

## Analysis II

### Vorlesung 53

#### Der Satz über implizite Abbildungen



Die Küstenlinie ist die Nullfaser der Höhenabbildung. In den regulären Punkten der Küste kann man eine Tangente anlegen und die Küste lokal als Graph einer Funktion beschreiben. Ein singulärer Punkt einer Küste ergibt sich beispielsweise bei einer Meereseerhebung, die genau in einem Punkt an die Wasseroberfläche stößt, oder einem Sattelpunkt zwischen „zwei“ Inseln, der sich auf Meereseerhebung befindet.<sup>1</sup>

DEFINITION 53.1. Zu einer Abbildung

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei Mengen  $L$  und  $M$  heißt zu  $y \in M$  die Menge

$$F_y = \{x \in L \mid \varphi(x) = y\}$$

die *Faser* von  $\varphi$  über  $y$ .

Die Faser zu einem Punkt ist also einfach das Urbild  $\varphi^{-1}(\{y\})$  von  $y$ . Zu einem Punkt  $P \in L$  nennt man die Faser über  $\varphi(P)$  auch die *Faser durch  $P$* . Bei  $M = \mathbb{R}$  sagt man statt Fasern auch *Niveaumengen* oder, insbesondere bei  $L = \mathbb{R}^2$ , auch *Höhenlinien*.

---

<sup>1</sup>Dass man solche singulären Punkte in der Natur nur selten antrifft, liegt daran, dass das Höhenprofil der Erde nur endlich viele kritische Punkte und damit nur endlich viele Gipfel und Sattelpunkte besitzt. Es ist daher unwahrscheinlich, dass der Meeresspiegel genau auf der Höhe eines solchen kritischen Punktes liegt. Wenn man aber Ebbe und Flut betrachtet, so werden solche Punkte immer wieder durchlaufen.

BEISPIEL 53.2. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$ , eine Funktion in einer Variablen. Dazu kann man die Funktion in zwei Variablen,

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto y - f(x),$$

betrachten. Die Fasern von  $\varphi$  über  $c \in \mathbb{R}$  sind durch

$$F_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) + c\}$$

charakterisiert. D.h. die Faser über  $c$  ist einfach der Graph der durch  $x \mapsto f(x) + c$  definierten Funktion. Alle Fasern gehen durch eine Verschiebung ineinander über, sie sind parallel zueinander. Die Punkte einer jeden Faser stehen in Bijektion mit der  $x$ -Achse, indem nämlich  $x$  auf  $(x, f(x) + c)$  abgebildet wird.

BEISPIEL 53.3. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Da diese nur nichtnegative Werte annimmt, sind die Fasern zu  $z \in \mathbb{R}_-$  leer. Die Faser zum Wert 0 besteht aus dem einzigen Punkt  $(0, 0)$ . Die Faser zu einem positiven Wert  $z \in \mathbb{R}_+$  ist

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = z\},$$

das ist der Kreis mit dem Radius  $\sqrt{z}$ . Zu jedem Punkt  $P = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$  ist die Faser (oder die Niveaumenge) durch diesen Punkt also ein Kreis  $Z$ . Eine hinreichend kleine offene Ballumgebung  $U(P, \delta)$  von  $P$  enthält nur einen Teil des Kreisbogens, der homöomorph zu einem offenen Intervall ist. Die differenzierbare Abbildung

$$]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \sqrt{x_0^2 + y_0^2} (\cos t, \sin t)$$

(mit geeignet gewählten Intervallgrenzen) induziert dabei eine Homöomorphie zwischen  $]a, b[$  und dem Kreisbogenausschnitt  $Z \cap U(P, \delta)$ .

Der *Satz über implizite Abbildungen* wird zeigen, dass unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Fasern einer Abbildung sich *lokal* als Graphen von Abbildungen realisieren lassen.

Eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m)$$

führt unmittelbar zu einem Gleichungssystem

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n).$$

Die Lösungsmenge eines solchen Gleichungssystems ist gerade die Faser über  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Man kann sich fragen, wie zu gegebenem  $y = (y_1, \dots, y_m)$  die Lösungsmenge aussieht, welche Struktur sie hat und wie sie sich mit  $y$  verändert. Das „grobe Muster“ zeigt sich schon deutlich bei einem *linearen Gleichungssystem* in  $n$  Variablen und  $m$  Gleichungen. Dort sind bei  $n \geq m$ , und wenn die Gleichungen linear unabhängig sind, die Lösungsmengen

$(n - m)$ -dimensionale affine Untervektorräume des  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere sind alle Lösungsmengen gleich und besitzen die gleiche Dimension.

Das Bestimmen der Lösungsmengen ist im Allgemeinen sehr viel schwieriger als im linearen Fall und auch gar nicht effektiv durchführbar. Dennoch vermittelt die lineare Approximation durch das totale Differential den richtigen Ansatz für das Studium allgemeiner Fasern. Eine reichhaltige Strukturaussage über die Gestalt der Faser in einem Punkt  $P$  ist nur dann zu erwarten, wenn das totale Differential in  $P$  surjektiv ist. In diesem Fall ist der Kern des totalen Differentials, also die Lösungsmenge des durch diese lineare Abbildung gegebenen linearen Gleichungssystems, *tangential* an die Faser durch  $P$ , und man kann auf hinreichend kleinen offenen Mengen eine Bijektion zwischen dem Kern und der Faser stiften.



Der Querschnitt eines Achats. Die chemische Zusammensetzung variiert mit dem Ort und damit variiert auch die Frequenz des reflektierten Lichts, also die optische Erscheinung, mit dem Ort. Man sieht also die (verdickten) Fasern der Lichtabbildung.

BEISPIEL 53.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = x + y^2 + x^2y.$$

Der Punkt  $(0, 0)$  gehört zur Faser über 0, was kann man über die Gestalt der Faser durch diesen Punkt sagen? Die partiellen Ableitungen sind

$$(1 + 2xy, 2y + x^2).$$

Im Nullpunkt ist dies  $(1, 0)$ , der Kern dieser linearen Abbildung ist somit  $\mathbb{R}(0, 1)$ . Die Gleichung

$$x + y^2 + x^2y = 0$$

lässt sich sowohl nach  $x$  als auch nach  $y$  in gewissen Umgebungen der 0 auflösen. Für  $y = 0$  muss  $x = 0$  sein. Für  $y \neq 0$  ist

$$x^2 + \frac{x}{y} + y = 0$$

bzw. (für  $y \leq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ )

$$x = \pm \sqrt{\frac{1-4y^3}{4y^2}} - \frac{1}{2y}.$$

Dabei konvergiert die Lösung

$$x_1(y) = \sqrt{\frac{1-4y^3}{4y^2}} - \frac{1}{2y} = \frac{\sqrt{1-4y^3}-1}{2y}$$

für  $y \rightarrow 0$  gegen  $(0,0)$ , die Lösung

$$x_1(y) = -\sqrt{\frac{1-4y^3}{4y^2}} - \frac{1}{2y} = \frac{-\sqrt{1-4y^3}-1}{2y}$$

divergiert hingegen für  $y \rightarrow 0$  gegen  $-\infty$ . Daher liegt der Nullpunkt auf dem ersten „Lösungsstrang“, und in einer gewissen kleinen Umgebung des Nullpunktes wird die Faser vollständig durch den ersten Strang beschrieben (für  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$  gehen diese beiden Stränge ineinander über). Die Auflösung nach  $y$  ist durch

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^4}{4} - x} - \frac{x^2}{2}$$

gegeben. Hier treffen sich beide Stränge im Nullpunkt. Die Projektion der Faser auf die  $x$ -Achse ist in keiner noch so kleinen Umgebung der 0 eine Bijektion.

Die folgende Aussage heißt *Satz über implizite Abbildungen*.

SATZ 53.5. Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $a \in G$  und es sei  $Z = \varphi^{-1}(\varphi(a))$  die Faser durch  $a$ . Das totale Differential  $(D\varphi)_a$  sei surjektiv. Dann gibt es eine offene Menge  $W$  mit  $a \in W$ ,  $W \subseteq G$ , eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$  und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W$$

derart, dass  $\psi(V) \subseteq Z \cap W$  ist und  $\psi$  eine Bijektion

$$\psi: V \longrightarrow Z \cap W$$

induziert. Die Abbildung  $\psi$  ist in jedem Punkt  $Q \in V$  regulär und für das totale Differential von  $\psi$  gilt

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

*Beweis.* Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  der Kern des totalen Differentials  $(D\varphi)_a$ . Aufgrund der vorausgesetzten Surjektivität und der Dimensionsformel ist dies ein  $(n-m)$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ . Durch einen Basiswechsel können wir annehmen, dass  $K$  von den ersten  $n-m$  Standardvektoren  $e_1, \dots, e_{n-m}$  erzeugt ist (Der Unterraum  $\langle e_{n-m+1}, \dots, e_n \rangle$  wird dann bijektiv auf  $\mathbb{R}^m$  abgebildet). Es sei

$$p: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} = K, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-m})$$

die lineare Projektion auf  $K$  und es sei

$$p \times \varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m, \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-m}, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)),$$

die zusammengesetzte Abbildung. Diese ist selbst stetig differenzierbar und das totale Differential davon im Punkt  $a = (a_1, \dots, a_n)$  ist bijektiv, so dass wir darauf den Satz über die Umkehrabbildung anwenden können. Es gibt also offene Umgebungen  $a \in U_1$ ,  $U_1 \subseteq G$ , und  $(p(a), \varphi(a)) \in U_2$ ,  $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ , derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$(p \times \varphi)|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Für die offene Menge  $U_2$  gibt es offene Mengen

$$(a_1, \dots, a_{n-m}) \in V \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \text{ und } \varphi(a) = (b_1, \dots, b_m) \in V' \subseteq \mathbb{R}^m$$

mit  $V \times V' \subseteq U_2$ . Wir können den Diffeomorphismus  $(p \times \varphi)|_{U_1}$  auf das (offene) Urbild  $W$  von  $V \times V'$  einschränken. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

bzw. die Einschränkung davon

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \times V' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & V' \end{array} .$$

Die Faser über  $b = \varphi(a)$  ist  $V \times \{(b_1, \dots, b_m)\}$ . Diese Menge steht über die horizontale Abbildung  $p \times \varphi$  in Bijektion mit der Faser von  $\varphi$  über  $b$ , also mit  $Z \cap W$ . Wir betrachten nun die Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W, (x_1, \dots, x_{n-m}) \longmapsto (p \times \varphi)^{-1}(x_1, \dots, x_{n-m}, b_1, \dots, b_m).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(x_1, \dots, x_{n-m})) &= \varphi((p \times \varphi)^{-1}(x_1, \dots, x_{n-m}, b_1, \dots, b_m)) \\ &= (b_1, \dots, b_m), \end{aligned}$$

so dass das Bild von  $\psi$  in der Tat in  $Z \cap W$  landet. Die Injektivität von  $\psi$  ist klar. Sei nun  $(x_1, \dots, x_n) \in Z \cap W$ . Dann ist

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_m)$$

und daher ist

$$(p \times \varphi)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-m}, b_1, \dots, b_m).$$

Also ist

$$\psi(x_1, \dots, x_{n-m}) = (x_1, \dots, x_n)$$

im Bild von  $\psi$ . Die Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W$$

ist nach Konstruktion stetig differenzierbar und das totale Differential ist in jedem Punkt  $Q \in V$  injektiv, da  $\psi$  die Hintereinanderschaltung einer afflinearen Injektion und eines Diffeomorphismus ist. Da  $\psi(V)$  in der Faser von  $\varphi$  über  $b$  liegt, ist  $\varphi \circ \psi = b$  konstant. Nach der Kettenregel ist  $(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0$ .  $\square$

**BEMERKUNG 53.6.** Den Satz über implizite Abbildungen kann man auch so formulieren: Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und es sei  $\varphi: G \rightarrow W$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $a \in G$  ein Punkt, in dem das totale Differential  $(D\varphi)_a$  surjektiv sei, und es sei  $V = E_1 \oplus E_2$  eine direkte Summenzerlegung von  $V$  in Untervektorräume  $E_1$  und  $E_2$  (mit  $a = (a_1, a_2)$ ) derart, dass  $E_1 = \ker(D\varphi)_a$  und  $(D\varphi)_a|_{E_2}$  surjektiv (und damit bijektiv ist) ist (dadurch ist  $E_1$ , aber nicht  $E_2$  eindeutig festgelegt). Dann gibt es offene Mengen  $U_1 \subseteq E_1$  und  $U_2 \subseteq E_2$  mit  $U_1 \times U_2 \subseteq G$  und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\theta: U_1 \longrightarrow U_2$$

derart, dass der Graph von  $\theta$ , also

$$\Gamma = \{(x, \theta(x)) \mid x \in U_1\},$$

mit der Faser über  $b = \varphi(a)$ , geschnitten mit  $U_1 \times U_2$ , also

$$\{(x, v) \in U_1 \times U_2 \mid \varphi(x, v) = b\},$$

übereinstimmt. Sind auf  $E_1$  und  $E_2$  jeweils Basen fixiert mit Koordinaten  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  bzw.  $(v_1, \dots, v_m)$  ( $n$  und  $m$  seien die Dimensionen von  $V$  und  $W$ ), so wird lokal die Faser durch den Graph von  $m$  Funktionen  $\theta_1, \dots, \theta_m$  in den  $n - m$  Variablen  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  gegeben. Die Faser ist dann nach den Variablen  $(v_1, \dots, v_m)$  „aufgelöst“, d.h. diese Koordinaten lassen sich unter der impliziten Bedingung, dass die Punkte zur Faser gehören sollen, explizit durch die anderen, frei wählbaren Koordinaten  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  ausdrücken.

**DEFINITION 53.7.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt, in dem das totale Differential  $(D\varphi)_P$  surjektiv sei, und sei  $Y$  die Faser von  $\varphi$  durch  $P$ . Dann nennt man

$$T_P Y := \ker(D\varphi)_P = \{v \in V \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

den *Tangentialraum* an die Faser  $Y$  in  $P$ .

Häufig wird auch der an  $P$  angelegte affine Raum

$$P + \ker(D\varphi)_P = \{P + v \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

als Tangentialraum bezeichnet. In diesem Sinne ist der Tangentialraum kein Untervektorraum von  $V$ , da er nicht durch den Nullpunkt verlaufen muss, er ist aber die Verschiebung eines Untervektorraums. Solche Räume nennt man *affin-lineare Unterräume*. Sie besitzen eine sinnvoll definierte Dimension, nämlich die Dimension des zugehörigen Vektorraumes. Der Tangentialraum an einem regulären Punkt zu einer Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  besitzt die Dimension  $n - m$ . Der Satz über implizite Abbildungen besagt, dass eine offene Teilmenge des Tangentialraumes an  $P$  sich bijektiv und differenzierbar auf eine offene Umgebung von  $P$  auf der Faser abbilden lässt. Der Tangentialraum ist also eine *lineare Approximation* der Faser.

BEISPIEL 53.8. Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Die Jacobi-Matrix dieser Funktion ist

$$\left( \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right),$$

so dass die Funktion in jedem Punkt regulär ist und der Satz über implizite Abbildungen anwendbar ist. In diesem Fall kann man die Fasern auch direkt bestimmen. Die Bedingung

$$\frac{x}{y} = c$$

mit  $c \in \mathbb{R}$  führt auf

$$x = cy,$$

so dass die Fasern der Abbildung die *punktierten Geraden* (d.h. ein Punkt ist rausgenommen) durch den Nullpunkt sind (außer der  $x$ -Achse, auf der die Abbildung nicht definiert ist). Damit hat man explizit eine Auflösung der Faser nach  $x$  gegeben. Dass die Fasern unter dieser *Divisionsabbildung* (punktierte) Geraden sind ist ein Ausdruck davon, dass man Brüche erweitern kann, ohne ihren Wert zu ändern.

Der Tangentialraum in  $P = (x, y)$  wird nach der Definition durch den Kern der Jacobi-Matrix gegeben, und dieser wird durch den Vektor  $(x, y)$  selbst aufgespannt. Der Tangentialraum an  $P$  ist hier also die Gerade, die durch  $P$  und den Nullpunkt definiert ist, und stimmt (bis auf den Nullpunkt) mit der Faser überein.

BEISPIEL 53.9. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y$$

und knüpfen an Beispiel 50.4 an. Der einzige kritische Punkt ist  $P = (1, 0)$ , ansonsten ist die Abbildung in jedem Punkt regulär und daher lassen sich

lokal die Fasern als Graphen beschreiben. Die Faser über 1 besteht aus der durch  $x = 1$  gegebenen Geraden und der durch  $y = 0$  gegebenen Halbgeraden, die sich im kritischen Punkt senkrecht schneiden. Ansonsten sind die Fasern durch die Gleichung

$$x^y = c$$

mit einem  $c \in \mathbb{R}_+$  bestimmt (für nichtpositives  $c$  sind die Fasern leer). Wir schreiben diese Bedingung als  $e^{(\ln x)y} = c$  und daher als

$$(\ln x)y = \ln c.$$

Bei  $x \neq 1$  kann man dies zu

$$y = \frac{\ln c}{\ln x}$$

auflösen und bei  $y \neq 0$  zu

$$x = e^{\frac{\ln c}{y}}.$$



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Rynda Bay Beach.jpg , Autor = Benutzer Straitgate auf Commons, Lizenz = PD	1
Quelle = Agate1 hg.jpg , Autor = Benutzer Hgrobe auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	3