科學與方法

引言

本書內所輯諸文，均多少涉及科學方法論上之問題。科學之方法，不外觀察與實驗，故如學者能有無限多之時間，則吾人祇須請其『觀看，善爲觀看』即可。無如人之時間有限，既不能將一切盡觀看而善爲觀看之，且不善之觀看，往往較之不觀看尤差，則不能不有選擇之方矣。於是問題之最先發生者，卽當如何選擇之？物理學者之無可逃避此問題，亦猶歷史學者，卽數學者亦然，故其所遵循之原則，亦多相似。學者之求與此項原則相適應，實有非意願所能爲力者，故吾人不必對此加以深思，已不難預料將來之數學，當若何形成也。

吾人倘一觀察正在工作時之學者，則此種情形必可益以明瞭。科學的發明方面之心理的機

括，吾人須先知之，數學的發明方面者尤要，故心理學者苟能對於數學家之工作方法作一觀察，所得當必甚多。

凡以觀察爲根據之科學，必須計及由於感覺及器械之不精所發生之差誤。所幸者，吾人可假定此項差誤在或種條件下，得部分的相抵，故所觀察的量，取其平均值時，差誤均可消去。相抵之可能，則在於機遇。然所謂機遇者，其意義究若何，則其概念殊不易明，自更難爲之作一定義矣。惟此概念對於研究者爲不可少之事，則在觀察之差誤上已可見，吾人適已言之。然則此難以捉摸而又不可少之概念，必當有一定義，此定義又須儘求其精確，蓋不待言者。

此項普通之識語，對於任何科學均所適用。例如就數學的發明言之，此方面之機括，實與一般的發明機括無甚相異。餘如關於某種特殊科學之問題，亦當一研究之，而首先所欲論者，則爲關於純粹數學之問題。

在專論數學之諸章內，必須一及較抽象之對象。其將首先提出者，則爲空間之概念。空間相對之義，蓋已盡人皆知，或盡人能言之。然在思想上，仍不免將其視爲絕對者，實繁有徒。苟稍一思之，則

由絕對空間之假定所發生之矛盾，不難立卽見及也。

科學之教學問題，尤關重要，且不僅就其本身而言，爲一要事，就他方面觀之，尤有足注意者。吾人試一考慮，如何可使靑年學子了解各種新概念，則必隨卽一究此項概念之眞正的來源，卽其眞正的性質，以及吾人之祖先，何由而得之。彼學者所作之定義，何以大多學生均不克了解，而須以其他者代之？此種問題，將於下章內論之，其所得解決，對於探討科學邏輯之哲學者，必能有所啓發。

數學家之中，頗有以爲全部數學，可歸納於形式論理上之定律者，爲此目的所犧牲之勞力，至足驚人，且爲達到其目的計，不惜將吾人觀念發生上之歷史的程序，曲爲倒置之，以無限解釋有限。本書內對於此種努力，將指出其根本錯誤之所在，凡不以成見研究此問題者，當均能同意之。專論此問題之各章，自較枯澀，但望讀者能明其重要，則當可相諒及此矣。

末後之數章，係關於天文者，較爲易讀。

力學至於今日，似有根本改造之勢。其中之概念，向所視爲不可動搖者，今已漸爲大膽的新概念所代。吾人對此，固倘不能因其新而卽採取之，但將各學說作一明白之敍述，要亦極有興趣之事，

故於後章內及之。於此歷史的發展，尤所深切注意，蓋如不明其逐漸發生之由來，則此新概念，必將視爲可異者矣。

天文之於吾人，尤爲一絕大之幕劇，其所提於吾人之大問題甚多。欲將實驗之方法，直接施用於此，殊難作此思想，蓋吾人所有之實驗室，規模太小，不足爲此用也。然實驗室中所可研究之現象，亦有與之相類者，則對於天文學者，至少可示以方針。例如銀河之系統，係由極多之太陽所成，初觀之，其運動似純爲隨便者。然吾人豈不能將此太陽所成之系統，與氣體分子所成之系統相較耶，此後者之屬性，吾人已由氣體之分子運動論知之。如是，經一表面上之周折後，物理學者之方法，大可有助於天文學者。本書之末，幷略述法國方面測地學之歷史的發展，以明測地學者之費卻幾許苦心，若何耐久，幷須蒙若何之危險，乃有今日關於地形之些微知識。然則斯亦一方法之問題耶？此則自無可疑，蓋此歷史所昭示於吾人者，在重大之科學工作方面，固須有時間及精神爲之犧牲，而欲於所測之量上，作極少之新進步，則尤須有謹愼之方法也。

第一卷　學者與科學

第一章　事實之選擇

託爾斯泰曾於某處，說明其不以『爲科學而科學』爲然之故。蓋事實之多，幾於無限，吾人欲盡識其一切，斷不可能。如是，吾人必須於其中作一選擇。然則選擇之標準，眞當如託氏所識，直即隨知識慾之所好而爲之乎？苟以有用或無用定捨取，即是以實用的要求，尤以道德的要求爲標準，豈不更佳？除計數地球上寄生於植物之昆蟲外，吾人遂無其他更佳之事可爲乎？

託氏之所謂有用者，其意義自與貿利商人及多數人之所謂有用，迥不相同，此無待言者。工業上之應用，電之神奇，與夫汽車之疾馳，不特非託氏所介意，且正爲其所疾視，以爲是皆有害於道德上之進步者。在託氏觀之，苟能有以改善人類，斯則眞爲有用者矣。

以予觀之，無論此一理想或彼一理想，均難滿意。彼孳孳爲利之事，固非所願，但僅以唾面自乾之溫良，爲德謨克拉西之美德者，亦難贊同。苟有此種世界，則其中之有學養者，必皆無有知識慾而後可，於是此種人對於所受刺激，均將熟視若無覩，吾料其不致爲疾病所侵，而將老死於沈悶也。然此均爲各人之嗜好，故不欲深論之。

但此問題則依然未曾解決，遲早均須引起吾人之注意。苟吾人之選擇，僅以興致所在或直接的用處爲標準，則自無所謂『爲科學而科學』，馴至將無有科學可言矣。是果可乎？選擇之必要，斯已無可爭論者。事實之神速，尤非吾人所能及，雖欲竭全力以把捉之，終不可能。當學者發見一事實時，其體內每一立方糎中，已有萬萬之事實經過。故欲將自然界包入科學之內，是不啻欲將全體強入於部分也。

然學者之見解，則深信事實有秩序可尋，故可於其間作理智的選擇。科學之能成立，必須先有此項選擇，而事實上既已有科學存在，則此種見解，自足徵其無誤。吾人祗須張目一觀，即不難見工業上之種種新頴事物，雖爲實用家所創作，但如世間祗有實用家，無有不介意於實用之呆人，則此

項新顯事物者，又何從而來，彼呆人之心目中，固未嘗一想及實際上之應用，然謂其僅爲輿致所支配，則又未能盡其實情矣。

如是則此種呆人者，實爲後人節省不少思想之勞，誠如馬哈（Mach）所言。其立求實際應用之人，對後世不能有所遺留，苟實際上有新要求發生時，除從新開始而外，恐無他道。然人類中之大部分，均不喜多事思想，而斯則或亦爲相宜之事，蓋本能能爲人導，且往往較之理性之導智性，尤爲得宜，至少於追求直接之目標或反覆追求同一之目標時，當較相宜。但本能不外常例，故如不經思想之冶鑄，則人類之能有進步者幾希，行見其無異於蜂蟻耳。然則彼不喜思想者，當必有爲之思想者而後可，而因不喜思想者居多數，則吾人之思想，又必每一均能有用可用，且須用處愈多愈妙，此所以定律愈普遍，則其價値亦愈大也。

吾人之當如何選擇，於是可由此以知之。事實之最有價値者，其用及之次數必最多，亦卽爲常可復現之事。幸而吾人所生於其內之世界，其中亦確有此種事實存在。今如假定吾人所有之化學元素，爲數不止六十，而有六百萬萬之多，其中一部分爲廣布，一部分爲稀有者，但其分配均極平均，

則吾人每檢得一新石塊而欲作其分析時，此石塊之爲未知的質量所構成，其可能性極大，凡由其他石塊所得之知識，於此均不必適用。於是吾人每見一新對象，卽與嬰孩之對於外物無異，除吾人之興致及要求外，將別無遵循之標準。在此種世界內，斷不能有科學產生，甚且不能有思想乃至於生活，蓋其中無有何種發展，能養成保持之衝動也。幸而天公不以此相待，吾人所有之元素，其數甚有限，於是乃如世上之其他好事然，吾人對之，每習焉而不覺，未嘗一重視之。又如生物學者祇能從事於個體，而不能硏究及種類，且無有遺傳之事，使子孫與祖先相似，則其棘手當如何，亦不難推想而知。

然則何種事實，吾人可最望其復現者？凡簡單之事實，自可望其如此，蓋在複雜之事實方面，其無數多之條件，所由以湊合者，不外一機遇，希望此機遇屢將此項條件湊合，以造成此事實之復現，其可能性實小。但所謂簡單事實者，究竟有無，如有，吾人又當如何認識之？又如吾人所視爲簡單之事實，安知其非爲極複雜者？從可知吾人所能爲者，不外選取似爲簡單之事實，以與一望可知其爲複雜，不難立卽分判其不相似之元素者相別而已。於是吾人祇有二種可能性，一則此項事實確爲

簡單，一則此項事實之元素密切混合，已成爲不可分開。倘爲前者，則吾人可望屢復遇見簡單之事實，無論就其全部簡單性，或爲屬於一複雜的全體之元素。倘爲後者，則密切的混合，較之可分開的混合，其復現之希望亦較多，機遇可同混，但不能分解，而如欲由種類不同之元素，構成一整齊之事物，其中各元素倘可分開，則必有特殊之構造而後可。然如一種混合內，其各元素均可分開，則其復現之或然性較少，反之，倘混合之法，一望卽見爲均勻者，其重再構成之可能性卽較多。因之，似爲簡單之事實雖實際上不必眞簡單，然每較實在簡單之事實，尤易爲機遇所湊合。

學者本能的所取之方法，於是得其理由，而因極多之事實，以其爲吾人所習見，每以簡單視之，故此項方法復多得一層理由。

然簡單之事實，又當於何處求之？有二個極端，學者每於其內求之者，其一爲無限大，其他則無限小是也。因星球間之距離如是其遠，使吾人可將個別之星球視爲一點，其間所有質量上之差別不復可見，而點則較之具有形狀及屬性之體爲簡單，於是天文學者乃獲得簡單之事實矣。物理學者之方法，則將物體於思想上分解之成爲無限小之部分，而研究此項極小部分方面之現象，蓋問

題上之諸條件，由物體之一點至於他點時，其變化漸而續，故在極小一立方之內部，不妨將其視爲不變者。

生物學者亦循其本能之所向，以細胞爲較有趣味，故不從事於整個之動物，而從事於此，其所得結果，亦復使其深信所用方法之無誤，蓋細胞屬於各種器官，故較之各器官之本身，間多相似之處，至少對於能認識其相似者爲然，然社會學者之事，則不如是之易，而多棘手。其所從事之元素，卽社會上之人，太多不相似之處，各別太甚，一言以蔽之，則太複雜而已。世界史上之事實，莫由重再循環，則社會學者將於何處求有趣味之事實，卽事實之能復現者耶？科學之方法，適在於選擇事實，如是則首先須從事者，在發明方法，蓋方法不能自己產生，故多由人所發明。社會學上之每一定理，可爲一新方法，而每一新興之學者，對於前人之定理，輒有所顧慮，於是社會學乃成爲方法最多，結果最少之學。

如是，吾人必須自有規則之事實開始。但定律一經確定後，則按照定律而進展之事實，卽成爲不足注意，蓋已不能由此以得若何新事物也。於是不屬於定律之例外，乃轉成爲重要之事，因而吾

人亦不再從事於追求相似，而注重於差別，其尤爲顯然者，尤足爲吾人所首先選擇，此則不獨因其特爲顯明，亦緣吾人可由之以增加見聞。試舉一簡單之例，以說明斯意。今欲觀察若干點，以作一曲線，則以直卽應用爲目標之實用家，其觀察僅以某項目的所需之點爲限。然此項點之分配於曲線上，可爲殊不順利者，在某處可堆積甚多，而在某處則不多見，故欲用一連續之線將其連結之，殊不可能，因而此項點對於其他方面不能有所應用。然以求理爲旨歸之學者，則其方法異於是，其目的既在研究此曲線，故所欲觀察之點，務必有規則的分配之，迨至得有若干點後，卽用一有規則之線連結之，因而可由此以知曲線之全部。然則其實施之方法如何？當其確定曲線上甚遠之點後，卽轉而注意曲線之他端，不限於前者之附近。再則約略取其中間之點，等等。

定律既經確立，則首先須求者，爲預可料其不適用此定律之事例。天文上之事實以及地質方面之經過，乃成爲有趣味之事，蓋當涉及甚遠之空間，回溯悠邈之年代時，吾人所有之定律，可完全推翻。此種根本之變動，可使吾人對於近身之小變化，屬於吾人所身處其中渺小之宇宙部分內者，得較爲明瞭之。此項遙遠之對象，本少涉及，今既與之一周旋，則於認識此渺小之宇宙部分上，殊有

所助也。

於是吾人所當注意者，不僅在確定其相似與差別，尤當多置重於隱微之整齊性，於表面上似頗不同之差異中尋求之。各個之定律，初觀之似不相一致，但如詳爲觀察，則知其就一般而言，實爲相等者，蓋以內容言此各定律固不相同，然將其諸部分整列之，則形式上卽多相似也。試由此方面出發觀察之，卽可知其能如何擴充，以包括一切。某項事實之價值，亦由此決定之，此種事實者，可構成一全體，幷指出其能如何代表其他已知之總體。

關於此層，可不再深論，然由此已足見學者之選擇其所欲觀察之事實，未嘗隨便爲之。其計數寄生於植物上之昆蟲，幷非如託爾斯泰所謂緣於此項動物之數目，可爲有味的變化之對象，姑不問動物之本身吾人對之有若何大之興趣也。學者之努力，實欲將甚多之經驗與思想，總括於一小册內，故物理學教科書之篇幅雖少，而其中所包羅者，則除實際上已經施行之實驗外，尙有萬倍多之可能的實驗，其結果不難預見之。

然以上所論者，僅爲問題之一面。學者之研究自然，非因其有用，而因樂悅之，其所以樂悅之者

則因自然之美，實有足多。倘自然不如是之美，則吾人之費神認識之，將爲無價值之事，且吾人生活於其中，亦將無意義可言。然所當知者，則此處所云之美，非吾人感官所感覺之美，亦非屬性及現象上之美。惟意雖不在此，亦非欲遠離之，特謂此種之美，無與於科學耳。茲所謂美者，實較爲精微，由部分之和諧的秩序所形成，惟吾人之純粹智性，乃能領略之。此項和諧的秩序，實爲吾人感覺上所見動搖不定的現象之體，或稱之爲脊樑更佳。如無此支持之者，則此種流動之夢景，既爲不定，且過眼卽空，自無有完全之美可言。反之，智性上之美，則可自足，學者之不惜勞力，日惟沈潛於研究，其爲此目的，或較之爲人類將來之福利者爲多。

此種特殊的美以及宇宙和諧上之意義之尋求，使吾人於選擇事實時，以能完成此種和諧者爲旨歸，猶之藝術家之於其模特兒，用其一己所特有之目光，選擇特點，使所作之像，有生氣及特性可見。此種本能的及不隨意的成見，不致使學者與尋求眞理相違，此則無庸爲之顧慮者。所夢想之和諧的宇宙，不問其在實際的宇宙之背後相去幾何，但吾人總可夢想之。往昔最偉大之藝術家，卽希臘人，其所想像中之穹蒼，與今日吾人所知之實狀，其相去爲何如耶？

簡單性與偉大性，既為美者，故吾人特願尋求簡單之事實以及偉大之事實，吾人之所以時而瞻望星辰之運行，時而用顯微鏡考察奇異之極微，此項極微之本身，固亦為偉大之物，又則時而於地質時代中推求悠遠以前之遺跡，因其年代之湮遠，吾人對之亦特感與趣。凡此種種，吾人均樂為之，其動機無非為是也。

於此可見求美之念，使吾人所採之選擇，初與求用者無異。思想之經濟，勞力之經濟，馬哈所謂科學之發展由以決定者，於是乃成為美之源泉，同時，實用上之利益，亦由此得之。工具之適應其目的，圓柱之能負擔加於其上之重量，略無緊張之象，是皆使吾人所嘆賞於建築物者。

此種一致之處，其原因何在？豈因吾人所視為美之事實，亦即最易入於吾人之智性，故成為智性所最能使用之工具耶？不則豈為進化及自然淘汰中之把戲耶？理想最能與其確知之利益相適應之民族，豈不已將其他之民族消滅，代之而起耶？彼此均以其理想為旨歸，未嘗計及其結果，然一則以亡，一則以霸。故或以為希臘人之征服蠻族，與夫承繼希臘思想之歐洲之稱霸世界，蓋緣於蠻人祇知愛好鮮炫之色，以及聒耳之鼓聲，均為感官上之事，而希臘人所愛好者則為精神上之美，潛

在於感官之後，能保障及加強吾人之智性。

如是之勝利，固託爾斯泰所引爲可怖者，若謂其有利於人類，尤非託氏所能承認。然此種無我之尋求眞理，純以其美爲旨歸，亦不能謂非神聖之事，足以改善人類者。至於例外之事，自所不免，學者之尋求眞理，固亦有未嘗領略此中之樂趣者，而有學無行之輩，自更可所在而有也。

然則吾人當因此而主張廢棄科學，僅以研究道德爲限耶？抑道德家之本身墮落可辭其咎者耶？

第二章 數學之將來

欲預測數學上將來之進展，最好先一究其已往之歷史及目前之狀況，對於吾輩攻數學者，此豈非與吾人之職業在某方面觀之爲相當者耶？外插(Extrapolieren)之法，吾人實已習爲之，此蓋爲由過去及現在以推知將來之道，而因吾人知之頗詳，故此外插法所得之結果，其可用至於何種程度，當不致有所蒙惑。

不幸之預言者，曩昔曾有之，若輩屢屢說明，謂凡可解決之問題，已莫不解決，故吾人除覆閱而外，其他可無所事。然而過去之事例，則有使人可差自告慰者。一切問題均已解決之想，已屢屢有人信之，至少以爲可解決之問題，均已列入表內，略無所遺。然所謂解決者，其意義已屢經擴充，向所視爲不能解決之問題，適成爲最有趣味者，其他新發生之問題，則尤爲吾人所未嘗想及。對於往昔之希臘人，其所謂良好之解決，係僅用圓規及直線者，其後則凡用開方法所得之解決，均稱爲良好，再

後則凡僅用代數函數或對數之法，成爲良好之解決。如是，悲觀者流逐漸屈服，不能不退讓，迄至今日，可謂無有悲觀者矣。

個人之見，實不欲以抨擊悲觀者爲職志。悲觀者流，至今日固已無有，吾人深知數學之恆向前進，然所欲知者，則其發展之意義，在於何方。或將應之曰，『在每種意義方面』，而此答案者，亦有其一部分之眞理，惟如全部爲眞，則將爲可怖之事。蓋如是則其豐富將成爲不可言喩，然其雜亂亦將莫得而名，吾人對之，乃將莫知所措，正猶未認識之眞理之於無知者然。

歷史家之須選擇事實，正與物理學者相同。學者之頭腦，祇能顧及宇宙之一隅，決不能貫及全宇宙。自然所予吾人之事實，爲數無限，故祇能將若干放棄之，僅注意其中之若干。數學方面亦然。數學家亦無法將所供給其之事實，全部收留之，而因此項事實，均爲其自身，或其與致所創造，故尤無取其全。數學家本身將各部分之個別元素連結之，由一切可能之部分，以構成一新的結合。自然所給予之結合，普通均非爲已完成者。

數學家之解決問題，固亦有應物理學上之要求者，物理學者及工程師，亦時有請數學家爲其

計算應用上之數目等事，然因此而可謂數學家之工作，僅以受人指揮爲限，不能純以一己之興味爲標準，除適合他人之口味外，遂無其他要求可提出耶？倘數學家之目的，除幫助研究自然者而外，無有其他，則自須時刻俟候其指揮。如是之見解，可謂其合理耶？此則決不合理者。蓋如此項精確之科學，不以『爲科學而科學』之精神研究之，則數學所予吾人之可貴工具，將莫由產生，物理學者雖欲求助於數學家，亦將不可得矣。

物理學者之研究現象，亦非俟物質生活上有此急要後，方始着手，此自亦應當者。倘十八世紀時之學者，以電爲無裨實際而不甚注意之，則二十世紀時代之電報，電氣化學，電機工業等，將何由而來。從可知物理學者之選擇事實，亦不僅僅以利用厚生爲唯一之標準。然則在自然之事實內，物理學者當如何施其選擇耶？吾人於前章內已言之，物理學者所感有興味之事實，爲能由之以發見定律者。故其所選，與其他許多事實多屬相類，因而非爲個別，而與其他事緊相連結，個別之事實，其爲學者所見，自與尋常之人相同。然眞正之物理學者，則其所着眼在於連結各種事實之關鍵，此項事實間之相類，固隱藏於深處者也。牛頓之蘋果故事，當非實情，然足爲象徵，故吾人不妨視之爲眞。

然則在牛頓之前，人固早已習見蘋果之落地矣，惟未有由之以推得若何結論者。從可知事實之本身，不能予吾人以若何結果，必待有聰明才智之士，乃能施以選擇，爲之分出其背後有所隱藏者，故必須認識之，知其背後所隱藏者爲何，此則非有聰明才智者，無以發見事實背後之靈魂也。

數學方面亦然。由所知之各種元素，吾人可作萬萬之結合，然如此項結合爲個別者，則無有價值可言，吾人枉費心力，所得至多祇能供中學校學生家中練習之用而已。但若一種結合，於若干相似結合所成之類中有一位置，且其類似性已爲吾人所知，則其事即不同，吾人所有者，乃非爲一個事實，而爲一定律。於是此發見者，乃非若一手工業者之所爲，辛苦經營，以成此一種結合，而能深知其與他種有關結合間之連繫。蓋如其行動有若手工業者之所爲，則除僅僅之事實外，別無所見，而如爲一發見者，則必能領略事實之靈魂也。於是爲說明其所發見之連繫計，必須創用新術語，而其影響乃成爲創造科學之歷史，在在可使吾人見其實例，固吾人均所知者。

著名之維也納哲學家馬哈氏，曾謂科學之任務，在促進思想之經濟，亦猶機器之經濟勞力然。此種見解，實切事實。蠻人之計算數目，必須用手指或藉石塊之助。吾人既予兒童以乘法表，則可爲

其省却以後用石塊計算之勞。彼最初將石塊計算所得結果，$6\times7=42$，作一記錄者，實爲一極好之意念，其後之人，可無須重再計算矣。當其爲此，雖純出於娛樂，但其時間亦未曾浪費。其所費之二分鐘時間，不知爲他人省却幾多之二分鐘時間也。

從可知一種發明之重要性，在其效用之大小，此即是，其所省却吾人思想之多寡。

就物理學言之，其能屬於一普遍定理之事實，即爲效用最大者，蓋吾人可由此以預測許多之其他事實也。在數學方面亦然。當吾人施行一複雜之運算，費幾許勞力而得一結果時，倘不能由之以預測其他相似的運算之結果，且在此項相似的運算方面，不能免去以前所曾費之勞力，則此種工作可謂仍屬無用。反之，倘所費之勞力，能使吾人發見此問題與極大一類其他問題間之甚深的相似性，能使吾人由之以識別相似性及差別，簡言之，能由之以識擴充之可能性，則吾人之工作，即不能謂無用矣。蓋如是則所得者非爲一新結果，而爲新力量之來源。

代數的公式，實爲此處所云者之簡單的實例。吾人倘將數目代入其中之文字處，則此公式可使吾人得某種格式下全部數目問題之答案。故一次之代數的運算，可省却吾人每次必須重新開

始之勞，此則代數公式之功用也。然此僅爲一草率之例而已，事實上固亦有某項相似性，不能用公式以表之，且適爲極有價値者，此亦吾人所共知者也。

倘一新的結果成爲有價値者，卽向所已知但未能確定且似爲不經見之元素，今均能連繫之，則此新結果卽能於向所混亂之處，產生一秩序。吾人於是可由之以見此項元素中之任何其一及其在總體中所占之位置，殊不費力。此種新事實之本身，幷非爲有價値者，但與之相連繫之其他事實，其價値概可由此得之。吾人之理解力，不能特較吾人之感覺爲勝，倘宇宙之繁複成爲雜亂無和諧性，則理解力亦將無所施措，正如一近視者之祇見一零星事物，不能窺見全體，則不待其捉摸次一事物時，前者早已模糊不可憶矣。故祇有在繁複內成爲秩序之事實，乃能爲吾人所捉摸，而値得吾人之注意。

無論就方法或結果言，數學均力求雅緻；然此亦非玩物喪志所可比也。求雅之情緒，於數學之解法或證法上，果有若何之好處耶？各部分間之和諧，其對稱性，其美感的平衡，一言以蔽之，凡創立秩序，使部分成爲單位，以及使吾人對於事物能有較明白之見解，全體與零星均可一目瞭然，凡此

種種，胥可於求雅中得之。求雅之情緒，尙可有種種極大之好處與之俱來，所得之雅緻，猶其一耳，且吾人愈能一瞥卽見全體，則與之相接近之其他事實，自更可見其相似之處，因而可能的擴充之希望，亦愈爲多。尋常所不會發見之事物，其猝然遇見，亦可爲求雅之情緒所由成。此則不能不謂其有效，蓋向所未知之連結，至此乃爲吾人所發見也。且其產生僅由於工具簡單與問題複繁之對立，則已不能不謂其有效。吾人於是可由之以推究此項對立之原因，且恆可由此以知此原因之非爲偶然，而可由某種未預料之定律以得之。簡言之，數學上求雅之情緒，實爲所得解決與吾人精神上之要求間之一致，所予吾人之一種快感，而因有此一致，故所得之解決，可用爲一種新工具。美的快感與思想之經濟，所以緊相連繫。此處復可與前所云之建築物相較，但不欲多用之矣。

緣於相同之理由，倘吾人經一冗長之算法，以得一簡單明瞭之證明，但如不能使吾人深信，雖未得全部結果，而已可預見其特殊之標識，則吾人仍不能滿意。此何故耶？吾人之算法，似已可使吾人由之以知所欲知者，則當可以自慰矣，何爲而不然耶？吾人於相似之事例方面，既不欲重再應用此冗長之計算，則此僅僅之算法，自不能使吾人引爲滿意。倘能得一較可透見之基礎，則其事自不

相同，蓋吾人可由此以作預測也。此可以透見之基礎如不冗長，則一觀卽可見其各部分，且吾人不難知對於可以發生之相似問題，祗須將其如何修改之，便可適用於此項問題。而因此基礎可使吾人得以預測，知問題之解決當爲簡單與否，則吾人至少可由此以知運算是否有結果可得。

觀於此處所云，可知數學家之自由的動機，倘易以某種機械的方法，則其無善果可見也。僅求運算墣事或製造出一種能整列事物之機器，實不足以云已有可貴之結果可得。秩序本身幷不足貴，所可貴者，吾人之能獲得未所計及之結果。機器能將僅僅之事實加以製造，但決不能應用及事實背後之靈魂。

自十九世紀中葉以來，數學家之所努力者，恆在於求絕對之謹嚴。此種努力，自不爲謬，且更當注重之。蓋謹嚴固不能謂其已盡數學之一切，然如無有謹嚴，則一切均將不可能。倘證法上不求謹嚴，則卽不可恃。故數學上之須謹嚴，蓋無有懷疑之者。然如吾人太斤斤於此，則必發生此見解，以爲在一八二〇年之前，簡直無有數學可言。此則自爲過甚之詞。往時之數學家，每將吾人所視爲當加以說明者，輕易默用之，惟吾人亦不能謂其全未見及此項困難之處，其弊病所在，但輕易放過之耳。

倘欲明白認識之，則須費若干之勞力，明白的將其提出。

惟屢屢將其提出，此亦非必要之事。彼最先於論證上從事於謹嚴者，已傳給吾人若干推理之法，可用之為模範。然如以後之論證，恆須按照此種模範為之，則數學教科書均將成為巨帙，此則不敢贊同者。蓋如是則不獨書籍將有汗牛充棟之虞，且冗長之證法，每可失去和諧性，其效用適已言之矣。

於此，吾人必須時時以思想經濟為念。僅僅建立若干可以取法之模範，實不足謂已盡吾人之能。此種模範，吾人以後必須擺脫之，其已得之推理法，可將其綜合成為若干條，不必每次復述之。在若干事項方面，按照此種意義所為之工作，已得有結果。例如吾人已認識某一種格局之推理法，其中各式均為相似者，且吾人曾屢屢用之。此項推理法為完全謹嚴者，但頗冗長。後來有人想出『收斂性之整齊』一語，於是該項推理法乃成為不必要，蓋吾人今可默用之，不必重再複述之矣。從可知，其能將表面上似為無法可施之困難除去者，對吾人實有二重之效用，一則可由之以知，在適當之機會下，吾人可如其所為而為之，而尤要者，則吾人可因此而儘求其他之法，祇須不失謹嚴便可。

觀於此例，可知名詞在數學上有若何之重要；類此之例，正復不少。一選擇適當之名詞，如何能省却許多思想，此有使人難以相信者，馬哈曾已言之矣。數學為一種藝術，對於表面似為不同之事物，可以相同之名稱予之，此層意思，不知吾已曾提及否。所必要者，此項事物之內容雖可不同，但其外觀必須相似，有納入同一形式之可能。祇須所選之語言適當，則對於某一對象所用之一切論證法，不難立即應用於其他許多新對象，其事頗有足驚人者。於是吾人簡直可無須有所改變，幷名詞均無用改，蓋其應謂均已成為相同也。

用某項名稱所確立之定律，其所有例外，每可因選用一適當之名詞而消去，吾人之想出負數，虛數，無限遠點等，其故均在此，諸如此類之事，其數正復不少。於此，吾人有當知者，則例外為有害之事，蓋可使定律隱而不見也。

判別事實是否為有用之標識中，有一種為觀察此項事實以見其對於前所云之稱謂之革新，是否能容忍。僅僅之事實，不必有若何之意義，吾人可屢屢用及之，但不必能對於科學有若何之效用。迨有熟練於思想者出，將其與其他事實間之關係認淸明白提出，幷用一名詞表徵之，於是此事

實始有價值可言。

物理學者之方法亦如是，其所創用之『能』一名詞，其效用之大，有可驚人，蓋因此語之應用，吾人乃能確立定律，將例外消除，內容上不同，但外觀上相似之事物，於是乃得以相同之名稱適用於其上。

有極好影響之名詞中，茲特提出『類』(Gruppe)及『不變式』(Invariante)二語一論之。由此二語，吾人乃得認識若干數學論證之眞義。往時之數學家，雖未嘗知之，但在若干事例方面，實已用及，且彼此間雖自以爲相去甚遠，而卒能突然互相接近，不知其理由之何在，凡此種種，吾人均可由之以明其緣由。

今茲所可說明者，則往時之數學家，曾經研究及等形之類是也。吾人今日已知類之內容，幷非吾人所欲注意者，其意義全在於其形式，故吾人苟已知其一，則凡等形之類，即均爲吾人所知。『類』與『等形性』二語，實已將此深刻之定律，用寥寥數語包入，使吾人均能深明之，因而吾人即可直接轉入等形之類，且可毫不費力。類之概念，各處均與『轉換』(Transformation)之概念相關。

吾人對於發見一新的轉換法，何故若是之重視耶？蓋由此一法，吾人卽可用方定理，以得其數十故其價値猶之一零位可將其置於一整數之右，單位卽成爲十位也。

凡此種種，均爲迄今於數學上決定其進步之方向者，吾人幷可深信其以後亦將如是決定之。惟所遇見之問題之性質，自亦與此有關。吾人之目標，恆當時時在心目中而按予個人之意，則此目標實爲二重者，蓋吾人之科學，一方面與哲學相毗連，而他方面則又與物理學相啣接，故吾人對於此二者，均須致力也。事實上，吾人恆可觀見數學家之如何於兩個相對之方向中求進，此種事實，將來仍可見之。

就一部分言之，數理學必須探討及自己本身，蓋探討本身之意義，卽爲探討創造此數學之人類精神，而因此項創造所藉於外界者尤少，故更值得吾人之一爲探討也。緣此，若干數學上之思惟，實爲極有用者，例如關於數學上根本假設之研究，或關於非歐幾何，與此相類之幾何，以及異種屬性之函數等之研究是。此項思惟與尋常之觀念，自然界，及應用等相去愈遠，斯更可使吾人由此以知人類之精神與外界之威權相離後，其所能爲者如何，因得更明白人類精神之本質。

然吾人之主力，則仍當向其他之方面進行，卽向應用於自然界之方面。

吾輩有時遇見物理學者或工程師，以求解某種微分方程相請，其言若曰：『汝等可爲我將此微分方程解之，我大約於一星期內必須應用之，以完成某種工作，而此則必須於某日完成者』。吾輩或將答之曰：『此方程不屬於某種可解之格式內，汝等亦知可解之格式幷不多也』。於是若輩或將應之曰：『此固我所知者，然則要汝輩何用？』——然吾人亦有可知者，工程師之應用其積分，不必爲完成之形式者，僅須知該積分函數之大概的情狀已足，或其所求者，僅爲某一個數目。倘吾人知此積分，則卽可由此以推得之。但就尋常而論，吾人實不知此積分。惟如吾人能知工程師所求者爲何數，其精確須至於何程度，則亦每可用他法求之也。

往時所謂方程之解，必須用有限多之已知函數將其表出，乃能謂之已求得其解。然此種可能性，百中難得其一。吾人恆所能爲者，或恆可試者爲，則可云問題之質的解法，此卽是求出代表該所求函數之曲線之一般的形狀。

問題之量的解法，吾人亦須求之。倘未知數不能用有限的算法以得之，則可用無限的收斂級

數以表之，此項級數自可爲吾人所運算。但吾人可將此種作爲眞正之解耶？相傳牛頓曾以字謎寄與萊伯尼茲（Leibniz），其內容約爲 aaaaabbbeeeeii 等等。萊氏對之，自莫知所解，但吾人今日已知其意義，倘將其譯爲今語，則大約爲『我已能求得一切微分方程之解』。以今日觀之，牛頓此語，如非眞曾有此展望，則其爲極大之謬見，蓋無疑義。牛頓所欲於字謎中表出之意思，謂彼可（用不定係數之法）作一乘方級數，形式上能充適所從事之方程。

至於今日，相似之解法，已不能使吾人滿意，其理由有二：一則因收斂太緩，二則因項之繼續，幷不服從何種定律。但如太他㊉級數，則頗足使吾人滿意，一則因其收斂甚速（對於實用家之希望其數目能精確者，此層極爲重要），二則其各項之規律，一望可見（此層能適合理論家之求美的要求）。

但如是則不再有可解之問題，亦不復有不可解之問題。所有者，祇有較多可解以及較少可解之問題而已，其分別則在於其解法之可用較速或較緩之收斂級數以得之，或其產生由於較和諧或較不和諧之定律。然恆有不完美之解法，能引出較佳之解法者。有時所得級數之收斂性極緩，故

不能應用之以爲計算，吾人僅能得問題爲可能之證明而已。

工程師對之，或將唾棄之，蓋此種一切，不能助其工作於某日卽告完成也。工程師所求者在於目前，故凡對於將來二十二世紀時之工程師所有用之事，非彼所措意，惟吾輩之思想，則異於是，苟能爲他日之人省去一日之勞，則較之爲今日之人省去一點鐘之勞，似更可滿意。

有時經無甚把握之周折後（相當的特經驗），可得一滿意的收歛式。工程師見之，於是必將問『若輩更何所求耶？』但吾輩則仍不能以此爲滿意，所願者，能預見此收歛性。此又何故？倘吾人已一次預見此收歛性，則可希望其他次亦可預見之。僅有一次能達到，此種事物，吾人殊不介意之，吾人所望者，則他次亦必能達到而後可。

科學愈進步，則欲一望而識其全範圍，此事自必愈難。因之，吾人求將其分割之，而以其一部爲滿足，簡言之，吾人當各各爲專門家。但如按此方向進行，則其危險有不可勝言者。吾人前已言之，科學之進步，適有因其各範圍間發生未料之關係而來者。故如太求專門，則無異自絕於此種關係。希望國際間之大會，如海台山（Heidelberg）及羅馬所舉行者，能使吾人對於鄰近之範圍，作更遠

之眺望，蓋此種大會，能將各地之學者，置之一堂也。希望此種大會，能使吾人將一己之科學範圍與他人者相比較，因而不能不越出吾人狹小之雷池以外。倘能如是，則此種大會，誠足爲適所指出的危險之預防矣。

關於一般者，所論已太多；今當進而一及各部門。

茲擬一論各特殊之科學部門，其所構成之全體，卽數學是。吾人可一觀察，此項部門已有若何之成就，其進行之方向何在，吾人所可望於此者爲何。倘吾人之假設爲不謬，則可見過去之進步，在於二種科學之互相接近，在於認識其形式上之相似性，不以其對象之不同而有所異視，在於其一之能如是適合其他，俾他方面之刺激，此方面亦能爲其所啓發而用及之。吾人於是可由同類之相互關係，相當的預測將來所能有之進步。

算術

算術之進步，較代數及解析特爲緩，此其理由蓋有可見者。連續性之感覺，實爲一可貴之領導

者，但算術學家則無之。每一整數，與其他一整數相分開，故可謂其所表者，爲其一己之個性。每一此種之整數，構成一種例外。因之，在整數論方面，適用於一切之普遍定理，較之數學之其他範圍內爲少，而可成立之普遍定理，亦每隱而不見，一時不爲學者所知。

算術旣較代數及解析爲落後，則除求與此二者相適應而外，實無他道，必如是乃能利用及其已有之進步。故算術家必須將類似於代數者引爲領導者。此項類似之處，爲數甚多，雖多未經研究，俾可應用，但至少好久以來，已爲人所想及，而由其所用語法觀之，亦可見人之已注意及此矣。例如其所提及之超絕數，蓋已顧及將來此項數目之分類，必當已成爲超絕函數分類之先例。所未能確知者，則由其一以達到其他時，當以何者爲道路。然如吾人已能明知及此，則吾人之工作已完成，不必留爲將來之事矣。

吾所見到之第一個例，爲等餘式之理論，於此，吾人可見其與代數方程論有完全平行之處。吾人自可將此項平行性，例如代數曲線論與二變數的等餘式論間者，作一詳細之研究。倘關於多變數的等餘式之問題，已得解決，則吾人於解決不定解析方面之許多問題上，已得有初步之進展。

代數學

代數方程之理論，將長久爲數學家所注重。吾人可由各方面透入此項方程之理論。代數學使吾人能得有規律，以構成一切可能的連結，但吾人不能因此而謂代數學已盡其能事。吾人須求出其中極可注意之連結，此卽是能適合此種或彼種條件者。由此，或可產生一種不定之解析，其中之未知數非爲整數，而爲多項式。如是，代數學將以算術爲其助，受整數上類似性之引導，至於其爲任何係數之多項整式或整係數之多項整式，此則無多問題者。

幾何學

初觀之，幾何學中所包括者，似不出代數及解析中所含者以外，幾何上之事實，似與代數及解析方面之事實相同，僅以另一種語言表出之而已。按此見解，則吾人或將謂幾何學所特有之事，直無法舉出。此種見解，可謂未能認識一種適當的語言之重要，可謂不了解此種語言，能以其表達此

種事物之法，及其綜類之法，對於事物之本身，深有所加。

第一所可知者，則幾何的研究法，可引出新的問題。此項問題，吾人倘稱之爲解析的問題，自無不可。然吾人須知倘由解析方面出發，此項問題終不能爲吾人所發見。解析學之能利用及此項問題，猶之其對於物理問題然，每因求其解決，而須借助於解析學。

幾何學之極大便利，在於能應用感覺，以爲思想之輔助，吾人由之，可入於應當入之道路。緣此，好多之學者，每將解析問題，亦化作幾何問題之形式。所不幸者，則吾人之感覺，對吾人不能多所資助。倘欲超出歷來所習之三度空間以外，卽爲感覺所不許。然則吾人必須承認吾人僅能自限於感覺所許之狹小範圍內，其超出此外者須讓之解析學，因此，三度以上之幾何學，爲無對象不必要者耶？一世代之前大數學家均作如是觀，對於此問題，自必以肯定之語答之。至於今日，四度之觀念已極習用，雖在大學之講演中言及之，不致引起驚訝矣。

然則多度之空間又有何用？此問題幷非難答覆者。一則多度空間之於吾人，爲一種極方便之語言，解析學上須用冗長之詞，以說明之者，於此可用極簡之數語以表之。其次則相似之事物，用此

語言時可予以相同之稱謂，其所指出之類似性，易印入吾人之腦際。再則吾人可由之以廻旋於廣大之空間中，此空間對於吾人實爲太大，非視覺所能測量。此種語法，使吾人聯想可見之空間，此空間固爲一不完備之圖像，但仍不失其爲此廣義空間之像。於此，其與簡單者間之類似性，亦能使吾人由之以知複雜者，此則與以前所舉諸例相同者也。

三度以上之幾何學，非爲簡單之解析幾何學，故非純爲量的，而亦兼爲質的，且其可注意，亦適在於此。有一種科學，名爲位置解析學（Analysis Situs）者，其所研究在於一圖形方面各元素間之位置關係，此項元素之量，非其所論。此種幾何學，爲純粹屬於質的，故其所從事之圖形，縱其畫法極爲草率，如兒童所作者，但所得定理仍能適用。然吾人亦可創造一種三度以上之位置解析學。此學之重要，實有出於常情之外者，倘能多一論之，殊極應當。吾人苟能一觀黎曼（Riemann）之工作，其重要當不難見，黎氏固斯學得以成立之主要人也。吾人必須將其於多度之空間內發展之，則他日必可使吾人由之以窺見超空間內之事，而大有助於吾人之感覺。

倘吾人之語言，全以解析上者爲限，則位置解析學上之問題，將莫由發生。惟亦可云此種問題

亦必將發生，蓋其解決爲若干解析問題所必要者，第如是則此項問題之提出，將成爲一個一個者，莫由認識其間之關連矣。

康圖氏之主義

前曾述及之，吾人恆感有此項要求，退而一論吾人所從事之科學之最先的基本人類之精神，可由之以得若何之好處，此亦已言及之。此種要求之來，蓋由於二種努力，此二者於近代數學史上均占有重要之位置。第一種努力，爲康圖氏之主義（Cantorismus），其於科學上之供獻，蓋已盡人皆知。康圖氏將一種新的數學上之無限，採用入科學內。關於此層，以後當有機會及之（見第二卷第三章）。康圖氏主義之一特點，在於由較高之屬類出發，而就其相接近者及特殊者作定義，不如尋常之用作法下定義，漸由愈趨愈難之作法，以構成普遍性。此種方法，引起多少學者之驚訝，例如赫爾米（Hermite）即爲其一，蓋赫氏向喜將數學視爲自然科學之一種也。在吾人中間，多半已不再對之有所懷疑，但有若干之矛盾，表面上之矛盾，仍爲人所指摘，而此項矛盾者，固曩時希臘

之詭辯家所可於此大顯其身手者也。今則人皆求所以補救之之法，而就我個人——亦不僅我個人——觀之，則以爲其問題僅在採入某項事物，可用有限多之語言，以完全確定之者。在最後採定一方案之前，吾人可以此付給治此者之手，是固吾人所請其來觀察此有味之病理事例者，

根本假設之探討

他方面，亦有人曾致力於探求多少爲隱微之公理及根本假設，各種數學理論均須以之爲基礎者。希爾白（Hilbert）所得之結果，最爲可觀。開始時觀之，似以爲此種範圍較狹，將其內容之目錄編妥後，便可無所事事，而此則極易爲之者。但事實上則既探求得之後，將其分類時，尙有種種之方法。良善之圖書館主，恆有事可爲。其每種新的分類法，對於哲學家可有用處。

此處所述，僅以概觀爲主旨，不敢想將材料盡詳敍之。以上所舉諸例，當儘足使吾人由此以知往時之數學，其進步之由何在，今後之數學，其發展之方向當爲何。

第二章 數學的發明

數學方面之發明進化史，實爲對於心理學者至有趣味之問題。數學的發明，實爲一種行爲，於此，人類之精神所須於外界者最爲少，僅以本身爲限，或由本身爲之，且其程度頗可觀，故吾人一研究數學思想時之經過，可窺見人類精神之本質，爲吾人所欲把捉者。

關於此層，久已爲人所知，而在數月之前，Laisant 及 Fehr 二氏所主編之雜誌 L'Enseignement Mathématique 上，曾發起一調查，以知各數學家精神上之習慣及其工作之方法。本篇之主體，在此項調查結果未發表之前，早經設定，故不能由之有所取材。此處所可提及者，則所得之答案中，其大半均可證明吾之論斷。至所謂完全一致，則自缺如，且吾人亦不能希望之，蓋以普遍而平等之投票權爲根據而行投票時，亦殊難望其如此也。

倘吾人不與所欲提之事實太相習慣，則吾提出如次之問題時，當必能引起吾人之詫異。問題

爲：世界上何以能有不懂數學之人？數學旣建築在盡人所承認之邏輯規律上，數學之確實，旣建築在盡人所共有之基礎上，祇有愚癡者乃會否認之，則將何以解釋如是多之人，在數學方面爲一無所知者？

吾人不能希望，每個人均有發見之能力，此則自無可討論者。每個人不必咸能將所習之證法記憶於腦中，此亦爲尙可了解之事。然將數學之論法向其說明，而不能每個人均了解之，此則稍一思想後，不能不引爲可異之事矣。然而事實上，大多數人對於數學之論法，均須以極大之費力方能追隨之。中學教員之經驗，在在可證明此事實之眞相，

然問題尙不止此：數學上如何亦能發生錯誤？健全之頭腦，不當有邏輯上之錯誤。然每見有極精明之頭腦，對於日常生活上所用及之推理法，從不致有誤，但欲其逐步明白數學家之論證，則將見其無能，或請其複述時，終不能無誤。事實上，數學之論證，雖較爲冗長，但亦爲種種簡短推理法之拼用，如日常生活上所常用者。且數學家本身，亦每不免於錯誤，此亦可提及者也。

對於此項問題之答案，以吾觀之，蓋爲易知者。吾人可一觀想在較長之論法方面，先前之結論，

可用爲後來之前提！如是則吾人對於每個論證，能完全理解之，雖由其一之前提，轉至於結論其間。可不致有錯誤之危險。然當吾人於一論法方面得一論斷爲結論，而用之於後來之論法上作爲前提時，有時其間可經若干之時間，在此時間內，中間之許多節段，已經過去，因此。吾人每已可將該論斷忘却，其尤甚者，則可將其眞正之意義忘却。於是每可用一與此相差不多之論斷代之，或雖猶憶及其語，而其意義則已用稍不同者代之，錯誤之來源，蓋由於此。

數學家時有用及某種規律之必要，此種規律，自須先加以詳細之證明。當此證明尙清晰在其腦際時，此規律之意義及所可用及之範圍，歷然在目，故不致有誤用之危險。以後則將此規律印於腦海中，僅機械的應用之，故記憶稍有錯誤。卽可使其誤用之。以極簡單之例而言，吾人有時可忘却單位數乘單位數之法，而於數目計算上作極大之錯誤。

由此觀之，數學家之特殊才能，當在於其可靠之記憶，或其特殊之能力，能將注意力特別集中之。但此種才能，善打牌者亦必具之，蓋必須記清已打出之牌爲何也。若以更高級者言之，則此種才能，凡善奕者亦必具有，其所觀察之連結，爲數甚多，且均須記於腦中。是則凡精於數學者，必當爲善

奕者矣，反之當亦然；且凡數學家當亦必爲良好之數目計算家。此種事實，有時固可遇見，例如高斯(Gauss)氏，一方面爲天才之數學家，他方面同時又爲敏捷而可靠之算家。

然例外正復不少，且就事實之眞相言之，吾人實不當稱之爲例外，蓋不則例外必將多於常情也。故吾人寧以高斯爲例外，似較適當。以吾自身而言，欲令我作一加法，無有錯誤，此實爲絕對不可能之事。以奕棋而言，吾亦爲一極劣之奕者。當下子時，吾亦曾考慮到下此子或彼子時，吾將蒙某種之危險，故多考慮若干棋子，決定下某個，但結果則所下者恰爲開始時所欲避去者，蓋中間吾已忘却其所蒙之危險矣。

簡言之，吾之記憶力不能云弱，然欲爲一善奕者，則自感不足。然當我從事於一極難之數學考慮時，彼善奕者何以將有錯誤，而吾乃不致於此？於此，吾之記憶力，實受一般的思想之門徑所指示，此則殊爲明顯者。數學的論證，非僅僅爲若干邏輯的論法之簡單的繼續而已，而爲已有秩序之論法，此秩序較之其中之個別元素尤爲重要。吾既有此直覺，即對於此種秩序之感覺，則不難一望而見論證之全部，不須顧慮個別元素之或被遺漏忘却。且不須用吾之記憶力，彼各個元素，自能入於

其適當之處。

當吾復述一習得之數學證法時，吾之感覺，一如此證法係吾自己所發見者。此自爲一種錯覺，但吾縱無力自爲發見之，而當吾復述之時，吾固自己重新發見之也。

此種直覺，此種數學的秩序之感覺，能使吾人發見隱微之關係及和諧者，自非人人所具。有種人既無此項精而難作其定義之感覺，又無超過常人之記憶力以及集中力，則自爲無能者，初步以後之數學論證，卽不能了解矣。多數之人，大率均如是。有種人稍具數學秩序之感覺，但有特強之記憶力與集中力。此種人能將零星者詳細學習之，能了解數學，有時亦能應用之，但無力有所創作。其他另一種人，具有前所云之直覺，其程度可多或寡，則不特能了解數學，卽記憶力不強者，亦且能有所發見，隨其直覺力之多寡，可有多或少之創造成績。

然則數學發明之實在，當於何處求之耶？發明之所由來，決不在於將已知之數學事物，重新再結合之，其問題亦不盡在於此，蓋吾人所能作之結合，其數可無限，其中大多數均不足注意者，然明白言之，則所謂發明者，亦不過不作無用之結合，而建立其有用者而已，惟所謂有用者，其爲數之少，

蓋可想而知。所謂發明者，實甄別而已，簡言之，選擇而已。

此種選擇之方法如何，前已言之。值得吾人研究之事實，必因其與其他事實有類似性，故能使吾人由之以認識數學之定律。此猶如由經驗之事實以認識物理的定律然。此項事實，能使吾人發見其與其他事實間之未料及的連繫，此項後者，吾人固早已見及之，惟向以為互相無關者耳。

在所可選擇之結合中，其各元素得自相距較遠之範圍者，恆能最為有用。然此非謂將不相關之事物連結一處，便得謂之發明也；如是所作之結合，多半將為無用，其中祇有極少數或可為極有用者。

如適才所言，發明云者，卽選擇之謂。此語或非甚適當者，蓋人或將以為猶之購買物品然，各物紛然雜陳，買者則一一審察之，以施其選擇。倘選擇之意義，如是則在此處，事物之陳於吾人之前者，其數無限，雖畢一生之力，亦無法施以審察。故事實上決不能如此。凡不能用之連結，發明者之精神，決不注意之。祇其眞能有用之連結，乃能入於其意識，其他稍具此項性質者，猶當為其所棄。故發明者猶之覆試員然，其所訊問者，均為初次考試已經及格之人。

此處所述者，均可於閱讀數學書籍時證驗之，但自須以考慮之態度讀之。

今當對此問題作較深入之研究，以見數學家之心靈中，其狀態為如何進行者。於此，最好將吾個人之經歷，作一回憶。但吾可以吾之第一篇關於福克士氏函數（Fuchssche Funktion）之論文，如何完成者為限。倘所用名稱中，不免有專門者，則須請讀者諒之，且讀者之是否了解此項名詞，亦無關係，故對之可不必有所顧忌。例如吾將說明，此定理或彼定理，係在某種狀況下獲得者，此種定理之名稱，可為殊不經見者，多數讀者將不能認識之，但此并無關係。對於心理學者，所可注意者非為定理，而為發見此定理時之狀況。

吾曾有二星期之久，試欲證明該種函數之無有，此種函數即後來吾所稱為福克士氏函數者。彼時吾實不知，故每日坐於寫字桌上，費一小時乃至二小時之時間，試作種種之結合，但一無所得。某日晚上，偶飲黑咖啡，於是不復能睡，而各種思想紛至沓然。我猶能憶其如何互相衝突排擠，直至最後，其中有二者相締結而成為一牢固之連繫。至翌晨而我已證明有某一類之福克士氏函數存在，且即為可由超幾何級數以推得者。於是吾之工作，祇須將結果一編綜之即可，所費不過數小時

之勢力耳。

於是吾求將此函數用二級數之商之形式以表之。此種思想，完全由有意識的考慮而得，此處曾予吾以指導者，爲其與橢圓函數之類似性。吾所提出之問題，爲此種級數倘存在，則其屬性當如何，結果所得之級數，即後來稱之爲福克士氏太他函數者，吾毫不費力得之。

此時吾適離家，參加礦業專門學校所發起之地質考查旅行。旅途景物，將吾之數學工作忘却。及抵哥當士(Coutances)後，吾等共登一公共汽車。當吾之足踏於車之登板上時，吾突發生此思想，以爲吾所用於福氏函數之定義之轉換式，實與非歐幾何學方面某種轉換式爲相同者，其實事前吾之思想未及一思及此也。彼時在車中幾無有坐位，更無時間可以證實之，故吾仍與同車者閒談，但此思想之不謬，則已瞭然於心目中。其後回家，始得證實此結果，而吾乃釋然於懷矣。

於是吾又開始研究算術上之問題，但未得有何種可注意之結果，且亦未想及此項問題，能與以前吾所作之研究有若何之關連處。因無結果而掃興，吾乃往海邊作遊憩，不再思想此事，而專注意於其他事物矣。某日吾正閒步時，思想忽又突然而來，其狀況一如前時，吾乃發見三變數平方式

之算術的轉換式，實與非歐幾何方面之運動為相同者。

回家後再思惟此結果，以得由此所可推出之結論。由平方式之例，乃知除與超幾何級數相當之福氏類外，尚有其他者存在。吾於是見到此事實，可將福氏太他級數之理論應用於此，故可知除由超幾何級數所產生者外，尚有其他之福氏函數存在，而此則以前所未見及者。吾於是自欲將屬於此種之一切可能函數盡構出之。吾乃開始作包圍之勢，逐步獲得其外堡。但有一處似無法獲得之，而如不能得此，則全部之成功，將盡付落空。故初時之努力，僅在對此困難有較明白之認識。然此困難總不能打破。在此種工作方面，一切均為有系統者，任何個別之步驟，均以有意識出之。

未幾吾以須受軍事訓練故，不能不往蒙得瓦來里昂（Mont-Valérien）。彼處所從事者，自與此項工作全不相同。某日吾正行經一大街時，吾以前所對之却步之困難，忽焉其解決出現於心目中。然彼時吾無法將此解法詳為思惟，直至軍事訓練告終後，始重復研究之。一切之元素，均已具備，祇須將其綜合而整理之卽可。故最後之編製，可一往順利，無所用其勞力矣。

舉此一例，已足陳明。關於吾之其他工作，吾可有相似者報告。前所提及之雜誌所作之調查，其

所得自其他數學家之報告，祇能證明吾之經驗而已。

此種突然徹悟之發生，頗爲可異，吾人實可由此以見，其間蓋經過一種長久之不自覺的工作。此項不自覺的工作，對於數學發明上有若何之重要，此則無可疑者，而在其他較不明顯之事例方面，吾人亦將見其有相似之事發生，當吾人研究一困難問題時，開始時每不能有所進展，於是將略作休憩，再繼續工作。其初之半小時內，其狀況仍如舊，但俄而重要之思想，突然發生。吾人或可謂當休憩時，精神爲之一新，故以後之工作即能有結果。然如謂休憩時不自覺之工作仍繼續進行，其結果須後來才爲吾人所明知，如吾適才所述之經驗內者，當較近似。惟此種突然之啓示，不必定在閒步或旅行時得之，亦可於正在作自覺的工作時獲得，如是則與此自覺之工作，初無若何關係，後者僅有使其發出之影響而已。故此種自覺的工作，猶之一刺激物然，可將休憩時所獲得但尙未入於意識之結果，推動之使其成爲自覺之形式。

關於不自覺的工作之條件，倘有須說明者如下。倘先前未曾有自覺之工作，事後亦無此項工作，則不自覺之工作無由發生，卽有之亦不能由此以得某種結果，由前所舉之例，可知此種突然之

徹悟，必待數日之自覺的致力，毫無結果可得，已將此種希望拋棄後，始突然而來。從可知此先前之致力，不如吾人所信之爲全無結果者，蓋不自覺工作之機器，須待此而後能動作也。倘無先前之自覺的工作，則此不自覺之工作機器，將不會動作，而無有成績可得矣。

至於徹悟後之自覺工作，其必要自所易見。蓋所得之結果，必須將其詳細作出之，由之推論出直接之結論，將其加以整理，爲之證明，幷驗其是否可靠。適才吾幷提及徹悟時所同來之絕對眞確之感覺，而在前所舉之例內，此感覺未曾有所錯誤，且多半如此。然吾人必須顧及，未必恆爲如此。此種感覺有時極爲活躍，然仍可不免於誤，及至求其證明時，始能發見之。當吾晨間或晚上入於半睡眠之狀態時，時有此種事實發生。

以上所述均爲事實，今可一及對此之意見。不自覺之我，或所謂潛伏之我，在數學的發明方面，占有重要之地位，此則不難由前所述者以見之。普通以爲潛在之我，能自動的工作。但吾人均知數學上之工作，非爲簡單之機械工作，決不能以之付與機器，無論此機器之若何精美完備也。在數學工作方面其問題不僅僅在將已知之規律應用之，或按照某種固定之定律，儘量多作結合。如是所

得之結合，其數可多至於無數，但其大部分爲不必要而混亂者。數學發明者之眞正工作，在由此項結合作一選擇，將不必要者棄去，或竟全不理會之。作此選擇時所用之規律，至爲微妙，欲將其正確的重復述出，幾爲不可能之事，故吾人可感覺之而無法申述之。經此說明後，吾人尙能想像一種甄別之物，能機械的將不必要之結合棄去耶？

爲說明計，吾人可先作如次之假定。潛伏之我，其所在幷不較自覺之我爲深，其工作幷非爲純出於自動者，且有甄別之能力，有精微之感覺，能作選擇，幷能想像。吾人幷可云此潛伏之我，其想像力且較自覺之我爲勝，蓋後者所不能得有結果之處，前者每能得之也。然則此潛伏之我，爲超出於自覺之我者耶？此問題之重要，蓋不難見。蒲德魯（Boutroux）氏於其最近所作之講演中，曾指出此問題於他處亦發生之，而如吾人對之作一肯定之答覆，則由此所得之結論，頗有可觀者。（見蒲氏所著『科學與宗教』Science et Religion 一書，第三百十三頁以下）。

但吾人必須根據其所述之理由，對之作肯定之答覆耶？以吾個人之意，則殊不願隨卽接受之。故不妨將事實再作一度之證驗，觀其是否可用其他之說明以解釋之。

經多少時候之不自覺工作而突然啓示於吾人之連結，就一般而論，固多爲有用者，而爲初次抽定之結果。但吾人由之必須得此結論，以爲潛伏之我，能用其精微之直覺，早即想及此項連結爲有用者，故僅構出此項，抑其所構出者尚不僅此，而有其他之連結，因其無此需要，故未入於意識中耶？

倘由第二觀點出發，則一切之結合，均由潛伏之我所自動的構成，惟僅有其中對於吾人之目標爲可注意者，乃能入於意識之中。然此仍爲神祕之事。何以不自覺之工作所產生之無數產物中，僅僅有若干能越此不自覺之境界，其他均被擯耶？此若干所有之特確，其爲偶然者耶？此則自爲不然者。例如一切所刺激於吾人感官者之中，祇有其極強者能爲吾人所注意，而感覺之，然由於其他之原因，吾人之注意亦可轉而向不甚強之刺激。故普通言之，可有如次之事實：能入於意識之優先的不自覺現象，亦卽爲最能影響吾人之感性者，不問其出之直接或間接。

或以爲在數學論證方面，一切似僅與吾人之智性有關，今乃論及感性，豈非可異。然如吾人一憶及數學美之感覺，數目及數式之和諧，幾何的雅緻之感覺，則不難明白此矣。此實爲一眞正之審

美的感覺，凡數學家莫不知之。事實上，感性實已在其內也。

何種數學的結構，具有此項美與雅之特徵，何者能於吾人方面引起一種審美的滿足？其由和諧的元素所成，俾吾人之精神可不假特殊之勞力以捉摸其全且能深入及其各個者，斯能如是，此則殊爲顯然可見。此種和諧性，對於吾人之美的要求，能予以滿足，同時幷對於其所引導的吾人之精神，能有所幫助。因其於吾人之心目中，構出一有秩序之整個，故吾人可由之以預想及數學之定律。但數學事實中，其能值得吾人之注意，且以後可有用處者，除能使吾人由之以認識數學定律者而外，無有其他，此則前已言之矣。因之，吾人可得如次之結論：最有用之結合，亦卽爲最美者。吾之意思，係指其最能刺激吾人之感性者，此項感性，實爲特殊，一切數學家均有之，但俗人則莫得而知，故多有嗤之以鼻者矣。

此外尙有何事？極多之結合，雖均爲潛伏之我所構成，但其中無趣味而無用者，幾占其全部，然亦因此而此項結合對於感性無有影響，不能入於意識之域。祇有其中之極少數，能滿足和諧之要求，故既爲有用，亦且爲美者。此項極少數之結合能刺激數學家之特殊的感性，而吾人之注意既被

引起，即能轉而向此項和諧之結合，於是即有機會使其入於吾人之意識中。

此自屬一假設，但以下之觀察，殊足使此項假設增加力量。當數學家之精神上發生突然之徹悟時，就一般而論，恆不致有錯誤。然如吾以前所提及，此種錯誤，有時頗遇見之，徹悟所啟示之道路，每有不能予以證驗者。在此種事例方面，吾人恆可見此錯誤之意念，倘能不錯，則恰可適合吾人求雅之要求者也。

從可知此種特殊之審美的感性，其作用實為該種極精細之甄別物。緣此，吾人即可了解，凡無有此項感性之人，在數學方面總不能有所發明。

然吾人尚未將一切之困難概已除去也。自覺之我，其範圍殊狹。關於潛伏之我，其境界如何，非吾人所能知，故吾人儘可假定，其在短時期內所構成之各種結合，較之一自覺的人一生所能捉摸者尤多。然潛伏之我亦不能無有界限，謂其能將一切可能的結合盡行構出，必為不近情理者，蓋其數之多，非吾人之想像力所能及也。但同時吾人亦可知其所構成之結合必極多，蓋如僅有一小部分，且純恃機運，則吾人決難希望其中恰有好的結合，即所欲選擇者在。

關於此之說明，或須求之不自覺工作以前之自覺工作內。吾試作一粗率之比較：吾人可將此種結合之將來的元素想像之為伊壁鳩魯氏之鈎形元子。當吾人之精神完全平靜時，此項元子均不動猶之掛於牆上然。此項完全靜止之狀態，可延長至任何長之時間，故此項元子不致相遇，以成若何之結合。

然當表面上靜止而有不自覺之工作時，其狀況卽異於是。此時有若干元子出離牆上，而入於運動之狀態。此項元子乃穿越其所在內之空間，而向各種方向衝撞，猶之一羣蠅蚋然。倘用學術上之比較，則可云猶如分子運動論上之氣體分子。新的結合，卽由其相互之衝撞所產生。

先前所作之工作，於此有何作用？此項工作能將牆上之元子動員之，使其出離牆壁而入於運動之狀況。此則自極明顯者。然吾人不能謂此項元素以無數之方法互相摩擦，成為連結後，雖無滿意之連結，但總可由之得某種有用之結果。此項元子由吾人之意志發動後，不能再復歸於靜止狀態，其運動仍將繼續不斷，

吾人之意志，其選擇此項元子，決非恃乎機運，而有一定之目標在。故其所動員者，非為任意之

元子，而爲可由之以望所求之解決者。新的結合，由元子間之衝撞產生，或由於均在運動中之元子間之衝撞，或由於運動的元子與靜止的元子間之衝撞。此項比較，自爲極粗率者，然非此則吾之思想無由索解，讀者當能相諒也。

不問其情形如何，在各種結合中，祇有該種爲可能者，即至少其中有一元素及一分子，係出於吾人意志之所選擇。吾前所云之好的結合，自亦在其中。用此種考慮時，即可將原來假設上所有之矛盾，大爲減少。

尙有須說明者：凡須應用固定之規律，經長時間之運算乃能獲得之結果，吾人之不自覺的工作，即無法將已完成之結果啓示於吾人，此種工作或以爲對於不自覺之我，尤爲適當，蓋此項工作可云全爲機械的也。吾人或可希望，晚間思想一乘積之因式時，翌晨醒時此所求者已完全在目，或希望一種代數的運算，例如證實某結果時所須要者，不自覺的算出。然經驗上可知此種事實，從未發生過。凡吾人所可望於不自覺工作之結果者，除此項運算法之新的出發點而外，無有其他。至於運算之本身，則須於徹悟後之自覺工作中爲之，所得結果之證明，與夫可由此推得之結論，均須於

此時求之。此項運算之規律，爲精確而複雜者，必須有紀律，注意以及意志力乃能爲之，故亦須有意識方可。反之，在潛伏之我方面，祇有我所願稱之爲自由性者在內，但所謂自由性者，其語意卽吾人所可應用於缺乏紀律及由機遇所產生之無秩序者。然在他方面則此種無秩序適可產生未料及之連繫。

吾尙須作一最後之說明。在以上所舉吾個人之經驗方面，吾所述者爲不能睡眠之狀態，吾之工作，實非吾所意願。此項事例之發生甚多，然腦之非常的動作，固不必須有生理上之刺激乃能發生者。此種事實之發生，對於不自覺的工作似有幫助，而吾人之意識，雖亦能感到此種不自覺之工作，但此項工作不因之而改變其性質也。吾人於是能不甚明瞭的略知此二種機器，或二種我之工作方法間之差別。至吾所有之心理上的經驗，則就大體上言之，似頗能證明以上吾所述之觀點。

此項證驗實爲必要者，蓋雖有以上種種之說明，但仍不免爲一種假設。然此問題既爲極有趣味者，則吾雖欲緘默，不可得也。

第四章　機遇

一

培德朗(Bertrand)於其所著『或然算法』(Calcul des Probabilités)之開首處，曾有如次之數語：『吾人何竟能提及境遇之定律耶？所謂機遇者，豈非一切定律性之對耶？』蓋或然者，謂與確實性相對，故其所及爲吾人所不知，因而亦無法計及者。所以至少在表面上觀之，其中有矛盾存在，而人之論及此者，亦已甚多。

吾人先所當問者，卽：何爲機遇？往時之人，將現象別爲和諧而適合一成不變之定律者，以及由於機遇者。此後者非吾人所能預見，因其不服從任何之定律。在任何一範圍內，詳細之定律不能決定一切，僅可劃出一界線，在此線內有適於機遇的自由運動之可能。按此觀念，則『機遇』一語，係

有一定之客觀意義者：凡對於某人爲機遇者，對於他人亦爲機遇，卽對於神亦然。

然吾人今日之觀念，則已異於是。吾人蓋已成爲絕對的定命論者，卽對於人類尙認其有自由意志者，對於無機之自然界，亦必信其可無限的適用定命論。任何一種現象，卽其最不顯著者，亦必有其原因。倘有一包羅無限之靈神，對於自然之定律，纖屑不遺，則當宇宙開始時，必早已能將一切預見。果有如是之靈神存在，則吾人斷難與之言機運，彼蓋無有不勝者。

對於如是之靈物，機遇一語，無有意義可言，或竟無所謂機遇。吾人之所以有機遇，其原因全在於吾人之不能全知及不知。然卽在渺小之人類間，亦有差別可見：無知者之所謂機遇，在知者觀之，可見其非出於機遇。然則機遇似可爲吾人無知之量尺。所謂機遇的現象，按其定義，當爲其定律尙未爲吾人所知之現象。

此定義果可爲滿意者耶。當却而德（Chaldäisch）牧師最初觀察星辰之運行時，尙未知有所謂天文定律。吾人可謂其當時對於星辰之運行，曾視之爲出於機遇者耶？一近代之物理學家，研究一新現象，不久卽發見其定律，但當其未發見此定律之前日，彼果曾以出於機遇視之耶？不僅此

而已，吾人欲預測一現象時，豈不時常借助於培德朗氏之所謂機遇定律耶？在分子運動論方面，馬利奧及蓋呂薩(Mariotte & Gay-Lussac)之定律係根據一假設而推論得者，卽謂氣體分子之速度，其變動爲無規則，卽出於機遇者。倘此項分子之速度按一簡單之定律而決定，或卽是，倘分子係有有組織者，有紀律者，則所觀察之定律，卽可大爲簡單，此固任何一物理學者所知者也。吾人此處之結論，僅由機遇及吾人之無知以得之。而如機遇一語，與無知之意義爲相同者，則吾人對之當作何思想？吾人或可以如次之方式陳述之耶？

『所欲求者爲將來現象之預測。倘吾不幸而知此項現象之定律，則對於此種要求，祇有以不易着手之運算應之，結果於是須放棄之；不爲幸而吾不知該定律，故反能立卽予以答覆。所可注意者，則吾之答覆爲不誤是也。』

如是則機遇必不能與無知同義，而現象之原因未明者，吾人必須將其分爲若干之類。出於機遇之現象，暫時可由或然算法以知之，吾人必須將其與非出於機遇者相別，而此種現象，則在未知其定律之前，吾人無由論斷之。或然算法所與吾人關於機遇現象之說明，卽後日吾人對於此種現

象有較清楚之認識後，其眞確性亦不因之而失。

人壽保險公司之經理，對於其所保之人，不能知何人將於何時死亡，其所恃者爲或然算法及大數定律。觀其公司之股東有股息可得，卽可知其所恃者未嘗有誤也。雖有極精明之醫師，可診察其所保之人之壽限極爲精確，但股息卒不致因此而有所動搖。蓋醫師縱能使經理不再無知，然其對於股息，則可謂毫無影響，緣此與無知幷無關係者。

二

欲爲機遇作一較佳之定義，可先將若干事實先一驗之，此項事實，固尋常所視爲出於機遇，而可將或然算法應用於其上者。以後吾人卽可對其共同之特徵問題，作一答覆。

試先以不穩固之平衡爲例。倘將一圓錐體，以其錐尖直立之，吾人可知其必將橫倒，但不知其向何方倒下。表面上觀之，此處似純以機遇爲定者。然如圓錐體爲完全對稱者，且其軸完全垂直，除重力以外亦無有其他之力作用於其上，則此圓錐體不致倒下。倘對稱上稍其缺陷，則卽將向某方

向傾斜，雖此傾斜甚微，亦終必致其向此方面倒下。即對稱性爲完全無缺者，亦可因極微之震動或空氣之推動，使其稍微傾斜，而此則已足使其倒下，且其向何方傾倒之方向，亦已決定，蓋此方向必與開始時之傾斜方向相同也。

吾人所不能感覺到之極小的原因，可產生一能爲吾人所感覺到之較大的效果，於是吾人將以爲此項效果係出於機遇者。倘吾人能詳知自然之定律，幷詳知某一時刻時全宇宙之狀況，則以後任何時刻時此全宇宙之狀況卽可預言。卽使自然之定律對吾人已無有神祕可言，然吾人對於開始時之狀況，僅能近似的知之。倘吾人對於以後之狀況，能以相同之近似程度預言之，則已盡吾人之所能。於是可云：現象已爲吾人所預言，吾人已用定律決定之。然此亦非時時能如此者。有時可有該項事例發生，卽開始條件中之極小的差別，於以後之現象內可發生極大之不同，開始條件中之毫厘之差，可於後來之現象內引起千里之別。在此種狀況下，預言將爲不可能，而吾人乃歸之於『出於機遇之現象』。

其次可以氣象學上之事爲例，亦與此相似。氣象學者對於氣候，欲以某種可靠程度預言之，何

其難耶?狂風暴雨之來，何以看來似出於機遇，因而有若干人對於日蝕作祈禱雖視之爲可笑，而對於晴雨則反不惜爲之禱祝耶?吾人蓋知極大之變動，多在大氣之某種區域內，於此，大氣本身係在不穩固之平衡狀態中。氣象學者亦知此種平衡爲不穩固者，某處必將有旋風發生。然究在何處，則莫由知之，某處之度數，稍差十分之一，卽可使旋風不發生於此而發生於彼，其所及區域，於是適可爲不應及者，倘吾人能知此十分之一度，則狂風之來，必能先知，然因吾人之觀察，既不周密，又不精確，故看來似均出於機遇。於此，觀察者所不能感到之小差別，在其原因方面者，可於結果之現象上發生甚大之事故，其理正與前例相同。

試再舉一其他之例：卽黃道帶方面小行星之分佈是。其開始時之經度，可假定其爲任意者，其平均運動爲不同者，其所作之軌道，距開始時已如是之久，吾人今日對之，雖謂其分佈全出於機遇，亦無不可。開始時其與太陽距離間之微小的差別，亦卽其平均運動間之微小差別，其結果形成今日經度間之極大的不同。倘每日之平均運動上，有千分之一秒之超過，則三年卽差一秒，一萬年卽差一度，三四百萬年後卽差一整個之環繞，此種時間，以與此項小行星自星雲分出後至今之時間

相較，眞爲不足道者矣。此處所論，亦爲微小的原因上之差別，可引起結果上之極大的歧異。

輪盤賭博方面之狀況，其原理亦與此處所擧之例無異。試設想一可以旋轉之針，支於一盤上，盤面紅黑相間，作有百餘之條，倘針停於紅條上，則爲博勝，不則爲博負。此針之停於何處，自與吾人開始時旋此針之推動力有關。針旋轉若干迴後，漸入於停止之狀態，其遲速自視開始所用力之強弱而定。祇須推動此針之力，有千分之一或萬分之一之變動，則針之停於黑條或紅條上，卽受其影響。此項極微之差別，非吾人之筋肉所能感覺，卽最精之器械，亦難測得之。因之，吾人無法預見運動中之針，將停於何處，而祇有以緊張之伺候，由機遇以希望之。原因上之差別，非吾人所能感覺，但結果之差別，則其對於吾人之關係極大，勝負之分，全在於此。

三

際此時機，吾欲插入一附識，與吾人適才所論者，實無多關係。當若干年之前，曾有一哲學家作此論斷，以爲將來固由過去所決定，但過去則不爲將來所定。換言之，吾人可由所知於現在者，以推

斷將來，但不能由之以推斷過去。其理由則以爲一種原因僅能產生一種結果，但同樣之結果，可由不同之原因所產生。此種結論，自不能得任何一學者之贊同。蓋自然定律之連結過去與將來，不僅將來由過去所決定，且過去之被將來所決定，其關係正相同者。然則此哲學家之錯誤，當如何說明之？吾人已知，按照加諾氏（Carnot）之原則，物理現象爲不能逆轉者，宇宙之傾向，在於向無處不平勻之狀態。倘有二物體，其一之溫度較高於其他，則較高者之溫度必流向較低者，故其溫度終將平勻，此則可以預言者。如二者已經平勻，而欲知其先前之狀態，則吾人將何以答之？吾人固知先前時必有其一爲較熱，其他較不熱者，但何者爲較熱，此則非吾人所能知矣。

然就實際上言之，則二者之溫度，終莫得完全相同，其溫度之差，僅能以漸近線之方式，逼近於零，故當某時候時，吾人之溫度表已無法將其差別測得。倘吾人所用之溫度表，其靈敏能增加千倍乃至於十萬倍，則吾人卽可知此項差別仍舊存在，故其一之物體，尙較其他者爲熱，因而可推定何者於先前時曾較爲熱。

此處之原因上有極大之差別，但結果上之差別則甚小，此與以前諸例所不同者。弗來毛里昂

(Flammoriou) 曾於其著作內提及一觀察者，其離地球而行之速度，較之光之速度尤大。如是則對於此人，時間之性質符號即將改變，歷史之程序行將顚倒，滑鐵盧 (Waterloo) 將在奧斯太烈茲 (Austerlitz) 之前。對於此人，原因與結果亦將倒置，不穩固之平衡，將不再爲例外，而因自然現象之不能逆轉，在此人看來，一切似均出於混亂，而此混亂則成一不穩固之平衡，於是此人所得之印象，將以爲整個之自然界，均受機遇之支配者。

四

以下所舉諸例，其性質又稍不同。試先一論分子運動論，吾人對於滿裝氣體之器皿，當如何想像之耶？無數之分子，以極大之速度，向各方向橫飛，時時與器皿之壁或彼此間相撞，而其相撞之狀態則各有不同，所須使吾人極注意者，非在其原因之小，而在其性質之複雜。然前者之狀況，吾人亦須計及之，且其地位殊爲重要。倘一分子稍稍出離其軌道，其相差之微可與氣體分子之影響半徑相比較，則無論向左或右，或可避免一相撞，或其相撞之狀況即有改變，因而可使相撞後之速度方

向亦有所改變，或爲九十度，或至於一百八十度亦未可知。

然尙未盡於是。吾人適已言之，倘相撞前分子稍稍改變其方向，其改變即使爲無限小，但相撞以後之變動，可爲有限大者。倘一分子經過相繼之二次相撞，則第一次相撞前之方向變動，即其小爲第二級無限小者，已足使第一次相撞後之變動用第一級之無限小表之，而在第二次相撞後，即可用有限大之量表之。在事實上，一分子所遇之相撞，不止二次，在每秒鐘內有無數之次數。故如第一次相撞後之方向變動，須用一極大之數A乘之，則n次相撞以後，須用A^n乘之。此項變動於是將成爲極大，不僅因A爲極大，即極小之原因產生極大之結果，亦且因指數n亦爲一極大之數，即相撞之次數極多，其原因亦極復雜。

試再一論屬於此項性質之其他一例。何故雨點之分佈，似全出於機遇者？此其原因所在，亦由於構成雨點之原因，其性質至爲複雜。大氣中有無數之游子（Ionen），長時間受變動的空氣之流之影響，可爲微小之旋風所捲去，故末後其在大氣內之分佈，不再與原來之分佈有關。倘溫度突然降下，則水蒸氣即凝結，而每一游子即成爲一雨點之核心。故吾人倘欲知此項雨點之如何分佈，

在一某種大小之面上將受若干之雨點，則僅知游子之原來狀況，必尙不足，吾人兼須知無數極小而無法計算之空氣之流，曾有若何之影響於其上。

對於浮沈於水中之微塵，此種觀察法之眞義，亦仍適用。器皿中之流，其定律非吾人所知，吾人僅知其爲極複雜者而已。經過某一時間後，此項微塵偶然的，亦卽均勻的分佈於器皿內，其原因適由於水流之複雜性。倘水流服從某種簡單之定律，例如器皿爲一旋轉所成之體，水流按軸作圓形之旋行，則其結果卽將不同，於是每一微塵將保存其原來離底之高以及其原來離軸之遠。

吾人觀察二種流體所成之混合物，或二種微細粉末之混合物時，亦可得相同之結果。倘欲再舉一較粗之例，則可一觀打牌時之將牌擾和，其觀察亦仍適用前者。每次之一擾，牌卽受一次掉換（與吾人在置換理論方面所研究者相類似）。最後所存留之掉換，將爲何者耶？此掉換爲一定者之或然性（例如某一牌在掉換之前原處於 $\varphi(n)$ 位置者，經此掉換後當處於第 n 位置），以吾觀之，蓋與打牌者之習慣有關。打牌者將牌擾和若干時候，其間所經過之掉換極多，故由之所發生之次序，祇與機遇有關。因之，吾可謂末後時一切可能的次序，其或然性均相同。此種結果，由於極

步之相繼的掉換所產生，即由於現象之複雜性質所產生。

最後尙須一及差誤之理論。此處所論者亦爲複雜而衆多之原因。觀察者所用之器械縱極精良，但其所可有之差誤仍極爲多。故觀察者須努力於注意并避去較大之錯誤。此項錯誤，即能引出有系統之差誤者。倘吾人能將此項差誤消除，則尙有較小者在，相加時亦能成爲大差誤而有危險。由此所發生者，即所謂由於機遇之差誤，是因其原因之複雜而衆多，故吾人名之爲由於機遇者。此處之原因，亦極微小，但其所發生之影響亦小，故必聯合發生時，且爲數極多，其影響乃有危險可云。

五

此項關係，吾人亦可由一第三之觀點出發研究之。因其不甚重要，故吾不欲深論之。倘吾人欲預言一事實，因而驗其已往者，則必先知以往之總狀況，但此事決無法於宇宙之全部爲之。因之，吾人不能不就事實所可發生之處所之附近，觀察其狀況爲滿足，或觀察其與此事實有關係者。如是之研究，自不能爲完備者，故吾人於此，仍須作一選擇。但有時亦可有此種事例，即某項狀態，開始時

似與所欲預言之事實幷無若何之關係，其對此之影響亦以爲不重要者，因而吾人全不重視之，但後來則出於吾人意料之外，竟有極大之關係。

今有人往其所經營之事業處所。其所行之路經過某街。倘另有人熟知其所經營者爲何種事業，則卽可知其何故適於此時出行，又何故經過此街。一瓦匠工作於屋頂上，雇用此瓦匠者至少可大約預言此工人所工作者爲何。此經營事業者不會想及此瓦匠，此瓦匠亦不會想及此人，故在表面上觀之，此二人所屬之世界，似爲完全不同者。倘此瓦匠失手將一瓦片落下，竟將其人致命。則旁人均將謂，此乃偶爾之事。

吾人之無能，使吾人無法把捉宇宙之全體，故必須將其解析爲個別之小部分。吾人之努力，在儘適用的以及儘自然的爲之。然此項部分中之二者能互相影響，此則仍時時遇見者。於是吾人將謂此項交互影響之結果，係出於機遇者。

然則此眞爲了解機遇上之第三種觀點耶？此則不恆爲如此者。事實上，吾人恆可將此種研究歸納之於第一或第二之事例。當二個本爲不相關之世界互相發生影響時，此項影響之定律輒爲

極複雜者，而在他方面則此二世界之開始條件中有極小之變動時，已足使其相互影響爲不可能。欲使此經營某種事業之人，遲一秒鐘經過此街，或此瓦匠早一秒鐘將其瓦片墜下，斯皆祇須有極少之狀況變動卽可者。

六

以上所云種種，尚不足以說明何以機遇亦服從某項定律者。是否因原因極小，且極複雜，故吾人卽可預言，其所發生之平均的結果（倘非在每個個別之事例方面），當爲何耶？欲解答此問題，最好將先前所舉各例，再一一論列之。

試首先一論輪盤賭博之例。吾前已述之，針所停止之處，與開始時推動此針之力有關。此動力當有一一定之值，其或然性爲何？關於此點，吾實無所知，但可假定此或然性可用一解析的函數表出之，此價值在 a 與 a＋e 間之或然性，按此當與其在 a＋e 與 a＋2e 間之或然性實質上相同，惟須假定 w 爲極小方可。此種屬性，凡解析的函數均有之。此種函數方面之極小的變動，恆與其

變數方面之極小的變動相比。

按以上之假定，可知推動力方面如有極小之變動，卽足使針所停於其上之色條，有所改變。例如在 a 與 $a+e$ 之間時，其色條當爲紅者，但在 $a+e$ 與 $a+2e$ 之間時，則當爲黑。因之，紅條之或然性，與在其後之黑條者相同。故紅色之總或然性與黑色者相同。

某種一定的開始推動力下之或然性，可用一解析的函數表之，而此函數則決定於問題之性質。然不問此函數之構造如何，其結果恆可用，蓋此處所有關者，僅爲共同於一切解析函數之屬性。因之，開始時吾人於思想上假定其爲已知之函數，結果可成爲不必要。

此處所云關於輪盤賭之原理，不難應用之於前所舉小行星之例。吾人可將黃道帶視爲極大之輪盤，造物會以極多之小球拋擲於其上，幷各各予以開始速度，卽各各之開始時的推動力，此項推動力變動時所循之定律，非吾人所知。其目前之分佈爲平勻者，而按以前事例方面之相同的理由，可知其不與此定律有關。吾人於是可知此項現象何以服從機遇之定律，原因方面之小差別，足以產生結果方面之大歧異。於是吾人可將此項小差別之或然性，視爲與此項差別之本身相比者，

其原因適因於此項差別甚小，而連續函數方面之微小的變動，又與其變數方面之相當的變動為相比者。

今再一論與此項均不相同之例，於此，主要之問題，在於原因之複雜的性質。試假定一打牌者，將牌擾和之。每一次之擾和，輒將牌之次序予以變更，而變更之之法則有多種。為說明上之簡單計，可假定祇有三張牌。如是，第一次擾和前之牌，其位置為123者，經第一次之擾和後，其次序不外以下諸者之一：

123，231，312，321，132，213。

此六種可能性中，任何其一均為可能者，今可設其各各之或然性如下：

P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6。

此六個數目之和為1（蓋或然性為1之意義，即為確實之謂）。吾人所知者已盡於是。此六個或然性自與打牌者之習慣有關，但此非吾人所知。

第二次擾和時，以及以後之擾和時，此種情形於相同之條件下復現之。吾之意思，謂某一或然

性，例如P_4，其所代表者恆爲該種或然性，即三張牌在第n次及第$n+1$次之中間時，倘其次序爲123，則當第$n+1$次之後，其爲321之或然性仍此數也。不問n爲何數，此理恆適用，蓋打牌者之習慣，以及擾和此項牌之方式，恆無所改變也。

倘擾和之次數甚多，則第一次擾和前之次序123，在最末次擾和之後，其次序可爲以下諸者中之一：

123，231，312，321，132，213，

此六種可能性之任何其一，其或然性在實質上相同，且等於$1/6$。不問上項數目P_1，……P_6之值如何，此理恆可無誤，而此項數目，則對於吾人爲未知者。擾和次數之多，即原因上之複雜性質，此處能產生平勻性。

倘所有之牌數不止三張，此種思想方法亦仍適用，惟在三張牌方面，其論證已頗複雜，故吾之證法，將僅以二張爲限。如是，則吾人所有之可能的次序，僅有二種如下：

12，21。

其或然性為P_1及P_2（$P_2=1-P_1$）。今設擾和之次數為n，吾人可假定，倘最後所得之次序仍為原來者，則贏一佛朗否則輸一佛朗。於是吾所有之數學的希望為

$$(P_1-P_2)^n。$$

差數P_1-P_2自必小於1，故如n甚大，則吾之希望將等於零。吾人既知機遇為相同者，故不必知P_1與P_2二數。

然例外仍恆可能，即P_1與P_2二數中，可有其一為1其他為零。如是則吾人之考慮即不再適用，蓋開始的假定將太為簡單也。

此處所論者，不僅可用於牌之混和，對於其他之混和，例如粉末或流體等，均可應用，即分子運動論上之氣體分子所成之混和，亦可用之。吾人可先作此觀念，視氣體之分子，相互間無有衝撞者，但可與盛此氣體之器皿之壁相撞，因而其軌道即被曲折。倘器皿之形狀為充分複雜者，則分子之分佈以及其速度之分佈，不久即可成為平勻。然如器皿作球狀，或作直角六面體狀，則即不能如此。此其故何在？蓋在前者之事例方面，任何一分子軌道與球心間之距離，恆為不變者，而在後者方面，

則因任何一軌道與器之面間之角之絕對值，亦爲不變者。

由此可知所謂條件太簡單者，其所指之意義爲何。其意蓋謂此項條件，使某項事物可仍不變，於此，有尋常所稱之不變式存在。於是此問題之微分方程太爲簡單，不能應用及機遇之定律。初觀之，此種論斷似無有意義可言，但今則可知其義意之所在。倘微分方程能有一不二致之積分，且能使某種事物可以不變，則此項微分方程卽太爲簡單。如開始條件中有某者可以不變，則末後之狀態自不能與開始時之狀態無有關係。

最後，吾人可一及差誤之理論。偶然之差誤何由發生，吾人無從知之，且適因吾人之不知，故可斷定此項差誤能適合高斯氏(Gauss)之定律。此則顯然爲一種矛盾。此矛盾之解釋，大體上與以前諸事例相同。吾人祇須知以下諸點：差誤之數甚多，亦極爲小，且其每個可爲正或負。每個差誤之或然性曲線，吾人無由知之，故僅可假定此曲線必爲對稱者。根據此假定，卽可證明所得之總差誤，必適合高氏之定律，而此定律則與吾人所不知之特殊定律，并無關係。於此，結果之簡單，亦由於已知狀態之複雜性質。

七

此外尙有甚多之矛盾。吾前已按蒋來毛里昂之意思，提及一人，其運動之速度，較之光速爲大，因而對於此人，時間須改變其符號。吾幷曾謂對於此人，一切現象均僅與機遇有關。就某種觀點言之，此自爲不謬者，但在某一時候，此項現象將不按照機遇之定律而分佈。蓋在事實上，其分佈與吾人所見者同，而吾人則見其展開時，完全爲和諧者，似非出於混亂，故在吾人觀之，此項現象似非爲機遇所支配。

吾人可由此以得若何之結果耶？對於此人，看來極小之原因可引出極大之結果。在吾人方面，極大之結果發生於極小之原因，然則何故適用於吾人者，乃不能適用於此人耶？相同之推理法，豈不能應用於此耶？

吾人試將此推理法重再一述之。倘原因方面之極小的差別，能產生結果上之大歧異，則何以後者按照機遇之定律而分佈？試假定原因方面有一公釐之差，其所產生於結果者則爲一公里之

差。倘結果所關者約爲一公里，則吾當爲勝。如是則吾可得勝之或然性爲1－2。此何故耶？蓋如是則與此相當之原因所關者必當約爲一公釐。但原因在某種界限內變動之或然性，自與此項界限相互間之距離相比，祇須此距離爲極小者。倘吾人不作此假定，則欲將或然性用一解析函數表出之，卽成爲不可能之事。

倘極大之原因產生極小之結果，則其事當如何？此時吾人對於此種現象，不將其視爲屬於機遇，但運動較光速爲速之人，則反將其視爲出於機遇者。於此，原因上一公里之差，祇可引起結果上一公釐之差。目今之問題，在於原因處於相距n公里之二界線內之或然性。此或然性仍能與n爲相比者耶？吾人於此實無理由作此假定，蓋n公里之距離實太爲大也。所發生之結果，當在相距n公釐之二界線內，其或然性相同，故亦不與n相比，雖n公釐之距離，固爲極小者。因之，吾人無法將結果之或然定律，用一連續的曲線以表之。然就解析的意義言之，則此曲線仍可爲連續者，蓋此處橫坐標方面之無限小的變動，有縱坐標方面之無限小的變動與之相當也。然以實用而言，則連續性不再存在，因對於橫坐標方面之極小的變動，不必有縱坐標方面之極小的變動與之相當。故欲

用尋常之鉛筆，將曲線畫出，此爲不可能之事。吾人之說明，簡言之，其意義卽在於此。

對於吾人之例，可由之得若何之結果耶？此超過光速之人，卽不能謂原因（實在當云屬於彼之原因，蓋在吾人觀之，此適爲結果也）必可用連續之函數以表之。但何故吾人則可如此耶？此則因不穩固之平衡狀態，吾人所視爲開始狀態者，其本身實爲長久的歷史發展之終點。當發展之時，曾有複雜之原因作用於其中，且其所經之時間極久。此項原因曾促進元素之混和，曾欲使一切形成爲平勻，至少於一有限之空間內爲然，故其結果，能將稜角磨滅，隆起者抑下之，缺陷者塡滿之。因之，開始時爲其所作之曲線，縱爲極隨意而無規則者，但以後則屢屢將其改爲平易，故末後卽得一連續的曲線，緣此，吾人不妨先假定其連續性。

但此超過光速之人，則不能如是作其論證。對於此人，複雜之原因，不能作爲使曲線成爲平易之用，且適相反，祇足增加差別及不相等。故由開始時之混亂，所發生出之世界，恆愈趨於亂。其所觀察得之變動，似爲直接發生者，故無法先見及之，而將視之爲出於某種之隨意性，且此項隨意性，與吾人之機遇亦不相同，蓋一則不服從任何之定律，而此則固有定律者也。凡此諸點，尙須有較長之

說明方可，吾人由之，或可較易明瞭宇宙之不可逆轉性。

八

吾人所努力者，在於作一機遇之定義，但尚有一問題必須解答。對於吾人所作定義下之機遇，可予以客觀的特性耶？

吾人將提出此問題一論之。前已言及極小而極複雜之原因。但對於某人爲極小者，對於他人或可爲極大，而對於其一爲極複雜者，在其他之人觀之，或亦可爲極簡單，倘對此作一考慮，則可引起若干問題，其一部分我已曾解答之，蓋以前我曾詳論在某種事例下，微分方程將太爲簡單，故不能用及機遇之定律。今可將此項事例再詳爲一論之，因吾人尙可由其他之觀點出發以硏究之也。

所謂『極小』者，其意義究爲何耶？欲明瞭其義，吾人仍可一返觀前此所論者。倘有一差別，或一間距，或然性於其界線內可不變，則此差別或間距卽爲極小者。但何以在此間距內或然性可視爲不變者耶？此則因吾人假定或然性之定律可用一連續之曲線以表之，且不僅就解析之意義而

言為連續者，卽就實用言亦然，如吾以前所已提及。此卽謂：此曲線不僅無有眞正之不連續處，且不當有太銳太明顯之角及曲折。

吾人以何理由可作此假定？此亦為吾人所已討論過者：自宇宙開始之日起，已有複雜之原因發生作用，至於今日未嘗稍減，其作用在使宇宙恆向一般的平勻性進行，凡以前所曾經歷之狀態，無法再發生。此項原因，漸使稜角磨滅，曲折平坦，故吾人之或然性曲線，祇尙餘平易之波形。經過萬萬年後，吾人始得向此項平勻性更進一步，於是曲線之波形的曲折，復減少若干倍，此卽是，曲線之平均的灣曲半徑，卽增大若干倍。某種長度，在今日觀之，因其為曲線之弧所成，故不能視為極小者，至此因其灣曲之度已減小若干倍，不妨視之為一直線，故卽可視為極小者。

從可知所謂『極小』者，其意義為相對的。然所謂相對者，並非就此人或彼人而言，而係對於今日之宇宙狀況而云。倘宇宙更進於平勻，卽一切更相混和，則其意義又將改變。然至彼時，人類或已絕跡於宇宙，而有其他者代之而起，此項代之而起者，可較人類為小或大。在此種事例下，吾人之範疇，實可適用於一切之人，故有客觀的意義可言。

他方面，所謂『極複雜』者，其意義又何所指耶？本節之首，吾即已提及以前所作之答案。但吾人尙有其他之答案可作。吾人曾謂複雜之原因恆能產生較密切之混和。但須經若何久之時間，此項混和始可視為充分者耶？何時始能有充分多之狀態相結合耶？所打之牌，何時始能充分的混和耶？當吾人將二種粉末混和時，倘其一為藍，其一為白者，則至某一時候時，混和後所得之色，卽將成為均勻者。然此僅由於吾人感覺之不完全所致。對於遠視之人，必須自較遠之處觀察此顏色，於是所見者為均勻。但對於近視者，則此顏色仍尙未均勻。倘在任何人觀之，此顏色均已均勻，則吾人尙可用器械，將此均勻之界限，再一移動。按之分子運動論，氣體之單純現象背後，隱藏有無限的複雜，此則不能希望有人能分別之矣。然顯微鏡則能為之，使吾人可由以見其相似之現象，至少吾人如採取郭氏（Gouy）對於白朗氏（Brown）運動之見解時，卽能如此。

因之，此新的範疇之為相對者，亦猶前者然。其所以有客觀的性質可言者，則因一切人類之感覺，大體上均相同，其所用器械之力極為有限，且應用此項器械之時，亦極為少。

九

對於歷史的哲學的科學，尤其對於歷史，此理亦仍適用。歷史家對於其所研究的時代中所發生之種種事故，必須作一選擇。其所顧及者，僅爲在其目光視之較爲重要之事故。例如關於十六世紀及十七世紀時代中之事故，其所能敍述者，僅爲最重要及最可注意之事。倘吾人可用十六世紀中之事以說明十七世紀中者，則可云『後者之事實，適合於歷史上之定律』。然如十七世紀時發生一事件頗爲重要，其原因在於十六世紀時之一不重要事件，且歷史著作中均無之，因而早爲吾人所忘却，則吾人必謂『此事件出於偶然』。從可知此處所謂之『機遇』，其意義與物理科學方面者相同。其所示於吾人者，則極小之原因，發生極大之結果是也。

最大之機遇，當爲偉大人物之產生。兩性之生殖細胞，其相遇全出於機遇，此二細胞適爲含有某項元素者，故其交互影響，能產生一天才之人。吾人均知此項元素極爲罕有，其能遇合則更爲罕有之事。精蟲之含有此種元素者，稍稍出離其軌道，亦極爲尋常之事，但此種十分之一公釐之相差，

即足以使拿破崙不產生，於是大陸上之命運，將大為改變。使吾人能深識機遇之性質者，此例當最為佳。

吾人應用或然算法於歷史的哲學的科學時，可得若何之矛盾，今尚有一言須補及之。吾人可證明，議院中之議員，決不會將反對者選充之或至少可指出此種事實之發生，其或然性至為少，故吾人僅可以一對百萬之比相賭。孔道西（Condorcet）曾欲計算，須有若干多之陪審官時，法律方面乃可免於錯誤。倘吾人將此計算之結果採用之，則必發生同樣之失望，與計算反對者不能入議院時所有者相同。

在此種問題方面，機遇之定律，實不能適用。倘法庭對於判決不能適當，則吾人所思想之白里道（Bridoye）方法，決難有所補救。此自為深可歎息之事，蓋孔道西之制度，其用意無非欲減少法律方面之錯誤耳。

此項負結果之理由何在？吾人之企圖，欲將此種事實歸之於機遇，因其理由不明故。但在實際上，此處所及，實非眞正之機遇。原因為吾人所未知，此係實情，且亦殊為複雜。然亦不能謂其充分的

複雜，蓋倘有某種事物，爲其所放任而不變更之者。且吾人前已言之，所謂『太簡單』之原因，其特徵亦卽在於是。倘有若干人集會，則其所作決議，卽不能謂出於機遇，蓋此項人非爲不相關者，且互相發生影響也。發生作用之原因有多種，人被其所混亂，故向右或向左移動。然其中仍有某事物，不因之而被摧毁者：此卽多數羣衆之慣性，好跟隨善於辭令者所指示之路向。此事恆不致有所變動。

十

或然算法應用於正確科學時，亦時有困難可發生。何故對數表上之小數，以及數目 π 之小數，係按照機遇之定律而分佈者？關於對數，吾曾已於他處討論過此問題，其解答幷不困難。變數方面有極小之變動時，對數方面自亦有極小之變動，但在對數之第六位小數方面，卽有較大之變動。故其範疇仍無所變。

對於數目 π，此問題卽較爲困難，目前吾實無有確定者可云。

倘有其他許多之問題，此處可以提出，但在吾尚未將主要討論之問題解決之前，吾不欲另提

其他者。倘吾人得一簡單之結果，例如由運算獲得一大約之數，則吾人將謂此種結果，非出於機遇者，因而想求其非出於機遇之原因，以說明此結果。在一萬數目之下，機遇所產生者爲一大約之數，例如10000，其或然性在事實上爲極小者，祇爲一對一萬。然機遇予吾人以其他數目之或然性，其小亦如是。但如是之結果，并不使吾人詫異，吾人將不視之爲出於機遇者。其原因則簡單的因於此項結果，并非極可注意者也。

此處吾人是否陷於錯誤，抑此種研究法有一甚深之理由？吾人自希望其爲後者之事實，蓋不則任何科學均將成爲不可能。吾人將何以約束一種假設耶？既無法將一切結果盡行證驗之，因其數爲無限多者，故吾人祇可將其中之若干者作一證驗，倘所得結果甚佳，則此假設已可爲可靠，蓋如是多之結果，不能全出於機遇也。就根本上言之，吾人實常用此理由。

於此，吾無法將其完備的確立之，此則時間所不許者，但吾至少可作如次之說明：在二種假設中，吾人須作一選擇：或則採取簡單之原因，或則極多複雜之原因，即所謂機遇者。假定前者亦能予吾人以簡單之結果，此爲自然之事，倘吾人用此研究所得之結果，確係如此，例如得一大約之數，則

其爲簡單原因所決定之可能性，自較爲多，此簡單原因自可直接的使吾人得此結果，非若機遇之僅能萬中得一。倘所得結果非爲簡單者，則其情形即不然。機遇自亦祇能於萬中得一，惟謂此處仍有一簡單之原因能決定之者，其或然性已甚少矣。

第二卷　數學的推理法

第一章　空間之相對性

一

欲想像空無所有之空間，此實爲不可能之事。凡吾人之努力，欲將空間內一切物像盡行摒去，僅設想一純粹之空間，其結果至多祇能得一觀念，其中以淺色之線，代替深色之面，而按此方法進行時，最後可將一切分解，成爲烏有。由此，可產生無法再歸納之空間相對之概念。

凡提及絕對空間者，實不知其所用之語，直無有意義可言。此種眞理，其曾對此問題作一考慮者，蓋莫不早已知之，惟事實上則吾人輒時時忘之耳。

今設吾在巴黎之某處，例如先賢祠，幷云吾明日重將來此。或可問吾曰：『君之意思，謂重將來此空間內之同一處所耶？』則吾將應之曰『然』。但事實上此爲不正確者，蓋由今日至明日，地球所行經之路，已超過二百萬公里，此先賢祠自同在此行程中。倘吾欲顧及此事實，較精確的言之，則更有所不能，蓋地球所行經之二百萬公里，係環繞太陽者，太陽則對銀河亦有運動，而銀河本身，則吾人雖不知其速度，然其亦在運動則無可疑。因此，吾人實無法知道先賢祠一日中所行經之路程幾多，且永遠無法知之。故吾所欲言之意思，實在當如下：明日吾將重見此先賢祠之圓頂及前門，而如無有先賢祠存在，則吾之言卽無有意義，空間本身將成爲烏有。

表出空間相對原則之形式，此實爲最普通者。然尙有一其他之形式，德爾盤(Delbeuf)氏特注意之。設某夜中宇宙之一切廣袤，均陡然增加千倍；則世界仍與其本身爲相似者，而此處所云相似之義，亦與歐九里得第三卷內所云者相同。以前之長爲一公尺者，今則成爲一公里，以前爲一公釐者，今則爲一公尺。吾之身體及吾所睡之牀，其放大之比相同。當吾明晨起身時，吾對於此項可驚之變動，將有何種感覺耶：此則甚爲簡單，吾對此一切，實全無所知。卽最精良之器械，對此絕大之變

動，亦不能有所測得，蓋吾人所用之尺，與其所量之物，均以相同之比例放大也。故在事實上，此種根本之變動，祇有以絕對空間爲推理之出發者，乃能謂其存在。倘吾暫且一根據之，則除由此可更明白此種觀念所附之矛盾外，別無所得。因空間爲相對者，故吾人當云：未曾有何種事故發生，因而吾人亦不能有所感覺。

但吾人仍有理由言及二點間之距離耶？此則不能，因此種距離已可有極大之變動，倘其他之距離均以相同之比例改變，則吾人卽無法知之。當吾云：『明日吾將在此』，則吾之意思，如前已說明，非謂『吾明日將重再在今日所在之處』，而謂『明日吾將重再與先賢祠處於同一之距離，如今日然』。但此種說法亦不充分，故實在當云：明日與今日，吾與先賢祠之距離，與吾身體之比，可用相同之數目以表之』。

倘有可及者：吾適才所假定者，謂世界之廣袤雖變，但此世界仍與原來者相似。事實上，吾人倘可更進一步，而近代之物理學者，則已於其一種可驚之理論內，先舉一例。按羅倫茲及費茲格拉得（Lorentz & Fitzgerald）之說，凡地球所與相俱之物體，在其方向內同運動時，此項物體均會

變形。此種變形自極爲微小，蓋凡平行於地球之運動方向所量之廣袤，均縮小萬萬分之一，其在垂直方向內者則否。然對於吾此處所論，則不問其如何小，但知其存在卽可。且吾雖云其極小，但實際上究如何大，吾亦無從知之。吾本人自亦不免於由絕對空間所產生之錯覺。目前吾所思想者，爲地球繞太陽之橢圓運動，其速度爲三十公里。其實在之速度（吾之意思幷非指其絕對之速度，蓋此爲無意義者，吾僅就其對於以太而言之速度而云耳），非吾所知，亦無法以知之。此速度可大十倍，乃至於百倍，倘如是，則變形亦將增加百倍乃至於萬倍。

然則吾人可計算及此種變形耶?此自爲不能者。今設有一立方體，其邊長爲一公尺。因地球之運動，此立方體卽將變形，其與運動相平行之邊，將縮小一些，其他之邊則否。倘吾欲用一尺將其量之，則可先將與運動相垂直者一量，而知吾之尺與邊適相合。事實上，因尺與邊均在垂直之方向內，故亦無有變動。於是吾可進而量其與運動相平行之邊，因而須改變尺之方向，以與此項邊相合。此時尺之方向既亦與運動相平行，故本身亦已變形，而仍與此所量之邊相合，在實際上，邊固已縮小一些也。因此，吾實無法知變形之已發生。

或將以爲此項假設，既無法由實驗以證明之，則此假設尙有何用。事實上，吾之說明殊不完備。吾以上所云之測量，蓋僅以用尺爲限。吾人測一長時，亦可用光線行經此長時所須之時間，但自須先假定光速之不變，以及與方向無關。羅倫茲自亦可假定地球運動方向向內之光速爲較大，與此垂直之方向向內者爲較小，則此假設亦可說明此事實。但羅氏則甯假定二種方向向內之光速爲相同者，因而其一方向向內之物體，將小於其他方向向內者。倘光之波面亦受相同之變形，則羅費二氏所假定之變形，卽無法測得。

然無論爲此或爲彼，均無所謂絕對之量，祗有應用某種器械，以作量之測法，此種測法，可用一尺，亦可用光線所行經之路程，惟吾人所量得者，恆爲所測之量與吾人所用器械之比。倘此比有所變動，吾人卽無法以知其變動者究爲所測之量或所用之器械。尤須注意者，則經此變形後，世界已不再與原來者相似。平方形已成爲長方形或平行四邊形，圓則成爲橢圓，球成爲橢圓體。但吾人却無法以測量此項變形之是否實際上已發生也。

吾人自尙可更進一步，不用極簡單之羅費二氏變形，而另想一種任意者。如是則各物體將按

照某項定律而變形，而如一切之物體無有例外均按照此相同之定律而變，則吾人仍無法以知之。吾所謂『一切物體無有例外』者，意謂吾人之身體亦當包括在內，且由各物體所發出之光亦在內。

倘將世界置於一複雜形狀之鏡前，此鏡能將置於其前之對象之影顛倒歪斜之，則吾人觀察得之世界自必大變其形，惟其各部分間之關係仍無所變。倘世界內二種實物互相接觸，則其影亦仍相接觸。吾人觀此鏡中之影時，立卽知此世界已被變形，其原因則因吾人知此世界係置於此鏡之前。卽使吾人不知此事實，世界係隱藏而不能見者，但仍有一物未經隱藏，此卽吾人本身是。吾人恆能見吾人之身體及肢體，至少尚能感覺之；吾人之身軀肢體既不變形，則此恆可為一種量尺。試想像吾人之身體亦同樣已被變形，如鏡中所見者然，則此量尺亦成為不能用，於是此變形卽莫由知之。

於此，吾人有二世界，其一為其他者之影。對於A世界內之任何一物P，B世界內有一物，P'與之相當，為其鏡影。P'之坐標，為P之坐標之函數。此函數可任意選擇之，所當假定者，則此函數當適

用於一切之物。如是則P之所在，與P′之所在間，有一種不變之關係。此關係爲何，非吾人所欲問，祇須知其爲不變者已可。

此二世界，不能爲不相同者。吾之意思謂第一世界之對於其居民，與第二世界之對於其居民相同。在此二世界互相爲無關係者之前，此理恆適用。今設吾人處於A世界中，因而於其中建設吾人之科學，尤其是幾何學。此時，B世界中之居民，亦將建設其科學，而因其所處之世界爲吾人所處者之影，故其幾何學亦爲吾人者之影，或可云，與吾人者相同。倘有一日，吾人能窺見此B世界中居民之所爲，則吾人將謂：『若輩誠爲不幸者矣，其自以爲創造成功之幾何學，實則祇爲吾人所作幾何學之顚歪影子耳。其所謂直線者，實已灣曲不堪，其所作之圓，及球，均突兀不成形。』然就他方面觀之，此世界中居民之視吾人之幾何學，正與吾人視彼者相同，謂誰有理由，此無法決定者也。

由此不難見空間之相對性，有若何廣大之意義。空間本身幷無形狀可言，其形狀得自其中之事物。吾人對於直線或距離所有之直接感覺，當如何思惟之耶？吾人對於距離之本身，可謂無有感覺，倘某夜中吾人所見之距離增加千倍，而如一切之距離均同樣的增加，則吾人卽無法感覺到此

種變動。甚至某夜中A世界可易爲B世界，吾人亦無法知之。如是則昨日之直線，已不成爲直線，但吾人實無法知之。

空間之一部分，不與其本身亦不能絕對的與其他之部分相等。蓋卽對於吾人爲相等者，但對於B世界上之居民卽不相等。此B世界上之居民，其可不承認吾人之意見，亦猶吾人之不承認彼等也。

在他處，吾曾指出可如何由此以得結論，將其用於吾人對非歐幾何學及其他相似的幾何學所當作之見解上。但吾不欲再論此，目下願從其他之觀點上，以討論此問題。

二

對於距離，直線，方向等，簡言之，卽空間，旣無有此項直接之感覺，則吾人恆信以爲有之者，其原因何在耶？倘其來僅由於想像，則何以此種想像，竟若是之牢不可破耶？今可稍一論之。吾人前已言之，對於事物之量，吾人實無有直接之感覺所能爲者，除此量與吾人之尺度間之比而外，無有其他。

因之，倘不用尺度，則吾人卽無由將空間構出。吾人將一切與之相關之尺度，且本能的用之者，實卽爲吾人自己之身體。吾人判斷外物之位置時，祇能將其與吾人之身體相關。此項事物之唯一的空間關係，爲吾人所能想像者，卽其對於吾人身體之關係。故可謂，後者之於吾人，實爲一坐標之系統。

試假定當α時候，A事物由視覺爲吾人所知，至β時候，復由其他感覺以知一B事物，例如由於聽覺或觸覺。吾於是可推論以知此B事物之所在，與A事物之所在同。此其意義爲何？其所指者，不能爲不同時候之二事物，在絕對空間內處於同一之點，此種點卽使存在，亦無法爲吾人所知；蓋在α與β之間，太陽系已經變動，吾人固未嘗知之也。由此可知此二事所處之相同位置，實僅爲對於吾人之身體而言者。

然後者之意義又何所指耶？吾人所得於此項事物之印象，其所由途徑全不相同：感覺A者爲視神經，感覺B者則爲聽神經。就質量上言之，此二者間幷無何種共同之處。故吾人對此項事物所能作之觀念，其質極爲複雜，其一者無法歸納之於其他者。吾所知者，則當吾欲取得A物時，吾祇須將右臂如何一伸卽可。卽吾不欲作此運動，吾亦能想像與此運動俱來之筋肉感覺，此想像則與A

物相連者。

他方面，吾亦知吾能獲得B物，吾祇須將右臂一伸即可，其運動自亦有筋肉之感覺與之相俱。當吾云：此二物之所在相同，則吾之意思，實即欲表出前所云者。

吾倘用左臂時亦能獲得A物，其所俱之筋肉感覺，吾亦明感覺之。用左臂作相同之運動時，吾亦能得B物，其所俱之筋肉感覺亦同。

此爲非常重要者，蓋如此則吾可免於A或B所可加於吾之危險。吾人所可遇到之任何一打擊，自然界恆予吾人以一種或多種之抵禦。同一之抵禦法，可用於多種打擊，故右臂之同一運動，當α時可用以抵禦A者，β時亦可用於抵禦B。因此，同一之打擊，可用若干方法抵禦之，此即前所云同一之A物，吾人可用右臂之運動以得之，但亦可用左臂也。

此種種之抵禦法，其間實無有共同者。倘有，則其唯一者即爲吾人對於此同一打擊之得以抵禦。當吾人云，此項運動相遇於空間中之同一點，其意義亦即爲此，而無其他。仿此，吾人所視爲在同一處之物，其間亦無共同者，倘有之，則即吾人可用同一之抵禦法以應付之之一點。

吾人亦可設想無數多之電線，其中有爲向心，亦有爲離心者。向心之線，報告吾人外界之事物，離心之線，則對於此項事物發出應付之方。其連繫可如下：向心之線上通電流時，此電流即生作用於接線之處，於是卽於離心之電線內引起電流，且其組織如是，倘對於不同之事件可用相同之應付法時，則諸向心線上之流卽能引起同一離心線上之流，反之，倘同一之事件須用不同之應付法時，則一向心線上之流，卽能引起若干離心線上之流，不問其同時或一一單獨發生。

此複雜之聯結系統，其分佈方法之圖，可謂吾人全部幾何學之創造者，或亦可云，凡幾何學上之一切基本，爲吾人所本能的設置者，均已包含於其內。吾人所謂直線或距離之觀念，實卽吾人由此項聯結及其必然之特性所得之概念。

此項必然的特性於何產生，此則不難說明者。聯結之來原愈久者，必愈難將其分開。此種聯結，非個人所漸漸獲得，故吾人於初入世之兒童，已能見其有此痕跡：此係種族所獲得者。此種獲得愈爲必要，斯自然淘汰必愈使其迅速成功之。

由此理由，吾人所云之獲得，必爲最早者，蓋非此則生物無以自存也。自細胞之分立，相互間無

有影響之狀態終止後，自此項細胞成爲相依後，已可有一種機械狀況發生，與吾人適纔所云者相似，俾此種相依之狀況，能善自應付所遇之危險。

倘將一蛙之頭切去，於其皮上滴以鹽酸，則此蛙卽欲用其足以拭去此滴，而如此足亦被切去，則尙能用其他之足作此企圖。由此可知吾前所云之二重的抵禦法，卽當其一無法用時，尙可用其他以應付之也。此項多方之抵禦法以及由此所發生之聯立，卽吾人所稱之空間是。

由此可知，吾人欲求得此種空間的聯想之最先痕跡時，必須如何深入無意識之深處，蓋此處所及者僅爲神經系統之最下的部分。其聯結旣經如是之久，則吾人欲將其分解時，自必有抵抗力遇見，此則不足異者。他方面，此種抵抗，亦卽所稱爲幾何眞理之自明性者。此種自明性，實卽吾人不願與久遠以來所得習慣相決絕之意向，吾人迄今處於其中，固尙未感有其不便之處也。

三

如是所成之空間，實爲小者，不能較吾臂之所及爲多。於是必須有記憶之助，乃能將其界限擴

大。吾雖竭吾之力，用手以及於較遠之點，但恆有點在此以外，非吾之手所能及者。倘吾人如固着於海底某處之水螅，祇有若干觸鬚可以伸展，則凡所能及者以外之點，將成爲在空間之外者，蓋該處物體對吾人所引起之感覺，將不與達到此項物體時所須運動之觀念相聯結，因而亦無有適當之抵禦法與之相當。此項感覺對於吾人，似將爲無有空間性質者，吾人亦不會試將其置於某處。

但吾人幷不如該項下等動物之固着於海底，不問目的物之相去幾何，吾人可先行近，再伸手以及之。此自亦爲一種抵禦法，但爲向遠處之抵禦法。就他方面觀之，此亦爲一種複合之抵禦法，除吾人所有之抵禦法的觀念外，尙有腿部運動所引起之筋肉感覺，臂之末後運動所引起之筋肉感覺，以及耳內半圓形孔道之感覺等等之觀念。

他方面，吾人亦不能將同時的諸種感覺之總一幷想像之，祇能將按照某種秩序之先後的感覺之總作一觀念，故吾以前謂必須有記憶爲之作用於其間也。

試再一論此事實，卽同一之點，可用多種方法以達到之。例如吾可先行近所欲達到之點，然後用手，則手之伸展可較便。由此可得何種結論耶？此卽對於同一之危險，抵禦之法不止一種，而可有

無數者。此項抵禦法均出於感覺，其本身間不必有所共同者，但吾人用之，則爲確定同一之點，因其爲對付同一之危險者，故無論此種或彼種，均與此危險之概念相連繫。此項各種抵禦法之一致處，在於其均能抵禦同一之打擊，猶之同一處所可發生之各種打擊之一致處，在於可用同一之法以抵禦之。此種二重之一致性，構成空間內每一點之個性，凡吾人所能言於『點』之概念者，已盡於此矣。

前節內所論之空間，吾欲以有限者名之，實可歸之於坐標軸，而此則與吾人之身體爲相連繫者。倘吾之身體不動，僅以肢體運動，則此項坐標軸亦固着不動。但擴大的空間所可歸納之坐標軸，又爲何耶？所謂擴大的空間者，亦卽吾目下將作其定義之空間。吾人作一點之定義時，可用獲得此點時須作之運動爲之，此項運動均由吾人身體之某種開始位置出發而成。故坐標軸係與此項開始位置相關連者。

但吾所稱爲『開始位置』之狀況，可於吾身體所能爲之各種位置中任意選擇之。倘空間概念之產生上，多少須無意識的憶及先後發生之各種位置，則此種回憶自亦可多少及於久遠之往

昔。吾人作空間之定義時所發生之不確定性，蓋亦由此。然此種不確定性，亦適爲構成空間之相對性者。

絕對之空間係無有之物，所有者，僅與身體某種開始位置相關之相對空間耳。對於有意識之物，如固着於海底之水螅，自祗有有限之空間，則此空間自必更爲相對者（因其與該物之身體相關），然此物亦無法知此項相對性，蓋此有限空間所與相關之坐標，其位置係不變動者。此物所固着之處，自亦非不變者，蓋地球之運動自將此處包入，故在吾人觀之，此位置自屬變動不居者，但此物則無由知之。吾人有此能力，可將擴大之空間，時與吾人身體之A位置相關，以之爲開始位置，時又以B位置爲開始位置與之相關，故無意中時時變換其坐標。但此物則無此能力，不能游動，故僅以其所有之空間爲絕對者。其所用坐標軸之系統，時時被牽制於一處，故雖此系統實際上時時改變，而此物則不知其他，視之爲恆相同。吾人旣時刻有若干系統可供選擇，記憶亦可多或少憶及較遠或較近之過去，故其對於吾人之狀況，自不相同。

此外則此種有限之空間，係非等質者。此空間內之各點，不能視之爲等值，蓋若干之點，必須費

極大之勞力，乃能達到之，其他者則較爲易。反之，吾人之擴大的空間，則似爲等質者，其各點在吾人視之均爲等值。此種說法之意義爲何？

倘由一位置A出發，則可由之作某種運動M，附有某系統之筋肉感覺，爲其特徵。試再由一其他之位置B出發，則可作其他之運動M′，其所附之筋肉感覺之特性亦相同。今設a爲吾身體上某點之位置，例如右手食指之尖上者，且此時爲開始時之位置A，b則爲此指之位置，係由A出發經過運動M以後者。又設a′爲B′位置時此食指之位置，b′則爲由B出發，經運動M′以後之位置。

吾人之習慣，恆謂a與b二點之關係，與a′與b′之關係同，其意謂M與M′二運動系統，其所附之筋肉感覺係相同者，吾之意識上，感覺吾之身體由A轉至於B時，保有作相同運動之能力，故知空間內有一點，其說a′之關係，與任何一點b對a之關係同，而吾之所謂a與a′等值，其意義亦如是。所謂空間之等質，其義亦復如此。然空間之相對性，亦正因此，蓋不問吾人將其與A相關或與B相關，其屬性恆不變也。因此，空間之相對與等質，蓋爲相同者。

今如進而一論擴大之空間，則此空間不僅對於吾人爲確定，且欲將全宇宙納於其中，故吾人

須用想像力乃能得之。試設想有一碩大無朋之人，能數步超越星辰，則其所感覺者當如何。或設想有一極小之宇宙，其中之星辰均如小球之大，吾人本身處於其中之一球上，成為較螻蟻尤小之小人族，則吾人之感覺當如何。倘吾人非先已構成有限之空間及擴大之空間，則吾人卽無法作此想像。

四

何故此項空間均為三度者耶？以前吾人曾作聯結分佈法之圖，試一回憶之。一方面，吾人有各種危險之表；今以A_1，A_2，等等表此種危險。他方面，則有各種抵禦法之表，此項抵禦法可以B_1，B_2，等等表之。此外，吾人尙有第一與第二表上各數目間之關係，且其構造如是：當某種危險，例如A_8之警信發見時，中樞方面卽能將與抵禦法B_4相當者發動。

以前吾曾提及向心及離心之電線，吾恆恐或為人所誤會，不以此為簡單之比喻，而以為吾係描寫神經系統。吾之意思幷不如是，其理由如下：吾對於神經系統之構造所知者極少，故不能有若

何之意見可發表，且專研究此方面之人，對於此項問題亦倘極爲謹慎；其次則吾感覺吾所作之圖形，極爲艸率；再則吾之抵禦法之表內含有極複雜之種類，即在前所述之擴大空間方面，亦能由各種附有臂之運動之步驟所成。故此處所論，非爲二種實在的器械之物理的結合，而爲二列感覺之心理的聯合。

倘有二種危險，例如A_1與A_2，與抵禦法B_1相聯合，且A_1與抵禦法B_2同時聯合，則就多數之事例言之，A_2與B_2亦爲相聯合者。倘此根本之定律不能普遍適用，則將發生極大之混亂，即不能有與空間觀念或幾何系統相似之物。事實上，吾人如何確定一空間內之點耶？吾人之方法有二：一方面，有警信A之總，與同一之抵禦法相連結，他方面亦有抵禦法B之總，與同一之警信A相連結。倘吾人之根本定律不能適用，則可云A_1與A_2對同一之點相當，因其均與B_1相連結。但吾人亦可謂其不與同一之點相當，因A_1固與B_2相結合，但B_2與A_2之間則無有關係。此即有一矛盾。

倘此定律極爲嚴格，且恆適用，則空間將與實在者完全不同。於是吾人所有之範疇將全不相關，其一方所分佈者爲警信A，他方所分佈者則爲抵禦法B。範疇之數於是將極多，但相互間均無

有關係。空間於是亦將爲甚多而分開之點所構成，而成爲不連續者。吾人欲將此項點歸成爲一種秩序，不欲其他者，於是亦將成爲無目的之事，吾人對於空間予以三度，亦將無有理由。

但其狀況則異於是。目前姑容我應用對於幾何學已有研究的人之語言；此爲必要之事，蓋幾何學即爲該種人之語言，此種人吾所欲了解之者。當我欲抵禦一種打擊時，吾即企圖達到此打擊所自來之點。倘吾能儘量與此點相接近，其事亦已充分。如屬於B_1之點，能同時與屬於A_1及A_2之點充分的接近，則可假定B_1與A_1及A_2亦相當。但與其他一抵禦法B_2相當之點，亦可接近於與A_1相當之點，不與相當於A_2之點相接近。於是抵禦法B_2可應用於A_1，不必能應用於A_2。

對於幾何學無多智識者，倘求其解釋於與前所云之定律有差，則較簡單。如是則事物之展開將如下：設二種抵禦法B_1與B_2，與同一之警信相聯合，且與若干與A_1屬於同一範疇之警信相聯合，此項警信使吾人與空間內之同一點相連繫。但吾人亦可遇見A_2類之警信，此項警信係與B_2相聯，不與B_1相聯，却亦可與B_3相聯合。惟B_3可不與A_1相聯，且可仿此下推，故吾可寫作之如下：

B_1，A_1，B_2，A_2，B_3，A_3，B_4，A_4。

於是，每一項與其前後之二項相連繫，但與較遠者則無關。

此中之每一項非爲分立，而爲其他警信或抵禦法之廣大範疇中之一部，此項其他之警信或抵禦法所有之連繫，與該項者相同，故可視之爲屬於同一之點者。如是則此根本之定律，雖其中含有其他之假設，而吾人不妨視之爲恆適用。惟因有此項假設，故諸範疇不能全無關係，而可有一部相混，且可相和合至某種程度，其方式使空間成爲連續者。

此外則此項範疇所成之秩序，幷非爲隨意者，例如吾人一觀前此之序列時，卽可見B_2在A_1與A_2之間，故亦在B_1與B_3之間，但B_2不能在B_3與B_4之間。

因此，與空間中點相當之範疇，本身間有一種秩序存在。由經驗又可知如是所得之秩序，可列爲一表，有三重之開始處，故空間有三度性。

五

從可知空間之特性，卽其三度性，僅爲吾人對於前所述之分佈及秩序所作之圖之屬性，故可

謂為人類智性之內在的屬性。倘將其中之若干連結，即觀念之聯合分離之，則即可得一種其他性質之分佈圖，而此則或已足使空間有四度。

對於此項結果，或有將引為詫異者。在彼等之意，以為外面之世界，必有某種目的者。倘如吾人所云之三度性之由來，則在吾人中間，將有某種能思想之物存在，雖亦同在此世上，然其種類與吾人不同，故能有度數較多或較少之空間之思想。德西昂（De Cyon）豈未曾斷定日本之田鼠，其耳內僅有二對半圓形之神經孔道，因而其所知之空間，祇有二度耶？倘如是之物，能建設一種物理學，為二度或四度者，則此物理學就某種意義上言之，豈非與吾人之物理學相同，蓋其所敍述之世界與吾人同，惟其所用語言則異耳。

事實上，倘將吾人之物理學，譯成為四度幾何學上之語言，看來似為可能者，惟如是之迻譯，必將勞力多而成功少。於此吾祇須提及海爾茲（Hertz）之力學，海氏之工作，蓋已與此相似。但以吾觀之，如是之譯本恆較原來之文字為不簡單，且恆可見其為譯本，而三度之敍述法，與吾人之世界亦最為適合。惟嚴格言之，則用其他之敍述法，亦未嘗不可將此世界描寫出之也。

在他方面，吾人所有分佈之圖，亦非純出於機遇者。警信A_1與抵禦法B_1之間有一聯合，此爲吾人智性之內在的屬性。但此種聯合何故發生耶？此則因抵禦法B_1確能抵禦危險A_1。此爲在吾人身外之事實，爲外界之一屬性。故吾人所有分佈之圖，不啻爲吾人身外諸事實之總之譯文。其所以有三度之原因，則因此與俱有某種屬性之世界相適應。此項屬性方面所重要者，則在於此世界內有自然之固體存在，其運動所服從之定律，卽爲吾人所稱爲固體運動上之定律者。三度之語言，能使吾人最簡單的敍述吾人之世界，此實爲無足異者。此語言與吾人之分佈圖全相適應。簡言之，必須此圖已固定於吾人，吾人乃能生活於此世界上。

吾前曾謂此世界上或可有能思想之動物，其分佈圖爲四度者，因而能在超空間內思想，此爲可以想像之事。但此項生物，縱生於此超空間內，是否竟能存在，能抵禦其所遇見之種種危險，此則難以確知者矣。

六

末後，倘須有若干之補充。原始的幾何學之拙劣，與數學的幾何學之精準間，存有一極顯明之不相容的對立，此原始的幾何學之來原，卽在於吾所云之『分佈之圖』。然後者之發生，實由於前者，惟亦非絕由原始的幾何學，而須藉吾人所有構成數學概念之能力之助，例如構成『類』之概念者，而在純粹之概念中，吾人亦須選擇其與原始幾何學上拙劣空間最相適合之概念用之。至於此項拙劣空間之由來，則吾於前數段中已試爲說明之，亦吾人所與其他高等動物相共同者。

吾人曾謂若干幾何上根本假設之自明性，蓋由於吾人之意向，不願與極久之習慣相決絕。此項根本假設之精確爲無限者，但吾人之習慣則殊屬於曖昧。當吾人欲思想時，吾人自須要無限精確之假設，蓋唯有如此，乃能免於矛盾。而在假設所成之各種可能的系統中，有的非吾人所意願選擇，因其不適於吾人之慣性。此項慣性雖殊曖昧難覺，其彈性之界限固仍不失也。

吾人不難見幾何學雖非經驗之科學，但仍與經驗相關而產生者。此科學所研究之空間，係吾人所創作，其法在使此空間與吾人所處於其內之世界相適應。吾人之選擇空間，以表面上似最適於吾人者爲標準，但指導此選擇者則爲吾人之經驗。因此選擇爲出於無意識者，或在吾人觀之，似

出於必然者。故或者以爲經驗使吾人不得不作此選擇，或則以爲空間係與生俱來者。觀前此所述，可知此二種意見中，何者爲其眞理，何者則其錯誤之處也。

在此種向前進之訓練中，直至構成空間爲止，何者屬於個人，何者則屬於種族耶？此固不易分別者。倘有一人於出生之後卽被遷入一與吾人所有者完全不同之世界，例如其中之物體，係按照非歐幾何學上之定律而變者，則此人對於其祖先所遺傳之空間，能擺脫至何種程度，而自創一空間？

種族所得之部分，看來似爲最重要者。惟拙劣之空間，不精確之空間槪念，高等動物所有之空間，雖多得自種族，然無限精確之空間，爲數學家所創作者，豈非得自個人之無意識的經驗者耶？此實爲難解決之爭點。吾人可舉出一事實，足以證明吾人祖先所遺傳之空間，保有某種得以形成之性。雖因光線之曲折，使魚之像較其實在之所在處爲高，但某種捉魚者，仍知如何於水中捉魚之法。此種捉魚者之法，實出於本能：已習得改變其方向本能之法，或亦可云將A_1，B_1之聯合易以A_1，B_2聯合，因經驗使其知應用第一種聯合時，無有結果可得也。

第二章　數學的定義與教學法

（一）如本章之題所示，吾必須一論一般的數學定義。但欲僅以此範圍爲限，則雖爲討論之簡單計當如是爲之，而吾實有所不能。倘對於與此相接近之問題，完全置諸不理，則吾將無法討論此範圍，故吾因必要而有時入於枝節或異途時，尙望讀者有以諒之。

所謂『良善』之定義者，其意義又何所指耶？哲學家或學者之所謂良善定義，蓋指其能適用於一切所欲作其定義之對象，且亦僅適用於此項對象者。此卽適合於邏輯上規律之定義。但在教學方面，則其事不同；所謂良善之定義者，於此係指學生所能了解之定義。

何以不求了解數學之人，竟若是其多耶？此豈非爲一種矛盾耶？數學之爲學，純以邏輯之根本原則爲基礎，例如矛盾律。故斯學可謂能構成吾人槪念力之骨骼者，其中所含，均爲思想上所必要者，倘無此，則吾人之思想將成爲不可能之事。然不能了解斯學之人仍多，且爲多數，則亦異矣！此種

人無有獨立的思想之力，此尙爲可以了解之事，然吾人所講演之論證法，彼等竟不能了解，吾人所見之煇煌光明，彼等竟一無所見，此則不能不使人驚異者矣。

然事實上，吾人固無須有考試之經驗，卽可知此輩幷非例外。故此處之問題實不易解決，然凡從事於教學者，固均當對此一致其力也。

所謂『了解某事』者，其意義又何所指？此語之意義，對於任何人均相同者耶？吾人按照次序，將每段推理法加以證驗，幷證實定理之無誤，如類似於遊戲規律方面所爲者，卽得謂之了解一定理之證法耶？倘吾人對於定義中之語言，一一均明其意義，且證知此定義內無有矛盾存在，卽可謂吾人已了解此定義耶？

對於某種之人，此或可如是。當其證實後，卽將曰：『吾已明了此矣』。但此事不能望於多數之人。除上項少數之人外，其餘者幾盡將有其他之要求：彼等不僅求知該論證內是否各段之推理法均無誤，且將問何故此種秩序較其他者爲佳。倘在彼等觀之，此項推理之順序似出於隨意，非由智性，恆將其所欲達之目的置於心目中者，則彼等卽將云不能了解之。

實則彼等所要求者爲何，其本身亦未嘗明白，其所意願，蓋無法明述之。但因此項意願未能滿足，故遂有此不定之感覺，以爲有某處不合。由此可得若何之結果耶？開始時對於陳於其前者固尙接受之，但因此項陳述僅藉一脆弱之線索，與前後相連繫，故一切均略略涉過，初未能對其記憶有若何之印象留下。因之，不久隨卽遺忘，一時之明瞭，終卽喪失無餘。當其繼續進行時，此動搖之光已不能保持，蓋定理前後相關，其所需要者，已忘之矣。如是而欲望其能了解數學，自爲不可能之事。

此其責任，亦非恆由於教師之過。學生固恆有此種要求，將論證中之線索指出，但其智性太鈍，不足以自己發見此項線索。欲使此項學生能得吾人之助，必須先明白其不能了解之原因何在。

有等人則恆提出此問題，問其效用何在。彼等必須於其環境中，日常生活中或自然界中見到數學概念之存在，乃能了解之。對於此種之人，每一字必須有一可捉摸之圖像方可。定義必須使其能發生此項圖像，而在論證時，則須每段使其見到此圖像之用處及改變。凡所授與之者，必須在此條件下乃能使其了解幷記憶之。此種人恆可發生錯覺，其所注意者不在論理的推陳出新，而僅及於數學的圖形及畫法，故往往彼等自以爲已了解，實則祇看見而已。

（二）此處所有之意向，誠有相去甚遠者矣！但吾人當糾正之，抑當深入研究之耶？倘吾人決定欲糾正其一，則其他所可維持者為何？其以純粹之邏輯為滿意者，吾人當使其明白此僅為事物之一方面耶？抑對於不如是者，當使其知其所要求者非為必要者耶？

換言之，吾人是否應將青年人精神之性質改變之？此種企圖，行將見其不可能，吾人無有仙人之點金石，可將一種金屬化為其他者，故吾人所能為者，惟有於其工作中，力求所以適應其性質。

有若干之兒童，決不能將來成為數學家，但吾人仍須授以數學。數學家本身，其性格亦不能均出於一型。吾人祇須一讀數學家之著作，卽可知具有創造力之精神，可將其分為二類：其一為純粹邏輯的學者，如魏斯德拉斯（Weierstrass）是。其他則為直覺之學者，如黎曼（Riemann）是。在吾人之學生中，亦可見有此種分別。有若干學生，喜以『解析』的方法研究問題，但其他者則好用『幾何』的方法。

欲將此種狀況改變之，將為無益之事，且此種改變是否為有意義者耶？倘能同時有邏輯的及直覺的學者，此自為佳事。不則誰敢斷定甯有魏斯德拉斯或甯有黎曼一人之為較愈耶？如是，吾人

對於此種不同性質之才能，必須均滿意之，或當樂悅之。

（三）『了解』一語之意義可不相同，故在某種人觀之爲易於了解之定義，對於他種人不必亦適用。吾人所有之定義，有能使吾人得其圖形者，亦有僅由空洞而似爲不易了解之形式所構成者，但就較高之意義言之，自爲可解，惟其中之一切實質，均經抽象之法剷去。

吾不知此處亦須舉例以爲說明否？但吾將試一爲之。分數之定義，實可爲一極端之例。在小學校中，向學生說明一分數之意義時，必須將一蘋菓或糕餅分割之，自然於思想上將其分割，不則學校之預算將不能應付矣。但在高等學校或大學中，吾人祇須云：分數爲二整數所成之系統，中間用一橫線以分離之，於是即可確定應用於此之運算法，並指出此方面之規律與適用於整數方面者同，末後并證明用分母乘分數時，所得即爲分子。此種方法，於此自可適用，蓋青年已習於事物之分割，久已明了分數之概念，且其精神已經極強的數學訓練之陶鑄，故漸有邏輯的定義之要求。但如將此種方法應用於開始習數學者，則其格格不入當如何也。

此項定義，吾人於值得嘆賞之書中亦見之，卽希爾伯（Hilbert）所著之『幾何學之基礎』

一書是。——希氏以如次之語句爲開首：『吾人設想三種不同的事物之系統，卽所謂點，直線與面者』。此項『事物』究爲何者？此非吾人所知，亦無須知之，甚至求知此項事物，當予以呵斥。吾人所當知於此者，僅以公理所告吾人者爲限，例如：二個不同之點，恆決定一直線。於此，卽有如次之附註：倘不用『決定』二字，吾人亦可謂直線經過此二點，或連結此二點，或亦可云此二點在直線上。按此定義，則『在直線上』一語，直與『決定一直線』之意義相同者。如是之書，吾固極推重之，但吾決不將其介紹給中學生。蓋吾雖介紹之，但彼必將廢然不能卒讀也。

吾所舉之例，均屬於極端之性質，教師均不致如是。但雖不用如此之事例，其所能遇見之危險，豈無與此相同者耶？

試設想中學校之一課，教師講述於學生曰；圓爲平面內一切點之軌跡，此項點均與在其內之一點相距等遠，此內點謂之圓心。好學生將此語錄入其手本，其不好者則莫知所謂。但無論好者與不好者，均未了解其意義。於是教師取一粉筆，於黑板上作一圓示之。學生對之，不禁詫異，以爲先生何不直說：圓爲一圓形，則吾輩早卽明白矣。教師之定義，自屬無誤。學生之定義，自不能有價值可言，

蓋此種定義無法用之於論證，不能使學生對其概念作一分析，而此則爲學生所當習得者。吾人必須使學生明白，其自以爲已了解者，實未嘗了解，必須使其明白其原始概念之不精確，因以發生求解及求精詳之要求。

（四）關於此諸例，容以後再論之。今祇一及二種相對立之見解，其間有極利害之衝突在。科學之歷史，可將此項對立說明於吾人。吾人讀五十年前之著作時，恆得此印象，覺其中所用之推理法，多半不夠必要之謹嚴。

彼時曾先假定，凡連續之函數，倘非經過零點，則其號不能改變，吾人今日則能證明之。彼時曾先假定，尋常之運算規律，均可適用於無理數，吾人今日亦已證明之。彼時尚有種種之假定，其中亦有不正確者、

彼時之人，蓋一以直覺爲根據。但直覺難以語乎謹嚴及正確，此則已漸爲人所知。例如按之直覺，每一曲線必有一切線，卽每一連續函數必有一引伸，但此係不確者。因之，吾人對於直覺，恆不信其能有證明之力。

此種必要之變化，何由而成耶？吾人蓋不久卽知，論證方面之謹嚴，非先於定義內作其基礎，則無由得之。

數學家所從事之對象，向未有良善之定義，因其能用感覺或想像力設想之，故以爲已經知之，實則所有者僅爲模糊之圖像，非爲精確之概念，而可用於論證者。

於是必須有邏輯家方可。在無理數方面尤須如此。

吾人所得於直覺之不定的連續性觀念，於是析成爲一系統之不等式，僅與整數相關。於是該項困難均可用定義以除去之，吾人之祖先，當其欲明述微積算法之基礎時，固嘗對之棘手者也。

今日在解析方面，吾人僅須從事於整數卽可，用及有限的或無限的整數所成之系統，以等式或不等式將此項整數連結之。

於是數學乃算術化，誠如或種人所云者矣。

(五)但數學之獲得此項謹嚴，可無所犧牲以得之耶？此則不然。凡其得於謹嚴者，就其與實際之關係言之，卽有所失。祇有與實際相離，乃能獲得完全之純粹。其全部區域，以前不免於阻礙者，今

則可無礙的通過，但此項阻礙幷未完全消滅，僅被摒至區域之邊境而已，故欲超越此境界而入於應用之範圍，則須重新打破之。

吾人對於數學概念曾有大體之觀念，而此則由各種不同之元素所合成。此項元素中，其一部分爲先天的，其他部分則由多少已被經營之經驗推得。由於直覺，吾人深信每一概念之最重要的屬性，均已爲吾人所知。今日已將由於經驗之元素盡行摒除，僅用先天的元素。屬性每用作定義，由之藉謹嚴之推論法以推得其他之屬性。此固爲極佳之事，但吾人尙須證明該項屬性，即吾人用之作定義者，確爲實物所具有，此項實物，固爲吾人之經驗所得，且前此之大體的觀念，亦本能的由之獲得者。欲證明此層，必須藉經驗之助，或求助於直覺，而如竟無法證明之，則吾人之定理固極謹嚴可靠，無如其完全無用何。

邏輯曾於其間產生偉異之結構。五十年以來，吾人見有極多之奇異的函數，就其形式觀之，殊有與常可應用之函數力求分離之勢。此項函數無有連續性，或雖連續而無有引伸等等。由邏輯之觀點上言之，此項異樣的函數且須視爲最普通者，吾人於應用上所見之函數，實爲其特例，故祇占

有極少之地位。

往時固亦有想作一種新函數之事，但其目的多爲實用。今日之想作新函數，則其目的均在指出前人所用論證法中之錯誤處，故此項函數均不能用之於其他之處。

倘教學者純以邏輯爲其方針，則必以最普通，卽最奇異之函數爲開始。於是對於初學者，必須自始卽授以茫無際涯之難事。在邏輯家視之，以爲不如是，則祗能逐步以得謹嚴也。

（十六）邏輯家自無所誤，但吾人欲輕易的與實際相分開，則有所不能。吾所謂實際者，不僅爲感覺世界上之實際，其本身固有相當之價値可言，十分之九之學生，亦均希望由吾人獲得應付此之工具，吾之意思，亦且指遠較此爲精微之實際，能造成數學構造之生命，其性質亦與邏輯不同者。

吾人之身體，由細胞所構成，細胞則由於元子。然則人身之實際已盡於此耶？個體之完整所由以成之細胞及元子之組合法，豈非亦爲一實際耶？且尙有更有味之實際存於其間耶？

一自然硏究者恆於顯微鏡下觀察一象，遂謂已能盡此動物之一切耶？

數學方面亦然。邏輯家將每一證法分解成爲若干無誤之簡單運算，實尙未能將所欲證之定

理之全部實際盡把握之。其構成此證法之完證之某事物，於是彼將茫然不知矣。

吾人對於前人所構造之建築物，固不明其建築之計劃，然不能不驚其工作之偉大，此何故耶？此種總括之概觀決不能由純粹邏輯以得之，祇能求之於直覺。

試以連續函數之概念爲例。最初所有者僅爲感覺上之圖像，如黑板上粉筆所作之線條是。此觀念漸成爲精緻，於是再進而構成一複雜的不等式所成之系統，將原來圖像之實在的內容重復表出。既得此以後，原來之粗的觀念於是即被棄去，猶之建築房屋然，建築之功既畢，則開始時所作之脚架隨即拆去，因其所予吾人之輪廓，已不再需要也。其所餘之已完成的建築物，在邏輯家觀之，自爲無可指摘者矣。倘教師不使學生一憶原來之圖像，暫將脚架一用之，則學生將何由了解此項不等式之作用，何以如是構造之耶？定義固在邏輯上無誤者，但其實在之實際，則將無由知之。

(七)因之，吾人必須回溯其已往。對於教師，欲其作不甚心願之事，自爲一難題；但須知在教學方面，教師之願意，非爲唯一之目標，其所當知者，則在如何以養成學生之精神上的能力。

按動物學者之見解，以爲動物在母體中之發展，實將其祖先在各地質時代中所經過者，於極

短時期內重演一道。人類精神之進化，似亦同此。故教師必須引導學生，經過其祖先所歷之階段，時間上自須極短，但不可將某階段超越之。就此點上言之，科學之歷史實最可引導吾人者。

吾人之祖先，自以爲已明白何爲分數，何爲連續性，何爲曲面之面積，但吾人則發見其并未明白之。吾人之學生，開始時亦自以爲已了解眞切之數學研究，了解其所明者爲何。倘吾人未曾先事解釋而猝然語之曰：『汝等尙未明白；汝等自以爲已了解者，實際上并未了解；汝等所視爲自明者，尙須爲汝等指示說明方可』。倘吾人對學生作如是之語，且以後之敍述均須藉某項假定，在學生觀之，似較之所欲證者尤爲難明，則學生之思想將如何耶？在學生之意，必將以爲數學係隨意堆積若干無用之詭辯而成。於是學生輩或將對此科學失其興趣，或則將視之爲玩物，因而入於類似希臘詭辯家之狀態，舍此無他道矣。

倘學生之精神已習於數學的推理法，經長久之訓練，已及於成熟，則學生本身將能發生疑問。而基本概念之詳述，於是將爲其所歡迎。此項詳述可引起其新疑問，因而學生漸能提出問題，如吾人之祖先之漸漸提出新問題然，以至於獲得完全之謹嚴而滿意。但僅能對一切發生疑問，此亦尙

不足，必須知何故有此疑問方可。

（八）數學教學之主要目的，在發展人類精神上之某種屬性，其中之直覺，不能謂最無價値者。數學世界與實在世界間之能保存其接觸，須賴直覺。雖純粹之數學亦可不須此實在之世界，但吾人仍須時時回溯之，俾符號與實際間之鴻溝得以溝通。實用家恆須此直覺，至於純粹之數學家，則百中無一也。

工程師之數學教育必須爲完全者。此種教育，對之何所助耶？爲其能見到事物之各種現象，且能迅速的見到之，必須如此。工程師無有時間，以與零星之事相周旋。在其所從事之複雜的物理事物方面，工程師必須能迅速的認知之，何處可用數學之工具，此工具則爲吾人所授與之者。在純粹邏輯之研究法上，理論與實用間恆有鴻溝存在，倘不將其溝通，則工程師又何能如此耶？

（九）除將來求爲工程師者以外，其中較少數者，將求爲教員。對於此種學生，自必根本上將事物陳明，故根本原則之深遠的謹嚴的智識，爲必要者。然此亦非謂可將直覺放棄，蓋如此則此種學生本身之見解先不能正確，僅知事物之一面，他日爲教師時，又何能使學生之此項性質，得以發展

耶？

對於純粹數學家，此種性質爲必要者。邏輯可用爲論證之法，直覺則用於發見。能批評的求解。此固極佳之事，但能知新創則尤佳。邏輯可使吾人知一種結合之是否無誤，但如不能在各種可能的結合中選擇其正確者，則此又何用？由於邏輯，吾人可知在此種或彼種道路上，可不致遇見障礙，但不能使吾人知何種道路可達到吾人之目標。欲達到此層，吾人必須由遠處一望該目標，此則有須於直覺。倘無直覺，則數學家將如一著作家，雖文法精熟，無如無有思想何。倘吾人將此能力壓迫之，且在學生未知其長處以前，即使其不信任之，則此能力又何能發展。此處吾必須一及書面的工作，將其重要性提出。在某種考試方面，至少在高等工業學校方面，所注重於書面的課題者，實不充分。或以爲書面的工作，可使優秀的學生無由進身，此項學生對於課題之成績極佳，一切均能了解，但不能將其所知者應用之。所謂『了解』者，其意義爲多方面的，此吾前已言之：此處所云之學生，其了解蓋僅就最初所述之意義而言，而此則既不足以養成工程師，亦不足以養成數學家者，吾前已述之矣。倘欲用考試以爲甄別，則吾甯求其就二種意義上言之，均可謂了解者。

(十)能邏輯的作推理，其術豈非已極有價值，因而數學家當特別保重之耶？吾自不敢否認之：教師須從事於此，且當自始即從事之。幾何學之淪爲下等的測量捷法，此吾所極爲扼腕者，若干德國中學教員之極端的主張，吾尤不能同意。在數學之某項範圍內，其中不發生吾所指出之困難者，吾人儘有機會，使學生練習正確之推理法。多有極長的幾何定理之連貫，其中自然須受絕對邏輯之支配者，古時之幾何學者已予吾人以楷法，迄今猶使吾人不能不遵從不離，且嘆賞之。

但在開始敍述根本原則時，吾人必須避免類於詭辯者，蓋此可使人對於生畏，且亦不必要者。吾人不能將一切均證明之，亦無法作一切之定義，故時有須用及直覺之處。問題之所在，非爲應早如此或後來方如此，或應多用直覺或少用直覺，吾人祇須適當的應用其所予吾人之假定，適當根據之以作推論即可。

(十一)欲同時實踐此諸互相矛盾之要求，其事果可能耶？倘其問題在於作一定義，則此亦將爲可能者耶？吾人對於定義，既欲其作謹嚴而簡短之方式，又欲其同時適合諸種要求，即邏輯上之不可變的規律，及吾人之意願，欲了解此新概念在全部科學中之地位，以及用直覺方法以思想之

要求，此諸者均須同時適合之，吾人究當如何耶？就多數事例而言，此為不可能者，故僅作一定義，此為不足之事，吾人必須先事預備，且證明其有理由。

此其意義何在？每一定義內含有一公理，蓋定義恆肯定其所確定之事物之存在也；此為人所恆言，而亦衆所共和者。故就純粹之邏輯言，我人必須證明定義之語言內，以及就其與久已假定之眞理言均無矛盾，此定義乃能成立。

然此尙不足。定義當為衆所共認者方可，蓋如為出於隨意者，則多數之思想家必將否認之，非先對於其所提出之種種質問予以必要之解答時，必不能得其承認也。

如李亞（Liard）所指出，數學定義多半為形式的建築物，其各都分均由簡單之概念所構成。但構成之方式可多至於千萬，何故吾人恰將此項元素作如是之結構耶？此僅出於興趣者耶？倘不然，則何以此種構合較之其他者乃多存在之理由？其所適合之要求為何？吾人何能預見其於科學之進步上將有重要之地位，可使吾人之推理法及運算法大為簡單？是否自然界中有吾人所熟知之物，適為此所確定之概念之模糊不精的圖形耶？

倘吾人對此諸問題，均已有滿意之答覆，則此產物自須有一名稱，其選擇固當一考慮之者。吾人須明白，當以何種類似性爲方針，使其他之事物，吾人已予以類似之名稱者，與今所欲作其名稱者僅有內容上之差，形式則相近，其屬性可相類，因而得相平行。

如是則一切之要求均可滿足。倘其方式充分的適當，使邏輯家認爲滿意，則已得之理由，即可使直覺的思想家稱心。倘能預先得到理由，以爲定義之準備，然後作定義，則爲更佳之事。吾人先研究若干特例，因以引出普遍之定義，此則所當爲者。

倘有須注意者如下。定義之每一部分，當使所欲確定之對象，與其他接近者相分開。吾人不僅須將所確定之對象標出，凡與此相接近而須與此相分開者，亦須表出之，且須將其分別提出，必如是，而後此定義乃可解。爲提出其分別計，可說明因何種理由，吾於作定義時用此語或彼語。

今可將一般的敍述暫且結束，進而一證吾所云之較抽象的原則，如何可應用於算術，幾何，解析及力學上。

算術

(十二)整數可不須作其定義。但整數之運算，則普通均須作之。惟以吾觀之，則學生固能應用的學習之，然不必明其意義，其理由有二：一則吾人使學生習此，未免太早，蓋此時學生對此尙無要求也；二則因此項定義在邏輯的關係上爲不能滿意者。對於加法，吾人實無有良好之定義可作，因其多所限制，且不能將一切均作其定義也。吾人如謂加法在於續再往下數去，則此非爲定義。吾人祇能自若干具體之例出發，以後卽云：此處所實行之方法，謂之加法。

然減法則異於是。吾人可邏輯的作其定義，以之爲加法之反。但吾人可以之爲開始耶？此處吾人亦祇可先舉若干例，藉以說明二種運算間之相互關係，如是則定義已先有所準備，因而可有其理由。

在乘法方面亦可如是。吾人可取一特別之問題，將若干相同之數加之，以指出此問題之解決法。於是可指出用乘法時得較敏捷的達到目的，此卽是用一種對於學生已習慣之運算法。末後，邏

輯的定義卽不難自得之矣。

除法可作爲乘法之反以得其定義。此處仍可用一例開始，此例與已知的分割之概念相關。於是可指出，用乘法時可重復獲得被除之數目。

此外倘有分數之運算法亦須一及。此處祇在乘法方面有困難可發生。最好將比例之理論先一涉及，由之卽不難推得一邏輯的定義。此理論之開始，例須先有若干定義，而欲使其不致難解，亦可先用若干例作一準備，此項例則可採之著名之 Regeldetri 之題目，且可如是整頓之，使分數發現於其中。吾人於此亦可用幾何的圖形，使學生習知比例之概念，其法或則在使學生回憶其幾何知識，而如學生倘完全未習過幾何，則可以直接之直覺爲助。如是，兼可爲後來學習幾何之預備。分數之乘法既如是作其定義後，倘須指出其能適合交換結合及分配諸定律，使此定義得以確立。於此，須使學生知道，其目的在於使此定義之得以確立。

吾人不難知幾何的圖形，於此有一重要之地位；無論就哲學而言，或就科學之歷史論之，此地位均有其理由。倘算術與幾何間完全無有連繫，則算術上祇能有整數。爲適合幾何上之要求計，算

術內必須用入其他之事物。

幾何學

在幾何研究之初，吾人遇見直線之概念。吾人可作直線之定義耶？尋常之定義，視之爲二點間之最短的道路，吾實不能滿意之。吾甯簡單的由直尺出發，先使學生知道，可將尺按其邊旋轉之，以證明其精確。由此證驗，卽已得直線之眞正的定義：直線爲旋轉之軸。以後則可使學生明白，尺之精確亦可用移動（移動尺之本身或沿一第二尺移動之）之法以證驗之，於是卽得有直線之一最重要的屬性。直線爲二點間最短的道路之屬性，實爲一定理，可精確證明之者，但此證法太難，不能於中學之教學中用之。對於中學教學，祇須將已證驗過之直尺按於一張緊之線上，以說明該定理卽可。雖僅能用極粗之試驗以爲證明，但增加公理之數量，此種困難吾人仍不當避免之。

該項公理，恆爲需要者，倘多用入之，雖可有多於必要者之虞，但此非爲不相宜之事。主要者，須使人由此項已用入之公理，作正確之結論。著名之戲劇批評家薩爾西（Sarcey）氏，恆謂戲院中

之看客，對於其開始時所要求者，恆樂意接受之但以後戲劇之進展，則須根據邏輯方可。數學方面亦然。

作圓之定義時，可由學生所已知之製圖圓規出發。所作之圖，學生必立卽信之。在時須使學生注意，圓規之二尖間之距離，當作圖時恆不變，其中之一尖係固定者，其他尖則在運動中。如是，卽不難自然的獲得圓之邏輯的定義矣。

平面之定義，其本身內含有一公理，吾人不可忽過之。吾人可取一圖畫板，使學生注意一運動的直尺，恆與此板相接，且有三種自由之餘地。於是可將一圓柱體及圓錐體與此相比較，可知一直線在其面上，祇有二種自由之餘地。再則取三個圖畫板，先使學生知道，其中每二個可相互移動，有三種自由之餘地。欲使平面與球相分別，可指出二個板倘均可與一第三者相合，則此二板間亦可相合。

恆用此項運動之法，或將引為可異。但此不僅為一草率之方法而已，亦且有甚深之哲學的意義。在哲學家觀之，幾何學係何物耶？此實為一『類』之研究。但係何種之類耶？為剛體運動之類。然

則除將剛體作運動外，又有何法作此類之定義？

對於平行線，吾人仍可用古代傳下之定義，視之爲平面內之二直線，不問如何引長終不能相遇者耶？此定義實不能用，蓋此爲消極的，不能證諸經驗者，故無法得自直接之直覺。但吾人尤須將以上之問題否定之，蓋此種定義，對於類之概念及剛體運動之研究法爲不相關者，而此項運動，則如以上所云，囿幾何學之眞正的來源也。最好先以一不變的圖形之直線的移動，作爲運動之定義，於此，圖形上之一切點，均在直線上運動。此時須指出，此種運動爲可能者，例如將一三角形，沿一直尺移動之。由此試驗，卽可推得一公理，再用入平行之概念以及著名的歐几里得之假設，卽非難事。

力學

關於速度，加速及其他運動學上的概念，吾不擬再論之，最好將其與微分之概念相連繫的表出。

但動力的概念，如力與質量則可一詳論之。

極多之青年，卒業於中學後，其所習得之力學定律，每不能將其應用於實際世界上，此吾所引爲可異者。其情形幷非由於其無能，而因其簡直未思想及之。對於此輩青年，科學之世界蓋與實際世界相隔開而無法超越之者。吾人常見衣服都麗之青年，卒業於中學校者，在車中作此想像，以爲用其身體向前推撞，卽可使車行加速，不知此恰與作用與反作用之原則相矛盾者。

倘吾人試透視學生之思想，則此亦無可異。對於此輩學生，所謂力者，其定義究如何耶？其所謂力，蓋非吾人所示之者，而係隱藏於其理解力之某一隅之物，其思想亦全爲此所支配，故其所謂力，約略如下：力係矢形之線，可用以作平行方形者。此項矢形之物，爲吾人所虛構者，幷不存在於自然界中。倘吾人先使學生知自然界中力之作用，然後再用矢形表出之，則不致有此種錯誤之觀念發生。

吾人當如何作力之定義？良善的邏輯的定義，實不能有，此吾於他處已充分說明之矣。吾人所有者僅以人類立場爲標準之定義，實建築於筋肉之感覺上。此定義太粗率，對於科學實無所用。

在教學方面，吾人可用如此之方法。欲使學生知一切種類之力，可將其各種指出之。力之種類

自極多，各種類間亦極不相同。有流體所加於其器皿壁上之壓力，有線之緊張力，有鐵條之彈力，有作用於物體之一切分子之重力，有摩擦力，有壓力及抵抗力等等。

如是所得者，祇為質的定義。吾人倘須知其測量之法，為說明此層計，吾人可先指出，如何可用其一之力以替代其他者，不致失其平衡。此項代替之法，吾人可於秤及波爾達(Borda)之雙重槓桿見其實例。於是可進而指出一種重量不僅可用其他者代之，且可用不同性質之力代之，例如博朗納(Prony)之制動量力計，可用摩擦以代重量。

如是即可獲得二力等值之概念。

力之方向，亦須作其定義。設有一力F_1，由張緊的繩之助作用於一物體上，倘可不致失其平衡代替F力，則F與F_1係等值者。如是則繩所着之點，按定義為F_1力之着點，因而亦為其等值的力F之着點。繩之方向表F_1之方向，亦即F之方向。

於是可進而一論二力大小間之比較。倘有一力，能代替二相同方向之力，則此力等於其和。吾人可以二個十格蘭姆之重量代替一個二十格蘭姆之重量為例。但此尚未為充分。吾人今已知，如

何可將方向及着點均相同的二個力比較其強弱而如方向不同，吾人亦當知其可如何作比較。爲說明計，可設想一繩，爲一重量所張緊，繞於一轆轤上，吾人於是云繩之二部之緊張相同，等於使此繩緊張之重量。

此爲吾人之定義。由此，吾人可將二繩之緊張相比較，再加以前所作之定義時，凡與此二繩同方向之力，均可比較之。吾人可指出，末後之繩之部分，對於相同之重量，其緊張恆相同，不問將轆轤之多少及分配如何改變之，如是則可使上所述者有其根據。但尚須作一補充，說明祇當轆轤不受摩擦時，乃能如此。

此諸定義既已熟知，則即可指出着點，方向及強度三者，已足確定一力，而如二力方面，此三者均相同，則此二力恆等值，可互相代替，不問其在平衡之狀態或在運動中，與其他同時生作用之力無關。

同時尚可指出，二個互相傾向之力，恆可用一合成之力代之，不問此物體係靜止的或在運動中，此合力恆相同，且與其他同時生作用之力亦不相關。

末後，尙須指出用上項方法所確定之力，能適合作用與反作用之原則。

凡此一切，均由經驗以習得之，亦祇能由經驗以習得。

倘使學生注意其日常所見而不自覺之經驗，且對之作若干簡單而選擇得當之試驗，則亦已充分。

必須有此種繞道之後，乃可進而用矢形以表力，而按吾之意見，則在以後之推理方面，仍須時時由符號退至於實際。例如力之平行方形，不難用一器具以說明之，此器具由三條繩所成，各繞於轆轤上，用重量張緊之，倘其力之方向相遇於一點，則可成爲平衡。

既得『力』之概念後，卽不難確定質量之意義。此定義須取自動力學，吾人不能用其他之方法，蓋此處之目的，在使學生明白質量與重量間之區別。於此，此定義亦須先有實驗爲之準備。有一種器具極適於此用，可以之說明質量之概念，此卽亞德吳（Atwood）之下墜器是。此外，亦可使學生回憶物體之下墜定律，按此重力之加速對於重或輕之物體係相同者，此加速係隨地理上之緯度而變。

倘以爲吾此處所提出之方法，中學校中均早已採用之，則吾自所深喜而不以爲怪者。吾亦知學校中之數學教學，就大體上言之，係良善者，且吾亦并不欲猝卽改變之，吾且將以此爲不宜。吾所願者，須有逐步之改善耳。此種教學自不可突然使其成爲動搖，如愛好時髦之心理所可造成之者。倘如是爲之，則其教育上之價値，必將大受影響。吾人須有良善而切實之邏輯，以爲教學之基礎。用實例作定義之法恆爲必要者，但此係邏輯的定義之準備，不能以之爲代替。凡在該項事例方面，其實在之邏輯的定義祇能於將來較高之研究方面始有用者，吾人可不必多引起學生向邏輯的定義之要求。

吾此處所論，當不致與吾他處所論過者相謬背。吾所批評之若干定義，有爲吾目下所介紹者。此項批評自可不變，蓋其所關之定義，僅爲暫用之性質。吾人須由之闢始，以進於較高深之研究。

第三章　數學與邏輯

引言

吾人可將數學歸納之於邏輯，不必顧及數學所固有之原則耶？關於此層，有整個之學派信其可能，因而十分努力於此，求其貫澈。此派有其自己之語言，其中并無一字，僅有符號而已。此種語言僅有若干門內漢能了解之，故門外漢對於此種『知者』之論斷，實無法明白。倘將此項論斷詳一研究，觀其是否有理由，因而可如是高唱之，要亦爲有益之事也。

欲明白以上所提問題之實質，必須作若干歷史的敘述，尤須回憶康圖氏之工作之特質。

無限之概念，其用入數學中已甚久。哲學家名此『無限』爲『形成』。數學上之無限，實爲一量，能發展以超越任何之界限。此爲一變動的量，吾人不能謂其已超越一切之界限，僅可謂其能超

越此項界限。

康圖氏曾欲將實在的無限採入於數學，即，採入一量，不僅能超越一切之界限，且已超越之。康氏所提出之問題如下：空間內之點，多於整數耶？空間內之點多於平面內者耶？等等。

於是整數之數，空間內點之數，等等，構成其所稱之超有限的基數（Transfinite Kardinal-zahl），此種基數較之尋常之基數遠為大。康圖氏又欲將此項超有限的基數相比較，彼將一無限『羣』內之元素整列後，復得其所稱為『超有限的序數』之數。對於此種數，吾不欲深論之。

有極多之數學家，追隨康圖氏之路向，提出若干相似之問題。此輩之信用超有限的數目至於此種程度，直將有限數目之理論，使其與康氏超有限的基數之理論相關。按其意見，吾人如欲真正合於邏輯的講究算術，則開始時須先一究超有限的數目之屬性，然後由其中分出一小類，即尋常之整數。是用如是之顛倒法時，即可將適用於此小類之一切定理證明（即吾人全部之數學及全部之代數），不須用邏輯以外之其他原則。

此種方法之不能為健全的心理所接受，此則極為明顯者。用如是之方法，人類精神無法作數

學之建設。吾想此方法之創始者，決無將其採用入中學教學之意。但此法究爲合於邏輯者耶？或較明白的言之，究爲正確者耶？吾則對此不能無疑也。

然應用此法之數學家，爲數亦殊不少。其所作之文內，不如尋常之數學書，公式與說明相間雜，而係完全無有說明者，於是公式乃汗牛充棟，但在彼等之意，則以爲凡非純粹邏輯上之物，均可去之而不用矣。

不幸其所得之結果，不能免於矛盾，卽所謂康圖氏之矛盾是。關於此，吾以後或將再及之。然此項矛盾，卒不能使此種方法之代表者失望，彼等仍努力於規律之改變，使已發見之矛盾消滅，但却不能確知，以後是否可有新的矛盾發生。

吾今不能不與此項過分之事作一決算。吾不希望能將其屈服，蓋彼等生息於此空氣中已久，自不易改也。吾人將其所作之論證法予以否定後，此法必會經一無甚重要之改變而重再出現，其若干之論證法，蓋已屢屢易其面目矣。故其法有如神話中之九頭蛇，其頭恆可重新生出。海爾柯勒斯（Herkules）之幸免，蓋因其九頭蛇祇有九個或十一個頭，但此處則爲數甚多，英國，德國，意大

利，及法國方面均有之，故結果不能不放棄。因之，吾除向有健全之理解力，無有偏見者伸說外，別無他道。

一

近年以來，關於純粹數學及數理哲學之著作，其中將邏輯的元素與數學的考慮相分開，且將後者分離之者，已有許多出版。柯譯拉（Couturat）之『數學原理』一書中，對於此項著作有極明晰之分析及敘述。

按柯氏之見解，新近之著作，尤其是羅素（Russell）與皮亞諾（Peano）者，已將萊比尼茲（Leibniz）派與康德（Kant）派間之爭執完全解決。羅皮二氏已證明無有先天的綜合判斷（此為康德之語，所表者為某種判斷，既不能解析的證明之，又不能歸納之於全等性，亦不能由經驗以證明之者），證明數學可完全歸納於邏輯，直覺於此為無關者。

柯氏於適才所云之書內說明此層。其在康德紀念典禮中之演詞，尤明白說明之，其措詞直使

吾以爲曾有如次之語，如吾之旁人所耳語於吾者：『吾人可見此紀念典禮乃記念康德之死者』。此項咀咒性質之判斷，吾人能同意之耶？吾以爲此係不能者，吾試說明吾所以不能之故。

二

近代數學所使吾人最注目者，爲其純粹形式之性質。希爾伯有云：『吾人設想有三種事物，卽吾人所稱爲點，直線，及平面者。吾人規定一直線爲二點所決定，倘不云此直線爲二點所決定，亦可云此直線經過二點，或此二點在直線上。』此項事物究爲何耶？吾人不僅不知之，且不當求知之。因之，吾人無須知其爲何，而如有一人，從未見過一點，一直線，一平面，此人亦可在幾何學內工作，一如吾人然。因『經過』或『在其上』二語，不能使吾人獲得何種圖形，故第一語與『爲其所定』簡直相同，而第二語則與『決定』相同。

如欲證明一定理，可不必——希望不致誤會——知道，其所欲表明者爲何。吾人直可用耶方斯 (Stanely Jevous) 所意想之思想機器，以代數學家，倘更明白的言之，則直可想出一種機器，

將公理於一端灌入時，他端卽有定理出來，猶之芝家谷（Chicago）屠宰機器然，一端將活猪裝入時，他端卽有火腿香腸等物製就送出。數學家猶之此項機器然，可不必知其所從事者爲何物。

由其幾何學之此種形式的性質，吾不欲責備希氏。由其所提出之問題，以及其之見解，希氏必作此種純粹形式之研究法。彼之意思，雖將根本公理減至於極少數，可完全計點之。換言之，在吾人精神所活動之推理法方面，其中尙有直覺之作用者，在此種活的推理法方面，吾人不易避免，無意識的將一公理或假設採入，而保存於其內。必須將一切幾何的推理法歸結之於純粹機械的公式，希氏乃能保證其目的之已達，工作之已完成。

希氏於幾何學方面所已成功者，他人欲用之於算術及解析。假如其試驗竟能成功，則康德派從此將不能不緘其口耶？仍然不致如此，蓋如吾人將數學思想全歸納之於空洞之公式，則此思想必將殘缺不全。吾人試假定，今已證明一切之定理，均可用純粹解析之法推得之，且僅須用有限數的公理之邏輯的結合，此項公理則僅建築於共認上。但哲學家仍有理由探求此項公理之來源，研究其何以此項公理適爲人所樂用。

由公理以得定理之推理法，其邏輯的改善，不能謂其已盡吾人之所事。絕對邏輯上之規律已能將全部數學構成耶？吾人固可謂奕棋者之全部藝術，可歸納之於奕棋之規律。應用得自邏輯之材料以作各種建設時，吾人須於其中作一選擇。眞正之數學家，必能作聰明而正確之選擇，蓋彼以較可靠之本能作引導，或即以不定的意識爲引導，此意識感覺有某種較深而隱藏之幾何學存在，所作之建築物，其價值僅能爲其所決定。

追求此本能之起源，研究此較深的幾何學上之可感覺而不可表出的定律，凡不欲將一切均歸納之於邏輯的哲學家，自必以此爲極有意義之問題。但吾不欲提出此觀點，不欲於此提出此問題，吾人適才所云之本能，對於學者實所必要，惟初觀之，則以爲吾人如從事於已有基礎之科學，似可不需此。其實不然。但吾可提出如次之問題討論之：吾人既得邏輯之原理後，即可將一切數學上之眞理證明——吾姑不提發明——之，無須直覺之助耶？

三

以上之問題，吾曾以否定之語答覆之（見『科學與假設』第一章）。是否因最近問世之種種著作，吾須改變此答覆耶？吾所以作否定之答覆者，蓋因完全歸納之原則，在吾觀之，一面既爲數學家所必需，他方面此原則亦爲邏輯上所無可再還元者。此原則之內容可述之如下：

『倘有一屬性，對於1已適用，今如假定其對於n已適用，而可由此以知其對於n+1亦適用，則此屬性必適用於一切之整數』。數學推理法之核心，吾於此見之。但吾之意思，非如有種人所云，以爲一切數學推理法可歸結之於此原則之應用。倘將此項推理法詳一證驗之，則可見其所應用者，倘有若干相似之原則，有相同之實質的屬性。在此類之原則內，惟有完全歸納法最爲簡單，故吾以之爲模範。

完全歸納之原則一名稱，已爲吾人所習用，實則不甚適當。其推論之方式，實爲一眞正之數學歸納法，與尋常之歸納法所不同者，在其可靠性。

四　定義與公理

對於硬板的邏輯家，此項原則之存在，不能不使其感覺困難。彼等將何以應付之耶？彼等以為完全歸納之原則，詳細言之，實非公理，亦非先天的綜合判斷，而為整數之定義。因之，此不過簡單的為一種共認而已。欲討論此點，吾人必須一論定義與公理間之關係。

先可一及柯諦拉氏所作關於數學定義之一文，發表於巴黎 Gauthier & Villars 及日內瓦 Georg 二書坊所出之雜誌 L'enseignement mathématique 內。此文內指出直接定義與由於假設之定義間之區別。

柯氏謂『由於假設之定義，不能用於一唯一之概念，而須用於一系統之概念。此項定義在於計點出某項根本之關係，此項關係係將概念連結，幷可將其一切其他之屬性推論得之。此項關係亦卽為假設……』

倘吾人先已將一切之概念，除一個而外，均作其定義，則此後者由於定義，成為一物，能適合諸假設者。

如是則某項不能證明之公理，均無異於稍改其面目之定義。有時用此種觀點時，亦殊有理由。

例如在歐几里得之假設方面，吾自身亦如是爲之。

但其他之公理，不足以完全確定距離之意義。在適合該項公理之一切量中，按定義，距離爲一種量，能適合歐氏之假設者。

從可知邏輯家對於完全歸納之原則，亦採取吾所用於歐氏之假設者，欲將此原則亦視爲稍改面目之定義。

吾人倘能先實踐二條件，則卽可如是爲之。穆勒（Stuart Mill）謂每一定義內，含有一公理，此公理無他，卽吾人用以證明所確定之物爲存在者。按此則公理不能爲稍改面目之定義，且得其反：定義爲稍改面目之公理。穆氏所謂『存在』，蓋就其實質的經驗的意義而言。故其意爲：倘吾人作圓之定義，則同時吾人卽斷定自然界中有圓形之物存在。倘用如是之方式，則其論斷實不可用。須知數學無關於實質的事物之存在。在數學方面，『存在』一語，其意義僅能爲『無有矛盾』。倘如是修正之，則穆氏之思想卽精當。當吾人確定一事物之意義時，同時吾人卽斷定，此定義內不含有何種矛盾。

如是，倘吾人有一系統之假設，并證明其間無有矛盾，則吾人即可視此項假設爲諸概念中某一概念之定義。倘吾人不能證明之，則祇可無有證明作一假定，於是所得者將爲一公理。且其狀況如是，即吾人如欲於假設內尋求定義，必重將於定義內尋得假設。

欲證明一定義之無有矛盾，多須用一實例。吾人試將一對象之例演述之，此對象則能適合定義者。試以由於假設之定義爲例。吾人欲作概念A之定義，并欲由此定義，凡適合某項假設之事物，均將爲A。倘吾人能直接證明此項假設均適用於某一事物B，則定義即得成立。於是B即爲A之一例。吾人乃能保證假設間無有矛盾，蓋已有事例，於此，諸假設已證明其同時可適用也。

但此種用實例以直接證明之法，并非恆可能者。

欲證明假設間之無有矛盾，必須將一切之定理，詳爲研究之，此項定理均由假設之前提所推得者。吾人須指出，定理中無有相矛盾者存在。倘定理之數有限，則此種直接的證法爲可能。但此種事例極少，亦無甚趣味。

如定理之數無限，則此種直接的證明即不可能。於是吾人須用該種證法，於此，吾人往往不能

不用及正所欲證之完全歸納法之原則。

因之，邏輯家所當適合之條件中，其一已爲吾人所說明。下面吾人可見到，邏輯家實未嘗能適合此種條件。

五

吾人尙須一及一第二條件。吾人之作一定義，其目的無非欲應用之。

一經確定後之語詞，以後吾人恆須應用之。用此語詞所表明之事物，其由用爲定義之假設所賦予之屬性，吾人可恆謂其有之耶？倘該語詞能保存其意義，不默然予以其他之意義，則此爲完全無問題者。但後者之事實常常發生，且不易注意及之。故吾人恆須留心此語詞於以後之展開中，如何用入之，不致於用入時夾雜原來定義外之其他意義否。

一切數學的應用方面，均有此困難。數學之概念，至爲淸晣精準。在數學家觀之，蓋無有疑問可發生者。但如將數學槪念應用於物理學時，則不再爲如是純粹之槪念，而爲一具體之事物，往往僅

為此概念之一粗形。倘吾人謂此項事物適於——至少近似的——定義，則所云者實已為一新眞理，惟有經驗可以證明之，且共認之假設所有之屬性，此新眞理不必亦能具有之也。

但在純粹數學內，吾人亦同遇此困難。

吾人作『教目』之詭異的定義後，不會再思想及之，蓋在事實上，吾人用及數目時，多不須用此定義，其義久已為吾人所知矣。當吾人以後筆下寫及『數目』一字時，其意義將與開始時所用者同。欲知此意義為何種性質，是否此語句內與彼語句內用及此時之意義相同，吾人必須注意何由用及此數目一語，以及如何將其採入二語句之內。目前吾暫不詳論之，以後當再有機會及此。

例如吾人有一語，曾明白的予以一定義A。以後用此時，輒可不自覺的假定一其他定義B於其內。此二定義所指者為同一之物，此為可能之事。但卽使如此，吾人實已論及一新眞理，將其作為一公理時，須為已證明或假定者。

以後吾人可知邏輯家之未能實踐此第二條件，亦猶其未能實踐第一條件然。

六

『數目』之定義甚多，且各不相同。即使僅將其著作者之名字一列出之，吾已覺有所不能。定義之如是其多，實不足異者。倘此項定義中有一爲可用，則新的定義將不必重再提出矣。既然每個新進之哲學家須自作一定義，則其對於前人之定義不能滿意可知，其所以不能滿意之故，則因此項定義方面，在彼觀之，均不免以所當證者爲證也。

當我閱讀討論此項文題之著作時，吾實不能禁吾之深爲不快的情緒。吾恆須預防以所當證者爲證之事，蓋吾雖不能卽見及之，但恆恐吾之注意不充分，使其得錯過也。

欲作一定義而不用一語句，此爲不可能之事。欲作一語句而不用一數字，或『幾個』一語，至少不用複數之字，此爲極困難者。但如用及此，則卽不免於危險，而可以所當證者爲證矣。

以下所論之定義，僅就其最能隱藏以所當證爲證之誤謬者一及之。

七　普遍語言

皮亞諾所發見之符號語言，在最近之研究中占有重要之地位。此種語言，不能謂其無用，但柯諦拉則過於重視之，雖皮氏本身當亦引爲詫異也。

此種語言中之最重要的元素，實爲某種代數的符號所構成，其所表者爲若干接續詞，如『假如，』『以及』，『或者』，『因而』等。此種符號頗可爲方便者。但謂可用之以革新全部之哲學，此則爲另一事矣。將符號『○』代『假如』一語後，卽能獲得一好處，爲寫作『假如』時所不能得者，此則難使人信者。

皮亞諾稱此發明爲普遍語言，此卽一種方法，可不用及吾人尋常語言中之一語，而將一數學文章寫出之。普遍語一詞，頗足表出此項書寫法之意義。自此以後，此普遍語已被視爲極有價值者，曾予以一稱號曰『邏輯字』(Logistik)。以吾觀之，此語蓋出於軍事學校。軍事學校內有所謂『邏輯司學』(Logis-Lehre)（營屯學）者，其所論爲兵站主任如何使士兵整隊屯營之法。此

處自不致相混，吾人一觀此新名稱，卽可知其用意，蓋欲重新將邏輯作一番完全之改革也。

布拉利福諦（Burali-Forti）於其所作之數學文章內，卽應用此法。此文名 Una Questione sui numeri trasfiniti，發表於 Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 之第十一卷內。

吾願立卽說明，在吾觀之，此文頗堪尋味，吾之所以舉此爲例，亦因其在用新方法所作之諸文中，此爲最有意味者。此外則此文用一種行間之意大利繙譯時，雖門外漢亦可讀之。

此文之最堪尋味者，在其將研究超有限數時所遇見的諸矛盾中之第一個例論述之，此項矛盾，固數学家若干年來所對之生疑者也。布氏謂其著作之目的，在證明能有二個超有限的序數 a 與 b，既不相等，亦不能其一較其他者爲大或小。

讀者可不必對之生畏，蓋欲了解此處之研究時，正不必知超有限數之爲何物也。

康圖所證明者適與此相反，按其所證，則二超有限的數目間，與有限數目間相同，除相等或不相等而外，無有其他之關係。關於該文之深的內容，我不欲多論之，不則必將離題太遠矣。吾祇願一

問此種形式，究能於數學之謹嚴上有所補助，因而值得著者與讀者之如是費力否。

試先一觀布氏如何用下法以作數目1之定義？

$$1 = \iota T' \{ Ko \cap (u,h) \varepsilon (u \varepsilon Un) \}$$

此種定義，除非對於該種之人，從未聽到過『一』之一語者，乃能使其得數目1之概念，而此定義為極佳。

吾實不甚了解皮亞諾之語法，不足以批評之，但吾深恐此定義內不免以所當證為證之病，蓋此式之左端為1，其右端乃有Un之一字在其內也。

布氏復由此出發，經一運算後，得一方程如下：

$$1 \varepsilon No$$

其意卽謂1為一數目。

吾人所見者既為開始諸數之定義，故可一憶柯訶拉氏之如何作0與1之定義。

符號0之意義為何？此為零屬內元素之數。此零屬又為何耶？零屬係無有元素者。

然則其法係用『零』之一語，爲符號0之定義，復用『無有』一語，以爲『零』之一語之定義，是誠以語言爲顛倒者矣。緣此，柯氏不能不將其定義作一改善如下：

$$0=\iota 1:\varphi x=1\cdot\supset\cdot 1=(x\varepsilon\varphi x)$$

用尋常之語言時，即謂零爲事物之數，此項事物能適合一種永不能適合之條件。

但所謂『永不』者，其意義豈不與『永無』相同？然則其進步何在，吾誠無法知之矣。

但吾卻欲立即說明，柯氏所作數目1之定義，似可較爲滿意，其定義如下：

『一』爲屬內元素之數，其中任何二元素係相同者。

吾謂此定義之差足滿意，蓋因其中未用及『一』之一語，以爲符號1之定義，實則吾人如追問其『二』之意義爲何，吾恐其仍須用及『一』之一語也。

八

今再一及布氏之文。吾曾指出其與康圖氏直接矛盾之處。某日亞達馬（Hadamard）來訪，

吾遂與之談及前所云之諸矛盾。

吾云：『以君觀之，布氏之推理法可免於批評耶？』

『不然，吾於他方面對康圖氏之推理法，亦無有所以攻擊之者。但布氏語及一切序數之羣，此則不合於理。』

『請原諒，彼可有此理由，蓋彼恆可設

$$\Omega = T'(No, \bar{\varepsilon} >)$$

也。

彼欲如是，又有何人能阻之。吾人用Ω表一事物時，遂可謂此事物之不存在耶？』

吾既不能確信之，自無可結果可言（此亦爲最不對者，蓋彼有理由也）。但其原因是否因吾之不善應用皮氏之語言？或者如此，但吾人所云者，則吾不信之是也。

如是，雖有普遍語言之工具在，而問題之未決如故。由之可得何種結果耶？倘其問題僅在證明『一』爲一數目，則普遍語言已足用，如欲以之解決一困難，解決一矛盾，則將無所得矣。

第四章　新邏輯

一　羅素氏之邏輯

爲欲補救其所自負之價值，不得不將邏輯作一番改變。於是產生若干種之新邏輯，而其中最可尋味者，厥爲羅素氏者。對於形式之邏輯，似不能再有新意見發表，亞里士多德已盡其事矣。然羅氏所新闢之邏輯區域，則較之古典的邏輯遠爲廣大，其所用之方法及路徑，能對於邏輯問題發表更爲本色之意見，有時亦頗能更爲正確。

亞里士多德之邏輯，實爲概念上下相整列之邏輯，其出發點爲主詞與賓詞間之關係。但羅氏則將此種概括的邏輯附屬於判斷及論證的邏輯之下。古典的三段論法：『蘇格拉第爲人，等等』，於是必須讓與假設的三段論法：『設A正確，則B亦必正確』，或『設B正確，則C亦必正確』，等等。

以吾觀之，其間實有極爲得法之意想，蓋古典的三段論法，不難歸結之於此假設的三段論法，然欲將假設的歸納之於古典的，則殊非易事。

然尚未盡於是。羅氏之判斷邏輯，實爲某項定律之研究，即接續詞『假如』，『以及』，『或者』以及否定詞『非』間之構合定律。此實爲舊邏輯之極有意義的擴大。古典的三段論法之屬性，不難轉移之於假設的三段論法，而在後者之公式內，吾人不難發見煩瑣學派之形式。古典邏輯中之重要者，均已含於其內。三段論法之理論，恆爲接續詞『假如』（或加入否定詞）之章句法。

羅氏加入其他二接續詞『以及』與『或者』後，即於邏輯上新闢一範圍。『以及』，『或者』二符號，其所服從之定律與×，＋二符號同，即服從交易結合及分配諸律。因之，按羅氏之意，『以及』所表者爲邏輯上之乘法，而『或者』則爲加法。此亦爲極可使人尋味者。

羅氏得此結論，謂一個錯誤之判斷內，不問此判斷爲何種性質者，包有一切其他正確或錯誤之判斷。按柯諦拉之見解，此結論初觀之似爲矛盾者。但吾人祇須改正過一篇不佳之博士論文，即可知羅氏所云之不誤。論文作者往往費極大之勞力以得一錯誤之方程。既得此方程後，即不難作

出許多可驚之結果，其中亦有爲正確者。

二

由此可見新邏輯之較舊邏輯，其內容之豐富爲如何，符號已有多種，可作種種之連結，其數不再爲有限。但此種擴大，吾人可稱之爲邏輯者耶？此問題實無須詳爲討論，以與羅素發生空洞的語言上之爭執。吾人不妨如其所願，予以所求者，但如發見有某項眞理，按舊時此語之意義，不能歸結之於邏輯者，至此按此語之新義，可以歸結之，則吾人亦不須驚異，蓋此新義之內容，已與舊時之意義全不相同也。

吾人採用入許多之新概念，此項概念非爲僅僅的舊概念之結合。羅氏本身亦未嘗昧於此，故不僅在第一章之開始處，在論述判斷之邏輯方面，用入新語，即在第二及第三章之首，論述概括（屬之算法）及關係之邏輯時，亦時用入之，此項新語，羅氏本身亦認爲不可說明者。然尚不止此。羅氏亦用入許多原則，認爲不能證明者。此項不能證明之原則，實即直覺之力，先

天的綜合判斷也。當吾人將其多少精確的表出，於數學文章內遇見之時，吾人視之爲直覺的。此項不能證明之原則，是否因『邏輯』一語之意義改變，如其所作『邏輯教科書』內所用者，遂致易其性質耶？此則自不然，其位置雖改，其眞正之性質固仍舊也。

三

吾人亦可將此項原則視爲稍改面目之定義耶？假如其然，則吾人須有一方法，以證明此稍改面目之定義內，無有矛盾存在。於是吾人須指出，無論推理至若干之遠，恆不致有矛盾。

吾人或可用下法以爲推理：新邏輯上之方法應用於無有矛盾之前提時，祇能得無有矛盾之結果。倘經 n 次運用後無有矛盾，則在第 $n+1$ 次時亦不致遇見。因之，不能突有一時候，忽然有矛盾開始，故可證明吾人永不致遇見矛盾。吾人果可如是推理耶？此則不能，蓋如是之方法，係應用完全歸納之原則也。此完全歸納之原則，——吾人恆須記憶之——對於吾人固尚爲未知者。

因之，吾人不能謂此公理係一稍改面目之定義，故祇有一條出路：吾人對於每一此項公理，承

認其爲直覺之一新行爲。吾相信羅氏及柯氏之意見亦如此。

於是其結果如下：構成新邏輯卽廣義的邏輯之基礎的九個不能說明的概念及二十條不能明的判斷（吾相信假如我欲詳細計數之，則尙可有更多者尋出），已假定此項概念之每一個以及每一個判斷，得自一新的，與吾人之直覺無關的行爲。吾人何故不能稱之爲實在的先天的綜合判斷耶？關於此點，各方面均所同意。但羅氏所自以爲已達到，而吾所認爲可疑者，則彼以爲有此項直覺之助後，此問題已可完全結束，故無須再從事於其他，而全部之數學，亦可無須再用入其他之新元素（卽無須再應用直覺），卽得建立之。

四

柯諦拉屢屢聲明，謂新邏輯無須與數目之觀念相關。吾今姑不欲多費時間計數其論述內所用之數學，不問其爲基數序數乃至於不定的形容詞（例如『若干』一語），共有多少。今祇舉若干例如下：

『二個或多個判斷之邏輯的乘積，爲……』

『一切之判斷，僅能有二種値，卽眞與錯是』

『二種關係之相對的乘積，仍爲一關係』

『一種關係，發生於二項之間』等等。

此種困難，有時固非爲不可繞道以避之者，但有時殊無法避免。倘無有二個項，則其間之關係爲不可思議者。倘不先注及其適爲二者，則不能對於關係有何種之直覺。蓋欲使關係成爲可解，必須有二項，亦衹須有二項方可也。

五　算術

今當一及柯氏所稱之序數論，實在爲算術之基本。柯氏先提出皮亞諾氏之五公理，按皮氏及巴杜亞 (Padoa) 之證明，蓋爲相互間無有關係者：

(一)零爲一整數。

(二)零不在整數之後。

(三)在一整數之後的數目，爲一整數（此處必須補充：每一整數之後必有一數目）。

(四)二整數後之數目如相等，則此二整數相等。

(五)第五公理卽爲完全歸納之原則。

柯氏將此項公理視爲稍改面目之定義，以爲此係由於假設之定義，其假設卽爲零『在其後』以及整數是。

但吾人前已言之，欲採用一由於假設之定義時，必先指出其中無有矛盾方可。此處果如此耶？完全不然。其證法決不能用『舉例之法』。吾人無法取出一部分之整數，例如其開首之三個，而證明其適合於定義。

今如取一數列：0，1，2，則可見其適合公理一，二，四及五。如欲使其適合公理三，則必須3亦爲一整數，因而數列0，1，2，3必須適合該項公理。但吾人可知其能適合公理一，二，四，五，公理三則要求4亦爲一整數，故0，1，2，3，4一數列須適合該項公理。如是儘可類推。

因之，如欲用若干個整數以證明此項公理，不求其證於一切整數，此爲不可能者。故吾人決不能用舉例之法以證之。

於是必須將一切可得自公理之結論證驗之，觀其是否含有矛盾。假如結論之數有限，則此爲易事，無如其數多至於無限，可構成全部數學，至少全部算術。

然則將如之何？嚴格言之，吾人或可將以上在第三下所得的推論重復述之。

但吾人已曾說明此種推論法爲完全之歸納，今所欲證者，亦適爲此完全歸納法之原則耳。

六　希爾伯氏之邏輯

今當一論希爾伯氏關於邏輯之主要著作。在海臺山之數學家大會中，希氏曾作其講演，法文譯文爲蒲德魯(Pierre Boutroux)所迻譯，見於 L'enseignement mathématique 雜誌內，另有哈斯諦（Halsted）之英譯，載於 The Monist 雜誌上。此文之思想殊爲深刻，著者於其中所追求之目標與羅氏相似，但在若干問題方面，與其前人不相同。

希氏謂『稍一詳細研究後，即可知邏輯定律之敘述內，有若干算術的基本概念，例如羣之概念，以及數目概念之一部分，已不能不用及。因之吾人落入一無可隱避之處，而爲避免矛盾計，必須部分的將邏輯上與算術上之定律，同時發展之』。

以前吾人曾見希氏所云於邏輯之原則者，如吾人尋常將其敘述之法，然亦可應用於羅素氏之邏輯。按羅氏之意見，以爲邏輯較算術在前，但希氏則以爲此項二種原則，係『同時』者。以後吾人將見有極深之區別可發見。此項區別出現時，吾人即將提出之。吾以爲一步一步的追從希氏思想之展開爲佳，故將其最重要之處按其原文復述之：

『對於吾人之研究，可先將一思想上之事物1作爲基礎』。『但吾人須知，吾人幷未因此而已假定數目之概念，蓋符號1僅爲一符號，吾人不必問其意義爲何也』。接下，希氏即謂『此事物之本身的結合，每二次，三次或多次……』。且住！至此，吾人前所云之聲明已不能適用。吾人既用入『二』，『三』，『多』諸語，則不能謂未用入數目之概念。於是有限整數之定義，未免用入太遲矣。著者之目光雖深刻，竟亦發生以所當證爲證之病。因之，希氏於該文之末，求將其缺陷彌補之。

其後希氏又採用二個簡單的思想上之事物，即1與‖是，幷研究此二事物之一切結合，以及其結合之結合，等等。吾人對此二符號，自須忘却其尋常之意義，而以無意義者視之。於是將此項結合分爲二類，即所謂『存在』與『不存在』是。開始時，此二類之分別，蓋爲隨意者。凡由肯定的判斷所得者，概屬於存在之一類，其由否定的判斷所得之結合，則屬於不存在之一類。

七

今須提出一區別，其意義至關緊要者。在羅素氏方面，其所用X表出之任意的事物，爲絕對不定者，對此未有任何之假定。但在希氏方面，則此事物爲1與‖二符號之結合。希氏以爲除已確定的事物之結合外，其他均在不可捉摸之列。此外，希氏之演述此思想，其方法頗使人覺爲可取，故吾不憚再引其數語：『在公理方面，隨意之物——代尋常邏輯中之『每個』或『一切』概念——祇能爲該項思想上之事物或其結合，就該種立場（即理論展開時所得之立場）上觀之，爲已有根據者，或當作其新定義者。故在由公理以推得結論時，吾人祇可用該種思想上之事物及其結合

以代公理內之隨意物。同時須顧及，用入或確定一新的思想上之事物時，迄今所用之公理，必將推廣其適用範圍，或須加以合宜之改變方可」。

於此，其與羅氏之見解相衝突之處已瞭然可見。按羅氏之意，x處可代入者，不僅爲已知之事物，且可爲任意者。羅氏始終保持其立場，即總括之立場。羅氏由普遍的存在之觀念出發，恆繼續使其豐富，其法在同時限制之，又予以新屬性。反之，希氏則祇認此項已知事物之結合爲可能的結合，因而（倘祇顧及其思想方式之一部分）可謂其採取漸漸擴張之立場。

八

吾人再一追求希氏觀念之展開。希氏採入二公理，係用符號的語言寫出，而如用尋常之語言，則當如下：每一量與其本身相等，應用於二個相同的量之方法，所得結果亦相同。倘如是提出之，此二公理自均爲自明者，但以如是之形式提出，不能不謂其與希氏之思想方式相背謬。按其意見，數學祇須將純粹的符號結合之，眞正之數學家，祇須用此項符號作推論，不必問其意義爲何。仿此，其

所用之公理，由希氏觀之，蓋與常人所見者不同。

按其意見，此項公理所表者爲符號＝之由於假設的定義，此符號迄今尙無有意義者。欲建立此定義，希氏必須指出此二公理不致引出矛盾。

爲此目的，希氏應用以上第三節內所論之推理法，但殊不知如此已用及完全歸納法之原則矣。

九

希氏文章之結論，殊爲可疑，吾人不再多論之。其中矛盾極多。吾人可見此作者之如何約略的感覺其所遇見之以所當證爲證之病，以及其如何無法彌補其推論中之缺陷處。

此項敘述之結果，可以如次之形式總述之：當希氏欲證明用完全歸納之公理以作整數之定義，可不致有矛盾時，其力量實已不支，一如羅氏與柯氏方面然，蓋其困難太大也。

十　幾何學

按柯氏之見解，幾何學爲一極廣大之學說，其中完全不須完全歸納之原則者。就或種程度言之，此爲的確者。吾人不能謂此原則全用不到，惟用到之處極少而已。吾人試一憶哈斯諦之『有理的幾何學』(New York, John Wiley and Sons, 1904)，係建立於希氏之原則上者。於此，其第一一四頁上初次的用及完全歸納法之原則（頁數不知是否有誤）。

如是，若干年前之幾何學曾視爲直覺所支配之區域，無可發生疑問者，今則似亦爲邏輯學家之勝利處所矣。希氏之幾何學著作之意義，及其對於吾人概念形成上之影響，實不可謂不大。

但吾人亦不可有錯覺。幾何學之基本定理爲何耶？此爲一事實，卽幾何公理內不含有矛盾是。但此點決不能無須歸納之原理而證明之。

希氏如何證明此重要之點耶？希氏之證法，蓋直接建立於解析上，簡接則建立於算術上，再簡接卽建立於歸納之原則上。

卽吾人能發見一其他之證法，仍不能不用及此原則，蓋由此項公理所可得之結論，須證明其無有矛盾者，其數實不可勝計也。

十一　結論

吾人先可由此得一結論，卽歸納之原則，不可視爲全宇宙之稍改面目的定義。

以下之三條眞理爲無可爭論者：

完全歸納之原則。

歐几里得之假設。

燐於四十四度時融化之物理定律（勒老 Le Roy 氏所提及過者）。

人恆謂此三者係稍改面目之定義。第一者爲整數之定義，第二者爲直線之定義，第三者則爲燐之定義。

對於第二者，吾可承認之，但其他二者則不能。其所以不同之理由，可以論之。

吾人已見之，一定義必須證明其無有矛盾後，乃可應用。此三者中之第一者，吾人已指出其無法證明。但對於第二者，希氏已有完全之證明，吾人亦已言之。

第三者中不含有矛盾，此則極明瞭者。但吾人能謂此定義足保證其所確定的事物之存在耶？此處，吾人已不在數學範圍，而在物理之範圍內，故所謂存在一語，其意義已不相同。此處所謂存在者，不再爲無有矛盾，而爲實有其物。

此爲於三者中作一區別之第一理由。其他之另一理由如下：當吾人於應用上用此三概念時，果視之爲其意義由以上之三語所確定者耶？

歸納原則之可能的應用，其數不勝計。試以吾人前所述者爲例，吾人欲用之以證明一系統之公理，不致引出何種矛盾。爲此目的，吾人可研究由此公理所得的結論中之一。

今如已作第n個結論，則可見尙有其一可作，此卽爲第n+1者。此處之數目n，僅用於計數一列先後施行之運用法，故可用陸續相加之法以得之。同時，吾人自亦可由此出發，經陸續之減去後，復歸於一。假如n=n−1，則卽不能，蓋如此則用減法時恆得同一之數也。因此，吾人此處用於數

目n之研究法內，實含有有限整數之定義，此定如下：有限整數爲如是之數，可用繼續相加之法以得之者，於此，永不能有n＝n－1之事發生。

在以上一列結論內，吾人所論者爲何耶？吾人證明在第n個結論方面，如無有矛盾發生，則第n＋1個方面亦不能有之，因而永不能有矛盾發生。或將謂『誠然，吾可有理由作如是之推論，蓋按定義，整數爲如是之數，可適用此項結論者』。但此處實先有一其他之定義已假定，卽如次者：整數爲如是之數，可適用反覆之推論法於其上者。就此處之例言之，則可云其爲該項數目，吾人可斷定，倘於一次數爲整數之結論方面，其無有矛盾能使在其次之結論亦無有矛盾，則凡次數爲整數之結論，均不必顧慮其有矛盾發生。

此二定義非爲相同者，二者固相等值，但祇能由先天的綜合判斷以知之，吾人無法純由邏輯，由其一轉至於其他，因之，吾人如已按第一定義之假設以用入整數，則吾人不當再用第二定義。

關於直線之假設，其與此處不同者何在？此吾已屢屢提及之，故不必再提，僅須將吾之意見作一總括便可。

此處不如前例內之二等值的定義，在邏輯上不能歸於其一者。此處所有者僅一個定義，可用語言以表之。或亦可謂吾人尙有一其他可感覺之定義，但不能說出之，蓋吾人有直線之直覺，可作其觀念也。然吾人實不能於幾何空間內作其觀念，衹能於觀念之空間內爲之，因而吾人亦可作其他事物之觀念，具有直線之一切其他屬性，惟不能適合歐几里得之假設。此項事物卽『非歐几里得之直線』，幷非無有實在之意義者，在某種意義上言之，吾人可視之爲經過球心的大圓之周（爲實在空間內之實在的圓）。吾人將前者（歐氏直線）作爲直線，而不用後者（非歐的直線），則其理由祇在於定義而已。

至於第三例，卽燐之定義，則可見其眞正之定義當如下：吾瓶中所有之一塊物質，吾稱之爲燐。

十二

吾旣適論及此對象，不妨再加一說明。關於燐之一例，吾曾於他處說過：『此定理爲一實在的可證驗的物理定律，蓋此定理所說明者，爲一切物體，除融解點而外，倘具有燐之一切屬性，則亦必

與燐相同，融解於四十四度』。因此有人反詰，以爲『不然，此定律係不能證驗者，蓋如吾人用觀察證明，有相似於燐之二物體，其一融解於四十四度，其一融解於五十度，則吾人必可保證，此二物體之相差，不僅在融解點，必尚有其他屬性上之差，無論其爲吾人所已知與否』。

但此實與吾之原意不全相同。吾之意見，實當如次表出之：一切物體，如有該項種種屬性（卽化學教科書上所述燐之屬性），但不知其融解點，則可知此項物體必融解於四十四度。

欲將直線之事例與燐之事例方面之區別更明白的提出，可再作如次之說明。以直線而論，吾人於自然界中可得有種種多少不完全之圖形，主要者如光線及剛體之旋轉軸。吾今假定吾人已證明光線之不適合歐氏之假設（例如指出一星，其視差爲負者），則吾人可由之以得何種結論？吾人將謂按照定義與光線相同之直線，不適合假設耶，抑謂直線適合假設，但光線非直線耶？

吾人自可隨意採用此或彼定義，以得此或彼結論。倘取其第一種，此爲不甚合宜者，蓋光線不僅不完全適合歐氏之假設，且不完全適合直線之其他屬性。光線不僅與歐氏直線相參差，兼與剛體之旋轉軸亦相參差，此旋轉軸固爲直線之另一不完全圖形也。且光線尚受其他之變動，故昨日

爲直之線（倘用光線爲其定義），明日可不再直，蓋某項物理的關係今已改變矣。

今如有人發見燐不融於四十四度，而融於四十三度九，則吾人將因之而謂燐既確定爲融於四十四度者，則向所視爲燐之物體，非眞爲燐耶，抑謂燐融於四十三度九，不融於四十四度耶？此處吾人亦可隨意爲之，以得一結論，但如採用第一者，似不甚宜，蓋吾人祗於融解點方面得十分之一度之精確，正不必因此而遂將物體之名稱，予以一次變動也。

十三　總結

羅氏與希氏均作有向前之進一步。其所著之書，其中極多本色的，深刻的觀點，亦有極有注意之價值者。此二書均能使吾人作深刻之思想，吾人須由之學習者甚多。其所得結果中，有若干已有根據，且有永久之價值；此項結果亦殊不少。

但如謂其已將康德與萊比尼茲間之爭執最後解決，康德之數學理論從此被否定，則此爲不對者。吾不知彼二人者，果自以爲已能達到此地步否。如其以爲然，則不能不謂其誤也。

第五章　邏輯學者之最新的著作

一

邏輯學者曾欲對於以上之考慮，作一答覆。爲此目的，彼等不能不將其邏輯學加以改革。羅氏尤將其原來之觀點，就若干點改變之。吾今不須詳論爭執之各點，僅一及吾所視爲重要之二問題即可，卽邏輯學之規律，已證明其爲有用且無誤者耶？邏輯學是否能不用直覺，以證明完全歸納法之原則耶？

二　邏輯學之無誤

關於有用一點，柯諦拉氏似頗有謬見。柯氏謂邏輯學對於數學發明，實有『爲虎傅翼』之功，

其次頁中又謂『自皮亞諾發表其 Formulaire 以來，於玆十年矣』。何者，爾等有翼以來已十年，何至今尚不能飛翔耶？

對於皮氏，吾自深尊重之，其工作實有價值（例如其關於塡滿一面的曲線之工作）。但未後皮氏未有極多之進步，不能較之無有翼之其他數學家進步特速，其所達到者，蓋猶是徒步者之流也。

以吾觀之，邏輯學對於思想者僅有牽制之累耳。邏輯學非特不能收簡易之効，且與之相去甚遠，其證明1爲數目時，須用二十七個方程，則其欲證明一定理時，不知須用若何多之方程矣。倘按懷德海（Whitehead）之法，吾人將個體X分開，再及於僅含此一項X之屬，卽所謂 ιX 者，再及於僅含此屬之屬，卽所謂 ιιX 者，如是，作此分別後，不問其如何有用，吾人遂能謂進步之獲得，從此將容易多耶？

吾人尋常所默視爲自明者，邏輯學均須吾人明白說出之。邏輯學強吾人一步一步的進行，此或可使吾人立於更確實之地，但謂其能較速，則未也。

故邏輯學者非特未予吾人以翼，且將吾人繫於兒童學步時所用之帶上。如是，吾人固可免於顚蹶，而此亦邏輯學者所有之唯一的理由也。

倘某種股票無有可觀之利息，則在謹愼之家主，至少當一斟酌其投資之額矣。

吾人對於邏輯家之規律，當盲目的遵從耶？不則祇有用直覺乃能使吾人於此項規律中作一甄別。但如是則必此項規律無有錯誤而後可。祇有時對於不能有錯誤之權威，吾人乃能盲從之。此種無有錯誤，對於邏輯家爲必要者。除非無有錯誤，不則卽不能存在。

邏輯家不能謂吾人曰：『吾們承認吾人有錯誤，但汝等亦有錯誤』。當吾人有錯誤時，誠爲不幸，爲大不幸，但邏輯家如有錯誤，則無異於自取滅亡矣。

邏輯家豈不謂算術之無有錯誤，可防止加法上之錯誤耶？運算規律爲無有錯誤者，但吾人可見應用此項規律不正確者，仍可發生錯誤。吾人校閱其運算時，卽可指出其錯誤何在。此處之問題尙不止於此。邏輯學者應用其自己之規律，但仍矛盾百出，甚至彼等自己改變其規律，而將『屬之槪念放棄』。倘此項規律果無有錯誤者，則又何爲而將其改變耶？

邏輯學者之意，以爲不須立卽將一切可能之問題盡解決之。此自非吾人所望於邏輯家者。惟彼等對於所遇之一問題如不能解決，則吾人又奚言，所不能已者，彼等對於一問題有二解決，且相矛盾則此二者中至少必有其一爲錯誤者，於是邏輯學者乃不能不失敗矣。

羅氏曾欲將此項矛盾平衡之。按其意見，吾人祇有『將屬之概念予以限制或且放棄之』。柯氏曾考慮此種企圖之結果，謂『邏輯家如於他人所失敗之處收其効，則潘加勒將憶此語而以解散邏輯學之名譽歸之矣』。

不致如此，邏輯學仍將存在，其經典已銷行四版矣。但吾人謂此經典實卽邏輯學，似更爲妥。羅氏將證明二個互相矛盾之證法中，至少其一有損於邏輯之定律耶？實係如此：羅氏將此項定律予以改變，且將其中若干取消之。假如能成功，則吾不能不尊重羅氏之直覺，但不尊重皮氏之邏輯學，何則，羅氏已宣布其死刑也，

二　矛盾之可容性

對於邏輯學者所作之整數定義，吾已提出二個主要的非難。今試一觀柯氏對此中第一個非難，如何答覆之耶？

『存在』一語，在數學中之意義爲何？吾之論斷，謂其意義爲『無有矛盾』。柯氏對此發生爭執，謂『邏輯上之存在，不能謂「無有矛盾」，而在於屬之內容不空洞。故吾人云有若干 a 存在，則其意義爲：定義規定 a 屬不爲零』。吾人用定義規定 a 屬非爲零，則其意自爲：定義規定有若干 a 存在，此爲無可疑者。但如此二規定之意義，既非爲 a 可見可觸（物理學者及自然研究者之意見如此），亦非爲可作無有矛盾的 a 之觀念（邏輯家及數學家之意見如此），則此二規定仍爲無意義者。

柯氏不以爲無有矛盾爲存在之條件，而以爲存在爲無有矛盾之條件。欲證明一屬之存在，必須先用一例，證明有屬於此屬之一個體存在。或以爲『將如何證明此個體之存在耶？豈不必先證明此存在，然後再由之以推論個體爲其部分之屬之存在耶？——不然，此論斷觀之雖極矛盾，但吾人實不能證明個體之存在。個體——適因其爲個體——恆須視爲已有，已存在者。吾人不能謂絕

對的言之，一個體爲存在者，祇能謂其存在於一屬中』。柯氏發覺其自己之論斷有矛盾，但亦非僅彼一人耳。然此論斷必得有一意義，其所述者個體之存在（此個體單獨的在世界上，吾人對之不作何種論述）。不致引起何種矛盾。個體既單獨在世界上，即不能有何人與之發生關係，此則極明瞭者。如是，吾人不妨『就純對的言之』，容納個體之存在。但吾人亦僅能就此意義上容納之。於是尙須證明其『在屬內』之存在，因而恆須證明，『此個體屬於此屬或彼屬』一語，既不與自己矛盾，亦不致與其他已假定者矛盾。

柯氏又云『謂須先證明定義內無有矛盾，然後乃可採用此定義者，此種論斷實無可取』。人之能容納矛盾，當無過於此矣。『無論如何，證法上之累，當由將此項原則視爲有矛盾者負担之。在無有反證之前，假設恆可視爲相互間無問題者，正猶被告之罪未證明時，不能謂其有罪』。

吾之不能同意於此項無有矛盾之宣告，可無須言矣。或將謂吾曰：『所求之證明既不可能，則又何能責邏輯家之摘取天上月耶』？不錯，若輩固不能證之，吾人亦否，但吾人則承認歸納原則爲先天的綜合判斷。此原則對於若輩及吾人同爲必要者。

欲證明一系統的假設之無有矛盾，必須用完全歸納之原則。此項論證之方式，幷非爲若何珍奇之事，而爲唯一的正確者。吾人之每次用之，幷非『不經見』者，吾人亦不難找出此方式之『實例及先例』。吾前已提出過二個，均得自希氏之著作。希氏幷非爲應用此法之唯一的人，其不用之者，實無有理由。吾所責於希氏者，非爲其求助於歸納原則（一個多才之數學家，不致忽略過此證法之必要，以及祇有此種爲可能者），而因其既用此證法，却不認其爲反覆之推理法。

四　第二個非難

希氏之著作內，吾已指出其第二個邏輯上之錯誤。至於今日，希氏蓋已被放逐，柯氏已不承認其爲邏輯學者矣。柯氏或將問我，在正統的邏輯家方面，是否亦發見此項錯誤。吾在所讀過之諸頁內，吾未曾發見，但吾不知其所著之數百頁書內，是否亦均無有錯誤可發見，吾實無意將其盡讀之也。

當邏輯家欲將其科學應用時，彼等必不能免於該項錯誤。數學之目的，不能僅在其自己，而當

遲早與自然發生關係，如是則決不能僅以純粹之定義及空言自足，此所可斷言者。

試仍舉希氏之例。其所從事者恆為反復之推理法，以及一系統之假設內是否有矛盾之問題。柯氏自將謂此事無甚關係，但他人既不如柯氏之公布矛盾為可容納者，則對此當能注意之也。

吾人今欲證明，經若干之推論後，可不致遇見矛盾。推論之次數，可為任意多，惟須為有限。為此目的，吾人須應用歸納之原則。但所謂有限多者，可為任意一數目，祇須按定義可應用歸納原則於其上者耶？此決不能，不則將有最不方便之結果矣。

吾人倘欲樹立一假設所成之系統，則須保證此項假設內無有矛盾方可。此為一眞理，多數之學者均承認之，而在我未讀柯氏之文以前，吾固以為任何人均同意之也。此眞理之意義為何？其意當如下耶？經有限多之推論後，吾人須能保證，不致遇見矛盾，而所謂有限多者，按定義係如是一數目，具有反復性之一切屬性者，且吾人須同意，倘一數目不能有其中之某項屬性，例如可引出矛盾，則此數目不為有限者。

換言之，吾人之意見當如下耶？吾人可保證不致有矛盾，其條件則當遇見矛盾時，吾人可同意

卽於此時中止之。此種提議之無意義，蓋不待言者。

然則希氏之推理法，蓋不僅假定歸納原則而已，且假定其不僅爲一簡單的已知定義，亦且爲先天的綜合判斷也。

簡言之：證明之法係必要者。

祇有反復證明之法，爲唯一可能者。

欲用此法，必須用入歸納原則，且不能視之爲定義，而當視之爲先天的綜合判斷。

五　康圖氏之矛盾

今當一證驗羅氏之新著作。此著作之目的，蓋欲戰勝發生於康圖氏之矛盾之諸困難；關於此項矛盾，前已屢屢提及之矣。康氏之意，以爲論無限之科學，係可以建立者。於是他人卽按其途向深入，而得種種異樣之矛盾。矛盾之數已頗不少，其最著者有

(1)布氏之矛盾，

(2)蔡干二氏之矛盾（Zermelo-könig-Sche Antinomie）。

(3)黎氏（Richard）之矛盾。

康氏曾證明序數（此處所論爲超有限的序數，此概念係彼所用入）可整列爲一線列，其意謂二個不相等之序數中，必有其一較其他爲小。但布氏則恰證明其相反者。布氏之意實在如下：倘可將一切之序數整列爲一線列，則此列亦將確定一序數，且必較之其他一切者遠爲大。於是吾人可加上1以得一序數，此序數必將更爲大，而此則即爲一矛盾矣。

以後再當論蔡干二氏之矛盾，此矛盾之性質係稍不同者。此處先一及黎氏之矛盾(見Revue générale des Sciences, 30 Juin 1905)。凡可用有限數語言以確定的一切十進數目，構成一羣E，吾人不難見此羣爲可以計點者，即其中之數目吾人不難編以號數，由1以至於無限。今設吾人已編其號數，而用下法作一數目N之定義：倘E內第n個數目之第n位爲

0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，則N之第n位當爲

1，2，3，4，5，6，7，8，1，1。吾人可見N不等於E之第n數目，而因n爲隨意者，N不能屬於E

內。但N必須屬於此羣內，因N係用有限數語言確定之者也。

以後吾人可見黎氏本身對此矛盾有一極精闢之說明。其說明經相當之改變後，可用於其他相似之矛盾上。羅氏尙有一有趣而可研究之矛盾如下：

何者爲最小之整數，吾人不能用少於一百法語之語言以作其定義者？

如是之數自爲有者。吾人可用該項語言以作其定義之數目，其數自爲有限，蓋法語方面所有語言之數，并非無限者也。因之，在該項數目內，必有其一較之其他一切數均爲小者。

他方面，亦可見此項數目不能存在，蓋其定義含有一矛盾也。此數目可用巳以否定式表出之語作其定義，此語中之語言，其數少於一百。按定義，此數目固不能用少於一百語之語言以作其定義者也。

六　曲折理論及「無屬」理論

羅氏對於此項矛盾之態度如何耶？彼將吾人前所述之矛盾作一分析，且提及其他之矛盾，於

是予以一種形式，可使吾人憶及愛璧曼尼德（Epimenides）者。末後則得如次之結論：

『一個變數之命題函數，幷不恆決定一屬』。按此則一命題函數（卽一定義）不必恆決定一屬。命題的函數，或所謂『模範』，亦可爲『非斷定的』。但吾人亦不能謂此項非斷定的定義決定一空的屬（零屬），其意當爲無有X之值，能適合此定義，同時又爲屬中之一元素。元素固係存在，但不能相結合以成一屬。

然此尙爲其開始耳。吾人尙須知如何分別一定義之爲斷定的或非斷定的。爲解決此問題，羅氏提出三種不同之理論，但未決定採取何種。此三種理論者，羅氏稱之爲：

(A)曲折理論，

(B)大小限制論，

(C)「無屬」理論。

按曲折理論，『倘定義（卽所謂名題函數）爲簡單者，則決定一屬，如爲複雜而不明者，則不能決定一屬』。但吾人將何以決定一定義之爲充分的簡單，因而爲可用者耶？對於此問題非特無

有回答，且有一公開之承認，謂此回答為不可能者，其言如下：『可使吾人用以甄別一定義是否為斷定者之規律，至為複雜，難以確立。此項缺陷，可由極大之發明才能以彌補之，亦可由採入更精細之區分以為彌補。但在尋求此項規律時，迄今除避免矛盾外，吾實無有其他之方針』。

然則此理論之為不明者，亦可知矣。在其黑暗中，吾人祇見有一線之明，此即曲折一語是也。羅氏之所謂曲折性者，無他，卽愛璧曼尼德之辯論法中所特有之特異性質耳。

在其大小限制之理論中，凡太廣之屬，無有存在之理由。此屬或可無限的推廣，但不能太為無限。

此處吾人所遇之困難恆相同，卽吾人將何以詳細判定，一屬自何時開始成為太廣耶？此困難羅氏未曾解決之，卽轉而從事於第三種之理論。

在其「無屬」理論中，吾人不許用屬之一語，故必轉輾以他語代之。邏輯學者向以屬及屬之屬為口頭禪者，至此乃不用之，其革新為何如耶？彼等於是須將邏輯學重新改建之。倘將其所著書內一頁上關於屬之語言盡畫去之，則此頁將成何體統，蓋不難見矣。於是該頁將成為一白紙，其上

除零星之數語外，不見其他。

無論如何，吾人已可見羅氏不作決定之理由何在，幷可見其對於向所承認之根本原則，已預備作若何之變動。羅氏必須用入範疇，俾吾人可用以決定一定義之是否爲太複雜或太廣，而此項範疇則僅能由直覺以建立之。

末後，羅氏之傾向，較在於採取「無屬」論。

無論如何邏輯學必須改革，但其中何者尙可挽救，此殊不易想出者也。此處所論，自僅以康圖氏之主義及邏輯學爲限，此無待言者。眞正之數學，有效用可得者，仍可按其固有之原則進行，幷不受其影響，其續續所得之進步，亦不須憂及將來之可發生問題，致須改變或放棄也。

七　正確的解決

對於此種種之理論，吾人應決定採取何種耶？以吾觀之，其答覆已見於黎氏之信內，此信吾已提及過，發表於 Revue Générale des Sciences, 30 Juin, 1905 內。黎氏既提出此矛盾後，即於

該信中發表其說明之意見。

吾人仍就前所提及過者言之。E爲可用有限多語言以作其定義的一切數目之羣，但吾人未將E羣本身之概念採入。倘無此後者之補充，則E之定義內將含有循環之論證，吾人固不能用E本身以爲E之定義也。

吾人之於數目N，固用有限多之語言以確定之，但此處係用及E羣之概念。爲此之故，N不能屬於E羣之內。

在黎氏此例內，此項論證最爲明顯，而如吾人一讀黎氏原文，則其明顯當益可見。吾人亦不難知，此項說明亦可應用於其他之矛盾。

從可知所謂非斷定的定義，實係含有循環論證者。由以上所舉諸例，不難知吾所指者何在。此豈非即羅氏所謂曲折性者耶？吾對此問題姑不作答。

八 歸納原則之證明

今試將諸家所作歸納原則之證明一驗之，尤其是懷德海與布氏所作者。
茲以懷氏之證爲開始，幷應用若干新的語法，爲羅氏最近所採入者。
所謂反復的屬者，爲含有零的數目之屬，且如該屬內有 n 一數，則亦必有 n+1 一數。
屬於一切反復屬之數目，謂之歸納的數目。
此末後之定義，在懷氏之證法內頗關重要。此定義究於何種條件下，乃能成爲『斷定的』，因而爲可用的？
按前所述，吾人對於一切反復的屬，必須將一切該項屬包含在內，其定義中與歸納數目之概念無關者。不則吾人仍不免於產生矛盾之循環的論證。
但懷氏未能注意及此。
因之，其推理法仍不免於錯誤，此項方法卽引出該項矛盾者。既得不正確之結果，則此推理法自仍不能用，且卽使偶然能得正確之結果，亦仍不能用。
含有循環論證之定義，實不能有所確定。或將謂『不問吾人定義之意義如何，至少零係屬於

歸納數目之屬者』。吾人則可答之曰：『問題并不在於該屬之是否爲空者，而在於如何可嚴格的定其界限』。所謂『非斷定的』屬，并非一空洞之屬，而爲界限無定之屬。

至於其他一般的責難，可應用於一切該項證法者，自仍其舊，并不因此而有所改變也。

九

布氏在其所著"Le Classi finite" (Atti di Torino t. XXXII) 一文內倚作有一其他之證明。其中用二個假設如下：

第一個假設謂至少恆有一無限之屬存在。

其第二個則如下：

$$n \varepsilon K(K-\iota 1) . \supset . n<\nu' n.$$

此第一個假設較之所欲證之原則，實在尤不明瞭。至於第二個假設則非但不明瞭，且懷氏已指出其錯誤，而如將此假設譯爲通用之語言時，雖初學者亦能一望而知其謬。其意義蓋如下：若干

事物所可作之結合，其數較之此項事物之數爲少。

十　蔡氏之公理

蔡氏於其著名之證法內，以如次之公理爲基礎：

『在任何一羣內（卽在羣之羣內亦可），吾人恆可隨意的將其一元素取出（卽羣之羣有無限多羣時亦可）』。此公理吾人實已用之極多，惟未加以聲明。但自聲明之後，轉使人對之發生疑問。有若干數學家，例如包萊（Borel）氏，竟完全否認之，更有若干則詫異之。羅氏於其最近之著作內，亦從事於此。

羅氏對此未有若何之結果，其所作之硏究，則頗引人注意。

吾人試用一可想像之例。今設吾人有極多雙之靴，其多與整數之多相同，因而吾人可將各雙靴編以處數，自1至於無限。吾人共有若干靴耶？靴之多，豈不與雙之多相同耶？倘每一雙內之右足的靴與左足者可分別，則自係如此。吾人祇須將第n雙之右足者予以 $2n-1$ 號數，其左足者予以

2n號即可。但如吾人不能將左右足者相區分，則此項方法即不能用，因而不能有肯定之答覆。於是吾人須用蔡氏之公理，俾每雙內可任意取其一靴，視之爲右足者。

十一　結論

凡眞正建立於解析的邏輯上之論證法，均由一列之論斷所合成。其中若干者作爲假設，係定義或全等式，其他者則由此項論斷逐漸推得之。雖其一定理爲其後定理間之關係不難直接見到，但却不易一望而知其如何由前者以至於後者，因而將其視爲一新的眞理。但如吾人將其中之名詞均代入其定義，幷繼續用此法，則最後所得者盡爲全等式，而一切均歸結爲重複之語言。因之，邏輯不能使吾人有所獲得，必須用直覺乃能充實之。

關於此層，吾曩已屢言之。邏輯學家之意見則相反，且以爲其相反之意見已經證明，實則所推論得者，爲若干新眞理而已。但彼等所用之方法如何耶？當其將吾所云之方法應用於其推理法時，即當其將定義代入其所確定之名詞中時，何故不

能如尋常之推論法方面，獲得僅僅之全等式耶？其所以不能之故，則因此項方法對於彼等實爲不能用者。何故不能用耶？因其定義爲非斷定的，故可有循環之論證在內，如吾前所述者。非斷定的定義，不能將其代入所確定之名詞處。因之，邏輯學非特無用，且恆發生矛盾。

此項非斷定的定義之發生，則原於其相信實在的無限。爲說明計，吾可提出下者：此項定義內有『一切』一語，如以前諸例內所可見者。倘吾人所論僅爲有限多之事物，則一切一語，其意義至爲明白。但如事物之數無限，則必須有實在之無限存在，一切一語乃有意義可言。不則此項一切事物，不能視爲由於定義而成爲已知者，而如一概念N之定義與一切事物A有關，則其中可含有循環之論證，蓋A中可有該項事物，必須用N概念乃可確定其義也。

形式邏輯上之規律，簡單將一切可能的分類法之屬性表出。但必須此項分類法爲不變者，且在邏輯的進展中不須改變之。乃能將其應用，倘欲將其分類之事物其數有限，則已作之分類法，不難將其保存之。但如事物之多無限，即吾人恆有此危險，能遇見新的未見過的事物，則有時此項新的事物發見時，必須使吾人將已作之分類法改變，於是即有矛盾之危險矣。

實在的無限係無有者。康圖派竟將此忘却，因而發生矛盾。康圖主義對於數學不能謂其無功，但祇當吾人將其應用於實在之問題時，此問題之各名詞均已清楚確定者，乃能有用，而可安穩的有保障的前進。

邏輯學者亦如康圖派之將此忘却，故所遇之困難相同。但吾人尙須解釋其入此歧途，係出於偶然者，抑爲不可避免者。

以吾觀之，此爲無可疑者，即，羅氏之邏輯學，實以相信實在的無限爲要素。其與希氏邏輯學之不同處，實亦在此。希氏之立場，在於一般的擴張，其目的適在避免康圖氏之矛盾。但羅氏之立場則在於包羅一切。因之，對於羅氏，類必先於種屬，而總類則先於一切。假如總類爲有限者，則此固無不可，無如其爲無限者，故羅氏必須將無限假定在有限之前，即，將無限視爲實在者。

且不僅屬爲無限者而已。倘吾人由類至於種屬，用新條件以限制其概念，則此項條件之數亦多至無限。就一般言之，其所表者爲所論之事物，對於一無限屬之一切事物有此種或彼種關係。但此已爲過去之事。羅氏已見及此危險，并求所以應付之之法。彼已開始改變一切。彼不僅用

入新原則，將前所不許用之方法重用入，且彼前所用者，今已禁止之。彼不僅將前所咀咒者復擡高之，且將其前所擡高者咀咒之，此則更使人可加以思慮。羅氏對於自己之建築物，未加以壁壘，且從而摧毀其基礎矣。

舊時之邏輯學已成過去，且曲折論與「無屬論」已開始爭執其繼承權之問題矣。至於新的邏輯學，則不妨俟其成立以後，吾人再予以批判可也。

第三卷　新力學

第一章　力學與銑

一　引言

動力學上之普遍原則，自牛頓以來向已成爲物理學之基礎者，看來似已不可動搖。吾人今須放棄之或至少須改變之耶？數年以來，此問題已屢屢提出。或以爲銑之發見，已將向來科學上之牢不可破的武斷推翻，卽金屬不可變之武斷以及力學上之根本假設是。吾人之承認新事實爲完全確定，以及推翻歷來之偶像，爲時或尚過早。吾人或須等候許多決定的試驗作過後，方能有所斷定。但將各種新理論以及其所根據之理由一研究之，則今日已有其必要，正不必因之而有所疑遲也。

試將向所視爲根本之原則者，一述如下：

（A）不受有外力的獨立質點之運動，爲直線而等速者。此卽所謂惰性之原則：無力則亦無加速。

（B）一運動的點之加速，其方向與此點所受一切力之合力者同。此加速等於此合力被一係數所除之商，此係數名爲此點之質量。

如是確定的質量，爲一常數，與點所有之速度無關。無論力之作用係與速度相平行，因而祇能使此運動加速或受阻礙，抑或力之作用係與速度相垂直，因而能使運動向左或向右改變其方向，卽，使軌道灣曲，此質量均係相同。

（C）質點所受之一切力，均由於其他質點之作用，祇與此項其他質點之位置及相對的速度有關。

將B與C二原則相結合時，吾人可得相對運動之原則，按此，一系統之運動定律，無論將此系統與固定的軸相關，或與本身在直線的等速運動中之軸相關，均相同。由於此原則，吾人無法分別

一系統之在絕對的運動中，或在相對的運動，卽對於此項運動的軸而言之運動中。

(D)倘質點A對於一其他質點B發生作用，則B對於A亦發生作用。此二相互之影響，可用二相等相反之力以量之。此卽所謂作用與反作用相等之原則，或簡稱爲反作用之原則。

天文上之觀察，以及尋常之物理現象，似均完全的，常常的，且精確的證明此項原則。但以今觀之，則可云其所以正確之故，蓋由於吾人向所從事之速度均爲極小者。例如水星爲行星中之速度最大者，但亦不過一秒鐘一百公里。假如此星之速度增加千倍，其運動亦仍將服從該項相同之定律耶？吾人之汽車，無論其能如何疾馳，但至吾人不能將舊力學上之原則應用於機器上，則其時尙早，固無須顧慮及此也。

吾人有何方法，以製造一種速度，較之水星者能大千倍，乃至可等於光速之十分之一或三分之一者，甚或與光速更相接近者耶？此可用陰極放射或銑之放射以達到之。

吾人已知銑能發出三種放射，卽稱爲α，β，γ射線者。以後如無特別聲明時，吾人所論者恆爲β射線，此項射線係與陰極放射相似者。

自陰極放射發見後，卽有二種理論相對立。按克洛克士（Crooks）之見解，此現象係由於分子之爆裂。海爾茲（Hertz）則以爲由於以太之特種的振動。如是，百年前物理學者對於光之理論之爭執，今日重復見之。克氏可謂重提光學上之放射物論，而海氏則波動論之主張者也。就事實觀之，克氏似較近是。

吾人已知陰極線帶有陰電，能被磁場或電場所灣折。此項灣折，與磁場或電場對於速度甚大且帶有強電之拋射物所能發生者相同，其所有關之量有二，一爲速度，一爲此拋射物之電量與其質量間之比。吾人既不能測定此質量之絕對值，亦不能測定電量之絕對值，所能測量者，祇爲此質量與電之比。蓋如吾人同時將質量與電均增加一倍，但不變其速度，則使拋射物灣折其軌道之力亦增加一倍。因質量亦增加一倍，故所欲觀察之量，卽加速與曲折，均無所變。將二種灣折（由電場及磁場所引起者）觀察後，可得二方程，以決定二未知數。所得之速度，約爲每秒鐘一萬至三萬公里。電與質量之比，其率甚大。吾人可將其與電解方面輕游子者相比較。於是吾人可知在陰極線方面，一拋射物所帶之電，較之電解物方面相等的質量所帶者大至於千倍。

如欲較精細的確定此觀念，吾人必須對此速度作一直接的測量，以與推算得者相較。湯姆生(J. J. Thomson)氏曩所作之試驗，其所得結果弱一百倍，其原因由於某項之錯誤所致。後經費休爾(Wiechert)氏重作若干試驗，其中係用海爾茲氏之振動者。其所得結果至少就量之等級而言係與理論相一致。如能將此項試驗重再爲之，亦殊有味。無論如何，看來振動理論難將全部事實均顧及。

將其對於β線之計算作出後，所得速度尚較爲大：大約十萬至二十萬公里，或再較大。此速度較之吾人向來所知之一切速度爲大。惟光速則每秒鐘爲三十萬公里，吾人久已知之。但在光速方面，實非爲物質之運動。陰極線方面如採用放射物之理論、則必假定有物質的分子，以上所述之速度運動，故吾人須於此研究，尋常力學上之定律，是否尚可用於此。

二　縱的與橫的質量

在電流方面，有所謂誘導現象發生，尤其是自己誘導之現象。當電流之強度增加時，則由自己

誘導產生一電磁力，其作用係與電流相反。反之，電流減少其強度時，此自己誘導所生之電磁力，其作用在使電流保持其原有之強度。故自己誘導之作用，恆與電流強度之變動相反，猶之力學上物體之惰性，恆與其速度之改變相反。自己誘導之作用，與惰性全相同。由此一切狀況，似可知苟不將其四圍之以太運動，則電流不能進展，而以太之惰性，在使電流之強度不變。欲使電流發生，吾人須制住此惰性，而欲使電流停止時，亦當如此。

陰極線為帶有陰電的抛射物之雨，故可視之為電流。初觀之，此電流似與尋常的導流不同，蓋在後者方面，物質并不運動，電通過物質而已。故陰極線為對流的流，於此，電附在物質上作運動。羅蘭(Rowland)曾指出對流的流與導流之發生磁的作用相同，故必發生相同之誘導作用。不則能力不滅之原則必將受打擊。克來米安 (Cremien) 與本德 (Pender) 曾用過一方法，使此項誘導作用直接發現。

當陰極微粒之速度改變時，其電流之強度亦即改變，而所發生之自己誘導，其作用在抵消此改變。因之，此項微粒，必有二重的惰性：一為其本身之惰性，一為由於自己誘導之假惰性，但其作用

與本身之惰性相同。如是，此項微粒有一總的質量，由其實在的質量，及由於電磁之假的質量所合成。按之計算，可知此假的質量係隨速度而變者，自己誘導所產生的惰性之力，當其速度增大或減小時，不能相同。故其全部的惰性之力，亦必如此。

因之，假的總質量，隨微粒所受的力之方向，是否與速度相平行，因而使其加速，抑或與之相垂直，因而使其方向改變，而有不同。故吾人必須分別縱的與橫的總質量。此二總質量均與速度相關。此爲由亞伯拉哈姆（Abraham）之理論研究所獲得之結果。

前已提及此處所當作之測量。由於此二種灣折之測量，吾人可得何種決定耶？一方面爲速度，他方面爲電與橫的總質量間之比。在此總質量中，吾人將何以分別實在的質量與電磁的假質量耶？倘吾人所有者僅爲陰極線，則吾人無由思想之。幸而吾人尙有鐳之放射線，且前已提及過，此項線之速度尤大。此種放射線之性質，幷不全相同，當其受電磁場之影響時，其表現亦不相同。吾人可知電的灣折，實爲磁的灣折之作用，而如將鐳線置於二種力場之下，吾人可用感光性極大之照相片攝取其曲線圖，表明此二種灣折間之關係。考夫曼（Kaufmann）曾如是爲之，以推得速度與

電與假質量之比間之關係。此比以後將用字母 ε 以表之

吾人自可假定有各種不同的放射線存在，其中每種有一定的速度，一定的電量及一定的質量。惟此種假設之或然性不大。假如質量相同之微粒，何故其速度當相同耶？較接近之假定，係謂一切抛射物之電量與實在的質均相同，其所不同者僅在於速度。即使 ε 爲速度之函數，實在的質量仍不必與速度同變。反之，即使實在的質量與此無關，而爲不變者，但吾人所能觀察之假的總質量，亦祇有此爲吾人所能觀察者，仍必與之有關，蓋假的電磁質量必與速度有關也。

亞氏之計算，可使吾人由之以知假質量隨速度而變之定律。考氏之試驗，則可使吾人知總質量之變動定律。將此二定律相較時，吾人即可知實在的質量與總質量間之比。

考氏曾用此法以求此比。其所得結果至爲可驚，即實在的質量實等於零。

於是吾人卽獲得未曾料之觀念。陰極微粒方面所證明者，業已推廣至於一切之物體。於是吾人所稱爲質量者，實在祇有其假的存在。任何一種惰性，其來源均由於電磁。如是則質量不能再爲不變者，而隨速度而變，惟對於每秒鐘一千公里以下之速度，質量在實質上可謂無所變，速度再增

加時，亦卽增加，至於光速時，卽增至無限。於是橫的質量與縱的質量不能相同，祇當速度不甚大時，乃能大體上相等。如是則力學上之原則B，不能再適用矣。

三　孔道放射線

以今日之立場言之，此種結論爲時或尙過早。吾人所得於此項微粒者，可將其應用至全部物質上耶？此項微粒僅爲物質之放射物，或者竟非實在之物質亦未可知。在討論此問題之前，吾人必須先一及另一種射線，卽戈爾司坦（Goldstein）所發見之孔道射線是。除帶有陰電之陰極線外，陰極尙能發出帶有陽電之孔道射線。此項射線就一般言之，均不會被陰極所射出，而留在陰極之近處，構成『淡色之層』，不易覩見。但如將陰極鑽以孔，則此項孔道線卽由陰極向後發出（其方向與陰極線相反）因而可供吾人之研究。如是，吾人能確定其帶有陽電，幷可指出其亦受電磁之影響而灣折，惟極爲弱。

鈾所發出之射線中，亦有與孔道線相似者，且比較的被吸收較強。吾人名之爲 α 線。

與陰極射線方面同，吾人可測量二種灣折，以決定其速度及ε。但其結果不如陰極線方面之全不變。速度與ε均較爲小，故可知比項陽的微粒所帶之電，較之陰者爲少。或如吾人作較接近之假定，謂相反之電絕對相等，則亦可云陽的微粒較之陰的爲大。此項一部分帶陽電，一部分帶陰電之微粒，謂之電子。

四　羅倫茲之理論

電子不僅存在於速度甚大之射線內而已，在其他方面，吾人亦遇見之，且吾人欲顧及光學上及電學上種種重要之現象時，亦須用及之。吾人今須提及之燦爛的建築，實由於羅倫茲之功。物質係全由電子所構成，此項電子帶有極強之電，其所以似爲無電者，蓋因陰陽電相抵之故。吾人可設想一太陽系統，由陽電子爲太陽，其中有極多之小的陰電子環繞之發生引力之作用，爲其行星，被陽電子之陽電所吸引。此項行星之陰電，與其太陽之陽電相抵消，故其代數的和等於零。

此項電子均浮動於以太之中。以太係各處相同者，其中擾動之傳佈定律，與光之振動或海爾

茲之振動（眞空內者）者相同。除以太與電子而外，無有其他。當一光源入於以太之一部分，而其中有極多之電子時，則後者受以太之擾動而發生運動，他方面則對於以太亦發生影響。折光，分光，重折，吸收等諸現象，均可如是說明之。他方面倘一電子由於某種原因而發生運動，則能擾動四圍之以太，因以發生光波。白熾物體之能發出光線，其原因亦在此。

在某種物體方面，例如金屬方面，有不運動的電子，但其間并有運動的電子流轉，除不能躍出此物體與眞空或空氣或其他非金屬物體間之相隔的面而外，其他均可自由。在金屬物體之內部，此項運動的電子之情形，猶之分子運動論上器皿內所盛氣體分子之狀況然。因位差之影響，運動的陰電子恆向一面，其運動的陽電子則恆向其他之一面。於是發生電流，故此項物體爲導體。按其與分子運動論之相似性，此項電子之速度，必因物體溫度之增高同增。倘此項運動的電子中之一，能達到金屬物體之面上，此面爲其所不能超越者，則將如一彈球之被彈回，而其速度之方向即突然改變。但如一電子之方向改變，則如吾人所已見，即成爲一光源，此所以白熾之金屬能發光。在其他物體方面，如透視的物體及所謂不良導體方面，可動的電子之運動自由極少。故其情形猶如與

吸引此者相固結。其離此愈遠，則吸引之使其退回之力亦愈大。因之，此項電子不能多離其靜止之狀態，無由作流轉之運動，祇能略略振動而已。於是此項物體即爲非導體，且大多爲透明而折光者，蓋光之振動與此項稍能振動的電子相影響，受其運動，故即發生所謂折光之擾動也。

關於其運算之詳情，此處我無法逃之。吾尙須聲明者，則此理論能將一切已知之事實均顧及，且能預言新事實，例如蔡曼(Zeeman)之現象是。

五 對於力學之結果

吾人當前所有之假設有二：

(1)陽電子有實在的質量，較其假的電磁質量遠爲大，陰電子則無有實在質量。吾人且亦可假定，除此二種電子以外，倘有中性的元子，除實在的質量外不含其他。倘如是則力學可不致再受其他之影響，吾人不須進一步的研究其定律。實在的質量爲不變者，祇有運動被自己誘導之作用所擾亂，此固吾人所久已知之者。但此項擾亂幾等於零，惟在陰電子方面則否，蓋因其無有實在的

質量，故不能視之爲屬於物質者。

（2）吾人亦可假定無有中性元子，陽電子與陰電子相同，亦無實在的質量。如是則實在的質量即成爲無有者，而質量一語或則成爲無有意義，或則所表者僅爲假的電磁質量。倘如是則質量不能再爲常數，縱的質量與橫的不能再相等，因而力學之基礎即被動搖。

爲說明計，尚有須一及者如下。吾人曾謂電量相等時，一陽電子之總質量較之陰電子者遠爲大。爲說明此差別計，吾人可假定陽電子除假的電磁質量外，尚有較多的實在的質量。倘作此種假定，則吾人即歸於第一假設。但吾人亦可假定，二種電子方面之實在質量均等於零，惟陽電子之假質量遠較爲大，因其遠較陰電子爲小。吾有意的說『遠較爲小』。用此假設則惰性純爲電磁的來源，可歸結之於以太之惰性，而所謂電子者，本身實無有其物，僅爲以太中之孔而已，其四圍之以太實被擾亂。此項孔愈小，則其四圍所有之以太愈多，故以太之惰性亦愈大。

此二種假設者，吾人將何所決定耶？吾人當學考夫曼之從事β線，以從事孔道線耶？此爲不可能者，蓋此項線之速度太小也。然則當各隨其意以決定，因而保守者向一面，喜新者又向一面耶？或

者如此，但欲眞正明瞭新派之思想，吾人尙須作其他之考慮方可。

第二章　力學與光學

一　收差

白拉德萊（(Bradley）所發見之收差現象，已爲衆所共知。由星球所發出之光，其通過望遠鏡之軸時，須經過一相當之時間，在此時間內，望遠鏡以地球之運動，在空間中已改變其位置。倘將望遠鏡對準星球之眞正方向，則當光線達到對物鏡時，其所發生之像在叉線處，但當光線達到叉線之平面時，此叉線已不在同一之處所。故欲將星球之像落於叉線時，必須將望遠鏡稍異其對準之方向。因之，天文學者不能將望遠鏡與光之絕對速度之方向相對，卽不能對準星球之眞正的處所，而當用光線對於地球之相對速度之方向，卽所謂星球之假處所。

光速爲已知者。因而或以爲吾人可計算地球之絕對速度（關於絕對一語，吾卽將再論之）。

但此係不可能者，吾人固能觀察星球之假處所，然無法知其眞處所：吾人祇知光速，但其方向則不知。

倘地球之絕對速度爲直線的等速的，則吾人無由注意及收差之現象。但其速度係變動者，係由二部分所合成：太陽系之直線的等速運動，以及地球對於太陽之變動的運動。倘祇有太陽系之速度，卽不變的部分，則所觀察之方向將爲不變者。如是所可觀察得之處所，名爲星球之假的平均處所。

倘顧及地球之二部分速度，則得星球之看似爲眞的處所，環繞假的平均處所作一橢圓，爲吾人所能觀察得之。

如將極小之量略去之，則可知此橢圓之廣袤，僅與地球對太陽之速度與光速之比有關，故僅須顧及地球對太陽之相對運動。

但須注意，此結果非爲嚴格可靠者，僅爲近似的正確，惟可將此近似性更精密之。於是橢圓之廣袤須與地球之絕對速度有關。將各星球的橢圓之大軸作一比較時，祇少於理論上吾人可有方

法以決定此絕對速度。

此事或者不如初觀時之可異。蓋所論者非爲對於眞空之速度，而係對於以太之速度，此以太固吾人所確定其爲在絕對的靜止狀態中者也。

惟此方法亦爲純理論上之事。事實上此收差爲極微者。收差橢圓之可能的變動更爲微，故如將收差視爲第一級之量，則此項變動可視爲第二級者。其大小約爲弧度秒之千分之一，非吾人之儀器所能測得。以後吾人可知此處之理論何故必須放棄，而如吾人之儀器即能精確千倍，何故仍不能測得此絕對的速度。

吾人尙可設想一其他之方法，且事實上亦已想過之。水中之光速，與空氣中者不同。吾人於是可將望遠鏡內盛以水，以觀察星球之假處所，將此與望遠鏡內盛空氣時所觀察得者相比較。但所得之結果爲負者：回光與折光之假的定律，不受地球運動之影響。此現象之說明可有二：

(1)吾人可假定以太非爲靜止，而被運動的物體所攜行者。如是則折光現象之不受地球運動之影響，爲無足怪者，蓋三稜鏡，望遠鏡，以太等一切，均在同一之方向內同時運動也。於是收差可

用一種發生於靜止的以太與動的以太之分界面上之曲折以說明之。海爾茲氏之動體電動學之理論，實建立於此假設上。

(2)弗萊士納(Fresnel)則假定以太在眞空內爲絕對靜止者，在空氣內不問空氣之速度如何大，亦爲差不多靜止者，但可部分的爲發生反折的媒介物所攜行。其後羅倫茲對此理論又予以較可滿意之形式。按羅氏之見解，以太爲靜止者，僅有電子運動於其中。在眞空中所有者僅爲以太，在空氣中，亦差不多僅有以太，故無有攜行或差不多等於零。在發生反折的媒介物內，其擾動半由於以太之振動，半由於被以太所影響的電子之振動，則波動的運動能部分的被攜行。

爲決定此二種假設，計費茶(Fizeau)曾作一試驗，以測定靜的及動的空氣中之光速，以及靜的及動的水中之光速。此項試驗所證明者爲弗氏之部分的攜行假設。其後米休爾遜(Michelson)復試驗之，所得結果亦同。於是海爾茲之理論必須放棄。

二　相對性原則

以太既不被地球之運動所攜行，則吾人可由光的現象以測得地球之絕對運動，或其對於靜止的以太之速度耶？雖試驗之結果爲負者，但吾人總願用種種方法改變試驗之條件而重爲之。但按吾之意見則吾人無論用何種方法時，所測得者恆祇爲相對的速度：即某種物體對於某種其他物體之速度。蓋如光源及其他用以觀察之器具均在地球上，參與地球之運動，則試驗的結果必恆相同，不問此項器具對於地球運動之方向如何。祇因光源爲星球，且對於觀察者爲運動的，故收差乃能爲吾人所見。

吾人倘將極小之量，其等級與收差之平方相同者，略去之，則迄今所作之假設，對於此項普遍的結果已充分顧及。其說明係以地方時間之概念爲基礎，此概念係羅氏所採入，吾試將其說明之如下。設有二觀察者，其一在A處，其他則在B處。此二人欲用光的信號以較準其錶。二人相約，當B之錶行至某點鐘時，即發一信號與A，A於收到此信號時，即將其錶按此較準之。倘僅如是爲之，則必有系統的差誤發生，蓋光線自B至A時，須經過一相當之時間t，故A之錶將較B者慢t時間。但此項差誤不難糾正之。祇須將信號交換，A亦發信號與B即可。經此新的校準後，B之錶復較A

者慢t時間。於是可取二校準之算術的平均數，則此二錶卽可一致。

但此方法須假定光線由A至B之時間係與由B至A者相同。倘觀察者本身不動，則此假定爲正確者，惟如二人作相同之直線運動，則卽不能爲正確，蓋如是則A已可在由B來之光線之前，而B則在由A來之光線之後。故如二觀察者在相同之方向內直線的進行，自己幷不知覺，則此種校準之法卽不免於差誤，其錶不能同時，祇能各代表其所在處所之地方時間。

此二觀察者無法知其錶之不一致，蓋靜止的以太祇能爲其轉達信號，其速度相同者，至觀察者所可發之其他的信號，則須由參與其運動之媒介物轉達之。其各人所觀察之現象在錶上非稍早則卽稍遲，不能在同一之時候，如無有直線運動時所當發生者。吾人用以觀察之錶旣不正確，而吾人亦不知之，則現象之發生自不受若何影響。

因之，倘將收差之平方略去之，則其抵償不難說明，而好久以來之試驗，向未有如是之精確，故不須顧及此平方。但後來米休爾遜想出一遠較爲精密之方法：米氏使經過各種路程，於鏡面上折回後之光線發生干涉。此項路程之長均約一公尺，而由此項干涉，吾人卽可測得千分之一公厘以

下之微差。於是收差之平方即不能再略去，但其結果却仍可負者。因此，吾人必須將理論修正，羅倫茲及費慈格拉（Fitz-Gerald）之假設，即爲此故。

此二物理學者作此假定，以爲一切物體在直線運動中於此方向內發生收縮，但在垂直方向內者則否。此收縮對於一切物體幾爲相同者，但亦極小，而如速度之大與地球之運動相若，則約爲二萬萬分之一。即使吾人之儀器十分精確，亦無法測得之，蓋吾人所用之尺度，亦必發生相同之收縮也，倘將物體與尺同時置於地球運動之方向內，見其完全相合，則置於其他方向內時，仍然相合，與二者之長度及方向上之變動無關，其理由則因此二者之變動係相同者。但如吾人不用尺度而用光線行經一路程時所需之時間，則其情形即不相同，米氏所爲者亦即此事。

靜止時作球形之物體，運動時即成爲橢圓體，但觀察者將仍以球形視之，蓋此人本身亦發生相似之變形也，其他所用爲相關點之一切事物亦均如此。惟光之波面則仍爲球形，故由此以觀，則將見其爲引長的橢圓體。

由此可得何種結果耶？試研究一觀察者及一光源，二者同時作直線的運動：由光源所發出之

波面，係球形者，其中心在相繼的光源所占之處所，而其一中心與某時光源所占處所之距離，係與光發出後之時間相比，即與球之半徑相比。因此，該項球係相套者。但就觀察者言之，則因收縮之關係，此項球均成爲橢圓，亦爲相套者。此項橢圓之離心率均相同，祇與地球之運動有關。吾人今選擇如是之收縮定律，使某時之光源所在處，落入橢圓正切面之焦點處。

如是則其相償爲嚴格完全者，米氏之試驗即可以此爲說明。

以前吾曾謂，倘吾人所用之儀器增加千倍之精確，則按尋常之理論，理天文上收差之觀察，可推知絕對的速度。吾今必須改變斯語。所測得之角，自將受絕對速度之影響，但吾人所用以測角之圓，亦將爲直線運動所變形，而成爲橢圓。由此，所測之角方面即有差誤，而此第二個差誤，適能與第一者相償。

羅費二氏之此種假設，初觀之似頗可異。目前祇有米氏之試驗，可爲其根據，并須用光經過一長度時所須之時間爲長度之定義。

無論如何，吾人不能不發生此印象，以相對性原理爲一普遍的自然定律，而吾人所能測之速

度，祇爲相對者。吾所謂相對速度者，不僅物體對於以太之速度而已，且亦包含物體相互間之速度。既有如是多之不相同的試驗，獲得同一之結果，則吾人自必可作此假定，對於相對性之原則多予以重要之意義，猶如對於力之等値原則然。無論如何吾人可研究由此方法可得何種結果，再將結果予以實驗上之證驗。

三　反作用原則

今試一觀，在羅氏之理論內，由作用與反作用相等之原則，可得何種結果。設有一電子A因某種原因而發生運動，於以太內引起擾動。經相當之時間後，此擾動傳達於一其他之電子B，因之而出離其平衡狀態。在此種狀況下，吾人不能謂作用與反作用相等，致少吾人不研究以太，而僅研究電子時爲然，蓋電子爲吾人所可觀察，物質固由以構成者也。

A使B出離其狀態，卽使後者對於A有反作用發生，則此反作用固可與由A發生者相等，但必不能同時發生，蓋B必須經過相當時間後，乃能運動也。倘將此問題詳一計算之，則得如下之結

果：試設想將一海爾玆氏發波器置於一拋物鏡之焦點，與之機械的相連合。此發波器發出電磁波，被鏡所反射於同一之方向，故此發波器所發出之能力，其方向爲一定者。按之計算，可知此發波器受一回擊，猶之發彈時之砲身然。在發砲方面，此回擊爲作用與反作用相等之自然的結果。砲之受回擊，因其所作用之彈對之發生反作用也。

但在電子方面，其狀況與此不同。此處所發出者非爲物質的彈，而爲能力。能力係無有質量者，不能發生反作用。吾人亦可簡單用一燈及反光器以代發波器，此反光器亦可將燈所發出之線集中於一方向內。

發波器或燈所發出之能力，遇一物質的對象時，則此對象自受一機械的打擊，猶之與實在的彈相遇然。此打擊係與發波器或燈之回擊相等，但須中途無有能力失去，且此對象能將能力全部吸收。因之，此處吾人亦可謂作用與反作用相償。但即使此項相償能爲完全者，其完成亦較在後。倘光線離光源後於星球之空間中間失去，不遇何種對象，則即不發生此項相償，而如所遇之物不能將其全部吸收，則相償亦即爲不完全者。

光之機械的作用是否太小因而吾人不能測得之，或可用實驗以得之者耶?此項作用，實際上卽係馬克思惠爾(Marxwell)與巴多利(Bartholi)所已發見者。馬氏曾藉運算之力，於靜電學及磁力學上預言之，其後巴氏則由熱力學的研究得此相同的結果。

彗量之尾，亦可如是說明之。彗星之核心方面分解出小的部分，與太陽之光相遇，被其所回擊，猶之被太陽方面所發出之彈雨所擊。此項小部分之質量甚微，故此種打擊之作用較之牛頓引力爲大。於是逐漸離日，而構成彗星之尾。

欲作一直接之證驗，此實非易事。由最初之實驗，吾人想出一種放射計。但此計之旋轉，與理論上所推得者相反，中間所獲得之說明，爲另一件事。其後一方面將眞空更精密之，一方面不再於葉之他面塗以黑，而將光束向其一面後，竟得成功。放射計之影響及其他擾亂的原因，均用極精微的方法將其消去，於是卽得一種轉動，雖極微小，但與理論相合。

無論用海爾茲或羅倫茲之理論吾人均當得此種壓力之作用。但其間尚有一區別。今設能力以某種形式，例如光，由一光源出發，經過一透明的中介物而至於一物體。馬巴二氏所得之壓力，不

僅於能力發出時作用於光源上，以及達到物體時作用於此物體上，且並作用於透明的中介物。當光波達到此中介物之一新區域時，壓力使該處之物質向前而當其離此區域時，復將其推回。故光源之回擊先影響其四圍之透明物質使其前進，稍後則此項物質之回擊又影響稍遠之透明物質使其前進，等等。

此處之相償，是否爲完全者？對於透明中介物之壓力作用，是否等於對於光源之反作用，不問此項物質之爲何耶？抑或中介物之折光愈弱，其物質之分佈愈少，則此種作用愈小，因而在眞空內爲零耶？海爾玆之理論，將以太視爲與物質相連結者，因而爲運動的物質所攜行。故如吾人決定採取此理論，則對於第一問題必須肯定之，而對於第二問題則須否定之。

如是則可有全部的相償，如作用與反作用之原則所要求者，且在折光不強之中介物方面，空氣方面以及星球間之眞空內亦然，蓋在此處，物質雖已極少，然仍有此極少者在也。

然如採用羅倫玆之理論，則相償恆爲不完全者，故空氣內即減少而在眞空內則爲零矣。

惟吾人前已見之，費茶之實驗，不能保存海氏之理論，故須採取羅氏之論而不用反作用之原

則。

四　相對原則之結果

吾人已於上文內知其理由，何故須將相對性原則視爲一普遍的自然定律。今試一觀，倘吾人將此原則視爲已確定證明者，則可得何種之結果。第一吾人須將羅費二氏之收縮假設推廣之。吾人尤須將其應用至於電子本身。按亞氏之見解，電子當爲球形而不可變形者。吾人今須假定，靜止時爲球形之電子，運動時卽被收縮，而成爲橢圓之形狀。

此項變形能影響電子之機械的屬性。前已述過，帶電的電子之軌道，在實際上爲一對流的電流，此項電子之假的惰性，由於電流之自己誘導：此於陰電子爲適用者，或亦適用於（吾人對此尙未知其詳）陽電子。電子之變形，係與速度相關，能使其面上電之分佈改變，因而亦改變及於其所產生的對流電之強度，因而又改變及自己誘導隨速度而變之定律。

如是則相償仍爲完全者，且遵照相對原則之要求，但必須在以下二假設之下：

(1)陽電子無有實在的質量，祇有假的電磁質量或即使有實在的質量，亦爲可變者，其隨速度而變之定律與假的電磁質量相同。

(2)一切的力均原於電磁，或至少按照電磁力之定律而變動。

此可注意之理論，亦由於羅倫茲，今再一論之，幷一觀由此所可得之結果。

第一所可知者則物質不再存在，蓋陽電子無有實在的質量，或至少無有實在的不變的質量。於是建立於不變的質量上之力學的普遍原則，即不能不改變。

於是一切已知之力，吾人均須求其說明於電磁，於引力尤然，或至少須將引力定律改變之，使此力一如電磁力之與速度同變。關於此層，以後再當論之。

凡此一切，初觀之似太人工化。電子變形之說，似尤爲純係一種假設。但吾人可將其情形稍改變之，避去以變形假設爲理論基礎之法。試將電子視爲質點，研究其質量如何隨速度而變，不致損傷相對性之原則。倘稍精密，則可研究電子受電場或磁場之影響時，須發生何種加速，俾此原則不致受損，且當速度甚小時，仍能得尋常之定律。吾人於是必知質量與加速須如是與速度相關，猶之

電子受羅氏之變形然。

五　考夫曼之實驗

於是吾人有二種理論：在一種理論方面，電子爲不能變形者，此係亞氏之說，在其他理論內，則電子亦受羅氏之變形。在二方面，其質量均隨速度而增加，當速度達到光速時，質量卽增至於無限，惟其與速度相關之定律，則二方面不相同。考夫曼曾想出一方法，使此種相關定律可爲吾人所見，因而吾人可有實驗之方法以決定此二種理論之是非。

不幸其開始時之實驗，不能充分精確。其後考氏復用極謹愼之法，對於所用力場之強度，尤十分注意的測量之。就其新形式觀之，實驗之結果實證實亞氏之理論。於是相對原則不能再有如是重要之意義，如吾人所賦予之者，吾人亦不能再假定陽電子與陰電子相同，係無有實在的質量者。

但在作此結論之前，吾人尙須一及其他。此問題既極重要，故有人願將考氏之實驗，由他人重再一爲之。不幸此項實驗必須極靈敏如考氏者乃能爲之，故不易有結果。但其實驗既備極謹愼，故

實不能對之再有所批評。

（附註）此文付印時，閧布赫勒（Bucherer）已另作一實驗，係用其他新的嚴密方法者，所得結果與考氏相反，證實羅氏之理論。

但有一點尙須注意：即靜電場之測量是，蓋一切均與之相關也。此場產生於一蓄電器之二發電子之間，而在其間，吾人必須作一儘量完全之眞空，使能完全隔電。於是測量此二發電子之位差，用其距離除之以得場之強度。於此，吾人實假定力場爲整齊者。此爲可靠者耶？豈不能其一發電子之附近，例如陰發電子之附近，發生突然的電位下降之事耶？金屬與無有空氣的空間之接解，可發生位差，且此差在陽的方面可與陰的方面者不同；吾之得此思想，蓋由於水銀與無空氣的空間間之電的作用。此項電位降下之不同，其發生縱爲極少可能者，但吾人仍不妨將此可能性一顧及之也。

六　惰性原則

在新動力學中，惰性原則尚爲正確者，卽隔離的電子之運動仍爲直線而等速的。至少吾人仍假定之，但林德曼（Lindemann）則對於此原則亦予以批評，因其複雜之性質，吾不於此將其提出討論，故不欲作何種決定。惟如將理論稍一改變，卽不難避免林氏之批評也。

如吾人所知，浮動於流體內之物體，受一相當之抵抗力，其原因由於流體之有黏性。在理想的完全無有黏性的流體內，物體將產生一流體的隆起於其後，如船後之水跡然。開始之時，必須費極多之力，乃能使物體運動，蓋吾人不僅須推動物體，幷須推動其後之水跡也。如已發生運動，則此運動卽能前進，不受抵抗，蓋物體前進時將水跡之流體漩渦攜行，不增加流體之動力。故物體之情形，猶之其惰性已增大然。在以太內前進之電子，其狀況亦如是：電子附近之以太將被擾動，但此項擾動隨物體而運動。因之，與電子一同前進之觀察者，將以爲隨電子之電磁場爲不變者，祇當電子之速度改變時，此項力場乃改變。故如欲電子運動，則須耗費力，蓋吾人須產生電磁場之能力也。但運動既發生之後，卽無須再耗力卽能維持，蓋所產生之力卽可與電子俱前進。因之，此項能力之影響，猶之能使電子之惰性增加然，一如理想流體內，物體之能力，似被與之同前進的流體所增加。至少

陰電子除此項惰性外，無有其他之惰性可言。

在羅倫茲之假設內，動力（此與以太之能力相向）不與速度 v 之平方 v^2 相比。但如 v 爲甚小者，則就主要者言之此方仍與 v^2 相比，運動量則與 v 相比，故二種質量爲不變而相等者。倘速度與光速相等，則動力與運動量均增加，二種質量亦增加，可超出任何種限度。

在亞氏之假設方面，其與此相當的關係，較爲複雜，惟就大體上言之，此處所論者亦仍適用。故如速度等於光速，則質量，運動量，及動力均將成爲無限。因之，無有一物體能以何種方法達到較光速尤高之速度。蓋質量之增大，其度與速度之增加同，故惰性對於速度之每一次增加，必發生一更大之抵抗。

此處吾人可發生如次之懷疑。試假定相對性原則爲適用者。如是則運動的觀察者，無法知其本身之運動。倘無有物體，其絕對運動能超出光速以上，則就其對於觀察者之相對運動而言亦必如此。於是吾人可作如次之推論：觀察者之速度，可達於二十萬公里，物體之速度，對於此觀察者而言亦可達到此速度，如是則其絕對速度將爲四十萬公里，而此則不可能者，蓋此速度已超出光速

矣。惟此種矛盾實僅爲假者，蓋如吾人一顧及羅氏之如何計算地方時間，則此矛盾卽不存在也。

七　加速波

當電子運動時，其四圍之以太內發生一種擾動。倘此運動爲直線而等速的，則此擾動卽成爲一水跡，如前所言者。然如運動爲曲線而不等速者，則其情形卽不相同。此時之擾動可視爲二種其他擾動之相疊，卽朗格文 (Langevin) 所稱爲加速波與速度波者是。

所謂速度波者，亦卽等速運動方面所發生之水跡是。

加速波係與光波全相似之擾動。當電子發生加速時，此波卽發出，以光速作球形的相繼的波形四向傳佈。

由此卽得如下之結果：在直線等速運動方面，能力可完全保存，但如發生加速時，卽有能力失去，蓋此項力以光之形式分散，而失去於無限之以太內也。

惟此種加速波之作用，尤其是其能力之損失，在多數之事例內均可略去，卽不僅在尋常之力

學及天體運動方面可略去，即在銑線方面亦可如此，蓋此處之速度雖甚大，但加速幷不大也。故當應用力學之定律時，吾人祇須顧及，力等於質量乘加速之積，此質量按上述之定律與速度同變。吾人於是稱此運動爲準平穩的。

在加速甚大之處，此即不能充分。於是須用以下諸原則：

(1)在發光的氣體方面，某種電子作振動的運動，其振動數極大，其軌道極短，速度有限，加速則甚大。能力能傳與以太，故氣體能發光，其週期與電子振動之週期相一致。

(2)反之，一氣體受光時，則此項電子由於極強之加速而運動，故能吸收光線。

(3)在海爾茲氏之發波器方面，器之金屬部分內流轉的電子當放電時受突然的加速，故發生亦數極多之振動。由此，一部分的能力，以海氏波之形式放射出去。

(4)在白熾的金屬方面，其中之電子，以極大之速度運動。當其達到金屬之面時，因不能透過而被折回，故受一相當的加速。故金屬即發光。關於此層，吾於第四節內已論及之矣。黑體力面光之散發定律之詳情，可用此假設完全說明。

（5）當陰極線與對陰極之物相遇時，速度甚大構成此項線之陰電子，突被障阻。由此所得之加速，於以太內產生波動，按若干物理學者之見解，此即爲X光線之來源。故X光線亦即爲波長極短之光線而已。

第三章　新力學與天文學

一　萬有引力

質量之定義可有二：其一爲力被加速所除之商（物體之惰性由以測之），其他爲物體對於在其外之物體按牛頓之定律所施之引力。因之，吾人須區分：作爲惰性係數之質量及作爲引力係數之質量。按之牛頓定律，此二係數爲絕對相比者。所已證明者，爲適用動力學上普遍原則之速度。吾人前已見之，作爲惰性係數之質量，係隨速度而增加。吾人當由之作一推論，謂作爲引力係數之質量亦與速度俱增，因而仍與惰性係數相比，抑或此引力係數爲不變者耶？對於此問題，吾人尚無法以決定之。

倘引力係數與速度相關，則其與互相吸引且速度不等的二物體之速度，其相關又何如耶？

關於此點，吾人祇能作若干假設，但吾人自須研究何種假設係與相對原則可融洽者。此類假設之數甚多，其中有一種，吾願略一述之，卽羅倫茲之假設是。

試先一觀靜止時之電子。二個符號相同之電子，互相排斥，符號不相同者則相吸引。在尋常之理論上，其相互間之作用，係與其電量相比。倘吾人有四個電子，二個爲陽者，A與A′，二個爲陰者B與B′，幷設其電量爲絕對相同者，則在相同之距離內，A與A′間之相斥，等於B與B′間者，且等於A與B′間或A′與B間之引力。故如A與B，A′與B′間相隔甚近，而硏究A＋B一系統對於A′＋B′一系統之作用，則可得二相斥及二相引，恰恰相償，故其總作用等於零。

物質的分子，吾人須將其視爲構成一太陽系者，其中之陽電子與陰電子作其軌道，且系統內諸電量之代數的和數等於零。故一物質的分子，就任何一方面言之，均可與A＋B之系統相比較，而二分子間之電的總作用，必等於零。

然按之經驗，則此項分子間係有適用牛頓定律之引力者。因之，吾人可作如下之二假設：其一，吾人可假定萬有引力與靜電引力間無有關係，萬有引力之來源爲另一種，但此二種引力可簡單

的相疊。其他，則吾人可假定電量間之引力，無有相比性者，其由電量+1對於電量−1所施之引力，大於二相同電量間之相斥力。

換言之：由陽電子所發生之力場，及由陰電子所發生之力場，可以相疊，但仍完全分開。陽電子對於陰電子所產生之場，較之對於陽電子所產生之場為能感受，反之，陰電子之情形亦然。用如是之假設時，靜電學將大為複雜，但萬有引力則可列於其下。此實為弗蘭克林（Franklin）之假設。

倘電子運動，則其情形如何？陽電子將於以太內發生一擾動，因之產生一電場及磁場。陰電子亦然。由於此項力場之作用，陽電子與陰電子均將受力學的推動。由陽電子之運動所產生的電磁場，按之尋常的理論，對於電量相同而符號不同的二電子所施之作用相等相反。故吾人不能區分陽電子所產與陰電子所產之電場，祇能研究此二種電場之代數的和數，即其總合之電場是。

在新的理論內，陽電子所產之電磁場對於陽電子之作用，係按照尋常之定律者，陰電子所產生者對於陰電子亦然。但如一究陽電子所產生的場對於陰電子之作用（或反之），則其定律雖相同，但其係數已不同。每一電子，對於同性電所產生之場不能如對於異性電所產生之場之易於

感受。

此爲羅氏之假設。在小的速度方面，此假設可歸爲弗氏之假設，而仍與牛頓定律相容。因萬有引力可如是歸結於電動來源的力。故羅氏之一般的理論仍可適用，而相對性原則亦不致受損。

如吾人所知，牛頓定律對於大的速度不能應用，在動體方面須如是修改之，猶之靜電方面定律之於動電然。

在空間內電磁的擾動之傳播，其速度與光速同，此爲吾人所知者。然按拉不拉司（Laplace）之計算，萬有引力之傳播速度，至少較光速大千萬倍，故不能爲動電的來源，而吾人亦不能採用此理論。拉氏之結果，久已爲人所知，但其眞正之意義，則知者尙少。拉氏由此假設出發，以爲萬有引力之傳播，非爲頓時者，而與被吸引之物體之速度如是相合，猶之天文上收差方面之光，故發生作用之力，不落於二物體之連結線內，而與之有極小之角度。此爲極特別而未有根據之假設，與羅氏之假設全不相同。故拉氏之結果，不能引以反對羅氏之理論。

二　與天文觀察之比較

以上之諸理論，均能與天文上之觀察相容耶？倘如是假定之，則行星運動之能力，無論如何爲加速波之作用所分散。由之可知星球之平均運動，恆受此項加速，猶之在有抵抗的中介物內運動然。但此種作用極爲微弱，卽最精密之觀察亦無由測得之。此項天體之加速，亦極爲弱，故加速波之作用可以略去，運動可視爲準平穩的。惟加速波之作用亦漸漸積聚，故雖極遲緩，但吾人如有數千年不斷的觀察，則亦能見之。

故吾人可如是作其計算，猶之運動爲準平穩者然，且以如次之三種假設計算之：

(A)由亞氏之假設出發（電子爲不變形者），牛頓定律以可用之形式保存之。

(B)由羅氏之假設出發（電子可變形），將尋常的牛頓定律保存之。

(C)由羅氏之電子假設出發，將牛頓定律如是改變之，如吾人前所爲者，因而使其可與相對原則相容。

在水星之運動方面，此項作用必爲最易見者，蓋在諸行星中，水星之速度最大也。諦塞朗（Tisserand）曾於韋伯（Weber）定律下作過相似之計算。韋伯氏當時蓋欲將靜電的與動電的現象，同時用一假設說明之，卽電子（彼時此名稱尙未用入）間之互相吸引及排斥，其方向在其連結線內，其量不僅與其間之距離有關，且與此距離之第一二次微分，卽速度與加速有關。韋氏此律與今日所爭執之重要定律殊不相同，惟與之有相似處。

倘牛頓引力與韋氏定律相適合，則按諦氏之計算，在水星之近日點方面將有14″之微變。事實上，吾人曾觀察得此項微變，向所視爲不能解釋，惟較此稍大，爲38″。

今再退而論以上之三假設，先研究一行星之運動，此星受一固定的中心點之吸引。如是則B與C二假設無有區別，蓋如吸引點爲固定者，則其所產生之場，爲純粹的靜電場，其中之吸引力與距離之平方相關，與之成反比，如柯龍（Coulomb）之靜電定律所要求者，蓋在此處，此定律與牛頓定律實爲相同者。

動力之方程，倘用動力之新定義時，仍可適用。面之方程，亦可用一等値的方程代之：運動量之

能率爲不變者，但運動量必須如是作其定義，如新動力學上所當有者。

吾人所僅可觀察得之作用，爲近日點之漸漸的移動。用羅氏之理論時，吾人可得韋伯定律之結果之半，而用亞氏理論時，則可得其五分之二。

如是，由羅氏之理論，水星近日點之移動爲7″，而由亞氏之理論，則爲5″.6。試研究繞共同重心而運動之二物體，則其作用相差卽少，惟計算上較爲複雜。

此外則此作用係與 n^3a^2 相比者，於此，n 爲星球之平均運動，a 爲其軌道之半徑。按之開柏萊(Kepler)之定律，卽可知此作用係與 $\sqrt{a^5}$ 成反比，故除水星方面外，此爲不易見者。

對於月球，雖 n 甚大，但 a 甚小，故此亦不易見。在金星方面，較之水星小五倍，月球則小百倍。此外，在金星及地球方面，近日點之移動（就此運動之相同的角速度），尤不易用天文的觀察以確定之，蓋此諸行星軌道之離心率，較水星者遠爲小。

將此諸考慮及計算綜合之，可得如次之結果：天文觀察上唯一可見的作用，在於水星近日點之移動，此項移動事實上已經觀察到，向未有說明，惟茲則大小不合。

此項結果自不能謂其有利於新動力學，蓋吾人對於此項移動之大部分，尙須求其解，惟此結果自更不能謂其無利於新動力學，此則無庸言者。

三　來沙其之理論

吾人或可將此研究與久已提過之理論相聯合，此理論之目的，亦欲說明萬有引力。試假定在星球之空間內，有極微小的物粒向各方以極大之速度流轉。在空間內孤立的物體，自不致受此項物粒的撞擊之影響，蓋此項撞擊係平均的分配於各方向內。但如有二物體A與B，則B之作用可如一傘，本將與A相撞之物粒，有一部分將爲其所蔽。如是則與B相背的A之部分所受之撞擊，即無抵抗，故不能完全相償，而可使A向B。

此爲來沙其 (Lesage) 之理論。吾人可先以尋常力學之立場一討論之。理論所要求的撞擊，其狀況當如何耶？當按完全彈性的物體之定律，按無彈性的物體之定律，抑按照一折衷的定律耶？來氏之物粒，不能與完全彈性的物體有同一之狀況。不則其作用將成爲零，蓋如是則爲物體B所

蔽之物粒可爲其他者所代，即B所擊回者，按之計算，於是可有完全的相償。

此項物粒必將因撞擊而失去能力，但此能力必以熱之形式重復發見。如是所生之熱量當如何大？吾人須知引力能穿透物體發生作用，故如以地球而論，吾人不能將其整個的作爲一傘，而須將其視爲由極多之極小球形分子所成，其每個猶如一小傘發生作用，但來氏之物粒可轉動於其間。故就全體言之，地球非爲一傘，且不能將其與篩子相較，蓋此處之孔，較之篩子方面尤多也。

拉不拉司曾指出引力透過地球而發生作用時，至多祇能減弱千萬分之一，其證明實無可非難：蓋如引力能爲其所透過之物體所吸收，則即不能與質量相比，而當對於大物體爲相對的弱，對於小物體較強，蓋在大物體方面，其所須透過之質量較厚也。如是則太陽對於地球之引力當較其對月球者爲相對的小，因而月球之運動必將有顯著之不相等可見。故若採取來氏之理論，則當推論得構成地球之球形分子，其總面積爲地球總面積之千萬分之一。

達爾文（Darwin）曾指出，吾人必須假定此項物粒爲完全無彈性者，來氏之理論乃能精密的引出牛頓之定律。於是地球對於質量1，在距離1內所施之引力，與以下諸者相比：構成地球的

球形分子之總面積S，物粒之速度v，物粒所構成的中介物之密度p之平方根。所產生之熱，與S，p，以及v之三次方相比。

此外則物體在此種中介物內運動時所受抵抗亦須顧及。蓋物體運動時，一面須對某種撞擊抵抗，一面則對於與此方向相反之撞擊受其推動，故靜止狀態下所有之相償不能再存在。所計算得之抵抗，與S，p及v相比。但吾人所知者則天體之運動，猶之無有抵抗者，然吾人所作觀察之精密程度，可使吾人對於中介物之抵抗，測定其限度之所在。

此項抵抗既隨Spv一乘積而變，而吸引力則與$S\cdot\sqrt{p}\cdot v$同變，故可知抵抗力與引力平方之比，與Sv成反比。

因之對於Sv一乘積，吾人有一極低之界限。對於S吾人已有極高之界限（由於引力所透過的物體之吸收引力）。如是，吾人即有v之極低界限，至少須等於光速之$24,10^{17}$倍。由此，吾人即可計算得p及所產生之熱量。後者足於一秒鐘內增加溫度至10^{26}度。故在一固定之時間內，地球所受之熱量，較之太陽所發出者大10^{20}倍。此處吾所云之熱，非為地球受自太陽者，而係太陽向

一切方向內所發出之熱。

此種狀況，自非地球所能長久容納。

假如吾人不用達氏之說，而對於來氏之物粒予以不完全，但非等於零的彈性，則所得結果仍將差不多的富於幻想。蓋如是則此項物粒之動力，固不會完全化爲熱，但所產生之引力將較爲小，蓋祇有不化爲熱之動力部分，能有助於引力之產生也。由此卽可得相同之結果，吾人不難謹愼的應用關於此之定理以知之。

來氏之理論，倘可使其取其他之形式。試將物粒置諸不論，設想以太在各方向內被空間內各點所來之光波所穿過。當物體爲光波所遇時，此波對之發生一力學的作用，與馬巴二氏之壓力相當，猶之受一物質的彈子之撞擊然。因之，此項波可以代替來氏之物粒。此爲湯馬西那(Tomasina)所提出之假設。

但困難幷不因之而可避免。其傳播速度祇能等於光速，故對於中介物之抵抗，吾人所得者仍爲不能用之數目。假如光完全被反射，則其作用等於零，猶之假定完全彈性的物粒然。必須光線部

分的被吸收，乃能發生引力。於是亦卽有熱發生。吾人之計算，不能與來氏理論下者有多大之區別，其結果之富於幻想性質，亦一如前者。

在他方面，引力所透過之物體，將不能或極少的吸收引力。吾人所知之光則幷不如此。倘光能產生牛頓引力，則必與尋常之光有別，例如其波長當較短。又如此項光能爲吾人之目所見，則全部天空將較太陽爲亮，因而太陽在天上將成爲黑斑，蓋不則太陽非特不吸引吾人，且將排斥也。因此種種理由，姑不問光是否可用以說明引力，但其屬性將與光X線較接近矣。

但卽X光線，亦尙不充分。蓋此光線雖在吾人觀之，已較能穿透，然究不能穿過整個之地球，故吾人又須假定有X′光線，較之尋常X光線尤能透過。於是此項X′線之一部分能力，必將分散，蓋不則無由發生引力也。假如吾人不欲假定此項能力會轉變成熱（倘轉變成熱，則其量殊大），則須假定其向各方向內以次種放射線之形式放出，此種放射線，可以X″表之。此種X″線之穿透力，又須較X′線爲強，不則又將對於引力之產生，發生足以擾亂之影響。

故如吾人欲採取來沙其之理論，則必須作如是複雜之假設。

以上所云之一切，均先假定力學上之尋常定律。假如吾人由新力學出發，是否可得較佳之結果？吾人倘能將相對原則保存之耶？試用來氏理論原來之形式，設想物粒於各方向內將空間穿過。倘此項物粒爲完全彈性者，則其所引起的撞擊之定律，卽與相對原則相一致，但其作用則將等於零。因之，吾人須假定此項物粒無有彈性，但如是則不易作其撞擊之定律，可與相對原則相容者。且在此處，亦仍將有熱量產生，同時且有中介物之極易感覺的抵抗力發生。

倘將物粒置諸一邊，退而用馬巴二氏之壓力假設，則其困難亦不減於此。羅氏曾企圖將此假設完成之，其文於一九〇〇年四月二十五日提出於亞姆斯得達（Amsterdam）科學院。

試研究一系統之電子，靜止於以太內，并假定以太於其一切方向內爲光波所透過。此項電子中之一爲光波之一所遇時，卽發生振動，且與光之振動相同時。但亦可發生相位差，祗須電子將其一部分能力吸收時卽係如此。能力之吸收，由於以太振動之能將電子擺行。因之，電子必將在以太之後。運動的電子，可與對流的電流相比較。每一磁場，尤其是光之擾動本身所產生者，將對於電子發生力學的作用。此作用極爲微弱，且當過一週期時，其符號亦卽改變。但如電子之振動與以太者

之間有相位差時，則平均作用亦不能等於零。此項平均作用與此差相比，故亦與電子所吸收之能力相比。

關於計算之詳情，吾不能於此處重述之。祇須一及者，卽其最後之結果，爲任何二電子間之吸引，其吸引力與電子間之距離成反比，與其所吸收之能力成正比。

倘無光之吸收，則卽不能有引力發生，故如無有熱量發生，亦無有引力發生，此所以羅氏不能不放棄其理論，蓋就根本上言之，此理論固與來氏及馬巴二氏之理論一致者也。苟羅氏將其計算推至於末後，則其結果必將更爲可異。蓋如是則羅氏必將發見地球之溫度每秒鐘內將增加 10^{18} 度也。

四　結論

以上吾所企圖者，欲以最簡短之語，對於新的物理學上之理論作一最完備的概觀。吾必須說明其如何逐漸發生，蓋不則讀者必將引爲奇事也。此項新理論倘未經證明，其缺陷尚多，所根據者

祇爲殊可假定之或然性，故亦不能全蔑視之。

此項理論中何者可以採取，此須有新的實驗乃能證明之。其中關鍵，在於考夫曼之實驗及證驗此實驗時所作之種種試驗。

末後請述吾之所願。試假定數年之後，此項理論竟能證明而得成功，則對於中學校之教學上必將發生一極大的危險：有若干教員自將顧及此項新理論。新事物恆引人注意，其不能充分展開之處，殊使人感煩悶！至少吾人將對於學生略略一述，而在未將尋常力學授與之前，將先使其明白此項力學之時代已過去，至多祇能對於往時之呆人，如拉不拉司者，乃有價值可言。於是學生將不願從事於尋常之力學矣。

使學生明白尋常之力學，祇能近似的正確，此爲相宜者耶？此固爲相宜者，但吾人必須先使學生透澈習慣之，且僅於其中思想時，乃可如此，蓋如是則不虞其忘却，而可將其界限說明之。

在日常生活上，所用者僅爲尋常之力學，所可應用者，亦僅以此爲限，無論吾人之汽車能進步至如何程度，其所達到之速度，終不致出於尋常力學範圍之外。新力學可謂一種奢侈品，吾人必須

對於必要品有保障後，乃能想及奢侈品也。

第四卷　天文學

第一章　銀河與氣體理論

吾此處所欲述之研究，迄今多未爲天文學者所注意。吾祇能憶及開爾文爵士(Lord Kelvin)曾有此思想，雖迄今尙無人過問，但實可新闢一研究之區域。吾不能有何種新結果提出，祇能對於所發生之問題，迄今尙無人研究其解決者，提出其觀念。

今日多數物理學者對於氣體構造之觀念，吾人均已知之。按此，氣體爲無數之分子所構成，此項分子以極大之速度向各方向交叉運動。此項分子，或者於遠處已能互相影響，但其隨距離而減少甚速，故其軌道就主要者言之，仍可謂直線的。祇當二分子充分的接近時，其軌道乃灣折。因相互間之吸引或排斥，於是向左或右轉向。一般人於此處恆云有撞擊發生，實則「撞擊」一語之意義，

此處與尋常者不相同。蓋二分子不必實在相接觸，祇須如是相接近，俾其間之吸引可以感到卽可。惟由此所發生灣折之定律，則與眞正的撞擊者亦無異。

初觀之，此項無數的微塵方面之無秩序的撞擊，似祇能發生無法整理之混亂，數學家對之，亦無所措手。但機遇上之最高定律，卽所謂大數定律者，能予吾人以幫助，故吾人對於半無秩序之狀態，固感棘手，但全無秩序者則反可由此統計定律以得其平均秩序，吾人之精神，可對之滿意。氣體之分子運動論，卽建立於此項平均的秩序之研究上。由此可知分子之速度，平均分配於一切方向內，此項速度固隨分子而異，但其變異亦受定律之支配，卽所謂馬克司惠爾之定律是。由此定律可知有多少分子，其速度如此或如彼者。當氣體離開此定律時，其分子之相互間的撞擊，卽能改變其速度之大小及方向，因而使氣體仍歸於此定律所要求之狀態。物理學者用此法以說明氣體之已知屬性，如馬利奧 (Mariott) 之定律，不能謂無有結果。

今試一觀銀河。此處亦有無數之微塵，惟此處非爲分子，而係星球，其速度亦殊大。此項星球相互間之作用亦已可於遠處發生，但距離甚大時甚弱，其軌道可視爲直線者，祇於相接近時，乃能發

生灣折，猶之彗星行近木星時然。簡言之，倘有一碩大無朋之人，其視吾人之太陽猶之吾人之視元子，則銀河系統，在此人觀之，亦猶一氣泡耳。

此爲開爾文之根本思想。由此比較，吾人可得何種結果耶？此種比較之適用，可至於何程度？吾人今可一研究此項問題。但在吾人未作何種確定的結論之前，爲避免任何一種偏見計，吾人必須明白，分子運動論對於天文學固可資借鑑，但不能盲目的信從。迄今之天體力學所從事者僅爲太陽系統或二星球所成之系統而已。對於該項現象，如銀河星球之堆或星雲等，天文學對之，祇有棘手無法，視之爲大混亂而已。但銀河不能較氣體更爲複雜。根據於或然算法之統計方法，吾人已用之於氣體者，自亦可同樣的應用之於銀河。吾人必先明白者，則此二種現象間何處一致，何處則有區別。

開爾文曾欲按此方法以測定銀河之廣袤。爲此目的，曾將望遠鏡所可見之星球一一計數之，惟不能確定者，則可見者之背後，是否倘有不可見者在。然則吾人如是所測得者，非爲銀河之廣袤，而爲吾人所用望遠鏡之可及的範圍而已。但新的理論則倘有其他之幫助給予吾人。蓋吾人對於

與吾人最相近之星球，可知其運動，對其速度之大小及方向，均可有一觀念。倘上述之思想爲不謬，則此項速度必服從馬氏之定律，由其平均值，卽可略知與此假設的氣體之溫度相當者之狀況。但此溫度係與氣泡之廣袤相關。事實上，眞空內之氣狀質量，其狀況須如何，其元素乃係按照牛頓之定律相吸引者？其形狀必須如一球，而因引力之作用，其中心處之密度必最大，壓力亦必由面向心增加，蓋外面之部分，將被吸引而向心也。溫度亦必向心增加，蓋溫度與壓力爲熱量定律所連結，如大氣內之各層然。在面上，壓力等於零，絕對溫度卽分子之速度，亦係如此。

此處尙有其他之問題：適才吾已提及熱量定律，但此定律幷非對於一切氣體爲相同者，蓋此與其比熱之比有關。對於空氣及相似之氣體，此比等於1,42。但吾人可將銀河與空氣相比較耶？此自爲不能者，故吾人須將其視爲單元子之氣體，如水銀之蒸氣，或氬，或氦等，於此，比熱之比爲1,66。其中之一分子，例如爲吾人之太陽系，惟對於太陽而言，行星實至爲小，故祇能將太陽算入，而視此分子爲單元子者。他方面試再一觀一個二重星。當一其他之星與之相接近時，在未將二星之相對軌道擾亂之前，或已先將此系統之直線運動軌道灣折。簡言之，此二重星之情形，猶之一不可分之

元子然。

無論如何，壓力及溫度在氣體所成之球之中心較爲大，且球愈大則此二者亦愈大，蓋壓力隨其各層之重量而增加也。吾人可假定，吾人自己約在銀河系統之中心，而如吾人觀察星球之平均的各自速度，則卽可計算與吾人之氣球中心溫度相當之量，幷測定後者之半徑之大。

吾人可用如次之考慮，以得其結果之觀念。試先作一簡單的假設：銀河之系統爲球形者，質量係整齊的分配於其中。由此可知系統內之星球，循相同之中心作橢圓。倘假定面上之速度爲零，則其中心之速度，可用動力之方程以計算之。吾人可知此速度與球之半徑及其密度之平方根相比。倘此球之質量，等於太陽之質量，其半徑等於地球軌道之半徑，則此速度將等於地球在其軌道內之速度，此則不難知者。但在吾人所研究之事例方面，太陽之質量當平均分配於一球內，其半徑大一百萬倍，蓋次一星球之相距卽如是遠也。因之，其密度卽小 10^{18} 倍，速度之等級仍舊，而半徑則須大 10^{9} 倍，卽在其次的星間距離之千倍。由此可知銀河內之星球，其數之多約爲十萬萬。

或將以爲此種假設去事實甚遠。第一，銀河非爲球形者（關於此，以下再當論之），第二，分子

運動論與平均的氣球之假設不能相容。但如吾人完全按照此理論而作其計算，則所得結果必將不同，惟其等級仍相同。在此種問題方面，吾人所已知者太無保障，故祇能以所求值之大小等級爲滿足。

於此，吾尙須有如次之聲明：開爾文之結果，如吾適才用近似的計算所獲得者，與用望遠鏡觀察所得者頗相一致，故可由此作一推論，謂吾人已與此問題之解決相接近。於是吾人尙可對於其他一問題作答覆。因星球能發光，故能爲吾人所見。但是否可有黑暗的星，在星球之空間內流轉，其存在向未爲吾人所知？開爾文之方法所予吾人者，爲星球之總數，黑暗者亦包含在內。倘其數目與觀察所得之結果，就主要者言之相一致，則其原因在於無有黑暗的星球，或至少因黑暗的物質較之發光者爲少。

吾人可再將此問題，從他方面一觀察之，然後再進而論之。銀河之系統，是否眞可爲一種氣體之圖形？吾人均知克洛克司曾採入物質之第四種結聚狀態一觀念，其中之氣體，係如是之稀薄，其狀況已非爲眞正的氣體，而成爲克氏所稱之『放射物質』。因銀河系統之密度極小，故可發生此

問題，卽其所表者爲氣體之物質，抑放射之物質圖形？倘將所謂『自由的徑長』一研究之，則吾人卽不難作其解答。

氣體分子之軌道，可視爲由各個直線段所連接而成，其間有極短之弧爲之連結，而此則與相繼的各次撞擊相當。如是一段之長，名爲自由的徑長。對於各段及各個分子，此長自不相同，惟可取其一平均值，名爲『平均徑長』。氣體之密度愈小，則此徑長愈大。在放射的物質方面，此項平均徑長較之盛此之器皿之廣袤爲大，故分子有此可能性，可穿過器皿，不受何種撞擊。倘不能如此，則物質卽爲氣狀者。因之，同一之物質在一小的器皿內當視爲『放射的』，而在大的器皿內則爲氣狀的或者吾人須於克氏管內儘量使氣體稀薄，管愈大則愈可儘量如是爲之。

對於銀河之系統，此又有何種意義耶？此系統爲一氣體質量，其密度極小，其廣袤極大。其中之一星球（卽氣體內一分子），是否有將全系統穿過，不受撞擊，卽不與其他星球相接近，致軌道灣折之可能耶？此處所謂『接近』，其意義又如何？此自爲隨意者。吾人可假定其約略如海王星與太陽間之距離，其灣折約可有數十度。試假定吾人之每一星球，其外層有一保護球，半徑之大如是，則

吾人倘可於其間作一直線透過之耶?由系統內星球之距離以觀此項球之半徑將在約爲十分之一秒之角下,而吾人所有之星球,其數約爲十萬萬。今試設想於天球上作十萬萬之小圓,其半徑均爲十分之一秒大,則此項小圓能將此天球數次遮滿耶?相去自甚爲遠。其所遮滿者,祇有一萬六千分之一而已。因之,銀河之系統非爲氣狀物質,而爲克氏放射物質之圖形。吾人前所作之考慮,幸而未甚精確,故今倘不須作若何之變更。

但倘有一其他之困難。銀河之系統,非爲球形者,但吾人以上之計算,恆以球形視之,蓋球形爲空虛內孤立氣體之平衡的圖形。在他方面,有星堆存在,其形爲球形者,與吾人迄今所作之考慮,較能適合。海爾休(Herschel)氏已曾從事於此種現象之說明。渠曾假定此項星堆之分佈爲均勻者,每一堆爲一整齊之球。如是則每一星球之軌道爲橢圓,其經過時間均相同,故星堆經過一時間之週期後,仍回其原來之分配狀況,而此狀況則爲穩定者。不幸星堆非爲均勻者,其中心處可見其較爲密。惟卽使此球爲均勻者,吾人亦可見之,蓋在觀察者觀之,中心處恆密於其面,但不能如是之明顯耳。故星堆與氣體相較似較爲佳,此氣體係在斷熱的平衡狀態之下者,至其形狀則可假定其爲

球形，蓋此爲氣體質量之平衡狀態也。

或將以爲此項星堆較之銀河之系統遠爲小，或且可屬於此，且卽使其密度較大，吾人或仍祇可將其與放射物質相比較；在他方面，氣狀之物質，其平衡實由於分子間之無數多的撞擊。對於此項批評，吾人或可答覆之如下。試假定星堆內星球之能力，其多恰爲如是，當其達於堆之面上時，其速度卽爲零。如是則星球可不受若何撞擊而穿過星堆，及至達到堆面時，卽折回而再穿過此堆。經過若干次之穿過後，終將發生撞擊而灣折其軌道。在此項條件下，吾人所有之物質，仍不妨視之爲氣狀者。倘星堆內有若干星球，其速度較大，則其穿出堆面而飛去，已在久遠之前，不再回來。由此種種理由，吾人須將已知之星堆詳細研究之，凡在可能之處，須明白其密度之定律，并觀其是否與氣體方面之定律相一致。

今再退而論銀河之系統。此系統非爲球形而可想像之爲扁形者，尤如一凸鏡片然。倘有一質量以零速度離去其面，則其達到中心處之速度，可不相同，須視其由面之何處來而定。倘由面之邊界處來，則其速度當較爲大。

迄今吾人所作之假定，謂吾人所觀察得的星球之各自速度，可與以此項方式運動的質量所達到之速度相比較。於是可有某種困難發生。以上所得銀河廣袤之值，係由各自之速度所推得，而此項速度則與地球之速度同其等級。倘如是，則所得廣袤當爲何種者？其爲此凸鏡式的系統之厚，抑其半徑耶？所得者自爲介於其間之値。但吾人可由之以推知此凸鏡之厚或其半徑耶？此處尙缺少必要之基礎，吾祇能指出此項可能性，卽吾人深入的討論各自之運動時，至少可得此二廣袤之近似的估計。

作此項企圖時，先可有二種假設如下：

系統內之星球，其速度之大部分與銀河之平面相平行，不則均勻的分佈於與此平面相平行的諸方向內。如是則各自的運動之觀察，其結果將多在與所云的平面相平行的速度之成分。吾不知在此種觀點下，是否已經有系統的討論過此項觀察。故目前吾人尙不能有所決定。且此種平衡，亦祇能爲暫時的，蓋因撞擊之故，其分子（此處卽爲星球）經過若干時間後必將得有與銀河平面相垂直之速度成分，故結果將出離此平面，而系統乃漸與球形相接近，蓋此固孤立的氣體之唯

一可能的平衡形也。

倘非如此，則此全系統有一共同的旋轉，故其形稍扁，如地球，木星，以及許多旋轉的物體然。因此處之扁頗甚，故其旋轉速度必甚大，至於『甚大』之意義，則在此處吾人當能一致。銀河之密度，較之太陽小10^{25}倍。故較之太陽的旋轉速度小$\sqrt{10^{25}}$倍之旋轉速度，就扁形上觀之，即可謂之與太陽之旋轉速度相等值者。小於地球速度10^{12}倍之速度，即每百年約三十分之一弧度秒的速度，此處已可視爲甚大，對於穩固的平衡狀態，已爲太大。

在此假定下，所觀察得之各自運動，將爲均勻分配者，於是側重於與銀河平面相平行之成分，即無有理由。由此運動，吾人不能對於旋轉之本身有所推論，蓋吾人本身即爲此旋轉系統之一部分也。倘螺旋狀之星雲，代表其他的銀河系統，不屬於吾人之系統，則對於此旋轉并不參與，而可研究其各自之運動。因距離過大，不能無有困難。倘星雲之廣袤與銀河相若，其可見的半徑例如爲二十弧度秒，則其距離已與銀河半徑之萬倍相等。

對於吾人之問題，此爲不需要者，蓋吾人所欲由此相去甚遠之星雲以知者，非爲此系統之直

線運動，而爲其旋轉。由於恆星之假的運動，吾人可推知地球之每日的旋轉，雖其間之距離甚大，絕無障阻。不幸銀河之可能的旋轉，不問其相對的言之爲如何速，但就絕對言則殊緩，而吾人之望遠鏡，又無法極爲精確的對準星雲。故必須有數千年之觀察，乃能由之以得結果。

按此第二種假設，銀河系統之形狀，無論如何爲一確定的平衡圖形。

關於此二種假設之相對的價值，吾不欲再有所討論，蓋吾人倘可有一第三種假設，或者此爲最多可能者。在不能分解之星雲方面，吾人將其分爲若干種：不規則的星雲，如獵戶星座方面者，即屬於是；環形星雲，以及螺旋星雲。前二者之光帶，已爲吾人所知，爲不連續者。故可知此項星雲非爲星球所構成，但其在天上之分配，似與銀河有關，其中有若干與之特爲接近，有若干則特爲遠，故可謂其屬於銀河之系統。反之，螺旋星雲則普通均視爲與銀河無關者。普通多假定其由星球所構成，換言之，此爲其他的銀河系統，與吾人者相去甚遠。司德拉托諾夫（Stratonoff）之最近著作，欲將吾人之銀河系統亦視爲一螺旋星雲，而此即爲吾所欲云之第三種假設。

螺旋星雲之特殊現象，既如是其有規則而不變，決不能視之爲出於偶然，則吾人當如何解釋

之？吾人祇須將其圖形粗粗一觀，卽可知其質量係在旋轉中。吾人且可確定此項旋轉之方向，蓋一切螺旋形之半徑，其灣曲之方向均相同。在旋轉上有推進作用之翼，對於固着於旋轉點之嚮導者，自較在後，旋轉之方向，卽可由此決定之。故此種星雲，不能與靜止中之氣體相較，亦不能與受等速旋轉之影響而成爲均勢的氣體相較。吾人須將其與恆在運動中之氣體相較，其內部有極猛的狂飈。

今設中心處之旋轉速度極大（其意義所指者爲何，此可無須討論），故不能有穩定的均勢。如是則赤道處之離心力較之引力爲大，故有星球經赤道向外，各在其向外的軌道內運動。當其着着向外離去時，其旋轉能率不變，但其動徑增加，故其角速度必減少，因而在外的翼看來似在後。

在此種看法方面，實無有永久之運動存在。中央之核心，恆失去物質，蓋此項物質一去卽不返也。因之，此核心將逐漸虛空。但此假設，亦可稍改變之。速度之失去，其多寡亦與星球之出離相同，最後此速度亦將成爲零。同時，亦卽有引力發生作用，使其仍向核心，故有向心運動發生。倘仍用軍隊進行中旋回時之次序相較，則向心運動的星球必設想其在第一列內，離心者在第二列內，蓋離心

力必爲中層對於外層所施之吸引力所抵消。

經過相當時間之後，可有一恆久之狀態發生。因爲此團係灣曲者，故其外翼對其中央部分之引力，可使後者遲緩，而中央部分對外翼之引力，則可使其加速，故後者恆較在前，而最後則一切螺旋形灣曲的射線，將以等速的速度旋轉。於此，吾人尙可假定，中央核心之旋轉，較之射線之旋轉爲速。

此處尙有一其他的問題發生：何故此項向心與離心的星團盤列於各個的射線，而不會均勻的向一切方向發散？又，何故此項射線均勻的按核心而分佈？團之凝聚爲射線，係由於引力，卽由已存在的團，施於由核心所分解出的星球上之引力。故如已有不平均發生，則因此理由，卽恆有進展之傾向。

至於射線之何以均勻分佈，則此問題卽較難答覆。試假定無有旋轉，一切之星球均在互相垂直之二平面上，且其分佈爲對稱者。因對稱之關係，吾人無有理由謂其出離此項平面，亦不能謂此項對稱性可變動。故此種配列法將成爲均勢，惟此均勢亦非爲穩定者。

假如有旋轉存在，則有相似的在均勢中之配列法，但須假定有四條灣曲的射線，係相同者，惟各以九十度相交。倘旋轉充分的速，則此均勢亦可爲穩定者。

關於種種詳情，吾不能再深論之。由以上所述，或已足使吾人知該項螺旋形，必有一日可用引力定律及與分子運動論上相似的研究以說明之，不須其他之方法。

吾前所云的星雲內部之狂飈，可使吾人知道，倘將星球之各自運動之總作一系統的研究，則其趣味當如何。必待百年以後，吾人有第二版天體圖編成時，將其與現有之第一版者相較，乃能如是爲之。

末後，吾倘須請注意銀河及星雲之過去壽命問題。倘前所述之理論爲不謬，則吾人不難對此問題有一觀念。統計的均勢之方式，如吾人於氣體方面所見其例者，祇能得自分子間之無數的撞擊。故如此項撞擊不多，則必須經極長之時間後，乃能構成此均勢。銀河之系統，至少其中所包含之星堆，以及星雲其獲得此項均勢，必因其過去之壽命已極久，因而吾人可得一最低之界限。同時，吾人亦能作其最高之界限蓋此種均勢非爲確定而可恆久者。吾人所知之螺旋星雲，可與在恆久運

動內之氣體相比較。惟如是運動的氣體，係有黏性，其速度終將消滅。在星球方面，與此黏性相當者爲一量，此量與分子相撞之或然性有關。此量極爲小故目前之狀況，尙能維持極久之時間，但亦不能永久，故吾人之銀河其壽命不能無限，不能永遠生存。

試再一觀吾人之大氣：在其面上，溫度必爲無限小，分子之速度於此差不多爲零。惟此所云者僅爲平均的速度。其中各個的分子，亦可因撞擊（雖可甚少）而有極大之速度，因而出離大氣，不再退回。故經極長久之時間後，大氣將漸漸的虛空。銀河方面由於相同之狀況，亦將漸次失去星球，故亦可由此以知此銀河系統所能持久之時間界限。

吾人估量銀河之過去壽命時，自可得極大之數目字。但此處尙有一困難。按若干物理學者之判斷，吾人對於太陽不能予以過久之時間，約略祇爲五千萬年，此項判斷係根據其他之考慮而得者。但吾人所得之最低限度，則尙較此遠爲大。吾人須假定，當物質尙黑暗時，銀河已開始其發展耶？但構成此的星球，如何能同時成熟，此項成熟之期間如是其短耶？抑此項星球係先後成熟者，故吾人所見之星球，實在祇爲極小之部分，已解散及將成熟者，不知尙有多少在。但此種假設，又如何能

與先前之假設相容，按此先前者，黑暗物質不能有多量的存在，然則此二假設中，必當拋棄其一，但為何者？吾祇將此項困難指出之，不求其解，故吾必以一大的疑問號為終結問題之解決，雖似尚遠，但將此項問題一提出之，要亦極有興味之事也。

第二章　法國之測地學

求知地球之形狀與廣袤，此事之有味，固盡人所知者。但吾人對之作如是之精確的要求，或將不免引爲可異。此果爲不必要之奢侈品耶？彼測地學者所費之勞力，果有何用耶？

倘將此問題質諸國會中人，則吾料其必將如是答覆：『吾必將視測地學爲最有用的科學之一，蓋此學爲所費最多的科學中之一也。』吾今試對此問題，作一較爲精密之答覆。

凡偉大之人工建築物，無論其爲戰時或和平時用，均須先有長時間之預備研究，乃能爲之，無用的企圖，錯誤的計算以及不必要的代價，均可由之省却。此項先期的研究，須根據良善之地圖。倘地圖不根據堅實的輪廓，則此圖自爲無價值的意像。此猶去其骨骼，則人體卽無由直立。

此種輪廓，須由測地的量法以得之。故如無有測地學，則不能有良善之圖，無有良善之圖，則不能有偉大的公共工作。

有此理由，大部分之出版品已得其根據，但亦祇能使實用者信之。吾人此處不能深論此項理由，蓋尙有其他較高較重要者在。

因之，吾人將問題另提出之：測地學是否對於認識自然界有所供獻？測地學能助吾人了解自然界之統一與和諧耶？個別之事實，於此甚少價値，祇當其能促進科學時，乃爲可貴。

吾人於地球上發見一小的隆起時，此發見之本身幷無甚多之意義可言。然如吾人因硏究此隆起之原因而發見自然界之秘密，斯則極有價値者。

十八世紀時莫柏諦（Maupertuis）與拉孔達明（La Condamine）之跋涉各地，其思想蓋亦在於是。彼時所欲從事者，蓋不僅地球之形狀，而爲整個的宇宙系統之問題。

蓋如地球果爲稍扁者，則牛頓卽得勝利，因而其引力之理論及全部天體力學亦勝利。

牛頓派勝利以來，已百餘年，測地學至於今日，遂無復有可使吾人知者耶？

關於地球之內部，吾人實無所知。採鑛及掘地之工程，能使吾人知地下一二公里深之狀況，此不過爲全地球質量之千分之一耳。其下之狀況如何耶？

范爾納 (Jules Verne) 所夢想之種種遊歷中，當以地心之遊爲最能使人入於新顯之區域。

吾人所不能達到的深處之岩石，已可由遠處發生其引力作用，影響於擺錘，而使地球之圓狀變形。因之，測地學可由遠處研究之，以知其內部之分佈。於是吾人可由之以知此秘密部分之大略，范爾納所祇能想像之者。

然此非爲僅僅的夢而已。將此項測量作一比較後，法氏 (Faye) 獲得一至可驚異之結果。在海底之深處，有甚厚之岩石，但在大陸之下，祇有空的空間。

最新之觀察，或須於若干零星處將此項推論改變之。

無論如何，此可敬之人已使吾人知吾人須於何方向內求之，測地學者對於地質學者所供獻者爲何，對於探求地球之原始及過去的思想者，又能有若何之供獻。

但吾又何故名此章爲『法國之測地學』耶？其理由實因此種科學，較之其他科學，尤富於民族的性格。其理由蓋不難知之。

民族與民族間，必有競賽存在。在科學的競賽方面，恆倘有武士道存在，至少可云差不多恆有之。無論如何，此種競賽爲必要者，蓋此爲有用者也。

在此項事業方面工作之時間既久，工作之人亦多，故個人卽無由表現，任何人均不能謂『此係吾之工作』。因之，此種競賽非爲人與人間，而爲民族與民族間者。

於是吾人可問，法國對於測地學之供獻爲何？吾信法國人對於此學，實有可以自豪者。

當十八世紀之初，主張地球稍扁之牛頓學派（蓋此爲萬有引力論之所要求者）與卡西尼（Cassini）氏間曾經長久之討論，卡氏因其不精確之測量，誤以爲地球爲引長的橢圓形。於是法蘭西科學會卽決定作此實驗，在彼時固不能謂非偉大之事也。

莫柏謫與克來老（Clairaut）既測量北極圈下之子午度，布九（Bouguer）與拉孔達明氏，復入南美洲之安頓山脈（Anden），此處彼時爲西班牙屬，今則已爲一共和國矣。

此各位遠遊者之艱難，蓋不難知，彼時之遠遊，固不若今日之易也。

惟莫氏所達到之地，亦非爲荒涼無人之處，渠且曾爲拉不蘭之女人（Laplanderin）所歡

迎，此則今之往北極探險者所不能遇者也。其所到之地，在今日已有遊船可通，每值夏間，旅客多結隊往遊，惟彼時則不若今日之有哥克（Cook）旅行社，故莫氏以爲渠所達者，已盡北極探險之事矣。

或者莫氏亦未嘗全誤。今日之俄人與瑞典人，亦從事於高山上之測量，卽有冰山之處作測量。惟其所用之方法則已全不相同，年代之差，固應有緯度之差與之相償也。

彼時學界方面，伏爾泰（Voltaire）實有極大之權威，不幸莫氏不能爲其所善，迄今吾人讀伏氏之誹議文，猶能想見之。惟在開始時，莫氏亦曾爲伏氏所極端贊賞，此則猶如君主之褒賞，每使將來之貶斥，益不可當。伏氏本身當亦知此矣。

伏氏於開初時稱莫氏爲『思想上之大師』，爲『北極圈內之主公』，爲"Aplatisseur du Monde et de Cassini"，乃至於爲"Sir Isaac Maupertuis"（此可謂最盛之稱譽矣）。伏氏曾致書於莫氏，謂『祇有普魯士之王，可與君相並，惟彼尙有一短處，則非爲數學家是也』。惟不久而態度卽變，伏氏不再奉之爲神聖，不再視其工作爲神所垂奬，而將莫氏視爲狂人。伏氏不再稱

揚莫氏之精密的才智，而詆其驕傲，謂其迷惘多於智識。

此項傳奇式之爭論，吾不欲再深論之，祇願對於伏氏之二詩句略加識語。在其 Discours sur la modération 內，伏氏曾有句如下：

Vouz avez confirmé dans des lieux pleins d'enuui

Ce que Newton Conunt sans sortir de chez lui.

用此二句以代前此稱揚之詩，實不適當，以伏氏之明晰頭腦，當不致見不及此。惟彼時對於此發見之最高估量以爲可 "sans sortir de chez soi." 而爲之者。今日之見解，則不致對於理論如是過於推重。此實爲不明科學目的之所致。

自然界中固祇有機遇及隨意耶？抑其中有和諧性存在？此爲一問題。祇當科學發見其和諧時，乃能爲美而有價值可言。除理論與經驗之相符外，吾人尚有何法以見自然界之和諧？故研究此項相符之存在與否，實爲吾人之主要目的。理論與經驗二語，吾人須將其內容相比較者，實不可相分開。故欲取其一而舍其一，此爲無意義之事。就其本身單獨言之，理論爲空洞者，經驗爲近視者，故如

單獨則二者均爲不必要而無味。

故莫氏之榮譽實有其理由。雖莫氏不足與牛頓相比，且不足與其同時之克來老相比，但其功績則亦不能輕視，蓋其工作實爲必要者。當十七世紀時，法國遠不及英國，以後百年內，其所以能恢復其地位者，則不僅爲克來老，達倫伯（d'Alembert）以及拉不拉司之功，如莫氏及拉孔達明之堅苦卓絕，亦大有力焉。

今再進而論測地學上之又一時期，足稱爲第二傑出時期者。彼時法國之內部有分崩之象。整個之歐洲，彼時均以甲兵相窺伺，故似有用其全力於鬥爭之勢。雖然如此，對於科學上仍未嘗不致其力，彼時之人，仍深信其有効果，而不憚從事於此。

其時德蘭伯（Delambre）與梅響（Méchain）受命測量唐克欣（Dünkirchen）至巴西洛那（Barcelona）之子午弧。此時不能再往拉不蘭或秘魯，蓋敵國之兵艦，已將道路封鎖。此科學的出發，雖未甚遠，但在此擾攘之時，已備受種種阻礙及危險矣。

在法國國內，德氏須與疑忌的公共機關之無知相奮鬥。教堂之塔，以其易見，故每爲測地學者

所用爲信號。但德氏須於其處工作之區域內，簡直無有此項塔，蓋曾有一地方執政官，行經其地，盡將教堂之塔毀之也。

於是不能不築木板之塔，用白布覆之，俾易於瞭望。但此事又爲不許者，蓋白布爲反革命之旗幟，誰敢於適經解放之山巔上，復張此項可恨的旗幟耶？於是不能不用藍紅色以染此白布。

梅氏工作於西班牙，彼處亦有其他之困難。西班牙之農民，對之殊爲敵視。彼處固不乏教塔，然欲將稀奇之儀器置於其上，此項儀器或且與魔鬼有關，此又寧非爲犯禁之事？法國之革命派，固與西班牙有聯絡，但此聯絡在農民視之，又適爲可殺之事也。

梅氏曾謂彼處之人，不斷的作此恐嚇，欲殺害之，幸而得教士之告諭，以及僧正之護照，故農民僅恐嚇之而已。

若干年後，梅氏又向西班牙作第二次之出發，其目的在將子午線由巴西洛那繼續至巴來倫（Barlearen）。此實爲將三角測法伸至海峽外之第一次，其所觀察者爲遠處島上山巔上之信號。

梅氏之工作，既爲思想得法，復有良善之準備，但仍未得結果。此法國之學者，曾歷盡辛苦，如其信內

所述者。『地獄，以及一切災厄如戰爭，疫癘，等等蓋同時向吾進攻！』

事實上，梅氏之同事者，勇氣雖多而善意則少，故其工作為千萬的偶然事件所阻。彼時之疫癘幷不如是之甚，但恐懼疫癘之心理則遠為甚。每一島均畏其鄰近之島有疫，深恐其傳染。故必須經好多星期之後，梅氏乃得入口之許可。且須將其一切紙張均用醋浸過，蓋彼時醋為消毒之物也。

既而以疲乏致病，乃請回國，但未及行而卒。

於是亞拉果與皮奥（Arago & Biot）二人受命繼其事，幸而卒以完成。

彼時此大功之得以從速告成者，實賴西班牙政府之助，以及諸僧正之保護，而尤得力於著名之盜魁。幸而事業得以成功，而當狂潮爆發時，皮奧已返國。

其時西班牙忽與法國發生戰事。於是亞拉果之登高作信號，被視為法國之間諜，終乃自請受拘禁而止。亞氏在獄中時，曾於報紙上閱得其自己被處死刑之消息，蓋其時之報紙，屢有過早之消息也。

然在獄中猶不甚妥，乃越獄至亞爾其（Algier），由該處乘船至馬賽。但此船被西班牙之海

盜所擄，於是亞氏復被執送回西班牙，轉入他獄，備受苦楚。倘此船上僅有此數人，則此事亦已了結，幸而其上尚有獅子二頭，亞爾其王所欲進貢拿破崙者，於是亞爾其王不肯干休，而以作戰相威脅。

此船與被執之人，終乃釋出。船上既有此天文學者在，則當不致有方向之錯誤矣。不幸此天文學者暈船，亞爾其之船員，誤泊於布其（Bougi）。於是亞氏重復由此往亞爾其，步行過加皮林（Kabylien）中間又歷經險難。亞氏於是不能不留於非洲，幾入奴隸之牢。末後卒得回國，藏於襯衣下之觀察結果以及其儀器，幸而均未被損傷。

迄於彼時，法國不僅於測地學方面占第一位，且單為此學所犧牲者已不少。其後數年內，法國仍繼續進行，其模範的軍用圖，足為證明。惟後來之新的觀察法及計算法則得自德國及英國。直至四十年來，法國始恢復其以往之地位。

於此，一有學問的軍官名柏黎將軍（Generl Perrier）者實最有供獻。柏氏欲將西班牙與非洲相連繫，竟獲成功。渠於地中海兩岸之山巔上，築四個瞭望站，但因氣候關係，須等候多月，始有晴朗之大氣，乃能觀察得對岸三百公里外之光線，而事事以成。

吾人今日所用之計劃，固有較此更爲大膽者。由尼蔡(Nizza)之山上，可向哥西加(Korsika)發出信號，但其目的非爲測地，而在測量光速。其間之距離，實不過二百公里，惟光線須往返二次，蓋爲哥西加處之鏡所折回也。且光線亦不能於中途失去，而當恰恰歸回原處。

自此以來，法國之對於測地學未嘗稍懈。前所報告者，僅爲其冒險之狀況而已，但其科學工作之偉大，亦不能不及之。海岸兩旁之法國領土，漸漸爲三角形所籠罩，可極精確的測量之。

今日所提出之要求，可謂十分嚴格，曩日使人驚異者，今日已不足爲奇。隨精確之要求，困難自亦增加，吾人各處均有危險可遇，不能預料之差誤來源，尤極爲多。因之，吾人須時時構造極可靠之儀器方可。

關於此點，法國亦未嘗忽略之。吾人所有之基底及角之測量計，不能不謂極精，德福其(Defforge)上校之擺錘，於測量重力上，其精確尤爲向所未有。

法國測地學之將來，繫於陸軍部地理局之手，其局長爲巴蘇及培島二將軍(Generäle Bassot & Berthaut)。吾人對之，不能不引爲得人。在測地工作方面，不僅須有科學上之精方，尤須於任何

一種氣候下能耐勞，而主其事者，又必能得其同事者之信從而後可，此則爲軍事上之屬性矣。吾人均知在吾人之軍隊內，科學與勇氣恆同時俱進。在實施上必須有統一性方可，而此則可自軍事的組織以得之。故與有聲望之學者同事，則彼必多所獨行，且恆以名譽爲念，欲望於相隔甚遠處，共同達到一目的，此誠不易。以前之測地學者間，恆發生劇烈之爭執，如布九與拉孔達明間之爭，法國科學院曾討論甚久。吾非謂軍官無有意氣，惟其爲我之心，每受紀律之束縛耳。

若干外國政府，多請法國軍官爲其組織測地之事。故至今日，法國之國外的科學影響，仍存在未滅。

法國之水道工程師，亦曾有供獻於此項共同之工作。法國海岸及殖民地之地圖的影片，潮汛之研究等，均爲其活動之範圍。法國之一般的水準測量，係按照拉勒孟 (Lallemand) 之精確方法而施行者，吾實不能不幷一及之。

既有此項人物，則吾人自可對於前途作一瞻望。工作必不會缺少，吾人之殖民地，可供給許多未經研究過之處所。同時，國際測地會亦已見到有重測紀多 (Quito) 之子午弧之必要，此弧以前

爲拉孔達明氏所測者。法國對此工作自能勝任，且有充分權利，蓋吾人之祖先曾於科學上奪得此哥地勒（Kordilleren）山脈也。此種權利當無人否認之，吾國政府亦曾力求從事於此。

毛蘭（Maurain）與拉孔姆（Lacombe）二人曾先作一番偵察，其穿過艱險區域及攀登山巔之速，實足稱道。無怪伊瓜多（Ecuador）共和國之總統亞法洛（Alfaro）將軍驚異之，稱之爲『鐵人』也。

確定的出發，由布喬亞（Bourgeois）中校所率領。所得結果與所預計者同。此行中之軍官，歷受未曾想及之氣候上的困難。在四千公尺以上之高處，必須有人於雲霧冰雪中等候數月之久，乃能見其所欲觀察之信號。因之，代價及時間固須增加，但幸而軍官們能堅苦耐勞，故其所得測量之結果，亦足以相償也。

總結

以上諸頁內，吾之企圖在說明學者必須如何開始，於所欲研究之事實中作一選擇。雖因選擇之故，不能不有所犧牲，但吾人精力之不足，不能不使吾人如是爲之。最初吾用一般的討論以說明之，一面將所欲解決的問題之性質陳明，一面并將解決此項問題的人類之精神，予以解釋。於是吾舉引若干之例，其數自有限，蓋吾亦須作一選擇，將吾所最有研究者提出也。他人之選擇自將與此不同，但此爲無有問題者，其末後之結論仍將相同。

事實方面實有階級性：個別之事實，爲無用者，其存在僅爲使吾人可由此以知其他而已。學者知其存在後，僅知一事實而已，不能由之以推得新的事實。此項事實或僅一次發見，但不能再復現。他方面亦有生產力極大之事實。其中每一個可使吾人得一新定律。學者必須注意於此，蓋此爲當選擇者也。

此項選擇自爲相對者，受吾人精神上之不足之影響。生產力較少之事實，爲複雜的事實，各種狀況均能影響之。此項狀況既太多，且種類亦繁，故吾人無法盡區分之。吾之意思，實在當云：所謂複雜之事實者，謂其相伴之狀況極繁，吾人之精神不足以分解之。故如有較吾人能綜括而更精密之精神，則其判斷卽不相同。但此係不成爲問題者，蓋吾人僅有現有之精神，幷無此項較高者也。

生產力較大之事實，爲吾人所視爲簡單者。此項事實或則眞正簡單，或則祇爲少數確定的狀況所影響，或則表面上似爲簡單，因其所有關之各種狀況，服從機遇之定律，故能互相抵償。吾人所發見者，實以後者爲多。因之，吾人不能不對於機遇之實質，一證驗之。可適用機遇定律之事實，可爲學者所用，至於其他不能適用此定律之問題，則學者對之，祇有感棘手而已。

如吾人所見，此項研究法不僅可用於物理的科學，兼可用於數理科學。物理學者與數學者之論證方法固不相同，但其發明之方法則相似。其法在由各個事實以進於定律，且選擇可發見定律之事實。

欲說明此點，吾曾指出數學家之工作方法，其形式有三：指出創作時數學家之精神，指出渾朴

的幾何學者之精神，如久遠以前吾人之祖先或年幼時之狀況，其時吾人之本能，如何使吾人作空間之概念；吾幷指出青年學子，中學教師須將科學之最先基礎及根本定義授與之者。各處均可見有直覺及推廣之作用，倘無此二者，則以上所云之三種人，均將不能有爲。

卽在論證方面，邏輯亦不能包括一切。正確的科學論證法，在於眞正的歸納，在某項關係上言之，固與物理的歸納相異，但其由特殊以至於一般則同。凡欲將此項秩序推翻，而將數學歸納法歸結之於邏輯之努力，均歸失敗，一般人所以不能見之者，蓋因其隱藏於一種一般人所不懂的語言之下。

吾於物理科學方面所採取之若干例子，可使吾人知極有生產力的種種事實。考夫曼之一個實驗，足以同時於力學，光學及天文學上發生革命。此又何故？蓋因此項科學愈發展，則其間之連繫吾人愈明白之，且吾人對於普遍的科學之圖能設計一總綱。有種事實，爲各科學所共有者，故成爲諸流之共同的源泉，雖各向一方向流出，而可與聖哥太（St. Gotthard）之交叉處相比，四個河流均由此出發。

此外，吾人之選擇事實，亦較吾人之祖先多甄別力，在彼等視之，此四個流域似爲不可踰越之山嶺所隔斷者。

吾人恆須選擇簡單之事實，而在其間，吾人又須取其與該項交叉點有關者。

卽使各科學無法直接相連繫，但其間仍有相似處可互相切磋。當吾人研究氣體所服從之定律時，吾人亦知所研究者爲生產力極大之事實但吾人尙未能全明其生產力，蓋氣體實爲銀河之圖像，故先前僅對於物理學者爲有味之事實，終將對於天文學者開闢一新的研究區域也。

又如測地學者須將其望遠鏡若何移動數秒，乃能見其費極多勞苦而築之信號，此種事實本身幷無多的意義可言。倘由此而發見一地面上之隆起，且由之可以發見地球內部物質之分佈，因以推知地球之過去，將來以及其進化之定律，斯則誠爲生產力極大之事實矣。