A+B+C}{2}=90^\circ$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2},\quad \sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{\cos\frac{B-C}{2}},\quad \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{\sin\frac{B-C}{2}}$$

$$\therefore\quad (1)\qquad a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

又
$$(2)\qquad a=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$$

(1),(2)ノ分母ヲ拂ツテ邊々割レバ

$$(3)\qquad \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

(3)又ハ之ト同類ノモノヲ**正切ノ法則**トイフ.

53. 邊ヲ以テ角ヲ表ハス公式

餘弦ノ第二法則カラ容易ニ

$$(1)\qquad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

ヲ得ル. コレガ三角形ノ角ヲ邊デ表ハス最モ手近ナ式デアル,併シ此右邊ガ對數計算ニ適シナイ,ソコデ次ノヤウニスル.

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

サテ三角形ノ周ノ半分ヲ s トスレバ,

$$a+b+c=2s,\qquad -a+b+c=2(s-a),$$

$$a-b+c=2(s-b),\qquad a+b-c=2(s-c)$$

又 $\frac{A}{2}$ ハ鋭角ダカラ其三角函數ハ悉ク正デアル.

$$\therefore\quad (2)\qquad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$(3)\qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

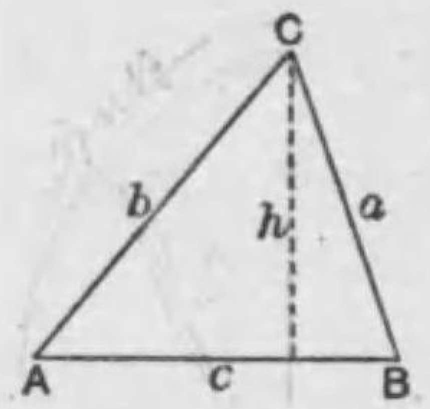
此二式カラ

$$(4)\qquad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

同様ニ $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ ノ正弦,餘弦正切ヲ與ヘル公式ヲ直ニ書キ下スコトガデキル.

54. 三角形ノ面積

定理 三角形ノ面積ハ二邊ト其ノ夾ム角ノ正弦トノ積ノ半分ニ等シイ.



證明 △ABC ノ頂點 C カラノ高サヲ h トシ,面積ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}ch$$

サテ $\sin A=\frac{h}{b}$ [A ガ鈍角デモ直角デモ]

$$\therefore \quad h=b\sin A$$

$$\therefore \quad (1) \quad \mathbf{S=\frac{1}{2}bc\sin A}$$

注意 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

此右邊ニ前節ノ公式(2),(3)ヲ持込メバ

$$(2) \quad \mathbf{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

此ハ三角形ノ邊ヲ以テ面積ヲ表ハス幾何學ノ公式ノ一ツノ證明デアル.

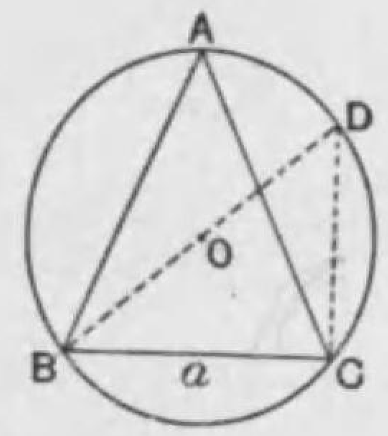
55. 三角形ノ外接圓及內接圓ノ半徑

第一 △ABC ノ一ツノ頂點 B ヲ通ツテ外接圓ノ直徑 BD ヲ引キ D,C ヲ結ベバ

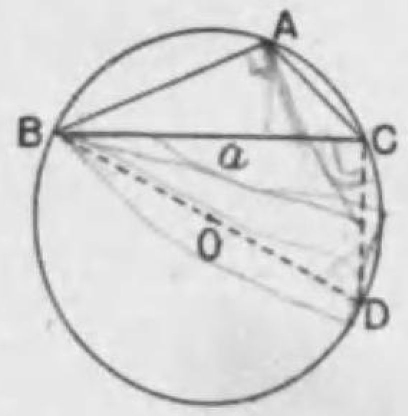
甲圖及乙圖デハ $\angle BCD=R\angle$

又甲圖デハ D=A, 乙圖デハ D=180°−A

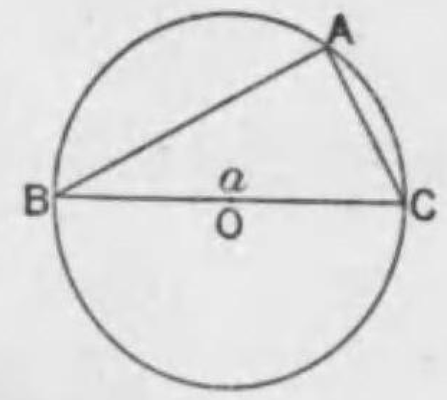
甲圖



乙圖



丙圖



因テ外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ,甲乙ドノ場合デモ

$$a=2R\sin D=2R\sin A$$

丙圖デハ $a=2R$ デアツテ A=90°

$$\therefore \quad \sin A=1$$

即チヤハリ $a=2R\sin A$

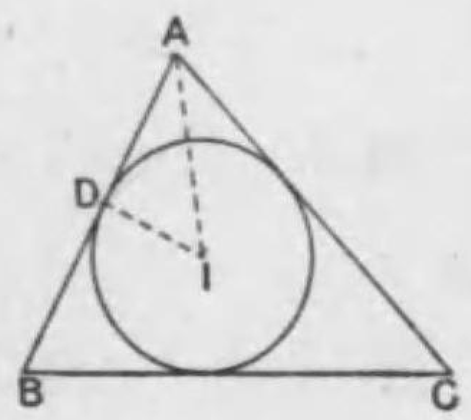
故ニ,一般ニ

$$(1) \quad \mathbf{2R=\frac{a}{\sin A}}$$

注意 同様ニ $2R=\frac{b}{\sin B}$, $2R=\frac{c}{\sin C}$

$$\therefore \quad (2) \quad \mathbf{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$

此ハ正弦比例式ノ別ノ證明デアル.



第二 △ABC ノ內接圓ガ邊 AB ニ切スル點ヲ D トスレバ,容易ニ

$$AD=s-a$$

ナルコトガワカル.

ソコデ內接圓ノ中心ヲ I, 半徑ヲ r トスレバ

$$r = \mathrm{DI} = \mathrm{AD}\tan\mathrm{DAI}$$

$$\therefore \quad (3) \qquad r = (s-a)\tan\frac{\mathrm{A}}{2}$$

注意 (3) ノ右邊＝第53節ノ(4)ヲ持込メバ

$$(4) \qquad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

56. 雜例

例 1. 任意ノ三角形＝於テ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$(b^2-c^2)\cot\mathrm{A} + (c^2-a^2)\cot\mathrm{B} + (a^2-b^2)\cot\mathrm{C} = 0$$

解 此式ハ a, b, c ＝關スル同次式デアツテ a, b, c ハ $\sin\mathrm{A}$, $\sin\mathrm{B}$, $\sin\mathrm{C}$ ＝比例スルカラ,此式ヲ證明スルタメ＝ハ a, b, c ノ代リ＝ $\sin\mathrm{A}$, $\sin\mathrm{B}$, $\sin\mathrm{C}$ ヲ置換ヘテ得ル式

$$(\sin^2\mathrm{B}-\sin^2\mathrm{C})\cot\mathrm{A} + (\sin^2\mathrm{C}-\sin^2\mathrm{A})\cot\mathrm{B} + (\sin^2\mathrm{A}-\sin^2\mathrm{B})\cot\mathrm{C} = 0$$

ヲ證明スレバイヽ.

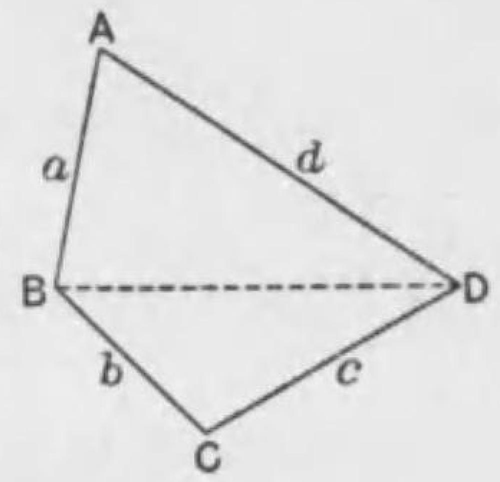
サテ此式ノ左邊ハ

$$= \sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})\cot\mathrm{A} + \sin(\mathrm{C}+\mathrm{A})\sin(\mathrm{C}-\mathrm{A})\cot\mathrm{B}$$
$$+ \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cot\mathrm{C} \qquad [\text{第 54 頁 1}]$$
$$= \sin\mathrm{A}\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})\cot\mathrm{A} + \sin\mathrm{B}\sin(\mathrm{C}-\mathrm{A})\cot\mathrm{B} + \sin\mathrm{C}\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cot\mathrm{C}$$
$$= \cos\mathrm{A}\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C}) + \cos\mathrm{B}\sin(\mathrm{C}-\mathrm{A}) + \cos\mathrm{C}\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = 0 \qquad [\text{第 55 頁 17}]$$

$$\therefore \quad (b^2-c^2)\cot\mathrm{A} + (c^2-a^2)\cot\mathrm{B} + (a^2-b^2)\cot\mathrm{C} = 0$$

例 2. 圓＝內接スル四邊形ノ邊ヲ與ヘテ其面積ヲ求メヨ.

解 任意ノ四邊形 ABCD ヲ取リ,邊 AB, BC, CD, DA ヲ夫々 a, b, c, d トシ,面積ヲ S トスレバ



$$\mathrm{BD}^2 = a^2+d^2-2ad\cos\mathrm{A}$$
$$= b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{C}$$

$$\therefore \quad (1) \quad ad\cos\mathrm{A} - bc\cos\mathrm{C} = \frac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2)$$

又 $(2) \quad ad\sin\mathrm{A} + bc\sin\mathrm{C} = 2\mathrm{S}$ ［第 54 節 1］

(1),(2) ノ兩邊ヲ平方シテ加ヘレバ

$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(\mathrm{A}+\mathrm{C}) = 4\mathrm{S}^2 + \frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$

今 $\mathrm{A}+\mathrm{C} = 2\alpha$ ト置ケバ

$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd(2\cos^2\alpha-1) = 4\mathrm{S}^2 + \frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$

$$\therefore \qquad 16\mathrm{S}^2 = 4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-16abcd\cos^2\alpha$$

然ル＝

$$4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$
$$= (2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)$$
$$= \{(a+d)^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-(a-d)^2\}$$
$$= (a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)$$
$$= 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

但シ s ハ周ノ半分デアル.

$$\therefore \quad (3) \qquad \mathrm{S}^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2 x$$

此ハ任意ノ四邊形ノ面積ヲ與ヘル公式デアル.

サテ四邊形ガ圓＝內接スル場合＝ハ

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{従テ} \quad \cos\alpha = 0$$

故＝此場合＝ハ

$$(4) \qquad \mathrm{S} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

問 題

三角形ニ於テ次ノ各式ヲ證明セヨ．

1. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

2. $(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}$

3. $a\cos\theta=b\cos(C-\theta)+c\cos(B+\theta)$ 但シ θ ハ任意ノ角デアル．

4. $b^2\cos2C+2bc\cos(B-C)+c^2\cos2B=a^2$

5. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{s-a}{s}$

6. $S=s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{abc}{4R}$

---

7. $\cos A+\cos B=\sin C$ ナル三角形ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ．

8. $b\cos B=c\cos C$ ナル三角形ハ二等邊カ又ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ．

9. b, c, A ヲ以テ角 A ノ二等分線ノ長サヲ表ハセ．

10. A カラ引イタ中線ノ長サガ二邊 b, c ノ比例中項ニ等シイトキ，b, c ヲ以テ A ヲ表ハセ．

11. A, B, C ガ等差級數ヲナストキハ

$$\frac{3}{a+b+c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

12. A, B, C ガ等差級數ヲナシ，$\sin A+\sin B+\sin C=2$ ナルトキ，a, b, c ノ間ノ關係ヲ求メヨ．

13. a, b, c ガ等差級數ヲナストキ次ノ各事項ヲ證明セヨ．

(1) $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ モマタ等差級數ヲナス．

(2) $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3$

(3) $4(1-\cos A)(1-\cos C)=\cos A+\cos C$

14. a, b, c ガ等差級數ヲナシ其ノ最大角ト最小角トノ差ガ $90°$ デアルトイフ．三邊ノ比ヲ求メヨ．

15. a, b, c ガ等比級數ヲナストキハ，其公比ハ $2\sin18°$ ヨリ大キクテ $2\cos36°$ ヨリ小サイコトヲ證明セヨ．

16. 直圓錐ノ頂角ヲ 2α トシ之ニ內容スル球ノ半徑ヲ r トシテ直圓錐ノ體積ヲ求メヨ．

17. 正 n 角錐ノ底面ノ一邊ヲ a，側稜ヲ l トスレバ，隣リ合ノ二ツノ側面ノナス角 θ ハ次ノ式デ表ハサレルコトヲ示セ．

$$\cos\theta=-\frac{4l^2\cos\frac{2\pi}{n}+a^2}{4l^2-a^2}$$

18. 圓ニ外接スル四邊形 ABCD ノ邊ヲ a, b, c, d トシ面積ヲ S トスレバ

$$S=\sqrt{abcd}\sin\frac{1}{2}(B+D)$$

ナルコトヲ示セ．

19. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點ヲ D トシ，$\angle BAD=\theta$，$\angle CAD=\varphi$ トスレバ

$$\cot\theta-\cot\varphi=\cot B-\cot C$$

ナルコトヲ證明セヨ．

20. $\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$ ナル三角形ハ正三角形ナルコトヲ證明セヨ．

21. 任意ノ三角形ニ於テ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$1<\cos A+\cos B+\cos C\leqq\frac{3}{2}$$

22. $\triangle ABC$ ノ内ニ一點 O ガアツテ $\angle OBC=\angle OCA=\angle OAB=\omega$ ナラバ

$$\cot A+\cot B+\cot C=\cot\omega$$

$$\operatorname{cosec}^2 A+\operatorname{cosec}^2 B+\operatorname{cosec}^2 C=\operatorname{cosec}^2\omega$$

ナルコトヲ證明セヨ.

第七章

三角形ノ解法

三角形ノ三ツノ邊及三ツノ角ヲ其元素トイフ.

與ヘラレタ條件カラ計算ニヨツテ三角形ノ元素ヲ求メルコトヲ此三角形ヲ解クトイフ.

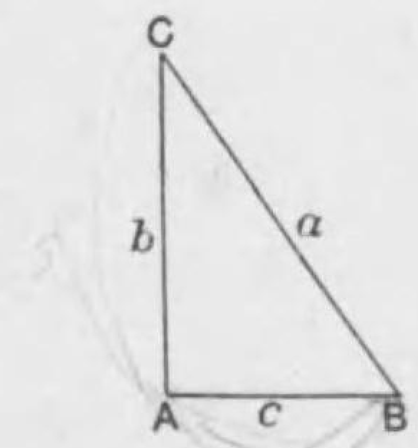
本章デハ數ノ對數表ハ五桁,三角函數ノ對數表モ亦 1′ オキノ五桁ノ對數表ヲ用ヒルコトニスル.

直角三角形ノ解法

57. 斜邊ト一ツノ鋭角トガ與ヘラレタ場合

解 斜邊 a 及鋭角 B ガ與ヘラレタトシヨウ.

先ヅ $\quad \mathbf{C=90^\circ-B}$



ニヨツテ C ヲ求メ,次ニ

$$b=a\sin B$$

$$c=a\cos B$$

ニヨツテ b, c ヲ求メル.

驗シニハ公式 $b=c\tan B$ ヲ用ヒルガヨイ.

若シ面積ガイルナラバ

$$S=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}a^2\sin B\cos B$$

ニヨツテ求メル.

例 $a=232.5$ 米, $\mathrm{B}=32^\circ 21'$ ヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ.

公式

$$\mathrm{C}=90^\circ-\mathrm{B}$$

$$\log b=\log a+\mathrm{L}\sin\mathrm{B}-10$$

$$\log c=\log a+\mathrm{L}\cos\mathrm{B}-10$$

計算

$$\mathrm{C}=90^\circ-32^\circ 21'=57^\circ 39'$$

$$\begin{array}{r}
\log a=2.36642\\
\mathrm{L}\sin\mathrm{B}=9.72843\\
\overline{10}\\
\hline
\log b=2.09485\\
b=124.41(\text{米})
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log a=2.36642\\
\mathrm{L}\cos\mathrm{B}=9.92675\\
\overline{10}\\
\hline
\log c=2.29317\\
c=196.41(\text{米})
\end{array}$$

驗シ

$$\begin{array}{r}
\log c=2.29317\\
\mathrm{L}\tan\mathrm{B}=9.80168\\
\overline{10}\\
\hline
\log b=2.09485
\end{array}$$

此結果ハ前ニ本計算デ得タ $\log b$ ノ値ニ全ク一致スル. 併シ末位ノ 1カ 2クラヰハ違ッテモ驗シハ合ッタトシテイヽ.

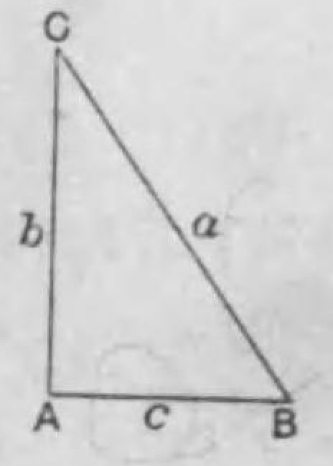
58. 直角ニ接スル一邊ト一ツノ銳角トガ與ヘラレタ場合

解 一邊 c 及銳角 B ガ與ヘラレタトショウ.

先ヅ $\quad \mathbf{C=90^\circ-B}$

次ニ $\quad a=\dfrac{c}{\cos\mathrm{B}}$

$\qquad b=c\tan\mathrm{B}$



驗シ $\quad b=a\sin\mathrm{B}$

$$\left(\mathrm{S}=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}c^2\tan\mathrm{B}\right)$$

例 $c=157.3$米, $\mathrm{B}=47^\circ 38'$ ヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ.

公式

$$\mathrm{C}=90^\circ-\mathrm{B}$$

$$\log a=\log c-\mathrm{L}\cos\mathrm{B}+10$$

$$\log b=\log c+\mathrm{L}\tan\mathrm{B}-10$$

本計算

$$\mathrm{C}=90^\circ-47^\circ 38'=42^\circ 22'$$

$$\begin{array}{r}
\log c=2.19673\\
-\mathrm{L}\cos\mathrm{B}=\overline{10}.17142\\
10\\
\hline
\log a=2.36815\\
a=233.43(\text{米})
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log c=2.19673\\
\mathrm{L}\tan\mathrm{B}=10.03998\\
\overline{10}\\
\hline
\log b=2.23671\\
b=172.47(\text{米})
\end{array}$$

補助計算

$\mathrm{L}\cos\mathrm{B}=9.82858$

驗シ

$$\begin{array}{r}
\log a=2.36815\\
\mathrm{L}\sin\mathrm{B}=9.86855\\
\overline{10}\\
\hline
\log b=2.23670
\end{array}$$

59. 斜邊ト他ノ一邊トガ與ヘラレタ場合

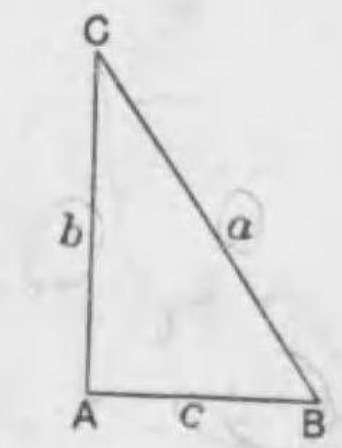
解 斜邊 a 及他ノ一邊 c ガ與ヘラレタトショウ.

先ヅ $\quad \cos\mathrm{B}=\dfrac{a}{c}$

ニヨッテ B ヲ求メ,次ニ

$$\mathbf{C=90^\circ-B}$$

$$b=a\sin\mathrm{B}$$



ニヨッテ C, b ヲ求メル.

驗シニハ公式 $b=c\tan\mathrm{B}$ ヲ用ヒルガヨイ.

$$\left(S=\frac{1}{2}ac\sin B\right)$$

別解　先ヅ　$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}=\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$

ニヨツテ B ヲ求メ,次ニ

$$C=90^\circ-B$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a-c)(a+c)}$$

ニヨツテ C, b ヲ求メル.

$$\left(S=\frac{1}{2}\sqrt{c(a-c)(a+c)}\right)$$

兩解ノ比較　面積 S ガイルトキハ兩解共ニ同ジ數ダケノ對數ガイルケレドモ, S ガ不要ナラバ初ノ解デハ $c, a, \sin B$ ナル三ツノ對數ガイルノニ後ノ解デハ $a-c, a+c$ ナル二ツノ對數デスムカラ前ノ解ヨリ良イ.

但シ a 及 c ガ直接ニ數デ與ヘラレズニ其對數デ與ヘラレタ場合ニハ前ノ解ハ遙ニ後ノ解ヨリ良イ.

又 a ト c トガ殆ド等シイ場合ニハ B ハ 0° ニ近イカラ之ヲ其餘弦カラ求メルコトガデキナイ[第47節第三]因テ此場合ニハ前ノ解ハ用ヒラレナイ. 然ルニ後ノ解ハ正切ニヨルノダカラ $\frac{B}{2}$ ガ精密ニ求メラレル.

注意　對數ハスベテ近似値ダカラ對數ヲ多ク使フ解キ方ハ,手數ガカヽル上ニ大抵ハ結果ノ誤差ガ多クナリ從テ其精密ノ度ガ減ルカラ,ナルベク避ケルガ良イ.

例　$a=5423.7$ 米, $c=4538.2$ 米ヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ.

公式

$$\mathrm{L}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\{\log(a-c)-\log(a+c)\}+10$$

$$C=90^\circ-B$$

$$\log b=\frac{1}{2}\{\log(a-c)+\log(a+c)\}$$

本計算

$$\begin{aligned}\log(a-c)&=2.94719\\ -\log(a+c)&=\bar{4}.00165\\ 2)&\overline{\bar{2}.94884}\\ &\bar{1}.47442\\ &10\\ \mathrm{L}\tan\frac{B}{2}&=9.47442\\ \frac{B}{2}&=16^\circ 36' 5''\\ B&=33^\circ 12' 10''\end{aligned}$$

$$C=90^\circ-33^\circ 12' 10''=56^\circ 47' 50''$$

$$\begin{aligned}\log(a-c)&=2.94719\\ \log(a+c)&=3.99835\\ 2)&\overline{6.94554}\\ \log b&=3.47277\\ b&=2970.1(\text{米})\end{aligned}$$

補助計算

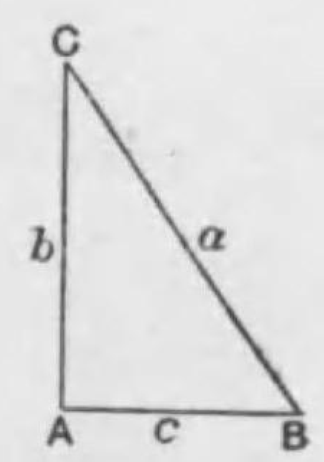
$$\begin{aligned}a&=5423.7\\ c&=4538.2\\ a-c&=885.5\\ \log(a-c)&=2.94719\\ a+c&=9961.9\\ \log(a+c)&=3.99835\end{aligned}$$

驗シ

$$\begin{aligned}\log c&=3.65688\\ \mathrm{L}\tan B&=9.81588\\ &\overline{10}\\ \log b&=3.47276\end{aligned}$$

60. 直角ヲ夾ム二邊ガ與ヘラレタ場合

解　先ヅ　$\tan B=\frac{b}{c}$



ニヨツテ B ヲ求メ,次ニ

$$C=90^\circ-B$$

$$a=\frac{b}{\sin B}$$

ニヨツテ C, a ヲ求メル.

驗シニハ公式 $c=a\cos B$ ヲ用ヒルガヨイ.

$$(S=\frac{1}{2}bc)$$

例 $b=2436.3$ 米, $c=1725.2$ 米 ヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ.

公式

$$\mathrm{L}\tan B=\log b-\log c+10$$

$$C=90^\circ-B$$

$$\log a=\log b-\mathrm{L}\sin B+10$$

$$\begin{array}{r}
\log b=3.38673\\
-\log c=\bar{4}.76316\\
10\\
\hline
\mathrm{L}\tan B=\overline{10}.14989\\
\underline{B=54^\circ\,41'\,49''}
\end{array}$$

$$C=90^\circ-54^\circ\,41'\,49''=\underline{35^\circ\,18'\,11''}$$

$$\begin{array}{r}
\log b=3.38673\\
-\mathrm{L}\sin B=\overline{10}.08826\\
10\\
\hline
\log a=3.47499\\
\underline{a=2985.3(\text{米})}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log c=3.23684\\
\mathrm{L}\sin B=9.91174
\end{array}$$

驗シ

$$\begin{array}{r}
\log a=3.47499\\
\mathrm{L}\cos B=9.76185\\
\overline{10}\\
\hline
\log c=3.23684
\end{array}$$

問　題

次ニ與ヘタモノヲ以テ直角三角形ヲ解ケ. 又其面積ヲモ求メヨ. 但シ A ヲ直角トスル.

1. $a=443.76$ 米, $C=32^\circ\,12'.5$

2. $b=683.45$ 米, $B=56^\circ\,48'\,20''$

3. $a=362.00$ 米, $b=232.45$ 米

4. $b=423.69$ 米, $c=827.34$ 米

一般三角形ノ解法

61. 一邊ト二角トガ與ヘラレタ場合

解 一邊 a 及二角 B, C ガ與ヘラレタトシヨウ.

先ヅ $\quad A=180^\circ-(B+C)$

ニヨツテ A ヲ求メ, 次ニ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

ニヨツテ b 及 c ヲ求メル.

驗シニハ公式 $a=\dfrac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$ [第52節1] ヲ用ヒルガヨイ.

若シ面積ガイルナラバ

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

ニヨツテ求メル.

例 $a=485.73$ 米, $B=78^\circ\,43'12''$, $C=66^\circ\,28'\,24''$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

公式

$$A=180^\circ-(B+C)$$

$$\log b=\log a+\mathrm{L}\sin B-\mathrm{L}\sin A$$

$$\log c=\log a+\mathrm{L}\sin C-\mathrm{L}\sin A$$

$$\begin{aligned}
B &= 78^\circ 43' 12'' \\
C &= 66^\circ 28' 24'' \\
B+C &= 145^\circ 11' 36'' \\
A &= 34^\circ 48' 24''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log a &= 2.68640 \\
\mathrm{L}\sin B &= 9.99153 \\
-\mathrm{L}\sin A &= \overline{10}.24351 \\
\hline
\log b &= 2.92144 \\
b &= 834.52(\text{米})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log a &= 2.68640 \\
\mathrm{L}\sin C &= 9.96231 \\
-\mathrm{L}\sin A &= \overline{10}.24351 \\
\hline
\log c &= 2.89222 \\
c &= 780.22(\text{米})
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lr}
\mathrm{L}\sin 78^\circ 43' & =9.99152 \\
10'' \cdots\cdots & 5 \\
2'' \cdots\cdots & 1 \\
\hline
\mathrm{L}\sin B & =9.99153
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\mathrm{L}\sin 66^\circ 28' & =9.96229 \\
20'' \cdots\cdots & 17 \\
4'' \cdots\cdots & 3 \\
\hline
\mathrm{L}\sin C & =9.96231
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\mathrm{L}\sin 34^\circ 48' & =9.75642 \\
20'' \cdots\cdots & 6 \\
4'' \cdots\cdots & 12 \\
\hline
\mathrm{L}\sin A & =9.75649
\end{array}$$

験シ

公式 $$\log a=\log(b+c)+\mathrm{L}\sin\frac{A}{2}-\mathrm{L}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\begin{aligned}
\log(b+c) &= 3.20810 \\
\mathrm{L}\sin\frac{A}{2} &= 9.47581 \\
-\mathrm{L}\cos\frac{B-C}{2} &= \overline{10}.00248 \\
\hline
\log a &= 2.68639
\end{aligned}$$

此結果ト前ニ直接ニ得タ $\log a=2.68640$ トハ末位ノ1ダケ違フガ,コレクラヰナラバ(末位ノ3マデクラヰノ違ヒナラバ)験シハ合ツタトシテイヽ.

$$b+c=1614.74$$

$$\begin{array}{lr}
\log 1614 & =3.20790 \\
7 \cdots\cdots & 189 \\
4 \cdots\cdots & 108 \\
\hline
\log(b+c) & =3.20810
\end{array}$$

$$\frac{A}{2}=17^\circ 24' 12''$$

$$\begin{array}{lr}
\mathrm{L}\sin 17^\circ 24' & =9.47573 \\
10'' \cdots\cdots & 67 \\
2'' \cdots\cdots & 13 \\
\hline
\mathrm{L}\sin\frac{A}{2} & =9.47581
\end{array}$$

$$B-C=12^\circ 14' 48''$$

$$\frac{B-C}{2}=6^\circ 7' 24''$$

$$\mathrm{L}\cos\frac{B-C}{2}=9.99752$$

62. 二邊ト其ノ夾ム角トガ與ヘラレタ場合

解 二邊 b, c 及其ノ夾ム角 A ガ與ヘラレタトシヨ

ウ.

先ヅ (1) $$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

ニヨツテ $\frac{B+C}{2}$ ヲ求メ,次ニ

(2) $$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$ [第52節3]

ニヨツテ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求メ,因テ

$$B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},\quad C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}$$

カラ B, C ヲ求メル.

次ニ (3) $$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$ [第52節1]

ニヨツテ a ヲ求メル.

注意 1. a ヲ計算スルノニ公式

(4) $$a=\frac{b\sin A}{\sin B} \text{ 又ハ } a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

ヲ用ヒテモイヽガ,サウスルト b 又ハ c ノ對數ガイル. (3) ナラバ既ニ得タ $b+c$ ノ對數デ間ニ合フダケ便利デアル.

若シ面積ガイルナラバ

(5) $$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

ニヨツテ求メル. 此場合ニハ a ヲ計算スルノニ(4)ヲ用ヒルガヨイ.

注意 2. (3)ノ代リニ

$$(6)\qquad a=\frac{(b-c)\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B-C}{2}}\qquad [第52節2]$$

ヲ用ヒテモイヽガ,實際ハ $\frac{B-C}{2}$ ガ小サイ角デアルコトガ多イカラ,此式ハ計算ニ不便デアル. 併シ特ニB, Cノ中ノ一ツガ180°ニ近ク從テ $\frac{B-C}{2}$ ガ90°ニ近イ場合ニハ(3)ヨリモ(6)ヲ用ヒルガヨイ. [第47節第一]

注意 3. 驗シニハ正弦ノ法則ヲ用ヒルガヨイ.

注意 4. b及cノ代リニ其對數ガ與ヘラレタ場合ニハ $\tan\varphi=\frac{c}{b}$ ナル補助角φヲ取リ,(2)ヲ

$$(7)\qquad \tan\frac{B-C}{2}=\tan(45^\circ-\varphi)\cot\frac{A}{2}\qquad [第63頁例3]$$

トシテ用ヒルガヨイ. 此時ハ面積ガイラナクテモaヲ計算スルノニハ(4)ヲ用ヒルガヨイ.

注意 5. B, Cガイラナクテ單ニaダケヲホシイ場合デモ,b, cガ極メテ簡單ナ數デアルトキノ外,公式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

ヲ用ヒルノハヨクナイ,對數計算ニ適シナイカラデアル. ヤハリ先ヅ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求メ,次ニ(3)ニヨツテaヲ求メルガヨイ.

此時若シ $\frac{B-C}{2}$ ガ極メテ小サケレバ餘リ精密ニ之

ヲ算出シナクテモイヽ,何トナレバ此場合ニ $\frac{B-C}{2}$ ニ少シクラキノ誤差ガアツテモ其餘弦ニハ影響シナイカラデアル. [第47節第三]

例 1. $b=431.95$米, $c=408.50$米, $A=89^\circ 35' 22''$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

公式

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

$$L\tan\frac{B-C}{2}=\log(b-c)-\log(b+c)+L\cot\frac{A}{2}$$

$$\log a=\log(b+c)+L\sin\frac{A}{2}-L\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\frac{A}{2}=44^\circ 47' 41''$$
$$\frac{B+C}{2}=45^\circ 12' 19''$$

$$\begin{aligned}\log(b-c)&=1.37014\\-\log(b+c)&=\bar{3}.07548\\L\cot\frac{A}{2}&=10.00311\\\hline L\tan\frac{B-C}{2}&=8.44873\ ^{(1)}\\-T&=\bar{5}.31431\\\hline\log\left(\frac{B-C}{2}\right)''&=3.76304\\\frac{B-C}{2}&=5795''\\&=1^\circ 36' 35''\end{aligned}$$

$$B=46^\circ 48' 54''$$
$$C=43^\circ 35' 44''$$

$$\begin{aligned}b&=431.95\\c&=408.50\\\hline b+c&=840.45\\b-c&=23.45\end{aligned}$$

$$\log(b+c)=2.92452$$

$$\begin{aligned}&L\cot 44^\circ 47' &&=10.00328\\&\quad 40''\ldots\ldots &&-167\\&\quad 1'' &&-04\\\hline &L\cot\frac{A}{2} &&=10.00311\end{aligned}$$

---

(1) $L\tan\frac{B-C}{2}=8.44873$ カラ普通ノ表デ $\frac{B-C}{2}=1^\circ 37'$ 弱ヲ求メソコデ $1^\circ 37'$ ノ所ノ $T=4.68569$ ヲ見テ $-T$ ヲ書ク.

$$\begin{aligned} \log(b+c) &= 2.92452 \\ \mathrm{L}\sin\frac{A}{2} &= 9.84792 \\ -\mathrm{L}\cos\frac{B-C}{2} &= \overline{10}.00017 \\ \hline \log a &= 2.77261 \\ a &= 592.39\ (\text{米}) \end{aligned}$$

$$\mathrm{L}\cos\frac{B-C}{2} = 9.99983$$

驗シ　$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$

$$\begin{aligned} \log b &= 2.63543 \\ \mathrm{L}\sin A &= 9.99999 \\ -\mathrm{L}\sin B &= \overline{10}.13718 \\ \hline \log a &= 2.77260 \end{aligned}$$

例 2. $\log b=2.63557$, $\log c=2.18459$, $A=65^\circ 26' 24''$ ヲ與ヘテ B, C, a ヲ求メヨ. 但シ長サノ單位ハ米トスル.

公式

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

$$\mathrm{L}\tan\phi=\log c-\log b+10$$

$$\mathrm{L}\tan\frac{B-C}{2}=\mathrm{L}\tan(45^\circ-\phi)+\mathrm{L}\cot\frac{A}{2}-10$$

$$\log a=\log b+\mathrm{L}\sin A-\mathrm{L}\sin B$$

$$\frac{A}{2}=32^\circ 43' 12''$$

$$\frac{B+C}{2}=57^\circ 16' 48''$$

$$\begin{aligned} \log c &= 2.18459 \\ -\log b &= \bar{3}.36443 \\ & \quad 10 \\ \hline \mathrm{L}\tan\phi &= 9.54902 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lr} 875\cdots\cdots 19^\circ 29' & \\ \overline{27}\cdots\cdots & 41'' \\ \hline \phi=19^\circ 29' 41'' & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\tan(45^\circ-\phi) &= 9.67860 \\ \mathrm{L}\cot\frac{A}{2} &= 10.19214 \\ & \quad \overline{10} \\ \hline \mathrm{L}\tan\frac{B-C}{2} &= 9.87074 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lr} 53\cdots\cdots 36^\circ 35' & \\ \overline{21} & \\ 173\cdots & 40'' \\ \overline{37}\cdots & 9'' \\ \hline \dfrac{B-C}{2}=36^\circ 35' 49'' & \end{array}$$

$$45^\circ-\phi=25^\circ 30' 19''$$

$$\begin{array}{lr} \mathrm{L}\tan 25^\circ 30' & =9.67850 \\ 10''\cdots\cdots & 53 \\ 9''\cdots\cdots & 48 \\ \hline \mathrm{L}\tan(45^\circ-\phi) & =9.67860 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \mathrm{L}\cot 32^\circ 43' & =10.19219 \\ 10''\cdots\cdots & -45 \\ 2''\cdots\cdots & -9 \\ \hline \mathrm{L}\cot\dfrac{A}{2} & =10.19214 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \mathrm{L}\sin 65^\circ 26' & = 9.95879 \\ 20''\cdots\cdots & 2 \\ 4''\cdots\cdots & 4 \\ \hline \mathrm{L}\sin A & =9.95881 \end{array}$$

$$\mathrm{L}\sin B=\mathrm{L}\cos 3^\circ 52' 37'' =9.99900$$

$$B=93^\circ 52' 37'$$

$$C=20^\circ 40' 59''$$

$$\begin{aligned} \log b &= 2.63557 \\ \mathrm{L}\sin A &= 9.95881 \\ -\mathrm{L}\sin B &= \overline{10}.00100 \\ \hline \log a &= 2.59538 \\ a &= 393.89\ (\text{米}) \end{aligned}$$

驗シ

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 2.18459 \\ \mathrm{L}\sin A &= 9.95881 \\ -\mathrm{L}\sin C &= \overline{10}.45199 \\ \hline \log a &= 2.59539 \end{aligned}$$

63. 三邊ガ與ヘラレタ場合

解　$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{s-a}$,　$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{s-b}$,　$\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{s-c}$

但シ　$r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

ニヨツテ $\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{B}{2}$, $\dfrac{C}{2}$ ヲ求メ,因テ A, B, C ヲ求メル.

若シ面積ガイルナラバ

$$S=rs$$

ニヨツテ求メル.

注意 1. 此場合ニ公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\quad 又ハ\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

ニヨツテ求メルノハヨクナイ, $s, s-a, s-b, s-c$ ノ對數ノ外ニ a, b, c ノ對數ガイルバカリデナク,正弦又ハ餘弦デ角ヲ求メルノハ正切デ求メルノヨリモ結果ガ不精密ニナルカラデアル. [第 47 節第四]

注意 2. 公式 $A+B+C=180^\circ$ ニヨツヲ結果ヲ驗セ.

注意 3. A ト B トヲ求メタ後ニ C ヲ $180^\circ-(A+B)$ ト

シテ求メルノハヨクナイ,カウスルト先ヅ結果ヲ簡單ニ驗スノニ困ルシ,又 A, B ニ各 ε ダケノ誤差ガアルトスレバ C ニハ 2ε ノ誤差ガアルコトトナッテ誤差ガ平均ニ分配サレナイシ,又實際上ノ解ノ通リニシテ C ヲ求メテモ r 及 $s-c$ ノ對數ハ既ニ前ニ得タノヲ使フカラサホド手數モカヽラナイカラデアル.

例 $a=506.35$ 米, $b=539.27$ 米, $c=490.68$ 米 ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ. 又其面積ヲモ求メヨ.

公式

$$\log r=\frac{1}{2}\{\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)-\log s\}$$

$$\mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}=\log r-\log(s-a)+10 \quad \text{等}$$

$$\log \mathrm{S}=\log r+\log s$$

$$\begin{array}{rl}
\log r= & 2.16768 \\
-\log(s-a)= & \bar{3}.58203 \\
 & 10 \\
\hline
\mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}= & 9.74971 \\
\frac{\mathrm{A}}{2}= & 29^\circ\, 20'\, 4'' \\
\mathrm{A}= & 58^\circ\, 40'\, 8''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log r= & 2.16768 \\
-\log(s-b)= & \bar{3}.64039 \\
 & 10 \\
\hline
\mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{B}}{2}= & 9.80807
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
781\cdots\cdots & 32^\circ\, 43' \\
\underline{\ \ 26} & \\
225\cdots\cdots & 50'' \\
\underline{\ \ 35}\cdots\cdots & 8'' \\
\hline
\frac{\mathrm{B}}{2}= & 32^\circ\, 43'\, 58'' \\
\mathrm{B}= & 65^\circ\, 27'\, 56''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
a= & 506.35 \\
b= & 539.27 \\
c= & 490.68 \\
\hline
2) & 1536.30 \\
\hline
s= & 768.15 \\
s-a= & 261.80 \\
s-b= & 228.88 \\
s-c= & 277.47
\end{array}$$

$$\log s=2.88545$$

$$\begin{array}{rl}
\log(s-a)= & 2.41797 \\
\log(s-b)= & 2.35961 \\
\log(s-c)= & 2.44322 \\
-\log s= & \bar{3}.11455 \\
\hline
2) & 4.33535 \\
\hline
\log r= & 2.16768
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log r= & 2.16768 \\
-\log(s-c)= & \bar{3}.55678 \\
 & 10 \\
\hline
\mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{C}}{2}= & 9.72446 \\
\frac{\mathrm{C}}{2}= & 27^\circ\, 56'\, 2'' \\
\mathrm{C}= & 55^\circ\, 52'\, 4''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log r= & 2.16768 \\
\log s= & 2.88545 \\
\hline
\log \mathrm{S}= & 5.05313 \\
\mathrm{S}= & 113013 \text{(平方米)}
\end{array}$$

驗シ

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{A}= & 58^\circ\, 40'\, 8'' \\
\mathrm{B}= & 65^\circ\, 27'\, 56'' \\
\mathrm{C}= & 55^\circ\, 52'\, 4'' \\
\hline
 & 180^\circ\, 0'\, 8''
\end{array}$$

此結果ハ理論上ノ内角ノ和ヨリ 8″ ダケ多イガ,コレクラヰナラバ (15″ マデクラヰノ違ヒナラバ)驗シハ合ツタトシテイ[illegible]ヽ.

64. 二邊ト其ノ一ツニ對スル角トガ與ヘラレタ場合

解 二邊 a, b 及 a ニ對スル角 A ガ與ヘラレタトショウ.

先ヅ (1) $\quad \sin\mathrm{B}=\dfrac{b\sin\mathrm{A}}{a}$

ニヨッテ B ヲ求メ,次ニ

(2) $\quad \mathrm{C}=180^\circ-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$

ニヨッテ C ヲ求メ,最後ニ

(3) $\quad c=\dfrac{a\sin\mathrm{C}}{\sin\mathrm{A}}$

ニヨッテ c ヲ求メル.

若シ面積ガイルナラバ

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}$$

ニヨッテ求メル.

吟味 先ヅ(1)カラ B ガ求メラレルタメニハ

$$\frac{b\sin A}{a} \leqq 1 \quad 即チ \quad b\sin A \leqq a$$

ナルコトヲ要スル. 故ニ

若シ $b\sin A > a$ ナラバ問題ハ不可能デアル.

若シ $b\sin A = a$ ナラバBノ唯一ツノ値トシテ90°ヲ得ル.

又若シ $b\sin A < a$ ナラバ Bノ値トシテ互ニ補角ヲナス鋭角B_1ト鈍角B_2トヲ得ル.

次ニ(2)カラCガ求メラレルタメニハ今得タBノ値ト初ニ與ヘラレタAトノ和ガ180°ヨリ小サイコトヲ要スル. 故ニ

第一 $b\sin A = a$ 即チ $B = 90^\circ$ ノトキ

(i) $A \geqq 90^\circ$ ナラバ問題ハ不可能.

(ii) $A < 90^\circ$ ナラバ一ツノ解ガアル.

第二 $b\sin A < a$ ノトキ

(i) $A \geqq 90^\circ$ ナラバ鈍角B_2ハ勿論用ヒラレナイ,而シテ鋭角B_1ガ用ヒラレルタメニハ

$$B_1 < 180^\circ - A$$

$$\therefore \quad \sin B_1 < \sin(180^\circ - A)$$

$$即チ \quad \frac{b\sin A}{a} < \sin A$$

$$\therefore \quad b < a$$

ナルコトガ必要且十分デアル.

因テ $b \geqq a$ ナラバ問題ハ不可能デアリ, $b < a$ ナラバ一ツノ解ガアル.

注意 條件 $b < a$ ガ成リ立テバ不等式 $b\sin A < a$ ハ自然ニ成リ立ツ.

(ii) $A < 90^\circ$ ナラバ鋭角B_1ハ勿論用ヒラレル,而シテ鈍角B_2ガ用ヒラレルタメニハ

$$B_2 < 180^\circ - A$$

$$\therefore \quad \sin B_2 > \sin(180^\circ - A)$$

$$即チ \quad \frac{b\sin A}{a} > \sin A$$

$$\therefore \quad b > a$$

ナルコトガ必要且ツ十分デアル.

因テ $b > a$ ナラバ二ツノ解ガアリ, $b \leqq a$ ナラバ唯一ツノ解ガアル.

此吟味ノ結果ヲ表ニ示セバ次ノ通リデアル.

$b\sin A > a$			不可能
$b\sin A = a$	$A \geqq 90^\circ$		不可能
	$A < 90^\circ$		解一ツ
$b\sin A < a$	$A \geqq 90^\circ$	$a \leqq b$	不可能
		$a > b$	解一ツ
	$A < 90^\circ$	$a \geqq b$	解一ツ
		$a < b$	解二ツ

此結果ハ幾何學デ既ニ知ツテキルコトニ全ク一致スル.

注意 1. 解ガ一ツノトキ結果ヲ驗スニハ公式

$b=\dfrac{(c+a)\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}}$ [第94頁1] ヲ用ヒルガヨイ.

又解ガ二ツアルトキハ, c ノ二ツノ値ヲ c_1, c_2 トスレバ, c ヲ未知數トスル二次方程式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

カラ直ニワカル公式

$$c_1+c_2=2b\cos A$$

ニヨツテ結果ヲ驗セ.

注意 2. コヽニ述ベタ三角形ノ解法ハ實地ニハ餘リ用ヒナイカラ數ニ關スル實例ヲ省ク.

問題

1. $a=232.41$米, $B=39°16'50''$, $C=84°27'20''$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ. 且ツ其面積ヲモ求メヨ.

2. $b=570.94$米, $c=497.86$米, $A=63°27'51''$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

3. $\log b=2.87205$, $\log c=2.85983$, $A=112°57'34''$ ヲ與ヘテ a, B, C 及面積ヲ計算セヨ. 但シ長サノ單位ハ米トスル.

4. $a=675.43$米, $b=608.79$米, $c=585.55$米ヲ與ヘテ三角形ヲ解

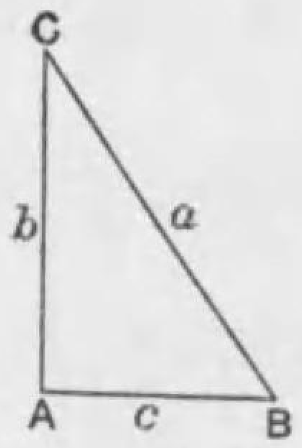
ケ. 又其面積ヲモ求メヨ.

5. $a=18.793$粁, $b=26.759$粁, $A=29°25'18''$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

6. $a=4920.3$米, $b=3549.1$米, $A=50°12'19''$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

65. 雜例

例 1. 斜邊 a 及他ノ二邊ノ和 $b+c$ ヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ.



解 先ヅ (1) $\dfrac{B+C}{2}=45°$

次ニ $$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \quad \text{[第94頁1]}$$

∴ (2) $$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a\sqrt{2}}$$

コレカラ $\dfrac{B-C}{2}$ ヲ求メ, 之ト(1)トカラ B, C ヲ求メル.

次ニ $$b=a\sin B,\quad c=a\cos B$$

カラ b, c ヲ求メル.

例 2. 周ト角トヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

解 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2s}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \quad \text{[第55頁18]}$$

∴ $$a=\frac{s\sin A}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

同樣ニ $$b=\frac{s\sin B}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},\quad c=\frac{s\sin C}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

注意 右邊ノ分母分子ヲ約スルト稍簡單ニナルケレドモ實際ハ約シナイ方ガ却テ便利デアル

問　　題

1. 一銳角 B 及直角ヲ夾ム二邊ノ和 $b+c$ ヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ.

2. 一邊 a, 其對角 A 及他ノ二邊ノ和 $b+c$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

3. 一邊 a, 一角 B 及他ノ二邊ノ和 $b+c$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

4. 二邊 b, c 及其ノ夾ム角ノ二等分線ノ長サ l ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

5. 面積 S, 周圍 $2s$ 及一角 A ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

6. 底邊 a, 頂角 A 及高サ h ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

第八章

測量上ノ應用

66. 主要ナル術語

本章デハ三角形ノ解法ヲ測量ニ應用スルトキニ起ル簡單ナ數例ヲ述ベル.

先ヅ測量ニ關スル二三ノ術語ノ意義ヲ說明スル.

錘ヲ吊シタトキソレガ取ル方向卽チ重力ノ方向ト一致スル直線ヲ**鉛直線**トイフ.

鉛直線ヲ含ム任意ノ平面ヲ**鉛直面**トイフ.

鉛直線ニ垂直ナル任意ノ平面ヲ**水平面**トイフ.

水平面上ノ任意ノ直線ヲ**水平線**トイフ.

一點ヲ A, 觀測點ヲ O トスルトキ半直線 OA ガ O ヲ通ル水平面トナス角ヲ O ニ於ケル點 A ノ**高度**トイフ. 此半直線ガ此水平面ノ上ニアルカ下ニアルカニヨツテ其高度ハ正又ハ負ノ角デアルトスル.

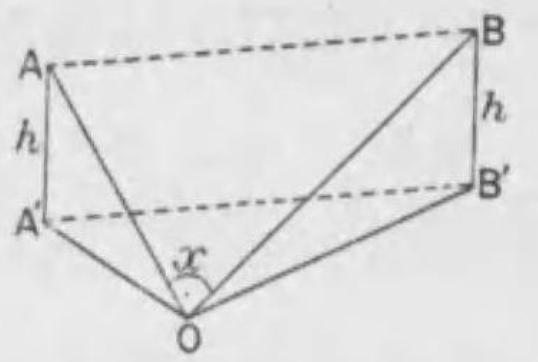
正ノ高度ヲ**仰角**トモイヒ,負ノ高度ヲ**俯角**トモイフ.

長サヲ直接ニ測ル線分ヲ**基線**トイフ.

注意 本章デハ適當ナ器械ヲ用ヒテ地面ノ上ニ一ツノ線分ヲ引イテ其ノ長サヲ測ルコト及一ツノ角ノ頂點ニ在ツテ其角ヲ測ルコトガデキルモノト見做ス.

線分ノ長サヲ測ルニハ必要ノ度ニヨツテ測鎖其他色々ノ器具ヲ用ヒル.

角ヲ測ルニハ通常經緯儀ヲ用ヒル. 經緯儀デハ水平面又ハ鉛直面內ニアル角ノ頂點ニアツテ其角ヲ測ルコトガデキル.



今水平面又ハ鉛直面內ニナイ一ツノ角 $AOB=x$ ガアルトキ,Oヲ通ル水平面上ニ於ケル此角ノ直射影ヲ$A'OB'$トシ,鉛直角 $A'OA=\alpha$, $B'OB=\beta$ 及水平角 $A'OB'=\gamma$ ヲ測レバ

$$OA^2+OB^2-2.OA.OB\cos x=AB^2$$

$$OA'^2+OB'^2-2.OA'.OB'\cos\gamma=A'B'^2$$

ソコデ A,B ヲ同ジ水平面上ニアルヤウニ取リ,A',B' ヲ夫々 A,B ノ直射影トスレバ

$$A'A=B'B=h,\qquad AB=A'B'$$

トナルカラ

$$h^2\operatorname{cosec}^2\alpha+h^2\operatorname{cosec}^2\beta-2h^2\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\cos x$$
$$=h^2\cot^2\alpha+h^2\cot^2\beta-2h^2\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma$$

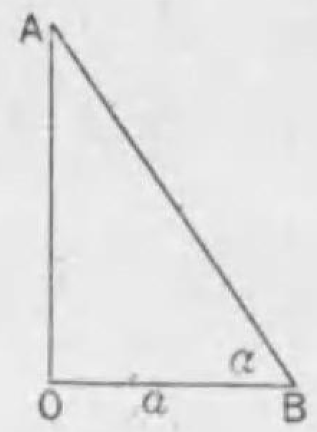
$$\therefore\quad 2-\frac{2\cos x}{\sin\alpha\sin\beta}=-\frac{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\therefore\quad \cos x=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

コレカラxヲ求メルコトガデキル.

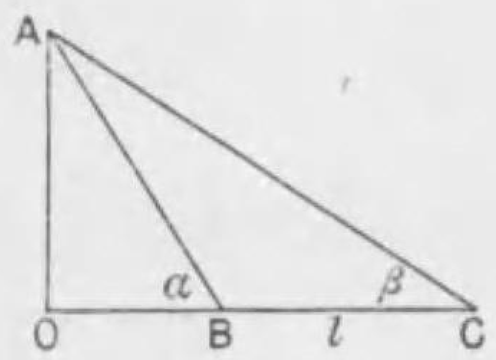
67. 水平面ニ直立スル物體ノ高サヲ測ルコト

直立體ヲ OA, 其基點ヲ O トショウ.



第一　基點 O ニ達シ得ルトキハ,O カラ水平面上ニ一ツノ基線 $OB=a$ ヲ測リ,次ニ B ニ於テ點 A ノ仰角 α ヲ測ル. サウスレバ

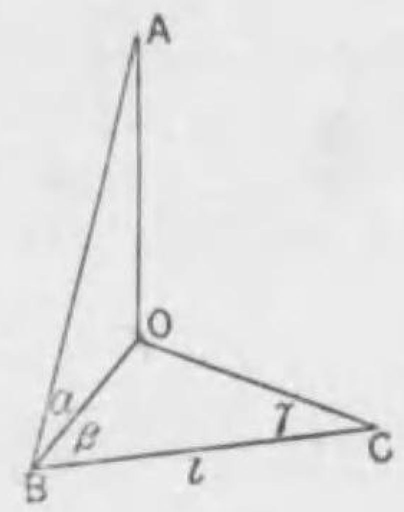
$$\mathbf{OA}=a\tan\alpha$$



第二　基點 O ニ達シ得ナイトキハ,O ヲ通ル水平線ノ上ニ一ツノ基線 $BC=l$ ヲ測リ,次ニ B 及 C ニ於テ A ノ仰角 α 及 β ヲ測ル. サウスレバ

$$AB=\frac{l\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},\qquad OA=AB\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \mathbf{OA}=\frac{l\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$



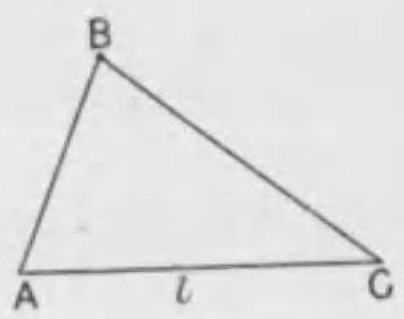
第三　O ヲ通ル水平線ノ上ニ基線ヲ測リニクイ場合ニハ,此水平面上ニ任意ノ基線 $BC=l$ ヲ測リ,次ニ B ニ於テ A ノ仰角 α 及 $\angle CBO=\beta$ ヲ測リ,C ニ於テ $\angle BCO=\gamma$ ヲ測ル. サウスレバ

$$OB=\frac{l\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)},\qquad OA=OB\tan\alpha$$

$$\therefore\quad \mathbf{OA}=\frac{l\tan\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

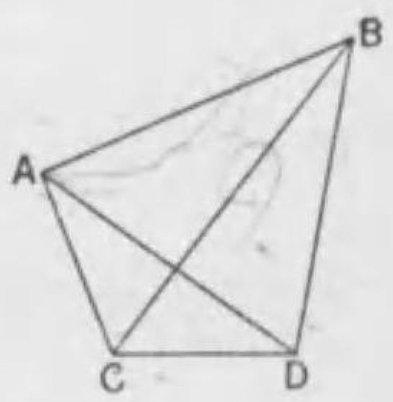
68. 達シ得ル點Aト達シ得ナイ點Bトノ間ノ距離ヲ測ルコト

Aカラ一ツノ基線 $AC=l$ ヲ測リ, 次ニA及Cニ於テ $\angle CAB$ 及 $\angle ACB$ ヲ測ル. サウスレバ



$$AB=\frac{l\sin C}{\sin(A+C)}$$

69. 達シ得ナイ二點A, Bノ間ノ距離ヲ測ルコト



適宜ノ場所デ基線CDヲ測リ,次ニCニ於テ $\angle DCA$ 及 $\angle DCB$ ヲ測リ, Dニ於テ $\angle CDA$ 及 $\angle CDB$ ヲ測ル. サウスレバ $\triangle ACD$ 及 $\triangle BCD$ ニ於テ夫々二角ト一邊トヲ知ルカラ AC, BC ヲ計算スルコトガデキル.

次ニCニ於テ $\angle ACB$ ヲ測レバ(A, B, C, D ガ同一平面ノ上ニアルトキハ $\angle ACB$ ハ別ニ測ルニ及バナイ) $\triangle ACB$ ニ於テ二邊ト其ノ夾ム角トヲ知ルカラ AB ヲ求メルコトガデキル.

注意 1. 實際ニ於テハ AD, BD ヲモ算出シ,又 $\angle ADB$ ヲモ測リ, $\triangle ADB$ ヲ解イテ AB ヲ求メ,前ノ結果ヲ驗スガヨイ.

注意 2. A, B ヲ同時ニ見ルコトノデキル二點 C, D ノ間ノ距離ヲ直接ニ測リニクイトキハ, C, D ヲ同時

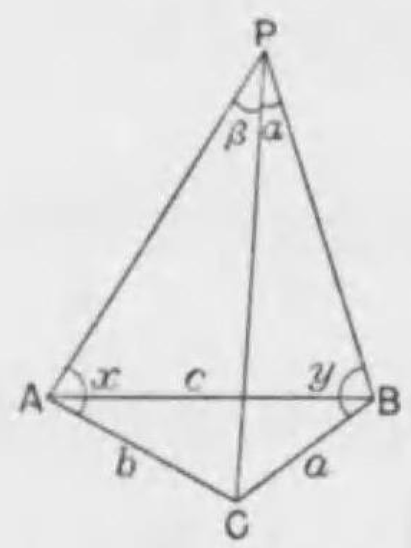
ニ見ルコトノデキル基線 EF ヲ測リ,先ヅ上ノ方法ニヨツテ CD ヲ算出シ,次ニ更ニ上ノ方法ヲ繰返シテ AB ヲ求メル.

70. Pothenot ノ問題

通例 Pothenot ノ問題(又ハ Snellius ノ問題)ト言ハレルノハ次ノ問題デアル.

與ヘラレタ三角形 ABC ノ平面上ノ一點 P カラ二邊 BC, CA ヲ見タ角 α, β ヲ知ツテ AP, BP, CP ノ長サヲ求メヨ.

解 $\angle PAC=x,\ \angle PBC=y$ トスレバ



$$(1)\quad x+y=360^\circ-(\alpha+\beta+C)$$

又 $$PC=\frac{b\sin x}{\sin\beta}=\frac{a\sin y}{\sin\alpha}$$

$$\therefore\ (2)\quad \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$$

ソコデ聯立方程式(1),(2)ヲ解イテ x, y ヲ求メ(第64頁例4ヲ見ヨ),次ニ $\triangle PAC$ 及 $\triangle PBC$ ヲ解イテ AP, BP, CP ヲ求メル.

注意 $\alpha+\beta+C=180^\circ$ ナルトキハ四邊形 ACBP ハ圓ニ内接シ得ル,此ハ與ヘラレタ角 α, β ガ夫々定三角形ノ二角 A, B ニ等シイ場合デアル. 此時ハ P ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ弧 AB ノ上ノ任意ノ點デイヽカラ問題ハ不定デアル.

71. 實際上ノ注意

實地ノ測量ニ於テハ,基線ノ長サ及方向ヲ選ブトキ,角ノ測定ニ起ル止ムヲ得ナイ誤差ガ計算ノ結果ニ及ボス影響ノナルベク小サイヤウニ注意スル必要ガアル. 此事ノ十分ナ吟味ハ本書ノ範圍外デアルガ,コヽニ極メテ簡單ナ一二ノ例ヲ示サウ.

(1) 第67節第一 $OA=a\tan\alpha$ ニヨツテ OA ヲ求メルトキ,基線 a ハ殆ド OA ニ等シクスルガヨイ.

何トナレバ α ノ誤差ヲ ε トシ計算ニヨツテ得ル OA ノ値ヲ h, 眞ノ高サヲ $h+x$ トスレバ

$$h+x=a\tan(\alpha+\varepsilon)$$

$$\therefore \quad h+x\doteqdot a(\tan\alpha+\varepsilon\sec^2\alpha) \qquad \text{[第80頁3]}$$

$$=h+a\varepsilon\sec^2\alpha$$

$$\therefore \quad x\doteqdot a\varepsilon\sec^2\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{x}{h}\doteqdot\frac{a\varepsilon\sec^2\alpha}{a\tan\alpha}=\frac{2\varepsilon}{\sin2\alpha}$$

卽チ ε ヲ一定トスレバ $\sin2\alpha=1$ 卽チ $\alpha=45^\circ$ ノトキ h ノ上ニ起ル誤差ノ h ニ對スル比ガ最小ニナルカラデアル.

(2) 公式 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ ニ於テAヲ一定ノ角トシ,基線 a 及角Bヲ測ツテ b ヲ計算スル場合ニ,Bノ誤差ヲ ε トシ,ソノタメニ起ル b ノ誤差ヲ x トスレバ

$$b+x=\frac{a\sin(B+\varepsilon)}{\sin A}$$

$$\therefore \quad b+x\doteqdot\frac{a(\sin B+\varepsilon\cos B)}{\sin A} \qquad \text{[第79頁1]}$$

$$=b+\frac{a\varepsilon\cos B}{\sin A}$$

$$\therefore \quad x\doteqdot\frac{a\varepsilon\cos B}{\sin A}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{b}\doteqdot\frac{a\varepsilon\cos B}{\sin A}\cdot\frac{\sin A}{a\sin B}=\varepsilon\cot B$$

卽チ ε ヲ一定トスレバBガ 0° 又ハ 180° ニ近イホド誤差ハ大キクナルカラ基線 a ヲ測定スルトキナルベクBヲ 90° ニ近イヤウニスルガヨイ,少ナクトモBガ餘リ小サイ鋭角又ハ餘リ大キイ鈍角ニナラナイヤウニ注意セネバナラヌ.

問題

1. 臺ノ上ニ竿ガ立テテアル,地面上臺カラ a ナル距離ニアル一點ニ於テ竿ノ兩端ノ仰角ヲ測ツテ α, 2α ヲ得タ. 臺及竿ノ高サ各幾ラカ.

2. 北西ノ方向ニ12節ノ速サデ進ンデキル船ガ或時或港ヲ西ノ方向ニ見タ,ソレカラ30分ノ後ニ同港ヲ南南西(南ト南西ノ眞中)ノ方向ニ見タ. 此時船ト港トノ距離ハ幾ラカ.

3. 塔ノ南ノ一地デ塔頂ノ仰角ヲ測ツテ 30° ヲ得タ,次ニ此地カラ西ノ方向ニ80米歩イテ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測ツ 18° ヲ得タ. 塔ノ高サハ幾ラカ.

4. 北ニ進ンデキル船ガ或時二ツノ燈臺ヲ北東及北北東ノ方向ニ見タ,ソレカラ20海里走ツタ後再ビ二ツノ燈臺ヲ見タラ何レモ東ノ方向ニアツタ. 二燈臺ノ間ノ距離ハ幾ラカ.

5. 高サ a 米ノ臺ノ上ニ高サ b 米ノ塔ガアツテ其上ニ高サ c 米ノ竿ガ立テテアル. 今地面上ノ一點ニ於テ臺ヲ見ル角ト

竿ヲ見ル角トガ相等シイトキ臺ノ麓ト此點トノ距離ハ幾ラカ.

6. 山ノ麓デ其頂ノ仰角ヲ測ツテ α ヲ得タ,ソレカラ β ノ傾斜角ヲナス直線狀ノ坂路ヲ山頂ニ向ツテ l 米上ツタトキ再ビ山頂ノ仰角ヲ測ツテ γ ヲ得タ. 山ノ高サハ幾ラカ.

7. 塔ノ上ニ竿ガ立テテアル,地面上ノ一點ニ於テ竿ノ上端及下端ノ仰角ヲ測ツテ α,β ヲ得タ,ソレカラ塔ニ向ツテ l 米進ンダトキ竿ヲ見ル角ヲ測ツテ $\alpha-\beta$ ヲ得タ. 塔ノ高サハ幾ラカ.

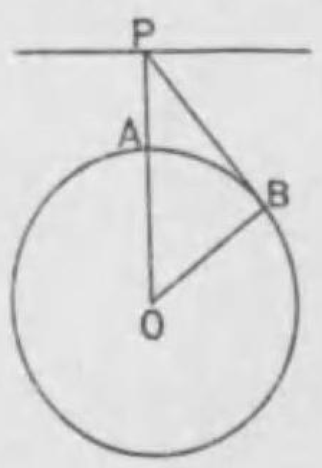
8. 1000 米離レタ甲乙兩地ニ一人ヅヽ觀測者ガアツテ同時ニ一ツノ飛行船ノ方位及高度ヲ測ツタトコロガ,甲デハ方位北 135° 西(北カラ 135° 西ヘヨツタ方向),高度 60° ヲ得,乙デハ方位西高度 45° ヲ得タ. 飛行船ノ高サヲ求メヨ.

9. 北ニ進ンデヰル船ガ北 α 東ノ方向ニ二ツノ燈臺ヲ見タ. ソレカラ直ニ航路ヲ北西ニ向ケテ l 海里進ンダトキ前ノ燈臺ノ一ツハ東ニ今一ツハ北東ノ方向ニアルトイフ. 二燈臺ノ間ノ距離ヲ求メヨ.

10. 或傾斜地ヲ北ニ向ツテ登レバ其勾配ガ最大デ $\frac{1}{5}$ デアルトイフ. 之ヲ北東ニ向ツテ登レバ其勾配ハ幾ラカ.

註 道路ノ勾配トハコレガ水平面トナス角ノ正弦ノコトデアル.

11. 右ノ圖デ O ヲ地球ノ中心, PB ヲ切線トスルトキ, PB ヲ P ニ於ケル視界ノ半徑トイヒ, P ヲ通ル水平面ト PB トノナス角ヲ視界ノ俯角トイフ.



今地面上 P 點ノ高サヲ h,視界ノ半徑ヲ l, 視界ノ俯角ヲ α,地球ノ半徑ヲ r トスルトキ,次ノ各式ヲ證明セヨ.

$$r=\frac{h\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}},\qquad l=h\cot\frac{\alpha}{2},\qquad l\fallingdotseq\sqrt{2rh}$$

12. 地面上ニアル一直線上ノ三點 A, B, C ニ於テ或山ノ頂ノ仰角ヲ測リ夫々 α,β,γ ヲ得タ. C ハ A, B ノ間ニアツテ AC $=a$, CB $=b$ デアル. 山ノ高サ h ヲ計算セヨ.

第九章

複素數ヘノ應用

72. 複素數ノ極形式

既ニ代數學デ知ツテキル通リ複素數ノ一般ナル形ハ

(1) $$a+ib$$

デアル. コヽニ a, b ハ實數, $i^2=-1$

特ニ $a=0$ ナラバ $a+ib=ib$ (純虚數)

又 $b=0$ ナラバ $a+ib=a$ (實數)

又 $a=a'$, $b=b'$ ナルトキニ限ツテ

$$a+ib=a'+ib'$$

今 $$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ナル角 θ ヲ取リ[第37頁ノ注意], 且ツ

$$\sqrt{a^2+b^2}=\rho$$

ト置ケバ,(1) ハ次ノ形ニ表ハサレル.

(2) $$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

之ヲ複素數ノ**極形式**トイフ. ρ ヲ此複素數ノ**絶對値**トイヒ, θ ヲ其**偏角**トイフ.

與ヘラレタ複素數ノ絶對値ハ一定ノ數デアルガ其偏角ニハ無數ノ値ガアル,何トナレバ

$$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$

ナルタメニハ

$$\rho\cos\theta=\rho'\cos\theta',\quad \rho\sin\theta=\rho'\sin\theta'$$

此二式ノ各邊ヲ平方シテ相加ヘレバ

$$\rho^2=\rho'^2 \qquad \therefore\ \rho=\rho'$$

從テ $$\cos\theta=\cos\theta',\quad \sin\theta=\sin\theta'$$

$$\therefore\quad \theta'=2n\pi+\theta \qquad (n\text{ ハ任意ノ整數})$$

ヲ得ルカラデアル. 因テ

二ツノ複素數ガ相等シイタメニハ其絶對値ガ相等シク其偏角ノ差ガ 2π ノ倍數ナルコトガ必要且十分デアル.

又複素數ガ 0 ニ等シイタメニハ其絶對値ガ 0 ナルコトガ必要且十分デアル.

73. 複素數ノ四則

$$\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=R(\cos A+i\sin A)$$

トスレバ

$$\rho_1\cos\theta_1+\rho_2\cos\theta_2=R\cos A$$

$$\rho_1\sin\theta_1+\rho_2\sin\theta_2=R\sin A$$

此二式ノ各邊ノ平方ノ和ヲ作レバ

$$\rho_1^2+2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\rho_2^2=R^2$$

サテ $$-1\leqq\cos(\theta_1-\theta_2)\leqq 1$$

$$\therefore\quad (\rho_1-\rho_2)^2\leqq R^2\leqq(\rho_1+\rho_2)^2$$

故ニ二ツノ複素數ノ和ノ絶對値ハ各複素數ノ絶對値ノ和カラ差マデノ間ニアル.

次ニ
$$\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=\rho_1\rho_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2+i^2\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)\}$$
$$=\rho_1\rho_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

故ニ二ツノ複素數ノ積ノ絶對値ハ各因數ノ絶對値ノ積ニ等シク,偏角ハ各因數ノ偏角ノ和ニ等シイ.

此事ハ三ツ以上ノ積ノ場合ニ擴張スルコトガデキル,卽チ
$$\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\rho_3(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)$$
$$=\rho_1\rho_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\cdot\rho_3(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)$$
$$=\rho_1\rho_2\rho_3\{\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\}\qquad\text{等}$$

次ニ乗法ノ結果カラ直ニ次ノ式ヲ得ル.
$$\frac{\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$
但シ $\rho_2\neq 0$

卽チ二ツノ複素數ノ商ノ絶對値ハ被除數ノ絶對値ヲ除數ノソレデ割ツタ商ニ等シク,偏角ハ被除數ノ偏角カラ除數ノソレヲ引イタモノニ等シイ.

74. 複素數ノ羃

定理 n ガ任意ノ實數ナルトキハ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta^{(1)}$$

本定理ヲ **De Moivre** (1667—1754) ノ定理トイフ.

證明

第一 n ガ正ノ整數ナルトキ

此場合ニハ前節ニ述ベタ乗法ノ特別ノ場合トシテ直ニ上ノ結果ヲ得ル.

第二 n ガ正ノ分數ナルトキ

此場合ニ $n=\dfrac{p}{q}$ (p, q ハ正ノ整數)

トスレバ,先ヅ(第一)ニヨツテ
$$\left(\cos\frac{\theta}{p}+i\sin\frac{\theta}{p}\right)^p=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$\therefore\quad(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{p}}=\cos\frac{\theta}{p}+i\sin\frac{\theta}{p}$$
$$\therefore\quad(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{q}{p}}=\left(\cos\frac{\theta}{p}+i\sin\frac{\theta}{p}\right)^q$$
$$=\cos\frac{q}{p}\theta+i\sin\frac{q}{p}\theta\qquad[\text{第一ニヨル}]$$

卽チ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

第三 n ガ負ノ整數又ハ分數ナルトキ

此場合ニ $n=-m$

ト置ケバ,m ハ正ダカラ前ノ場合ニヨツテ
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$$

(1) 次節ニ示ス通リ n ガ分數ナルトキハ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ ノ値ハ二ツ以上アル.本定理ハ其ノ一ツノ値ガ $\cos n\theta+i\sin n\theta$ ニ等シイトイフ意デアル.

$$\therefore \quad (\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}$$
$$=\cos m\theta-i\sin m\theta$$
$$=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)$$

卽チ　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

カウシテ n ガ任意ノ有理數ナル場合ニ本定理ノ證明ガデキタ,從テ普通ノ方法ニヨツテ n ガ無理數ノ場合ニ之ヲ擴張スルコトガデキル.

75. 複素數ノ冪根

0デナイ一ツノ複素數

$$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ノ第 n 冪根ヲ　$r(\cos\phi+i\sin\phi)$

トスレバ

$$r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$\therefore \quad r^n=\rho, \quad n\phi=2k\pi+\theta$ (k ハ任意ノ整數) [第72節]

$$\therefore \quad r=\sqrt[n]{\rho}, \quad \phi=\frac{2k\pi+\theta}{n}$$

サテ r ハ正ダカラ其値ハ唯一ツヨリナイガ,k ハ任意ノ整數ダカラ $k=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$ ノ値ヲ與ヘテ得ル n 箇ノ角

$$\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \frac{\theta}{n}+\frac{4\pi}{n},\ \ldots\ldots\ldots,\ \frac{\theta}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

ハ皆違ツテヰルノミナラズ,其中ノ任意ノ二ツノ差ハ

何レモ 2π ヨリ小サイカラ此等ノ角ノ正弦ト餘弦トハ同時ニ相等シクナルコトハデキナイ. 故ニ $k=0$ カラ $n-1$ マデノ値ヲ與ヘルトキニ得ル n 箇ノ冪根,卽チ

$$\sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right\},\ \sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}$$

等ハ皆相異ナル數デアル.

$k=n, n+1, n+2$ 等ノ値ヲ與ヘテ得ル角ハ夫々 $k=0, 1, 2$ 等ノ値ヲ與ヘテ得ル角ニ 2π ノ倍數ヲ加ヘタモノニ當ルカラ,カウシテ得ル冪根ノ値ハ前ノト夫々同一デアル.

$k=-1, -2, -3$ 等ノ値ヲ與ヘル場合モ同様デアル.

故ニ0デナイ任意ノ數ノ第 n 冪根ハ常ニ相異ナル n 箇ノ値ガアツテ n 箇ヨリ多クハナイ.

例 1. 1ノ第 n 冪根ヲ求メヨ.

解　$1=1\times(\cos 0+i\sin 0)$

ダカラ,上ノ結果ニ於テ $\rho=1, \theta=0$ ト置ケバイヽ. 卽チ1ノ第 n 冪根ハ次ノ通リデアル.

$$1,\quad \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\ \cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n},\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots,\ \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

若シ n ガ奇數ナラバ,此ノ n 箇ノ冪根ノ中,實數ハ唯初メノ1一ツダケデアル.

又若シ n ガ偶數ナラバ,實ノ冪根ハ初メノ1ト

$$\cos\frac{n\pi}{n}+i\sin\frac{n\pi}{n}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

トノ二ツアル.

例 2. -1 ノ第 n 冪根ヲ求メヨ.

解 $$-1=1\times(\cos\pi+i\sin\pi)$$

ダカラ,上ノ結果ニ於テ $\rho=1,\ \theta=\pi$ ト置ケバイヽ. 卽チ -1 ノ第 n 冪根ハ

$$\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n},\quad \cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n},\quad \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots,\quad \cos\frac{2n-1}{n}\pi+i\sin\frac{2n-1}{n}\pi$$

若シ n ガ奇數ナラバ,此ノ n 箇ノ冪根ノ中

$$\cos\frac{n\pi}{n}+i\sin\frac{n\pi}{n}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

ナル唯一ツノ實數ガアル.

又若シ n ガ偶數ナラバ實ノ冪根ハ一ツモナイ.

76. 角ノ和ノ三角函數

第73節ニ述ベタコトニヨツテ

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots\cdots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)$$

サテ此式ノ左邊ノ各因數ハ夫々

$$\cos\theta_1(1+i\tan\theta_1),\quad \cos\theta_2(1+i\tan\theta_2),\quad \cdots\cdots\ \cos\theta_n(1+i\tan\theta_n)$$

ニ等シイ.

今 $\Sigma\tan\theta_1=t_1,\quad \Sigma\tan\theta_1\tan\theta_2=t_2$ 等

ト置ケバ

$$(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\cdots\cdots(1+i\tan\theta_n)=1+it_1+i^2t_2+\cdots\cdots$$

$$=1-t_2+t_4-\cdots\cdots+i(t_1-t_3+t_5-\cdots\cdots)$$

故ニ結局次ノ結果ヲ得ル.

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cdots\cos\theta_n\{1-t_2+t_4-\cdots\cdots+i(t_1-t_3+t_5-\cdots\cdots)\}$$

此式ノ兩邊ニ於ケル實部ト虛部トヲ夫々相等シイト置ケバ次ノ二式ヲ得ル.

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n(1-t_2+t_4-\cdots\cdots)$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n(t_1-t_3+t_5-\cdots\cdots)$$

次ニ $\cos\theta_1,\ \cos\theta_2\cdots\cdots$ ガ何レモ 0 デナイ場合ニハ此二式カラ除法ニヨツテ次ノ結果ヲ得ル.

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)=\frac{t_1-t_3+t_5-\cdots\cdots}{1-t_2+t_4-\cdots\cdots}$$

77. 倍角ノ三角函數

前節ノ公式ニ於テ $\theta_1=\theta_2=\cdots\cdots=\theta_n=\theta$ ト置ケバ

$$t_1=\tbinom{n}{1}\tan\theta,\quad t_2=\tbinom{n}{2}\tan^2\theta,\quad t_3=\tbinom{n}{3}\tan^3\theta$$ 等[1]

トナルカラ次ノ結果ヲ得ル.

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\tbinom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\tbinom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$$
$$\sin n\theta=\tbinom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\tbinom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\tbinom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots$$
$$\tan n\theta=\frac{\tbinom{n}{1}\tan\theta-\tbinom{n}{3}\tan^3\theta+\tbinom{n}{5}\tan^5\theta-\cdots\cdots}{1-\tbinom{n}{2}\tan^2\theta+\tbinom{n}{4}\tan^4\theta-\cdots\cdots}$$

---

(1) $\tbinom{n}{1},\ \tbinom{n}{2},\ \tbinom{n}{3}$ 等ハ夫々 $\dfrac{n}{1!},\ \dfrac{n(n-1)}{2!},\ \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ 等ヲ表ハス.

78. 正弦及餘弦ノ羃

(1) $\cos\theta+i\sin\theta=x,\quad \cos\theta-i\sin\theta=y$

ト置ケバ

(2) $2\cos\theta=x+y,\qquad 2i\sin\theta=x-y$

又 $$xy=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)$$

∴ (3) $$xy=1$$

又 $$x^k=(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

$$y^k=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^k=\cos(-k\theta)+i\sin(-k\theta)$$
$$=\cos k\theta-i\sin k\theta$$

∴ (4) $x^k+y^k=2\cos k\theta,\quad x^k-y^k=2i\sin k\theta$

サテ n ガ正ノ整數ナルトキハ(2)カラ

(5) $$2^n\cos^n\theta=(x+y)^n$$
$$=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots\cdots+y^n$$

(6) $$2^ni^n\sin^n\theta=(x-y)^n$$
$$=x^n-\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2-\cdots\cdots+(-1)^ny^n$$

ソコデ

第一 n ガ偶數ナラバ(5)及(6)ハ夫々

$$2^n\cos^n\theta=(x^n+y^n)+\binom{n}{1}xy(x^{n-2}+y^{n-2})+\binom{n}{2}x^2y^2(x^{n-4}+y^{n-4})$$
$$+\cdots\cdots+\binom{n}{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}$$

$$2^ni^n\sin^n\theta=(x^n+y^n)-\binom{n}{1}xy(x^{n-2}+y^{n-2})+\binom{n}{2}x^2y^2(x^{n-4}+y^{n-4})$$
$$-\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}$$

此二式ノ右邊ニ(3),(4)ヲ代入スレバ

$$2^{n-1}\cos^n\theta=\cos n\theta+\binom{n}{1}\cos(n-2)\theta+\binom{n}{2}\cos(n-4)\theta$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

$$2^{n-1}i^n\sin^n\theta=\cos n\theta-\binom{n}{1}\cos(n-2)\theta+\binom{n}{2}\cos(n-4)\theta$$
$$-\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

注意 後ノ式ノ左邊ノ i^n ハ實數デアル.

第二 n ガ奇數ナラバ(5)及(6)ハ夫々

$$2^n\cos^n\theta=(x^n+y^n)+\binom{n}{1}xy(x^{n-2}+y^{n-2})+\binom{n}{2}x^2y^2(x^{n-4}-y^{n-4})$$
$$+\cdots\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}y^{\frac{n-1}{2}}(x+y)$$

$$2^ni^n\sin^n\theta=(x^n-y^n)-\binom{n}{1}xy(x^{n-2}-y^{n-2})+\binom{n}{2}x^2y^2(x^{n-4}-y^{n-4})$$
$$-\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}y^{\frac{n-1}{2}}(x-y)$$

此二式ノ右邊ニ(3),(4)ヲ代入スレバ

$$2^{n-1}\cos^n\theta=\cos n\theta+\binom{n}{1}\cos(n-2)\theta+\binom{n}{2}\cos(n-4)\theta$$
$$+\cdots\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cos\theta$$

$$2^{n-1}i^{n-1}\sin^n\theta=\sin n\theta-\binom{n}{1}\sin(n-2)\theta+\binom{n}{2}\sin(n-4)\theta$$
$$-\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sin\theta$$

注意 後ノ式ノ左邊ノ i^{n-1} ハ實數デアル.

79. 雜例

例 1. 第39節ニ述ベタ等差級數ヲナス角ノ正弦ノ和又ハ餘弦ノ和ヲ積ノ形ニ直スコトノ別法

$$S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$$
$$+i\,[\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}]$$

トスレバ

$$\begin{aligned} S &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)+\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\}+\{\cos(\alpha+2\beta)+i\sin(\alpha+2\beta)\} \\ &\qquad +\cdots\cdots+[\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}+i\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}] \\ &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)[1+(\cos\beta+i\sin\beta)+(\cos2\beta+i\sin2\beta) \\ &\qquad +\cdots\cdots+\{\cos(n-1)\beta+i\sin(n-1)\beta\}] \\ &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)[1+(\cos\beta+i\sin\beta)+(\cos\beta+i\sin\beta)^2+\cdots\cdots \\ &\qquad +(\cos\beta+i\sin\beta)^{n-1}] \\ &= (\cos\alpha+i\sin\alpha).\frac{1-(\cos\beta+i\sin\beta)^n}{1-(\cos\beta+i\sin\beta)} \\ &= (\cos\alpha+i\sin\alpha).\frac{(1-\cos n\beta)-i\sin n\beta}{(1-\cos\beta)-i\sin\beta} \\ &= (\cos\alpha+i\sin\alpha).\frac{-2i\sin\frac{n\beta}{2}\left(\cos\frac{n\beta}{2}+i\sin\frac{n\beta}{2}\right)}{-2i\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}+i\sin\frac{\beta}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\right\} \end{aligned}$$

コヽデ最初ノ式ト最後ノ式トノ實部ト虚部トヲ夫々相等シイト置ケバ,次ノ結果ヲ得ル.

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

例 2. $(1+x)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots+p_nx^n$ トスルトキ,次ノ二式ヲ證明セヨ.

$$p_0-p_2+p_4-\cdots\cdots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$p_1-p_3+p_5-\cdots\cdots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$$

解 與ヘラレタ式ニ於テ $x=i$ ト置ケバ

$$(1)\qquad (1+i)^n=p_0+p_1i+p_2i^2+p_3i^3+p_4i^4+p_5i^5+\cdots\cdots+p_ni^n$$
$$=(p_0-p_2+p_4-\cdots\cdots)+i(p_1-p_3+p_5-\cdots\cdots)$$

又 $$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore$ (2) $$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

(1),(2) ノ右邊ノ實部ト虚部トヲ夫々相等シイト置イタモノガ求メル二式テアル.

問題

1. i ノ立方根ヲ求メヨ.

2. $1+i$ ノ第四冪根ヲ求メヨ.

3. 或數ノ第 n 冪根(n 箇)ハ其中ノ任意ノ一ツニ夫々 1 ノ第 n 冪根(n 箇)ヲ掛ケタ積ニ等シイコトヲ示セ.

4. $\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$ ヲ簡單ニセヨ.

5. n ガ正ノ整數ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\{\cos\theta+\cos\varphi+i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n+\{\cos\theta+\cos\varphi-i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n$$
$$=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta-\varphi}{2}\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}$$

6. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$(\cos x+i\sin x)(\cos2x+i\sin2x)\cdots\cdots(\cos nx+i\sin nx)=1$$

7. Moivre ノ定理ヲ用ヒテ次ノ二式ヲ簡單ニセヨ.

$$1+\binom{n}{1}\sin\alpha+\binom{n}{2}\cos2\alpha+\cdots\cdots+\cos n\alpha$$

$$1+\binom{n}{1}\cos\alpha+\binom{n}{2}\sin2\alpha+\cdots\cdots+\sin n\alpha$$

補充問題

第三章ノ分

1. $0<B<A<\frac{\pi}{2}$ ナルトキハ $\frac{\sin A}{\sin B}<\frac{\tan A}{\tan B}$ ナルコトヲ證明セヨ.

2. 矩形ABCDノ頂點Aカラ對角線BDニ垂線APヲ引キ,PカラBC及CDニ夫々垂線PX,PYヲ引ケバ

$$PX^{\frac{2}{3}}+PY^{\frac{2}{3}}=BD^{\frac{2}{3}}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

3. 圖ニヨツテ $\tan 15°$ 及 $\sin 18°$ ヲ求メヨ°

第四章ノ分

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

1. $\cos 2A=\cos(36°+A)\cos(36°-A)+\cos(54°+A)\cos(54°-A)$

2. $\sin B\sin C\sin(C-B)+\sin C\sin A\sin(A-C)+\sin A\sin B\sin(B-A)$

$$=\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$$

次ノ各等式ヲ證明セヨ.

3. $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{8\pi}{15}+\cos\frac{14\pi}{15}=\frac{1}{2}$

4. $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$

5. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

6. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{8}$

---

7. $\tan\theta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ナルトキハ $\sin 2\theta=\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{1+\sin 2\alpha\sin 2\beta}$ ナルコトヲ證明セヨ.

8. $\sin A+\sin B+\sin C=0,\ \cos A+\cos B+\cos C=0$ ナルトキハ

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{3}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ.

9. $\sin 2\theta=\frac{2(b-a)}{a}$ ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$a\cos^3\theta+b\sin\theta=a\sin^3\theta+b\cos\theta=\pm\sqrt{a(2b-a)}$$

10. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha, \tan\beta$ トスルトキ,次ノ式ノ値ヲ p, q デ表ハセ.

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$$

11. $\sin(x-\alpha)=\lambda\sin(x-\beta)$, $\cos(x-\alpha)=\mu\cos(x-\beta)$ カラ x ヲ逐出セ.

12. $x+y=\alpha$ ガ與ヘラレタトキ $1-\sin^2 x-\sin^2 y$ ノ最大値及最小値ヲ求メヨ.

第五章ノ分

1. x ガ $60°$ ニ近迫スルトキ $\frac{\sin(x-60°)}{4\cos^2 x-1}$ ノ極限値ヲ求メヨ.

2. x ガ限リナク 1 ニ近ヅクトキ $\frac{1+\cos\pi x}{\tan^2\pi x}$ ノ極限値ヲ求メヨ.

3. x ガ限リナク $\frac{\pi}{2}$ ニ近ヅクトキ $\sec x-\tan x$ ノ極限値ヲ求メヨ.

4. 正ノ鋭角 x (弧度)ガ小サイトキ次ノ二式ヲ證明セヨ.

(1) $\log\sin x \fallingdotseq \log x+\frac{1}{3}\log\cos x$

(2) $\log\tan x \fallingdotseq \log x-\frac{2}{3}\log\cos x$

註 $\sin x$ ハ $x-\frac{x^3}{4}$ ヨリ稍大キイ,ソコデ $\sin x \fallingdotseq x-\frac{x^3}{6}$ ト置ケ.

第六章ノ分

△ABC ノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c, 周ノ半分ヲ s, 面積ヲ S, 外接圓及内接圓ノ半徑ヲ夫々 R, r トシテ次ノ各式ヲ證明セヨ.

1. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$

2. $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3. $S=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

4. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$

---

5. $b=4c\cos\left(30°+\frac{A}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{A}{2}\right)$ ナルトキハ

$$a^2=c(b+c),\quad A=2C$$

ナルコトヲ證明セヨ.

6. $b=a(\sqrt{3}-1)$, $C=30°$ ナルトキ A, B ヲ求メヨ.

7. △ABC ノ内接圓ノ切點ヲ頂點トスル三角形ノ面積ハ $\frac{rS}{4R}$ ニ等シイコトヲ證明セヨ.

8. △ABC ノ外接圓ガ ∠A ノ内ニアル傍接圓ニ等シケレバ $\cos A=\cos B+\cos C$ ナルコトヲ證明セヨ.

9. △ABC ノ外接圓ニ於テ A ヲ通ル直徑ガ邊 BC ニ交ル點ヲ D トスレバ $AD=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2B+\sin 2C}$ ナルコトヲ證明セヨ.

10. 四邊形 ABCD ニ於テ相對スル二組ノ邊ノナス角ヲ θ, φ トスルトキ,次ノ式ヲ證明セヨ.

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{D}{2}=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

第七章ノ分

次ノ各ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

1. $\log a=2.92542$, $\log c=2.84784$, $A=90°$ 但シ長サノ單位ハ米トスル.

2. $a=546.27$ 米, $B=48°\,26'\,33''$, $C=65°\,42'\,48''$

3. $b=745.24$ 米, $c=729.36$ 米, $A=58°\,37'\,58''$ (面積ヲモ求メヨ)

4. $b=264.58$ 米, $c=172.74$ 米, $A=32°\,18'\,43''$

5. $a=385.61$ 米, $b=290.74$ 米, $c=452.57$ 米 (面積ヲモ求メヨ)

6. $a=171.58$ 米, $b=126.43$ 米, $c=96.37$ 米

7. $a=1287.53$ 米, $b=1409.65$ 米, $A=42°\,16'\,37''$

8. 一角 A, 周圍 $2s$, 外接圓ノ半徑 R

9. 一邊 a, 其對角 A, A カラ引イタ中線ノ長サ m

10. 一角 A, A ヲ夾ム二邊ノ和 l, A カラノ高サ h

第九章ノ分

1. Moivre ノ定理ヲ用ヒテ次ノ二式ヲ簡單ニセヨ.

$$\cos\alpha+x\cos(\alpha+\beta)+x^2\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+x^{n-1}\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

$$\sin\alpha+x\sin(\alpha+\beta)+x^2\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+x^{n-1}\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

2. $x=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad y=\cos\beta+i\sin\beta,\quad z=\cos\gamma+i\sin\gamma$

ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$(y+z)(z+x)(x+y)=8xyz\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

3. $$\left\{x-a\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}\left\{x-a\left(\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}$$
$$=x^2-2ax\cos\frac{2k\pi}{n}+a^2$$

ナルコトヲ示シ,之ニヨツテ n ガ任意ノ整數ナルトキ

$$x^{2n}-a^{2n}=(x^2-a^2)\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2\right)\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\left(x^2-2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi+a^2\right)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

同樣ニシテ次ノ各式ヲ證明セヨ.

4. $$x^{2n+1}-a^{2n+1}=(x-a)\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{2n+1}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{2n+1}+a^2\right)\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\left(x^2-2ax\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+a^2\right)$$

5. $$x^{2n}+a^{2n}=\left(x^2-2ax\cos\frac{1}{2n}\pi+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{3}{2n}\pi+a^2\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\left(x^2-2ax\cos\frac{2n-1}{2n}\pi+a^2\right)$$

6. $$x^{2n+1}+a^{2n+1}=(x+a)\left(x^2-2ax\cos\frac{1}{2n+1}\pi+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{3}{2n+1}\pi+a^2\right)\cdots$$
$$\cdots\cdots\left(x^2-2ax\cos\frac{2n-1}{2n+1}\pi+a^2\right)$$

雜題

1. $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{\alpha}{2}$ ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)(a^2+b^2-2ab\cos\beta)=(a^2-b^2)^2$$

2. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ ニ適合スル三ツノ正ノ銳角 α,β,γ ノ中,二ツノ和ハ $90°$ ヨリ大キク,三ツノ和ハ $180°$ ヨリ小サイコトヲ證明セヨ.

3. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ $(A,B,C>0)$ ナルトキ $\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C$ ノ最小値ヲ求メヨ.

4. $A+B+C=180°$ ナルトキ A, B, C ノ間ニ或關係式ガアレバ此式ノ中ノ A, B, C ニ夫々 $90°-\frac{A}{2}$, $90°-\frac{B}{2}$, $90°-\frac{C}{2}$ 又ハ $180°-2A$, $180°-2B$, $180°-2C$ ヲ置換ヘテモ亦同一ノ關係式ヲ得ルコトヲ證明シ,因テ公式

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\quad [第55頁18]$$

カラ之ニ應ズル二ツノ關係式ヲ作レ.

5. $a+b$ ヲ對數計算ニ適スル式ニ直セ.

6. 二次方程式 $x^2+px+q=0$ ノ根ヲ對數計算ニ適スル形ニ直セ.但シ p, q, p^2-4q ハ皆正デアルトスル.

7. $\cos^2\theta+A\cos^2(\alpha+\theta)+B\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$ ノ値ガ θ ニ無關係ナルタメニハ $A=1$, $B=-2\cos\alpha$ デナケレバナラヌコトヲ證明セヨ. 但シ $\sin\alpha\neq0$ トスル.

8. $\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{\cos(\beta+\theta)}{\sin(\gamma+\alpha)}$ ナラバ此式ノ各邊ハ $+1$ カ又ハ -1 ニ等シ

ク,又 $\dfrac{\cos(\gamma+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ ニ等シイコトヲ示セ．但シ $\alpha-\beta\neq n\pi$ トスル．

9. 次ノ式ヲ證明セヨ．

$$\{\cos(\alpha+\theta)+m\cos\theta\}^2\leqq 1+2m\cos\alpha+m^2$$

10. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ．

$$\tan x\tan 3x+\tan 2x\tan 4x+\cdots+\tan nx\tan(n+2)x$$

11. 方程式 $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$ ヲ解ケ．

12. 方程式 $\sin(\pi\cot x)=\cos(\pi\tan x)$ ヲ解ケ．

13. 方程式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ ヲ解ケ．但シ逆函數ハ何レモ其主値ヲ示ス．

14. 方程式 $\sin 3x-\sin 2x-m\sin x$ ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ．

15. 次ノ方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ．

$$\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\operatorname{cosec} x=m$$

16. 方程式 $4x^3-3x+m=0$ ハ $-1\leqq m\leqq 1$ ナラバ三ツノ實根ヲ有スルコトヲ示シ,且ツ $m=-\dfrac{1}{2}$ ノトキ之ヲ解ケ．[第33節參照]

17. $\tan\alpha$ ヲ以テ $\tan\dfrac{\alpha}{3}$ ヲ與ヘル方程式ヲ作リ,此方程式ガ二ツノ等根ヲ有シ得ナイコトヲ證明セヨ．

18. 方程式 $\tan 2x-\tan x=m\neq 0$ ノ任意ノ三ツノ根ノ和ハ $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n ハ或整數)ニ等シイコトヲ證明セヨ．

19. 不等式 $\sin^2x>\cos^2x$ ヲ解ケ．

20. 不等式 $\dfrac{\sin 2x-\sin 60^\circ}{\cos 2x-3\cos x+2}<0$ ヲ解ケ．

21. 次ノ二式カラ θ ヲ消去セヨ．

$$\frac{\cos^2(\theta+\alpha)}{a}+\frac{\sin^2(\theta+\alpha)}{b}=\frac{\cos^2(\theta-\alpha)}{c},\quad \frac{\cos^2(\theta+\beta)}{a}+\frac{\sin^2(\theta+\beta)}{b}=\frac{\cos^2(\theta-\beta)}{c}$$

22. 中心ガOナル圓內ノ定點Aヲ通ツテ任意ノ弦PQヲ引ケバ $\tan\dfrac{\mathrm{AOP}}{2}\tan\dfrac{\mathrm{AOQ}}{2}$ ハ一定ナルコトヲ證明セヨ．

23. 圓周ヲ任意ノ數ニ等分シ,其ノ各分點カラ一ツノ直徑ニ垂線ヲ引ケバ,直徑ノ一方ニアル垂線ノ和ハ他方ニアル垂線ノ和ニ等シイコトヲ證明セヨ．

24. 中心ガOナル圓外ノ一點Pカラ圓ニ切線PTヲ引キ,切點TカラOPニ垂線TNヲ引キ,線分OPト圓トノ交點ヲAトスレバ,Pガ限リナクAニ近ヅクトキ $\dfrac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AP}}$ ハ限リナク1ニ近ヅクコトヲ證明セヨ．

25. $\triangle\mathrm{ABC}$ ノ邊BCノ中點ヲMトシ, $\angle\mathrm{BAM}=\alpha$, $\angle\mathrm{CAM}=\beta$ ヲ知ツテ $\angle\mathrm{AMC}$ ヲ求メヨ．

26. $\triangle\mathrm{ABC}$ ノ角 A, B, C ノ二等分線ノ長サヲ夫々 p, q, r トスルトキ,次ノ式ヲ證明セヨ．

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{p}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{q}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

27. 二等邊三角形ノ底邊ヲ a, 底角ノ二等分線ヲ b, 底角ヲ 2α トシ, $\tan\varphi=\dfrac{2b}{a}$ トスレバ $2\cos\alpha=\cot\dfrac{\varphi}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ．

28. $\triangle\mathrm{ABC}$ ノ三ツノ傍接圓ニ外切スル三角形ノ三邊ノ比ハ $a\cos A : b\cos B : c\cos C$ ナルコトヲ示セ．

29. 正六角錐體ノ底ノ一邊ヲ a, 高サヲ h トシテ二ツノ側面ノナス角ヲ求メヨ．

30. 一直線上ニ四點 B, D, E, C ガ此順ニアツテ $\mathrm{BD}=a$, $\mathrm{EC}=b$ デアル．又此直線外ノ點AカラBD, DE, ECヲ見ル角ガ $\mathrm{BAD}=\alpha$, $\mathrm{DAE}=\gamma$, $\mathrm{EAC}=\beta$ デアル．DEノ距離ヲ對數計算ニ適スル形デ表ハセ．

31. 圓外ノ二點A, Bカラ圓ニ切線AS, AS′, BT, BT′ヲ引キ

$$\angle\mathrm{BAS}=\alpha,\ \angle\mathrm{BAS'}=\alpha',\ \angle\mathrm{ABT}=\beta,\ \angle\mathrm{ABT'}=\beta',\ \mathrm{AB}=l$$

ヲ知ツテ圓ノ半徑ヲ求メヨ．

答

問　　題 (4 頁)

1. $\frac{n-2}{n}\pi$　　**2.** $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

問　　題 (16 頁)

1. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$ 等.

2. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$ 等.

問　　題 (28—29 頁)

11. $\frac{2}{a^2-1}$　　**12.** $(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)^2$

問　　題 (37—38 頁)

1. $\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}},\quad \sin x=\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ (複符號ハ相對應スル)

2. 1.02　　**3.** $\tan B=\sqrt{\frac{q^2-1}{1-p^2}},\quad \tan A=\pm\frac{p}{q}\sqrt{\frac{q^2-1}{1-p^2}}$ (複符號ハ相對應スル, 又 q^2-1 ト $1-p^2$ トハ同符號デナケレバナラヌ)

問　　題 (40 頁)

1. $n\pi$　　**2.** $2n\pi+\frac{\pi}{2}$　　**3.** $2n\pi-\frac{\pi}{2}$　　**4.** $n\pi+\frac{\pi}{2}$

5. $2n\pi$　　**6.** $(2n+1)\pi$　　**7.** $n\pi$　　**8.** $n\pi+\frac{\pi}{2}$

9. $n\pi+\frac{\pi}{2}$　　**10.** $n\pi+\frac{\pi}{2},\quad n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$　　**11.** $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

12. $n\pi-\frac{\pi}{4}$　　**13.** $x=\frac{5\pi}{24},\ y=\frac{\pi}{24};\ x=\frac{23\pi}{24},\ y=\frac{19\pi}{24}$　　**14.** $(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}$

17. $2n\pi+\frac{\pi}{2},\quad 2n\pi-\cos^{-1}\frac{4}{5}$ 但シ逆函數ハ其主値ヲ示ス.

問　　題 (54—56 頁)

24. $\sin\theta=\pm\frac{4}{5},\quad \cos\theta=\pm\frac{3}{5};\quad \sin\theta=\pm\frac{3}{5},\quad \cos\theta=\mp\frac{4}{5}$

28. $\sin 165^\circ=\frac{1}{2}(-\sqrt{1+\sin 330^\circ}+\sqrt{1-\sin 330^\circ})$

$\cos 165^\circ=\frac{1}{2}(-\sqrt{1+\sin 330^\circ}-\sqrt{1-\sin 330^\circ})$

29. $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=n\pi$

33. $\{c'(c^2-b^2)-2abb'\}\{c'(a^2-c^2)+2aa'b\}=\{a'(c^2-b^2)+b'(a^2-c^2)\}^2$

34. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 35. $a^2(1+e)=b^2(1-e)$

雜　　題 (69—72頁)

8. $4\sin\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$, $4\cos\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$

9. $4\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\sin\frac{-\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}$

10. $a^2\sec^{\frac{2}{3}}\varphi$ 11. $2\cos\varphi\sqrt{\sec 2\varphi}$ 12. $\sin^2 n\alpha\ \mathrm{cosec}\,\alpha$

13. $\sin\{\alpha+\frac{n-1}{2}(\pi+\beta)\}\sin\frac{n(\pi+\beta)}{2}\sec\frac{\beta}{2}$

14. $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cos\{2\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta\ \mathrm{cosec}\,\beta$

15. $\frac{1}{4}\{(n+1)\sin 2\alpha-\sin 2(n+1)\alpha\}\mathrm{cosec}\,\alpha$ 16. $\cot\frac{x}{2}-\cot 2^{n-1}x$

17. $2\sin n\alpha\ \mathrm{cosec}\,2\alpha\sec(n+1)\alpha$ 18. $\frac{n\pi}{3}$, $\frac{n\pi}{4}$ 19. $n\pi$

20. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$ 21. $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

22. $n\pi-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}$ 23. $\frac{n\pi}{4}$, $\frac{(2n+1)\pi}{24}$

24. $\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$, $n\pi+\frac{\pi}{2}$ 25. $n\pi$

26. $n\pi+\frac{\pi}{2}$, $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$, $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ 27. $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$, $2n\pi-\frac{\pi}{12}$

28. $2x=n\pi-\tan^{-1}2$ 29. $n\pi$, $\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

30. $(c-a)\cos 2x+b\sin 2x=2d-a-c$ 以下第40節ヲ見ヨ.

31. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 32. $\sin^2 2x=2(1-m)$ [$\frac{1}{2}\leqq m\leqq 1$ ナルコトヲ要スル]

33. 2 34. $\cos\frac{x-y}{2}=\frac{m}{2}\mathrm{cosec}\frac{\alpha}{2}$ [此式ノ右邊ノ絕對値ガ1ヨリ大キクナイコトヲ要スル,此場合ニ此式ト $x+y=\alpha$ トカラ x, y

ガワカル.] 35. $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $y=n\pi\pm\frac{\pi}{6}+2n'\pi$ 但シ n, n' ハ獨立ナル任意ノ整數 40. $\pm\sqrt{\frac{4}{a^2+b^2}-1}$ 41. $xy=(y-x)\tan\alpha$

42. $(x^2+y^2-b^2)^2=a^2\{(x+b)^2+y^2\}$ 43. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$

46. (1) $\pm\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha-\beta)}$ (2) $\frac{1}{2}\{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2+4h^2}\}$

(3) 最大 $\sqrt{2(a^2+b^2)}$, 最小 $a+b$ 47. $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ 48. $\sin^3\frac{\alpha}{3}$

問　　題 (90頁)

1. a 2. $\frac{\pi}{180}$ 3. $\frac{p}{q}$ 4. $\frac{\pi^2}{8}$ 5. $\cos a$

6. 8 7. 2

問　　題 (100—102頁)

9. $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}$ 10. $\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{(b-c)^2}{4bc}$ 12. $\sqrt{3}s=2b$

14. $(\sqrt{7}+1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}-1)$ 16. $\frac{8\pi r^3\sin^6\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$

問　　題 (108頁)

1. $\mathrm{B}=57^\circ 47'.5$, $b=375.48$ 米, $c=236.53$ 米, $\mathrm{S}=44405$ 平方米

2. $\mathrm{C}=33^\circ 11' 40''$, $a=816.73$ 米, $c=447.15$ 米, $\mathrm{S}=152800$ 平方米

3. $\mathrm{B}=39^\circ 57'$, $\mathrm{C}=50^\circ 3'$, $c=277.51$ 米, $\mathrm{S}=32254$ 平方米

4. $\mathrm{B}=27^\circ 7' 4''$, $\mathrm{C}=62^\circ 52' 56''$, $a=929.50$ 米, $\mathrm{S}=175270$ 平方米

問　　題 (120—121頁)

1. $\mathrm{A}=56^\circ 15' 50''$, $b=176.94$ 米, $c=278.16$ 米, $\mathrm{S}=20465$ 平方米

2. $\mathrm{B}=64^\circ 26' 6''$, $\mathrm{C}=52^\circ 6' 3''$, $a=565.40$ 米

3. $\mathrm{B}=34^\circ 3' 15''$, $\mathrm{C}=32^\circ 59' 11''$, $a=1224.7$ 米, $\mathrm{S}=248320$ 平方米

4. $\mathrm{A}=68^\circ 50' 44''$, $\mathrm{B}=57^\circ 12' 12''$, $\mathrm{C}=53^\circ 57' 2''$, $\mathrm{S}=166230$ 平方米

5. $\mathrm{B}_1=44^\circ 23'$, $\mathrm{C}_1=106^\circ 11' 42''$, $c_1=36.738$ 粁

$B_2=135^\circ\,37'$，$C_2=14^\circ\,57'\,42''$，$c_2=9.8768$ 粁

6. $B=33^\circ\,39'\,25''$，$C=96^\circ\,8'\,16''$，$c=6367.1$ 米

問　題 (122 頁)

1. 第52節(1)参照　2. 第52節(1)参照　3. 第100頁5参照

4. $\cos\frac{A}{2}=\frac{l(b+c)}{2bc}$ 或ハ $a=(b+c)\cos\phi$ 但シ $\sin^2\phi=\frac{l^2}{bc}$

5. $s-a=\frac{S}{s}\cot\frac{A}{2}$ 等.　6. $\cos(B-C)=\frac{\sin(A-\phi)}{\sin\phi}$ 但シ $\tan\phi=\frac{a}{2h}$

問　題 (129—131 頁)

1. $a\tan\alpha$，$a\tan\alpha\sec2\alpha$　2. 4.6 海里餘　3. 約 31.4 米

4. 約 11.7 海里　5. $\sqrt{\frac{a(a+b)(a+b+c)}{c-a}}$ 米　6. $\frac{l\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$ 米

7. $\frac{l\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$ 米　8. 約 1392 米　9. $\frac{l\tan(45^\circ+\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha}$ 海里

10. $\frac{1}{7}$　12. $h^2=\frac{ab(a+b)}{a(\cot^2\beta-\cot^2\gamma)+b(\cot^2\alpha-\cot^2\gamma)}$

問　題 (143—144 頁)

1. $-i$，$\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$　2. $\pm\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$，$\pm\sqrt[8]{2}\left(\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$

4. $\sin\theta+i\cos\theta$　6. $\frac{4k\pi}{n(n+1)}$ 但シ k ハ任意ノ整數

7. $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}$，$1+2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}$

補充問題

第四章ノ分 (145—146 頁)

10. q　11. $1-(\lambda+\mu)\cos(\alpha-\beta)+\lambda\mu=0$　12. $\pm\cos\alpha$

第五章ノ分 (146 頁)

1. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$　2. $\frac{1}{2}$　3. 0

第六章ノ分 (146—147 頁)

6. $A=105^\circ$，$B=45^\circ$

第七章ノ分 (147－148 頁)

1. $B=33^\circ\,14'\,13''.5$，$C=56^\circ\,45'\,46''.5$，$b=461.61$ 米

2. $A=65^\circ\,50'\,39''$，$b=448.00$ 米，$c=545.73$ 米

3. $B=61^\circ\,46'\,57''$，$C=59^\circ\,35'\,5''$，$a=722.12$ 米，$S=232060$ 平方米

4. $B=109^\circ\,46'\,59''$，$C=37^\circ\,54'\,18''$，$a=150.30$ 米

5. $A=57^\circ\,41'\,28''$，$B=39^\circ\,35'\,14''$，$C=82^\circ\,43'\,22'$，$S=55605$ 平方米

6. $A=99^\circ\,50'\,55''$，$B=46^\circ\,33'\,7''$，$C=33^\circ\,35'\,58''$

7. $B_1=47^\circ\,26'\,6''$，$C_1=90^\circ\,17'\,17''$，$c_1=1913.90$ 米

$B_2=132^\circ\,33'\,54''$，$C_2=5^\circ\,9'\,29''$，$c_2=172.07$ 米

8. $a=2R\sin A$，$B+C=180^\circ-A$，$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{(2s-a)\sin\frac{A}{2}}{a}$，$b=2R\sin B$ 等.

9. $\tan\frac{B-C}{2}=\sqrt{\tan\left(\varphi+\frac{A}{2}\right)\tan\left(\varphi-\frac{A}{2}\right)}\cot\frac{A}{2}$ 但シ $\tan\varphi=\frac{a}{2m}$ 等.

10. 第122頁6参照.

第九章ノ分 (148—149 頁)

1. $\frac{\cos\alpha-x\cos(\alpha-\beta)-x^n\cos(\alpha+n\beta)+x^{n+1}\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}}{1-2x\cos\beta+x^2}$

$\frac{\sin\alpha-x\sin(\alpha-\beta)-x^n\sin(\alpha+n\beta)+x^{n+1}\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}}{1-2x\cos\beta+x^2}$

雜　題 (149—151 頁)

3. 1　4. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\times$

$\cos\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)$　$\sin2A+\sin2B+\sin2C=4\sin A\sin B\sin C$

5. $\frac{\sqrt{2}a\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos\varphi}$ 但シ $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ 或ハ $2a\cos^2\frac{\varphi}{2}$ 但シ $\cos\varphi=\frac{b}{a}$

6. $-p\sin^2\frac{\varphi}{2}$，$-p\cos^2\frac{\varphi}{2}$ 但シ $\frac{4q}{p^2}=\sin^2\varphi$

10. $\cot2\alpha\{\tan(n+2)\alpha+\tan(n+1)\alpha-\tan\alpha\}-(1+n)$

11. $\cos\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$　12. $\sin2x=\frac{4}{4n+1}$ 但シ n ハ 0 ト －1 トヲ除イ

タ任意ノ整數. 或ハ $\tan 2x=\dfrac{4}{4n+1}$ 但シ n ハ任意ノ整數.

13. $\sqrt{\dfrac{2(5-2\sqrt{2})}{17}}$ **14.** $n\pi$, $\cos x=\dfrac{1\pm\sqrt{5+4m}}{4}$ 但シ $m<-\dfrac{5}{4}$ ナラバ不可能, $-\dfrac{5}{4}\leqq m\leqq 1$ ナラバ二根共ニ用ヒラレル, $1<m\leqq 5$ ナラバ此中ノ小サイ根ダケ用ヒラレル, $5<m$ ナラバ不可能.

15. $\sin x+\cos x=\dfrac{m+1\pm\sqrt{m^2-2m-7}}{2}$ 但シ $m<2-3\sqrt{2}$ ナラバ此中ノ大キイ根ダケガ用ヒラレル, $2-3\sqrt{2}\leqq m<-2$ ナラバ二根共ニ用ヒラレル, $m=-2$ ナラバ大キイ根 $(\sin x+\cos x=0)$ ハ用ヒラレル小サイ根 (-1) ハ棄テネバナラヌ, $-2<m<1-2\sqrt{2}$ ナラバ二根共ニ用ヒラレル, $m=1-2\sqrt{2}$ ナラバ等根 $(1-\sqrt{2})$ ハ用ヒラレル, $1-2\sqrt{2}<m<2+3\sqrt{2}$ ナラバ不可能. $2+3\sqrt{2}\leqq m$ ナラバ小サイ根ダケ用ヒラレル. 以下第40節ヲ見ヨ.

16. $\cos 20^\circ$, $-\sin 10^\circ$, $-\cos 40^\circ$ **19.** $n\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$

20. $30^\circ<x<60^\circ$, $60^\circ<x<90^\circ$

21. $\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)}{(-bc+ca+ab)^2}+\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{(bc+ca+ab)^2}=\dfrac{\cos^2(\alpha-\beta)}{(bc+ca-ab)^2}$

25. $\tan^{-1}\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ **29.** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{3a^2+2h^2}{3a^2+4h^2}\right)$

30. $\dfrac{(a+b)\sin^2\dfrac{\phi}{2}}{\cos\phi}$ 但シ $\tan^2\phi=\dfrac{4ab\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{(a+b)^2\sin\alpha\sin\beta}$

31. $\dfrac{l\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sin\frac{1}{2}(\beta+\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha'+\beta+\beta')}$ 又ハ $\dfrac{l\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\sin\frac{1}{2}(\beta-\beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha'+\beta+\beta')}$

平面三角法

大正2年2月15日印刷
大正2年2月18日發行
昭和6年6月25日訂正再版印刷
昭和6年6月28日訂正再版發行

定價金壹圓五拾錢

著者 藤野了祐
發行者 東京市神田區通神保町九 合資會社冨山房
代表者 坂本嘉治馬
印刷者 三協印刷株式會社

發行所
東京市神田區通神保町九 合資會社冨山房
電話九段一九二一－一九二五番

東京 合資會社冨山房發行 神田

終