萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

自然哲學之數學原理

（三）

牛頓著

鄭太朴譯

商務印書館發行

自然哲學之數學原理

（三）

牛頓　著

鄭太朴 譯

漢譯世界名著

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

目 次

第三册

第四册

第五册

第六册

第七册

第八册

第九册

第十册

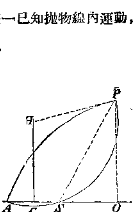
第六章　求已
知軌道內運動之法

§68. 問題.　一物體在一已知拋物線內運動，今求其一定時間時之所在。

今設 S 爲焦點，H 爲主要之頂點，其扇形 APS 之面積

$$=4AS\cdot M;$$

此項面積爲方向半徑 SP 於出離頂點後或達到頂點時所作成者．由與之相比的時間，可以求得此面積。



第六十九圖

今將 AS 於 G 平分之，作垂線 GH，並使其

$$=3M,$$

如是則以H爲中心，HS 爲半徑所作之圓，與拋物

線相交於所求之點 P.

令由 P 作垂線 PO, 則

$$HG^2+GS^2=HS^2=HP^2=GO^2+(PO-HG)^2$$

$$=GO^2+PO^2-2PO\cdot HG+HG^2 \quad (1)$$

或 $$2HG\cdot PO=GO^2+PO^2-GS^2$$

$$=(GO+GS)(GO-GS)+PO^2,$$

$$2HG\cdot PO=AO^2-2AG\cdot AO+PO^2 \quad (2).$$

按抛物線之方程

$$PO^2=4AS\cdot AO$$

$$=8AG\cdot AO \quad (3),$$

故 $$AO=\frac{PO^2}{4AS},$$

因而按(2)

$$2HG\cdot PO=AO\cdot\frac{PO^2}{4AS}-\frac{1}{4}PO^2+PO^2$$

$$=AO\cdot\frac{PO^2}{4AS}+\frac{3}{4}PO^2,$$

而 $$8GH\cdot AS=AO\cdot PO+3PO\cdot AS \quad (4)$$

或 $$\frac{4}{3}GH\cdot AS=\frac{AO+3AS}{6}\cdot PO \quad (5).$$

因 $$GH=3M,$$

$$AO+3AS=AO+3(AO-OS)$$

$$=4AO-3OS,$$

故按(5)

$$4\cdot AS\cdot M=\frac{4AO-3OS}{6}\cdot PO,$$

或 $$4AS\cdot M=\tfrac{2}{3}AO\cdot PO-\tfrac{1}{2}OS\cdot PO \quad (6)$$

但 $\tfrac{2}{3}AO\cdot PO=$ 拋物線形的面積

$AOPA$,

$\tfrac{1}{2}OS\cdot PO=\triangle SOP$,

故最後可得

$$APS=4\cdot AS\cdot M \quad (7)$$

此卽所欲證者.

系 1. 所以　$GH:AS$

等於物體作成 AP 弧之時間,與由 A 至屬於 S 的縱坐標之點所用時間相比.

系 2. 因 ASP 圍復經過運動的物體,故 G 之速度與物體在頂點時之速度相比,如

$3:8.$

GH 與 AP 線之比亦如是;於此, AP 表物體由

A 至 P 之時間內以頂點之速度所可作之直線.

系 3. 反之，我們亦可求得一物體作一已知弧 AP 所需之時間.

我們可作 AP 線，於其中點作一垂線，與 GH 相交於 H.

§69. 補題. 橢圓形之面積，不能用任意的直線分割，廣之，不能用項數次數有限的方程以得之.

在橢圓形之內取其任何一點，即以之爲極作一直線恆等速的旋轉. 於此線上由極點出發有一點運動，其速度與圓內線長之平方相比.如是，該點即畫出一盤旋線，其匝數無定.

倘該線所分割的圓面，可用一有限的方程表出，則該點與極點之距離，與此面相比者，亦可用此方程表出. 於是盤旋線之每一點可用此項有限方程得之，而每一位置已定的直線與該曲線之交點，亦可如是得之.但每一無限的直線與盤線相交之點無限，而用以決定任何二線交點之方程，均須根數與交點數相同而後可，故此方程必須有如是

高之次數.

二圓相交點之數爲二,故欲求其一交點時,須用二次的方程,而此方程同時並指出其他一交點.

二圓錐曲線之交點可有四,故就普通而論,須用四次方程以求得其一交點,但同時其他三交點亦卽可得之.蓋如分開的各求其交點,則因其所須定律及條件每次相同,故各次之運算無異.所以同一的運算法同時可得其一切交點.圓錐曲線與一三次曲線之交點共有六,故可一次用一六次方程得之;但二三次曲線之交點,則須用九次的方程以求之.倘不必定是如此,則空間內一切問題,均可析爲平面內之問題了.我這裏祇須提出某項曲線,其方程之次數不能析之使其低者.倘方程可使其析爲較低之次,則此曲線即非爲單純,而由數曲線所合成者,其交點於是可分開各各求之.

同樣的理由,可知一直線與一圓錐曲線之二交點,須自一二次方程求之;一直線與一三次不可降低的曲線之三交點,須自一三次方程求之,與四

次不可降低的曲線之四交點則須自四次方程求之，等等．所以一直線與一盤旋線之無限多的交點，因此曲線係一單純而非複合者，故必須由無限次的方程求之．

今由極點作一垂線至該線，將此垂線并其相交線以極點爲中心旋轉之，則盤旋線之交點即相互易地，而其原來之第一點最近點經一轉後即成爲第二點，經二轉後即成爲第三點，等等．

方程之變，以割線所由以決定的量之變爲度．因該項量經旋轉後能回至原位，故方程亦即會復其原狀．所以一切交點均已包含在方程內，而其根之數無限多．從可知一直線與一盤旋線之交點，普通不能用有限的方程以求得之，故亦不能有此項橢圓形，其由一定線所界之面可用此種方程以表出之者．

假如極點與盤旋線上點間之距離，與所割的橢圓形之周相比，則可知周之長亦不能以有限方程表出之．我此處所指之橢圓形，係不與共軛的，

伸入無窮的圖形相切者.

系. 所以由焦點至運動點的方向半徑以作之橢圓,其面積不能由已知時間用有限的方程表出,故不能用幾何上有理的圖形之作法以求之. 我之所謂幾何上有理的圖形者, 係指其一切點均可用方程所決定的長, 即用長之複合關係, 以決定之者.其不能如是者(如盤旋線),我名之為幾何上無理的. 蓋長之相比能如一數目與他數目之相比或不如是者,即為算術上的有理或無理.所以與時間相比的橢圓之面, 我用一幾何上無理的曲線分割之,其法如下:

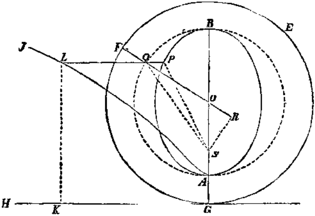
§70. 問題. 一物體於一橢圓上運動, 今求其一定時間時之所在.

設 APB 為此橢圓, A 為其主要頂點, S 為焦點, O 為中心點, P 則為所求的物體之所在.今將 OA 引長至 G, 使

$$OG : OA = OA : OS \quad (1),$$

並作 GH 與 AG 垂直,以 O 為中心, OG 為半

徑作圓 EFG. 今使 EFG 圓以 GH 爲底線於其上旋轉前進,則 A 點所作曲線爲 *Trochoide* ALJ. 取 GK 長,使其與 $GEFG$ 圓周之比,如物體經過 AP 橢圓弧所用之時間與環繞全橢圓之時間相



第　七　十　圖

比.今再作 KL 垂線,與 ALJ 相交於 L, 並引

LP與GK相平行,

則第一線與橢圓之交點 P, 即爲所求之點.

蓋如以 O 爲中心,OA 爲半徑作一半圓 AQB, 使其與 LP 相交於 Q, 並作 SQ 與 OQ 線,後者與

EFG 圓相交於 F，且作 SR 與 OQ 垂直，則橢圓之 APS 扇形與圓之扇形 AQS 相比．

但 $\quad AQS = OQA - OQS,$

$$AQS = \tfrac{1}{2}OQ \cdot QA = \tfrac{1}{2}OQ \cdot RS \quad (2),$$

而因 $\tfrac{1}{2}OQ$ 爲已知兼爲常數，故 APS 之面積與

$$QA - RS \text{ 相比}.$$

又因 $SR : \sin AQ = OS : OQ = OS : OA$

$$= OA : OG = AQ : GF \quad (3),$$

故亦 $\quad AQ - SR : GF - \sin AQ = AQ : GF$

$$= OS : OA \quad (4)$$

以及 $\quad QA - SR = \dfrac{OS}{AO}(GF - \sin AQ),$

而 AQS 與 $GF - \sin AQ$ 相比．

此即所欲明者．

§ 71. 附註． 因該曲線之不易畫出，故在實用上用其他作法爲便，此項作法與真理甚相接近．

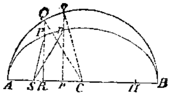
先作一角 B，使其

$$B : 57°{,}29578 = SH : AB \quad (1).$$

又作一線 L，使其與半徑相比，如

$AB:SH$ (2).

既得此二者後即可用下法解決此問題.



第七十一圖

於作圖後，先求 P 之所在，儘量與 p 相接近.今由 P 作一縱線 PR 至橢圓之軸,則切於橢圓外的 AQB 圓之縱線 QR 亦可由橢圓二軸之比得之.於是有

$$QR=AC\cdot sinACQ \quad (3)$$

而由此即可得 ACQ 角之值，但祇須計算得其近似值可矣.與時間相比之角，於是亦可知之；此角與 360° 相比，如經過 Ap 所須之時間與環繞全橢圓之時間相比.今設此角爲 N, 並假定有一角 D,能

$$D:B=sinACQ:\text{半徑} \quad (4)$$

者;彙取一角 E, 使

$$E:N-ACQ+D=L:L\mp sin(ACQ+D) \quad (5)$$

$\mp$ 隨 $ACQ\lesseqgtr 90^\circ$ 而定.

又決定 F,G 二角,使

$F : B = sin(ACQ+E) :$ 半徑　(6),

$G : N-ACQ-E+F = L : L \mp sin(ACQ+E)$

$\mp$ 隨 $ACQ+E \lesseqgtr 90°$ 而定　(7).

於是又作 H 與 J, 使

$H : B = sin(ACQ+E+G) :$ 半徑　(8),

$J : N-ACQ-E-G+H$

$= L : L \mp sin(ACQ+E+G)$　(9)

$\mp$ 隨 $ACQ+E+G \lesseqgtr 90°$ 而定.

此法可繼至於無限;最後可取

$$ACq = ACQ+E+G+J+\cdots\cdots, \quad (10)$$

而由其餘弦及自

$$pr : sinACq = \text{小軸} : \text{大軸} \quad (11)$$

所得之 pr 值,即可得物體之較近似的處所 p.

倘在某個事項內

$$N-ACQ+D$$

角為負者,則 E 之+號必須改為－號,反之,亦當將其－號改為+號. G,J 角之符號亦是如此,倘

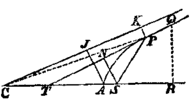
$N-ACQ-E+F$ 及 $N-ACQ-E-G+H$

之符號爲負.

無限級數 $ACQ+E+G+J+\cdots\cdots$

之收斂性甚大，故實際上並不須計算到第二項以外.至運算之法,則其根據在於以下之定理：APS 面積與 $\widehat{AQ}-SR$ 相比;於此，$\widehat{AQ}$ 爲弧，SR 爲由 S 至 CQ 之垂線也.

用一大致相似的方法，雙曲線方面問題亦易解決.今設 C 爲其中心點，A 爲頂點，S 爲焦點，CK 爲其漸近線.



第七十二圖

與時間相比的 APS 之面積,我們可以求得;今設其爲 A. 作 CP 線,並由 A, P 作 AJ, PK 線,與其他漸近線相平行.如是則用對數表時即可知 $AJPK$ 之面積以及與之相等的 CPA 之面積,後者自 $\triangle CPS$ 減去時即餘 APS 之面積.今由焦點 S 作 SN 至切線 PT 上與之相垂,並加上

$$\tfrac{1}{3}APS-\tfrac{1}{3}A \text{ 或 } \tfrac{1}{3}(A-APS),$$

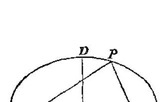
則得 PQ 之長．PQ 須在 A 與 P 之間，或在 P 之背面，此則隨

$$APS \gtrless A \text{ 而定．}$$

如是則 Q 點即爲較正確之處所，而繼續用此法後，其所得亦能較正確．

用此項運算法，普通即可將問題解析的解決了．但在天文的應用上，以下特別的方法更爲便利．

倘已得橢圓之半軸 AO, BO, OD 以及其通徑 L，則可求 Y 角及 Z 角，根據以下之比例



第七十三圖

$$\left.\begin{aligned} \sin Y : \text{半徑} &= D(AO+OD) : AB^2 \\ \sin Z : \text{半徑} &= 2D(SH) : 3\cdot AO^2 \end{aligned}\right\} \quad (12),$$

於此，$D=OD-\tfrac{1}{2}L$．既求得之後即可取 T 角與

作成 BP 弧之時間相比，或等於所謂平均運動，並設

$$V : Y = sin 2T : \text{半徑} \quad (13),$$

$$X : Z = sin T^3 : \text{半徑} \quad (14).$$

於是再設

$$\angle BHP = T + X + V \quad (\text{倘 } T < 90^\circ)$$

或 $$= T + X - V \quad (\text{倘 } T > 90^\circ, < 180^\circ)$$

倘 HP 遇橢圓於 P，則 SP 線所割扇形 BPS 與時間相比甚接近。

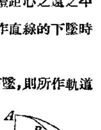
此實用方法甚爲簡單，因爲 V 與 X 均係極小角，故祇須求其前二三位已足。在行星理論方面，此亦可用；即在火星軌道方面，其最大的中心方程等於 10°，但其錯誤不會大於 $1''$。祇須 BHP 角既得之後，HSP 角及 SP 距離即可用尋常之法求之。

關於物體在曲線軌道內之運動，姑即止於此了。但物體之直線的下墜或上昇亦是常有之事，我今略論此方面的運動。

第七章　論物體之直線的上昇及下墜

§72. 問題． 今設向心力與物體距心之遠之平方成反比；求物體在一定時間內作直線的下墜時所作之軌道，

第一事． 設物體不垂直的下墜，則所作軌道爲一圓錐曲線，其在下之焦點與力之中心點相合.此由 §§29, 30, 33 及其系即可知之.今設此圓錐曲線爲 $ARPB$, S 爲其在下之焦點．倘此圖形爲一橢圓，則可在其大軸 AB 之上作半圓 ADB, 並作 DPC 線經過下墜物體 P 與 AB 相垂直.再作 DS 與 PS, 則 ASD 面與 ASP 相比，因而亦與時間相比.今

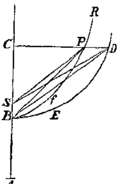


第七十四圖

將 AB 不變，但恆減小橢圓之寬；如是則 ASD 面恆能與時間相比。將其寬減至無限小時，則 APB 軌道即與 AB 相合而 S 落入 B 點。於是物體即在直線內運動下墜，而 ABD 面與時間相比。所以 AC 軌道，即物體於一定時間內由 A 作直線下墜時所成者，即可求得，祗須 ABD 面假定其與時間相比，而由 D 作垂線 DC 至 AB 上便行。

第二事．設前述之圖形係一雙曲線 RPB，則可仍就原來主要軸 AB 作一直角的雙曲線 BED。因

$$CSP : CSD$$
$$= CBfP : CBED$$
$$= SPfB : SDEB$$
$$= CP : CD,$$

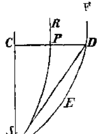


第七十五圖

面積 $SPfB$ 又與時間相比（與物體作成 PfB 弧所須之時間相比），故 $SDEB$ 面亦與該時間相比。

今將雙曲線之通徑減小至無限，其主要軸則不變，則 PB 弧與 CB 直線相合，焦點 S 則與 B 點合，SD 直線與 BD 相合．$BDEB$ 面又與物體直線下墜時作成 CB 線之時間相比．

第三事． 倘 RPB 爲一拋物線，則可用同法於原來的主要頂點作一其他拋物線 BED. 此新拋物線可不變，但原來的則可將其通徑減至於無限小，使其與 CB 線相合．如是則拋物線的曲線形 $BDED$ 恆與物體 P 由 C 至 B 之時間相比．



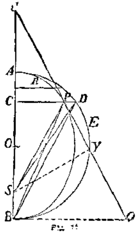
第七十六圖

§73. 定理． 既得此後，我現在可以斷定，一下墜物體在某點 C 之速度，與一其他之物體速度相比，等於

$$\sqrt{CA} : \sqrt{\tfrac{1}{2}AB},$$

於此，該其他物體所作之軌道爲一圓，其中心點爲 B, 半徑爲 BC.

因 CD 與 CP 相比，故 AB 爲與 RPB,DEB 二形之共同直徑.今將其於 O 平分之,並引 PT 線,與 RBP 相切於 P, 且與直線之方向相交於 T. 又作 SY 與 PT 垂直，BQ 與 AB 垂直，並設 RPB 曲線之通徑爲 L.



第七十七圖

由 § 36 系 9. 可知在 RPB 上以 S 爲中心的物體之運動速度，與一其他在圓 (中心爲 S, 半徑爲 SP) 上運動的物體之速度相比，等於

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}L\cdot SP} : SY \quad (1)$$

按圓錐曲線之理論，又有

$$AC\cdot CB : CP^2 = 2\cdot AO : L$$

或
$$L = \frac{2CP^2\cdot AO}{AC\cdot CB} \quad (2).$$

按(1),(2)即有

$$\sqrt{\frac{CP^2\cdot AO\cdot SP}{AC\cdot CB}} : SY \quad (3).$$

又按圓錐曲線理論，

$$CO : BO = BO : TO \quad (4),$$

故 $$BO+CO : BO = BO+TO : TO$$

或 $$BC : BO = BT : TO \quad (5),$$

以及 $$CO : BO = BC : BT \quad (6).$$

由(6)可得

$$BC-CO : BO = BT-BC : BT,$$

或 $$AC : AO = CT : BT = CP : BQ;$$

因而 $$CP = \frac{AC\cdot BQ}{AO} \quad (7),$$

以及

$$\sqrt{\frac{CP^2\cdot AO\cdot SP}{AC\cdot CB}} = \sqrt{\frac{AC^2\cdot BQ^2}{AO^2}\cdot\frac{AO\cdot SP}{AC\cdot CB}}$$

$$= \sqrt{\frac{BQ^2\cdot AC\cdot SP}{AO\cdot BC}}.$$

(3)於是成爲

$$\sqrt{\frac{BQ^2\cdot AC\cdot SP}{AO\cdot BC}} : SY \quad (8).$$

今將 RPB 圖形之寬 CP 減小之至於無限，

則最後 P 與 C 相合，而

S 與 P 相合，

SP 與 BC 相合，

SY 與 BQ 相合.

如是，物體在 CB 線下墜時，(8)內

SP 與 BC,

BQ 與 SY 相消，

而(8)即成爲

$$\sqrt{AC} : \sqrt{AO} = \sqrt{AC} : \sqrt{\tfrac{1}{2}AB} \quad (9)$$

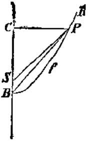
此即所欲證者.

系 1. 倘 B 與 S 相合，則有

$$TC : ST = AC : AO.$$

系 2. 在圓內與心相距任何遠而運動的物體，當其向上運動時，昇高與心距之倍.

§ 74. 定理. 設 BfP 爲一拋物線，則一下墜物體在任何一點 C 之速度，等於一物體作成一中心在 B 半徑爲 $\frac{1}{2}BC$ 的圓時所須之速度(在等速的運動下).



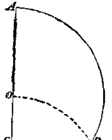
第七十八圖

物體以 S 爲中心作成拋物線 RPB 時之速度，按 § 36 系 7，在任何點 P 時，等於一其他物體之速度，此物體以 S 爲中心，SP 爲半徑，等速的作成一圓．今將 CP 減至於無限，使 PfB 與 CB 相合，

S 與 B 相合，

SP 與 BP 相合，

則即得此定理之證．



第七十九圖

§ 75. 定理． 在同樣的假定下，SD 無定半徑所作之圖形 DES，其面積等於一其他面積，此面積爲一物體在一圓內等速運動時所作，而此圓之中心則在 S，半徑則爲該曲線之通徑之半．

試設想此物體 C 於一

極短時間內經過一短線 Cc，同時，一其他物體 K 以等速運動，在以 S 爲中心的 OKk 圓上經過 Kk 弧．今作 CD, cd 二垂線，與 DES 相交於 D, d，又作 SD, Sd, SK, Sk, Dd，而 Dd 則與 AS 相交於 T，且引 SY 與 DT 垂直．

第一事． 設 DES 爲一圓或直角的雙曲線，則其大軸 AS 可在 O 平分之，而 SO 爲通徑之半．

因 $TC:TD=Cc:Dd$ (1)

以及 $DT:TS=CD:SY$(因$\triangle SDT=\frac{1}{2}DT\cdot SY$

$=\frac{1}{2}ST\cdot CD$) (2),

故 $TC:TS=CD\cdot Cc:Dd\cdot SY$ (3).

按 § 73, 系 1,

$$CT:TS=AC:AO,$$

(當 D 與 d 相合時取其最後之比)，故

$$AC:AO=CD\cdot Cc:Dd\cdot SY,$$

而因 $AO=SK$,

即得 $AC:SK=CD\cdot Cc:Dd\cdot SY$ (4).

又按 § 73, 下墜的物體在 C 點時之速度，與

其他一物體以 S 為中心 SC 為半徑在圓上運動時之速度相比,如

$$\sqrt{AC} : \sqrt{AO} = \sqrt{AC} : \sqrt{SK}.$$

後者之速度與作成 OKk 圓的物體之速度相比,按 § 18 系 6 為

$$\sqrt{SK} : \sqrt{SC},$$

而前者速度與後者相比亦然,此即

$$Cc \text{ 線} : Kk \text{ 弧} = \sqrt{AC} : \sqrt{SC}$$

$$= AC : CD,$$

因而　$CD \cdot Cc = AC \cdot Kk$,　(5)

而按(4)

$$AC : SK = AC \cdot Kk : Dd \cdot SY.$$

所以　$SK \cdot Kk = SY \cdot Dd$,

或　$\frac{1}{2} SK \cdot Kk = \frac{1}{2} SY \cdot Dd$,

即　KSk 面 $= SDd$ 面　(6).

如是,在各個短時間內所作的二圖形之部分 KSk, SDd 將其大小減至無限,但同時其數增至無限時,可以相等.按 § 4 之系,即知全部同時產生

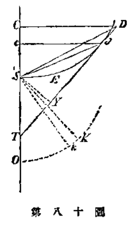
的面均可相等.此卽所欲證者.

第二事. 設 DES 爲一拋物線,則如前可得

$CD\cdot Cc : SY\cdot Dd$

$= TC : ST = 2 : 1,$

故 $\frac{1}{4}CD\cdot Cc = \frac{1}{2}SY\cdot Dd.$



第八十圖

按 §74 一下墜物體在 C 點時之速度,等於作成一半徑爲 $\frac{1}{2}SC$ 的圓所須之速度,而此速度與作成半徑爲 SK 之圓的速度相比,又如

$$Cc : Kk = \sqrt{SK} : \sqrt{\tfrac{1}{2}SC},$$

$$Cc : Kk = SK : \tfrac{1}{2}CD,$$

故 $$\tfrac{1}{2}SK\cdot Kk = \tfrac{1}{4}CD\cdot Cc,$$

$$\tfrac{1}{2}SK\cdot Kk = \tfrac{1}{2}SY\cdot Dd,$$

此卽 KSk 面 $= SDd$ 面,

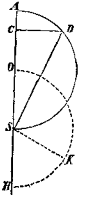
與前同.

§76. 問題. 一物體由一已知的處所下墜; 今

求其下墜之時間.

今設此已知之處所為 A 在直徑 (物體開始時與力之中心之距離) 下作一半圓 ADS, 又以 S 為中心, 作一與此相等的半圓 OKH. 又於物體之任一處所 C 作 CD 線, 並引 DS, 使

$$OSK \text{ 面} = ASD \text{ 面}.$$



第八十一圖

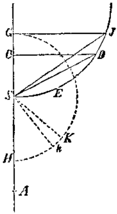
由 § 75 可知一物體在下墜時經過 AC 之時間, 等於一其他物體以等速運動在以 S 為中心的圓上作成 OK 弧所須之時間.

§ 77. 問題. 一物體由一已知的處所向上或向下的拋出; 今求其上昇或下墜所須之時間.

今設此物體由 G 線 GSA 線以任何一速度出發; 又設此速度與物體在圓 (中心點為 S 半徑為 SG) 上運動的速度之平方比等於

$$AG : \tfrac{1}{2}AS.$$

倘此比＝2：1，則 A 落入無限遠處，而可得一抛物線，其頂點為 S，軸為 AS，其通徑無定．此由 §74 所可知者．



第八十二圖

倘該比

$\lessgtr 2:1,$

則在第一事內須作一圓，在第二事內一直角的雙曲線，以 AS 為其直徑．此可由 §73 知之．

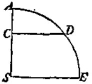
於是可以 S 為中心點，以與通徑之半相等的量為半徑作一圓 HkK，並於物體所至之任何二點 G,C，作 GJ，CD 二垂線，與圓錐曲線或圓相交於 J，D．再作 SJ，SD 後，可設

$$HSK=SEJS,$$

$$HSk=SEDS.$$

於是，按 §75，該物體 G 作成 GC 軌道之時間，即為物體 K 作成 Kk 弧之時間．

§78. 定理. 假定向心力與所在處離力心之高或遠相比,則時間,速度,及所作之軌道,各與弧,弧之正弦及矢相比.



第八十三圖

一物體由一任何處 A 綠直線 AS 下墜;今以 S 為中心作象限 AE. 設 CD 為 AD 弧之正弦,則物體於 AD 時間內下墜時經過 AC 軌道,而在 C 點之速度為 CD. 此可由 §27 知之,一如 §72 內之由 §29 知之。

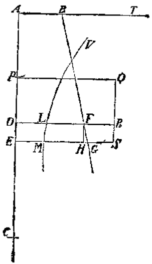
系1. 從可知一物體由 A 下墜至 S 所須之時間,等於一其他物體經過 ADE 弧所須者.

系2. 又物體由任何處所至中心點所須之時間均等. 蓋按 §18 系3, 旋轉的物體之週期的時間均相等.

§79. 問題. 有一任何種類之向心力已知,又假定能求得曲線形之面積. 今求一向上或向下直線運動的物體之各處的速度,以及至任何一點之

時間.

一物體由一任何點 A 沿直線 $ADEC$ 下墜,今於 E 處作一垂線 EG,與向中心點 C 的向心力相比.設 BFG 爲一曲線,G 恆在其上,而在運動之開始 EG 與 AE 相合.如是則物體在任何點 E 之速度,與一平方形之邊相比,此平方形之積爲 $ABGE$.今於 EG 上取 EM 與此平方形邊成反比,而 VLM 則爲一曲線,M 恆在其上,其漸近線爲 AB 之引長.如是則物體下墜經過 AE 時所須之時間,其比如曲線形



第八十四圖

$$ABTVME.$$

今於 AE 線上取極小的段 DE,其長有定,又設物體在 D 時 EMG 之處所爲 DLF.倘向心力

有如是屬性，能使與 $ABGE$ 面積相等的平方之邊，其比如下墜物體之速度，則此面積本身即與速度之平方相比．所以倘

D 處之速度爲 V

E 處之速度爲 $V+J$,

則 $$ABFD : ABGE = V^2 : (V+J)^2.$$

今再作其首項與第二項以及第三與第四項之差，則

$$DFGE : ABFD = (2V+J)J : V^2, \quad (1)$$

而因 $ABFD$ 與 V^2 相比，$\frac{ABFD}{V^2}=Const.$ 故

$$\frac{DFGE}{DE} \text{ 與 } \frac{2J(V+\frac{1}{2}J)}{DE} \text{ 相比}. \quad (2)$$

今取(2)中生長的量之首比，則

DF 與 $\frac{2J\cdot V}{DE}$ 或亦與 $\frac{JV}{DE}$ 相比．

但物體下墜經短線 DE 時所須之時間 t，與

DE 成正比，

V(速度)成反比，

故 t 與 $\frac{DE}{V}$ 相比．

又，力與速度之增加 J 成正比，

時間 t 成反比，

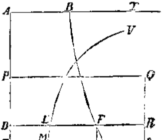
故　　力 f 與 $\frac{J}{t}$ 相比，

而於該項首比有：

力與 $\frac{V \cdot J}{DE}$ 相比，亦卽與 DF 相比.

從可知與 DF 或 EG 相比的力；其影響能使物體下墜之速度，與一平方之邊相比，此平方之面積等於 $ABGE$ 之面積.此即所欲證者。

經過任意短的線 DE 所須之時間與速度成反比，即與 $\sqrt{ABFD}$ 成反比，又因 DL 以及 $DLME$ 均與 $\sqrt{ABFD}$ 成反比，故此面之時間以及此項時間之和與此項面之和均相比.按 §4 之系，可知經過 AE 線所



第八十五圖

需之全部時間與全部面積 $ATVME$ 相比.此即所欲證者.

系1. 設 P 爲一處所,物體在某種已知的整齊向心力作用之下必由此點下墜乃能於 D 點達到一某種速度,而此速度則又等於一其他受力而下墜的物體在 D 時之速度,則可於 DF 取一段 DR,使其與 DF 之比,等於上所述二力之比;又作 $PDRQ$ 直角形使與 $ABFD$ 之面積相等.如是則 A 爲第二物體所由之下墜的處所.

蓋將 $EDRS$ 補充後,有

$$ABFD : DFGE = V^2 : 2VJ = \tfrac{1}{2}V : J,$$

即,等於全速度之半與速度之增加相比,此增加即爲物體受不整齊的力下墜而得者.

又, $PQRD : DRSE$

亦等於等速下墜物體之全速度之半與其增加相比.但增加相比則等於產生此的力相比,即等於

$$DF : DR,$$

故亦等於 $DFGE : DRSE$.

所以 $ABFD$, $PQRD$ 二全面相比,等於二全速度之半相比,而因後二者相等,故

$$ABFD=PQRD.$$

系 2. 設有任何一物體由任何一點 D 出發以一定的速度向上或向下拋出，其向心力之定律又爲已知，則求其任何一其他點 e 之速度，在作 eg 線,並設 e 點之速度 : D 點之速度

$$=\sqrt{PQRD \pm DFge} : \sqrt{PQRD},$$

$\pm$ 隨 e 在 D 下或上而定。

系 3. 求時間之法,可作 em 與 $\sqrt{PQRD \pm DFge}$ 成反比,然後設

{物體經過 De 的時間}與

{一其他物體受整齊的力由 P 至 D 的時間}

相比 $=DLme : 2PD \cdot DL$.

蓋等速下墜的物體經過 PD 之時間,與經過 PE 的時間相比,猶如

$$\sqrt{PD} : \sqrt{PE}=\sqrt{PD} : \sqrt{PD+DE}$$
$$=\sqrt{PD} : \sqrt{PD}+\frac{\frac{1}{2}DE}{\sqrt{PD}}+\cdots\cdots,$$

卽,猶如 $PD : PD+\frac{1}{2}DE=2PD : 2PD+DE$.

所以經過 PD 所須之時間,與經過 DE 所須者相比,如 $\quad 2PD : DE=2PD\cdot DL : DE\cdot DL$

$$=2PD\cdot DL : DL\cdot ME.$$

今以 $PD^{(t)}$ 等表經過 PD 等所須之時間,則前所得之比亦可作

$$PD^{(t)} : DE^{(t)}=2PD\cdot DL : DL\cdot ME.$$

又以 $De^{(t)}$ 表第二物體以不等速運動經過 De 時所須之時間,則亦有

$$De^{(t)}=2DL,$$

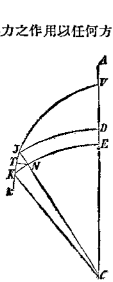
$$DE^{(t)} : De^{(t)}=DLME : DLme,$$

而經組合時,得

$$PD^{(t)} : De^{(t)}=2PD\cdot DL : DLme,$$

第八章　論物體受向心力之推動而運行時求其軌道之法

§ 80. 定理. 一物體受向心力之作用以任何方式運動，又有一其他物體直線的上昇或下降，此二者之速度在某種事項下等高時相等，則此二速度在一切高度下均相等.



第八十六圖

今有一物體由 A 經過 D,E 至中心點 C 下墜，一其他物體則由 V 出發在 $VJKk$ 曲線上運動. 由 C 出發以任意的半徑作同心圓 DJ,EK，與 AC 直線相交於 J,K. 今作 JC 半徑，與 EK 弧相交於 N，並作 NT 垂於 JK 上. DE 之距離，或

JN 之距離可儘量的使其小，而且二物體於 D,J 之速度相等.

因 $$CD=CJ,$$

故 D,J 二點之向心力相等；今用 DE, JN 二線表之.按根本定律系 2 將 JN 析之為 NT, JT 二支力,則因 NT 與物體之方向 JTK 相垂直,故與其運動之速度無關，其作用僅使物體離開其直線運動，不在軌道之切線上進行，而恆在軌道 $JTKk$ 上運動.但其他一力 JT, 則在物體之方向內生作用，故能使物體加速，而在一定的極小時間內,產生與之相比的加速,又,在同時間內二物體所得之加速,與 DE 及 JT 相比,在不同時間內則與此項線及時間之合相比.

因速度相等，故時間相比等於所經過的路 DE, JK 相比.故加速相比,如

$$DE:JT \text{ 及 } DE:JK,$$

即,如 $$DE^2:JT\cdot JK.$$

但 $$JT\cdot JK=JN^2=DE^2,$$

故當二物體經過 DE, JK 時,卽產生同樣的加速.所以二物體在 E, K 點之速度亦均等.仿此,在一切以後的相等的距離上亦均相等.

此卽所欲證者.

系 1. 一物體或擺錘作振動,或一物體由某種牽制,在一曲線上運動,另有一物體則作直線的上昇或下降.此二物體之速度在一任何的等高處相等.如是則此二速度於一切等高處均相等.

蓋擺錘線或阻礙物之牽制,其作用等於以前之 NT 橫力,物體因此便不能不離開其直線運動,但不致使其加速或滯遲(空氣及阻礙物之阻力另是一事).

系 2. 設如一振動的或在曲線內運動的物體,由一點以當時所有的速度上昇,其所可達的離心之最高度爲 P. 又設 A 爲物體在軌道上任何一點時與心之距離,向心力則恆與 A 之方數,例如 A^{n-1},相比,則任何高處之速度,與

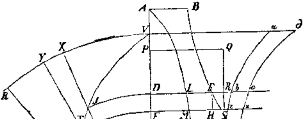
$$\sqrt{nP^n - nA^n}$$

相比,故爲已知者.

此可由 §79 知之.

§81. 問題. 設有一任何種類的向心力爲已知,又假定能求曲線形之面積.今求物體在其上運動的曲線,以及在此項曲線上運動之時間.

今設此任意的力向中心 C, 求 $VJTKk$ 曲線. 已知的是一圓 $VXYR$, 其中心在 C,其半徑爲 CV.



第 八 十 七 圖

又作其他任意的圓 JD, KE, 與曲線相交於 J, K,

與直線 CV 相交於 D,E, 並引 $CNJX$ 線, 與 KE, VY 二圓相交於 N,X, 以及引 CKY 線與 VY 相交於 Y. 設 J,K 相距甚近, 物體則由 V 經過 J,T,K 向 k 運動. 如 A 爲一高度, 該其他物體必須由此下墜, 乃能於 D 點達到一速度, 與第一物體在 J 點時之速度相等. 在與 §79 內之同樣的假設下, 可知在極短時間內所經過之極短線與速度, 即與

$$\sqrt{ABFD}$$

相比.

三角形 JCK 與時間相比而爲已知者, 故 KN 與 JC 成反比, 即, 如有一常數 $=Q$ 爲已知, 並設 $JC=A$, 則

$$KN \text{ 與 } \frac{Q}{A}=Z \text{ 相比}.$$

今如是選擇 Q, 使在某種狀況下

$$\sqrt{ABFD} : Z=JK : KN,$$

則此比例恆適用. 如是, 即有

$$ABFD : Z^2=JK^2 : KN^2$$

或 $$ABFD-Z^2 : Z^2=JK^2-KN^2 : KN^2,$$

即 $$ABFD-Z^2 : Z^2 = JN^2 : KN^2,$$

或 $$\sqrt{ABFD-Z^2} : Z = JN : KN,$$

故 $$A\cdot KN = \frac{A\cdot Z\cdot JN}{\sqrt{ABFD-Z^2}} = \frac{Q\cdot JN}{\sqrt{ABFD-Z^2}}.$$

又， $$YX\cdot XC : A\cdot KN = YC^2 : KC^2,$$

故 $$YX\cdot XC = \frac{Q\cdot JN\cdot YC^2}{KC^2\sqrt{ABFD-Z^2}}$$

$$= \frac{Q\cdot JN\cdot XC^2}{A^2\sqrt{ABFD-Z^2}}.$$

今於 DF 上取

$$Db = \frac{Q}{2\sqrt{ABFD-Z^2}},$$

$$Dc = \frac{Q\cdot CX^2}{2A^2\sqrt{ABFD-Z^2}},$$

並經過 b, c 作 ab, cd 曲線，再於 V 作 Vad 垂線至 AC，與 $VDba$，$VDcd$ 曲線形相割，於是再作 Ez，Ex，則有

$$Db\cdot JN = DbzE = \tfrac{1}{2}A\cdot KN = \triangle CKJ,$$

$$Dc\cdot JN = DcxE = \tfrac{1}{2}YX\cdot XC = \triangle XCY.$$

由 $VDba$ 所產生的 $DbzE$ 部分，

以及由 VJC 所產生的 JCK 部分，

乃至由 $VDcd$ 所產生的 $DcxE$ 部分，

與由 VCX 所產生的 XCY 部分，

俱相等，故亦

$$VDba = VJC$$

$$VDcd = VCX,$$

而此二式左端之面與時間相比.因此，倘物體由 V 出發後之時間已知，則與之相比的面 $VDba$ 亦已知，而由此復可知物體之高 CD, CJ, 以及 $VDcd$ 面並與之相等的扇形 VCX, 同時，其角 VCJ 亦即已知.反之，倘 VCJ 角與其高 CJ 已知，則即知其處所 J, 爲物體經過該時間後所必到者，

系 1. 由此可求得物體之最高點及最低點，即，軌道上之回歸點. 此項點落入經過中心的 JC 線與曲線 VJK 相垂直之處，而當

$$JK = KN$$

時，即　　$ABFD = Z^2$

時，即是如此了.

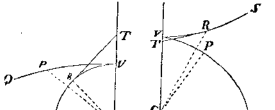
系 2. 由 JC 高,設

$$\sin KJN : 半徑 = KN : JK$$

$$= Z : \sqrt{ABFD},$$

即可求得曲線與 JC 線相交之角.

系 3. 以 C 爲中心, V 爲主要頂點作一圓錐曲線 VRS, 並於其任一點 R 作切線 RT, 與 CV 軸之延長相交於 T. 於是作 CR, 使 $CP=CT$,



第 八 十 八 圖

以及使 $\angle VCP$ 與 VCR 曲線形相比,

並假定向中心 C 的向心力,與物體距心之三方成反比.設物體由 V 點以正確的速度出發,並沿與 CP 垂直的線進行,則其所循軌道爲 VPQ, P 恆在

其上.故如該圓錐曲線爲一雙曲線,則物體向中心點下來,倘爲一橢圓,則與之離開而向無限遠處.反之,倘一物體由 V 以一定的速度出發,於是向中心點下來或離開之,則 VRS 爲一雙曲線或橢圓.求其軌道之法,可將 VCP 角相當的放大或減小之.

即如向心力轉變爲離心力,物體亦在曲線上上昇;求此曲線之法,在設 VCP 角與橢圓的扇形 $CVRC$ 相比,並使 $PP=CT$. 這些一切均由以前之定理,用求曲線形面積之法得之,其求法爲簡單計今不詳述了.

§82. 問題. 向心力之定律爲已知;今求一物體之運動,此物體由一已知的處所,以一定的速度沿一定的直線出發.

在與前相同的假定下,此物體由 J 沿 JK 線出發,其速度等於一其他物體受向心力由 P 下墜時於 D 點所可達到者.此力與開始時影響於物體 J 之力相比,如

$DR : DF.$

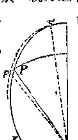
於是物體前進向 k 運動，而我們可用 C 爲中心，Ck 爲半徑作 ke 弧，與 PD 線相交於 e，並作 em, ey, ev, ew 諸線。由已知的直角形 $PDRQ$ 以及已知的向心力（即推動第一物體之力），即可知 $BFGg, ALMm$ 曲線。於是由 CJK 角可知 JK 與 KN 之比，而由此則又可知 Q 以及 $abzv, dexw$ 二曲線。如是，經過一任何時間後，即可求得 $Ce=Ck$（物體之高），以及 $Dcwe$ 面＝扇形 XCy；JCk 角以及物體所達到的處所 k 於是亦即易知。

在這些定理內，我們假定當離心之遠變動時，向心力亦按照某種規律變動，但在相等的距離下，恆爲一樣。

以上所研究的是不動的軌道內物體之運動；所尚須補充者，是物體在軌道內運動，但軌道本身則亦繞着力之中心旋轉的這個問題。

第九章　論動的軌道內物體之運動以及回歸點之運動

§ 83. 問題. 今欲使一物體，能於一繞力之中心旋轉的軌道內運動，與一其他的物體在相同但靜止的軌道內運動一樣。



第八十九圖

今設 VPK 爲位置已定的軌道，物體 P 於其內運動，其方向則由 V 向 K. 由中心點 C 出發，作

$$Cp=CP,$$

以及 $\angle VCp$ 與 $\angle VCP$ 相比。如是則 Cp 所作之面，與 CP 同時所作者相比，猶如 Cp 線之速度與 CP 之速度相比，卽，如

$$\angle VCp : \angle VCP.$$

所以其比爲已知，而與時間相比。因 Cp 在不動的

平面內所作之面,與時間相比,故物體因向心力之作用,能與 p 點同時在該曲線內旋轉,而此曲線則即為該點在前所述之比下於靜止的平面內所作者.今作

$$\angle VCv = \angle PCp,$$

$$Cv = CV,$$

$$圖形\ vCp = VCP,$$

則恆在 p 處之物體,即於旋轉的圖形 vCp 之邊上運動,其作 vp 弧所須之時間,與一其他物體 P 作

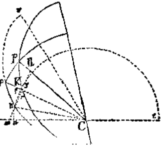
$$VP\ 弧\ (\cong vp)$$

之時間同;此 VP 弧即為靜止的圖形上者.

如是,可按 §21 系 5, 求得使物體於該曲線上運動之向心力,此曲線亦即為 p 點於不動的平面內所作者.問題於是解決了.

§84. 定理. 今有二力於此,其一使一物體在靜止的軌道內運動,其他則使另一物體在動的軌道內運動,此二軌道相同,且運動之法亦同,則此二力之差,與共同的高之三方成反比.

今設靜止的軌道內之 VP 與動的軌道內之 vp ≌；又，靜的軌道內之 PK 與動的方面之 pk 亦≌，且 PK 爲儘可能的小。



第九十圖

由 k 作 kr 垂於 pC 上，並將其引長之至 m，使

(1) $mr:kr=\angle VCp:\angle VCP.$

因 $PC=pC,$

$KC=kC,$

即 PC 與 pC 之增加或減少相等，故(按定律系 2)可將物體在 P,p 之運動析成爲二部分，其一向中心，沿 PC 與 pC，其他則向與此相垂直之線。向中心的運動係相等，但

p 之横運動 :P 之横運動$=\angle VCp:\angle VCP,$

即是，$=pC$ 之角運動 : PC 之角運動.

如是,在一時間內,當 P 達到 K 時, p 亦以同樣的運動向中心 C, 在該時間之末達到 mkr 線上之任何點,此線係經過 k 且與 pC 相垂直. p 之橫運動使其與 pC 成一距離,此距離與 P 之離 PC 相比, 猶如前者之橫運動與後者之橫運動相比.故在該時間之末,物體 P 與 pC 之距離爲 kr,

而因　　$mr:kr=\angle VCp:\angle VCP$

(即爲 p 之橫運動與 P 之橫運動相比),故在該時間之末, p 即達到 m 處.倘 P 與 p 沿 PC 與 pC 運動, 因而爲相等的力於此線上所推動, 則即如此.

今取

(2)　$\angle pCn:\angle pCk=\angle VCp:\angle VCP$,

以及　　(3)　$nC=kC$,

則當該時間之末,物體 p 即實在達到 n, 并爲一較大的力所推動,祇須

$$\angle nCp>\angle kCp,$$

即是, vpk 軌道向前運動,或以一速度向後退,此

速度大於 CP 向前進之速度一倍．反之，倘軌道緩的向後，則 p 即爲較小的力所推動．此項力之差，與處所之距離 mn 相比，而此距離則爲物體 p 因該力之作用於該時間內所必須經過者．

今設想以 C 爲中心，

$$Cn=Ck$$

爲半徑，作一圓，與 mr, mn 之引長相交於 s, t；如是則

$$(4)\quad mn\cdot mt=mk\cdot ms,$$

即
$$mn=\frac{mk\cdot ms}{mt}.$$

倘時間已知，則 pCk, pCn 二三角形之大小亦即已知，故 kr, mr 或其和 ms 及差 mk 與高 pC 成反比，因而

$mk\cdot ms$ 與 pC^2 成反比．

又，mt 與 pC 相比．但此處所用，均係方發生的線之最初的比，故

$$\frac{mk\cdot ms}{mt}=mn$$

而與後者相比的力之差,均與

$$pC^3$$

成反比.此即所欲證者.

系 1. 由此可知 P 與 p 或 K 與 k 方面力之差,與其他一力(此力使物體在圓內由 R 至 k 運動,其所用時間等於 P 於靜止的軌道內經過 PK 弧所須者)之比,猶如

$$\text{古}\qquad mn\cdot sin\cdot versRK=\frac{mk\cdot ms}{mt}:\frac{rk^2}{2kC}$$

$$=mk\cdot ms:rk^2,$$

而如

$$(6)\quad F:G=\angle VCP:\angle VCp,$$

即有 $\qquad G^2-F^2:F^2.$

故如以 C 爲中心,以

$$CP=Cp$$

爲半徑,作一圓分使其等於 VPC 面(此面爲 P 於一任何時間內在靜止的軌道上所作者),則使 P 在靜止的, p 在動的軌道內運動的力之差,與使物體在同時間內等速的作成該圓分之中心力相

比，猶如

$$G^2-F^2:F^2.$$

蓋該間分及 pCk 面之比，猶如作成此項面的時間之比。

系 2. 設 VPK 爲一橢圓，其焦點在 C，其上回歸點在 V，又設另一橢圓

$$(6)\quad vpk \cong VPK,$$

且恆

$$(7)\quad \begin{cases} pC=PC, \\ \angle VCp:\angle VCP=G:F, \end{cases}$$

則可設 $PC=pC=A$，橢圓之通徑 $=2R$，如是，則使物體在動的橢圓內運動之力，與

$$\frac{F^2}{A^2}+\frac{R\cdot G^2-R\cdot F^2}{A^3}$$

相比；反之亦然。

蓋如以

$$\frac{F^2}{A^2}$$

表一力，能使物體在靜止的橢圓內運動者，則此力

在 V 點即為

$$\frac{F^2}{CV^2}.$$

但使物體在圓內(此圓之半徑為 CV)以一種速度(此速度為在橢圓內進行的物體於 V 點所有者)運動的力,與一其他的力(此力對後者於回歸點 V 生作用)相比,猶如橢圓通徑之半與圓之半徑相比,即,如

$$R : CV,$$

因而 $\frac{F^2}{CV^2}$ 之強度為

$$\frac{R \cdot F^2}{CV^3}.$$

與此力相比,猶如

$$G^2 - F^2 : F^2$$

的力,為

$$\frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{CV^3}.$$

而此則按系 1 為 V 點之力之差(即使 P 在靜止的,p 在動的橢圓內運動的力之差).按以上之定

理，任何一高度 A 方面此力之差與 CV 高者相比，猶如

$$\frac{1}{A^3} : \frac{1}{CV^3},$$

故在 A 高時，該差爲

$$\frac{R\cdot G^2-R\cdot F^2}{A^3}.$$

所以使物體在同時間內能經過動的橢圓之全部的力，與

$$\frac{F^2}{A^2}+\frac{R\cdot G^2-R\cdot F^2}{A^6}$$

相比.

系 3. VPK 爲一橢圓，其中心在力之中心點 C，又設 vpk 與之相合并同心.倘設通徑爲 $2R$，大軸爲 $2T$，且恆 $VCp : VCP = G : F$，

則可同樣的推論得：使二物體在同時間內經過一靜止的一動的橢圓之力，其比如

$$\frac{A\cdot F^2}{T^3} : \frac{A\cdot F^2}{T^3}+\frac{R\cdot G^2-R\cdot F^2}{T^3}.$$

系 4. 今設物體之最高度以 T 表之，VPK 軌

道 V 點之曲率半徑爲 R, 又,使物體在靜止的橢圓 VPK 內運動的向心力,於 V 點時爲

$$\frac{F^2}{T^2}\cdot V$$

但在其他處所 P 時,設 $CP=A$, 則爲 X, 并恆設

$$VCp : VCP = G : F.$$

如是, 則使物體在循環運動的橢圓 vpk 內運動(在同時間內)的向心力,與力之總和

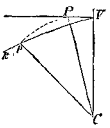
$$X+\frac{V\cdot R\cdot G^2-V\cdot R\cdot F^2}{A^3}$$

相比.

系 5. 所以, 如物體在一靜止的軌道內之運動已知, 則可將其繞力心之角運動放大或減小至一定之比,以求得其他靜止的軌道,此軌道爲物體受新的向心力時於其內運動者.

系 6. 設 CV 直線之位置已知,今於其上作一垂線 VP, 其長無定,又作 PC 及 $pC=PC$, 并使 $\angle VCp:VCP$ 之比有定. 如是, 則使物體在曲線 Vpk 內運動之力, 與CP^3 成反比;於此, p 爲一

動點.



第九十一圖

蓋因惰性力之作用，如無其他力於此影響，則物體 P 即在直線 VP 上等速前進．今如於中心點 C 置一力，與 CP 或 Cp 之三方成反比，則直線運動即變為曲線 Vpk 上的運動．但後者與 VPK 相同，而物體受該項力時即於其內運動．

§ 85. 問題． 求某種軌道的回歸點之運動，此項軌道與圓形甚相近．

此問題可算術的解之，其法在使物體(於動的橢圓內運動時)在靜的平面內所作之軌道，儘量與該項軌道之形狀相接近（即與求其回歸點的軌道之形狀相接近），於是即求靜平面內軌道之回歸點．但欲軌道之形狀相似，則在使物體作成軌道的向心力，相較時於同距離內能相比．

今設 V 為上回歸點，并設

$$CV=T,$$

$$CP=Cp=A,$$

以及 $CV-CP=T-A=X.$ (1)

使物體在橢圓內以焦點 C 爲中心機之運動的力(如 § 84, 系 2), 與

(2) $\frac{F^2}{A^2}+\frac{R\cdot G^2-R\cdot F^2}{A^3}=\frac{A\cdot F^2+R\cdot G^2-R\cdot F^2}{A^3}$

相比.今按 (1) 使上式分子中之 A 取該植,即

$$A=T-X,$$

則得

$$\frac{R\cdot G^2-R\cdot F^2+T\cdot F^2-X\cdot F^2}{A^3} \quad (3),$$

是即向心力與之相比者.

同樣的方法,將其他的向心力亦以分式表之,此分式之分母爲 A^3, 並用比較相當的項之法,使分子爲恆等.

可舉例以明之.

例 1. 設向心力爲整齊的,則與

$$\frac{A^3}{A^3}$$

相比.倘分子中之 A 代以 $T-X$ 則上式成爲

$$\frac{T^3-3T^2X+3TX^2-X^3}{A^3}.$$

於是用相當項比較之法，使已知者與已知者未知者與未知者相較,即得

$$\frac{R\cdot G^2-R\cdot F^2+T\cdot F^2}{T^3}=\frac{-X\cdot F^2}{-3X\cdot T^2+3T\cdot X^2-X^3}$$

或　$$\frac{R\cdot G^2-R\cdot F^2+T\cdot F^2}{T^3}$$

$$=\frac{-F^2}{-3T^2+3T\cdot X-X^2}\quad(4).$$

今設軌道與圓形甚相接近,則

$R=T$ 而 X 成爲無限小,

於是其最後比爲

$$R\cdot G^2:T^3=-F^2:-3T^2,$$

或　$$G^2:T^2=F^2:3T^2,$$

即　$$G^2:F^2=1:3,\quad(5)$$

因　$$G:F=\angle VCp:\angle VCP,$$

故　$$\angle VCp:\angle VCP=1:\sqrt{3}\quad(6).$$

所以當物體在靜止的橢圓內由上回歸點至下

回歸點,作一角

$$VCP=180^\circ$$

時,其他在動的橢圓內之物體亦作一角

$$VCp=\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}.$$

物體受整齊的向心力之作用而作出的軌道，與其在動的橢圓上運動時於靜的平面內所作之軌道相似,故必如此. 由以上將各項比較之法,可使此項軌道相似,但非一般的,僅僅在此項軌道與圓形相接近時纔行. 受整齊的向心力之作用而在與圓形近似的軌道內運動的物體，當其由上回歸點至下回歸點時作一角

$$\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}=103^\circ,\ 55',\ 23''.$$

當其由下回歸點回至上回歸點時,重復作此角,如此以至於無限.

例 2.　設離心力與距離 A 之若干次方,例如

$$A^{n-3}=\frac{A^n}{A^3},$$

相比(於此, n 為一任何整數或分數,有理數或無

理數,正數或負數均可),則按前法,

$$A^n=(T-X)^n,\ 即$$

$$A^n=T^n-nXT^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}X^2T^{n-2}+\cdots\cdots(7)$$

今將此與(3)中之分子

$$R\cdot G^2-R\cdot F^2+T\cdot F^2-XF^2$$

相較,即有

$$(R\cdot G^2-R\cdot F^2+T\cdot F^2):T^n$$

$$=-F^2:\left(-nT^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}X\cdot T^{n-2}+\cdots\cdots\right)\ (8).$$

倘軌道與圓形相合,而取其最後之比,則得

$$R\cdot G^2:T^n=F^2:nT^{n-1},$$

或 $$G^2:F^2=T^{n-1}:nT^{n-1},$$

$$G:F=1:\sqrt{n}\quad(9),$$

即,如前

$$\angle VCp:\angle VCP=1:\sqrt{n}\quad(10).$$

物體由上回歸點至下回歸點時所作之角 $VCP=180°$,故物體因向心力(此力與 A^{n-3} 相比)之作用在與圓形相接近的軌道內由上回歸點至下

回歸點時所作之角 VCp 爲

$$\frac{180°}{\sqrt{n}}.$$

當其由下回歸點回至上回歸點時, VCp 亦如是大;如此以至於無限.

倘向心力與物體之離心距離

$$A=\frac{A^4}{A^3}$$

相比,則 $n=4$, $\sqrt{n}=2$, 而

$$VCp=90°.$$

所以在經過第四部分後,物體即達到下回歸點,經過一半後則達到上回歸點,等等.

此理亦可由 § 27 知之. 蓋因此向心力之作用,物體在一固定的橢圓內運動,其中心點則即爲力之中心點.今設向心力與距離成反比,即是,與

$$\frac{1}{A}=\frac{A^2}{A^3}$$

相比,則 $n=2$, 而上回歸點與下回歸點間之角爲

$$\frac{180°}{\sqrt{2}}=127°16'45''.$$

所以因該項向心力之作用,使物體循環運動時,必須經過此角,乃能由上回歸點至下回歸點,及由下回歸點復至上回歸點,等等,以至於無限.

又如向心力與

$$\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$$

相比,則 $n=\frac{1}{4}$, $\sqrt{n}=\frac{1}{2}$, 故

$$VCp=\frac{180^\circ}{\frac{1}{2}}=360^\circ.$$

如是,則物體由上回歸點至下回歸點時,須作一完全的環繞,由下回歸點至上回歸點時亦然,如此以至於無限.

例 3. 設 m, n 爲任何二乘方之次數, b, c 爲已知之數,并設向心力與

$$\frac{b\cdot A^m+c\cdot A^n}{A^3}=\frac{b(T-X)^m+c(T-X)^n}{A^3}$$

相比.用前法將其算出後,則知向心力與

$$\frac{\begin{array}{l} bT^m-mbXT^{m-1}+\frac{m^2-m}{2}bX^2T^{m-2}+\cdots \\ +cT^n-nc\,XT^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}cX^2T^{n-2}+\cdots\cdots \end{array}}{A^3} \tag{10}$$

相比，今將此中之項與以前之(3)相較，即得

$$(R\ G^2-R\cdot F^2+T\cdot F^2):(bT^m+cT^n)$$
$$=-F^2:(-mbT^{m-1}-ncT^{n-1}\quad(11)$$
$$+\frac{m^2-m}{2}bXT^{m-2}+\frac{n^2-n}{2}cXT^{n-2}+\cdots\cdots)$$

設軌道轉變成為圓形，而取其最後比，則得

$$G^2:bT^{m-1}+cT^{n-1}=F^2$$
$$:(mbT^{m-1}+ncT^{n-1}).\quad(12)$$

今以算術上的單位表此最高度

$$T=CV,$$

則由上式可得

$$\angle VCp:\angle VCP=\sqrt{b+c}:\sqrt{mb+nc}\quad(13).$$

從可知，倘固定的橢圓內上回歸點與下回歸點間之角 VCP 為 $180°$，則在此處 VCp 為

$$180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}\quad(14).$$

仿此，倘向心力與

$$\frac{b\cdot A^m-c\cdot A^n}{A^3}$$

相比,則其角爲

$$180^\circ\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}\quad(15).$$

在較困難的狀況下,此項問題亦可如是解决之.與向心力相比的量,恆須化之成爲收歛的級數,其分母恆爲 A^3. 於是須將分子之已知部分

$$R\cdot G^2-R\cdot F^2+T\cdot F^2-X\cdot F^2$$

與其未知部分相比,將其不必要的項略去,并設

$$T=1$$

即得 $$G:F.$$

系 1. 所以,倘向心力與距離之任何次方相比,則可由回歸點之運動以推得此方數;反之亦然。

蓋如整個的角運動(經過此以後物體退回至原來的回歸點),與環繞一週的角運動,即 360° 相比,如 $$m:n,$$

并設距離爲 A, 則向心力即與

$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3}$$

相比.此可由例 2 知之.

由此可知該項力之減少不能超過距離三次方之比.蓋如不然,則物體由上回歸點出發,不能再至下回歸點及距離最小之處,而直至中點心了,所作曲線即為 § 81. 系 3 中所論過者.反之,倘由下回歸點出發,并稍向上,則亦不能達到上回歸點,而直至於無限去了,其所作曲線亦為該系及 § 84 系 6 中所論過者。

又如力之減少,其比超過距離之三次方,則物體由上回歸點出發稍傾下時,即直向無限下去;反之,倘出發時由下回歸點稍向上,即直向無限上昇.但如力之減少,其比小於距離之三次方,或與其任何次方為比相增加,則物體永不能達到中心,但可一次達到下回歸點.反之,倘物體交互的由一回歸點至他回歸點上昇或下降時永不能遇中心,則該項力必與距離相增加或其減小之度小於三次方,且物體由一回歸點達到他回歸點愈速,則其與三次方之比相差愈遠。

當物體交互的上升下降時,經過

$$8,\ 4,\ 2\ \text{或}\ 1\frac{1}{2}$$

次的旋轉由上回歸點回至下回歸點，則各關的有

$$\begin{aligned} m:n &= 8:1, \\ &= 4:1, \\ &= 2:1, \\ &= \frac{3}{2}:1. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{m^2}-3 &= \frac{1}{64}-3, \\ &= \frac{1}{16}-3, \\ &= \frac{1}{4}-3, \\ &= \frac{4}{9}-3, \end{aligned}$$

而力與

$$A^{\frac{1}{64}-3},\ A^{\frac{1}{16}-3},\ A^{\frac{1}{4}-3},\ A^{\frac{4}{9}-3},$$

成正比，與

$$A^{3-\frac{1}{64}},\ A^{3-\frac{1}{16}},\ A^{3-\frac{1}{4}},\ A^{3-\frac{4}{9}},$$

成反比.

如物體經各別的旋轉後回至原來的固定回歸點,則

$$m:n=1:1,$$

故 $$A^{\frac{n^2}{m^2}-3}=A^{-2}=\frac{1}{A^2}.$$

所以力之減少與距離之平方相比，此則以前所已證明者.

倘物體經

$$\frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \text{或}\frac{1}{4}$$

環繞後回至原來的回歸點,則得

$$m:n=\frac{3}{4}:1,$$

$$=\frac{2}{3}:1,$$

$$=\frac{1}{3}:1,$$

$$=\frac{1}{4}:1,$$

$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3}=A^{\frac{16}{9}-3},$$

$$=A^{\frac{9}{4}-3},$$

$$=A^{9-3},$$

$$=A^{16-8},$$

而力與

$$A^{\frac{11}{9}},\quad A^{\frac{8}{4}},\quad A^{-6},\quad A^{-18},$$

成反比，與

$$A^{-\frac{11}{9}},\quad A^{-\frac{8}{4}},\quad A^{6},\quad A^{18},$$

成正比.

倘物體由上回歸點回至下回歸點時，經過一環繞幷 3°，回歸點則當旋轉時直接經過 3°，則得

$$m:n=363:360,$$

故 $$A^{\frac{n^2}{m^2}-3}=A^{-\frac{265707}{131769}}.$$

如是，力與

$$A^{\frac{265707}{131769}}\text{ 近似的}=A^{2+\frac{4}{243}}$$

成反比．所以力之減小，其比較距離之二次方稍大，但與三次方較遠，其相差之度，則視二次方

差

$$\frac{4}{239}=\frac{100}{5975}.$$

系 2. 倘物體受向心力之作用,在橢圓內運動,此向心力與距離之平方成反比,力之中心在其焦點,而如此向心力自外被增大或減小了,則我們即可按例 3 求得其囘歸點之運動;此運動即爲該項外力所引起者.反之亦然.

今設該向力心爲

$$\frac{1}{A^2},$$

其外來使之減少的力與

$$cA$$

相比,則所餘的力爲

$$\frac{1}{A^2}-cA=\frac{A-cA^4}{A^3}.$$

按例 3, 卽有

$$b=1,\ m=1,\ n=4,$$

而二囘歸點間之角爲

$$180^\circ\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}.$$

今設
$$c=\frac{100}{35745},$$

則
$$180^\circ=\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}=180^\circ\sqrt{\frac{35645}{35345}}$$
$$=180^\circ,\ 45',\ 44''.$$

如是,物體由上回歸點出發時,經

$$180^\circ,\ 45',\ 44''$$

後卽達到下回歸點,再經過此後重復至上回歸點。所以在一週內上回歸點直接經過

$$1^\circ,\ 31',\ 28''.$$

月球的回歸點,其運動之速度約一倍於此。

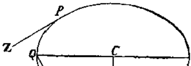
關於物體在軌道內之運動,其軌道之平面經過力之中心者,大約於此論過了.我們尚須一論偏心的軌道內之運動。

研究重物體的運動之著作家,必須一討論其在任何平面內之斜上升及下降,以及垂直的升降。又,物體以某種力而向中心的運動,以及在偏心的

軌道內之運動,我們亦均須研究及之.所用的平面可假定其極光滑,俾物體不致受若何阻滯,在這些證法方面,亦可不用物體在其上幷與之接觸的平面,而用與此相平行的面,物體之中心點卽在內運動,而軌道亦卽於此時畫出.又.我們幷將根據同樣的定律,以研究物體在曲面上之運動.

第十章　論物體在已知面上之運動及擺錘運動

§86. 問題. 設有一任何種類之向心力爲已知；力之中心以及物體在其內運動的平面亦爲已知.又假定曲線形之面積亦可求得.今求一物體之運動;此物體由一已知的處所,以一定的速度沿一直線出發；該直線在該平面內且亦爲已知.



第九十二圖

今設此力之中心爲 S,其與該已知平面之最小距離爲 SC, P 爲物體

由之出發的處所，PZ 爲其所沿之線，Q 爲在其軌道內運動的物體，PQR 則爲在該已知平面內所作之軌道，即所欲求者．作 CQ, QS 線，又設 SV 與向心力相比；此力在使物體傾向中心 S.

今作

VT 與 QC 相平行，

VT與 CS 之交點爲 T, 則可將 SV 力析成爲 ST, TV 二部分，其中之 ST 力與物體在平面內之運動無關．但 TV 力則使物體傾向 C, 其使物體在該平面內運動之作用猶如沒有 ST 力一樣，故如物體單受 TV 力之作用，則即以 C 爲中心在自由的空間內運動．但如 TV 爲已知，則按 §82 即可得軌道 PQR (此軌道爲將畫出者)，以及處所 Q (物體在某時間所達到者)，並可得該處之速度．反之亦然．

§87. 定理． 設向心力與物體離心之遠相比，則一切在任意平面內運動的物體作出橢圓軌道，且以相等的時間完全經過之．但在直線上往返運

動的物體,則其完成往返週期之時間亦相等.

在與前節相同的假定下,使 PQR 平面內之運動物體 Q 傾向 S 的力,與 SQ 距離相比.因

$$SV : SQ = TV : CQ,$$

故 TV 力(此力使物體傾向在軌道的平面內之 C 點)與距離 CQ 相比.因此,使平面內物體向 C 的力,按距離之比,與使物體在各處傾向 S 之力相等.所以物體繞 C 運動所須之時間等於在自由空間內繞 S 所須者.按 § 27 系 2, § 78 系 2, 此項物體於恆等的時間內所作之軌道,或則爲該平面內之橢圓,以 C 爲中心,或則爲週期的直線軌道,經過中心 C 在該平面內.此即所欲證者.

§ 88. 附註. 與此相關的,有物體在曲面上之上升下降.

試設想於平面內作若干曲線,將其接一經過力心的軸旋轉之,以得若干曲面;當物體運動時,其中心點恆在此項面上.倘物體斜上或下,在此面或該面運動時,此項運動恆在平面內,而平面本身

則經過軸;故亦即在曲線上,即產生該項曲面的曲線.所以在此種狀況下,我們祇須研究該項曲線內之運動便行.

§89. 定理. 一輪子直立於一球之外面，並沿一最大圓滾轉. 如是則輪周上任何一點由接觸時開始所作之曲線，其長與輪弧之半之矢 (*sinus versus*) 二倍相比,猶如球與輪二者直徑之和，與前者之半徑相比.

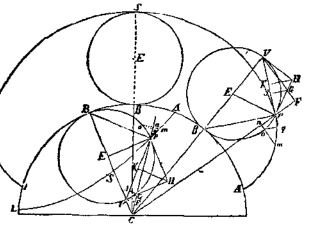
§90. 定理. 反之，倘輪子在球之內面滾轉作一曲線,則其長與該項矢之二倍相比,猶如球與輪二者直徑之差,與前者之半徑相比.

今設 ABL 為上所述之球,C 為中心點,BPV 為在其上的輪子,E 為輪之中心點，B 為接觸點，P則為輪周上之一點.試設想輪子在最大圓 ABL 上滾轉,而且

$$\frown AB=\frown BP,$$

於此時內，P 作一曲線 AP. 今所欲證者,即是

$$AP : 2 sin\ vers\tfrac{1}{2}PB=2CE : CB.$$



第九十三圖

今如 CE (必要時可引長之)遇輪周於 V, 則可作 $CP,\ BP,\ EP,\ VP,$

並作 VF 垂於 CP 之引長上.於是作切線 VH, PH 於 V,P 點,使其相交於 H; 並作 VF 線,與 PH 相交於 G, 再由 G 與 H 二點作二線 GJ,HK 垂於 PV 上.又以 C 爲中心,以 Co 爲半徑作圓弧 nom; 此弧與 $CP,\ BP,\ AP$ 相交於

$$n,\ o,\ m,$$

於是再以 V 爲中心點,以 Vo 爲半徑作 oq 弧,與 Vp (或其引長)相交於 q.

當輪子滾轉時以 B 爲中心旋轉,故 BP 此時與 AP 曲線垂直,因而亦與 VP 切線在 P 點相垂直.倘將圓弧之半徑顯明的放大或減小之,則可與 CP 相等,而因將成爲零的圖形

$$Pnomq \sim PFGVJ,$$

故將成爲零的直線

$$Pm,\ Pn,\ Po,\ Pq$$

之最後比,即是,

$$AP,\ CP,\ 及 \frown BP$$

之同時的增加以及 VP, 之減小之比,

與 $PV,\ PF,\ PG,\ PJ$

諸直線之比各各相同.

因 VF 與 CF 相垂直,而且 VH 亦與 VC 相垂直,故

$$\angle HVG = \angle VCF;$$

又因 $HVEP$ 四角形內 V, P 二角均爲直角,因

而 $\angle VHP = 180° - VEP$

$= CEP,$

故 $\triangle VHG \sim \triangle CEP.$

於是可得以下之比:

$$EP : CE = HG : HV = HG : HP$$

$$= KJ : KP,$$

而因 $EP = EB,$

由此即可得

$$CE - BE : CE = JP : PK,$$

$$CB : CE = JP : KP,$$

亦即 $CB : 2CE = JP : VP,$

$$= Pq : Pm.$$

從可知 VP 之減小,亦即 $BV - VP$ 之增加,與 AP 曲線之增加相比恆爲

$$CB : 2CE,$$

而由之產生的長 $BV - VP$ 及 AP, 其相比亦同此.倘以 BV 爲半徑,有

$$VP = \cos BVP = \cos \tfrac{1}{2} BEP,$$

故 $$BV-VP=1-\cos\tfrac{1}{2}BEP$$

$$=\sin vers\tfrac{1}{2}BEP.$$

在以上之輪子方面,其半徑為 $\frac{1}{2}BV$, 故

$$BV-VP=2\sin vers.\tfrac{1}{2}BEP.$$

於是最後可得

$$AP:2\sin vers\tfrac{1}{2}BP=2CE:CB.$$

此即所欲證者。

為分別計,我們稱第一事內之 AP 曲線為球外擺線(*Cycloide*),其第二事內者則為球內擺線。

系1. 試作擺線 ASL 之全部,於 S 平分之,則 PS 曲線與 VP 線相比,如

$$2CE:CB.$$

所以二者之比為一常數。

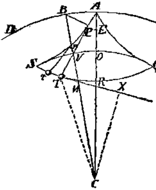
系2. 半個擺線 AS 之長,與輪子之徑 BV 相比,如 $2CE:CB.$

系3. 所以倘視球之半徑為已知,則該項長與

$$BE\cdot EC$$

相比。

§ 91. 問題. 今欲使一擺錘之線在一已知擺線內運動.



第九十四圖

今於 QVS 球(其中心爲 C)之內部作一擺線 QRS. 此擺線於 R 被平分, 其兩端 Q, S 與球之面相接觸.

試作 CR 線, 將 QS 弧於 O 平分, 並將 CR 引長至 A, 使

$$CA : CO = CO : CR \quad (1).$$

於是以 C 爲中心點, CA 爲半徑作一外球 ABD. 在此球之內部, 用一直徑爲 AO 的輪子作二擺線 AQ, AS, 與內面的球相切於 Q, S, 與外球則於 A 相遇. 由 A 點往下懸一線 APT, 其長 $= AR$; T 處繫一物體, 於是, 使其在 AQ 與 AS 之間擺動. 當擺動向 APS 擺線進行時, 線之 AP 部分即合

在 APS 上,其餘 PT 部分則與擺線尙不接觸,因而仍爲直線;如是,T 即在已知的擺線 QRS 上擺動.

PT 線與 QRS 擺線相交於 T,與 QOS 圓則交於V.今作 CV 線,引長後與 ABD 圓相交於 B,並於 P,T 二點作垂線 PB, TW,與 CV 相交於 B, W. 由擺線之產生,可知此項垂線在 CV 上割下

$$VB=OA,\ VW=OR, \quad (2)$$

故 B 必在 ABD 圓上.於是有

$$TP:VP=BW:BV$$

$$=BV+VW:BV,$$

$$TP:VP=OA+OR:OA. \quad (3)$$

由(1)可得

$$OA-CO:CO-CR=AO:OR$$

$$=CA:CO,$$

因而 $OA+OR:AO=CA+CO:CA,$

$$OA+OR:AO=2CE:CA \quad (4).$$

按 (3), (4) 即有

$$TP : VP = 2OE : CA \quad (5),$$

$$VP = 2 \cdot \tfrac{1}{2} BV sin VBP \quad (6).$$

又按 §90 系 1, 2, 即得

$$\left.\begin{array}{l} PT = PS, \\ APT = APS, \\ APT = AR \end{array}\right\} (7).$$

故如線之長恆為 AR, 則 T 在擺線 QRS 上運動.

此即所欲證者.

系. AR 線等於 APS 擺線, 故其與 AC 半徑相比, 猶如 SR 擺線與 CO 半徑相比.

§92. 定理. 倘恆向球心 C 的向心力, 在各處均與其離心之遠相比, 物體 T 僅以此力之作用如前於擺線 QRS 上擺動, 則任意的不等的擺動之時間均相等.

今作 CX 垂線, 垂於 TW 之引長上, 並引 CT 線, 使物體 T 向中心 C 的向心力, 與距離 CT 相比, 故可將其析成為二支力 CX, TX. 此中之第

一力使物體離開 P, 故其作用使線緊張，而因後者之抵抗,適相抵消.其第二力則使物體向 X, 因而使其在擺線內之運動加速．此項與力相比的加速,其各時間內之增減,猶如 TX, 而因

$$TX : TW = CV : VW,$$

又 $CV=CO$, $VW=OR$ 均爲常數,故如 TW,或,按 §90 系 1, 如 TR 弧.

倘有二擺錘, APT 及 Apt, 其與 AR 之距離不同,則將其同時放下後,其加速恆與所當經過的弧 TR, tR 相比.在開始時所作的部分,其比與加速同,即是,與開始時所當作的全弧之比同；所以其餘的部分,其比亦與全軌道之比同,而在後與此項部分相比的加速亦然.

從可知加速,其所產生的速度,以此項速度作出的部分,以及所當作的部分,恆與全弧同其比.

所當作的部分,其相互間之比恆不變,故必於同時間內成爲零,此即是說,二個擺動的物體於同時間內達到 AR 線.反之,擺錘之由最低點 R上

昇,其在各點被阻滯的力,等於下降時使其加速的力,故可知經過同樣的弧時,上升及下降之速度相等,因而後者所須之時間相等.

因擺線之二部 RS 及 RQ 相合,故二擺錘之經過其全振動以及經過其半,其所須時間均同.

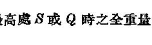
此即所欲證者.

系. 物體在擺線上任何處 T 時,使物體加速或遲緩的力,與物體在最高處 S 或 Q 時之全重量相比,如

$$\frown TR : \frown QR.$$

§ 93. 問題. 求擺錘在各處之速度,以及經過全振動及其部分時所須的時間.

1. 以一任何點 G 爲中心,用半徑 GH(=RS弧,參觀第 94 圖)作半圓 HKM,與 GK 相交並爲其



第九十五圖

所平分.與距離心之遠相比的向心力,假定其傾向

中心點 G. 在同一時間內,當擺錘 T 由其最高點 S 下來時,一物體 L 由 H 到 G. 在開始時推動物體的力均相等,且與所當經過的軌道 TR, GL 相比,故如

$$TR=LG,$$

則在 T 與 L 點亦相等.如是可知該項物體在開始時經過相等的軌道 ST, HL, 以後則繼續的為相等的力所推動,並且所經過的空間亦恆相等.

按 §78 可知物體經過 ST 弧的時間,與一全振動之時間相比,猶如 HJ 弧(物體由 H 至 L 所須時間)與 HKM 半圓(物體經過 HM 軌道所須時間)相比.

又,擺錘在 T 點之速度與其最低點 R 之速度相比(即是,物體 H 在 L 點之速度與其 G 點之速度相比,或亦即, HL 線之當前的增加與 HG 之增加相比,但須 HJ, HK 弧以等速度增加),如

$JL : GK$ 或如

$\sqrt{SR^2-TR^2} : SR.$

因在不等的振動方面，在等時間內所作之弧與全部振動弧相比，故由已知的時間可得速度及所作之弧。

2. 今設擺錘在不同的擺線內振動，此項擺線在不同之球之間，而且其絕對的力亦爲不同，與 QOS 球相當的絕對力，今以 V 表之。如是，則推動球面上擺錘的加速力，與

$$CO \cdot V$$

相比。與此力相比的 HY 線於是即在已知的時間內畫出，而如作 YZ 垂線，與圓周相交於 Z，則 HZ 弧即表該時間。但此弧與

$$\sqrt{GH \cdot HY} \text{ 即是 } \sqrt{GH \cdot CO \cdot V}$$

相比，故 QRS 擺線內全振動之時間（因其與代表該全振動的半周 HKM 成正比，與代表一已知時間的弧 HZ 成反比）與

GH 半徑成正比，

與 $\sqrt{GH \cdot CO \cdot V}$ 成反比，

或因 $GH = SR$，

與 $\sqrt{\dfrac{SR}{CO\cdot V}}$

或按 § 91 之系，與

$$\sqrt{\frac{AR}{AC\cdot V}}$$

相比.

所以在球內及擺線內受某種絕對的力而發生的振動，其比爲線長之根之正，始點離中心的根之反，以及絕對力之根之反三者所合成.

系 1. 由此，我們可將振動的，下墜的及旋轉的物體之時間互相比較.

蓋如設球內產生擺線的輪子之徑等於球之半徑，則擺線即成爲直線，而此直線則經過球心. 於是擺線上之振動，即轉變爲該直線上之往返上昇下降. 由此可求得由任何一處至中心之下降時間，以及與此相等的時間之段，於此段內，一物體能以等速的旋轉運動，在一任意的距離處，以球心爲中心作一象限. 蓋此時間與任意擺線 QRS 內之半振動時間相比，如

$$1:\sqrt{\frac{AB}{AC}}.$$

系 2. 由此,尙可推得以前雷氏(*Wren*)及許金司(*Huygens*)於尋常擺線方面所得的結果.

蓋如我們將球之徑放大至無限,則其球形的面即轉變成爲平面,向心力之作用方向,於是在與平面垂直的線內,而此處的擺線乃成爲尋常的擺線了.在這裏,該平面及產生此線的點中間之擺線段之長,等於輪子上弧之半之矢(*sinus versus*)四倍,此弧亦在該平面及該點之間.此結果即雷氏所得者.又如一擺錘在此項二擺線之中間,則其振動在一相合的擺線上,其時間亦等.此爲許金司所證明的結果.許氏並曾用此理,說明重物在一振動時間內之下墜.

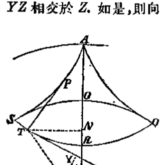
我們所證明的定理,可以與地球之眞的屬性相適合,其適合之故在這裏,即,輪子在其大圓上前進時,輪之邊即在球外作出擺線.而如將擺錘懸於地面之下,例如在地穴中,則其振動亦即在球內之擺線上,故一切振動均有等時性.

§94. 問題. 假定我們能求曲線之長，今欲求該項力，能使物體在已知的曲線上恆作等時的振動.

今設物體 T 在任意的曲線 $STRQ$ 上振動，此曲線之軸 OR 係經過力之中心點 C 者.試作 TX，與曲線相切於 T，並於其上取

$$TY=TR.$$

因假定我們可求曲線之長.故 TR 弧之長可用尋常之法求之.於 TX 上取一點 Y，於此作一垂線 YZ，並引 CT 與 YZ 相交於 Z. 如是，則向心力卽與 TZ 線相比.使物體由 T 向 C 的力旣用 TZ 線表出，卽可將其析成爲二支力 TY, YZ. 後者之支力.在 PT 方向內(卽線的方向內)對於物體生作用，故



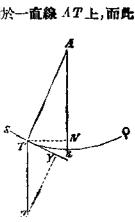
第九十六圖

於物體之運動上不能生若何變化,但 TY 力則能使 $STRQ$ 內之物體運動加速或遲緩.又因此力與所當經過的軌道 TR 相比,故二振動 (一較大一較小)之所當作的相比的部分內之加速或遲緩,恆與此項部分爲同比.所以其作用,使該項部分在同時間內作成. 但物體倘能於同時間內作成與整個道路相比的部分,則亦即能於同時間內作成整個的道路.此即所欲證者。

系 1. 倘將一物體 T 懸於一直線 AT 上,而此物體作一弧 $STRQ$, 則各個振動之時間均相等, 但須此物體受一力向平行的方向被往下的吸引, 而且此力與整齊的重力相比 . 如 $\frown TR : \sin TR$

$(\sin TR = TN)$.

蓋因



第九十七圖

TZ 與 AR 相平行,

故 $\triangle ANT \sim \triangle TYZ,$

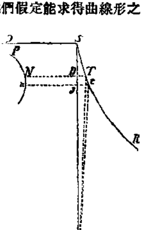
因而 $TZ:AT=TY:TN.$

系 2. 所以在擺鍾鐘內，由機器方面所施於擺鍾使其繼續運動的力，倘能將其如是與重力結合，俾其全個向下的合力，與

$$\frac{TR\cdot AR}{sinTR}$$

相比，則一切振動即均爲等時的.

§ 95. 問題. 如前，我們假定能求得曲線形之面積. 今所欲求者是時間，在此項時間內，物體受某種向心力之作用在任意的曲線內上升及下降；至曲線本身，則在經過力之中心的平面內. 設有一物體由 S 點出發，在任意的曲線 $STtR$ 內下降，此曲線則在經過力之中心 C 的平面



第九十八圖

內.今作 CS 線,將其均分成爲無數段,其中之一段爲 Dd. 於是以 C 爲中心, CD, Cd 爲半徑,作圓弧 DT, dt, 將 SR 曲線於 T, t 分割.由已知的向心力定律及 CS 高,可按 §79 以得任何高 CT 之速度.物體經過極短的線 Tt 所須之時間, 與 tTC 成正比,與速度成反比.今設 DN 與此時間相比,則因 Dd 爲已知,故此時間亦與

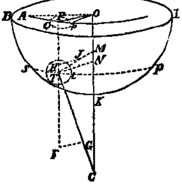
$$Dd\cdot DN$$

相比,即是,與長方形 $DNnd$ 相比. 故如 PNn 爲 N 所恆在其上的曲線, QS 與 CS 相垂直,且爲該曲線之漸近線,則

$$SQPNDS$$

面積與一時間相比, 在此時間內下降的物體經過 ST 曲線.故如求得該面積,則亦可求得此時間.

§96. 定理. 一物體在一任意的曲面上運動,此曲面之軸經過力之中心. 今由物體作一垂線至軸,並於軸上取一點,由此作一線與前者相平行並相等,則此線作成一面,與時間相比.



第九十九圖

今設 $BSKL$ 爲一曲面，T 爲在其上運動的物體，$STtR$ 爲物體於其上所作之軌道，S 爲此軌道之出發點，$OMNK$ 爲曲面之軸，TN 爲由物體至軸上之垂線.又設

OP 與 TN 相平行又相等，

且爲一動的線，AOP 爲其平面，AP 則爲 P 點在該平面內所作軌道之一段，A 爲此軌道之始點，與 S 相當．TC 爲由物體至中心點 C 之線，TG 爲其一部分且與使物體傾向中心的力相比．TM 爲一與曲面相垂直的線，其上一部分 TJ 與壓力相比，此壓力即爲物體所施於曲面以及曲面所施於物體者.又，$PHTF$ 爲一與軸相平行的線，經過

物體之本身，GF 與 JH 則爲由 G，J 垂於此線上之垂線．

今所欲證者，是 OP 半徑自開始運動起所作之面 AOP 與時間相比．

按定律系 2，我們可將 TG 力析成爲 TF，FG 二支力，並將 TJ 力析成爲 TH 及 JH 二支力．TF 及 TH 二力沿 PF 線生作用，此線係垂直於 AOP 平面上，故對於物體之運動，祇能在此方向內影響之．但對於物體在該平面內之運動，則此二力 TF，TH 完全無關，與沒有此二者而單爲 FG，HJ 所推動一樣．所以此種狀况，與一其他狀况完全一樣，即是，物體在 AOP 平面內受一向心力之作用作一曲線 AP，此向心力傾向中心 O 且等於 FG，HJ 二力之和．按 § 13．即可知所作之面 AOP 與時間相比．

此即所欲證者．

系．用此方法尚可證明以下之理：倘物體受力之推動，此項力傾向 CO 線上之若干中心點，物體

則在無阻的空間內作曲線 ST; 如是, AOP 面即恆與時間相比.

§97. 問題. 假定我們能求曲線形之面積. 已知者爲向一固定心的向心力之定律,以及一曲面,其軸經過該心. 倘一物體由一已知的點以一定的速度向一定的方向在面上出發, 則可於此作一曲線;今欲求此線.

用一與前節相同的作法,則可知物體 T 由 S 出發在所欲求的軌道 $STQR$ 上進行, 此軌道在 BOL 平面內之蹤跡爲 AP 曲線. 由 SC 高之已知速度可求得一任何高 TC 之速度, 以此, 物體於一極短的已知的時間內作出其軌道之極小部分 Tt, 其 AOP 平面內之蹤跡爲 Pp 線.今作 Op 線,又設以 T 爲心 Tt 爲半徑所作的小圓,在 AOP 平面上之橢圓的投影爲小橢圓 pQ. 因小圓與軸之距離 $TN=PO$ 爲已知,故該橢圓之形狀與大小爲已知,其與 PO 之相對位置亦已知.又因 POp 面與時間相比,故時間已知則此面亦可求得,所以

$\angle POp$ 及 Op 之位置可推得，而由此又可得其與橢圓之共同交點 p 以及 $\angle OPp$，此角即為 APp 軌道與 OP 線之交角．於是可用§81 內之法以求得 APp 軌道本身．在軌道上之各點作垂線 PT，與曲面相交於 T，即可求得所欲求的軌道上之各點 T．