

## Singularitätentheorie

### Vorlesung 7

In den folgenden beiden Vorlesungen möchten wir die endlichen Untergruppen  $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  (bis auf Konjugation) und die zugehörigen Invariantenringe  $K[U, V]^G$  bestimmen. Es wird sich herausstellen, dass es hierzu eine überschaubare Klassifikation gibt, nämlich die ADE-Klassifikation. Die auftretenden Invariantenringe bzw. ihre Spektren (also die Bahnräume) nennt man *ADE-Singularitäten*. Die anvisierte Klassifikation beruht auf der Klassifikation der endlichen Bewegungsgruppen im  $\mathbb{R}^3$ . Die ADE-Singularitäten treten in vielen verschiedenen Kontexten immer wieder auf.

### Gruppenoperationen

Es sei  $G$  eine zumeist multiplikativ geschriebene Gruppe mit neutralem Element  $e$ .

DEFINITION 7.1. Es sei  $G$  eine Gruppe und  $M$  eine Menge. Eine Abbildung

$$G \times M \longrightarrow M, (g, x) \longmapsto gx,$$

heißt *Gruppenoperation* (von  $G$  auf  $M$ ), wenn die beiden folgenden Eigenschaften gelten.

- (1)  $ex = x$  für alle  $x \in M$ .
- (2)  $(gh)x = g(hx)$  für alle  $g, h \in G$  und für alle  $x \in M$ .

Man spricht auch von einer *Aktion* oder einer *Wirkung* der Gruppe  $G$  auf  $M$ . Im Zusammenhang von Gruppenoperationen schreibt man die Gruppe zumeist multiplikativ, und ebenso schreibt man die Operation multiplikativ.

DEFINITION 7.2. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $M$  vor. Man nennt zwei Elemente  $x, y \in M$   *$G$ -äquivalent* (oder äquivalent unter  $G$ ), wenn es ein  $g \in G$  mit  $y = gx$  gibt.

Diese Relation ist in der Tat eine Äquivalenzrelation, wie man sich direkt überlegen kann. Die Äquivalenzklassen bekommen einen eigenen Namen.

DEFINITION 7.3. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $M$  vor. Die Äquivalenzklassen auf  $M$  zur  $G$ -Äquivalenz nennt man die *Bahnen der Operation*.

DEFINITION 7.4. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $M$  vor. Ein Punkt  $x \in M$  heißt *Fixpunkt der Operation*, wenn  $gx = x$  ist für alle  $g \in G$ .

Ein Element  $x \in M$  ist genau dann ein Fixpunkt der Operation, wenn die Bahn durch diesen Punkt einelementig ist.

DEFINITION 7.5. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $M$  vor. Dann nennt man die Menge der Bahnen den *Bahnenraum* der Operation. Er wird mit

$$M \backslash G$$

bezeichnet. Die Abbildung

$$M \longrightarrow M \backslash G, x \longmapsto [x],$$

wobei  $[x]$  die Bahn durch  $x$  bezeichnet, heißt *Quotientenabbildung*.

Der Bahnenraum ist also einfach die Quotientenmenge der Äquivalenzrelation, die durch die Gruppenoperation festgelegt wird, und die angegebene Quotientenabbildung ist die zugehörige kanonische Projektion.

### Lineare Gruppenoperationen auf dem $K^d$

Wichtige Gruppenoperationen ergeben sich auf dem  $K^d$  ergeben sich, wenn man eine endliche Untergruppe  $G \subseteq \mathrm{GL}_d(K)$  betrachtet und die natürliche Operation der allgemeinen linearen Gruppe  $\mathrm{GL}_d(K)$  (also die Gruppe der invertierbaren  $d \times d$ -Matrizen) auf dem  $K^d$  auf  $G$  einschränkt. Jedes Gruppenelement  $g \in G$  wirkt durch die entsprechende Matrix

$$g = (g_{ij}),$$

also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}.$$

Die Bahn durch einem Punkt

$$P \in K^d$$

besteht aus den höchstens  $\#(G)$  Punkten  $\{g(P) \mid g \in G\}$ . Wir fragen uns, in Anschluss an Beispiel 1.5, inwiefern die Quotientenmenge  $K^n / \sim_G$  eine affin-algebraische Menge ist und wie die Singularitäten darauf aussehen. Wir machen folgenden Ansatz: Wenn man  $V = K^n / \sim_G$  affin-algebraisch realisieren kann, so gibt es auch einen affinen Koordinatenring  $S$  dazu. Dieser besteht aus gewissen polynomialen Funktion auf  $V$ . Eine solche Funktion  $f$  ergibt mit Hilfe der kanonischen Projektion  $\varphi$  auf die Quotientenmenge über die Hintereinanderschaltung

$$K^n \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{f} K$$

eine Funktion  $h = f \circ \varphi$  auf  $K^n$ , also ein Polynom aus  $K[X_1, \dots, X_d]$ . Da  $h$  auf den Bahnen zurr Operation konstant ist, gilt  $h(P) = h(g(P))$  für alle Punkte  $P \in K^d$  und alle  $g \in G$ . Dabei kann man  $h(g(P))$  auch so verstehen,

dass dem Polynom  $h$  ein neues Polynom  $hg$  zugeordnet wird und darin der Punkt  $P$  eingesetzt wird. Dabei ergibt sich die Abbildung

$$K[X_1, \dots, X_d] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_d], h \longmapsto hg,$$

als Einsetzungshomomorphismus zu  $X_i \mapsto \sum_{j=1}^d g_{ij} X_j$ . Die geometrische Operation auf dem Raum  $K^d$  induziert also auch eine algebraische Operation auf dem Ring der Polynomfunktionen, und die Bedingung  $h(P) = h(g(P))$  wird zur Bedingung, dass  $h$  ein invariantes Polynom unter der Operation sein muss.

### Invariantenringe

Da eine Operation einer Gruppe von links auf einem geometrischen Objekt in natürlicher Weise zu einer Operation von rechts auf dem Ring der Funktionen führt, werden wir im Folgenden die Operationen auf einem Ring generell von rechts schreiben.

DEFINITION 7.6. Es sei  $G$  eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring  $R$  als Gruppe von Ringautomorphismen operiert (von rechts). Dann bezeichnet man

$$R^G = \{f \in R \mid f\sigma = f \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

als den *Invariantenring* (oder *Fixring*) von  $R$  unter der Operation von  $G$ .

Das ist in der Tat wieder ein Ring, ein Unterring von  $R$ . Die 0 und die 1 sind invariant, da alle  $\sigma \in G$  als Ringautomorphismen operieren. Ebenso ist mit invarianten Funktionen  $f, g \in R^G$  auch das Negative  $-f$ , deren Summe  $f + g$  und deren Produkt  $fg$  invariant.

Es sei  $R$  eine kommutative  $K$ -Algebra über einem Körper und es sei  $G$  eine Gruppe, die als Gruppe von  $K$ -Algebraautomorphismen operiere. Zu jedem  $\sigma \in G$  sei also

$$\sigma: R \longrightarrow R$$

ein  $K$ -Algebrahomomorphismus. Dann ist  $K \subseteq R^G$  und der Fixring  $R^G$  ist selbst eine  $K$ -Algebra.

### Eine Liste von Untergruppen der $SL_2(\mathbb{C})$

Wir betrachten die folgenden Beispiele von endlichen Untergruppen der  $SL_2(\mathbb{C})$ . Wir werden später sehen, dass diese Liste bis auf Konjugation vollständig ist.

BEISPIEL 7.7. Die zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  lässt sich einfach als eine Untergruppe der  $SL_2(\mathbb{C})$  realisieren. Dazu sei  $\zeta$  eine  $n$ -te komplexe primitive Einheitswurzel, beispielsweise  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Die von

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{-j} \end{pmatrix} \mid j = 0, \dots, n-1 \right\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),$$

ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ . Diese Untergruppe wird mit  $Z_n$  bezeichnet.

BEISPIEL 7.8. Sei  $n \in \mathbb{N}_+$  und sei  $\zeta$  eine  $2n$ -te komplexe primitive Einheitswurzel, beispielsweise

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{2n}} = e^{\frac{\pi i}{n}}.$$

Die von den Matrizen

$$A = A_{2n} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe der  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  heißt die *binäre Diedergruppe*. Sie wird mit  $BD_n$  bezeichnet. Das Element  $A$  besitzt die Ordnung  $2n$  und es ist

$$A^n = \begin{pmatrix} \zeta^n & 0 \\ 0 & \zeta^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B^2.$$

Insbesondere besitzt  $B$  die Ordnung 4. Es ist

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\zeta^{-1} \\ i\zeta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A^{2n-1}B.$$

Somit lassen sich alle Elemente der Gruppe als

$$A^i B^j \text{ mit } 0 \leq i \leq 2n-1, 0 \leq j \leq 1,$$

schreiben. Da  $B$  nicht zu der von  $A$  erzeugten Untergruppe gehört und (bei  $n \geq 2$ ) umgekehrt, ist diese Darstellung bei  $n \geq 2$  eindeutig und  $BD_n$  besitzt genau  $4n$  Elemente. Es liegt die Untergruppenbeziehung  $Z_{2n} \subseteq BD_n$  vom Index 2 vor.

BEISPIEL 7.9. Die Matrizen

$$A = A_8 = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix},$$

wobei  $\zeta$  eine primitive achte Einheitswurzel ist, erzeugen eine Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Die Ordnungen dieser Elemente ergeben sich folgendermaßen. Es ist

$$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B^2,$$

also besitzt  $A$  die Ordnung 8 und  $B$  die Ordnung 4. Mit

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{8}} = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

ist

$$C^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^6 + \zeta^4 & \zeta^6 + 1 \\ \zeta^4 + \zeta^6 & \zeta^4 + \zeta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^5 + \zeta^3 + \zeta^3 + \zeta^5 & \zeta^5 + \zeta^3 + \zeta^7 + \zeta \\ \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta + \zeta^7 & \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^5 + \zeta^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

so dass die Ordnung von  $C$  gleich 6 ist. Jedes Element dieser Gruppe kann man als  $A^i B^j C^k$  schreiben, wobei die Exponenten jeweils maximal bis zur Ordnung der Matrizen laufen. Um das einzusehen muss man untersuchen, was passiert, wenn man ein solches Element mit  $A$  oder  $B$  rechterhand multipliziert. Es ist

$$\begin{aligned}
CA &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \zeta^6 \\ \zeta^6 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \zeta + \zeta^7 & \zeta^5 + \zeta^7 \\ \zeta^7 + \zeta^5 & \zeta^7 + \zeta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \zeta^6 & \zeta^4 + \zeta^6 \\ 1 + \zeta^6 & 1 + \zeta^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^6 + \zeta^4 & \zeta^6 + 1 \\ \zeta^4 + \zeta^6 & \zeta^4 + \zeta^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix}^2 \\
&= ABC^2,
\end{aligned}$$

man kann also  $A$  von rechts an  $C$  vorbeischieben. Wegen

$$\begin{aligned}
CB &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta & \zeta \\ \zeta^3 & \zeta^7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \\
&= A^2 C
\end{aligned}$$

kann man  $B$  von rechts an  $C$  vorbeischieben. Wegen

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \zeta^7 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= A^7 B
\end{aligned}$$

kann man  $B$  von rechts an  $A$  vorbeischieben. Wegen

$$C^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^4 = B^2$$

kann man sogar jedes Gruppenelement als

$$A^i B^j C^k \text{ mit } 0 \leq i \leq 7, 0 \leq j \leq 1, 0 \leq k \leq 2,$$

schreiben.

Wir zeigen, dass es unter diesen Elementen keine Wiederholungen gibt. Die Produkte  $A^i B^j$  mit  $0 \leq i \leq 7, 0 \leq j \leq 1$ , bilden nach Beispiel 7.8 die binäre Diedergruppe  $BD_4$  der Ordnung 16, dort gibt es also keine Wiederholungen. Also enthält die Gruppe eine Untergruppe der Ordnung 16 aber auch eine Untergruppe der Ordnung 3 (die von  $C^2$  erzeugte Untergruppe), also muss ihre Ordnung 48 sein (und in den obigen Produkten kann es keine Wiederholung geben). Es handelt sich also um eine Gruppe mit 48 Elementen, die die *binäre Oktaedergruppe* heißt. Sie wird mit  $BO$  bezeichnet. Es liegt die Untergruppenbeziehung

$$Z_8 \subseteq BD_4 \subseteq BO$$

vor.

BEISPIEL 7.10. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix},$$

wobei  $\zeta$  eine primitive achte Einheitswurzel ist, die Erzeuger der binären Oktaedergruppe  $BO$ . Die darin von  $A^2, B, C$  erzeugte Untergruppe besteht aus allen Elementen  $A^{2i} B^j C^k$  mit  $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1, 0 \leq k \leq 2$ , wie ähnliche Berechnungen wie die aus Beispiel 7.9 zeigen, und besitzt demnach 24 Elemente. Diese Gruppe nennt man die *binäre Tetraedergruppe*, sie wird mit  $BT$  bezeichnet.

BEISPIEL 7.11. Es sei  $\xi$  eine primitive 5-te komplexe Einheitswurzel. Wir setzen

$$E = - \begin{pmatrix} \xi^3 & 0 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix} \text{ und } F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix}.$$

Die von diesen Elementen erzeugte Untergruppe der  $SL_2(\mathbb{C})$  heißt die *binäre Ikosaedergruppe*. Es ist

$$E^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und somit besitzt  $E$  die Ordnung 10. Wegen

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \xi^2 + \xi^3 - 2 + \xi^4 + \xi - 2 & 0 \\ 0 & \xi^4 + \xi - 2 + \xi^2 + \xi^3 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzt  $F$  die Ordnung 4. Ferner ist

$$\begin{aligned} EF &= - \begin{pmatrix} \xi^3 & 0 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\xi^4 + \xi^3 - \xi - 2 & -2\xi^4 + 2\xi^2 - \xi + 1 \\ \xi^4 - 2\xi^3 + 2\xi - 1 & -\xi^4 + \xi^2 + 2\xi - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und (unter Verwendung von  $\xi^2 + \xi^3 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ )

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 2\xi^4 + \xi^3 - \xi - 2 & -2\xi^4 + 2\xi^2 - \xi + 1 \\ \xi^4 - 2\xi^3 + 2\xi - 1 & -\xi^4 + \xi^2 + 2\xi - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\xi^4 - 5\xi^3 - 5\xi^2 + 5\xi & 0 \\ 0 & 5\xi^4 - 5\xi^3 - 5\xi^2 + 5\xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 - 10(\xi^3 + \xi^2) & 0 \\ 0 & -5 - 10(\xi^3 + \xi^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{5} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also ist

$$(EF)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Ordnung von  $EF$  ist 6. Diese Gruppe besitzt 120 Elemente und heißt die *binäre Ikosaedergruppe*, sie wird mit  $BI$  bezeichnet.

LEMMA 7.12. *Jede endliche Untergruppe  $G \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$  ist zu einer Untergruppe der  $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$  konjugiert.*

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt.  $\square$

### Die Beziehung zwischen $SL_2(\mathbb{C})$ und $SO_3(\mathbb{R})$

Für die Klassifikation der endlichen Untergruppen der  $SL_2(\mathbb{C})$  werden wir die platonische Klassifikation der endlichen Untergruppen der  $SO_3(\mathbb{R})$  heranziehen. Die Beziehung zwischen diesen beiden Fragestellungen beruht darauf, dass einerseits die  $SL_2(\mathbb{C})$  auf der komplex-projektiven Geraden  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  und andererseits die Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  auf der 2-Sphäre

$$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

operiert. Die Homöomorphie  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong S^2$  ermöglicht einen Zusammenhang zwischen diesen Gruppen und ihren endlichen Untergruppen.

Die projektive komplexe Gerade  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  ist die Menge aller Geraden im  $\mathbb{C}^2$  durch den Nullpunkt; sie ist topologisch betrachtet eine Sphäre  $S^2$ . Diesen Zusammenhang kann man explizit machen, indem man als Zwischenschritt mit  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  arbeitet. Diese erweiterte komplexe Ebene steht einerseits mit der projektiven Geraden ( $\mathbb{C}$  ist eine affine Karte der projektiven Gerade, die den „unendlich fernen Punkt“  $\infty$  nicht enthält) und andererseits mit der Sphäre über die stereographische Projektion in Bijektion ( $\infty$  entspricht dabei dem Nordpol).

Eine komplexe Zahl  $u \in \mathbb{C}$  definiert die von  $(u, 1) \in \mathbb{C}^2$  erzeugte Gerade und damit den Punkt (in homogenen Koordinaten)  $(u : 1)$  der komplex-projektiven Geraden  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Die Umkehrabbildung ist durch  $(u : v) \mapsto \frac{u}{v}$  gegeben, die für  $v \neq 0$  definiert ist. Dem Punkt  $(1, 0)$  entspricht der unendlich ferne Punkt  $\infty$ .

Die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \setminus \{N\}, z = a + bi \longmapsto \frac{1}{1 + |z|^2} \\ &(2 \operatorname{Re}(z), 2 \operatorname{Im}(z), |z|^2 - 1) = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} (2a, 2b, a^2 + b^2 - 1). \end{aligned}$$

Die Gesamtabbildung

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{(1 : 0)\} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$$

besitzt insgesamt die Beschreibung

$$(u : v) \longmapsto \frac{1}{1 + \left|\frac{u}{v}\right|^2} \left( 2 \operatorname{Re} \left( \frac{u}{v} \right), 2 \operatorname{Im} \left( \frac{u}{v} \right), \left| \frac{u}{v} \right|^2 - 1 \right).$$

Mit  $u = a + bi$  und  $v = c + di$  schreibt man dies (unter Verwendung von  $|v|^2 = v\bar{v}$ ) als

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 + \left|\frac{u}{v}\right|^2} \left( 2 \operatorname{Re} \left( \frac{u}{v} \right), 2 \operatorname{Im} \left( \frac{u}{v} \right), \left| \frac{u}{v} \right|^2 - 1 \right) \\ &= \frac{1}{|u|^2 + |v|^2} (2 \operatorname{Re}(u\bar{v}), 2 \operatorname{Im}(u\bar{v}), |u|^2 - |v|^2) \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (2ac + 2bd, 2bc - 2ad, a^2 + b^2 - c^2 - d^2).$$

Diese Formel zeigt, dass die Abbildung für alle  $(u : v) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  definiert ist, wobei  $(1 : 0)$  auf den Nordpol  $(0, 0, 1)$  abgebildet wird. Es liegt also eine explizite Bijektion  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow S^2$  vor. Die Umkehrabbildung ist (für  $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1)$  mit  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ) durch

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2i : 1 - x_3)$$

gegeben. Wenn man eine normierte Repräsentierung dieses Punktes erhalten möchte, so muss man durch  $\sqrt{2 - 2x_3}$  dividieren.

Insbesondere erhält man eine explizite (in den natürlichen Topologien stetige) Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow S^2,$$

deren Fasern genau die punktierten komplexen Geraden sind.

Die natürliche Operation der  $GL_2(\mathbb{C})$  auf  $\mathbb{C}^2$  - und das gilt auch für jede endliche Untergruppe  $G \subseteq GL_2(\mathbb{C})$  - induziert eine Operation auf der Menge der eindimensionalen Untervektorräume (also der komplexen Geraden durch den Nullpunkt) und damit auf  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Eine Gerade  $H \subseteq \mathbb{C}^2$  wird durch  $\sigma \in GL_2(\mathbb{C})$  einfach auf die Bildgerade  $\sigma(H)$  abgebildet. Eine Gerade  $\langle(u, v)\rangle$  wird unter  $\sigma = \begin{pmatrix} \ell & m \\ n & p \end{pmatrix}$  auf die Gerade  $\langle(\ell u + mv, nu + pv)\rangle$  abgebildet, bzw. in homogenen Koordinaten

$$(u : v) \mapsto (\ell u + mv : nu + pv).$$

Dabei wirken Streckungen, also Abbildungen der Form  $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$  mit  $s \neq 0$ , trivial auf der Menge der Geraden und auf der projektiven Geraden. Da man jede invertierbare Matrix als Produkt einer solchen Streckungsmatrix und einer invertierbaren Matrix mit Determinante 1 schreiben kann, muss man im Wesentlichen die Operation der  $SL_2(\mathbb{C})$  auf der projektiven Geraden verstehen. Die einzige Matrix  $M \in SL_2(\mathbb{C})$  neben der Einheitsmatrix, die sämtliche Geraden auf sich selbst abbildet, ist

$$-E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**SATZ 7.13.** *Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus*

$$SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R}),$$

*dessen Kern gleich*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist. Die Abbildung kann explizit (mit  $u = a + bi$  und  $v = c + di$  unter der Bedingung  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ) durch

$$\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(-ad + bc) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(-ab + cd) \\ 2(-ac + bd) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

realisiert werden.

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt.  $\square$

**SATZ 7.14.** Die endlichen Untergruppen der  $SL_2(\mathbb{C})$  sind bis auf Isomorphie

- (1) die endlichen zyklischen Gruppen  $Z_n$ ,
- (2) die binären Diedergruppen  $BD_n$ ,  $n \geq 2$ ,
- (3) die binäre Tetraedergruppe  $BT$ ,
- (4) die binäre Oktaedergruppe  $BO$ ,
- (5) die binäre Ikosaedergruppe  $BI$ .

*Beweis.* Nach Lemma 7.12 können wir davon ausgehen, dass  $G \subseteq SU_2(\mathbb{C})$  ist. Es sei

$$\pi: SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$$

der surjektive Gruppenhomomorphismus aus Satz 7.13. Es sei  $H = \pi(G)$  die Bildgruppe von  $G$  unter dieser Abbildung, für die es aufgrund von Satz 51.8 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) starke Einschränkungen gibt. Wenn  $\#(G)$  ungerade ist, so enthält  $G$  kein Element der Ordnung 2. Also ist  $G \cap (\text{kern } \pi)$  trivial und somit ist  $G \rightarrow H$  ein Isomorphismus. Aufgrund der Klassifikation für endliche Symmetriegruppen muss  $G$  zyklisch sein. Sei also  $\#(G)$  gerade, sagen wir  $\#(G) = 2^m u$  mit  $u$  ungerade. Nach dem Satz von Sylow besitzt  $G$  eine Untergruppe mit  $2^m$  Elementen und damit insbesondere auch ein Element der Ordnung 2. Wegen Lemma 7.11 gibt es in  $SU_2(\mathbb{C})$  nur das Element  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  der Ordnung 2. Also ist  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G$  und somit ist  $\text{kern } \pi \subseteq G$ . Damit ist insbesondere

$$G = \pi^{-1}(\pi(G)),$$

d.h.  $G$  ist das Urbild zu einer endlichen Untergruppe  $H \subseteq SO_3(\mathbb{R})$ .  $H$  ist also eine der Untergruppen aus der Liste von Satz 51.8 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)). Zwei isomorphe Gruppen  $H_1, H_2 \subseteq SO_3(\mathbb{R})$  sind sogar konjugiert. Wenn  $\alpha \in SO_3(\mathbb{R})$  den inneren Automorphismus stiftet und  $\tilde{\alpha} \in SU_2(\mathbb{C})$  ein Urbild ist, so vermittelt  $\tilde{\alpha}$  einen Isomorphismus der Urbildgruppen  $\pi^{-1}(H_1)$  und  $\pi^{-1}(H_2)$ . Der Isomorphietyp von  $G$  ist also durch  $\pi(G)$  festgelegt. Wenn  $\pi(G) = D_n, T, O, I$  ist, so muss  $G = BD_n, BT, BO, BI$  sein, da der Isomorphietyp festgelegt ist und die in den definierenden Beispielen Beispiel 7.8, Beispiel 7.10, Beispiel 7.9 und Beispiel 7.11 beschriebenen Gruppen modulo dem Element der Ordnung 2 die entsprechenden reellen Symmetriegruppen ergeben.  $\square$

## Quotientensingularitäten

DEFINITION 7.15. Es sei  $K$  ein Körper und  $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$  eine endliche Untergruppe. Dann nennt man den Invariantenring  $K[X_1, \dots, X_n]^G$  (bzw. sein Spektrum) eine *Quotientensingularität*.

DEFINITION 7.16. Es sei  $K$  ein Körper und  $G \subseteq \mathrm{SL}_n(K)$  eine endliche Untergruppe. Dann nennt man den Invariantenring  $K[X_1, \dots, X_n]^G$  (bzw. sein Spektrum) eine *spezielle Quotientensingularität*.

Diese beiden Definitionen umfassen als Extremfall auch die Situation, wo der Invariantenring regulär ist, also im strengen Sinn überhaupt keine Singularität vorliegt. Es kann sein, dass ein kommutativer Ring sowohl zum Invariantenring zu  $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ ,  $G \not\subseteq \mathrm{SL}_n(K)$ , als auch zum Invariantenring zu

$$H \subseteq \mathrm{SL}_n(K)$$

isomorph ist. Ein Beispiel dafür ist der Polynomring selbst. Ein Beispiel für eine Quotientensingularität, die keine spezielle Quotientensingularität ist, ist der Veronesering

$$K[U, V]^{(\ell)} = K[U^\ell, U^{\ell-1}V, U^{\ell-2}V^2, \dots, UV^{\ell-1}, V^\ell] \subseteq K[U, V]$$

bei  $\ell \geq 3$ .



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 13
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 13