證 $\dfrac{bz+cy}{b-c}=\dfrac{cx+az}{c-a}=\dfrac{ay+bx}{a-b}=k$

トスレバ $bz+cy=(b-c)k,$

$cx+az=(c-a)k,$

$ay+bx=(a-b)k.$

邊々相加ヘテ $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$

$=\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}k=0,$

兩邊ニ $ax+by+cz$ ヲ加フレバ

$(a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z$

$=ax+by+cz,$

即チ $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz.$

9. 若シ $x:y=(x+z)^2:(y+z)^2$ ニシテ $x\neq y$ ナレバ z ハ x ト y トノ等比中項ナリ. 其ノ證ヲ問フ. [43. 商船.]

證 210 頁 11 題ニ同ジ.

10. $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ ト $11\sqrt{7}+13\sqrt{5}$ トノ比例中項ヲ求メヨ. [44. 各高等.]

解 所要ノ比例中項ヲ x トスレバ

$x^2=(\sqrt{7}-\sqrt{5})(11\sqrt{7}+13\sqrt{5})$

$=11\times7+2\sqrt{35}-13\times5$

$=12+2\sqrt{35}=(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2,$

故ニ $x=\pm(\sqrt{7}+\sqrt{5}).$

11. $5+7\sqrt{2}$ ト $\dfrac{29+47\sqrt{2}}{73}$ トノ比例中項ヲ求ム. [44. 東. 高. 師.]

解 $(5+7\sqrt{2})\times\dfrac{29+47\sqrt{2}}{73}$

$=\dfrac{438\sqrt{2}+803}{73}$

$=6\sqrt{2}+11=(3+\sqrt{2})^2,$

故ニ所要ノ比例中項ハ $\pm(3+\sqrt{2})$ ナリ.

12. $2x^2+12y^2=11xy$ ナルトキ $x:y$ ノ値ヲ求ム. [44. 海. 兵.]

解 所題ノ式 $2x^2+12y^2=11xy$ ノ兩邊ヲ y^2 ニテ除スレバ $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-11\dfrac{x}{y}+12=0,$

或ハ $\left(2\dfrac{x}{y}-3\right)\left(\dfrac{x}{y}-4\right)=0,$ 故ニ $2\dfrac{x}{y}-3=0,$

或ハ $\dfrac{x}{y}-4=0,$ 從ヒテ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$ 或ハ 4.

依リテ所要ノ $x:y=\dfrac{3}{2}$ 或ハ 4 ナリ.

13. 次ノ方程式ヨリ $\sqrt{x-y}:\sqrt{x+y}$ ノ値ヲ計算セヨ. [但小數第三位マデ].

$\dfrac{5y-4x}{2x+7y}=3.$ [44. 東. 高. 商.]

解 所題ノ式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$5y-4x=6x+21y,$$

故ニ $5x=-8y,$ 故ニ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-8}{5}.$

依リテ $$\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\sqrt{\frac{-8-5}{-8+5}}=\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$=\sqrt{4.\dot{3}}=2.081\ldots\ldots$$

14. 次ノ方程式ヲ解ケ. [43.長.高.商.]

(a) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c},\ ax+by+cz=s.$

(b) $\dfrac{a-x}{b}-\dfrac{b}{a-x}=\dfrac{a}{b-x}-\dfrac{b-x}{a}.$

解 (a) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$

トスレバ $$k=\frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2}$$

$$=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}=\frac{s}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\therefore\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{s}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\therefore\ x=\frac{as}{a^2+b^2+c^2},\quad y=\frac{bs}{a^2+b^2+c^2},$$

$$z=\frac{cs}{a^2+b^2+c^2}.$$

(b) 與ヘラレタル式ヨリ

$$\frac{a-x}{b}+\frac{b-x}{a}-\left(\frac{b}{a-x}+\frac{a}{b-x}\right)=0,$$

即チ $$\frac{a^2+b^2-(a+b)x}{ab}-\frac{a^2+b^2-(a+b)x}{(a-x)(b-x)}=0,$$

$$\therefore\ a^2+b^2-(a+b)x=0\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)$$

或ハ $$\frac{1}{ab}-\frac{1}{(a-x)(b-x)}=0\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)$$

(1) ヨリ $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b},$

(2) ヨリ $\dfrac{(a-x)(b-x)-ab}{ab(a-x)(b-x)}=0,$

$$\therefore\ (a-x)(b-x)-ab=0,$$

即チ $x^2-(a+b)x=0,$

$$\therefore\ x=0,\ 或ハ\ x=a+b,$$

故ニ所要ノ根ハ次ノ三ツナリ.

$$x=\frac{a^2+b^2}{a+b},\quad x=0,\quad x=a+b.$$

15. $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{8},\ x+y+z=10$

ヲ解ケ. [43.熊.高.工.]

解 與ヘラレタル式ヨリ

$$\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{7}=\frac{z+x}{8}$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{5+7+8}=\frac{2\times 10}{20}=1,$$

$$\therefore\ x+y=5\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)$$

$$y+z=7\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)$$

$$z+x=8 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

而シテ與ヘラレタル第二ノ式ヲ (2), (3), (1) ニ組合セテ $x=3,\quad y=2,\quad z=5$

ヲ得.

16. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{array}\right\}$ ヨリ x, y, z ノ値ヲ求メヨ. [44. 熊. 高. 工.]

解 $x^2+y^2+z^2=1$ ナルユヱ

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2},$$

依リテ $x^2=\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

故ニ $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$.

同様ニ $y=\pm\dfrac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$,

$$z=\pm\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

17. 二數アリ, 其ノ和, 差及ビ各數ノ自乘ノ和ノ比ガソレゾレ 5 : 3 : 51 ナリ, 各數ヲ問フ. [43. 海. 經.]

解 二ツノ數ヲ x, y トスレバ

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{5}{3} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}=\frac{3}{51} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

今 $y=mx$ トスレバ

(1) ヨリ $\dfrac{x+mx}{x-mx}=\dfrac{5}{3}$,

即チ $\dfrac{1+m}{1-m}=\dfrac{5}{3}$,

之ヨリ $m=\dfrac{1}{4}$ ヲ得.

(2) ヨリ $\dfrac{x-mx}{x^2+m^2x^2}=\dfrac{1}{17}$,

即チ $\dfrac{1-m}{x(1+m^2)}=\dfrac{1}{17}$,

之ニ m ノ値ヲ代入スレバ $\dfrac{1-\dfrac{1}{4}}{x\left(1+\dfrac{1}{16}\right)}=\dfrac{1}{17}$,

之ヨリ $x=12$ ヲ得ベク,

從ヒテ $y=\dfrac{1}{4}\times 12=3$ ヲ得.

18. 相似三角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シキコトヲ證セヨ. [44. 東. 都. 鐵. 講.]

證 相似三角形ノ對應スル邊ヲ a, a', 之ニ對スル高サヲ h, h', 面積ヲ S, S' トスレバ

$$S:S'=\frac{1}{2}ah:\frac{1}{2}a'h'=ah:a'h',$$

然ルニ $a:a'=h:h'$,

故ニ $a^2:a'^2=ah:a'h'$,

依リテ $S:S'=a^2:a'^2$.

19. 甲乙二人アリ池ノ周圍ヲ競走シ,五周シテ其ノ勝敗ヲ決セントスルニ當リ,三周セシトキ乙ハ甲ニ後ルルコト 75 間ナリ,此ノトキ乙ハ其ノ速サヲ增シテ甲ノ今マデノ速サト等シクナリ,甲ハ之ニ反シ其ノ速サヲ減ジテ乙ノ今マデノ速サト等シクナリ,最後ニ至リ甲ハ乙ヨリ 15 間ダケ勝テリト云フ,池ノ周圍及ビ甲乙始ノ速サノ比如何. [44. 山. 高. 商.]

解 池ノ周圍ヲ x 間, 甲乙始ノ毎時ノ速サヲソレゾレ y 間, z 間トスレバ

$$3x:3x-75=y:z \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$2x:2x+75-15=z:y \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2) ヨリ $3x:3x-75=2x+60:2x$,

依リテ $3x:75=2x+60:60$,

卽チ $x:25=x+30:30$,

故ニ $x:x+30=25:30$,

卽チ $x:30=25:5$,

卽チ $x:30=5:1$.

之ヨリ $x=150$.

從ヒテ x ノ此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ $y:z=6:5$,

故ニ 池ノ周圍 150 間,

甲乙ノ始ノ速サノ比ハ 6:5 ナリ.

20. 酒ヲ入レシ桶アリ, 其ノ中ヨリ 9 升ヲ出シテ同量ノ水ヲ混ジ更ニ此ノ中ヨリ 9 升ヲ出シテ再ビ同量ノ水ヲ混ゼシニ桶ノ中ノ水ト酒トノ割合ハ 9 ト 16 トノ如シト云フ, 最初幾何ノ酒存セシカ. [43. 山. 高. 商.]

解 最初ノ酒ノ量ヲ x 升トスレバ, 此ノ中 9 升ヲ出シ同量ノ水ヲ以テ補ヒタルトキ其ノ酒ノ量ハ全量ノ $\frac{x-9}{x}$, 再ビ斯ノ如クスレバ酒ノ量ハ全量ノ $\left(\frac{x-9}{x}\right)^2$ トナル, 而シテ此ノトキ酒ト水トノ比ハ 16:9 トナリシヲ以テ, 酒ハ全量ノ $\frac{16}{25}$ ナリ,

故ニ $\left(\frac{x-9}{x}\right)^2=\frac{16}{25}$, 之ヨリ $\frac{x-9}{x}=\pm\frac{4}{5}$,

從ヒテ $x=45$ 或ハ 5 ヲ得, 然ルニ 5 ハ題意ニ適セズ,

故ニ $x=45$, 卽チ 4 斗 5 升.

21. 甲ト乙トガ $a:b$ ノ割合ニ出資シテ組織

セル組合アリ，今其ノ組織ヲ變ジテ丙ヲ組合員トシテ之ヲ加入セシメ，且資本金ヲ增減セズシテ甲乙丙ノ出資額ヲ同額ニセンニハ丙ハ其ノ出資トシテ c 圓ヲ支拂フベシト云フ，然ラバ此ノ c 圓ヲ甲ト乙トニテ何程ヅツ分配スベキカ．

[43. 神. 高. 商.]

解 甲乙ノ出資ヲソレゾレ x 圓，y 圓トスレバ

$$x:y=a:b \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

又丙ガ加入スルモ其ノ資本金ニ增減ナシトスレバ一人分ノ資本金ハ $\dfrac{x+y}{3}$ 圓ナルガ故ニ

$$\frac{x+y}{3}=c \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$

(1) ヨリ $y=\dfrac{b}{a}x$，之ヲ (2) ニ代入シ

$$x+\frac{b}{a}x=3c,\ \therefore\ x=\frac{3ac}{a+b},\ 從ヒテ\ y=\frac{3bc}{a+b},$$

故ニ甲ノ分配額ノ圓數ハ $\dfrac{3ac}{a+b}-c=\dfrac{c(2a-b)}{a+b}$，

乙ノ分配額ノ圓數ハ $\dfrac{3bc}{a+b}-c=\dfrac{c(2b-a)}{a+b}$．

22. 彈性ノ絲アリ，其ノ長サハ $a+bx$ ニテ與ヘラル，但 x ハ牽引力，a 及ビ b ハ常數ヲ表ハス．今此ノ絲ノ一端ヲ支持シ，他端ニ重サ 8 瓦

ヲ懸クルトキハ其ノ長サ 13糎.6 トナリ，又 20 瓦ヲ懸クルトキハ 18糎.4 トナルト云フ．問フ 12 瓦ヲ懸クルトキノ此ノ絲ノ長サ，及ビ重サヲ懸ケザルトキノ長サ各幾何．　[43. 大. 高. 工.]

解 他端ニ重サ 8 瓦ヲ懸クルトキノ長サハ 13糎.6 ナルユヱ $a+8b=13.6 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$

同様ニ 20 瓦ヲ懸クルトキハ

$$a+20b=18.4 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ニ依リテ $12b=4.8$, $\therefore\ b=0.4$,

從ヒテ (1) ヨリ $a=10.4$,

故ニ 12 瓦ヲ懸クルトキノ長サハ

$$10.4+0.4\times 12=15.2,\ 即チ\ 15糎.2,$$

又重サヲ懸ケザルトキハ $a+bx$ ニ於テ $x=0$ ナルユヱ此ノ値ハ a トナリ．即チ 10糎.4 ナリ．

23. 每時 24 哩ヲ進行シ得ベキ機關車アリ，今此ノ機關車ヲ以テ客車ヲ牽カシムルトキハ其ノ速サハ客車ノ數ノ平方根ニ比例シテ減ズルモノトス，而シテ此ノ機關車ヲ以テ客車 4 輛ヲ牽カシムルトキハ每時 20 哩ヲ進行シ得ベシト云フ，此ノ機關車ノ牽引シ得ル客車數ノ最大限度ヲ示セ．　[44. 海. 經.]

解 客車 x 輛ヲ牽カシムルトキ減ズル速サヲ y 哩トスレバ $\sqrt{4}:\sqrt{x}=24-20:y,$

故ニ $2y=4\sqrt{x},$ 卽チ $y=2\sqrt{x}.$

依リテ $24>2\sqrt{x},$ 卽チ $12>\sqrt{x}.$

而シテ y ハ正ナルベキユエ $\sqrt{x}$ ハ正ナリ.

依リテ $144>x,$

故ニ所要ノ車輛數ハ 143 輛ナリ.

J′. 級數

1. 等差級數ノ初項ヲ a, 項數ヲ n, 末項ヲ l, 公差ヲ d, 總和ヲ S トシテ次ノ諸式ヲ作レ.

(1) a, n, d ヲ用ヒテ l ヲ表ハス式.

(2) $a, d,$ S ヲ用ヒテ n ヲ表ハス式.

(3) a, n, d ヲ用ヒテ S ヲ表ハス式.

(4) $n, l,$ S ヲ用ヒテ d ヲ表ハス式.

[44. 陸. 士.]

解 (1) 第 n 項 l ハ公式ヨリ

$$l=a+(n-1)d.$$

(2) 公式 $\mathrm{S}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ ヨリ

$$dn^2+(2a-d)n-2\mathrm{S}=0,$$

之ヨリ $$n=\frac{-(2a-d)\pm\sqrt{(2a-d)^2+8d\mathrm{S}}}{2d}.$$

(3) 公式ヨリ直チニ

$$\mathrm{S}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

(4) 公式 $l=a+(n-1)d,$

之ヨリ $a=l-(n-1)d,$

之ヲ公式 $\mathrm{S}=\frac{n}{2}(a+l)$

ニ代入スレバ

$$\mathrm{S}=\frac{n}{2}\{2l-(n-1)d\},$$

之ヨリ $$d=\frac{2(nl-\mathrm{S})}{n(n-1)}.$$

2. 5+7+9+.........ノ和ガ 480 トナルトキ其ノ項數ヲ求メヨ. [43. 陸. 經.]

解 $\mathrm{S}=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$

ニ於テ $a=5,$ $d=2,$ $\mathrm{S}=480$

トスレバ $480=n(n+4).$

之ヨリ得ベキ n ノ二ツノ値ノ中, 正ノ數ヲ採レバ $n=20,$ 卽チ 20項 ナリ.

3. 次ノ級數ニ於テ幾項マデ取ラバ其ノ和ガ 99 トナルカ.　　[43. 農. 大. 實.]

$$1\frac{1}{2}+3+4\frac{1}{2}+6+\dots\dots\dots$$

解 與ヘラレタル級數ハ初項 $1\frac{1}{2}$, 公差 $1\frac{1}{2}$ ナル等差級數ナルガ故ニ所要ノ項數ヲ n トスレバ $\frac{n}{2}\left\{1\frac{1}{2}\times 2+(n-1)\times 1\frac{1}{2}\right\}=99.$

之ヲ解ケバ　　$n^2+n-132=0,$

卽チ　　$(n+12)(n-11)=0,$

而シテ n ハ正ノ整數ナルベキヲ以テ

$n-11=0$ ヨリ得ベキ $n=11.$

卽チ 11項 ナリ.

4. n 項ノ和ガ n^2 ニ等シキ等差級數アリ, 此ノ級數ニ於テ始ノ 10 項ノ和ヲ求ム.

[44. 水. 講.]

解 n 項ノ和ガ n^2 ナラバ

10 項ノ和ハ $10^2=100$ ナリ.

5. 等差級數ノ初項ハ 7, 末項ハ 42 ニシテ其ノ和 196 ナルトキ其ノ級數ヲ問フ. [44. 陸. 經.]

解 所要ノ級數ノ公差ヲ d, 項數ヲ n トスレバ

$$7+(n-1)d=42 \quad \dots\ \dots\ \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}n(7+42)=196 \quad \dots\ \dots\ \dots \quad (2)$$

(2) ヨリ $n=8$, 此ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ $d=5$, 依リテ所要ノ級數ハ初項 7, 公差 5, 項數 8, 卽チ 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42 ナリ.

6. 等差級數ノ m 項ノ和ハ n ニ等シク, 又 n 項ノ和ハ m ニ等シキトキ $(m+n)$項ノ和ヲ求ム.

[44. 仙. 高. 工.]

解 此ノ級數ノ初項ヲ a, 公差ヲ d トシ, 所要ノ値ヲ x トスレバ

$$n=\frac{1}{2}m\{2a+(m-1)d\} \quad \dots\ \dots\ \dots \quad (1)$$

$$m=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}\dots \quad \dots\ \dots\ \dots \quad (2)$$

$$x=\frac{1}{2}(m+n)\{2a+(m+n-1)d\} \quad \dots \quad (3)$$

(1), (2) ヲ邊々相減ズレバ

$$n-m=\frac{1}{2}\{2a(m-n)+(m^2-n^2-m+n)d\}$$

$$=\frac{1}{2}(m-n)\{2a+(m+n-1)d\},$$

而シテ　$n-m\neq 0$ ナルユヱ

$$-1=\frac{1}{2}\{2a+(m+n-1)d\},$$

之ヲ (3) ニ代入シテ　$x=-(m+n).$

7. 與ヘラレタル二ツノ數 a, b ノ間ニ m 個ノ

等差中項ヲ挿入スルトキ, a ヨリ計ヘテ r 番目ノ項ヲ求メヨ. [43. 各高等.]

解 挿入スベキ m 項ニ兩端二項ヲ合セテ級數ノ全項數ハ $m+2$ トナル, 故ニ公差ヲ d ニテ表ハセバ $b=a+(m+1)d$,

之ヨリ $d=\dfrac{b-a}{m+1}$ ヲ得,

而シテ a ヨリ計ヘ第 r 番目ノ項ハ

$$a+(r-1)d,\ 即チ\ a+\frac{(r-1)(b-a)}{m+1}.$$

8. 等差級數アリ, 其ノ總和ハ 63 ニシテ, 又其ノ初項ト第三項トノ和ハ 24, 第二項ト第六項トノ和ハ 18 ナリ, 項數ヲ問フ. [44. 東. 高. 商.]

解 初項ヲ a, 公差ヲ d, 項數ヲ n トスレバ

$$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=63 \ \cdots\ \cdots \quad (1)$$

$$a+(a+2d)=24 \ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)$$

$$(a+d)+(a+5d)=18 \ \cdots\ \cdots \quad (3)$$

(2) ヨリ $a+d=12$ ……………… (4)

(3) ヨリ $a+3d=9$ ……………… (5)

(4), (5) ヨリ $a=\dfrac{27}{2},\ d=-\dfrac{3}{2}.$

之ヲ (1) ニ代入シテ $\dfrac{n}{2}\left\{27-\dfrac{3}{2}(n-1)\right\}=63.$

簡單ニシテ $n^2-19n+84=0,$

即チ $(n-7)(n-12)=0$, 故ニ $n=7$, 或ハ 12,

即チ 所要ノ項數ハ 7 項, 或ハ 12 項ナリ.

9. 第一項ヨリ第四項マデノ和 68, 第六項ヨリ第十項マデノ和 30 ナル等差級數ノ第十五項ヨリ第三十項マデノ和ヲ求ム. [43. 海. 機.]

解 初項ヲ a, 公差ヲ d ニテ表ハセバ第四項, 第六項, 第十項, 第十五項, 第三十項ハソレゾレ

$$a+3d,\ a+5d,\ a+9d,\ a+14d,\ a+29d$$

ニテ表ハサル, 而シテ初項ヨリ第四項マデ, 第六項ヨリ第十項マデ, 第十五項ヨリ第三十項マデノ項數ハソレゾレ 4, 5, 16 ナルユヱ

$$\frac{4}{2}\{a+(a+3d)\},$$

即チ $4a+6d=68$ ……………… (1)

$$\frac{5}{2}\{(a+5d)+(a+9d)\},$$

即チ $5a+35d=30$ ……………… (2)

(1) ヨリ $2a+3d=34$ ……………… (3)

(2) ヨリ $a+7d=6$ ……………… (4)

(4)×2−(3) ヨリ $d=-2,$

從ヒテ (4) ヨリ $a=20$

ヲ得. 次ニ所要ノ和ヲ S ニテ表ハセバ

$$S=\frac{16}{2}\{(a+14d)+(a+29d)\}$$

$$=16\left(a+\frac{43}{2}d\right)=-368.$$

10. 次式ヲ簡單ニセヨ. [44. 商船.]

$$\frac{x.x^2.x^3\ldots\ldots x^{10}}{\{(x^2)^5.(x^3)^6\}^2}\div\frac{x.x^2.x^4\ldots\ldots x^{16}}{\{(x^2)^8+(x^4)^4\}^2}.$$

解 $x.x^2.x^3\ldots\ldots x^{10}=x^{1+2+\cdots+10}=x^{10\times\frac{11}{2}}=x^{55}$,

及ビ $\{(x^2)^5.(x^3)^6\}^2=(x^{10}.x^{18})^2=(x^{28})^2=x^{56}$

ナルヲ以テ $\dfrac{x.x^2.x^3\ldots\ldots x^{10}}{\{(x^2)^5.(x^3)^6\}^2}=\dfrac{x^{55}}{x^{56}}=\dfrac{1}{x}$,

又 $x.x^2.x^4\ldots\ldots x^{16}=x^{1+2+4+\cdots+16}=x^{\frac{16\cdot2-1}{2-1}}=x^{31}$,

及ビ $\{(x^2)^8+(x^4)^4\}^2=(x^{16}+x^{16})^2=(2x^{16})^2=4x^{32}$,

故ニ $\dfrac{x.x^2.x^4\ldots\ldots x^{16}}{\{(x^2)^8+(x^4)^4\}^2}=\dfrac{x^{31}}{4x^{32}}=\dfrac{1}{4x}$,

故ニ 所題ノ式$=\dfrac{1}{x}\div\dfrac{1}{4x}=4.$

11. 等比級數 $1, r, r^2,\ldots\ldots, r^{n-1}, r^n$ ノ總和ヲ求ム. [44. 東.部.蠶.講.]

解 所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=1+r+r^2+\ldots\ldots+r^n,$$

$$Sr=\quad r+r^2+\ldots\ldots+r^n+r^{n+1},$$

邊々相減ズレバ $S(1-r)=1-r^{n+1}$,

故ニ $S=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}.$

12. 次ノ級數ノ無限項マデノ和ヲ小數第三位マデ求メ, 以下四捨五入セヨ.

[44. 專.入.檢.]

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

解 所題ノ級數ハ初項 1, 公比 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナル等比級數ナリ. 故ニ無限項マデノ和ハ公式ニ依リテ $1\Big/\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=2+\sqrt{2}=2+1.4142\ldots\doteqdot3.414.$

13. 1.111... ナル循環小數ヲ分數ニ直セ.

[44. 上.蠶.專.]

解 I. $1.111\ldots=1+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{10^3}+\ldots\ldots$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}.$$

解 II. $x=1.111\ldots$ トスレバ

$$10x=11.111\ldots,$$

邊々相減ジテ $9x=10$,

故ニ $x=\dfrac{10}{9}.$

14. 次ノ級數ノ第 n 項マデノ和ヲ求メヨ.

$(a-b)+(a^2-2b)+(a^3-3b)+(a^4-4b)+\ldots\ldots$

[44. 農.大.實.]

解　所題ノ級數

$=a+a^2+a^3+a^4+\dots\dots-(b+2b+3b+\dots\dots)$,

故ニ第 n 項マデノ和ハ

$$\frac{a(a^n-1)}{a-1}-\frac{n}{2}(b+nb)=\frac{a^{n+1}-a}{a-1}-\frac{n(n+1)}{2}b.$$

15.　G.P. アリ，初項ヨリ p 番目マデト，$2p$ 番目マデト，$3p$ 番目マデトノ項ノ和ヲソレゾレ x, y, z トスレバ $x, y, y+z-x$ ハ又 G.P. ヲナスコトヲ證セヨ．　[44. 大.高.工.]

證　初項ヲ a，公比ヲ r トスレバ

$$x=\frac{a(1-r^p)}{1-r},\quad y=\frac{a(1-r^{2p})}{1-r},\quad z=\frac{a(1-r^{3p})}{1-r}.$$

故ニ　$$y+z-x=\frac{a}{1-r}\{(1-r^{2p})+(1-r^{3p})-(1-r^p)\}$$

$$=\frac{a}{1-r}\{(1+r^p)-r^{2p}(1+r^p)\}$$

$$=\frac{a}{1-r}(1+r^p)(1-r^{2p}).$$

依リテ　$x(y+z-x)$

$$=\frac{a}{1-r}(1-r^p)\times\frac{a}{1-r}(1+r^p)(1-r^{2p})$$

$$=\left(\frac{a}{1-r}\right)^2(1-r^{2p})(1-r^{2p})$$

$$=\left\{\frac{a}{1-r}(1-r^{2p})\right\}^2=y^2.$$

即チ　$x, y, y+z-x$ ハ G.P. ヲナス．

16.　p, a, b, q ハ等差級數ヲナシ；p, c, d, q ハ等比級數ヲナシ；p, e, f, q ハ調和級數ヲナストキハ $pq=cd=af=be$ ナルコトヲ證セヨ．

[44. 神.高.商.]

證　級數ノ定義ニ依リテ

$$p-a=a-b=b-q \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$p:c=d:q \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}-\frac{1}{f}=\frac{1}{f}-\frac{1}{q} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

(2) ヨリ $pq=cd$, (1) ヨリ $a=\dfrac{2p+q}{3}$, $b=\dfrac{2q+p}{3}$,

(3) ヨリ　$e=\dfrac{3pq}{2q+p}$,　$f=\dfrac{3pq}{2p+q}$.

故ニ　$$af=\frac{2p+q}{3}\times\frac{3pq}{2p+q}=pq,$$

$$be=\frac{2q+p}{3}\times\frac{3pq}{2q+p}=pq,$$

故ニ　$pq=cd=af=be$.

17.　P, Q, R ガソレゾレ (1) 等差級數，(2) 等比級數，(3) 調和級數ノ第 p 項，第 q 項，第 r 項ナルトキハ

(1)　$P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)=0$.

(2)　$P^{q-r}.Q^{r-p}.R^{p-q}=1$.

(3)　$QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0$

ナルコトヲ證セヨ．　[44. 海.經.]

證 (1) 初項ヲ a, 公差ヲ d トスレバ

$$P=a+(p-1)d,$$

此ノ兩邊ニ $q-r$ ヲ乘ズレバ

$$P(q-r)=a(q-r)+(p-1)(q-r)d,$$

Q, R ニ就キテモ亦同樣ノ式ヲ得.

依リテ $\Sigma P(q-r)=\Sigma a(q-r)+\Sigma(p-1)(q-r)d$

$$=a\Sigma(q-r)+d\{\Sigma p(q-r)-\Sigma(q-r)\}.$$

然ルニ $\Sigma(q-r)=0,\ \Sigma p(q-r)=0.$

故ニ $$\Sigma P(q-r)=0,$$

卽チ $P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)=0.$

(2) 初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ

$$P=ar^{p-1},\quad Q=ar^{q-1},\quad R=ar^{r-1},$$

故ニ $P^{q-r}.Q^{r-p}.R^{p-q}=a^{\Sigma(q-r)}.r^{\Sigma(p-1)(p-r)}$

$$=a^0r^0=1.$$

(3) 此ノ級數ノ各項ノ逆數ヲ取ルトキハ等差級數ヲナスユヱ (1) ニ依リ

$$\frac{1}{P}(q-r)+\frac{1}{Q}(r-p)+\frac{1}{R}(p-q)=0,$$

兩邊ニ PQR ヲ乘ズレバ

$$QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0.$$

18. 等差級數ヲナス三ツノ數アリ, 其ノ和ハ 69 ナリ. 今此ノ三ツノ數ニソレゾレ 1, 3, 18

ヲ加フルトキハ等比級數ヲナスベシト云フ, 然ラバ此ノ三ツノ數ハ各幾何ナルカ.

[43. 陸. 士.]

解 等差級數ヲナス三ツノ數ハ $x-y,\ x,\ x+y$ ニテ表ハスコトヲ得ベシ, 故ニ次ノ二ツノ方程式ヲ得. 卽チ

$$(x-y)+x+(x+y)=69\ \dots\ \dots\ \dots\ (1)$$

$$(x-y+1)(x+y+18)=(x+3)^2\dots\ \dots\ (2)$$

(1) ヨリ $3x=69,\quad \therefore\ x=23.$

之ヲ (2) ニ代入スレバ

$$(24-y)(41+y)=26^2,$$

故ニ $$(y-11)(y+28)=0,$$

之ヨリ $y=11$, 或ハ $y=-28$ ヲ得ベシ, 依リテ所要ノ三ツノ數ハ 12, 23, 34,

或ハ 51, 23, -5.

19. 1 ヨリ 300 マデノ間ニ於テ 7 ニテ整除セラルル數幾ツアルカ, 又其ノ和ハ幾何ナルカ.　[44. 各醫. 專.]

解 1 ヨリ 300 マデノ間ニ於テ 7 ニテ整除セラルル數ハ $300=7\times42+6$ ナルユヱ 42 アリ, 次ニ其ノ和ハ初項ヲ 7 トシ, 公差ヲ 7 トスル

等差級數 42 項ノ和ナルニヨ

$(7\times2+41\times7)\times21=6321$ ナリ.

20. 或人 23 臺ノ織機ヲ有シ，各臺一時間ニ布 19尺.5 ヲ織リ得ベシト云フ，今最初ノ一臺ハ午前九時ニ運轉ヲ始メ他ノ織機ハソレヨリ 5 分ヅツ後レテ順次ニ運轉ヲ始ムルトスレバ午後一時マデニ織リ出シ得ル布ノ總高幾何ナルカ.

[43. 大. 高. 工.]

解 各臺ヲ運轉セル時間ノ總和ヲ s ニテ表ハセバ最初ノ一臺ハ午前九時ヨリ午後一時マデ，即チ 4 時間ヲ運轉シソレヨリ次第ニ 5 分ヅツ少ナキガ故ニ $s=\frac{23}{2}\left\{4\times2-(23-1)\times\frac{5}{60}\right\}=\frac{851}{12}$,

故ニ所要ノ布，總高ハ

$$19^{\text{尺}}.5\times\frac{851}{12}=1382^{\text{尺}}.875.$$

21. 三數アリ G.P. ヲナス. 其ノ和ハ 19 ニシテ其ノ平方ノ和ハ 133 ナリト云フ，各數ヲ求ム. [44. 京. 醫. 專.]

解 G.P. ヲナス三數ハ x^2, xy, y^2 ニテ表ハスコトヲ得ベシ. 依リテ

$$x^2+xy+y^2=19 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

$$x^4+x^2y^2+y^4=133 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$

邊々相除スレバ $x^2-xy+y^2=7 \ldots\ \ldots\ \ldots$ (3)

(1) ト (3) トヨリ $xy=6 \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$ (4)

(1) ト (4) ト邊々相減ジテ $x^2+y^2=13 \ldots$ (5)

(4) ヨリ $x^2y^2=36 \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$ (6)

(5), (6) ヨリ x^2, y^2 ハ 4 或ハ 9,

故ニ所要ノ三數ハ 9, 6, 4 ナリ.

22. 等比級數ヲナス三數アリ，其ノ和ハ 26 ニシテ各平方ノ和ハ 364ナリト云フ. 各數如何.

[44. 秋. 鑛. 專.]

解 前題ト同樣ニシテ所要ノ三數ハ

2, 6, 18 ナリ.

23. 一ノ護謨球アリ，6 尺ノ高サヨリ床上ニ落ツ爲ニ躍リ上ルコト 2 尺ナリシト云フ，靜止マデニ幾尺ノ上下運動ヲナスカ. 但躍リ上ル高サハ落下ノ高サニ比例ス. [43. 海. 經.]

解 最初ノ 6 尺ヲ躍リ上リタル 6 尺ト考フレバ第一回ノ運動ハ $6^{\text{尺}}\times2=12^{\text{尺}}$, 第二回ノ運動ハ $2^{\text{尺}}\times2=4^{\text{尺}}$ ナルニヨ靜止スルマデノ運動ノ尺數ヲ S ニテ表ハセバ S ハ 12 尺ヲ初項, $4^{\text{尺}}\div12^{\text{尺}}=\frac{1}{3}$ ヲ公比トナス無窮等比級數ノ和ナルガ故ニ

$$S=\frac{12}{1-\frac{1}{3}}=18,\ 即チ\ 18\ 尺,$$

依リテ所要ノ尺數ハ $18^{尺}-6^{尺}=12^{尺}$.

24. 2 ト 9 トノ間ニ二ツノ數ヲ挿入シ, 始ノ三數ハ等差級數, 後ノ三數ハ等比級數トナル樣ニセヨ. [44. 東北農. 大.]

解 所要ノ數ヲ x, y トスレバ $2, x, y$ ハ等差級數ヲナスユエ $2x=2+y$ ... ... (1)

又 $x, y, 9$ ハ等比級數ヲナスユエ

$$y^2=9x \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ヨリ x ヲ消去シテ $2y^2-9y-18=0$.

即チ $(y-6)(2y+3)=0$, 故ニ $y=6$ 或ハ $-\frac{3}{2}$,

從ヒテ (1) ヨリ $x=4$ 或ハ $\frac{1}{4}$,

依リテ所要ノ二數ハ 4, 6 或ハ $\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2}$ ナリ.

K′. 列方 組合

1. 相異ナル n 箇ノ物ヨリ r 箇ヅツ採リタル組合ノ數ハ $\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}$ ナルコトヲ證セヨ. [44. 東北農. 大.]

證 相異ナル n 箇ノ物ヨリ r 箇ヅツ取リタル組合ノ數ヲ ${}_nC_r$ ニテ表ハストキハ ${}_nC_r$ 通リノ組合ノ中或特別ノモノ一ツヲ含ム組合ノ數ハ其ノ特別ノモノ一ツヲ除キタル $(n-1)$ 箇ノ物ヨリ $(r-1)$ 箇ヅツ取リタル組合ノ數ト等シカルベシ.

故ニ ${}_nC_r$ 通リノ組合セノ中ニ各ノ物ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$ 回表ハルベシ. 依リテ ${}_nC_r$ 通リノ組合セノ中ニ表ハルル物ノ總數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}\times n$ ニシテ此ハ ${}_nC_r\times r$ ニ等シカルベシ. 然ルニ上ノ關係ハ n, r ノ如何ニ拘ハラズ成立ス. 故ニ

$$r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1},$$
$$(r-1)\times{}_{n-1}C_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}C_{r-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\times{}_{n-r+2}C_2=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}C_1,$$
$${}_{n-r+1}C_1=n-r+1.$$

邊々相乘シテ簡單ニスレバ

$$r(r-1)(r-2)\ldots\ldots2.1\,{}_nC_r$$
$$=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)(n-r+1),$$

故ニ $${}_nC_r=\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}.$$

2. 1, 2, 3, 4, 5 ノ五ツノ數字ヲ悉ク並ベテ

33000 ヨリ小ナル五桁ノ奇數幾通リヲ作リ得ベキカ. [43. 海. 機.]

解 33000 ヨリ小ナル五桁ノ數ノ中ニテ奇數トナルベキ數ハ其ノ末位ノ數字ハ 1, 3, 5 ナラザルベカラズ, 故ニ 1 ヲ首位トシ, 3 或ハ 5 ヲ末位トスルモノ $\lfloor\!\underline{3}\times 2$ 通リト, 2 ヲ首位トシ 1 或ハ 3 或ハ 5 ヲ末位トスルモノ $\lfloor\!\underline{3}\times 3$ 通リト, 31 ヲ首位トシ 5 ヲ末位トスルモノ $\lfloor\!\underline{2}$ 通リト, 32 ヲ首位トシ 1 或ハ 5 ヲ末位トスルモノ $\lfloor\!\underline{2}\times 2$ 通リアリテ, 其ノ他ニナシ, 故ニ所要ノ數ハ

$$\lfloor\!\underline{3}\times 2+\lfloor\!\underline{3}\times 3+\lfloor\!\underline{2}+\lfloor\!\underline{2}\times 2=\lfloor\!\underline{3}\times 5+\lfloor\!\underline{2}\times 3$$

$=30+6=36$, 即チ 36 通リアリ.

3. 9, 3, 4, 6, 5 ナル五ツノ數字アリ, 同ジ數字ヲ繰リ返スコトナクシテ 30000 ト 40000 トノ間ニアル數幾箇ヲ得ベキカ. [44. 海. 兵.]

解 30000 ト 40000 トノ間ニアル數ハ五位ノ數ニシテ左端ノ數字ハ 3 ナラザルベカラズ. 而シテ他ノ四位ノ數字ハ 9, 4, 6, 5 ナル四箇ノ數字ヲ排列シタルモノナリ. 故ニ其ノ數ノ箇數ハ ${}_4P_4=\lfloor\!\underline{4}$, 依リテ所要ノ箇數モ $\lfloor\!\underline{4}$, 即チ 24 箇ナリ.

4. 0, 2, 4, 6, 8 ナル五ツノ文字ヲ種々ニ並ベテ出來ル五桁ノ總テノ整數ノ和ヲ求メヨ. 但何レノ一ツノ整數ノ中ニモ同數字ノ重複ヲ許サズ, 又同ジ整數ヲ重複シテ加フルヲ許サズ.

[43. 專. 入. 檢.]

解 0 ガ左端ニアルトキモ亦矢張リ五桁ノ數ト見做ストキハ整數ハ ${}_5P_5$, 即チ 120 通リアリ, 故ニ同ジ位ニ於ケル數字ハ 120 アリテ, 何レノ數字モ其ノ位ニ現ハルル度數ハ相等シキガ故ニ其ノ度數ハ $120\div 5=24$, 故ニ同ジ位ニ於ケル數ノ和ハ $(0+2+4+6+8)\times 24=480$, 而シテ一ノ位, 十ノ位, ………ニ於テハ 1 ハソレゾレ 1, 10, ………ナルヲ以テ 120 通リノ數ノ總テノ和ハ

$$480\times 11111=5333280,$$

然ルニ 0 ガ左端ニアルモノハ實際四桁ノ數ニシテ其ノ總テノ和ヲ求メンニ, 斯ノ如キ數ハ ${}_4P_4$, 即チ 24 通リアリテ $24\div 4=6$ ナルガ故ニ同ジ位ニ於ケル數ノ和ハ $(2+4+6+8)\times 6=120$,

故ニ總テノ和ハ $120\times 1111=133320$,

依リテ所要ノ整數ノ和ハ上ニ得タル和ヨリ之ヲ減ジタルモノニシテ, 即チ

$$5333280-133320=5199960.$$

5. 大人6人，小兒6人ガ圓卓ノ周圍ニ座スルアリ，今大人ト大人ト若シクハ小兒ト小兒ト相接シテ座セザルモノトス，其ノ座リ方幾種アルカ. [43. 神. 高. 商.]

解 相異ナルn箇ノモノノ環順列ニハ二様ノ解釋アリ，一ハ其ノ位置ヲ考フルモノニシテ$\underline{|n}$, 一ハ之ヲ考ヘザルモノニシテ$\underline{|n-1}$トナス.
先ヅ其ノ位置ヲ考フルモノトスレバ大人ノ着席ハ$\underline{|6}$通リアリテ，其ノ一通リニ對シテ小兒6人ノ着席ハ$\underline{|6}$通リアリ，故ニ着席ノ方法ハ總テ

$\underline{|6}\times\underline{|6}$，即チ 518400通リ

アリ. 若シ其ノ位置ヲ考ヘザルモノトスレバ大人ノ着席ハ$\underline{|5}$通リナルユヱ

$\underline{|5}\times\underline{|6}$，即チ 86400通リ

トナルベシ.

6. 北ニ面シテ9人ヲ3人ヅツ3列ニ列ベントス，列方幾通リアルカ. [44. 各醫. 專.]

解 各人ノ列ブベキ位置ハ九ツアリテ9人ノ各ハ其ノ何レニモ列ビ得ベシ.
故ニ列方ハ ${}_9P_9=\underline{|9}$. 即チ 362880通リナリ.

7. 相異ナリタル四紅玉，四白玉ヲ綴リテ輪鎖ヲ製シ異色ノ玉ヲ交互ニ置カントス，幾法アルカ. [43. 海. 經.]

解 紅玉ノミニ就キテ考ヘンニ一方ヨリ見タル綴リ方ハ之ヲ裏返シテ見レバ全ク逆ノ順トナルガ故ニ4紅玉ノ綴リ方ハ$\frac{1}{2}\underline{|3}$通リアルノミ，而シテ此ノ一ツニ對シ4白玉ノ綴リ方ハ$\underline{|4}$ナルユヱ，所要ノ方法ハ$\frac{1}{2}\underline{|3}\times\underline{|4}=72$,
即チ72通リナリ.

8. 10個ノ球ヲ容レタル箱アリ，此ノ箱ノ中ヨリ球ヲ取出サントスルニ其ノ取出サルル球ノ數ガ偶數ナル場合何百何十何通リナルカ. [43. 東北農. 大.]

解 所要ノ數ヲS通リトシ且 ${}_{10}C_1$, ${}_{10}C_2$......ヲソレゾレ C_1, C_2, ... ニテ表ハセバ

$$S=C_2+C_4+C_6+C_8+C_{10}.$$

然ルニ $1+C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_{10}=2^{10}$,

及ビ $C_1+C_3+C_5+C_7+C_9$
$=1+C_2+C_4+C_6+C_8+C_{10}$,

ナルガ故ニ $1+S=\dfrac{2^{10}}{2}$,

$$\therefore\ S=2^9-1=511.$$

9. 12個ノ相異ナリタル物ヲ四ツヅツ3人ニ分與スル仕方ハ幾通リアルカ. [43. 長. 高. 商.]

解　第一ノ人ノ取リ方ハ ${}_{12}C_4$ 通リアリ, 而シテ第一ノ人ガ四ツ取リタル殘リハ八ツナルガ故ニ第一ノ人ノ一度ノ取方ニ對シテ第二ノ人ノ取方ハ ${}_8C_4$ 通リアリ, 而シテ又第二ノ人ガ四ツ取レバ殘リノ四ツハ第三ノ人ノ取ルベキモノトナルベシ, 故ニ分配ノ方法ハ

$${}_{12}C_4\times{}_8C_4=\frac{\underline{|12}}{\underline{|4}\,\underline{|8}}\times\frac{\underline{|8}}{\underline{|4}\,\underline{|4}}$$

$$=\frac{\underline{|12}}{(\underline{|4})^3}=34650.$$

10. 相異ナリタル6通ノ書狀ヲ5箇ノ郵便函ニ投入スル方法ハ幾通リアルカ, 但各郵便函ニ少ナクトモ一通ヲ投入スルモノトス.

[44. 神. 高. 商.]

解　各郵便函ニ少ナクトモ一通ハ投入スベキヲ以テ6通ノ書狀ヲ5箇ノ郵便函ニ投入スルニハ何レカ一函ニハ2通ヲ投入シ, 他ノ函ニハ1通ヅツ投入セザルベカラズ. 而シテ6通ノ中ヨリ2通ヲ選ム仕方ハ ${}_6C_2$ 通リアリ. 又此ノ2通ノ一組ヲ1通ト見做シテ5箇ノ函ニ投入スル仕

方ハ ${}_5P_5$ 通リアリ. 故ニ所要ノ方法ハ

${}_6C_2\times{}_5P_5=\dfrac{6.5\,\underline{|5}}{2}=1800$, 即チ 1800通リアリ.

11. 10人ヨリ若干人ヲ選ビタルニ或特別ナル一人ヲ含ム組數ハソレヲ含マザル組數ニ等シカリシト云フ, 一度ニ選ベル人數如何.

[43. 商船.]

解　一度ニ選ベル人數ヲ x トスレバ特別ナル一人ヲ含ム組數ハ餘リノ9人ヨリ $(x-1)$ 人ヲ選ベル組數ニ等シク, 即チ ${}_9C_{x-1}$ ニシテ, 特別ナル一人ヲ含マザル組數ハ餘リノ9人ヨリ x 人ヲ選ベル組數, 即チ ${}_9C_x$ ナリ. 故ニ ${}_9C_{x-1}={}_9C_x$,

即チ
$$\frac{\underline{|9}}{\underline{|x-1}\,\underline{|10-x}}=\frac{\underline{|9}}{\underline{|x}\,\underline{|9-x}},$$

$$\therefore\quad \underline{|x-1}\,\underline{|10-x}=\underline{|x}\,\underline{|9-x},$$

即チ
$$\underline{|x-1}\,(10-x)\,\underline{|9-x}=x\,\underline{|x-1}\,\underline{|9-x},$$

$$\therefore\quad 10-x=x,$$

$\therefore\quad x=5$, 即チ 5人ナリ.

12. 若干名ノ生徒中ヨリ委員4名ヲ選出スル方法ノ數ハ同生徒中ヨリ正副ノ組長1名ヅツヲ選出スル方法ノ數ニ比シテ13ト2トノ如シト云フ, 然ラバ生徒ノ數ハ幾何ナルカ.

[44. 陸. 士.]

解　所要ノ人數ヲ n 人トスレバ，之ヨリ委員4名ヲ選出スル方法ノ數ハ ${}_nC_4$ ニシテ，正副ノ組長1名ヅツヲ選出スル方法ノ數ハ ${}_nP_2$ ナリ．

故ニ　$${}_nC_4 : {}_nP_2 = 13 : 2,$$

即チ　$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} : n(n-1) = 13 : 2,$$

而シテ　$n(n-1)$ ハ零ナラズ．

故ニ　$$(n-2)(n-3) = 156,$$

之ヨリ　$$(n+10)(n-15) = 0,$$

然ルニ　$n+10 \neq 0$,　故ニ　$n = 15$,

即チ所要ノ人數ハ 15 人ナリ．

13.　對外庭球試合ニ於テ，7組ノ團體ヲ作ラントス，後衞9人，前衞9人ヨリ幾通リノ相異ナル組合ノ團體ヲ作リ得ルカ．但大將，副將，及ビ中堅ノ3組ハ各組合トモ確定シ，他ノ4組ニテハ各後衞ト各前衞トヲ組合セ得ルモノトス，又出戰ノ順序ハ考フルヲ要セズ．

[44. 大. 高. 工.]

解　後衞9人，前衞9人ノ中，大將，副將，及ビ中堅ノ3組ハ確定シ得ルユエ，他ノ4組ヲ後衞前衞各6人ヨリ組合セテ作ルコトヲ要ス．而シテ各衞ニ就キテ6人ヨリ4人ヲ選ム

仕方ハ ${}_6C_4$ ナリ．故ニ所要ノ組合ノ數ハ

${}_6C_4 \times {}_6C_4 = 15 \times 15 = 225$,　即チ 225 通リナリ．

L′. 二項式定理

1.　次式ヲ簡單ニセヨ．　[44. 陸. 士.]

$$2^6 - {}_6C_1 2^5.3x + {}_6C_2 2^4.3^2x^2 - {}_6C_3 2^3.3^3x^3$$
$$+ {}_6C_4 2^2.3^4x^4 - {}_6C_5 2.3^5x^5 + {}_6C_6 3^6x^6.$$

解　所題ノ式

$$= 2^6 - 6.2^5.3x + \frac{6.5}{2}.2^4.3^2x^2 - \frac{6.5.4}{2.3}.2^3.3^3x^3$$
$$+ \frac{6.5}{2}.2^2.3^4x^4 - 6.2.3^5x^5 + 3^6.x^6$$
$$= 64 - 576x + 2160x^2 - 4320x^3 + 486x^4$$
$$- 2916x^5 + 729x^6.$$

2.　二項式定理ニ依リ $\sqrt[3]{128}$ ヲ小數第三位マデ算出セヨ．　[44. 海. 兵.]

解　$128 = 125 + 3 = 5^3 + 3$ ナルユエ

$$\sqrt[3]{128} = (5^3+3)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1 + \frac{3}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 5\left\{1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5^3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{1.2}\left(\frac{3}{5^3}\right)^2 + \dots\right\}$$

$=5(1+0.008-0.000064+\ldots\ldots)\fallingdotseq 5.0396,$

即チ $\underset{\sim\sim}{5.039}$ ナリ.

3. $(3x^{\frac{3}{2}}-4y^{\frac{2}{3}})^9$ ヲ第六項マデ展開セヨ.

[43. 大. 高. 工.]

解 第一項ヨリ順次其ノ係數ヲ $D_1, D_2, D_3, \ldots$ ニテ表ハセバ

$$D_1=3^9 \qquad =19683,$$

$$D_2=19683\times\frac{4}{3}\times\frac{9}{1}=236196,$$

$$D_3=236196\times\frac{4}{3}\times\frac{8}{2}=1259712,$$

$$D_4=1259712\times\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}=3919104,$$

$$D_5=3919104\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{4}=7838208,$$

$$D_6=7838208\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{5}=10450944,$$

$$\therefore\quad (3x^{\frac{3}{2}}-4y^{\frac{2}{3}})^9$$

$$=19683x^{\frac{27}{2}}-236196x^{12}y^{\frac{2}{3}}+1259712x^{\frac{21}{2}}y^{\frac{4}{3}}$$

$$-3919104x^9y^2+7838208x^{\frac{15}{2}}y^{\frac{8}{3}}$$

$$-10450944x^6y^{\frac{10}{3}}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. 次ノ式ノ第 r 項ヲ記セ.

$$x^n-nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3+\ldots\ldots$$

[43. 海. 兵.]

解. 與ヘラレタル式ハ $(x-y)^n$ ノ展開式ナルユヱ, 第 r 項ハ $(-1)^{r-1}\cdot{}_nC_{r-1}\cdot x^{n-r+1}y^{r-1}$.

5. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ ノ展開式ニ於ケル x^2 ノ係數ヲ求メヨ.

[43. 海. 機.]

解 x^2 ノ項ヲ第 r 項トスレバ其ハ

$${}_8C_{r-1}x^{8-r+1}\left(\frac{2}{x}\right)^{r-1}={}_8C_{r-1}\cdot 2^{r-1}\cdot x^{10-2r},$$

故ニ $x^2=x^{10-2r}$, 之ヨリ $2=10-2r$, 卽チ $r=4$.

依リテ所要ノ係數ハ

$${}_8C_{4-1}\cdot 2^{4-1}=\frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot 2^3=\underset{\sim\sim}{448}.$$

6. $(4+8x)^6$ ノ展開式ニ於ケル最大係數ノ項ヲ求メヨ.

[44. 海. 經.]

解 $(4+8x)^6=4^6(1+2x)^6$ ナルユヱ $(1+2x)^6$ ノ最大係數ノ項ヲ求メンニ此ノ第 $(r+1)$ 項ハ ${}_6C_r\times(2x)^r={}_6C_r\times 2^rx^r$ ニシテ ${}_6C_r$ ハ $r=3$ ナルトキ最大, 2^r ハ $r=6$ ナルトキ最大ナルユヱ $r=3,\ 4,\ 5$ ナルトキヲ驗シテ $r=4$ ナルトキ ${}_6C_r\times 2^r$ ハ最大ナルコトヲ知ル.

依リテ所要ノ項ハ第 5 項ニシテ其ノ値ハ

$4^6\times{}_6C_4\times2^4x^4=983040x^4$ ナリ.

7. $(1+x)^9$ ノ展開式ニ於ケル x^4 ノ係數ノ二倍ハ $(1+x)^{10}$ ノ展開式ニ於ケル係數ノ中, 最大ナルモノニ等シ, 之ヲ證セヨ. [44. 商船.]

證 $(1+x)^9$ ノ展開式ニ於ケル x^4 ノ係數ハ ${}_9C_4$ ニシテ $(1+x)^{10}$ ノ展開式ニ於ケル最大係數ハ中央項ノ係數, 即チ ${}_{10}C_5$ ナリ.

而シテ ${}_{10}C_5=\dfrac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}=2.\dfrac{9.8.7.6}{1.2.3.4}=2{}_9C_4$.

故ニ題言ノ如シ.

M'. 對 數

1. $\log(0.234\times2.4^5\div\sqrt[4]{227})$ ノ値ヲ求メヨ.

但 $\log 2.2=0.3424$, $\log 2.3=0.3617$,

$\log 2.4=0.3802$. [44. 米, 高. 工.]

解 所題ノ式

$$=\log0.234+5\log2.4-\frac{1}{4}\log 227$$

$$=\bar{1}.3691+5\times0.3802-\frac{1}{4}\times2.3559$$

$$=\bar{1}.3691+1.9010+\bar{1}.4110=0.8611.$$

但

$$\begin{array}{r} 3802\\ -3617\\ \hline 185\\ \times\quad .4\\ \hline 74.0\\ +3617\\ \hline 3691 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 3617\\ -3424\\ \hline 193\\ \times\quad .7\\ \hline 135.1\\ +3424\\ \hline 3559 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 4\,|\,2.3559\\ \hline .58897\\ \bar{1}.41103 \end{array}$$

2. 10 ヲ底トスル 2 ノ對數ヲ 0.30103 トシテ次ノ式ノ値ノ對數ヲ求メヨ.

$$0.25\times\frac{\sqrt[3]{0.00032}}{2000^5}.$$ [44. 新. 醫. 專.]

解 所題ノ式 $=\dfrac{1}{4}\times\sqrt[3]{\dfrac{2^5}{10^5}}\times\dfrac{1}{2^5\times10^{15}}$

$$=2^{-2}\times2^{\frac{5}{3}}\times2^{-5}\times10^{-\frac{5}{3}}\times10^{-15}=2^{-\frac{16}{3}}\times10^{-\frac{50}{3}},$$

故ニ此ノ對數ハ

$$-\frac{16}{3}\log2-\frac{50}{3}\log10$$

$$=-\frac{16}{3}\times0.30103-\frac{50}{3}$$

$$=-1.6054933\ldots\ldots-16.6666666\ldots\ldots$$

$$\fallingdotseq-18.27216=\overline{19}.72784.$$

3. 次ノ與ヘラレタル表ニ依リテ $\sqrt[6]{.024558}$ ヲ小數第五位マデ求メヨ. [43. 陸. 士.]

n (眞數)	$\log n$ (對數)	n (眞數)	$\log n$ (對數)
2.455	.39005	2.503	.39846
2.456	.39023	3.673	.56502
1.161	.06483	3.674	.56514
1.162	.06521	5.391	.73167
1.704	.23147	5.392	.73175
1.705	.23172	7.913	.89834
2.502	.39829	7.914	.89840

解　$\log .02455 = \bar{2}.39005$　　23

$8 \ldots\ldots\ldots 144$　　5

$6)\bar{2}.39019$　　$18 \times .8 = 14.4$

$\log \sqrt[6]{.024558} = \bar{1}.73170$

$\log\ 0.5391 = \bar{1}.73167$　　75

3　　67

$37 \ldots \ldots 3$　　$8 \,|\, 3$

$3.7\ldots$

$\therefore\ \sqrt[6]{.024558} = .53914.$

4. (1)　$\log_3 6561$ ヲ求メヨ.

(2)　$\log_m(A \times B \times C) = \log_m A + \log_m B + \log_m C$ ヲ證セヨ.　[44. 商船.]

解 (1)　$\log_3 6561 = \log_3 3^8 = 8.$

(2)　$\log_m A = x$, $\log_m B = y$, $\log_m C = z$ トスレバ　$A = m^x$, $B = m^y$, $C = m^z$,

故ニ　$A \times B \times C = m^x . m^y . m^z = m^{x+y+z}$,

故ニ　$\log_m(A \times B \times C) = x + y + z$

$$= \log_m A + \log_m B + \log_m C.$$

5.　次式ヲ簡單ニセヨ.　[44. 陸.士.]

$$2\log_a(x^4+x^2+1)$$
$$-\left\{\log_a(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\log_a(x^2-x+1)^2\right\}.$$

解　所題ノ式

$$=\log_a(x^4+x^2+1)^2-\{\log_a(x^2+x+1)$$
$$+\log_a(x^2-x+1)\}$$
$$=\log_a\frac{(x^4+x^2+1)^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\log_a(x^4+x^2+1).$$

6. (甲)　同ジ數字ヲ同ジ順ニ並ベタル數ニシテ唯小數點ノ位置ノミ異ナル數ノ對數ノ假數ハ何故ニ相等シキカ.

(乙)　$5^{2x} = 8$ ニ於テ x ノ値ヲ求メヨ.

但　$\log 2 = 0.30103$ ナリ.　[43. 東. 高. 商.]

解 (甲)　同ジ數字ヲ同ジ順ニ並ベタル數ニテ唯小數點ノ位置ノミ異ナル二ツノ數ヲ P, Q トシ, n ヲ以テ正若クハ負ノ整數ヲ表ハセバ

$$P = Q \times 10^n$$

ナル關係アリ, 故ニ

$$\log P = \log Q + \log 10^n = \log Q + n$$

ニシテ P, Q ノ對數ハ唯其ノ指標ヲ異ニスルノミニテ假數ハ相等シ.

（乙）　$2x\log 5=\log 8$,

然ルニ　$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$

$=1-0.30103=.69897$,

及ビ　$\log 8=\log 2^3=3\log 2=3\times 0.30103$,

$\therefore\ 2x\times 0.69897=3\times 0.30103$,

之ヨリ　$x=\frac{3\times 0.30103}{2\times 0.69897}=0.6460.$

7. 10 億ヲ超ユル 2 ノ最小乘冪ノ整ノ指數ヲ求ム．又 $\frac{1}{2^{12}}$ ハ小數點ト最初ノ有效數字トノ間ニ零ヲ幾箇有スルカ．但 $\log_{10}2=0.30103$ トス．　[44. 大. 高. 工.]

解　10 億，卽チ 10^9 ヲ超ユル 2 ノ乘冪ノ指數ヲ x トスレバ　$2^x>10^9$,

兩邊ノ對數ヲ取リテ　$x\log 2>9$,

故ニ　$x>\frac{9}{\log 2}$,　卽チ　$x>\frac{9}{0.30103}$.

而シテ　$\frac{9}{0.30103}=29.8\ldots\ldots$,

故ニ x ノ最小整數ハ 30 ナリ．

次ニ　$\frac{1}{2^{12}}=2^{-12}$,　故ニ　$\log\frac{1}{2^{12}}=-12\log 2$

$=-12\times 0.30103=-3.61236=\bar{4}.38764$,

故ニ $\frac{1}{2^{12}}$ ハ小數第四位ニ始ル數ナリ，依リテ所要ノ 0 ノ數ハ 3 箇ナリ．

8. 等比級數ニ於テ第 x, y, z 項ノ値ガソレゾレ X, Y, Z ナルトキ次式ヲ證明スベシ．

$(y-z)\log X+(z-x)\log Y+(x-y)\log Z=0.$

[43. 東北農. 大.]

證　初項ヲ a，公比ヲ r トスレバ

$X=ar^{x-1},\ Y=ar^{y-1},\ Z=ar^{z-1}$,

$\therefore\ X^{y-z}=a^{y-z}r^{(y-z)(x-1)}$,

$Y^{z-x}=a^{z-x}r^{(z-x)(y-1)}$,

$Z^{x-y}=a^{x-y}r^{(x-y)(z-1)}$.

$\therefore\ X^{y-z}.Y^{z-x}.Z^{x-y}=a^0.r^0=1$,

$\therefore\ (y-z)\log X+(z-x)\log Y+(x-y)\log Z$

$=\log 1=0.$

9. 次ノ方程式ヲ解ケ．

$x^{\log x}=1000x^2.$　[44. 東. 高. 工.]

解　所題ノ方程式ヨリ兩邊ノ對數ヲ取レバ

$\log x.\log x=\log 1000+2\log x$,

故ニ　$(\log x)^2-2\log x-3=0$,

卽チ　$(\log x+1)(\log x-3)=0$,

故ニ　$\log x=-1$,　或ハ　$\log x=3$.

故ニ　$x=10^{-1}=\frac{1}{10}$，或ハ　$x=10^3=1000.$

10. $\log(x-1)-\log(x^2-5x+4)+1=0$ ヲ解ケ．

[43. 專. 入. 檢.]

解 $\log 10=1$ ナルユヱ

$$\log(x-1)+\log 10-\log(x^2-5x+4)=0,$$

即チ
$$\log\frac{10(x-1)}{x^2-5x+4}=0,$$

而シテ又　$\log 1=0$ ナルユヱ

$$\log\frac{10(x-1)}{x^2-5x+4}=\log 1.$$

$$\therefore\quad \frac{10(x-1)}{x^2-5x+4}=1,$$

即チ
$$\frac{10\,(x-1)}{(x-1)\,(x-4)}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{10}{x-4}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{10}{x-4}-1=0,$$

即チ
$$\frac{14-x}{x-4}=0,$$

$$\therefore\quad 14-x=0,$$

$$\therefore\quad x=14.$$

N′. 雜　題

1. x^2+px+q ヲ $x-1$ ニテ割レバ剩餘 6 トナリ, $x+1$ ニテ割レバ剩餘 2 トナル, p 及ビ q ノ値如何.　[43. 海. 機.]

解 x^2+px+q ヲ $x-1$ ニテ割リテ得ベキ剩餘ハ此ノ式中ノ xニ$x-1=0$ ヨリ得ベキ $x=1$ ヲ置キ換ヘタル値ニシテ $x+1$ ニテ割リテ得ベキ剩餘ハ $x=-1$ ヲ置キ換ヘタル値ニ等シ, 而シテ $x=1$ トスレバ $1+p+q$ ニシテ $x=-1$ トスレバ $1-p+q$ トナル, 故ニ次ノ二ツノ方程式ヲ得.

$$1+p+q=6 \ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (1)$$

$$1-p+q=2 \ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (2)$$

(1)+(2) ヨリ　$2+2q=8$,　$\therefore\ q=3$,

之ヲ (1)ニ代入シテ　$p=2$ ヲ得ベシ.

2. 多項式 $9x^6-24x^5+px^4+qx^3+rx^2-60x+36$ ガ完全平方式ナル爲ニハ　p, q 及ビ r ノ數値如何.　[43. 陸. 士.]

解 所題ノ式ヲ完全平方式トスレバ其ノ平方根ニ於ケル第一項及ビ末項ノ絕對値ハソレゾレ $3x^3$ 及ビ 6 ナルガ故ニ所題ノ式ハ

$(3x^3+Ax^2+Px+6)^2$ 或ハ $(3x^3+Ax^2+Bx-6)^2$

ナル形ニテ表ハスコトヲ得, 而シテ先ヅ

$$9x^6-24x^5+px^4+qx^3+rx^2-60x+36$$
$$\equiv(3x^3+Ax^2+Bx+6)^2$$
$$\equiv 9x^6+6Ax^5+(A^2+6B)x^4+(2AB+36)x^3$$
$$+(B^2+12A)x^2+12Bx+36$$

ヨリ $x^5, x^4, \ldots\ldots$ ノ係數ヲ比較シテ

$-24=6A$, $p=A^2+6B$, $q=2AB+36$,

$r=B^2+12A$, $-60=12B$, 而シテ $-24=6A$,

$-60=12B$ ヨリ $A=-4$, $B=-5$ ヲ得ベク,

從ヒテ　$p=-14$,　$q=76$,　$r=-23$.

次ニ $9x^6-24x^5+px^4+qx^3+rx^2-60x+36$

$$\equiv(3x^3+Ax^2+Bx-6)^2$$

ヨリ同様ノ方法ニテ

$$p=46,\quad q=-76,\quad r=73$$

ヲ得ベシ.

3. $(x^3-px^2+qx-r)(px^3+x^2+5x+7)$

ヲ展開スルトキ x^5, x^3, x ノ係數ガ 0 ナル様ニ p, q, r ノ値ヲ定メヨ.　[43. 各高等.]

解　展開式ニ於ケル x^5 ノ係數ヲ求メンニ第二式ノ第一項ヲ第一式ノ第二項ニ乘ジタル係數 $-p^2$ ト, 第二式ノ第二項ヲ第一式ノ第一項ニ乘ジタル係數 1 トノ和, 卽チ $-p^2+1$.

同様ノ方法ニ依リテ x^3, x ノ係數ハソレゾレ

$$-pr+q-5p+7,\quad -5r+7q$$

ヲ得, 依リテ　$-p^2+1=0$　… … …　(1)

$$-pr+q-5p+7=0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$
$$-5r+7q=0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (3)$$

(1) ヨリ　$p=\pm1$.

次ニ $p=1$ トシ (2) 及ビ (3) ヨリ

$$-r+q+2=0,\ 及ビ\ -5r+7q=0$$

ヲ得ベク, 之ヨリ $q=5$, 及ビ $r=7$.

又 $p=-1$ トシ (2) 及ビ (3) ヨリ

$$r+q+12=0\ 及ビ\ -5r+7q=0$$

ヲ得ベク, 之ヨリ $q=-5$, 及ビ $r=-7$.

是ニ依リテ　$p=1$, $q=5$, $r=7$.

或ハ　$p=-1$, $q=-5$, $r=-7$.

4. 酒 1 斗ヲ容ルル瓶中ヨリ 1 升ヲ汲ミ出シ, 水ニテ之ヲ補ヒ, 更ニ此ノ混合酒 1 升ヲ汲ミ出シ水ニテ之ヲ補フ, 斯クスルコト 10 回ニ及ブトキハ最初ノ酒幾割ヲ含有スルカ.

[43. 海. 兵.]

解　第一回ニ於テハ 10升ノ中1升ヲ汲ミ出スヲ以テ酒ハ全量ノ $\frac{9}{10}$, 卽チ 0.9 トナル.

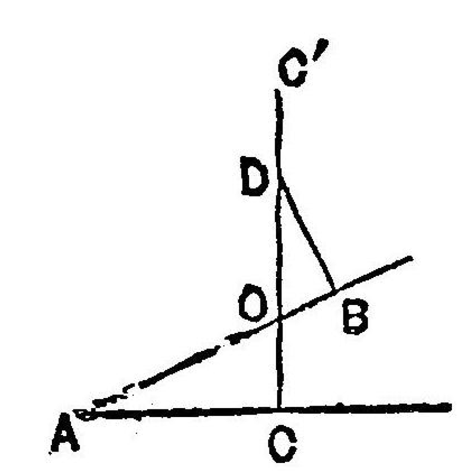
第二回ニ於テハ同樣ニ第一回ニ於テ出來タル混合酒ノ $\frac{9}{10}$, 即チ 0.9 トナルガ故ニ最初ノ酒ハ 0.9×0.9, 即チ $(0.9)^2$ ヲ含有ス. 逐テ斯ノ如ク10回ニ至レバ全量中ニ含メル最初ノ酒ノ割合ハ $(0.9)^{10}$, 即チ 3割5分弱 ナリ.

最近二年間
試驗問題講義
幾何學之部

A′. 直線

1. 一平面內ニ於テ一ツノ角ノ二邊ガソレゾレ他ノ一ツノ角ノ二邊ニ垂直ナルトキハ此ノ二角ハ互ニ相等シキカ, 若シクハ互ニ補角ヲナス, 之ヲ證セヨ. [43. 海. 機.]

證 一ツノ角 BDC ノ二邊 DB, DC ガソレゾレ他ノ一ツノ角 BAC ノ二邊 AB, AC ニ垂直ナリトセヨ. AB, DC ノ交點ヲ O トセバ



△AOC, △DOB ハ何レモ直角三角形ニシテ $B\hat{A}C$ ハ $A\hat{O}C$, $B\hat{D}C$ ハ $D\hat{O}B$ ノ餘角ニシテ

$$A\hat{O}C=D\hat{O}B,$$

故ニ $$B\hat{A}C=B\hat{D}C.$$

次ニ $B\hat{D}C'$ ノ二邊 DB, DC′ ガソレゾレ $B\hat{A}C$ ノ二邊 AB, AC ニ垂直ナリトセヨ.

$B\hat{D}C'$ ハ $B\hat{D}C$ ノ補角ニシテ $B\hat{D}C=B\hat{A}C$,

故ニ $B\hat{A}C$ ト $B\hat{D}C'$ トハ互ニ補角ヲナス.

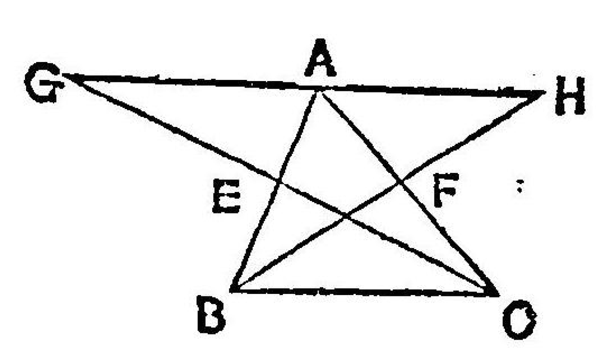
即チ二ツノ角ハ相等シキカ, 若シクハ互ニ補角ヲナス.

2. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ第三邊ニ平行ナリ. [43. 山. 高. 商.]

證 44 頁 43 題ニ同ジ.

3. △ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲソレゾレ E, F トシ C ト E トヲ結ビ付ケ之ヲ E ノ方ヘ延長シ CE ト等長ナル線分 EG ヲ其ノ上ニ取リ又 B ト F トヲ結ビ付ケ之ヲ F ノ方ニ延長シ BF ト等長ナル線分 FH ヲ其ノ上ニ取ルトキハ三ツノ點 G, A, H ハ同一ノ直線上ニアルコトヲ證セヨ. [43. 海. 經.]

證 I. GA, AH ヲ結ビ付クレバ



△AEG, △BEC ニ於テ

EA＝EB, EG＝EC,

$A\hat{E}G=B\hat{E}C$,

故ニ $E\hat{A}G=E\hat{B}C$,

同様ニ　$F\hat{A}H=F\hat{C}B$,

故ニ　$E\hat{A}G+E\hat{A}F+F\hat{A}H$

$=E\hat{B}C+E\hat{A}F+F\hat{C}B=2\hat{R}$,

故ニ G, A, H ハ同一ノ直線上ニアリ.

證 II. BG, CH ヲ結ビ付クレバ四邊形 ACBG, ABCH ノ對角線ハ各互ニ二等分トナルユヱ平行四邊形ナリ.

故ニ　AG ∥ BC,　AH ∥ BC.

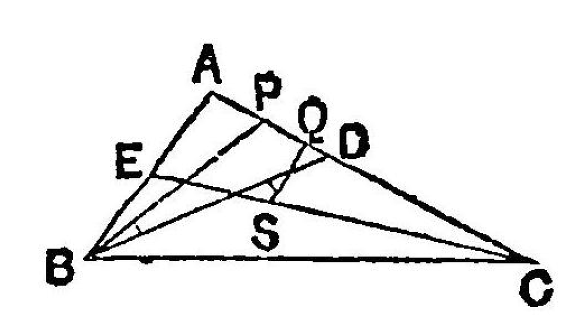
故ニ GAH ハ同一ノ直線上ニアリ.

4. 三角形ノ頂點ヨリ底邊ノ中點ニ引キタル直線ガ大ナル邊トナス角ハ小ナル邊トナス角ヨリ小ナルコトヲ證セヨ. [44. 鹿. 高. 農.]

證 41 頁 39 題ニ同ジ.

5. 三角形 ABC ニ於テ角 B, 及ビ角 C ノ二等分線ガソレゾレ D 及ビ E ニ於テ對邊ト交リ, 角 B ハ角 C ヨリモ大ナリトスレバ BD ハ CE ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ. [44. 盛. 高. 農.]

證 $\hat{B}>\hat{C}$ [假設] ナルニ依リ $\frac{1}{2}\hat{B}>\frac{1}{2}\hat{C}$,



即チ　$A\hat{B}D>A\hat{C}E$,

今　$D\hat{B}P=A\hat{C}E$

ナル如ク取リ, 直線

BP ガ角 ABD ノ中ニアル様ニ畫ケバ點 P ハ點 A ト D トノ間ニ落ツベシ.

然ルトキハ $\hat{C}<C\hat{B}P$, 故ニ $CP>BP$.

又邊 CA ノ上ニ點 Q ヲ取リ $CQ=BP$ ナラシム.

然ルトキハ Q ハ P ト C トノ間ニアリ, 而シテ Q ヨリ PB ニ平行ニ QS ヲ引キ, CE トノ交點ヲ S トスレバ, S ハ C ト E トノ間ニ落ツベシ,

然ルトキハ $\triangle CQS\equiv\triangle BPD$ ナルユヱ $CS=BD$,

依リテ $CE>BD$ ナリ.

6. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ. [44. 商船.]

證 63 頁 **62** 題ニ同ジ.

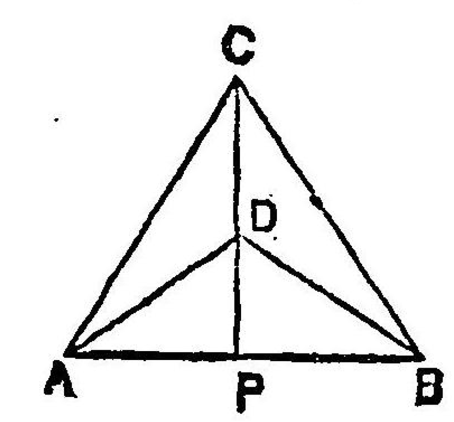
7. 三角形ノ三ツノ角頂ヨリ對邊ニ引ケル垂線ハ一點ニ會スルコトヲ證セヨ.

[44. 東. 都. 豫. 講.]

證 76 頁 **75** 題ニ同ジ.

8. 同ジ底邊ノ上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ハ底邊ヲ直角ニ二等分スルコトヲ證明セヨ. [43. 女. 高. 師.]

證 I. 同ジ底邊 AB ノ上ニ其ノ同ジ側ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ヲ CAB, DAB トス. 頂



點 C, D ヲ結ビ付クレバ二ツノ三角形 CDA, CDB ニ於テ

$CA=CB,\quad DA=DB,$

而シテ $C\hat{A}B=C\hat{B}A$,

及ビ $D\hat{A}B=D\hat{B}A$

ナルユヱ $C\hat{A}D=C\hat{B}D$.

故ニ $\triangle CAD\equiv\triangle CBD$, 故ニ $A\hat{C}D=B\hat{C}D$,

即チ CD ハ二等邊三角形 CAB ノ頂角ノ二等分線トナル, 故ニ底邊ヲ直角ニ二等分ス.

二ツノ二等邊三角形ガ底邊ノ反對ノ側ニアルトキモ亦同樣ナリ.

證 II. AB ノ中點ヲ P トシ, P ヲ過リ AB ニ垂線ヲ作レバ此ノ直線ハ C, D ヲ過ル.

然ルニ C, D ヲ結ビ付クル直線ハ唯一ツナリ.

依リテ直線 CD ハ AB ノ中點ヲ過リ且之ニ垂直ナリ.

9. 正三角形內ノ任意ノ一點ヨリ三邊ニ引キタル垂線ノ和ハ一定不易ナルコトヲ證セヨ.

[43. 陸. 士.]

證 83 頁 **79** 題ニ同ジ.

別證 PA, PB, PC ヲ結ビ付ケ, 一邊ヲ l ニテ

表ハセバ $\triangle ABC=\triangle PBC+\triangle PCA+\triangle PAB$

$$=\frac{1}{2}PX.BC+\frac{1}{2}PY.CA+\frac{1}{2}PZ.AB$$

$$=\frac{1}{2}l(PX+PY+PZ).$$

又 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AG.BC=\frac{1}{2}AG.l.$

故ニ $\frac{1}{2}l(PX+PY+PZ)=\frac{1}{2}AG.l,$

故ニ $PX+PY+PZ=AG,$

卽チ一定不易ナリ.

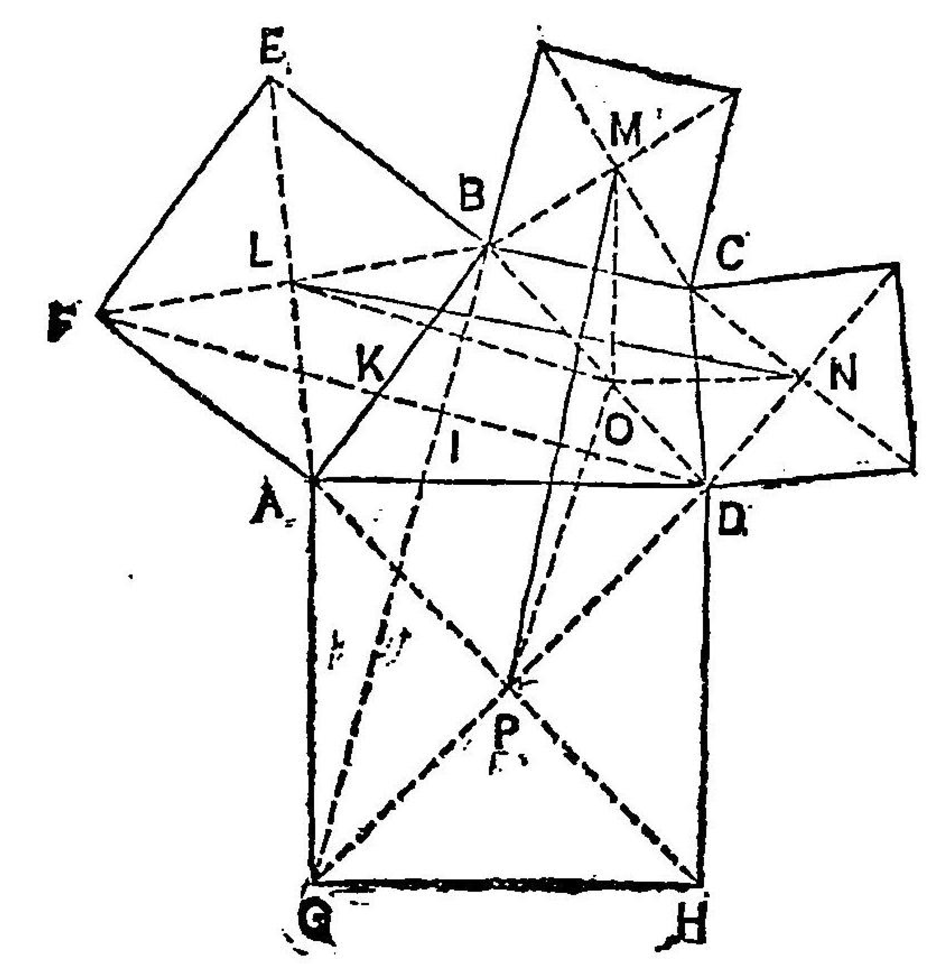
10. 四邊形ノ相隣レル二邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付ケテ作リタル四邊形ハ平行四邊形ナルコトヲ證セヨ. [44. 女. 高. 師.]

證 67 頁 65 題ヲ見ヨ.

11. 四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點 E, F, G, H ヲ順次ニ結ビ付クルトキハ EFGH ナル一ツノ平行四邊形ヲ得, 而シテ此ノ周圍ハ AC+BD ニ等シキコトヲ證セヨ. [43. 海. 經.]

證 67 頁 65 題ニ同ジ.

12. 四邊形 ABCD ノ各邊上ニ各邊ヲ一邊トシテ正方形ヲ作リ其ノ各對角線ノ交點ヲ L, M, N, P トスレバ PM ハ LN ニ等シク且互ニ直角ニ交ル, 其ノ證如何. [44. 陸. 經.]



證 AB, AD ノ上ニ畫ケル正方形ヲソレゾレ ABEF, AGHD トシ ; BG, DF ヲ結ビ付クレバ $AB=AF$, $AG=AD$, $B\hat{A}G=B\hat{A}D+\hat{R}=F\hat{A}D$ ナルユエ $\triangle ABG\equiv\triangle AFD,$

依リテ $BG=FD,\ A\hat{B}G=A\hat{F}D.$

從ヒテ AB, DF ノ交點ヲ K ; BG, DF ノ交點ヲ I トスレバ $\triangle BKI$, $\triangle FKA$ ヨリ $B\hat{K}I=F\hat{K}A$ ナレバ $B\hat{I}K=F\hat{A}K=\hat{R}$, 卽チ $BG\perp FD.$

次ニ對角線 BD ノ中點ヲ O トシ ; OL, OP ヲ結ビ付クレバ L, P ハソレゾレ BF, DG ノ中點ナルユエ OL, OP ハソレゾレ DF, BG ニ平行ニシテ且ソノ半分ニ等シ.

依リテ $OL \perp OP$, 及ビ $OL = OP$.

同様ニ　OM, ON ヲ結ビ付クレバ

$$OM \perp ON, \text{ 及ビ } OM = ON,$$

從ヒテ　$\hat{LON} = \hat{LOM} + \hat{R} = \hat{MOP}$

ナルユヱ $\triangle LON \equiv \triangle MOP$. 從ヒテ $LN = MP$.

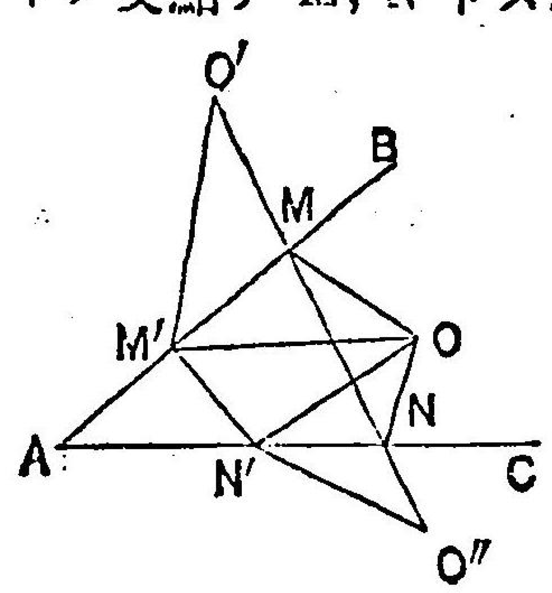
而シテ此ノ兩三角形ハ其ノ二ツノ邊ガソレゾレ互ニ垂直ナルユヱ第三邊 LN, MP モ亦互ニ垂直ナルコト前同様ニ證明シ得ベシ.

依リテ　$LN = MP$, 及ビ $LN \perp MP$.

13. 銳角 BAC 及ビ其ノ角內ノ一點 O ヲ與ヘ $OM + MN + NO$ ヲシテ最小ナラシムベキ點 M, N ヲソレゾレ AB, AC ノ上ニ求メヨ.

[43. 陸. 士.]

解 邊 AB, AC ニ關スル O ノ對稱點ヲソレゾレ O', O'' トシ $O'O''$ ヲ結ビ付ケ其ノ AB, AC トノ交點ヲ M, N トス. AB, AC 上ニ任意ニ點 M', N' ヲ取リ OM, NO 及ビ $OM', N'O, M'N', O'M', N'O''$ ヲ結ビ付クレバ $O'O'' <$ $O'M' + M'N' + N'O''$,



然ルニ O', O'' ハソレゾレ AB, AC ニ關スル O ノ對稱點ナルユヱ $O'M = OM$,　$NO'' = NO$,

$$O'M' = OM', \quad N'O'' = N'O,$$

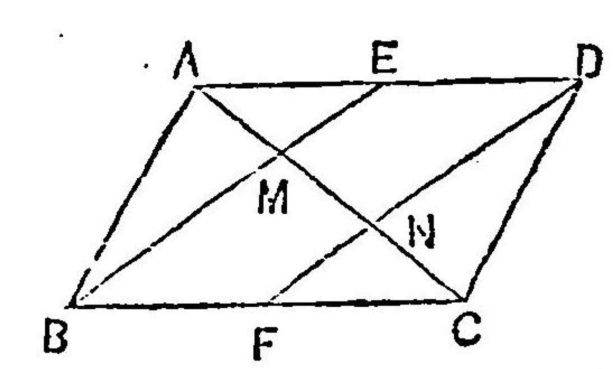
故ニ　$OM + MN + NO < OM' + M'N' + N'O$,

故ニ　M, N ハ所要ノ點ナリ.

14. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル二邊 AD 及ビ BC ノ中點ヲ E, F トシ BE, DF ヲ結ビ付クレバ AC ヲ三等分スルコトヲ證セヨ.

[43. 農. 大. 實.]

證 BE, DF ガ AC ト交ル點ヲ M, N トス.



$AD = BC$ ナルガ故ニ,

$DE = BF$,

且　$DE \parallel BF$,

故ニ　$BE = DF$,

故ニ M ハ AN ノ中點トナル. 同様ニ N ハ CM ノ中點トナル, 依リテ $AM = MN = CN$.

15. 平行四邊形ノ四ツノ內角ヲ二等分スル直線ガ相交リテナス所ノ四邊形ハ矩形ナルコトヲ證セヨ.　[44. 鹿. 高. 農.]

證 73 頁 72 題ニ同ジ.

16. 五邊形 ABCDE ノ各邊ヲ延長シテ星形

FGHKL ヲ作ルトキハ $\hat{F}+\hat{G}+\hat{H}+\hat{K}+\hat{L}=2\hat{R}$ ナルコトヲ證セヨ. [43. 海. 經.]

證 五邊形ノ各邊ヲ順次ニ引キ延バシテ生ズル外角ノ和ハ $4\hat{R}$ ナルユヱ, 形外ニ於ケル三角形ノ底角ノ和ハ $2\times4\hat{R}=8\hat{R}$, 然ルニ形外ノ三角形ハ五ツアリテ, 其ノ總テノ内角ノ和ハ

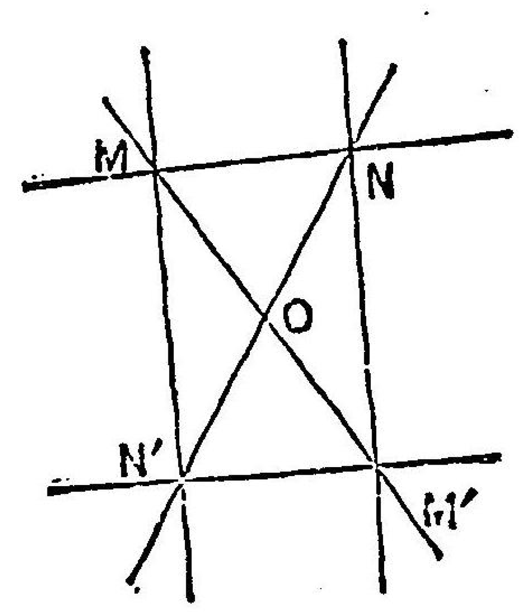
$$5\times2\hat{R}=10\hat{R},$$

依リテ頂角ノ和,

即チ $\hat{F}+\hat{G}+\hat{H}+\hat{K}+\hat{L}=10\hat{R}-8\hat{R}=2\hat{R}.$

17. 與ヘラレタル二直線 MM′, NN′ ニ至ル距離ノ和又ハ差ガ與ヘラレタル長サ L ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム. [44. 海. 經.]

解 MM′, NN′ ハ點 O ニ於テ相交ルモノトス, MM′, NN′ ノ兩側ニ MM′, NN′ トノ距離ガ L ニ等シキ平行線ヲ引キ MM′, NN′ トノ交點ヲ M, M′; N, N′ トシ; 之ヲ順次ニ結ビ付クレバ MNM′N′ ハ矩形ナルコト明カナリ.



又△OMN ハ O ヲ頂點トスル二等邊三角形ナルユヱ MN 上ノ任意ノ點ヨリ OM, ON ニ至ル距離ノ和ハ M ヨリ ON ニ至ル距離, 即チ L ニ等シク, MN ノ延線上ノ任意ノ點ヨリ OM, ON ニ至ル距離ノ差ハ L ニ等シ. 他モ亦同樣ナリ. 依リテ矩形 MNM′N′ ノ各邊又ハ其ノ延線上ノ點ハ皆要件ニ適ス.

逆ニ是等ノ線上ニアラザル點ハ要件ニ適セザルコトヲ見ルハ容易ナリ. 故ニ所要ノ軌跡ハ矩形 MNM′N′ ノ各邊, 又ハ其ノ延線ナリ.

次ニ MM′, NN′ ガ平行ナルトキハ MM′, NN′ ノ距離ガ L ニ等シキトキハ MM′, NN′ ノ間ニアル平面ノ部分又ハ間ニアラザル平面ノ部分ノ各點ハ要件ニ適スルコト明カニシテ MM′, NN′ ノ距離ガ L ニ等シカラザルトキハ MM′, NN′ ノ距離ガ L ヨリ小ナレバ和ガ L ニ等シキ點ノ軌跡ハ MM′, NN′ ノ間ニアラザル二ツノ平行線ニシテ差ガ L ニ等シキ點ノ軌跡ナク, 又 MM′, NN′ ノ距離ガ L ヨリ大ナレバ差ガ L ニ等シキ點ノ軌跡ハ MM′, NN′ ノ間ニアル二ツノ平行線ニシテ和ガ L ニ等シキ點ノ軌跡ナキコト容易ニ知リ得ベシ.

18. 與ヘラレタル角 BAC 内ノ與ヘラレタ

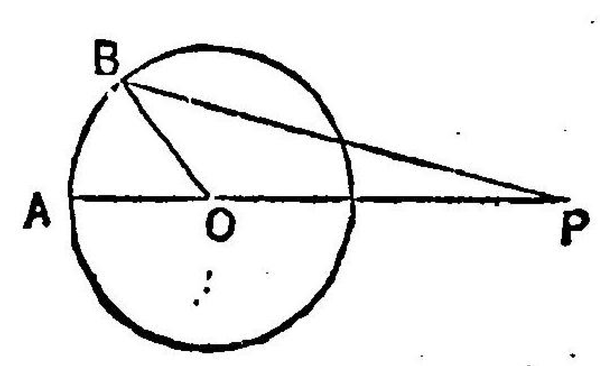
ル點Pヲ過リ，一直線 BPC ヲ BP, PC ノ相等シキヤウニ引クコトヲ求ム． [44. 商船.]

解 46 頁 45 題ニ同ジ．

B′. 圓

1. 圓外ノ一點ト圓周上ノ任意ノ點トヲ結ビ付クル直線ノ中，其ノ圓ノ中心ヲ過ルモノハ最長ナルコトヲ證セヨ． [44. 農. 大. 實.]

證 圓 O 外ノ一點ヲ P トシ，PO ヲ結ビ付ケ，



其ノ延線ガ圓 O ノ周ト交ル點ヲ A トシ，圓周上ノ任意ノ點 B ヲ取リ，PB ヲ結ビ付クルトキハ $PA>PB$ ナルコトヲ證セン．

BO ヲ結ビ付クレバ △POB ニ於テ

$PO+OB>PB$, 卽チ $PO+OA>PB$,

卽チ $PA>PB$.

2. 圓ノ中心ニ於テ直交スル二直線ト其ノ圓ノ任意ノ切線トノ交點ヨリ其ノ圓ニ引ケル二ツ

ノ切線ハ互ニ相平行スルコトヲ證セヨ． [44. 京. 醫. 專.]

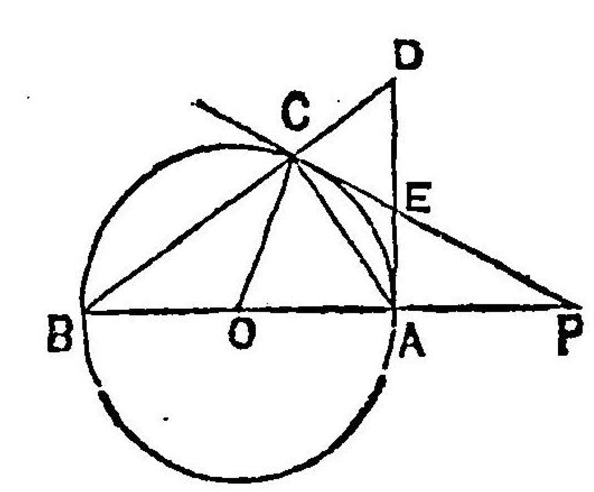
證 163 頁 68 題ニ同ジ．

3. 圓周上ノ一點 A ヨリ引ケル二弦ヲ AB, AC トシ，角 BAC ノ外角ヲ二等分スル直線ガ圓周ト交ル點ヲ D トスレバ弦 BD, CD ハ相等シキコトヲ證セヨ． [44. 長. 高. 商.]

證 153 頁 59 題ニ同ジ．

4. 圓ノ徑 BA ヲ P マデ引キ延バシ，AP ヲ半徑ニ等シクシ，A ニ於テ引ケル切線 AED ト，P ヨリ引ケル切線 PEC [C ハ切點ナリ] トノ交點ヲ E トス，而シテ B ト C トヲ結ビ付ケ，之ヲ引キ延バシテ AED ト D ニ於テ交ラシム，然ルトキハ △DEC ハ正三角形ナルコトヲ證セヨ． [44. 大. 高. 工.]

證 圓ノ中心ヲ O トシ；OC, AC ヲ結ビ付クレバ △OCP ハ $\hat{C}$ ヲ直角トスル三角形ニシテ，



$OC=OA=AP=AC$ ナルユヱ △OAC ハ正三角形ナリ．

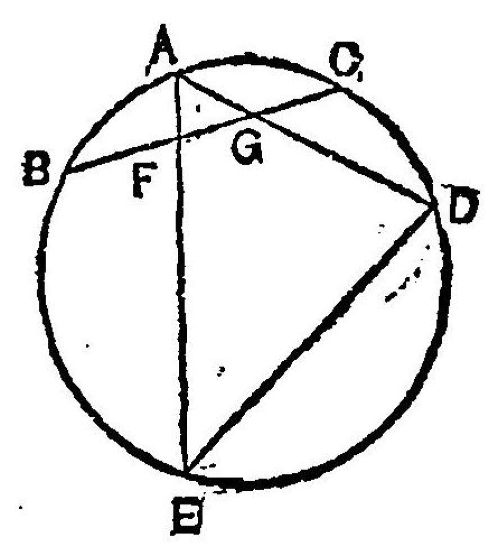
又 $E\hat{A}P=\hat{R}$ ナルユヱ $C\hat{O}A=A\hat{E}P=C\hat{E}D$,
又 $B\hat{C}A=\hat{R}$ ナルユヱ, $B\hat{A}C=B\hat{D}A$.

即チ △CDE ノ二角ハ正三角形 OAC ノ二角ニ等シ. 依リテ CDE ハ正三角形ナリ.

5. 一ツノ圓ニ於テ弧 BC ノ中點 A ヨリ二ツノ弦 AE, AD ヲ作リ, 弦 BC トソレゾレ點 F 及ビ G ニ於テ交ラシム, 然ルトキハ四ツノ點 D, E, F, G ハ同一ノ圓周上ニアルコトヲ證セヨ.

[43. 新. 醫. 專.]

證 DE ヲ結ビ付クレバ $D\hat{G}F$ ハ弧 BED, 弧



AC ニ對スル圓周角ノ和ニ等シ, 然ルニ

弧 AC＝弧 AB,

故ニ $D\hat{G}F$ ハ弧 ABED ニ對スル中心角ノ半分ニ等シ, 又 $D\hat{E}F$ ハ弧 ACD ニ對スル中心角ノ半分ニ等シ, 故ニ $D\hat{G}F+D\hat{E}F$ ハ全圓周ニ對スル中心角ノ半分, 即チ二直角ニ等シ,

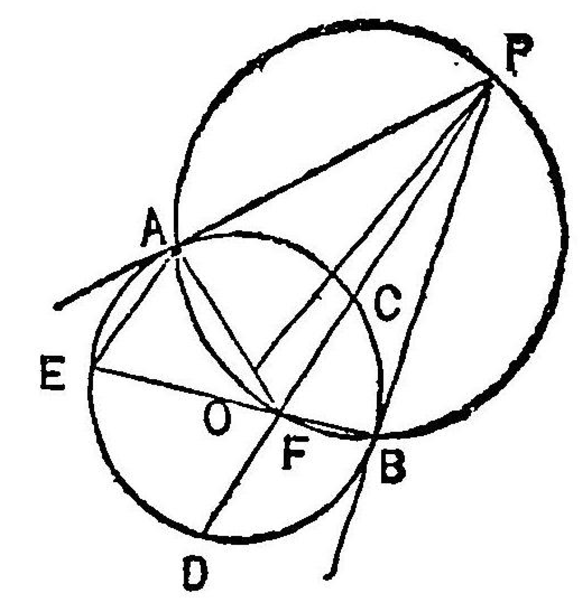
故ニ D, E, F, G ハ同一ノ圓周上ニアリ.

6. 圓外ノ點 P ヨリ此ノ圓ニ切線 PA, PB 及ビ割線 PCD ヲ引キ, 又 A ヨリ CD ニ平行ナル

弦 AE ヲ引キ, 弦 CD ノ中點ヲ F トセバ, EF ト FB トハ同一ノ直線ヲナスコトヲ證セヨ.

[43. 大. 高. 工.]

證 與ヘラレタル圓ノ中心ヲ O トセバ; A, B 及ビ F ハ PO ヲ徑トセル圓周上ニアリ, 故ニ AF ヲ結ビ付クレバ,



$$PA=PB$$

ナルヲ以テ

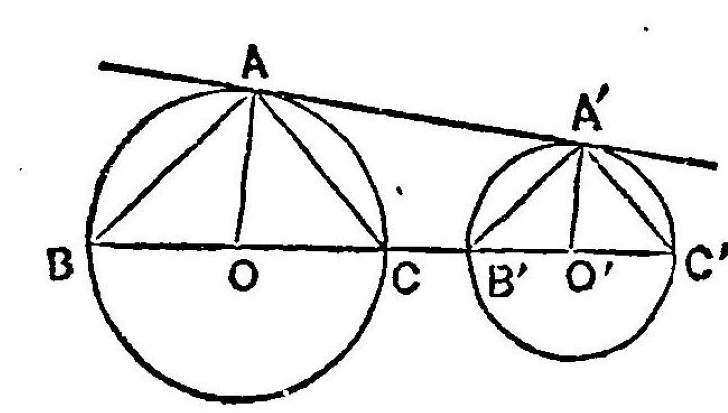
$$P\hat{F}A=P\hat{F}B,$$

然ルニ AE ∥ CD, 且 F ハ CD ノ中點ナルガ故ニ $P\hat{F}A=D\hat{F}E$, 故ニ $P\hat{F}B=D\hat{F}E$,

依リテ EF, FB ハ同一ノ直線ヲナス.

7. 二ツノ圓ニ切スル直線ノ切點ト圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ガ圓周ト交ル點トヲ結ビ付クル直線ハ二双ノ平行線ナリ. [43. 山. 高. 商.]

證 二ツノ圓 O, O′ ニ切スル直線ノ切點ヲ A, A′ トシ, 中心ヲ結ビ付クル直線ガ圓 O 及ビ O′ ト交ル點ヲ



B, C 及ビ B′, C′ トス.

$OA, O'A'$ ヲ結ビ付クレバ $OA, O'A'$ ハ何レモ切線ニ垂直ナルユエ平行ナリ.

依リテ $$A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'.$$

而シテ $\triangle AOB$, $\triangle A'O'B'$ ハ何レモ二等邊三角形ニシテ其ノ頂角相等シキユエ底角モ亦相等シ. 即チ $$A\hat{B}O = A'\hat{B}'O'.$$

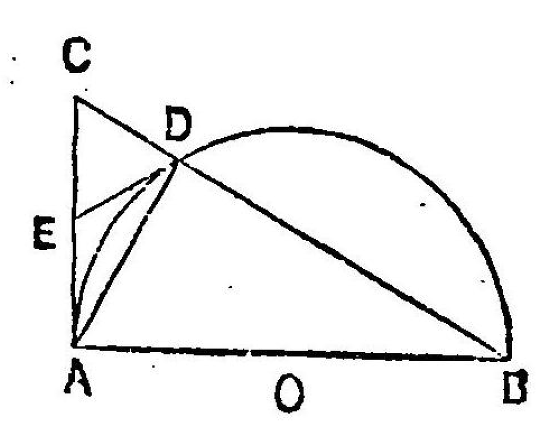
故ニ $AB \parallel A'B'$, 同様ニ $AC \parallel A'C'$.

共通內切線ニ就キテモ亦同様ナリ.

8. 直角三角形 ABC ノ一邊 AB ヲ徑トセル圓周ガ斜邊 BC ト交ル點ヲ D トシ, D ニ於ケル切線ガ邊 AC ト交ル點ヲ E トスレバ E ハ邊 AC ノ中點ナリ, 之ヲ證セヨ.

[43. 東. 高. 師., 44. 小. 高. 商.]

證 AB ノ中點ヲ O トシ, OE, AD ヲ結ビ付クレバ EA, ED ガ圓ノ切線ナルコトヨリ



$$OE \perp AD.$$

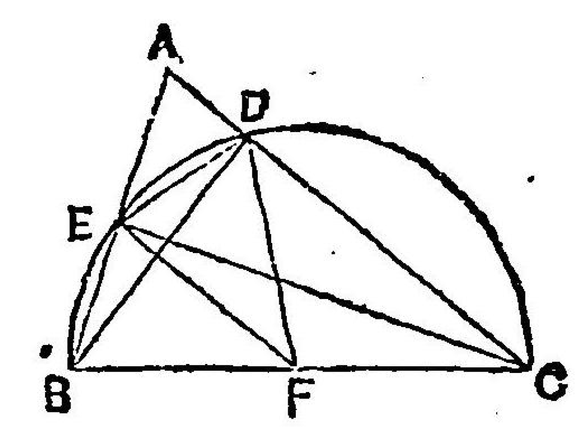
又 ADB ガ半圓ナルコトヨリ $BC \perp AD$.

故ニ $OE \parallel BC$. 依リテ E ハ AC ノ中點ナリ.

注意 別證ハ 151 頁 **56** 題ヲ見ヨ.

9. 銳角三角形 ABC ニ於テ BD, CE ヲソレゾレ B, C ヨリ對邊ヘ下セル垂線トシ, F ヲ邊 BC ノ中點トスレバ角 FED, EDF ノ各ハ角 A ニ等シキコトヲ證セヨ. [43. 各醫. 專.]

證 $B\hat{D}C = C\hat{E}B = \hat{R}$ ナルガ故ニ D, E ハ, BC ヲ徑トスル圓周上ニアリ, 而シテ F ハ BC ノ中點ナルヲ以テ



$$FD = FE,$$

故ニ $F\hat{E}D = E\hat{D}F$. 又 $\hat{A} + A\hat{E}D = E\hat{D}C$ ニシテ $A\hat{E}D = 2\hat{R} - B\hat{E}D = F\hat{C}D = F\hat{D}C$,

故ニ $\hat{A} = E\hat{D}F$, 即チ $F\hat{E}D = E\hat{D}F = \hat{A}$.

10. 三角形 ABC ノ內心 O ト頂點 A トヲ過ル直線ガ此ノ三角形ノ外接圓ノ周ト交ル點ヲ P トスルトキ PB, PC, PO ハ相等シキコトヲ證セヨ. [44. 仙. 高. 工.]

證 123 頁 **27** 題ニ同ジ.

11. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ PA ハ PB ト PC トノ和ニ等シ. [43. 農. 大. 實.]

證 119 頁 **23** 題ニ同ジ.

12. 正三角形 ABC ノ外接圓周上ノ一點ヲ D トスレバ AD, BD, CD ノ中, 何レカ一ツハ他ノ二ツノ和ニ等シ, 之ヲ證セヨ. [44. 水. 講.]

證 D ガ劣弧 BC 上ニアリトスレバ前題ニ依リ $BD+CD=AD$ 同樣ニシテ D ガ劣弧 CA, 或ハ AB 上ニアルトキハ $CD+AD=BD$, 或ハ $AD+BD=CD$. 又 D ガ A, B, C ノ何レカト一致スルトキハ AD, BD, CD ノ何レカ一ツハ零トナリ, 他ノ二ツハ邊ト一致スルユヱ D ハ圓 ABC ノ周上何レニアルモ AD, BD, CD ノ中, 何レカ一ツハ他ノ二ツノ和ニ等シ.

13. 與ヘラレタル圓周上ノ任意ノ一點ヨリ內接三角形ノ三邊ニ至ル垂線ノ趾ハ同一ノ直線上ニ在ルコトヲ證セヨ. [44. 東北農. 大.]

證 168 頁 74 題ニ同ジ.

14. 三角形 ABC ノ角頂 A ヨリ對邊 BC ニ引ケル垂線ガ外接圓周ト交ル點 D ト三角形ノ垂心 H トハ邊 BC ヨリ等距離ニアリ, 之ヲ證セヨ. [44. 東. 高. 師.]

證 125 頁 29 題ニ同ジ.

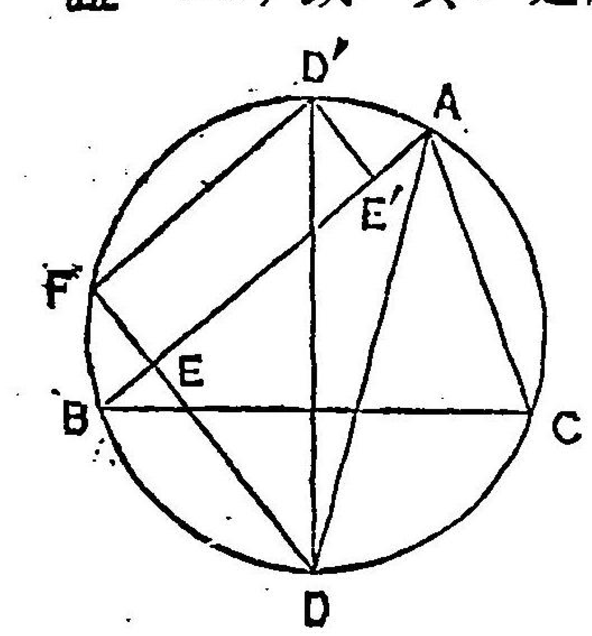
15. ABC ヲ圓ニ內接スル三角形トシ, 弧 BC

ノ中點 D ヨリ邊 BC ニ下セル垂線ヲ引キ延バシテ圓周ト D′ ニ於テ交ラシメ, D 及ビ D′ ヨリ邊 AB ニ下セル垂線ノ趾ヲソレゾレ E 及ビ E′ トシ, A ト D トヲ結ビ付クルトキ次ノ二題ヲ證セヨ.

(1) 邊 AC ハ EE′ ニ等シク,

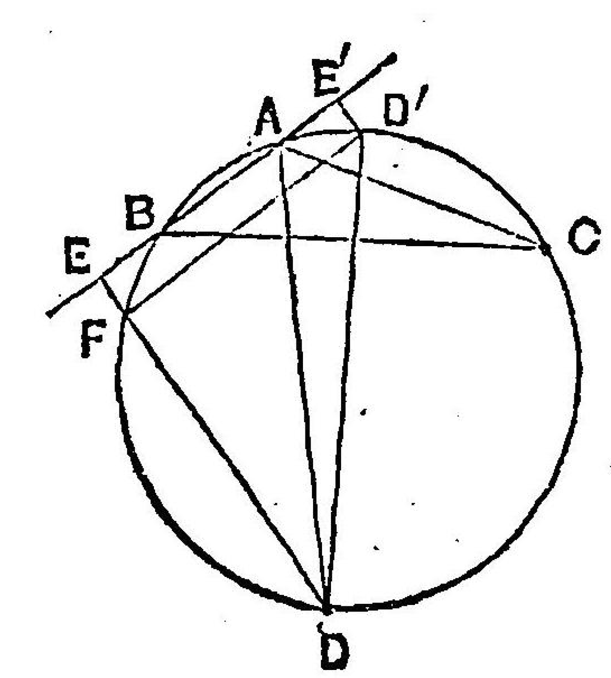
(2) 角 ADD′ ハ角 ABC 及ビ角 ACB ノ差ノ半分ニ等シ. [44. 新. 醫. 專.]

證 DE, 或ハ其ノ延線ガ圓周ト交ル點ヲ F トシ, FD′ ヲ結ビ付クレバ DD′ ハ圓ノ徑ナルコト明カナルユヱ



$$\widehat{DFD'}=\hat{R},$$

依リテ FEE′D′ ハ矩形ナリ,



故ニ $FD'=EE'$,

及ビ 弧FB=弧D′A,

然ルニ 弧BD′=弧CD′.

故ニ 弧FD′=弧AC,

從ヒテ $FD'=AC$,

故ニ $EE'=AC$,

又　　弧$D'A=\frac{1}{2}$(弧$AB\sim$弧FD'),

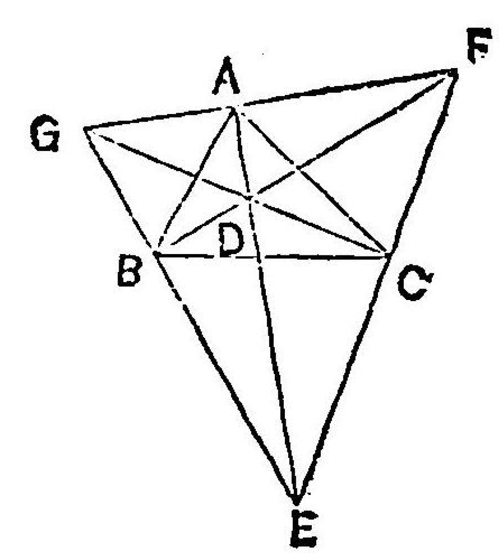
故ニ　　弧$D'A=\frac{1}{2}$(弧$AB\sim$弧AC).

依リテ　　$D'\hat{D}A=\frac{1}{2}(A\hat{C}B\sim A\hat{B}C)$.

16.　D, E, F, G ヲソレゾレ三角形 ABC ノ內切圓及ビ傍切圓ノ中心ナリトスレバ D ハ三角形 EFG ノ垂心ナルコトヲ證セヨ.

[43. 盛. 高. 農.]

證　E, F, G ヲソレゾレ邊 BC, CA, AB ニ切スル傍切圓ノ中心トスレバ EF, FG, GE ハソレゾレ三角形ノ角頂 C, A, B ヲ過リ且 $\hat{C}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$ ノ外角ヲ二等分ス.

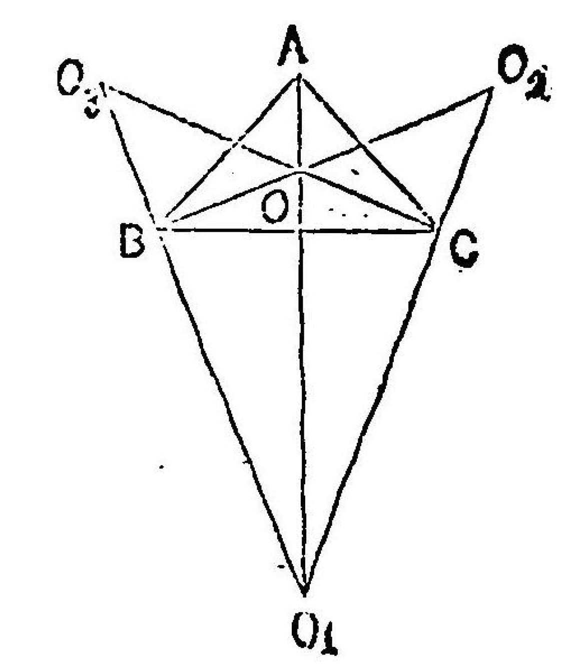


次ニ F ハ $\hat{C}$, $\hat{A}$ ノ外角ノ二等分線ノ交點ニシテ, D ハ內切圓ノ中心ナルガ故ニ D, F ハ $\hat{B}$ ノ二等分線上ニアリ, 而シテ BF⊥GE, 卽チ BF ハ D ヲ過リテ GE ニ垂直トナル.

同樣ニ CG, AE ハ何レモ D ヲ過リテ EF, FG ニ垂直トナル, 卽チ D ハ △EFG ノ垂心ナリ.

17.　直角二等邊三角形ノ底邊ガ其ノ內切圓ノ中心及ビ三ツノ傍切圓ノ中心ニ於テ對スル角ノ大イサハ各幾何ナルカ.　[43. 海. 機.]

解　直角二等邊三角形 ABC ノ A ヲ直角ノ頂點トシ, 內心及ビ邊 BC, CA, AB ニ切スル傍切圓ノ中心ヲソレゾレ O 及ビ O_1, O_2, O_3 トセバ OO_1, OO_2, OO_3 ハソレゾレ A, B, C ヲ過リテ O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 ニ垂直トナリ, 且角 A, B, C ヲ二等分ス,



依リテ　$B\hat{O}C=\hat{A}+\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{R}=\frac{3}{2}\hat{R}$,

$$B\hat{O_1}C=2\hat{R}-B\hat{O}C=2\hat{R}-\frac{3}{2}\hat{R}=\frac{1}{2}\hat{R},$$

$$B\hat{O_2}C=B\hat{O_3}C=\hat{R}-B\hat{O_1}C=\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{R}$$

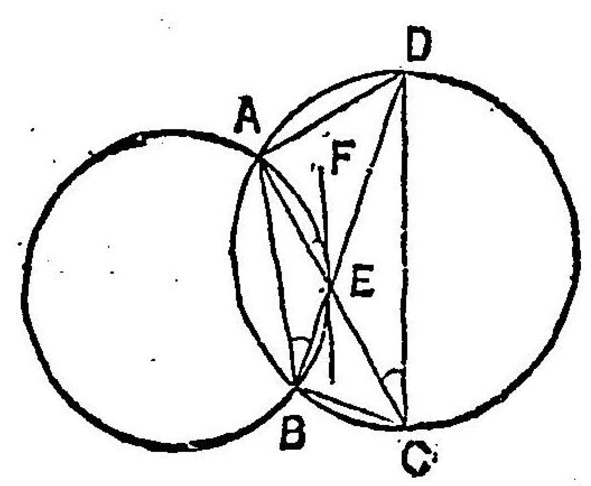
$$=\frac{1}{2}\hat{R},$$

卽チ底邊ガ內心ニ於テ對スル角ハ直角ノ $\frac{3}{2}$ ニシテ傍心ニ於テ對スル角ハ何レモ直角ノ半分ニ等シ.

18. 四邊形ノ各邊ガ皆同ジ圓ニ切スルトキハ，相對スル邊ノ和ハ相等シ． [44. 山. 高. 商.]

證 159 頁 66 題ニ同ジ．

19. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點 E ト A, B トヲ過ル圓ニ切線 EF ヲ引ケバ EF ハ DC ニ平行ナルコトヲ證セヨ．



[44. 專. 入. 檢.]

證 $A\hat{E}F=A\hat{B}E$, $A\hat{B}E=A\hat{C}D$, 故ニ $A\hat{E}F=A\hat{C}D$,

依リテ $EF \parallel CD$.

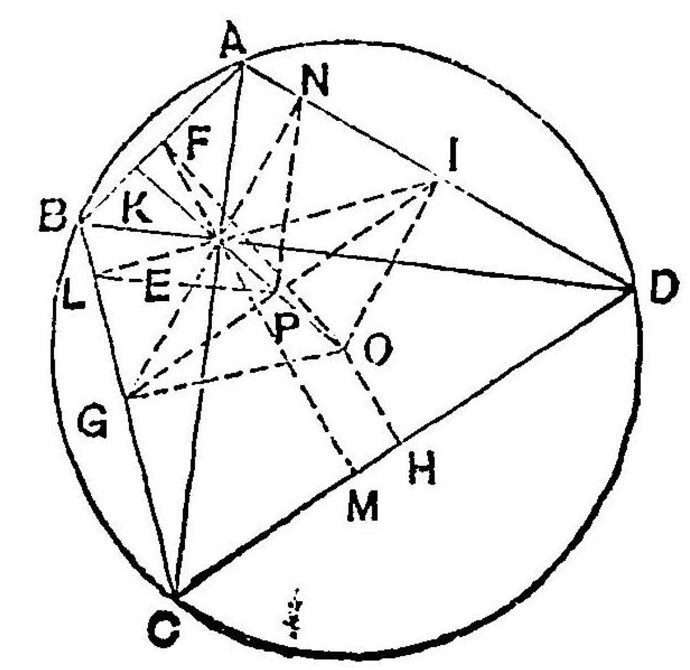
20. 圓ニ内接スル四邊形ノ兩對角線ガ互ニ垂直ナルトキ次ノ二題ヲ證セヨ．

(1) 其ノ一邊ヨリ中心マデノ距離ハ對邊ノ半分ニ等シ．

(2) 其ノ交點ヨリ各邊ヘ下セル垂線ノ趾ト各邊ノ中點トノ八ツハ同一ノ圓周上ニアリ．

[44. 陸. 經.]

證 圓 O ニ内接スル四邊形 ABCD ノ對角線



AC, BD ハ互ニ垂直ナリトス．

(1) O ヨリ各邊ヘ引ケル垂線ノ長サハ其ノ對邊ノ半分ニ等シキコトヲ證セン．

O ヨリ邊 AB, BC, CD, DA ヘ下セル垂線ノ趾ヲソレゾレ F, G, H, I トシ，又對角線ノ交點 E ヨリ邊 AB, BC, CD, DA ヘ下セル垂線ノ趾ヲソレゾレ K, L, M, N トスレバ F, G, H, I ハ皆邊ノ中點ナルユエ LE ノ延線ハ邊 AD ノ中點 I ヲ過ル [ぶらめぐぷたノ定理]，他モ同樣ノ關係アリ．

然ルトキハ $OG \perp BC$, $IEL \perp BC$,

故ニ $IE \parallel OG$; $OI \perp AD$, $GEN \perp AD$,

故ニ $GE \parallel OI$, 依リテ OGEI ハ平行四邊形ニシテ $OG=EI$, 然ルニ I ハ直角三角形 AED ノ斜邊ノ中點ナルユエ $EI=\frac{1}{2}AD$,

故ニ $OG=\frac{1}{2}AD$. 他モ亦同樣ナリ．

(2)　F, K, L, G, M, H, I, N ハ同一ノ圓周上ニアルコトヲ證セン.

OE, GI ノ交點ヲ P トスレバ OGEI ハ平行四邊形ナルユヱ P ハ OE, GI ノ中點ナリ.

故ニ PG=PI, 從ヒテ P ハ直角三角形 ILG ノ斜邊ノ中點ナルユヱ　$PL=\frac{1}{2}GI=PG$,

同様ニ PN=PG.

故ニ P ハ四ツノ點 L, G, I, N ヨリ等距離ニアリ. 同様ニ P ハ四ツノ點 F, K, M, H ヨリ等距離ニアリ. 而シテ FGHI ハ平行四邊形ニシテ $AC \perp BD$ ナルユヱ FGHI ハ矩形ナリ,

依リテ GI=FH, 從ヒテ其ノ半分 PG=PF.

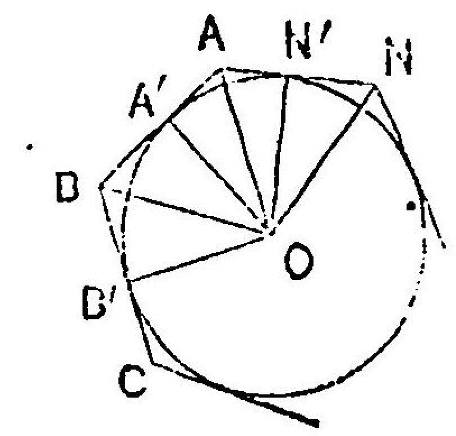
故ニ P ハ此ノ八ツノ點ヨリ等距離ニアリ.

依リテ八ツノ點 F, K, L, G, M, H, I, N ハ P ヲ中心トスル同一ノ圓周上ニアリ.

21.　圓ニ外切スル等邊多角形ハ正多角形ナルカ, 若シ正多角形ナラザルモノアリトスレバ正多角形ハ如何ナル等邊多角形ニ限ルカ.

[44. 海. 經.]

解　ABC......N ヲ圓 O ニ外切スル等邊多角形トシ, O ヨリ邊 AB, BC,......NA ニ垂線 OA',



OB',......, ON' ヲ下セバ AA'=AN', AB=AN ナルユヱ N'N=A'B, 又　ON'=OA'.

依リテ二ツノ直角三角形 ON'N, OA'B ハ全等ナリ. 故ニ $O\hat{N}N'=O\hat{B}A'$. 然ルニ此ノ二ツノ角ハソレゾレ $\hat{N}$, $\hat{B}$ ノ半分ナリ. 故ニ $\hat{N}=\hat{B}$, 同様ニ $\hat{A}=\hat{C}$, 即チ ABC......N ノ一ツオキノ角ハ相等シ. 依リテ ABC......N ハ邊數ガ偶數ナルトキハ必ズシモ等角ナラズ. 若シ邊數ガ奇數ナルトキハ總テノ角ハ相等シク正多角形トナル. 即チ圓ニ外切スル等邊多角形ハ邊數ガ奇數ナレバ必ズ正多角形ニシテ邊數ガ偶數ナルトキハ相隣ル二角ガ相等シキトキノミ正多角形ナリ.

22.　與ヘラレタル直線ヲ斜線トセル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

[44. 上. 蠶. 專.]

解　所要ノ軌跡ハ與ヘラレタル直線ヲ徑トスル圓周ナルコト容易ニ證明シ得ベシ.

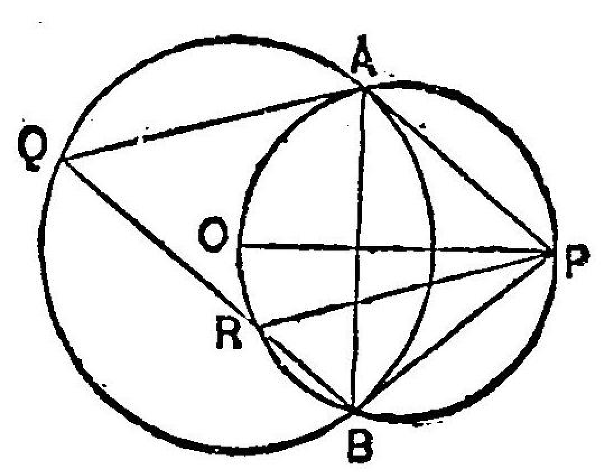
23. 一ツノ圓ノ定マレル徑 AB ノ一端 A ヲ過ル任意ノ弦 AC ノ他ノ端 C ニ於テ切線 CD ヲ引キ B ヨリ之ニ垂線 BD ヲ引ク. BD, AC ノ延線ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

[43. 專. 入. 檢.]

解 102 頁 7 題ニ同ジ.

24. 圓外ノ一點 P ヨリ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ A 及ビ B トシ, A ヲ過ル任意ノ弦 AQ ニ平行ナル直線 PR ト直線 QB トノ交點ヲ R トス, R ノ軌跡ヲ求ム. [43. 仙. 高. 工.]

解 圓ノ中心ヲ O トシ, AB ヲ結ビ付クレバ PA ハ切線ナルニヨ



$$A\hat{Q}B=P\hat{A}B,$$

而シテ AQ ∥ PR ナルニヨ

$$A\hat{Q}B=P\hat{R}B,$$

故ニ $P\hat{A}B=P\hat{R}B,$

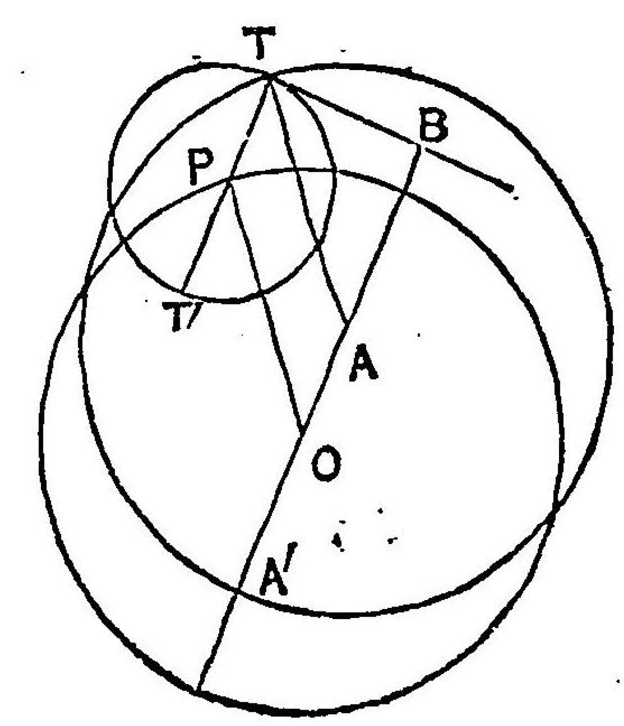
故ニ R ハ圓 PAB, 即チ OP ヲ徑トスル圓周上ニアリ. 逆ニ此ノ圓周上ノ與ヘラレタル圓内ニアル弧ノ上ノ任意ノ一點ヲ R トシ, PR, AQ ヲ結ビ付クレバ $P\hat{R}B=P\hat{A}B=A\hat{Q}B,$

故ニ AQ ∥ PR, 即チ此ノ弧上ノ點ハ要件ニ適ス. 是ニ依リテ所要ノ軌跡ハ OP ヲ徑トスル圓周ノ與ヘラレタル圓内ニアル部分ナリ.

25. 與ヘラレタル圓周上ニ中心ヲ置キ一定ノ半徑ヲ有スル圓ヲ作リ, 之ニ與ヘラレタル方向ノ切線ヲ引クトキ其ノ切點ノ軌跡如何.

[43. 七高.]

解 與ヘラレタル圓ノ中心ヲ O, 其ノ半徑ヲ R トシ, 此ノ圓周上ニ中心ヲ有スル圓ノ一定ナル半徑ヲ r トス. 圓 O ノ周上ノ任意ノ點 P ヲ中心トシ, 半徑 r ノ圓ヲ畫キ此ノ圓ト T ニ於テ切シ一定ノ方向ヲ有スル切線ヲ TB トシ, O ヲ過リ TB ニ垂線 OB 及ビ圓 P ノ徑 TT′ ヲ引キ, OP ヲ結ビ付ケ之ト平行ニ TA ヲ引ケバ OATP ハ平行四邊形トナル, 故ニ $OA=PT=r$, 及ビ $AT=OP=R$, 故ニ A ハ定方向ニ垂直ナル徑 OB 上ノ定點ニシ



テ，T ハ定點 A ヨリ R ニ等シキ距離ニアリ，即チ A ヲ中心トシ R ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周上ニアリ，逆ニ此ノ圓周上ニ任意ノ點 T ヲ取リ OB ニ垂線 TB ヲ下シ，AT ヲ結ビ付ケ，之ト平行ニ OP ヲ引キ，定圓周トノ交點ヲ P トシ，TP ヲ結ビ付クレバ $AT=OP=R$ 及ビ $AT \parallel OP$ ナルユヱ OATP ハ平行四邊形トナル，而シテ $OB \perp TB$，故ニ $TP \perp TB$，且 $TP=OA=r$，故ニ T ハ要件ニ適ス，是ニ依リテ所要ノ軌跡ハ定方向ニ垂直ナル圓 O ノ徑上ニ於テ中心ヨリ其ノ兩側ニ r ニ等シキ距離ニアル點 A, A' ヲ中心トシ，定圓ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル二ツノ相等シキ圓周ナリ.

26. 與ヘラレタル直線上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切シ，且與ヘラレタル他ノ一點ヲ過ル圓ヲ畫ク方法ヲ記シ，且其ノ理由ヲ述ベヨ.

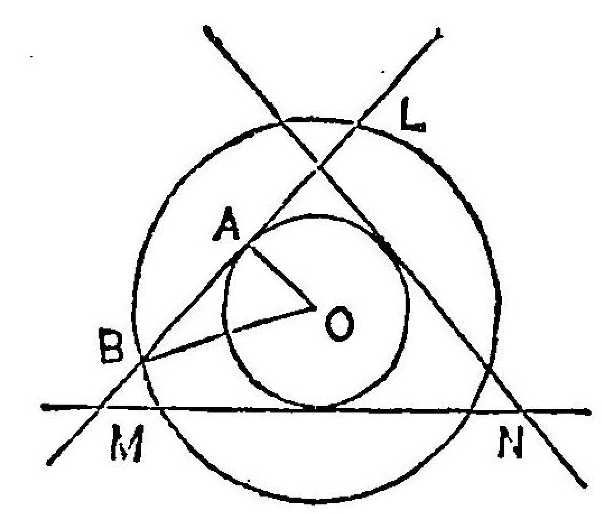
[43. 女. 高. 師.]

解 190 頁 88 題場合 III ニ同ジ.

27. 同一ノ平面上ニアリテ同一ノ點ニ於テ相交ラズ且何レノ二ツモ平行ナラザル三直線ノ各ヨリ同一ノ與ヘラレタル長サノ弦ヲ截リ取ル

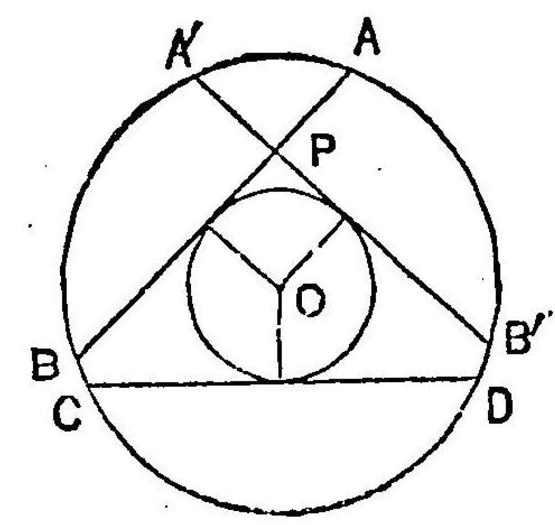
圓ヲ畫ク方法如何.　　[44. 各高等.]

解 三ツノ直線 L, M, N ガ同一ノ平面上ニアリテ同一ノ點ニ於テ相交ラズ，又何レノ二ツモ平行ナラザルトキハ三ツノ直線ハ二ツヅツ相交リテ三角形ヲナスベシ，其ノ三角形ヲ LMN トス．又與ヘラレタル長サヲ p トス，然ルトキハ $\triangle LMN$ ノ內切圓ヲ畫キ其ノ中心ヲ O，直線 L トノ切點ヲ A トシ，L 上ニ AB ヲ p ノ半分ニ等シク取リ O ヲ中心トシ，OB ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバコレ所要ノ圓ナリ．如何トナレバ此ノ圓ガ直線 L ヨリ截リ取ル弦ハ AB ノ 2 倍ニシテ p ニ等シク，又 O ヨリ L, M, N ニ至ル距離ハ內切圓ノ半徑ニシテ相等シキユヱ圓ガ L, M, N ヨリ截リ取ル弦ノ長サハ相等シケレバナリ.



28. 定圓內ノ一定點ヲ過リテ與ヘラレタル長サニ等シキ弦ヲ引ケ．又與ヘラレタル長サノ限界ヲ定メヨ.　　[44. 大. 高. 工.]

解　定圓 O 內ノ定點 P ヲ過リテ與ヘラレタル長サ l ニ等シキ長サノ弦ヲ引クコトヲ求メントス．圓 O 內ニ l ニ等シキ長サノ弦 CD ヲ引キ，CD ニ切スル圓 O ノ同心圓ヲ畫キ，此ノ圓ニ P ヲ過ル切線 AB, A′B′ ヲ引キ，圓 O ト交ル點ヲソレゾレ A, B; A′, B′ トスレバ AB, A′B′ ハ所要ノ弦ナリ．如何トナレバ AB, A′B′, CD ハ同ジ圓ニ切スルユヱ其ノ中心ヨリ等距離ニアリ．



故ニ　$AB=A'B'=CD=l$ ナレバナリ．

次ニ弦 CD ヲ圓 O ニ引キ得ベキ爲ニハ $CD \leqq$(圓 O ノ徑) ナルコト，即チ $l \leqq$(圓 O ノ徑) ナルコトヲ要ス．

而シテ P ガ第二ノ圓ノ外ニアレバ二ツノ解，P ガ第二ノ圓ノ周上ニアレバ一ツノ解アリ．

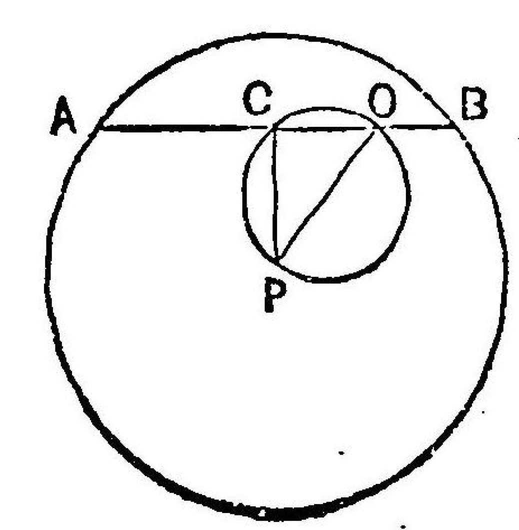
若シ P ガ第二ノ圓ノ內ニアレバ解ナシ．

又 $l=$(圓 O ノ徑) ナルトキハ OP ヲ結ビ付クル徑ガ所要ノモノナリ．

注意　164 頁 69 題ヲ參照セヨ．

29.　與ヘラレタル圓內ノ與ヘラレタル點 O ヲ過リ弦 AOB ヲ引キ AO, BO ノ差ヲシテ與ヘラレタル直線ニ等シカラシメヨ．[43. 水. 講.]

解　與ヘラレタル圓ノ中心ヲ P，與ヘラレタル直線ヲ l トス．PO ヲ結ビ付ケ之ヲ徑トセル圓ヲ畫キ此ノ圓周ト O ヲ中心，$\frac{1}{2}l$ ヲ半徑トセル圓ノ弧トノ交點ヲ C トシ，OC ヲ結ビ付クル直線ト圓 P トノ交點ヲ A, B トス．然ルトキハ AB ハ所要ノ弦ナリ．



PC ヲ結ビ付クレバ $P\hat{C}O=\hat{R}$ ナルユヱ C ハ弦 AB ノ中點ナリ，故ニ　$AO-BO=2OC=l$.

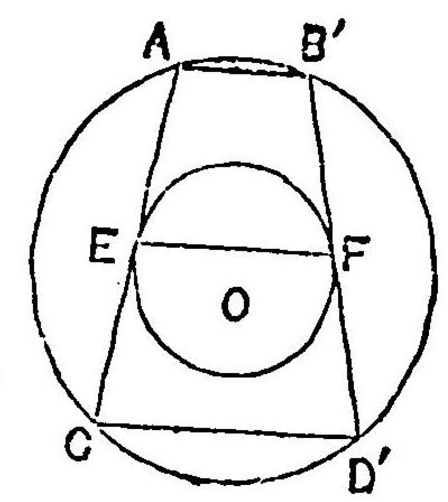
吟味　$\frac{l}{2}$ ガ OP ヨリ小ナレバ二ツノ解，

$\frac{l}{2}$ ガ OP ニ等シキトキハ一ツノ解アリ，

若シ $\frac{l}{2}$ ガ OP ヨリ大ナルトキハ不能ナリ．

30.　圓周上ノ與ヘラレタル二點 A 及ビ C ヲ過リ互ニ平行ナル二弦 AB 及ビ CD ヲ引キ其ノ和ヲシテ最大ナラシメヨ．[44. 水. 講.]

解　先ヅ A, C ヲ過リ互ニ平行ナル任意ノ弦



AB′, CD′ ヲ引キ B′D′ ヲ結ビ付ケ其ノ中點ヲ F トシ, AC ノ中點 E ト結ビ付クレバ $EF=\frac{1}{2}(AB'+CD')$, $AC=B'D'$.

故ニ F ハ O ヲ中心トシ OE ヲ半徑トスル圓周上ニアリ, 即チ EF ハ此ノ圓ノ弦ナリ, 而シテ $AB'+CD'$ ガ最大ナルハ EF ノ最大ナルトキニシテ即チ EF ガ O ヲ過ルトキナリ. 然ルトキハ OE ハ AC ニ垂直ナルユヱ OE ニ平行ナル AB′, CD′ モ亦 AC ニ垂直ナリ. 依リテ所要ノ弦 AB, CD ハ A, C ヲ過リテ AC ニ垂直ニ引ケバ可ナリ.

31. 定圓ニ切シ,且定直線上ノ定點ニ於テ其ノ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

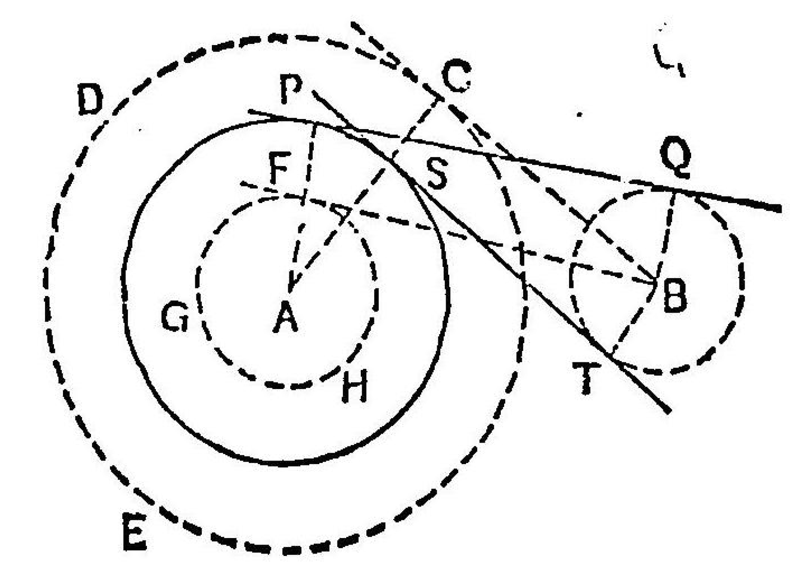
[43. 農. 大. 實., 鹿. 高. 農.]

解 132 頁 37 題ニ同ジ.

32. 與ヘラレタル二圓ニ切スル直線ヲ引クコト.

[44. 陸. 士.]

解 與ヘラレタル二ツノ圓ノ中心ヲ A, B ト



シ其ノ半徑ヲ r, r' トス. A ヲ中心トシ, 半徑 $r+r'$ ナル圓ヲ畫キ, 點 B ヨリ此ノ圓ニ切線 BC ヲ引キ切點ヲ過ル半徑 AC ト與ヘラレタル圓 A ノ周トノ交點ヲ S トシ, S ニ於ケル此ノ圓ノ切線 ST ヲ引ケバ, コレ所要ノ内公切線ナリ.

次ニ中心 A, 半徑 $r-r'$ [$r>r'$ トス] ナル圓ヲ畫キ, B ヨリ此ノ圓ニ切線 BF ヲ引キ, 切點 F ヲ過ル半徑 AP ノ端 P ニ於テ與ヘラレタル圓ニ切線 PQ ヲ引ケバ, コレ所要ノ外公切線ナリ.

如何トナレバ B ヨリ ST, PQ ニ垂線 BT, BQ ヲ引クトキハ BCST, BFPQ ハ矩形ナルコト容易ニ知リ得ベシ 故ニ ST, PQ ハ T, Q ニ於テ圓 B ニ切スレバナリ. 而シテ點 B ガ圓 CDE, FGH ノ内ニアラザレバ, B ヨリ是等ノ圓ニ切線ヲ引キ得ルヲ以テ所要ノ公切線ヲ引キ得ベシ. 依リテ所要ノ公切線ヲ引キ得ル爲ニハ點 B

ガ是等ノ圓ノ內ニアラザルコトヲ要ス.
次ニ此ノ公切線ノ數ヲ吟味スベシ.

(I) 與ヘラレタル二ツノ圓 A, B ノ周ハ全ク出會ハズシテ各ガ全ク他ノ外ニアリトスレバ $AB>r+r'$ ナルユヱ勿論 $AB>r-r'$, 故ニ點 B ハ二ツノ圓 CDE, FGH ノ外ニアリ, 依リテ B ヨリ是等ノ圓ヘ引ケル切線ハ二ツヅツアリ, 故ニ所要ノ外公切線モ內公切線モ二ツヅツアリ.

(II) 與ヘラレタル圓 A, B ガ外切スレバ

$$AB=r+r',\quad 依リテ\ AB>r-r'.$$

故ニ 點 B ハ圓 CDE ノ周上ニアリテ圓 FGH ノ外ニアリ, 然レバ B ヨリ圓 CDE ヘ引ケル切線ハ唯一ツニシテ圓 FGH ヘ引ケル切線ハ二ツアリ, 從ヒテ所要ノ內公切線ハ一ツニシテ, 外公切線ハ二ツアリ.

(III) 二ツノ圓 A, B ガ相交ルトキハ $r+r'>AB>r-r'$ ナルユヱ, B ハ圓 CDE ノ內ニアリテ圓 FGH ノ外ニアリ. 故ニ B ヨリ圓 CDE ニ切線ヲ引クコト能ハズ. 圓 FGH ニハ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得ベシ, 依リテ所要ノ內公切線ナク, 外公切線ハ二ツアリ.

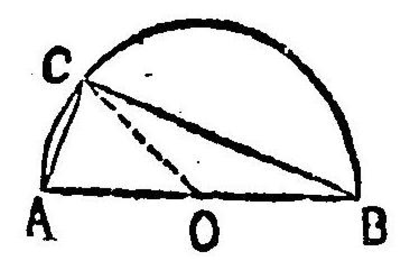
(IV) 二ツノ圓 A, B ガ內切スルトキハ $AB=r-r'$ ナルユヱ B ハ圓 CDE ノ內ニアリテ圓 FGH ノ周上ニアリ, 依リテ所要ノ內公切線ナク, 外公切線ハ一ツアリ.

(V) 圓 A, B ノ周ハ出會ハズシテ一ツガ全ク他ノ內ニアレバ $AB<r-r'$ ナルユヱ B ハ二ツノ圓ノ內ニアリ. 依リテ所要ノ切線ハ一ツモナシ.

次ニ 二ツノ圓 A, B ガ相等シキトキハ所要ノ內公切線ハ前同樣ニシテ求メ得ベキモ $r-r'=0$ ナルユヱ圓 FGH ハ一點 A トナルヲ以テ外公切線ヲ引ク作圖ハ失敗スベシ, 然レドモ半徑 AP ハ切線 BF, 卽チ此ノ場合ニハ BA ニ垂直ナルヲ以テ A ヲ過リ AB ニ垂直ナル半徑 AP ヲ引ケバ其ノ端 P ハ所要ノ外公切線ノ切點ナリ. 依リテ容易ニ作圖シ得ベシ.

33. 與ヘラレタル直線ヲ斜邊トシ, 其ノ半分ヲ他ノ一邊トスル直角三角形ヲ作ル方法及ビ理由ヲ記シ, 且其ノ銳角ノ一ツハ他ノ 2 倍ナルコトヲ證セヨ. [44. 女. 高. 師.]

證 直線 AB ヲ與ヘラレタル長サニ引キ, 其ノ中點 O ヲ中心トシ, AO ヲ半徑トシテ半圓



ACB ヲ畫キ，A ヲ中心トシ同ジ半徑ノ圓ヲ畫キ，半圓周 ACB トノ交點ヲ C トスレバ ABC ハ所要ノ直角三角形ナリ．如何トナレバ $A\hat{C}B$ ハ半圓ニ於ケル角ナルヲ以テ直角ニシテ AC ハ AB ノ半分ナルコト作圖ニ依リテ明カナレバナリ．

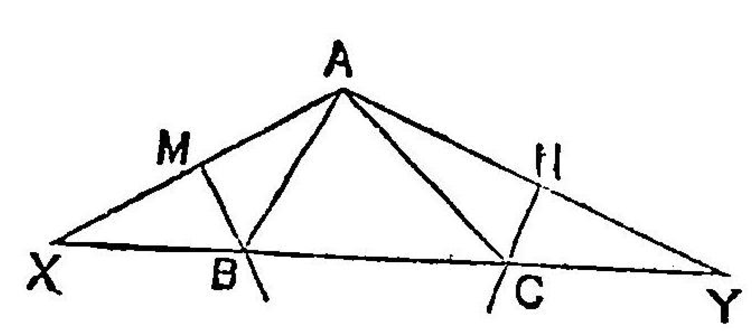
次ニ OC ヲ結ビ付クレバ OC=AC ナルユエ $B\hat{A}C=C\hat{O}A$．又 OC=OB ナルユエ $O\hat{C}B=O\hat{B}C$，然ルニ $C\hat{O}A=O\hat{C}B+O\hat{B}C$，

故ニ $$C\hat{O}A=2O\hat{B}C=2A\hat{B}C,$$

依リテ $$B\hat{A}C=2A\hat{B}C.$$

34. 周圍及ビ二ツノ角ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ． [43. 東北農. 大.]

解 周圍ヲ s, 二ツノ角ヲ α, β トス．任意ノ線分 XY ヲ s ニ等シク取リ，XY ト $\frac{1}{2}\alpha$ 及ビ $\frac{1}{2}\beta$ ヲ作シテ XY ノ同ジ側ニ直線 XA, YA ヲ引キ，其ノ交點ヲ A トシ，AX, AY ノ中點 M,N ヲ過リ，ソレゾレ AX, AY ニ垂直ナル直線ヲ引キ XY トノ交點ヲ



B, C トシ；AB, AC ヲ結ビ付クレバ AB=BX, AC=CY ナルユエ △ABC ノ周圍ハ XY, 卽チ s ニ等シク，又 $B\hat{A}X=B\hat{X}A=\frac{1}{2}\alpha$ ニシテ，

$$A\hat{B}C=B\hat{A}X+B\hat{X}A$$

ナルユエ $A\hat{B}C=\alpha$，同樣ニ $A\hat{C}B=\beta$，

故ニ △ABC ハ所要ノ三角形ナリ．

注意 203 頁 **93** 題ヲ參照セヨ．

35. 三角形ノ頂角ト底邊ト他ノ二邊ノ和トヲ與ヘテ其ノ三角形ヲ作レ． [44. 東. 高. 師.]

解 213 頁 **100** 題ニ同ジ．

36. 頂角，底邊及ビ他ノ二ツノ邊ノ和ヲ與ヘ三角形ヲ作ルコトヲ求ム [證明ヲ要セズ]． [44. 海. 兵.]

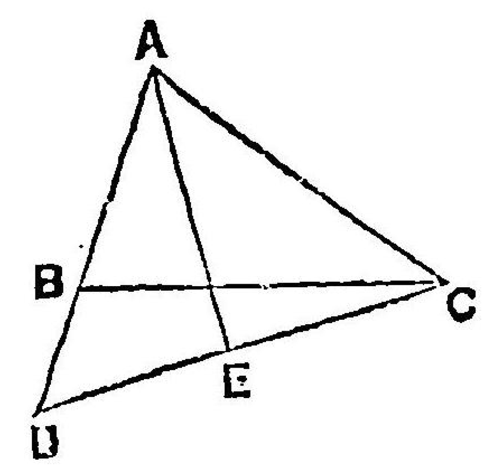
解 213 頁 **100** 題ヲ參照セヨ．

37. 三角形ノ頂角，底邊及ビ他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ其ノ三角形ヲ作ルコトヲ求ム． [43. 東. 高. 商.]

解 頂角ヲ α, 底邊ヲ l, 他ノ二邊ノ差ヲ m トス

任意ノ一點 D ヨリ $\frac{1}{2}(2\hat{R}-\alpha)$ ニ等シキ角ヲナス直線 DB, DC ヲ引キ，其ノ一ツノ邊上ニ

於テ　　　$DB=m$



ヲ取リ B ヲ中心, l ヲ半徑トセル弧ト DC トノ交點ヲ C トシ DC ノ中點 E ヲ過リ之ニ垂直ナル直線ト DB トノ交點ヲ A トシ AC, BC ヲ結ビ付クレバ E ハ DC ノ中點ニシテ $EA\perp DC$ ナルユヱ,

$$A\hat{D}C=A\hat{C}D=\frac{1}{2}(2\hat{R}-\alpha),$$

故ニ　$D\hat{A}C=2\hat{R}-2A\hat{D}C=2\hat{R}-(2\hat{R}-\alpha)=\alpha,$

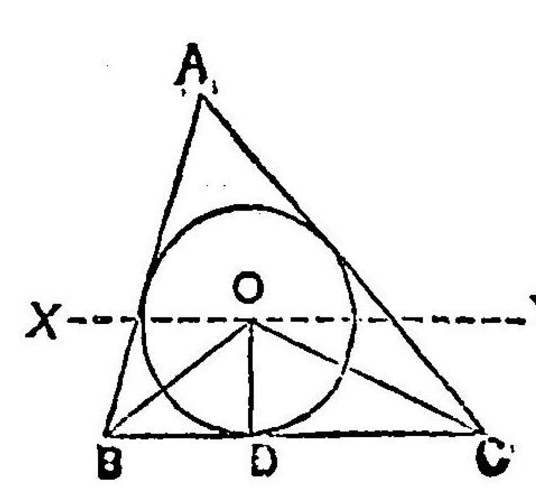
而シテ　$BC=l,\ AC-AB=AD-AB=DB=m,$

故ニ　ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

注意　別解ハ 216 頁 **102** 題ヲ見ヨ.

38.　一邊ト之ニ對スル角及ビ內切圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.　[44. 陸. 士.]

解　所要ノ三角形 ABC ヲ作リ得タリトシ,



其ノ內心ヲ O トス. 而シテ O ヨリ BC ニ垂線 OD ヲ引ケバ OD ハ內切圓ノ半徑ナリ. 故ニ $\hat{A}$, BC, OD ヲ既

知セルモノト見ルコトヲ得ベシ, 然ルトキハ $B\hat{O}C=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A}$ ニシテ一定ナリ, 故ニ O ハ BC ヨリ定距離ナル直線 XY 上ニアリテ且 BC ニ對シ定角ヲ張ル弧上ニアルユヱ其ノ交點ト一致ス. 依リテ內切圓 O ハ定マル, 然ルトキハ BA, CA ハソレゾレ B, C ヲ過ル此ノ圓ノ切線ナルユヱ決定セラルベシ.

依リテ所要ノ三角形ヲ容易ニ作圖シ得ベシ.

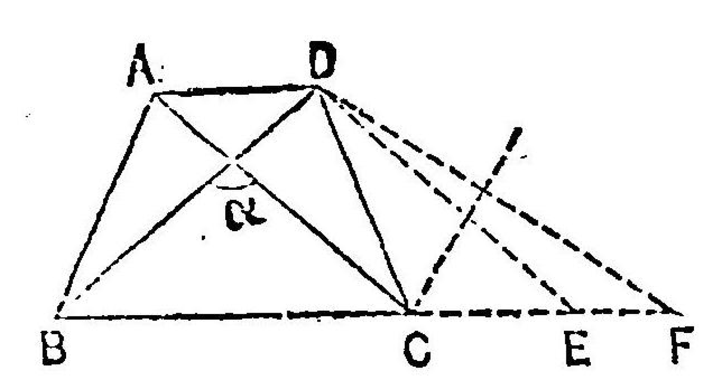
次ニ此ノ作圖ガ出來得ル爲ニハ BC ヲ弦トスル弧ト XY ト出會フコトヲ要ス, 而シテ交ル場合ニハ內切圓ハ二ツヲ得レドモ全等ナリ,

從ヒテ全等ナル二ツノ三角形ヲ得ベシ.

故ニ本題ハ解ノ數一ツヨリ多カラズ.

39.　梯形ノ兩對角線及ビ其ノ交角並ニ兩隣邊ノ和ヲ與ヘテ本形ヲ作レ.　[44. 陸. 經.]

解　梯形 ABCD ニ於テ兩對角線 AC, BD 及



ビ其ノ交角 α 並ニ二ツノ隣邊 BC, CD ノ和 m ヲ與ヘラレタルモノトス.

所要ノ梯形 ABCD ヲ畫キ得タリトシ，D ヲ過リ AC ニ平行ニ DE ヲ引キ BC ノ延線トノ交點ヲ E トスレバ ACED ハ平行四邊形ナルコト明カナリ．

依リテ AC=DE，且 $B\hat{D}E=\alpha$.

然ルトキハ △DBE ハ二ツノ邊及ビ其ノ夾角ヲ知ルヲ以テ畫キ得ベシ；從ヒテ $D\hat{B}C$ ハ求メ得ベシ．依リテ △DBC ハ其ノ一ツノ邊 BD トソレニ隣レル一角 B 及ビ他ノ二ツノ邊ノ和ヲ知ルユヱ作リ得ベク，從テヒ點 A ヲ求メ得ベシ．是ニ依リテ次ノ作圖法ヲ得．

先ヅ與ヘラレタル二ツノ對角線ニ等シキ二ツノ邊ヲ有シ，其ノ夾角ガ與ヘラレタル角 α ニ等シキ三角形 DBE ヲ作リ，BE 或ハ其ノ延線上ニ F ヲ取リ BF=m ナラシメ，DF ヲ結ビ付ケ其ノ垂直二等分線ト BF トノ交點ヲ C トス．

次ニ C，D ヨリソレゾレ DE，BE ニ平行ナル直線 CA，DA ヲ引キ其ノ交點ヲ A トシ，AB ヲ結ビ付クレバ ABCD ハ所要ノ梯形ナリ．但ソノ證ハ略ス．

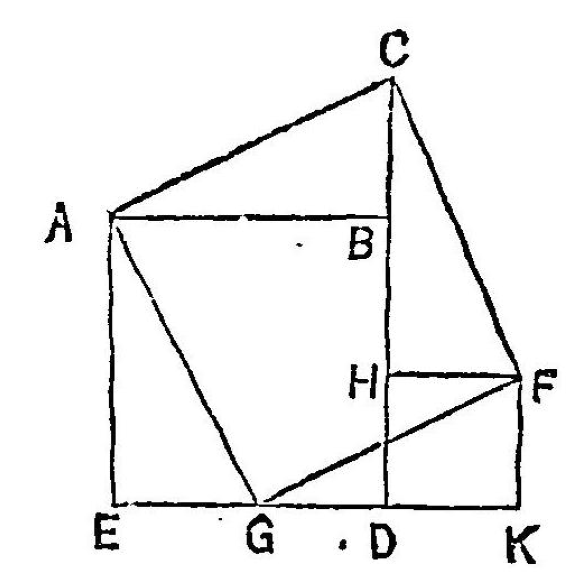
C'．面　積

1．直角三角形ノ斜邊上ノ正方形ハ他ノ二邊上ノ正方形ノ和ニ等シキコトヲ證明セヨ．

[43. 女. 高. 師.]

證 I．243 頁 21 題ニ同ジ．

證 II．直角三角形 ABC ヲ取リ [$\hat{B}=\hat{R}$ トス]，邊 AB 上 C ト反對ノ側ニ正方形 ABDE ヲ作リ，又斜邊 AC 上 B ト同ジ側ニ正方形 ACFG ヲ作レ．



F ヨリ BD ニ垂線 FH ヲ引キ，又 ED ノ延線ニ垂線 FK ヲ引ケ．然ルトキハ容易ニ次ノコトヲ證明シ得ベシ．

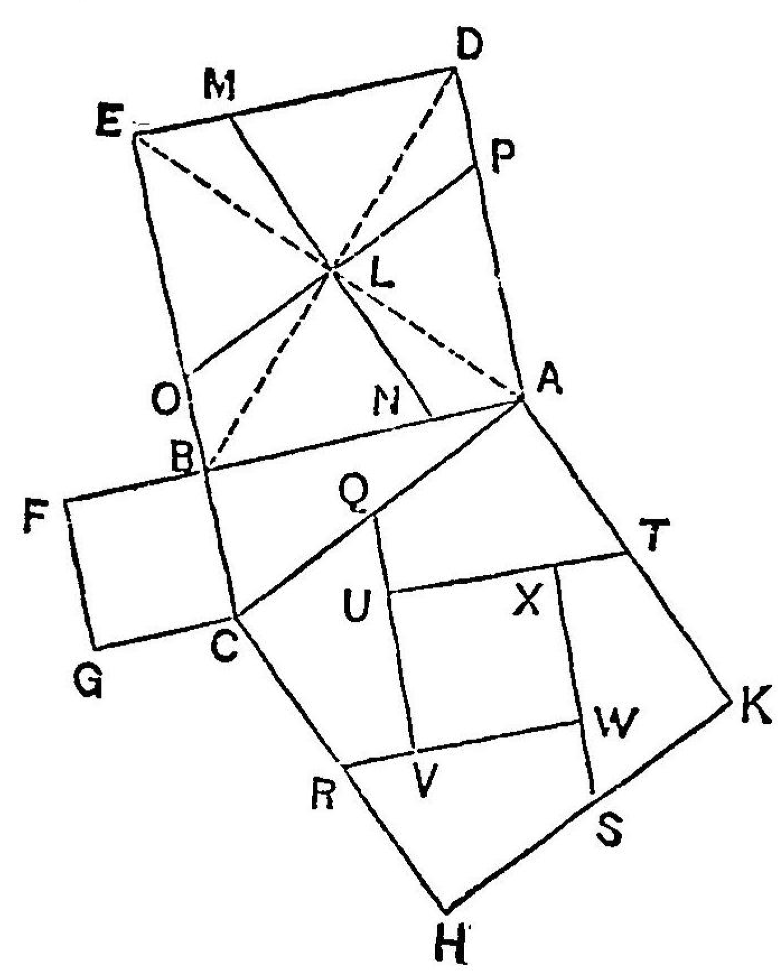
(1)　CBD ハ一直線ヲナス．

(2)　G ハ直線 DE 上ニアリ．

(3)　△ABC≡△AEG≡△CHF≡△GKF.

(4)　HK ハ正方形ニシテ BC ノ上ノ正方形ニ等シ．[是ニ於テ定理ハ證明セラルベシ．學生自ラ試ミヨ]．

證 III. 直角三角形 ABC ヲ取リ, 邊 AB, BC, CA ノ上ニソレゾレ C, A, B ト反對ノ側ニ正方形 BADE, CBFG, ACHK ヲ作レ. 大ナル邊 AB 上ノ正方形ノ兩對角線ノ交點 L ヲ過リテ CA ニ垂直ナル MLN ヲ引キ CA ニ平行ナル OLP ヲ引ケ. 斜邊上ノ正方形ノ邊 AC, CH, HK, KA ノ中點 Q, R, S, T ヲ取レ. Q, S ヲ過リ BC ニ平行ナル QUV, SWX ヲ引キ R, T ヲ過リ AB ニ平行ナル RVW, TXU ヲ引ケ.



然ルトキハ容易ニ次ノコトヲ證明シ得ベシ.

(1) 八個ノ四邊形 LMEO, LOBN, LNAP, LPDM, AQUT, CRVQ, HSWR, KTXS ハ皆相等シ.

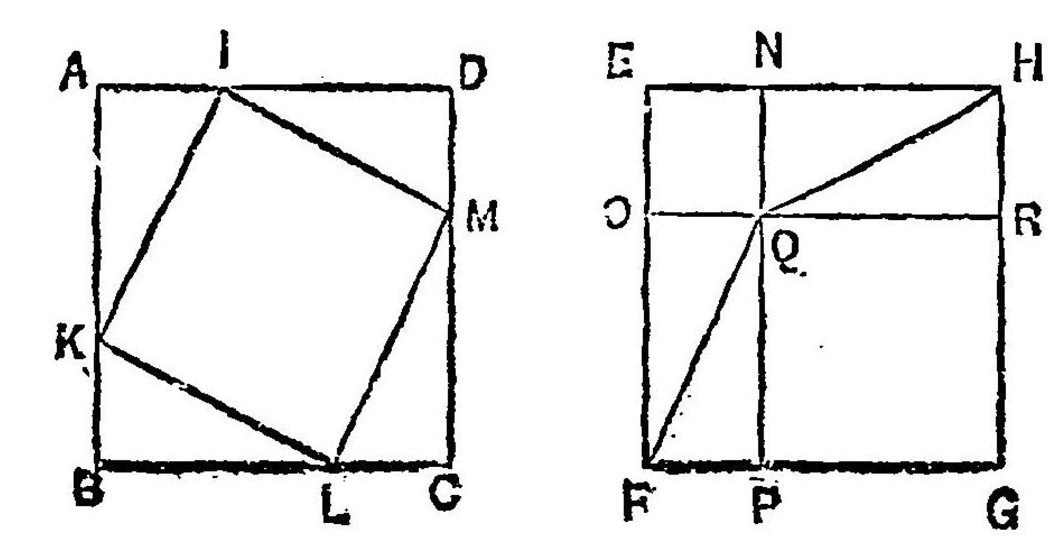
(2) 四邊形 UVWX ハ正方形ナリ.

(3) 二ツノ正方形 CF, UW ハ相等シ.

[證明ノ完成ハ學生自ラ試ミヨ].

證 IV. 二ツノ相等シキ正方形 ABCD, EFGH ヲ取レ. AD ノ上ニ任意ノ一點 I ヲ取リ, BK, CL, DM, EN, EO ヲ各 AI ニ等シク截リ取レ,

IK, KL, LM, MI ヲ結ビ付ケ, 又 N ヲ過リ EF ニ平行ナル NQP ヲ引キ, O ヲ過リ EH ニ平行ナル OQR ヲ引ケ. 而シテ QF, QH ヲ結ビ付ケヨ.



然ルトキハ容易ニ次ノコトヲ證明シ得ベシ.

(1) 正方形 ABCD ハ一ツノ正方形 IKLM 及ビ四ツノ全等ナル直角三角形ニ分タル.

(2) 正方形 EFGH ハ二ツノ正方形 EOQN, QPGR 及ビ四ツノ全等ナル三角形ニ分タル.

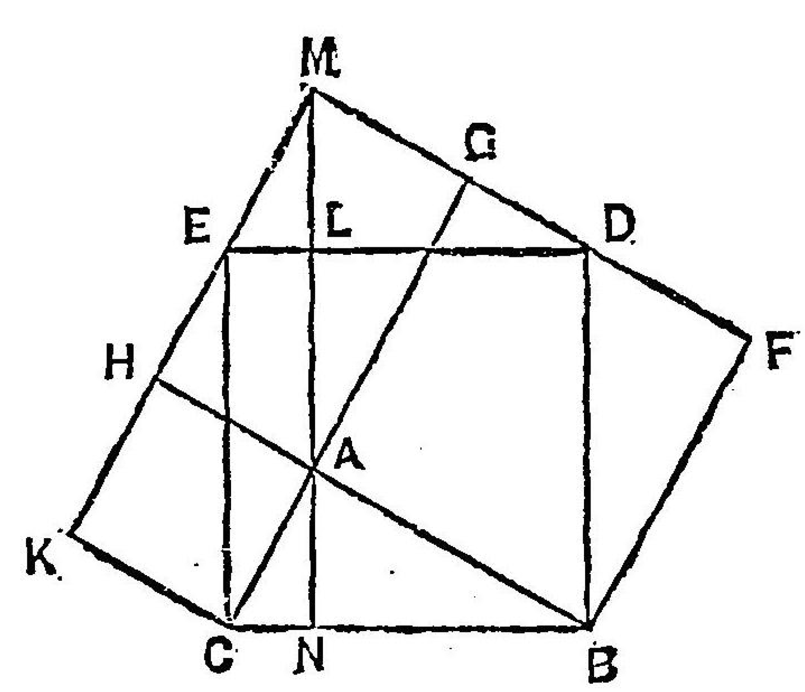
(3) 是等ノ三角形ハ皆相等シ.

(4) 正方形 IL ハ二ツノ正方形 ON, PR ノ和ニ等シ.

(5) 三ツノ正方形 IL, ON, PR ハ相等シキ直角三角形ノ中ノ一ツノ斜邊及ビ邊ノ上ノ正方形ナリ.

[學生自ラ證明ヲ完成セヨ].

證 V. 直角三角形 ABC ヲ取リ, 斜邊 BC 上 A ト同ジ側ニ正方形 BCED ヲ畫キ, 又邊 CA, AB 上 B, C ト反對ノ側ニ正方形 CAHK, ABFG ヲ畫ケ. A ヲ過リ BC ニ垂直ナル直線 MLAN ヲ引キ, 又 FG, KH ヲ引キ延バシテ MLAN ニ交ラシム. 然ルトキハ容易ニ次ノコトヲ證明シ得ベシ.



(1) D ハ FG ノ上ニアリ.

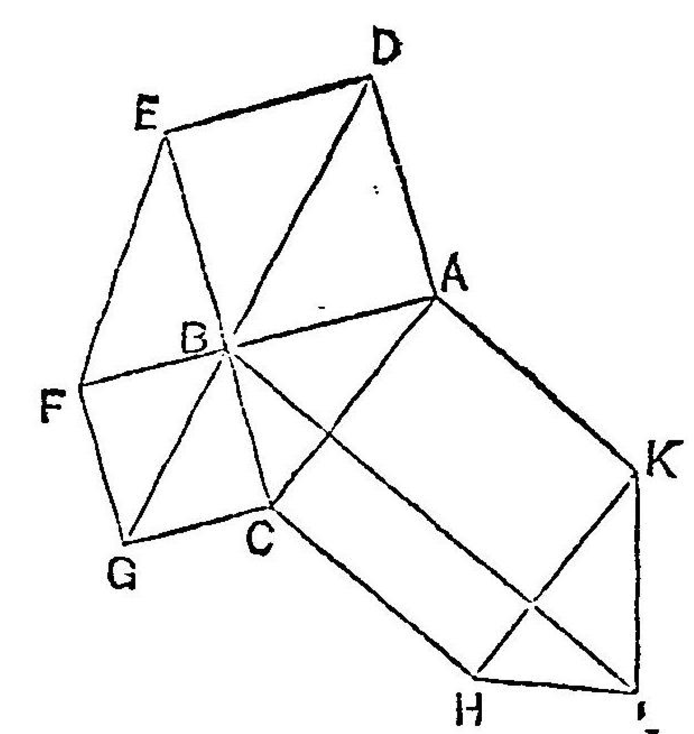
(2) E ハ KH ノ延線上ニアリ.

(3) 矩形 BL 及ビ正方形 AF ハ何レモ平行四邊形 AD ニ等シ.

(4) 矩形 CL 及ビ正方形 AK ハ何レモ平行四邊形 AE ニ等シ.

[證明ノ調製ハ學生ニ委ヌ].

證 VI. 直角三角形 ABC ヲ取リ, 邊 AB, BC, CA 上 C, A, B ト反對ノ側ニ正方形 BADE, CBFG, ACHK ヲ作レ. HK ノ上ニ △ABC ト全等ナル △HLK ヲ HL ∥ AB, KL ∥ CB ナル如ク作レ.



FE, GB, BD, BL ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ容易ニ次ノコトヲ證明シ得ベシ.

(1) GBD ハ一直線ヲナス.

(2) △FBE＝△CBA.

(3) 四ツノ四邊形 GFED, GCAD, BCHL, LKAB ハ皆相等シ.

[學生自ラ證明ヲ補ヘ].

［附言］ 本題ノ定理ハ云フマデモナク，ぴたごらすノ定理ト稱セラルルモノニシテ，其ノ證明ハ尚數種アリ．數學辭書第十版148頁ヲ參照セラレヨ．

2. 三角形ノ一邊上ノ正方形ガ他ノ二邊上ノ正方形ノ和ニ等シキトキハ其ノ二邊ノ夾ム角ハ直角ナルコトヲ證明セヨ．

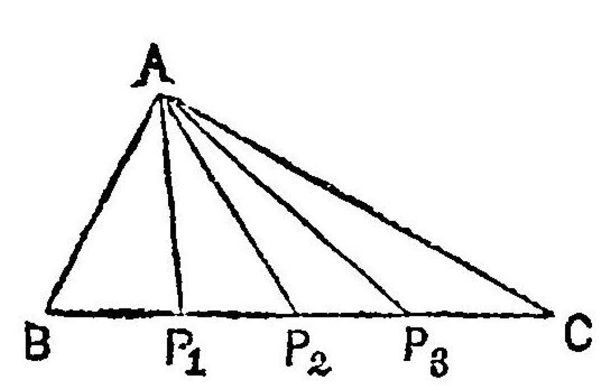
［43. 長. 高. 商.］

證 三角形ヲ ABC トシ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ トナス．若シ $\hat{A}\neq\hat{R}$ ナレバ

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\neq\overline{BC}^2,\quad 故ニ\quad \hat{A}=\hat{R}.$$

3. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ長サガ a, b ナルトキハ斜邊ノ四等分點ヲ直角頂ニ結ビ付クル三直線ノ長サ各幾何ナルカ．　［43. 海. 機.］

解 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ヲ四等分スル點ヲ B ノ方ヨリ順次ニ P_1, P_2, P_3 トス．



$$BC=\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)},$$
$$AP_2=\frac{1}{2}BC$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

次ニ　$\overline{AB}^2+\overline{AP_2}^2=2(\overline{BP_1}^2+\overline{AP_1}^2)$

ナルガ故ニ　$\overline{AP_1}^2=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AP_2}^2)-\overline{BP_1}^2$

$$=\frac{1}{2}\left\{a^2+\frac{1}{4}(a^2+b^2)\right\}-\frac{1}{16}(a^2+b^2),$$

之ヨリ　$AP_1=\frac{1}{4}\sqrt{(9a^2+b^2)}$.

同樣ニ　$AP_3=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+9b^2)}$

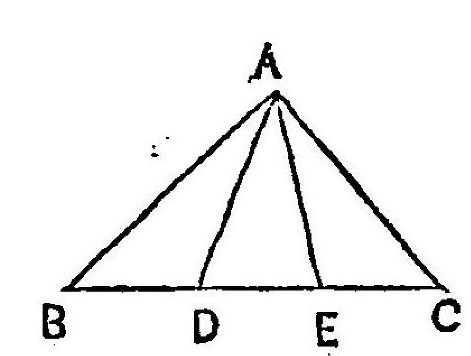
ヲ得．

4. 三角形 ABC ニ於テ BC ノ中點ヲ M トセバ兩邊 AB 及ビ AC ノ上ノ正方形ノ和ハ AM 及ビ MC ノ上ノ正方形ノ和ノ 2 倍ナルコトヲ證セヨ．　［43. 鹿. 高. 農.］

證 263 頁 **41** 題ニ同ジ．

5. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ上ニ一點 D ヲ設ケテ BD ヲ CD ノ半分ニ等シカラシムルトキハ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6\overline{BD}^2+3\overline{AD}^2$ ナルコトヲ證明セヨ．　［44. 商船.］

證 CD ノ中點ヲ E トスレバ BD＝DE＝EC



ナルユヱ △ABE ニ於テ

$$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{DE}^2,$$

又 △ADC ニ於テ

$$\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2,$$

故ニ $2\overline{AB}^2+2\overline{AE}^2+\overline{AD}^2+\overline{AC}^2$

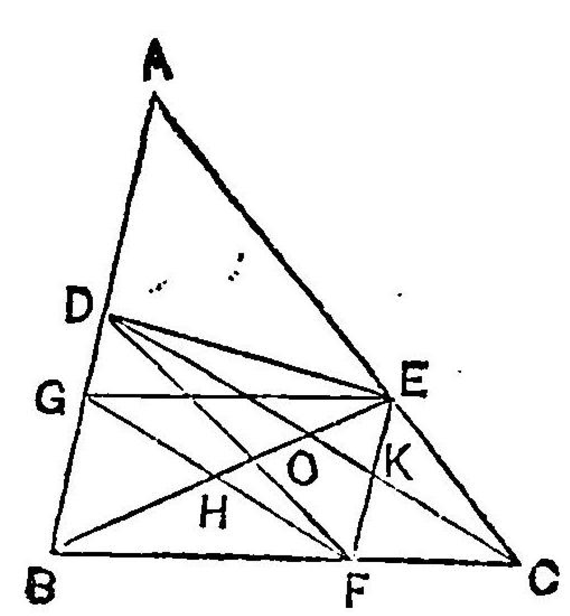
$$=4\overline{AD}^2+4\overline{DE}^2+2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2,$$

即チ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{DE}^2$,

即チ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{BD}^2$.

6. 三角形 ABC ノ邊 AB ノ中點ヲ D トシ, 邊 AC 上ニ AE ヲ AC ノ $\frac{2}{3}$ ニ取リ CD, BE ノ交點ヲ O トセバ OE ハ BE ノ $\frac{1}{4}$ ナルコトヲ證セヨ. [43. 海. 兵.]

證 EF ヲ AB ニ平行ニ引キ, BC トノ交點ヲ F トシ, FG ヲ CD ニ平行ニ引キ BE, AB トノ交點ヲソレゾレ H, G トシ DE, DF, GE ヲ結ビ付ケヨ, $CE=\frac{1}{3}AC$, 及ビ $EF \parallel AB$



ナルガ故ニ $CF=\frac{1}{3}BC$,

而シテ $\triangle CDE=\frac{1}{3}\triangle ADC=\frac{1}{6}\triangle ABC$,

$$\triangle CDF=\frac{1}{3}\triangle BDC=\frac{1}{6}\triangle ABC,$$

故ニ $\triangle CDE=\triangle CDF$, 故ニ EF ハ CD トノ交點 K ニ於テ二等分セラル.

又 $CF=\frac{1}{3}BC$,

從ヒテ $BF=\frac{2}{3}BC$, 且 $FG \parallel CD$

ナルユエ $BG=\frac{2}{3}BD=\frac{1}{3}AB=EF$,

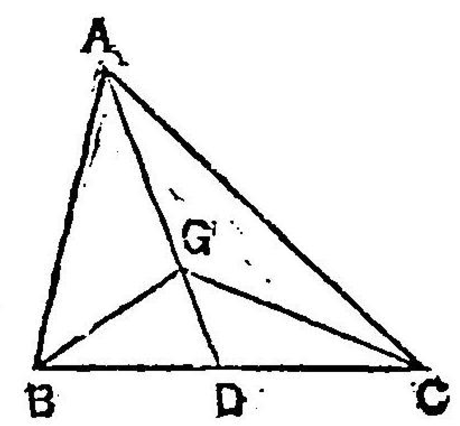
故ニ EFBG ハ平行四邊形ニシテ, H ハ BE ノ中點トナル. 次ニ K ハ EF ノ中點ニシテ $CD \parallel FG$ ナルユエ CD, BE ノ交點 O ハ EH ノ中點ナルベシ. 是ニ依リテ

$$OE=\frac{1}{2}EH=\frac{1}{2}\cdot\frac{BE}{2}=\frac{1}{4}BE.$$

7. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トシテ三ツノ三角形 BGC, CGA, AGB ノ面積ヲ比較セヨ.

[43. 商船.]

解 AG ノ延線ト BC トノ交點ヲ D トスレ



バ D ハ BC ノ中點ニシテ, $AG=2GD$ ナルコト明カナリ. 是ニ依リテ

$$\triangle AGB=\frac{2}{3}\triangle ABD$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{3}\triangle ABC.$$

同樣ニ他ノ三角形ニ於テモ $\frac{1}{3}\triangle ABC$ ニ等シ.

故ニ所題ノ三ツノ三角形ノ面積ハ相等シ.

別解 AG ト BC トノ交點ヲ D トスレバ

$$\triangle AGB:\triangle CGA=BD:DC,$$

然ルニ D ハ BC ノ中點ナルガ故ニ $BD=DC$.

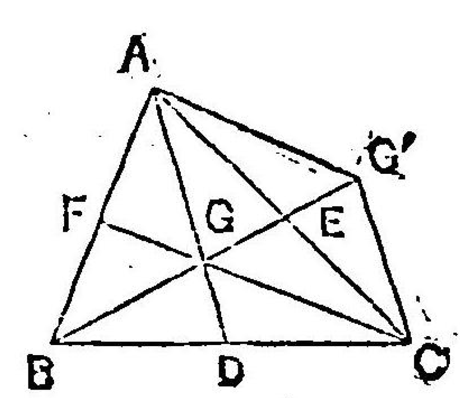
$$\therefore\quad \triangle AGB=\triangle CGA.$$

同樣ニ $\triangle CGA=\triangle BGC$.

$$\therefore\quad \triangle BGC=\triangle CGA=\triangle AGB.$$

8. 三角形ノ三ツノ中線ニ等シキ邊ヲ有スル三角形ト元ノ三角形トノ大イサノ關係ヲ求メヨ. [43.陸.士.]

解 三角形 ABC ノ三ツノ中線ヲ AD, BE, CF トス. 重心ヲ G トシ GE ヲ之ト等シク G′ ニ引キ延バシ AG′, CG′ ヲ結ビ付クレバ



$AG'=CG$, $GG'=BG$ ナルユヱ $\triangle AGG'$ ハ三中線ノ各ノ $\frac{2}{3}$ ヲ以テ作レル三角形トナル,

而シテ $\triangle AEG'=\triangle CEG$ ナルユヱ此ノ三角形ハ $\triangle AGC$ ト等積ナリ,

然ルニ $\triangle AGC=\frac{1}{3}\triangle ABC$,

故ニ $\triangle AGG'=\frac{1}{3}\triangle ABC$.

而シテ三ツノ中線ヲ以テ作レル三角形ノ面積ヲ S ニテ表ハセバ $\triangle AGG'$ ノ三邊ハソレゾレ三ツノ中線ノ $\frac{2}{3}$ ナルユヱ

$$\triangle AGG'=\left(\frac{2}{3}\right)^2 S=\frac{4}{9}S,$$

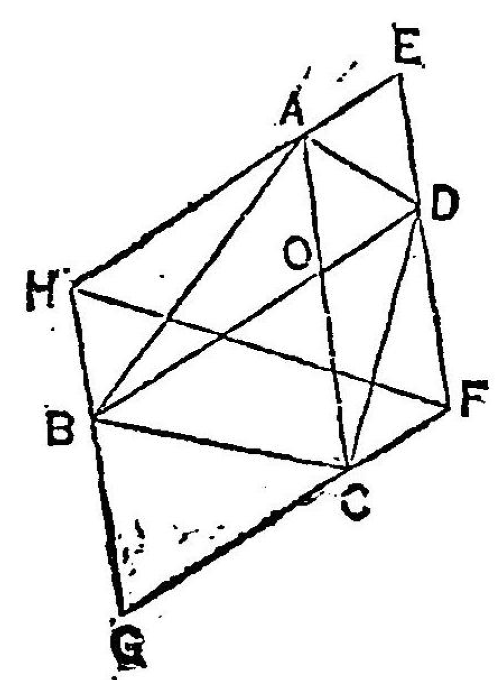
故ニ $\frac{4}{9}S=\frac{1}{3}\triangle ABC$, 故ニ $S=\frac{3}{4}\triangle ABC$, 即チ元ノ三角形ノ $\frac{3}{4}$ トナルベシ.

9. 平行四邊形ノ四邊ノ上ノ正方形ノ和ハ二ツノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シキコトヲ證明セヨ. [44.商船.,海.機.,山.高.商.]

證 267 頁 **46** 題ニ同ジ.

10. 四邊形ノ二ツノ對角線ノ長サ及ビ其ノナス所ノ角ガ一定ナルトキハ四邊形ノ面積モ亦一定ナルコトヲ證セヨ. [43.各高等.]

證 對角線ノ長サ及ビ其ノナス角ガ一定ナル

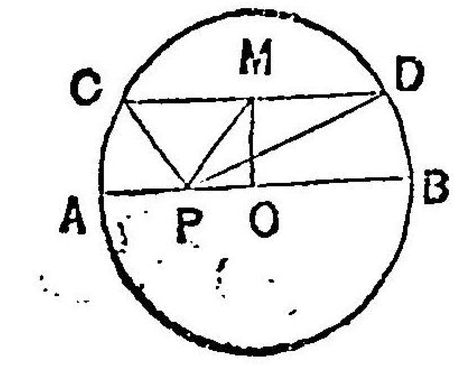


四邊形ノ一ツヲ ABCD トシ各對角線ノ兩端ヲ過リテ他ノ對角線ニ平行ニ引ケル直線ヨリ成ル平行四邊形ヲ圖ノ如ク EFGH トス. 平行四邊形 EFGH ノ面積ハ四邊形 ABCD ノ面積ノ 2 倍ニ等シ, 依リテ對角線 FH ヲ引ケバ四邊形 ABCD ノ面積ハ三角形 EHF ノ面積ニ等シ, 然ルニ三角形 EHF ノ二邊 EH, EF ハソレゾレ對角線 BD, AC ニ等シク, 其ノ夾角 E ハ對角線ノナス角, 卽チ BOC ニ等シ. 故ニ四邊形ノ對角線及ビ其ノナス角ガ一定ナレバ三角形 EHF ノ面積ハ一定ナルベク, 從ヒテ四邊形ノ面積モ亦一定ナリ.

11. 圓ノ徑 AB 上ノ一點 P ト AB ニ平行ナル弦 CD ノ兩端トヲ結ビ付クレバ CP ノ上ノ正方形ト DP ノ上ノ正方形トノ和ハ AP ノ上ノ正方形ト BP ノ上ノ正方形トノ和ニ等シ.

[44. 盛. 高. 農.]

證 徑 AB 及ビ弦 CD ノ中點ヲ O 及ビ M トス.



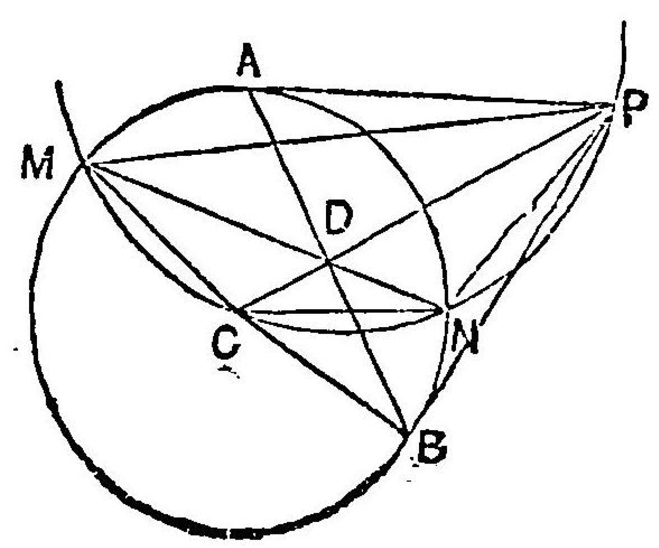
$$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$$
$$=2(\overline{CM}^2+\overline{PM}^2)$$
$$=2(\overline{OC}^2-\overline{OM}^2)$$
$$+2(\overline{OM}^2+\overline{OP}^2)$$
$$=2(\overline{OC}^2+\overline{OP}^2)=2(\overline{OA}^2+\overline{OP}^2)$$
$$=(\overline{OA}^2-2.OA.OP+\overline{OP}^2)$$
$$+(\overline{OA}^2+2.OA.OP+\overline{OP}^2)$$
$$=(OA-OP)^2+(OA+OP)^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2.$$

12. 中心 C ナル圓外ノ一點 P ヨリ圓ニ二ツノ切線 PA, PB ヲ引キ, 弦 AB ノ中點ヲ過リテ任意ノ弦 MN ヲ作ルトキハ四ツノ點 P, C, M, N ハ同ジ圓周上ニアルコト及ビ點 P ト中心 C トヲ結ビ付クル直線ハ角 MPN ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.

[43. 各高等.]

證 AB ノ中點ヲ D トシ, CP ヲ結ビ付クレバ, CP ハ D ニ於テ AB ヲ直角ニ二等分ス, 故ニ CB ヲ結ビ付クレバ　$\widehat{PBC}=\widehat{R}$

ナルヲ以テ　$DP.DC=\overline{DB}^2$,



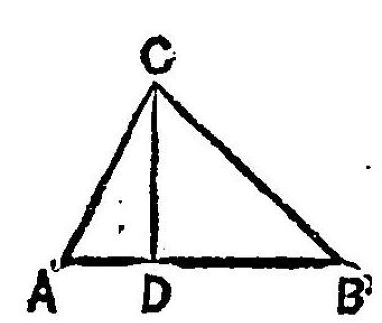
然ルニ D ハ AB ノ中點ナルガ故ニ $DM.DN=\overline{DB}^2$, 故ニ $DP.DC=DM.DN$,

依リテ P, C, M, N ハ同一ノ圓周 PNCM ノ上ニアリ. 次ニ CM, CN ヲ結ビ付クレバ CM=CN ナルガ故ニ之ニ對スル圓周角 CPM, CPN ハ相等シ, 即チ PC ハ $M\hat{P}N$ ヲ二等分ス.

13. 三角形 ABC ノ邊 AB, BC, CA ヲソレゾレ 6寸, 5寸, 4寸ナリトシ頂點 C ヨリ其ノ對邊 AB ヘ引ケル垂線ノ長サヲ計算セヨ.

[44. 海. 兵.]

解 I. 公式 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ニ依リテ △ABC ノ面積ヲ求メンニ



$s=\frac{1}{2}(6+5+4)=\frac{15}{2}$, $s-a=\frac{5}{2}$, $s-b=\frac{7}{2}$, $s-c=\frac{3}{2}$

ナルユエ $S=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$,

今 C ヨリ對邊ヘ下セル垂線 CD ヲ h トスレバ $ch=2S$ ナルユエ $h=\frac{2S}{c}=\frac{2\times15\sqrt{7}}{4\times6}=\frac{5}{4}\sqrt{7}$

$=3.307\ldots\ldots$, 故ニ所要ノ長サハ約3寸3分ナリ.

解 II. △ABC ニ於テ邊 AB ハ最大ナルユエ $\hat{C}$ ハ最大ナリ. 依リテ $\hat{A}$, $\hat{B}$ ハ俱ニ鋭角ナリ, 故ニ C ヨリ對邊ヘ下セル垂線 CD ノ趾 D ハ邊 AB 上ニアリ. 然レバ

$AB=AD+BD=\sqrt{(\overline{AC}^2-\overline{CD}^2)}+\sqrt{(\overline{BC}^2-\overline{CD}^2)}$,

今 $CD=h$寸 トスレバ $6=\sqrt{4^2-h^2}+\sqrt{5^2-h^2}$,

或ハ $6-\sqrt{4^2-h^2}=\sqrt{5^2-h^2}$,

或ハ $36+16-h^2-12\sqrt{16-h^2}=25-h^2$,

故ニ $9=4\sqrt{16-h^2}$, 兩邊ヲ平方スレバ

$81=16(16-h^2)$, 故ニ $h^2=\frac{16^2-9^2}{16}=\frac{25\times7}{16}$,

依リテ $h=\frac{5}{4}\sqrt{7}$, 即チ $\frac{5}{4}\sqrt{7}$ 寸ナリ.

14. 菱形ノ各邊1尺3寸ニシテ一ツノ對角線1尺ナルトキハ他ノ一ツノ對角線及ビ其ノ面積何程ナルカ. [43. 女. 高. 師.]

解 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ニ交リテ其ノ交點ハ各ノ中點ナルユエ菱形ハ二ツノ對角線ニ依リテ四ツノ相等シキ直角三角形ニ分タレ其ノ各ハ對角線ノ半分ヲ直角ノ二邊トシ, 菱形ノ邊ヲ斜邊トナスガ故ニ他ノ對角線ノ半分ハ

$\sqrt{13^2-5^2}=12$, 即チ 12 寸,

故ニ其ノ對角線ハ 12寸$\times 2=24$寸, 即チ 2尺4寸.

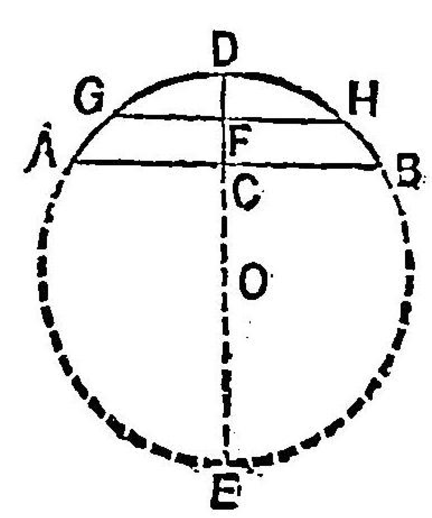
次ニ直角三角形ノ面積ノ 2 倍ハ

$12\times 5=60$, 即チ 60 平方寸

ナルガ故ニ菱形ノ面積ハ 60平方寸$\times 2=120$平方寸.

15. 幅60尺ノ河ニ水面ヨリ架セル弧線ノ橋アリ, 高サ 18尺ナリ. 此ノ弧線ノ半徑ヲ求ム. 又若シ河水ガ溢レテ 14 尺ヲ沒スルトキハ橋ノ弦ハ幾何トナルカ. [44. 陸. 經.]

解 AB ヲ河ノ幅, ADB ヲ橋, 其ノ高サヲ CD トスレバ D, C ハソレゾレ弧 ADB, 弦 AB ノ中點ナリ.



今圓ノ中心ヲ O トシ, DC ノ延線ガ圓周ト交ル點ヲ E トスレバ AB=60尺, CD=18尺

ナルユヱ AC=30尺.

而シテ $\overline{AC}^2=DC.CE$ ナルユヱ所要ノ半徑ヲ x 尺トスレバ DE=$2x$尺, 依リテ $30^2=18(2x-18)$

故ニ $x=34$, 即チ 34 尺ナリ.

又河水ガ溢レテ 14 尺ヲ沒シタルトキノ水面

ヲ GH トシ; CD, GH ノ交點ヲ F トスレバ

CF=14尺, 從ヒテ DF=18尺−14尺=4尺,

依リテ $\overline{GF}^2=DF.FE=4\times 64$,

故ニ所要ノ弦ノ長サ

$GH=2GF=2\times 2\times 8=32$,

即チ 32 尺ナリ.

16. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クコトヲ求ム. [43. 東. 高. 商.]

解 302 頁 78 題ニ同ジ.

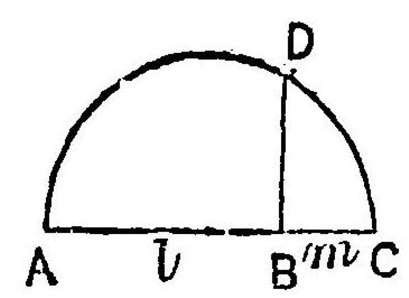
17. 半徑 r 寸ノ圓ニ外切スル等邊三角形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ. [44. 海. 機.]

解 圓ニ外切スル等邊三角形ノ重心ハ圓ノ中心ト合シ, 又切點ハ各邊ノ中點ナリ. 故ニ外切等邊三角形ノ高サハ $3r$ 寸, 而シテ等邊三角形ノ一邊ハ高サノ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ナリ.

故ニ所要ノ長サハ $\frac{2}{\sqrt{3}}\times 3r$寸$=2\sqrt{3}r$寸.

18. 與ヘラレタル矩形ノ面積ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ畫ケ. [44. 專. 入. 檢.]

解 與ヘラレタル矩形ノ二邊ヲ l, m トス, 任



意ノ直線ヲ引キ，其ノ上ニ AB, BC ヲ順次ニ l, m ニ等シク取リ，AC ヲ徑トシテ半圓 ADC ヲ畫キ，B ヲ過リ，AC ニ垂線 BD ヲ引キ半圓 ADC トノ交點ヲ D トスレバ，BD ヲ一邊トスル正方形ハ所要ノモノナリ．如何トナレバ $AB.BC=\overline{BD}^2$ ナレバナリ．

19. 與ヘラレタル正方形ノ面積ノ 5 倍ニ等シキ正方形ヲ作レ．　[43. 七高.]

解 與ヘラレタル正方形ノ一邊ヲ a ニテ表ハシ a 及ビ $2a$ ヲ直角ノ二邊トシテ直角三角形ヲ作レバ其ノ斜邊上ノ正方形ハ $a^2+(2a)^2$, 卽チ $5a^2$ ニ等シ，故ニ此ノ斜邊ハ卽チ所要ノ正方形ノ一邊ナリ．

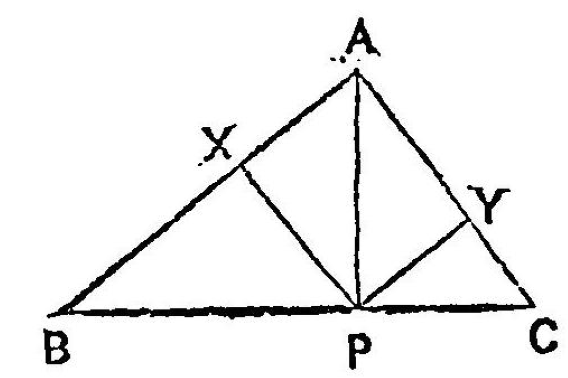
D'. 比　例

1. 直角三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ヘ垂線 AP ヲ引キ，P ヨリ二邊 AB, AC ヘ垂線 PX PY ヲ引ケバ BX ト CY トノ比ハ AB ト

AC トノ比ノ三乘比ニ等シ，之ヲ證セヨ．

[44. 東. 高. 師.]

證 三角形 XBP, XAP, YCP ハ皆三角形 ABC ニ相似ナルヲ以テ



$BX:XP=AB:AC$ (1)

$XP:XA=AB:AC$,

然ルニ $XA=PY$ ナルユエ

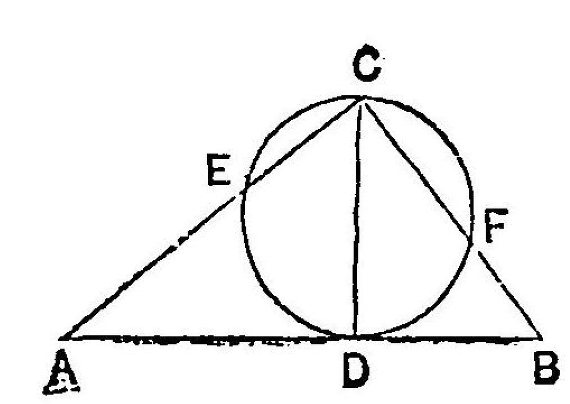
$$XP:PY=AB:AC \ldots \ldots \ldots (2)$$

又 $$PY:CY=AB:AC \ldots \ldots \ldots (3)$$

故ニ (1), (2), (3) ヨリ　$BX:CY=\overline{AB}^3:\overline{AC}^3$.

2. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ヲ底トシ，其ノ高サ CD ヲ徑トスル圓ト，二邊 AC, CB トノ交點ヲソレゾレ E, F トス，而シテ BF, AE, BC 及ビ AC ヲ順次ニ x, y, a 及ビ b トスレバ $x:y=a^3:b^3$ ナリ，其ノ證ヲ問フ．　[43. 商船.]

證 I. AB ハ D ニ於テ圓ニ切ス，故ニ



$AC.AE=\overline{AD}^2$,

$BC.BF=\overline{BD}^2$,

卽チ $by=\overline{AD}^2$,

$ax=\overline{BD}^2$,

$\therefore\ ax:by=\overline{BD}^2:\overline{AD}^2$ ... ... (1)

然ルニ $BD:AD=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2=a^2:b^2$,

從ヒテ $\overline{BD}^2:\overline{AD}^2=a^4:b^4$,

故ニ (1) ヨリ $ax:by=a^4:b^4$.

故ニ $x:y=a^3:b^3$.

證 II. DE, DF ヲ結ビ付クレバ CEDF ハ矩形ニシテ $\triangle DBF$, $\triangle CDF$, $\triangle ADE$ ハ何レモ $\triangle ABC$ ニ相似ナルコト明カナリ.

故ニ $x:DF=a:b,\quad DF:CF=a:b,$

$ED:y=a:b$, 故ニ $x:y=a^3:b^3$.

注意 本題ハ前題ト同意ナリ.

3. 直角三角形 ABC ノ直角 B ヲ二等分スル直線ガ AC ト F ニ於テ交リ外接圓ノ周ト D ニ於テ交レバ矩形 BD.BF ハ三角形 ABC ノ二倍ニ等シキコトヲ證セヨ. [43. 陸. 經.]

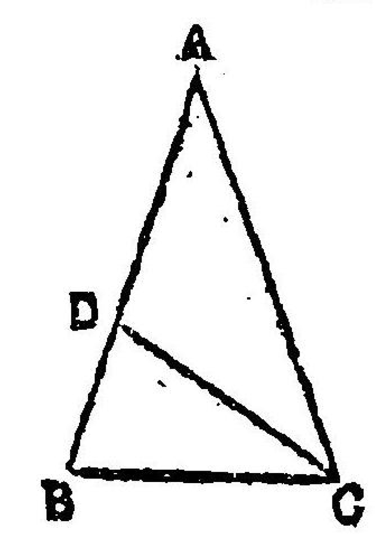
證 343 頁 34 題ニ同ジ.

4. 二等邊三角形 ABC ノ各底角ガ頂角 A ノ 2 倍ナルトキ $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AB.BC$ ナルコトヲ證セヨ. [43. 陸. 經.]

證 I. $\hat{C}$ ノ二等分線ト AB トノ交點ヲ D ト

セバ $A\hat{B}C=A\hat{C}B=2\hat{A}$ ナルユヱ

$A\hat{C}D=B\hat{C}D=\hat{A}$, 故ニ $C\hat{D}B=2\hat{A}$,



故ニ $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$.

故ニ $AB:BC=BC:BD$,

故ニ $\overline{BC}^2=AB.BD$

$=AB(AB-AD)$,

而シテ AD=BC ナルユヱ

$\overline{BC}^2=AB(AB-BC)=\overline{AB}^2-AB.BC$,

即チ $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AB.BC$.

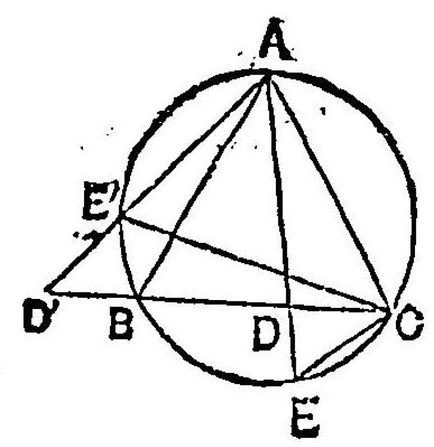
證 II. $\hat{A}=A\hat{C}D$ ナルユヱ BC ハ $\triangle ADC$ ノ外接圓ニ C ニ於テ切ス.

故ニ $\overline{BC}^2=AB(AB-AD)$, 以下證 I ト同樣ナリ.

5. 一ノ圓ニ內接スル二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ其ノ底邊上ノ任意ノ一點 D ニ引ケル直線 AD ガ圓周ト出會フ點ヲ E トセバ AD ト AE トノ包ム矩形ハ一定ノ大イサナルコトヲ證セヨ. D ヲ底邊ノ延線上ニ取ラバ如何.

[44. 陸. 士.]

證 CE ヲ結ビ付クレバ $\triangle AEC$, $\triangle ADC$ ニ於



テ $\hat{AEC}=\hat{ABC}=\hat{ACB}$,

$E\hat{A}C$ ハ共通ナルユヱ

$\triangle AEC \backsim \triangle ACD$,

故ニ $AE:AC=AC:AD$,

故ニ $AE.AD=\overline{AC}^2$ (一定量).

次ニ CB ノ延線上ノ一點ヲ D' トシ, AD' ト圓周トノ交點ヲ E' トス. CE' ヲ結ビ付クルトキハ $\triangle AE'C$, $\triangle AD'C$ ニ於テ $E'\hat{A}C$ ハ共通,

$$A\hat{E'}C=A\hat{B}C=A\hat{C}B.$$

故ニ $\qquad \triangle AE'C \backsim \triangle ACD'$.

故ニ $\qquad AE':AC=AC:AD'$,

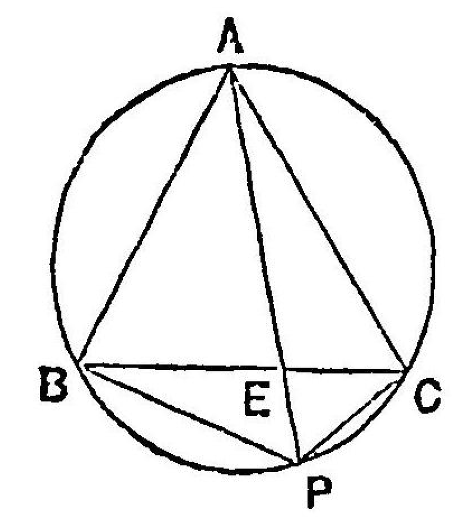
故ニ $\qquad AE'.AD'=\overline{AC}^2$ (一定量).

6. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ニアル任意ノ一點 P ト點 A トヲ結ビ付クル直線ガ邊 BC ト點 E ニ於テ交ルトセバ

(1) $\qquad \triangle ABP \backsim \triangle PEC$, 依リテ

(2) $\qquad \overline{PA}^2=\overline{AC}^2+PB.PC$. [44. 各高等.]

證 (1) $B\hat{A}P=B\hat{C}P$, 又 $AB=AC$ ナルユヱ $A\hat{P}B=A\hat{P}C$, 故ニ $\triangle ABP$, $\triangle CEP$ ハ等角ナリ. 故ニ互ニ相似ナリ. 依リテ



(2) $AP:BP=CP:EP$,

故ニ $AP.EP=BP.CP$.

又 $\triangle ABP \backsim \triangle AEB$

ニシテ $AP.AE=\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$.

依リテ $AP.EP+AP.AE=\overline{AC}^2+BP.CP$,

即チ $\overline{AP}^2=\overline{AC}^2+BP.CP$.

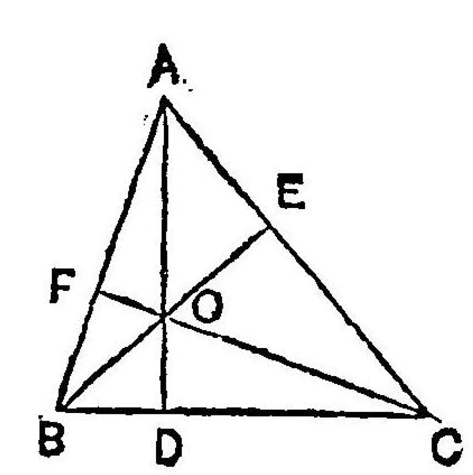
7. 三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ハ底ヲ二邊ノ比ニ分ツコトヲ證セヨ. [44. 東. 都. 蠶. 講.]

證 397 頁 64 題ニ同ジ.

8. 三角形ノ各角頂ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル三ツノ直線ガ同一ノ點ヲ過リ此ノ點ニ於テ相等シキ矩形ヲ包ム分ニ分タルルトキハ此ノ點ハ此ノ三角形ノ垂心ナルコトヲ證明セヨ.

[43. 專. 入. 檢.]

證 I. 三角形 ABC ノ各角頂ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル三ツノ直線 AD, BE, CF ガ同一ノ點 O ヲ過リ $OA.OD=OB.OE=OC.OF$ トス.



$OA.OD=OB.OE$ ナルユヱ

A, E, D, B ハ同一ノ圓周上ニアリ，

故ニ　$A\hat{D}B=A\hat{E}B$, 故ニ $A\hat{D}C=C\hat{E}B$,

然ルニ　$OA.OD=OC.OF$ 及ビ $OB.OE=OC.OE$

ナルユエ A, F, D, C 及ビ B, F, E, C モ亦ソレゾレ同一ノ圓周上ニアリ，故ニ $A\hat{D}C=A\hat{F}C$,

及ビ　$C\hat{E}B=B\hat{F}C$,

故ニ　$A\hat{F}C=B\hat{F}C$,

故ニ　$CF\perp AB$,

同樣ニ　$AD\perp BC$, $BE\perp CA$,

故ニ O ハ垂心ナリ．

證 II.　$AO.OD=BO.OE$

ナルユエ　$AO:OE=BO:OD$,

而シテ三角形 OAE, OBD ノ O ニ於ケル角ハ對頂角ニシテ相等シ．

故ニ　$\triangle OAE \backsim \triangle OBD$.

同樣ニ　$\triangle OAF \backsim \triangle OCD$,

及ビ　$\triangle OBF \backsim \triangle OCE$.

依リテ　$A\hat{D}B=A\hat{E}B$,

$A\hat{D}C=A\hat{F}C$.

尙　$B\hat{E}C=C\hat{F}B$

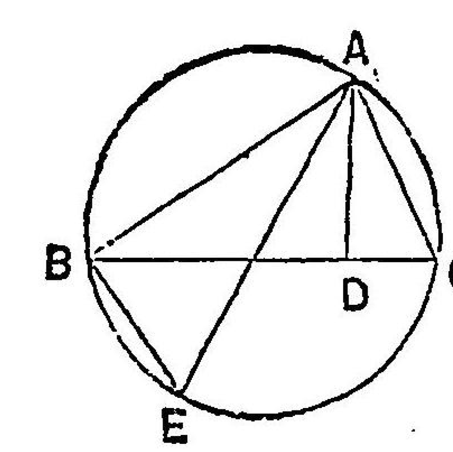
ナルユエ各ノ補角ナル $A\hat{E}B=A\hat{F}C$.

故ニ　$A\hat{D}B=A\hat{D}C$,

卽チ　$AD\perp BC$, 云々．

9. 三角形ノ二邊ノ包ム矩形ハ其ノ夾ム角ノ頂點ヨリ引ケル高サト外接圓ノ徑トノ包ム矩形ニ等シキコトヲ證セヨ．　[44. 秋. 鑛. 專.]

證　三角形 ABC ノ高サヲ AD, 外接圓ノ徑ヲ AE トス．然ルトキハ



$AB.AC=AD.AE$

ナルコトヲ證セン．

BE ヲ結ビ付クレバ

$\triangle ADC$, $\triangle ABE$

ニ於テ $A\hat{D}C=\hat{R}=A\hat{B}E$, $A\hat{C}D=A\hat{E}B$.

故ニ　$\triangle ADC \backsim \triangle ABE$.

故ニ　$AC:AD=AE:AB$.

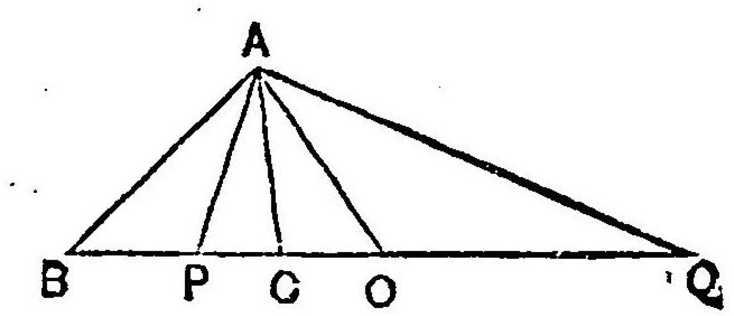
故ニ　$AC.AB=AD.AE$.

10. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ニ交ル點ヲ P トシ，又頂角 A ノ外角ノ二等分線ガ BC ノ延線ニ交ル點ヲ Q トセヨ．今 PQ ノ中點ヲ O トシ下ノ二件ヲ證明セヨ．

(1)　$OB.OC=\overline{OA}^2$. (2) $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

[43. 海. 機.]

證 (1) $P\hat{A}Q=\hat{R}$ ニシテ O ハ PQ ノ中點ナルユヱ



$O\hat{A}P=O\hat{P}A$
$=P\hat{A}B+A\hat{B}P$,
而シテ

$$C\hat{A}P=P\hat{A}B,$$

故ニ $O\hat{A}C=A\hat{B}P$. 故ニ $\triangle AOB \backsim \triangle COA$

故ニ $OB:OA=OA:OC$, 故ニ $OB.OC=\overline{OA}^2$.

(2) (1)ニ依リテ $OB:OC=\overline{OB}^2:\overline{OA}^2$,

然ルニ $\triangle AOB \backsim \triangle COA$ ナルユヱ

$$OB:OA=AB:AC,$$

從ヒテ $\overline{OB}^2:\overline{OA}^2=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$,

故ニ $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

11. 二ツノ圓ガ互ニ外切スルトキ其ノ切點ヲ過ラザル共通切線ノ切點ノ間ニ在ル部分ハ二ツノ圓ノ徑ノ比例中項ナルコトヲ證セヨ.

[44. 名. 高. 工.]

證 346 頁 39 題ニ同ジ.

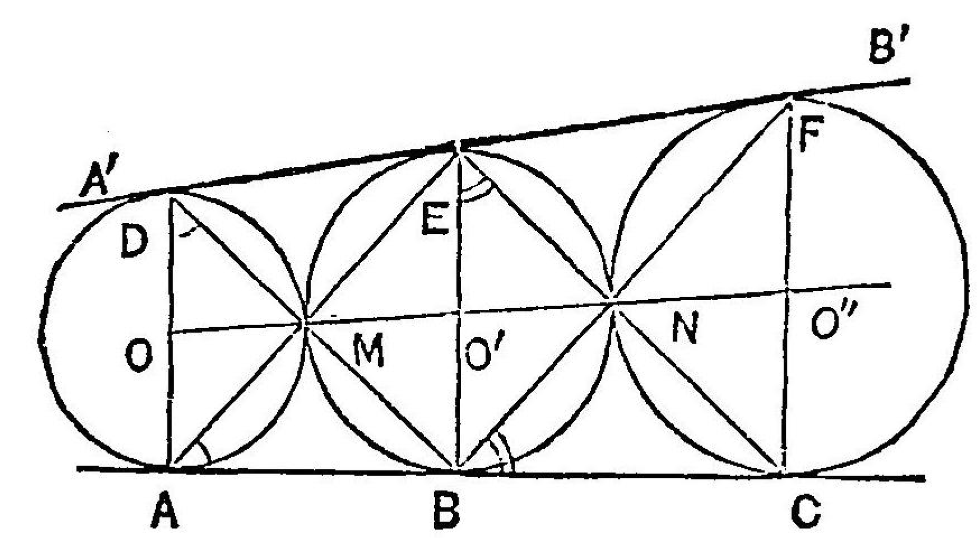
12. 二ツノ直線ニ切スル三ツノ圓ノ中心ガ同一ノ直線上ニ在リテ中間ノ圓ガ他ノ兩圓ニ外

切スルトキ，次ノ關係アルコトヲ證スベシ.

(1) 相隣レル二ツノ圓ノ共通切線ノ長サ［二ツノ切點ニ限ラレタル］ハ二ツノ圓ノ徑ノ比例中項ナルコト.

(2) 中間ノ圓ノ徑ハ他ノ二ツノ圓ノ徑ノ比例中項ナルコト. [44. 商船.]

證 二ツノ直線 AB, A'B' ニ切スル三ツノ圓



ノ中心 O, O', O'' ハ同一ノ直線上ニアリトシ，且圓 O, O', O'' ガ直線 AB ト切スル點ヲソレゾレ A, B, C トシ，又中間ノ圓 O' ガ圓 O, O'' ニ切スル點ヲソレゾレ M, N トシ；圓 O, O', O'' ノ半徑ヲソレゾレ r, r', r'' トス.

(1) 前題ニ同ジ.

(2) $AB:BC=OO':O'O''=r+r':r'+r''$,

故ニ $\overline{AB}^2:\overline{BC}^2=r^2+r'^2+2rr':r'^2+r''^2+2r'r''$,

然ルニ (1) ニ依リテ $4rr'=\overline{AB}^2$, $4r'r''=\overline{BC}^2$,

故ニ $rr' : r'r'' = r^2+r'^2-2rr' : r'+r''^2-2r'r''$,

故ニ $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = (r'-r)^2 : (r''-r')^2$,

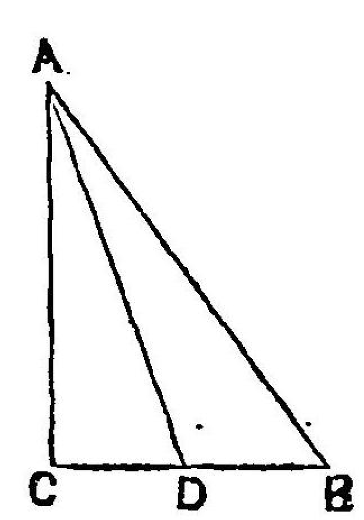
依リテ $r+r' : r'+r'' = r'-r : r''-r'$,

故ニ $2r : 2r' = 2r' : 2r''$.

13. C ヲ直角トセル直角三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ト對邊 BC トノ交點ヲ D トス, 此ノ三角形ノ面積 6 平方寸, 邊 AC ノ長サ 4 寸ヲ知リテ直線 AB 及ビ AD ノ長サヲ求メヨ.

[43. 海. 兵.]

解 直角三角形 ABC ノ面積ハ $\frac{1}{2}$.AC.BC



ナルガ故ニ $\frac{1}{2}$.AC.BC$=6$.

而シテ AC$=4$

ナルガ故ニ $\frac{1}{2}$.4.BC$=6$,

依リテ BC$=3$,

依リテ又 $AB=\sqrt{(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2)}$

$=\sqrt{(4^2+3^2)}=5$.

次ニ AD ハ $\hat{A}$ ノ二等分線ナルガ故ニ

$AC : AB = CD : BD$,

故ニ $AC+AB : AC = CD+BD : CD$,

即チ $4+5 : 4 = 3 : CD$,

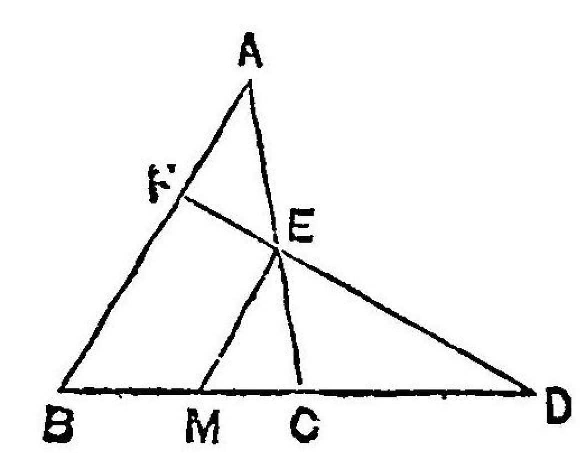
之ヨリ $CD=\frac{4\times3}{9}=\frac{4}{3}$,

依リテ $AD=\sqrt{\{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2\}}=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}$

$=\frac{4}{3}\sqrt{10}$.

是ニ依リテ所要ノ AB ハ 5 寸, AD ハ $\frac{4}{3}\sqrt{10}$寸.

14. 三角形 ABC ノ邊 BC ヲ引キ延バシテ BC ニ等シク CD ヲ取リ, 點 D ヲ AC ノ中點 E ニ結ビ付ケ, DE ヲ引キ延バシテ AB ト F ニ於テ交ラシム, 然ルトキ FE ト ED トノ比ヲ求ム.



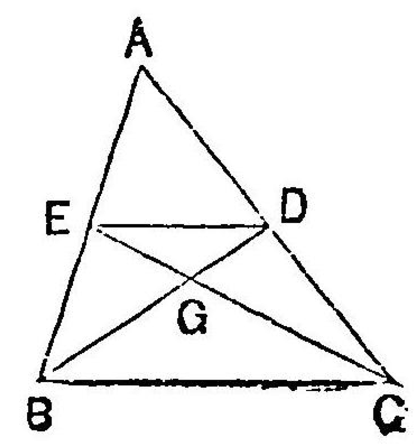
[44. 東. 高. 工.]

解 BC ノ中點ヲ M トシ, EM ヲ結ビ付クレバ EM ∥ AB,

故ニ $FE : ED = BM : MD = BM : MC+CD$

$=\frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}BC+BC = 1 : 3$.

15. 三角形 ABC ノ二ツノ角頂 B, C ヨリ引ケル中線 BD, CE ノ交點ヲ G トス, 二ツノ



三角形 BCG, EDG ノ面積ヲ比較セヨ. [44. 各醫. 專.]

解 BC∥DE ナルユヱ

$\triangle BCG \backsim \triangle DEG$

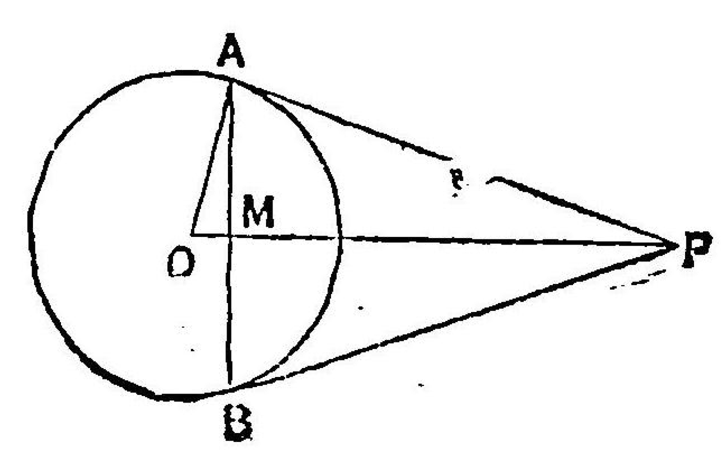
ナルコト明カナリ.

故ニ $\triangle BCG : \triangle DEG = \overline{BG}^2 : \overline{DG}^2$

$= \overline{2DG}^2 : \overline{DG}^2 = 4 : 1.$

16. 半徑2尺1寸ナル圓周ヨリ 3尺5寸ノ距離ニアル一點 P ヨリ此ノ圓ニ二ツノ切線ヲ引キ切點ヲ結ビ付ケテ得ル弦ノ長サヲ計算セヨ. [43. 陸. 經.]

解 半徑21寸ナル圓ノ中心ヲ O トシ,此ノ圓周ヨリ 35 寸ノ距離ニアル點 P ヨリ引ケル切線ノ切點ヲ A, B トス. OA,



OP ヲ結ビ付ケ OP, AB ノ交點ヲ M トセバ OP ハ M ニ於テ AB ヲ直角ニ二等分ス, 而シテ $\triangle OAP$ ハ OP ヲ斜邊トスル直角三角形

ナルユヱ OP : OA = OA : OM,

然ルニ OP=21寸+35寸=56寸, OA=21寸 ナルユヱ

$$OM = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OP}} = \frac{21^2}{56} = \frac{63}{8},$$

從ヒテ $\overline{AM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2 = 21^2 - \left(\frac{63}{8}\right)^2 = \frac{24255}{64},$

故ニ $AM = \sqrt{\frac{24255}{64}} = \frac{21}{8}\sqrt{55},$

故ニ $AB = 2.AM = \frac{21}{4}\sqrt{55} = 38.935\ldots\ldots,$

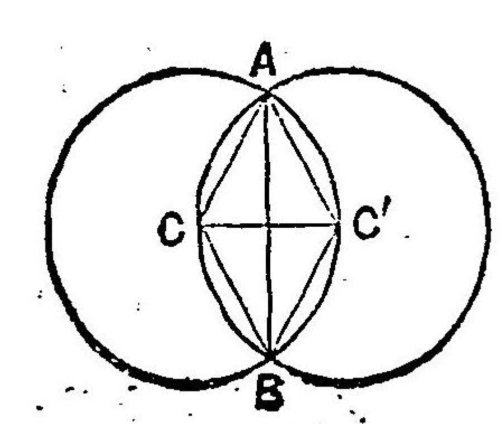
即チ 3尺8寸.94 弱.

注意 點ト圓周トノ距離ガ徑ヨリ小ナルユヱ唯一ツノ解アルノミ.

17. 相等シキ二圓ノ中心ガ互ニ他ノ圓周上ニアルトキハ其ノ共通弦ノ平方ハ半徑ノ平方ノ 3 倍ニ等シキコトヲ證シ, 且其ノ二圓ニ共通ナル面積ト一ツノ圓ノ面積トノ比ヲ求メヨ.

[44. 陸. 士.]

證 相等シキ二圓ノ中心 C, C′ ガ互ニ他ノ圓周上ニアリトシ, 其ノ共通弦ヲ AB トスレバ $\overline{AB}^2 = 3\overline{CA}^2$ ナルコトヲ證セン.



二圓ハ相等シキヲ以テ

$CA=BC=C'A=C'B=CC'$,

即チ $ACBC'$ ハ菱形ナルユヱ

$$\overline{CA}^2+\overline{CB}^2+\overline{C'B}^2+\overline{C'A}^2=\overline{AB}^2+\overline{CC'}^2,$$

故ニ $$3\overline{CA}^2=\overline{AB}^2.$$

次ニ $\triangle ACC'$, $\triangle BCC'$ ハ正三角形ナルユヱ

$A\hat{C}B=120^\circ$ ナリ.

依リテ 等圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$$弓形\ ACB=\frac{1}{3}\pi r^2-\triangle ACB,$$

故ニ 二圓ニ共通ナル部分ノ面積ハ

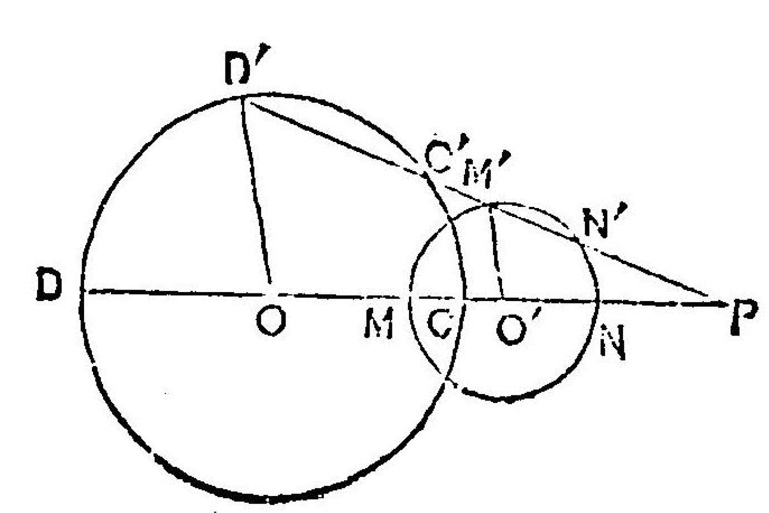
$$\frac{2}{3}\pi r^2-(菱形\ ACBC')=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}AB,CC'$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\overline{CA}^2=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}r^2,$$

依リテ所要ノ比ハ

$$\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2:\pi r^2=4\pi-3\sqrt{3}:6\pi.$$

18. 圓外ノ一定點ヨリ此ノ圓周ニ引キタル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求ム. [43. 大. 高. 工.]



解 與ヘラレタル圓ノ中心ヲ O, 與ヘラレタル圓外ノ點ヲ P トス.

PO ヲ結ビ付クル直線ガ圓 O ト交ル二點ヲ C, D トシ P ニ近キ方ヲ C, 遠キ方ヲ D トス, 別ニ任意ノ割線 PC'D' ヲ引キ圓周トノ交點ヲ C', D' トシ C' ハ C ニ, D' ハ D ニ對應スルトナス, PD, PC ノ中點ヲソレゾレ M, N トシ PD', PC' ノ中點ヲソレゾレ M', N' トシ又 MN ノ中點ヲ O' トシ OD', O'M' ヲ結ビ付クレバ

$$OM=MD-OD=\frac{1}{2}PD-OD,$$

$$PN=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{2}(PD-CD)=\frac{1}{2}PD-\frac{1}{2}CD$$

$$=\frac{1}{2}PD-OD,\quad 故ニ\quad MO=PN,$$

故ニ O' ハ PO ノ中點トナル, 故ニ O' ハ定點ナリ, 而シテ $OD':O'M'=PO:PO'$ ナルユヱ $O'M'=\frac{1}{2}OD'=$(定長),

故ニ要件ニ適スル點ハ定點 O', 即チ PO ノ中點ヲ中心トシ, 與ヘラレタル圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トセル圓周上ニアリ. 逆ニ P ヨリ引ケル任意ノ割線ガ圓 O ト C', D' ニ於テ交リ圓 O' ト N', M' ニ於テ交リ, C' ト N' トハ P ニ近ク, D' ト M' トハ P ニ遠キ點トシ; OD', O'M' ヲ結ビ付クレバ

$$PO'=\frac{1}{2}PO,\quad O'M'=\frac{1}{2}OD'$$

ナルユエ PO:PO′=OD′:O′M′, 而シテ一双ノ對應邊 OD′, O′M′ ニ對スル角ハ何レモ $\hat{P}$ ニシテ, 他ノ一双ノ對應邊ニ對スル角 PD′O, PM′O′ ハ何レモ鋭角ナリ, 故ニ $\triangle POD' \backsim \triangle PO'M'$,

故ニ $$PO:PO'=PD':PM'$$

ニシテ M′ ハ PD′ ノ中點トナル. 同樣ニ N′ ハ PC′ ノ中點トナル, 即チ圓 O′ ノ周上ノ點ハ何レモ要件ニ適ス, 故ニ所要ノ軌跡ハ圓 O′ ナリ.

注意 NN′∥CC′, MN′∥DC′,

故ニ $M\hat{N'}N = D\hat{C'}C = \hat{R}$,

故ニ N′ ハ MN ヲ徑トスル圓周上ニアリ. 云々.

19. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ヲ求ム.

[44. 海. 兵.]

解 409 頁 79 題ニ同ジ.

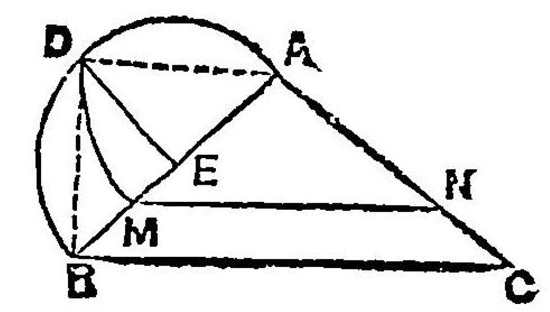
20. 與ヘラレタル三角形ノ面積ヲ其ノ一邊ニ平行ナル直線ニテ二等分セヨ.

[43. 盛. 高. 農., 44. 海. 機., 東北農. 大.]

解 三角形 ABC ノ底 BC ニ平行ナル直線ニテ本形ヲ二等分スルコトヲ求メントス.

AB ヲ徑トシテ其ノ上ニ半圓 ADB ヲ畫キ AB

ノ中點 E ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線ヲ引キ半圓トノ交點ヲ D トス.



次ニ AB 上ニ AM=AD ナル如ク點 M ヲ取リ M ヲ過リ BC ニ平行ナル直線 MN ヲ引キ AC ト N ニ於テ交ラシムレバ MN ハ所要ノ直線ナリ. 如何トナレバ $\triangle ABC \backsim \triangle AMN$ ナルコトハ作圖ニ依リテ明カナリ. 故ニ

$$\triangle ABC:\triangle AMN=\overline{AB}^2:\overline{AM}^2=2\overline{AD}^2:\overline{AD}^2=2:1$$

ナレバナリ.

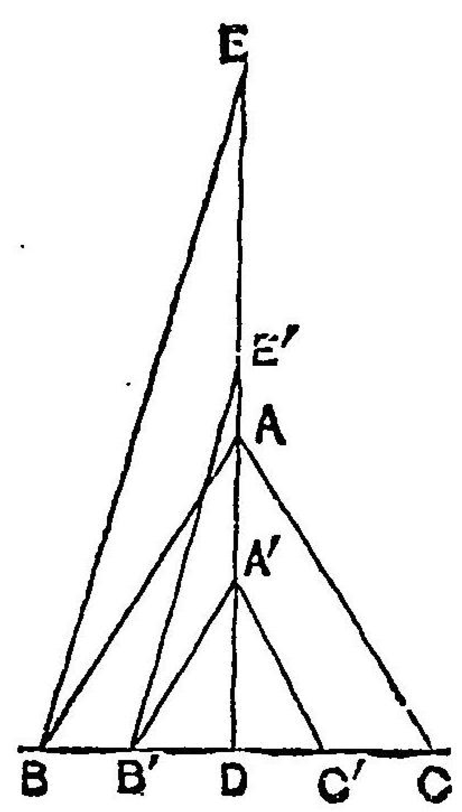
21. 三角形ノ一邊ニ垂直ナル直線ヲ以テ其ノ面積ヲ二等分セヨ. [44. 農. 大. 實.]

解 375 頁 54 題ニ同ジ.

22. 一邊ト高サトノ和ヲ與ヘテ正三角形ヲ作レ. [44. 商船.]

解 正三角形 ABC ノ一邊ト高サトノ和 l ヲ知リテ本形ヲ作ラントス. 先ヅ任意ノ大イサノ正三角形 A′B′C′ ヲ作リ高サ A′D ヲ引キ DA′ ヲ A′ ノ方ヘ引キ延バシ其ノ上ニ A′E′=A′B′ ナル樣ニ E′ ヲ取リ, 又 DE=l ナル樣ニ E ヲ取ル.

次ニ B'E' ヲ結ビ付ケ E ヲ過リ E'B' ニ平行ニ EB ヲ引キ DB', 或ハ其ノ延線トノ交點ヲ B トシ, B ヲ過リ B'A' ニ平行ニ BA ヲ引キ, ED トノ交點ヲ A トシ, A ヲ過リ A'C' ニ平行ニ AC ヲ引キ BD ノ延線ト交ル點ヲ C トスレバ ABC ハ所要ノ正三角形ナリ. 如何ニモ作圖ニ依リテ



$\triangle EBA \backsim \triangle E'B'A'$, $\triangle EBD \backsim \triangle E'B'D$,

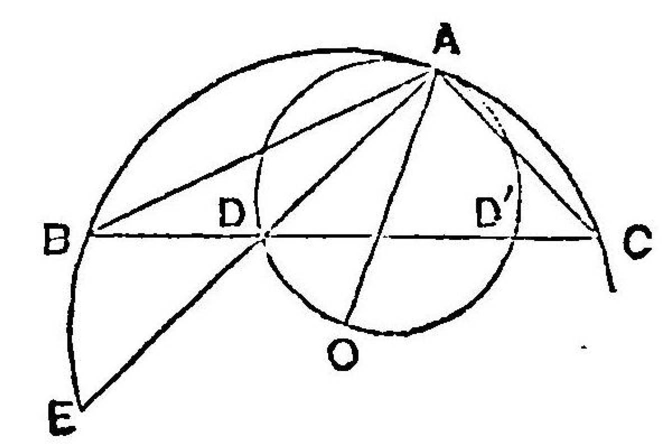
$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ ナルコト明カナリ.

故ニ $BA=AE$, 從ヒテ $BA+AD=ED=l$ ニシテ $\triangle ABC$ ハ正三角形ナレバナリ.

23. 三角形 ABC ニ於テ BC 上ニ一點 D ヲ求メ AD ノ上ノ正方形ヲシテ BD ト DC トノ包ム矩形ニ等シカラシメヨ. [43. 名. 高. 工.]

解 三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ, OA ヲ徑トセル圓周ト邊 BC トノ交點ヲ D, D' トシ, AD ト圓 O トノ交點ヲ E トスレバ, OA ハ圓 O ノ半徑ナルユヱ之ヲ徑トセル圓周ハ A

ヨリ引ケル圓 O ノ弦ヲ二等分ス.



故ニ　$AD=DE$,

而シテ

$BD.DC=AD.DE$

$=\overline{AD}^2$,

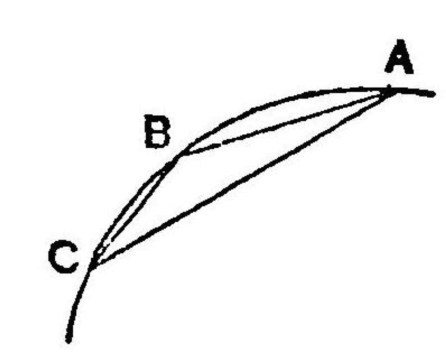
同樣ニ

$\overline{AD'}^2=BD'.D'C$;

即チ D 及ビ D' ハ所要ノ點ナリ. OA ヲ徑トセル圓ガ BC ニ切スレバ解ハ一ツニシテ若シ圓周ト BC トニ共通點ナケレバ解ナシ.

24. 與ヘラレタル圓ニ內接スル正十五角形ヲ畫ク法如何. [43. 商船.]

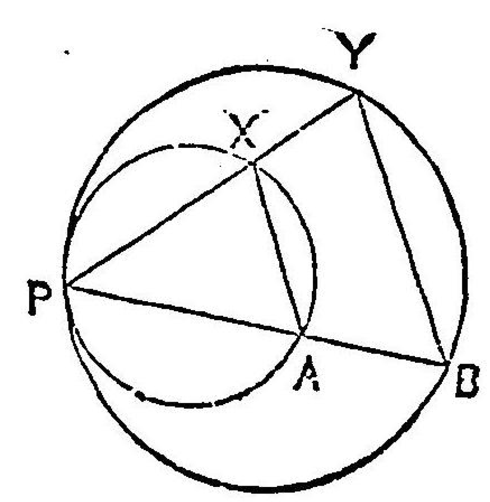
解 與ヘラレタル圓周上ノ一點 A ヨリ二ツノ弦 AB, AC ヲ引キ AB ヲ內接正十邊形ノ邊ニ, AC ヲ內接正六邊形ノ邊ニ等シカラシメ B, C ヲ A ノ同ジ側ニ置クトキハ弧 AB ハ圓周ノ十分ノ一ニシテ, 弧 AC ハ圓周ノ六分ノ一ナルガ故ニ弧 BC ハ圓周ノ $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, 即チ $\frac{1}{15}$ ニ等シ, 故ニ



弦 BC ハ內接正十五邊形ノ一邊トナル，依リテ連續シテ之ニ等シキ弦ヲ畫ケバ內接正十五邊形ヲ得ベシ．

25. 二ツノ圓ガ P ニ於テ互ニ內切スルトキ直線 PXY ヲ引キ二ツノ圓トソレゾレ點 X 及ビ Y ニ於テ交ラシメ，XY ヲ與ヘラレタル長サニ等シクナスコトヲ求ム． [43. 東. 高. 工.]

解 與ヘラレタル長サヲ l ニテ表ハス，圖ヲ作リ得タリトシ，P ヨリ任意ノ弦 PAB ヲ引キ二ツノ圓周トノ交點ヲ A, B トシ，A ト X, B ト Y トハソレゾレ同一ノ圓周上ニアリトセン．AX, BY ヲ結ビ付クレバ



$$\triangle PAX \backsim \triangle PBY$$

ナルユヱ　$PA:AB=PX:XY,$

即チ　$PA:AB=PX:l$

ニシテ PA, AB, l ハ何レモ既知ナリ，故ニ PX ヲ求メ得ベシ．是ニ依リテ次ノ作圖法ヲ得．P ヨリ任意ノ弦ヲ引キ內圓ト A ニ，外圓ト B ニ於テ交ラシメ $PA:AB=PX:l$

ニ適スル PX ヲ求メ P ヲ中心，PX ヲ半徑トシテ畫ケル圓ト內圓周トノ交點ヲ X トシ，直線 PX ヲ引キ其ノ外圓周トノ交點ヲ Y トスレバ

　$PA:AB=PX:XY,$

然ルニ　$PA:AB=PX:l,$

故ニ　$XY=l$

ニシテ，PXY ハ即チ所要ノ直線ナリ，而シテ l ガ二ツノ圓ノ徑ノ差ヨリ大ナルトキハ不能ナリ．

E'. 空間に於ける線及び面

1. 一ツノ平面ヘノ垂線ヲ含ム平面ハ其ノ平面ニ垂直ナルコトヲ證セヨ． [43. 海. 兵.]

證 462 頁 **15** 題ニ同ジ．

2. 互ニ平行ナル二直線ノ各ヲ過ル二平面ノ交リハ其ノ二直線ノ各ニ平行ナルコトヲ證明セヨ． [43. 長. 高. 商.]

證 互ニ平行ナル二直線ヲ AE, CD トス.

AB ヲ過ル平面 P ト CD ヲ過ル平面 Q トノ交リヲ MN トスレバ AB ∥ CD ナルユヱ

$$P \parallel CD,$$

故ニ P 上ノ直線 MN ト CD トハ相交ラズ,

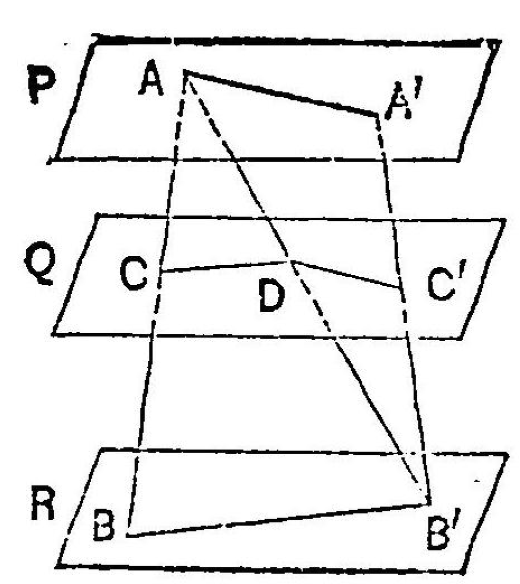
而シテ MN, CD ハ同一ノ平面 Q ノ上ニアリ.

故ニ CD ∥ MN, 同樣ニ AB ∥ MN.

3. 二ツノ直線ガ平行ナル三ツノ平面ト交ルトキハ其ノ直線ノ分ノ比ハ相等シ.

[43. 東. 高. 商.]

證 二ツノ直線 AB, A′B′ ガ三ツノ平行ナル平面 P, Q, R トソレゾレ A, C, B 及ビ A′, C′, B′ ニ於テ交レリトス.



AB′ ヲ結ビ付ケ其ノ Q トノ交點ヲ D トシ AA′, CD, DC′, BB′ ヲ結ビ付クレバ BB′, CD ハ平面 ABB′ ト平行ナル平面 R, Q トノ交リナルユヱ平行ナリ.

故ニ $AC:CB=AD:DB'$,

同樣ニ $A'C':C'B'=AD:DB'$,

故ニ $AC:CB=A'C':C'B'$.

4. 空間ニ與ヘラレタル二直線アリ, P, Q ハソレゾレ是等ノ直線上ニアル任意ノ點ナリトス. PQ ノ中點ハ一定ナル平面上ニアルコトヲ證セヨ.

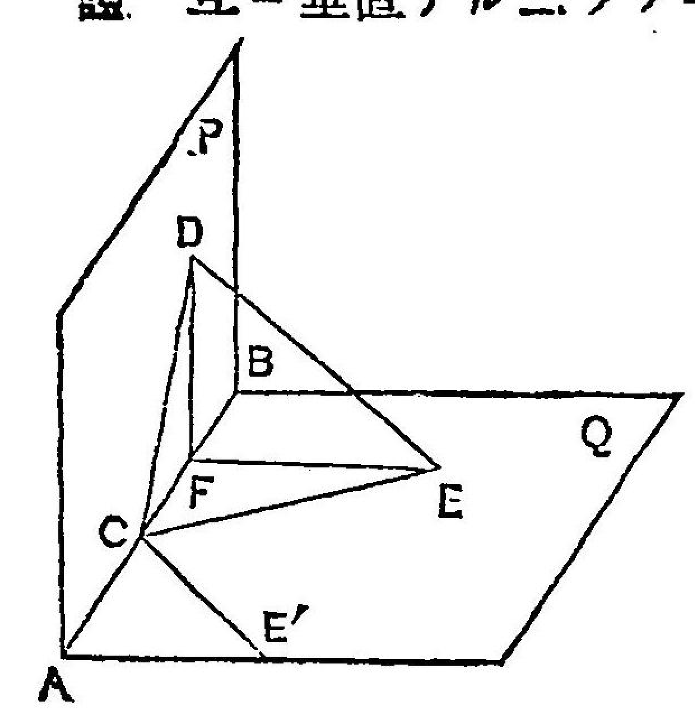
[43. 水. 講.]

證 8 題ヲ見ヨ.

5. 互ニ垂直ナル二ツノ平面ノ交リノ上ノ一點ヲ過リ, 其ノ交リト半直角ヲナス直線ヲ各ノ平面上ニ引クトキハ, 此ノ二直線ノナス角ハ直角ノ三分ノ二ニ等シキカ, 若シクハ其ノ補角ニ等シキコトヲ證セヨ.

[44. 海. 機.]

證 互ニ垂直ナル二ツノ平面 P, Q ノ交リヲ AB トシ, AB 上ノ一點 C ヲ過リ AB ト半直角ヲナス直線 CD, CE ヲソレゾレ平面 P, Q 上ニ引クトキハ,

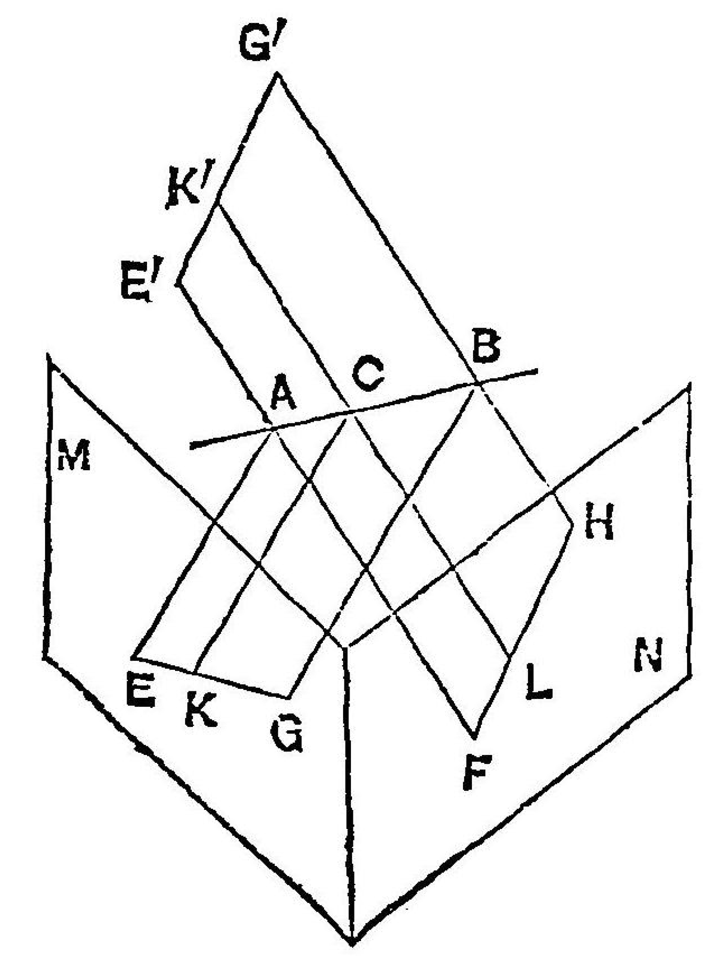


$D\hat{C}E$ ハ $\frac{2}{3}\hat{R}$, 或ハ其ノ補角ニ等シキコトヲ證セントス. サテ CD, CE ハ CB ト $\frac{1}{2}\hat{R}$

ヲナスモノトス．直線 CD 上ノ一點 D ヨリ CB ニ垂線 DF ヲ下シ，F ヲ過リ平面 Q 上ニ於テ AB ニ垂線 FE ヲ引キ CE トノ交點ヲ E トシ，DE ヲ結ビ付クレバ △CDF，△CEF ハ何レモ二等邊直角三角形ニシテ CF ハ共通ナルユエ DF=EF．從ヒテ △DEF ハ二等邊直角三角形ニシテ △CDF，△CEF ト全等ナリ．
故ニ CD=DE=EC，依リテ $D\hat{C}E=\frac{2}{3}\hat{R}$，次ニ CE′ ガ平面 Q 上ニ在リテ AC ト $\frac{1}{2}\hat{R}$ ヲナスモノトスレバ $D\hat{C}E'$ ハ $D\hat{C}E$ ノ補角ニ等シキコト明カナリ．

6. 二ツノ點 A，B 及ビ二ツノ平面 M，N アリ，A ヨリ M，N ヘノ垂線ノ和ガ B ヨリ M，N ヘノ垂線ノ和ニ等シキトキハ，直線 AB 上ノ總テノ點ニ就キテモ之ト同一ナル關係ガ成立スルコトヲ證セヨ． [44. 各高等]

證 A，B ヨリ M，N ヘノ垂線ノ趾ヲソレゾレ E，F；G，H トス，又 AB 上ノ任意ノ點 C ヨリ M，N ヘノ垂線ノ趾ヲソレゾレ K，L トス，
然ルトキ AE+AF=BG+BH



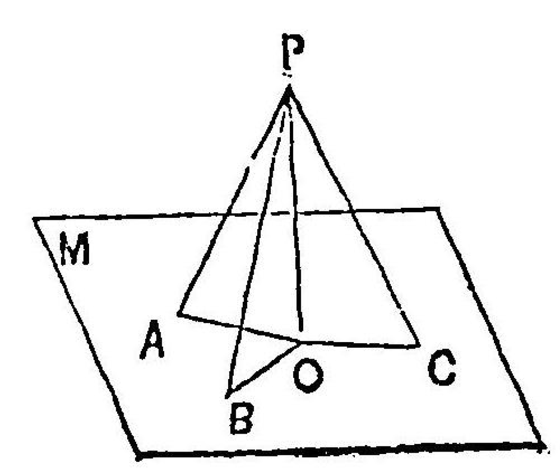
ナラバ
CK+CL
=AE+AF
ナルコトヲ證セン．
AF，BH，CL ハ直線 AB 上ノ點 A，B，C ヨリ平面 N ヘ下セル垂線ナルユエ互ニ平行ニシテ且同一ノ平面上ニアルコト明カナリ．同樣ニ AE，BG，CK ハ互ニ平行ニシテ且同一ノ平面上ニアリ．
今 FA，HB ノ延線上ニ AE′=AE，BG′=BG ナル如ク點 E′，G′ ヲ取リ E′G′，FH ヲ結ビ付クレバ FE′=HG′ ニシテ且 FE′∥HG′，$A\hat{F}H=\hat{R}$ ナルユエ E′G′HF ハ矩形ナリ．依リテ EG ヲ結ビ付クレバ二ツノ梯形 AEGB，AE′G′B ハ全等ナルコト明カナリ．又 L，K ハソレゾレ FH，EG ノ上ニアルコト明カナリ．故ニ LC ノ延線ガ E′G′ ト交ル點ヲ K′ トスレバ CK′=CK ニシテ LK′=FE′．依リテ CK+CL=AE+AF.

注意 若シ M, N ガ平行ナルトキハ E′, K′, G′ ハ E, K, G ニ一致スベシ.

7. 三點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ. 不能ノ場合アリヤ否ヤヲ決定セヨ.

[44. 米. 高. 工.]

解 三定點ヲ A, B, C トシ, 此ノ三點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メントス.



(1) A, B, C ガ同一ノ直線上ニアラザルトキ.

P ヲ軌跡上ノ點トシ. P ヨリ A, B, C ノ定ムル平面 M ニ垂線 PO ヲ下シ, 其ノ趾ヲ O トスレバ PA=PB=PC ナルユヱ OA=OB=OC,

即チ P ハ三點 A, B, C ヲ過ル圓ノ中心 O ヲ過リ平面 M ニ垂直ナル直線 PO 上ニアリ.

逆ニ PO 上ノ任意ノ點 P ヲ取レバ PA=PB=PC ナリ. 故ニ所要ノ軌跡ハ直線 PO ナリ.

(2) A, B, C ガ同一ノ直線上ニアルトキ.

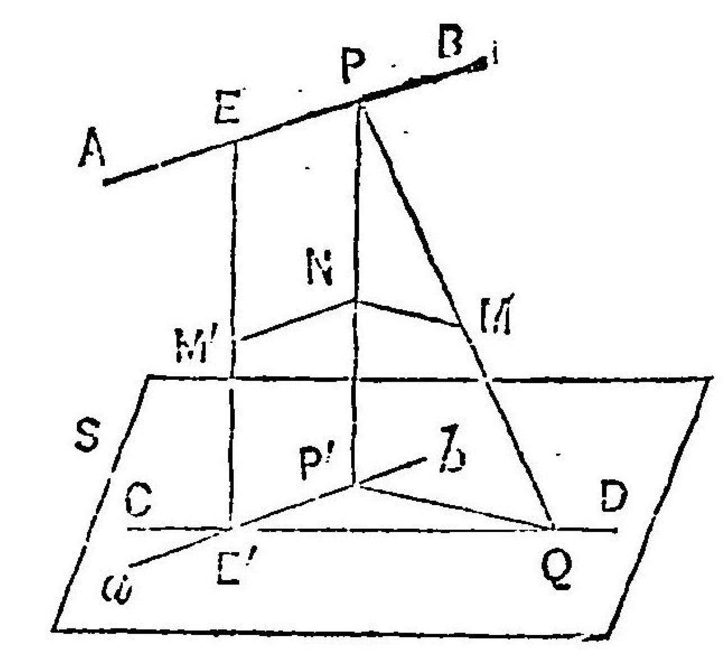
一點ヨリ一直線上ニ至ル等シキ長サノ直線ハ二ツヨリ多クアルコトナシ. 故ニ A, B, C ガ同一

ノ直線上ニアルトキハ此ノ三點ヨリ等距離ナル點ナシ. コレ不能ノ場合ナリ.

8. 空間ニ與ヘラレタル二ツノ直線 AB,CD アリ, AB 上ノ任意ノ點 P ト CD 上ノ任意ノ點 Q トヲ結ビ付クル直線 PQ ノ中點 M ノ軌跡ヲ求ム.

[43. 東. 高. 工.]

解 CD ヲ含ミ AB ニ平行ナル平面 S 上ニ於ケル AB ノ正射影 ab ト CD トノ交點ヲ E′, 及ビ ab 上ノ點 P′ ヲソレゾレ AB 上ノ點 E 及ビ P ノ正射影トシ, EE′, PP′ ノ中點ヲソレゾレ M′, N トシ; M′N, NM, P′Q ヲ結ビ付クレバ



$$M'N \parallel ab,\quad NM \parallel P'Q.$$

故ニ 平面 $M'NM \parallel$ 平面 S,

故ニ M ハ二直線 AB, CD ノ共通垂線, 即チ EE′ ノ中點 M′ ヲ過リ S ニ平行ナル平面上ニアリ, 此ノ平面ヲ R トス. 次ニ R ノ上ノ任意ノ點ヲ L トスレバ L ハ AB, CD ノ間ニ引ケル直線上

ノ點トナスコトヲ得ベシ，如何トナレバ AB ト L トノ定ムル平面ト S トノ交リ $a'b'$ ガ若シ CD ニ平行ナレバ　AB ∥ $a'b'$

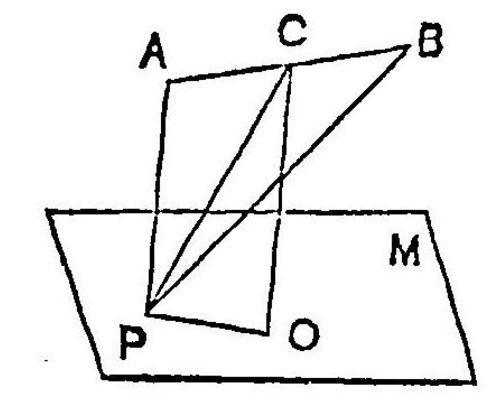
ナルユヱ　AB ∥ CD

トナリ，假設ニ戻ル，故ニ $a'b'$, CD ハ相交リ，其ノ交點ト L トヲ過ル直線ハ AB ニ交ルベケレバナリ．依リテ今 AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面ヲ S' トスレバ S, S' 及ビ R ハ平行ナルユヱ AB, CD ノ間ニ引ケル直線，即チ S ト S' トノ間ノ直線ハ R トノ交點 L ニ於テ比 PM : MQ ニ等シク分タルルヲ以テ L ハ其ノ中點トナル，即チ R 上ノ任意ノ點ハ要件ニ適ス．是ニ依リテ所要ノ軌跡ハ平面 R ナリ．

9. 一ツノ平面上ニ動點アリ，其ノ平面外ノ二ツノ與ヘラレタル點ヨリ此ノ點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ與ヘラレタルトキハ動點ノ軌跡如何．　[44. 名. 高. 工.]

解　平面 M 上ノ動點ヲ P トシ，平面 M 外ノ二定點ヲ A, B トス．．

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=k^2$ (一定) ナルトキ點 P ノ軌跡ヲ求メントス．



AB ヲ結ビ付ケ其ノ中點ヲ C トシ，C ヨリ平面 M ニ垂線 CO ヲ下シ，又要件ニ適スル一ツノ點ヲ P トシ PO, PC ヲ結ビ付クレバ

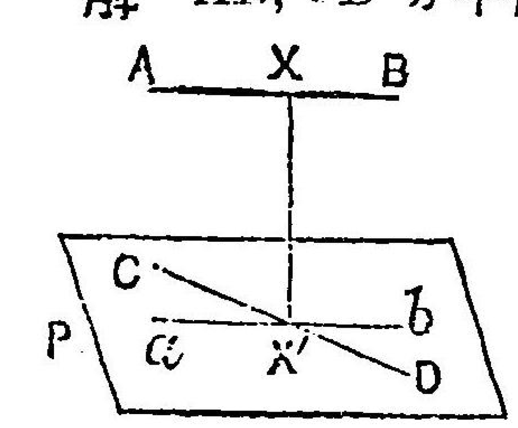
$$2(\overline{AC}^2+\overline{PC}^2)=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=k^2(\text{一定}),$$

然ルニ AC ハ一定ナルユヱ PC ノ長サハ一定ナリ．從ヒテ OP ノ長サモ亦一定ナリ．故ニ P ハ O ヲ中心トスル圓周上ニアリ．

逆ニ此ノ圓周上ノ點ハ皆要件ニ適スルコト容易ニ證明シ得ベシ．故ニ所要ノ軌跡ハ平面 M 上ニ於テ O ヲ中心トシ，OP ヲ半徑トスル圓周ナリ．

10. 空間ニ於ケル相交ラザル二直線ノ各ト互ニ垂直ニ交ル直線ヲ求ム．　[13. 東北農. 大.]

解　AB, CD ガ平行ナレバ其ノ定ムル平面上ニ於テ其ノ一ニ垂直ナル直線ヲ引ケバ他ノ一ニ垂直トナリ，即チ所要ノ直線ナリ，次ニ AB, CD ガ



平行ナラズトセバ CD ヲ過リ AB ニ平行ナル平面ヲ P トシ, AB ヲ過リ P ニ垂直ナル平面 Q ト P トノ交リヲ ab トスレバ ab, CD ハ相交ル, 如何トナレバ $AB \parallel ab$ ナルユヱ, 若シ $ab \parallel CD$ ナレバ $CD \parallel AB$ トナリテ假設ニ戻レバナリ, 依リテ其ノ交點ヲ X' トシ, X' ヲ過リ Q ノ上ニ於テ ab ニ垂直ニ引ケル直線ト AB トノ交點ヲ X トスレバ, $AB \parallel ab$ ナルユヱ $AB \perp X'X$, 然ルニ $P \perp Q$ ナルヲ以テ $X'X \perp P$, 故ニ $X'X \perp CD$, 依リテ $X'X$ ハ所要ノ直線ナリ.

注意 456 頁 8 題ヲ參照セヨ.

11. 一ツノ直線ト平行シ, 同一ノ平面上ニアラザル二ツノ直線ト交ルベキ直線ヲ作ル方法及ビ其ノ證如何. [43. 新. 醫. 專.]

解 一ノ直線ヲ X トシ, 同ジ平面上ニアラザル二ツノ直線ヲ Y, Z トス. Y ヲ過リテ X ニ平行ナル平面 P ヲ作リ, P ガ Z ト交ル點ヲ z トシ, P 上ニ於テ X ニ平行ナル直線 yz ヲ作リ Y トノ交點ヲ y トセバ yz ハ即チ所要ノ直線ナリ. 而シテ P 若シ Z ニ平行ナルトキハ解ナシ; 又 P ガ Z ト交ルモ Z ヲ過リテ X ニ平行ナル直線ガ Y ト交ラザレバ解ナシ.

12. 空間ニ與ヘラレタル一點ヲ過リテ同一ノ平面上ニ在ラザル二ツノ與ヘラレタル直線ト交ル直線ヲ作レ, 又作圖不能ノ場合アリヤ.

[43. 東. 高. 師.]

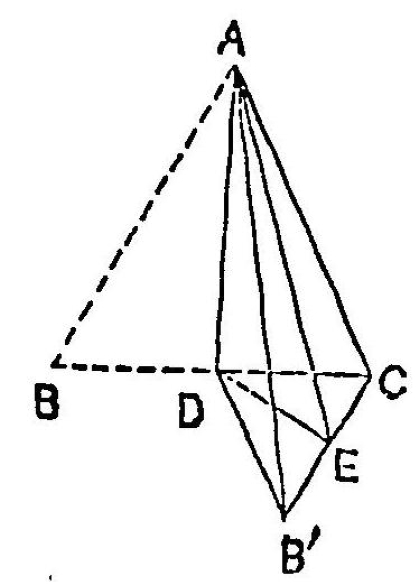
解 與ヘラレタル點ヲ O, 同一ノ平面上ニアラザル二ツノ與ヘラレタル直線ヲ AB, CD トシ, O ヲ過リ AB, CD ニ交ル直線ヲ引クコトヲ求ム. O ト AB トニテ決定セル平面ヲ P, O ト CD トニテ決定セル平面ヲ Q トシ, P, Q ノ交リヲ MN トスレバ MN, AB ハ俱ニ P ノ上ニアルユヱ一般ノ場合ニ於テハ相交ル, MN, CD モ亦同樣ナリ. 故ニ MN ハ所要ノ直線ナリ. 若シ $MN \parallel AB$, 若シクハ $MN \parallel CD$ ナレバ作圖ハ不能トナル.

F. 多面角

1. 各邊ノ長サガ a ナル正三角形 ABC ヲ, A

ヨリ BC ヘ引ケル垂線ニ沿ヒテ折リ 60 度ノ二面角ヲ作ルトキ，直線 BC ト頂點 A トノ距離ハ a ノ幾倍ナルカ．[44. 東. 高. 師.]

解 頂點 A ヨリ BC ニ引ケル垂線ヲ AD トシ，AD ニ沿ヒテ ABD ヲ折リ 60 度ノ二面角ヲ作リタルトキ B ノ位置ヲ B′ トス．



然ルトキハ $B'\hat{D}C=60^\circ$ ナリ．而シテ $\triangle B'DC$ ハ正三角形ナリ．今 B′C ノ中點ヲ E トスレバ

$$DE=\frac{\sqrt{3}}{2}DC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{a}{2},\ AD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

故ニ $$AE=\sqrt{(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2)}=\sqrt{\frac{3}{16}a^2+\frac{3}{4}a^2}$$

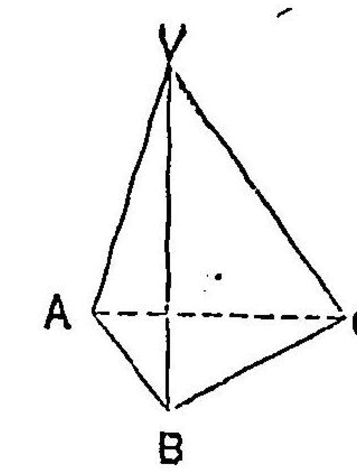
$$=\frac{\sqrt{15}}{4}a.$$

2. 一ツノ二面角ガ直角ナル三面角ヲ，其ノ一ツノ稜ニ垂直ナル平面ヲ以テ截レバ，其ノ截口ハ直角三角形ナルコトヲ證セヨ．

[44. 東. 高. 工.]

證 三面角 V-ABC ノ稜 VB ニ於ケル二面

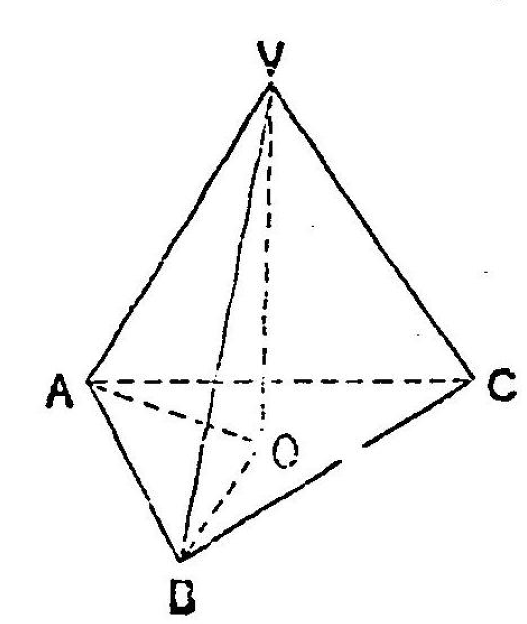
角ヲ直角ナリトスレバ，VB ニ垂直ナル平面ニテ此ノ三面角ヲ截リタル截口ナル $\triangle ABC$ ハ B ニ於ケル角ガ直角ナル三角形ナルコト明カナリ．



次ニ他ノ稜，例ヘバ VA ニ垂直ナル平面ニテ截リタル截口ヲ $\triangle ABC$ トセバ平面 VAB ハ二ツノ平面 ABC，VBC ノ何レニモ垂直ナルユヱ，其ノ交リ BC ニ垂直ナリ．依リテ $BC\perp AB$，即チ $\triangle ABC$ ハ B ニ於テ直角ヲモツ直角三角形ナリ．

3. 三面角アリ，其ノ二面角ハ何レモ直角ナリ，此ノ三面角ヲ一平面ニテ截ルトキハ此ノ平面ト三面角ノ各面トノ交リノナス三角形ノ垂心ハ三面角ノ頂點ヨリ此ノ平面ヘ下セル垂線ノ趾ト同ジ點ナルコトヲ證セヨ．[43. 各高等.]

證 三面角 V-ABC ノ二面角 VA, VB, VC ハ何レモ直角ナリトシ，一平面ニテノ截口ヲ ABC トス．頂點 V ヨリ截口 ABC ヘノ垂線ノ趾ヲ O トセヨ．

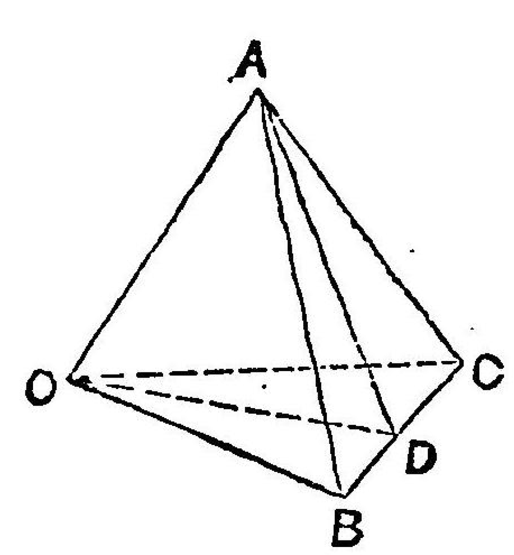


面 VAB, VBC ハ何レモ面 VCA ニ垂直ナルガ故

ニ其ノ交リ VB ハ面 VCA ニ垂直トナル, 故ニ面 VBO ハ二ツノ面 ABC, VCA ニ垂直トナリ, 從ヒテ其ノ交リ AC ハ面 VBO ニ垂直トナル, 依リテ AC ハ面 VBO 上ノ直線, 即チ面 VBO ト面 ABC トノ交リ BO ニ垂直ナリ, 換言スレバ BO ハ AC ヘノ垂線ナリ, 同樣ニ AO ハ BC ヘノ垂線トナル, 依リテ O ハ又截口ナル △ABC ノ垂心ナリ.

4. 相異レル平面上ニアル角 AOB, AOC ガ相等シキトキハ其ノ平面ニテナス二面角ヲ二等分スル平面ハ平面 BOC ニ垂直ナルコトヲ證セヨ. [44. 東北農. 大.]

證 平面 AOB, AOC ノ交リ AO 上ノ任意ノ一點 A ヲ過リ各平面上ニ於テ OA ニ垂線 AB, AC ヲ引キ OB, OC トノ交點ヲソレゾレ B, C トスレバ直角三角形 AOB, AOC ニ於テ AO ハ共通, $A\hat{O}B = A\hat{O}C$ [假設] ナルユヱ $\triangle AOB \equiv \triangle AOC$,



故ニ AB=AC, OB=OC.

今二面角 BAOC ヲ二等分スル平面 ADO ヲ作リ BC トノ交點ヲ D トスレバ面 BAC ハ OA ニ垂直ナルユヱ $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$ ハ各二面角ヲ測ル角ナリ. 故ニ $B\hat{A}D = C\hat{A}D$,

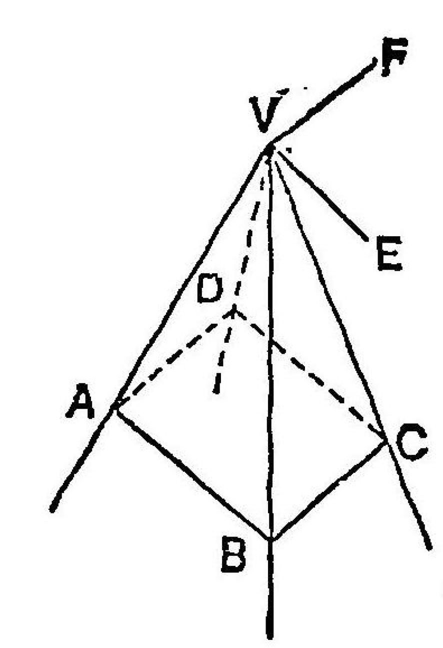
依リテ $AD \perp BC$, 從ヒテ $OD \perp BC$,

故ニ 平面 $AOD \perp BC$,

從ヒテ 平面 $AOD \perp$ 平面 BOC.

5. 四面角ヲ平面ニテ截リ其ノ截口ヲシテ平行四邊形ナラシムルコトヲ求ム. [43. 名. 高. 工.]

解 四面角ヲ V-ABCD トス. 二平面 VAB, VCD ノ交リヲ VE, 二平面 VBC, VDA ノ交リヲ VF トシ, 任意ノ位置ニ於テ VE, VF ノ定ムル平面ニ平行ナル平面 P ヲ作リ稜トノ交點ヲ A, B, C, D トスレバ P ハ二平面 VAB, VCD ノ交リ VE ニ平行ナルユヱ其ノ各平面トノ交リ AB, CD ハ何レモ VE ニ平行ナリ, 從ヒテ互ニ平行ナリ, 同樣ニ BC, DA ハ何レモ VF ニ平行ニシテ, 亦互ニ平行ナリ,



故ニ ABCD ハ平行四邊形トナル.

G'. 多面體 角壔

角錐

1. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ガ之ニ對スル稜ヲ分ツ二ツノ分ノ比ハ其ノ二面角ノ二ツノ面ノ比ニ等シキコトヲ證明セヨ.

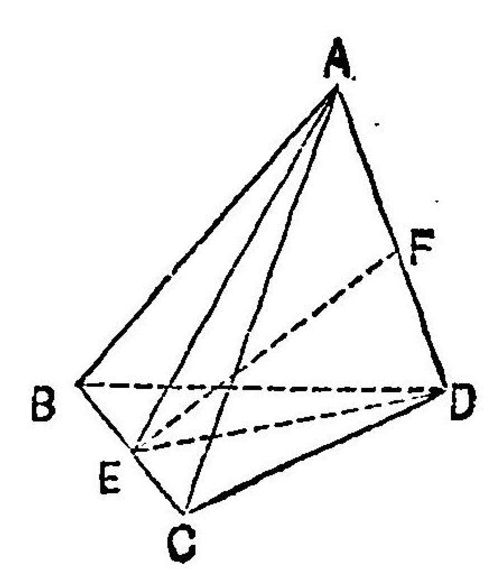
[43. 專. 入. 檢.]

證 492 頁 **8** 題ニ同ジ.

2. 正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ハ其ノ一稜ノ上ノ正方形ノ對角線ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ.

[43. 海. 經.]

證 正四面體ヲ ABCD トス, 一稜 BC ノ中點ヲ E トシ AE, DE ヲ結ビ付クレバ何レモ BC ニ垂直トナルユヱ BC$\perp$平面 AED, 故ニ BC ノ對稜 AD ノ中點 F ト E トヲ結ビ付クル直線 EF ハ BC ニ垂直ナリ, 而シテ AE, DE ハ何レモ相等シキ正三角形ノ高サナルユヱ



$\triangle$AED ハ二等邊三角形ニシテ F ハ底ノ中點ナルヲ以テ EF$\perp$AD,

故ニ EF ハ對稜 BC, AD ノ最短距離トナル.

今一稜ヲ a ニテ表ハセバ

$$\mathrm{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}a, \qquad \mathrm{AF}=\frac{1}{2}a$$

ナルユヱ $$\mathrm{EF}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}a,$$

然ルニ a ノ上ノ正方形ノ對角線ノ半分ハ

$$\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}a,$$ 故ニ題言ノ如シ.

3. 正四面體內ノ任意ノ一點ヨリ各面ニ下セル垂線ノ長サノ和ハ其ノ高サニ等シキコトヲ證セヨ.

[44. 仙. 高. 工.]

證 正四面體ノ高サヲ h トシ, 底面積ヲ A トスレバ體積ハ $\mathrm{V}=\frac{1}{3}\mathrm{A}h$,

又正四面體內ノ一點ヨリ各面ニ下セル垂線ノ長サヲ a, b, c, d トスレバ

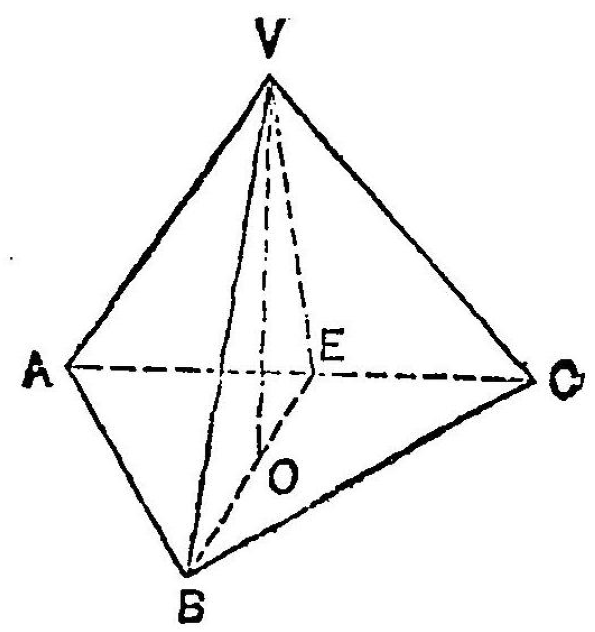
$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\mathrm{A}a+\frac{1}{3}\mathrm{A}b+\frac{1}{3}\mathrm{A}c+\frac{1}{3}\mathrm{A}d$$
$$=\frac{1}{3}\mathrm{A}(a+b+c+d).$$

故ニ $$h=a+b+c+d.$$

4. 正四面體ノ稜ノ長サ a 寸ナルトキ其ノ高サ幾寸ナルカ.

[43. 海. 兵.]

解 正四面體ヲ V-ABC トス. 底面 ABC ノ垂心ヲ O トスレバ, $BO \perp AC$ ニシテ且 $\triangle ABC$ ハ正三角形ナルユヱ其ノ交點 E ハ AC ノ中點トナリ, 從ヒテ VE ヲ結ビ付クレバ,



$VE \perp AC$, 故ニ AC ハ VE, BE ノ平面 VBE ニ垂直トナル, 故ニ又之ヲ含ム平面 ABC ハ平面 VBE ニ垂直ナリ, 同樣ニ平面 ABC ハ平面 VAO ニ垂直トナル. 依リテ二ツノ平面 VBE, VAO ノ交リ VO モ亦平面 ABC ニ垂直トナル, 即チ VO ハ頂點 V ヨリ下セル正四面體ノ高サナリ, 而シテ何レノ頂點ヨリ下セル高サモ皆此ノ VO ニ等シ.

サテ ABC ハ正三角形ナルユヱ其ノ垂心 O ハ又其ノ重心ナリ, 故ニ $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

從ヒテ $BO=\frac{2}{3}\cdot BE=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{1}{\sqrt{3}}a$.

故ニ $VO=\sqrt{(\overline{VB}^2-\overline{BO}^2)}=\sqrt{\left\{a^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2\right\}}$

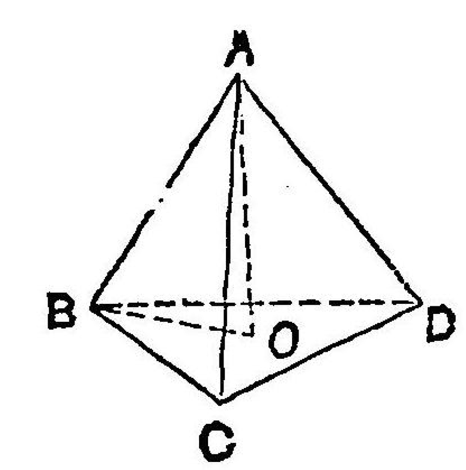
$$=\frac{a}{3}\sqrt{6},$$

即チ高サハ $\frac{a}{3}\sqrt{6}$寸ナリ.

5. 高サ 6 寸ノ正四面體ノ體積ヲ求メヨ.

[44. 熊. 高. 工.]

解 正四面體 ABCD ノ高サヲ AO トスレバ O ハ $\triangle BCD$ ノ垂心ナリ. 然ルニ $\triangle BCD$ ハ正三角形ナルユヱ O ハ又重心ナリ. 故ニ此ノ正四面體ノ一ツノ稜ノ長サヲ a 寸トスレバ OB ハ



一邊ノ長サガ a 寸ナル正三角形ノ高サ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 寸ノ $\frac{2}{3}$ ナルユヱ $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 寸ナリ. 又直角三角形 AOB ヨリ AO=6寸 ナルユヱ $a^2-\frac{3}{9}a^2=36$, 故ニ $a^2=54$.

$\triangle BCD$ ノ面積ハ $\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

故ニ所要ノ體積ハ $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 6=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 54$ $=27\sqrt{3}=46.76\ldots\ldots$, 即チ約 46立方寸.76 ナリ.

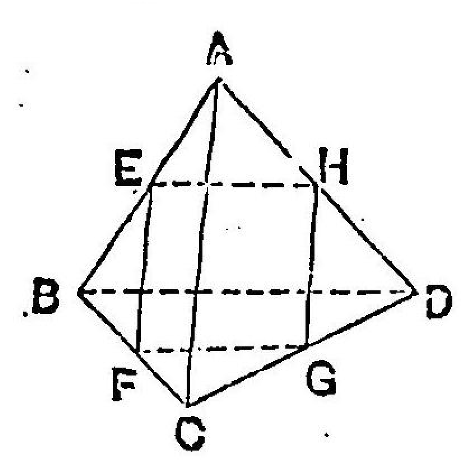
6. 正四面體ヲ截リテ其ノ截面ヲ正方形トセヨ.

[41. 陸. 經.]

解 與ヘラレタル正四面體ヲ ABCD トシ, 此ノ四面體ヲ截リテ其ノ截面ヲ正方形ナラシメン

トス．二双ノ對邊 AB, CD 及ビ AD, BC ノ中點ヲソレゾレ E, G 及ビ H, F トスレバ EFGH ハ所要ノ正方形ナリ．

如何トナレバ EF, GH ハ何レモ AC ニ平行ニシテ且ソノ半分ニ等シキユエ $EF \parallel GH$, $EF=GH=\frac{1}{2}AC$, 同樣ニ $EH \parallel FG$,



$$EH=FG=\frac{1}{2}BD,$$

故ニ EFGH ハ同一ノ平面上ニアリテ且平行四邊形ナリ．而シテ ABCD ハ正四面體ナルユエ

$$AC=BD,\ AC\perp BD,$$

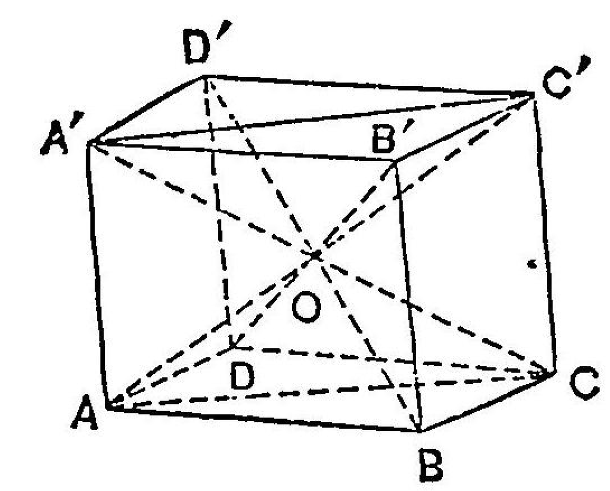
故ニ $$EF=EH,\ EF\perp EH,$$

依リテ EFGH ハ正方形ナリ．

注意 正四面體ニハ三組ノ對稜アルユエ任意ノ二組ヅツヲ取リテ同樣ノ作圖ヲナシ得ベシ．依リテ要件ニ適スル三ツノ截面アリ．

7. 平行六面體ノ對角線ハ一點ニ於テ交リ且互ニ二等分スルコトヲ證セヨ．　[43. 各醫. 專.]

證 平行六面體ヲ ABCD-A′B′C′D′ トス．對面ナル平行四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ノ對角線 AC, A′C′ ヲ引ケバ ACC′A′ ハ平行四邊形ナルユエ, AC′, A′C ハ其ノ交點 O ニ於テ互ニ二等分セラル．



同樣ニ AC′ ト BD′ ト, 及ビ AC′ ト DB′ トハ互ニ其ノ交點ニ於テ二等分セラル, 故ニ四ツノ對角線ハ同一ノ點 O ヲ過リ且互ニ O ニ於テ二等分セラル．

8. 直六面體ノ三ツノ稜ノ比ガ 2:3:4 ニシテ其ノ體積ハ 3 立方尺ナリト云フ, 其ノ三ツノ稜ノ長サ各幾寸ナルカ．　[44. 秋. 鑛. 專.]

解 所要ノ三ツノ稜ハ $2x$寸, $3x$寸, $4x$寸ニテ表ハスコトヲ得ベシ．

故ニ　$(2x)(3x)(4x)=3000$,　故ニ $x^3=125$,

故ニ　$x=5$, 依リテ所要ノ長サハ

1尺, 1尺5寸, 2尺ナリ．

9. 底面ガ正三角形ナル角壔アリ, 其ノ體積 1 立方米, 其ノ高サ 0米.8 ナリ．底面ノ一邊ヲ糎ノ位マデ正シク算出セヨ．　[43. 陸. 經.]

解 底面ナル正三角形ノ面積ハ

$$1\times 3\div 0.8=3.75,\quad 即チ\ 3平方米.75$$

ナリ. 依リテ底面一邊ノ米數ヲ x ニテ表ハセバ正三角形ノ面積ハ $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ナルユヱ

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=3.7\dot{5},$$

之ヨリ　$x^2=\frac{15}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}=8.660\ldots\ldots,$

從ヒテ　$x=\sqrt{8.660\ldots\ldots}=2.942\ldots\ldots,$

即チ　2米.94 ナリ.

10. 底面ノ一邊ノ長サ 4尺, 側稜ノ長サ 10尺アル正四角錐ノ全面積並ニ體積ヲ求ム [小數第三位マデ].　[44. 專. 入. 檢.]

解 此ノ正四角錐ノ側面ヲナス二等邊三角形ハ等邊 10 尺, 底邊 4 尺ナリ. 故ニ其ノ高サハ $\sqrt{10^2-2^2}$, 即チ $4\sqrt{6}$ 尺ナリ. 依リテ此ノ二等邊三角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{6}$,

即チ $8\sqrt{6}$ 平方尺ナリ. 故ニ所要ノ全面積ハ

$$4^2+4\times8\sqrt{6}=16+\sqrt{6144}$$
$$=16+78.383\ldots\ldots=94.383\ldots\ldots,$$

即チ 94平方尺.383 ナリ.

次ニ此ノ正四角錐ノ底面ノ對角線ノ長サハ $4\sqrt{2}$ 尺ナルユヱ, 正四角錐ノ高サハ等邊ガ 10 尺, 底

邊ガ $4\sqrt{2}$ 尺ナル二等邊三角形ノ高サ,

即チ $\sqrt{10^2-(2\sqrt{2})^2}$, 即チ $\sqrt{92}$ 尺ナリ.

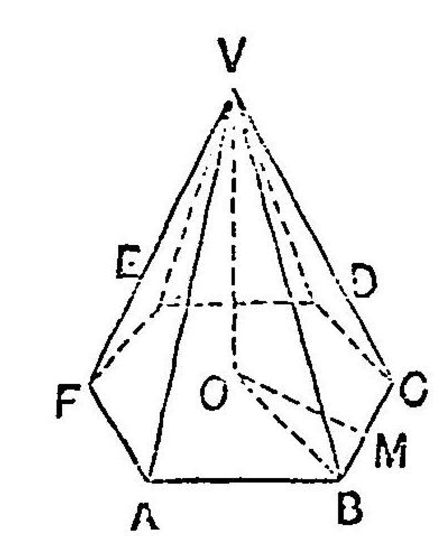
故ニ所要ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times4^2\times\sqrt{92}=\sqrt{\frac{23552}{9}}$$
$$=\sqrt{2616.888888\ldots\ldots}=51.155\ldots\ldots,$$

即チ 51立方尺.155 ナリ.

11. 正六角錐ノ高サ a 吋, 底面ノ一邊ノ長サ b 吋ナルトキ其ノ表面積ヲ求メ併テ計算ノ理由ヲ記セ.　[44. 上. 鑑. 專.]

解 正六角錐ヲ V-ABCDEF トシ, 底面ノ中心ヲ O トス.



然ルトキハ　$VO=a$,

$$AB=BC=\ldots\ldots=b$$

ナリ.

ABCDEF ハ正六角形ナルユヱ　$OB=AB=b$,

今 BC ノ中點ヲ M トスレバ

$$OM=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{BM}^2}$$
$$=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

故ニ　$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}b\times b=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$

又　$\mathrm{VM}=\sqrt{\overline{\mathrm{VO}}^2+\overline{\mathrm{OM}}^2}$

$$=\sqrt{a^2+\frac{3}{4}b^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+3b^2}.$$

故ニ　$\triangle\mathrm{VBC}=\frac{1}{2}\times b\times\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+3b^2}$

$$=\frac{1}{4}b\sqrt{4a^2+3b^2}.$$

依リテ所要ノ表面積ハ平方吋ニテ

$$6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{1}{4}b\sqrt{4a^2+3b^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}b(b\sqrt{3}+\sqrt{4a^2+3b^2}).$$

12. 底面ノ各邊4寸ニシテ高サ1尺5寸ノ正六角錐ノ體積ヲ求メヨ。　[43. 熊. 高. 工.]

解　各邊4寸ナル正六角形ノ面積ハ

$$6.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.4^2=24\sqrt{3},$$

即チ $24\sqrt{3}$ 平方寸ナルユヱ所要ノ體積ハ

$24\sqrt{3}\times 15\times\frac{1}{3}=120\sqrt{3}$

$$=120\times 1.7320508\ldots\ldots\ldots,$$

$$=207.846\ldots\ldots\ldots,$$

即チ　207立方寸.85 ナリ.

H'. 圓壔　圓錐

1. 面積 a^2 ナル一ツノ矩形アリ，此ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ軸トシテソレゾレ之ヲ一廻轉セシメテ生ズル二ツノ圓壔ノ體積ノ差ハ半徑 $\frac{a}{2}$ ナル球ノ體積ノ3倍ニ等シ．矩形ノ二邊各幾何ナルカ．　[43. 海. 機.]

解　矩形ノ二邊ヲ x, y トスレバ

$$xy=a^2 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

又二邊ヲ軸トシテソレゾレ一廻轉シテ生ズル圓壔ノ體積ハソレゾレ πy^2x, πx^2y ニシテ半徑 $\frac{a}{2}$ ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$ ナリ.

故ニ $x>y$ トスレバ

$$\pi x^2y-\pi y^2x=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\ldots\ \ldots \quad (2)$$

(2) ヨリ　$xy(x-y)=\frac{1}{6}a^3,$

之ヲ (1) ニテ除シ　$x-y=\frac{1}{6}a,$

故ニ　$x=y+\frac{1}{6}a \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (3)$

(1) ト (3) トヨリ　$y^2+\frac{1}{6}ay=a^2,$

之ヨリ $y=-\frac{1}{12}a\pm\frac{\sqrt{145}}{12}a,$

依リテ正ノ値ヲ取レバ $y=\frac{\sqrt{145}-1}{12}a,$

從ヒテ (3) ヨリ $x=\frac{\sqrt{145}+1}{12}a.$

2. 相似直圓錐ノ體積ハ底面ノ徑ノ立方ニ比例スルコトヲ證セヨ. [44. 農. 大. 實.]

證 相似直圓錐ノ體積ヲ V, V'; 底面ノ半徑ヲ r, r'; 高サヲ h, h' トスレバ

$$V:V'=\frac{1}{3}\pi r^2h:\frac{1}{3}\pi r'^2h'=r^2h:r'^2h',$$

然ルニ $r:r'=h:h',$

故ニ $V:V'=r^3:r'^3=(2r)^3:(2r')^3.$

3. 截頭直圓錐ノ側面積ハ兩底面ノ周圍ノ和ノ半分ト斜高トノ相乘積ニ等シキコトヲ證セヨ. [44. 各醫. 專.]

證 截頭直角錐ノ各側面ハ二等邊梯形ナルユヱ其ノ面積ハ兩底面ノ一邊ノ和ノ半分ト斜高トノ積ニ等シ. 而シテ側面積ハ各側面ノ和ナルユヱ兩底面ノ周圍ノ和ノ半分ト斜高トノ積ニ等シ. 然ルニ截頭直角錐ノ底面ノ邊數ヲ無限ニ增加シタル極限ハ截頭直圓錐トナルヲ以テ題言ノ如シ.

4. 底面ノ周圍8寸8分ニシテ, 高 2寸7分ナル直圓錐ノ體積ヲ求ム. 但圓周率ヲ $\frac{22}{7}$ トス. [44. 長. 高. 商.]

解 底面ノ周圍ガ8寸8分ナルユヱ

底面ノ半徑ハ $\frac{88}{2\pi}$分$=\frac{44}{\pi}$分 ナリ.

依リテ 公式 $\frac{1}{3}\pi r^2h$ ニ代入スレバ

$$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{44}{\pi}\right)^2\times 27=\frac{44^2\times 9}{\pi}$$

$$=44^2\times 9\times\frac{7}{22}$$

$$=44\times 2\times 9\times 7=5544,$$

即チ 5544 立方分ナリ.

5. 直圓錐臺[或ハ截頭直圓錐]ノ上下兩底面ノ徑ソレゾレ 3尺, 4尺ニシテ高サハ5尺ナリ. 此ノ體積如何. 但 $\pi=\frac{22}{7}$ トス. [43. 七高.]

解 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ r, r' トシ, 高サヲ h, 體積ヲ V ニテ表ハセバ

$$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$$

ナリ. 此ノ式ニ於テ

$r=\frac{3}{2},\ r'=2,\ h=5,\ \pi=\frac{22}{7}$ トスレバ

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times5\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\times2\right)+2^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times5\times\frac{37}{4}$$

$$=48.45\cdots\cdots$$

答 48立方尺.45 [强].

6. 截頭直圓錐アリ，其ノ高サ 70 尺ニシテ兩底面ノ徑ハ 10 尺及ビ 7 尺ナリ，體積ヲ求ム．但 $\pi=\frac{22}{7}$ トス． [44. 水. 講.]

解 公式 $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$ ニ所題ノ數ヲ代入スレバ

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times70\times(5^2+5\times3.5+3.5^2)$$

$$=4015,$$

即チ 4015 立方尺ナリ．

7. 直角ヲ夾メル二邊ノ長サガ7寸ト2尺4寸ナル直角三角形ノ斜邊ヲ軸トシテ此ノ三角形ヲ一廻轉シタルトキ生ジタル體ノ體積ヲ求メヨ． [43. 陸. 士.]

解 斜邊ヲ軸トシ一廻轉シテ生ズル體ハ二ツノ直圓錐ヨリ成リ，其ノ底面ノ半徑ハ何レモ直角頂ヨリ斜邊ニ下セル垂線ニシテ，其ノ高サノ和ハ即チ斜邊ナリ，然ルニ寸ノ單位ニテ斜邊ハ

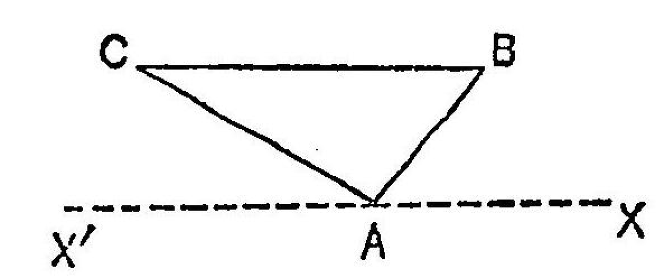
$\sqrt{(7^2+24^2)}=25$, 從ヒテ直角頂ヨリ斜邊ニ下セル垂線ハ $\frac{7\times24}{25}=6.72$ ナルユヱ所要ノ體積ヲ V ニテ表ハセバ

$$V=\frac{1}{3}\times25\times(6.72)^2\pi$$

$$=1182.246\cdots\cdots$$

即チ 1182立方寸.25 ナリ．

8. 圖ノ三角形ニ於テ AB=10寸, BC=21寸, CA=17 寸トス．今 A ヲ過リ BC ニ平行ナル直線 XAX′ ヲ軸トシテ △ABC ノ平面ヲ一廻轉スルトキ,次ノ第一及ビ第二ヲ計算セヨ． [44. 大. 高. 工.]



[第一] △ABC ノ作ル廻轉體ノ體積.

[第二] △ABC ノ重心ノ畫ク徑路ト △ABC ノ面積トノ相乘積.

解 [第一] A ヨリ BC ニ引ケル高サ即チ BC ト XX′ トノ距離ヲ x トス.

△ABC ヲ, XAX′ ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル體ノ體積ハ, BC ノ生ズル圓壔ヨリ AB, AC ノ生ズル圓錐ヲ減ジタルモノナリ．

故ニ　$\pi x^2.BC - \frac{1}{3}\pi x^2.BC = \frac{2}{3}\pi x^2.BC.$

[第二]　△ABC ノ重心ノ畫ク徑路ハ $\frac{2}{3}x$ ヲ半徑トスル圓周ナリ．故ニ $\frac{4}{3}\pi x$.　△ABC ノ面積ハ $\frac{1}{2}x.BC$.　依リテ此ノ積ハ $\frac{2}{3}\pi x^2.BC$.

即チ　第一，第二ノ値ハ相等シ．

次ニ値ヲ計算スベシ．

$$\frac{2}{3}\pi x^2.BC = \frac{8\pi}{3.BC} \times \frac{1}{4}x^2\overline{BC}^2$$

$$= \frac{8\pi}{3 \times 21} \times (\triangle ABC)^2.$$

而シテ　$\frac{1}{2}(10+21+17)=24.$

$$24-10=14,\ 24-21=3,\ 24-17=7.$$

故ニ　$(\triangle ABC)^2 = 24 \times 14 \times 3 \times 7,$

依リテ所要ノ値ハ $\frac{8\pi}{3 \times 21} \times 24 \times 14 \times 3 \times 7$

$$= 896 \times \pi,$$

之ヲ第一位マデ正シク計算スレバ次ノ如シ．

```
  3.14159.........
       698
  --------
  25 13272
   2 82735
     18846
  --------
  2814.853
      9
```


故ニ第一ノ値ハ 2815 立方寸弱．

第二ノ値ハ 2815 弱ナリ．

9.　雨天ニ屋外ニ置キタル口徑1尺，底徑寸，深サ 8寸ナルばけつニ水ノ溜レルコトばけつノ深サノ半分ニ至リシト云フ．一坪ノ面積ニ降レル雨ノ量幾斗幾升ナルカ．

但1升ヲ 64立方寸.8 トス．　[43. 海. 兵.]

解　ばけつノ內ノ水ノ量ヲ求メンニ，溜リタル水ノ部分ハ直圓錐臺ヲナシ，其ノ底半徑ハ $(10^{寸}+6^{寸})\div 4=4^{寸}$，及ビ 3寸ニシテ，深サハ $8^{寸}\div 2=4^{寸}$ ナルガ故ニ其ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times 4\times\pi(4^2+4\times 3+3^2)=\frac{148}{3}\pi,$$

即チ　$\frac{148}{3}\pi$　立方寸ナリ．

而シテコレダケノ雨水ハ徑1尺ノ圓ノ面，即チ　$(5^2\times\pi)$　平方寸ノ面積內ニ降レル雨水ナルベシ，故ニ 1坪，即チ 60^2 平方寸內ニ降レル雨水ノ量ヲ x 立方寸トスレバ，

$$5^2\times\pi : 60^2 = \frac{148}{3}\pi : x \quad ヨリ \quad x=7104,$$

即チ 1坪內ニ降レル雨水ノ量ハ 7104 立方寸

ナルコトヲ知ル，故ニ所要ノ量ハ

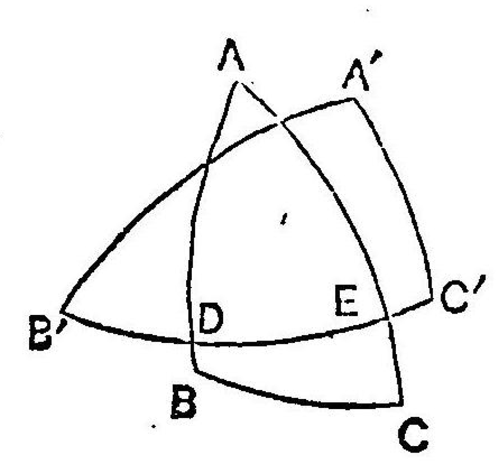
$$\frac{7104}{64.8}=109.6\cdots\cdots,$$

即チ約1石1斗ナリ.

I'. 球

1. 球面三角形ノ各ノ角ハ其ノ極三角形ノ之ニ對應スル邊ガ中心ニ於テ對スルノ角ノ補角ニ等シキコトヲ證セヨ. [43. 仙. 高. 工.]

證 ABC, A'B'C' ハ各他ノ極三角形ニシテ A', B', C' ハソレゾレ BC, CA, AB ノ極トス. 邊 AB, AC 或ハ其ノ延線ガ B'C', 或ハ其ノ延線トソレゾレ D, E ニ於テ交ルトスレバ A ハ B'C' ノ極ナルヲ以テ角 A ハ DE ガ中心ニ於テ對スル角ニ等シク；B', C' ハソレゾレ AC, AB ノ極ナルヲ以テ弧 B'E, C'D ハ何レモ四分圓周ナリ，故ニ弧 B'E, C'D ノ和，即チ弧 DE, B'C' ノ和ハ半圓ニ等シ，故ニ弧



DE, B'C' ガ中心ニ於テ對スル角ノ和ハ二直角ニ等シ，即チ角 A ハ弧 B'C' ガ中心ニ於テ對スル角ノ補角トナル，角 B, C ニ於テモ亦同樣ナリ.

2. 同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヲ過ル球ニ幾種アルカ. [44. 海. 經.]

解 同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヲ過ル球ノ中心ヨリ其ノ四ツノ點ニ至ル距離ハ相等シ. 然ルニ同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヨリ等距離ナル點ハ唯一ツアルノミ. 故ニ同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヲ過ル球ハ唯一ツニ限ル.

3. 半徑3間3尺ノ球ノ體積ヲ求メヨ.

但 $\pi=3.1416$ トシ一立方尺ニ滿タザル端數ハ四捨五入セヨ. [44. 海. 機.]

解 公式 $\frac{4}{3}\pi r^3$ ニ依リ

$$\frac{4}{3}\times 3.1416\times 21^3=38792.4768,$$

即チ 38792 立方尺强ナリ.

4. 球ノ面積 3.1416 平方寸ナルトキ此ノ球ノ半徑及ビ體積ヲ求メヨ. [44. 京. 醫. 專.]

解 公式ニ依リ $4\pi r^2=31416$, 今 $\pi=3.1416$

トスレバ $4r^2=10000$, 故ニ $r^2=2500$,

故ニ $r=50$, 卽チ半徑ハ 5尺 ナリ.

又公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ ヨリ

$$V=\frac{1}{3}r\times4\pi r^2=\frac{1}{3}\times50\times31416=523600,$$

卽チ體積ハ 523600 立方寸ナリ.

5. 半徑8尺ナル球ト體積相等シクシテ底面ノ半徑7尺ナル直圓錐ノ高サヲ求ム.

[44. 海. 兵.]

解 半徑8尺ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi 8^3$,

卽チ $\frac{4\times8^3}{3}\pi$ 立方尺ナリ, 故ニ所要ノ直圓錐ノ高サヲ x 尺トスレバ其ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi\times7^2\times x$ 立方尺ナルユヱ $\frac{7^2}{3}\pi x=\frac{4\times8^3}{3}\pi$,

依リテ $7^2x=4\times8^3$,

故ニ $x=\frac{4\times8^3}{7^2}=41.795\ldots\ldots$

卽チ 約41尺8寸ナリ.

6. 次ノ事項ヲ證セヨ. [44. 陸. 士.]

(1) 相似直圓壔ノ側面積ハ底面ノ半徑ノ平方ニ比例シ, 又體積ハ底面ノ半徑ノ立方ニ比例ス.

(2) 徑6米ナル球ノ體積ト底面ノ徑6米, 高サ4米ナル直圓錐ノ體積トノ比ハ 3:1 ナリ.

證 (1) 二ツノ相似直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ R, r トシ, 高サヲ H, h トスレバ

$$H:h=R:r.$$

故ニ 側面積ヲ S, s トスレバ

$$S:s=2\pi RH:2\pi rh=RH:rh=R^2:r^2.$$

又 體積ヲ V, v トスレバ

$$V:v=\pi R^2H:\pi r^2h=R^2H:r^2h=R^3:r^3.$$

(2) 徑6米ナル球ノ體積ハ立方米ニテ $\frac{4}{3}\pi\times3^3$,

又底面ノ徑6米, 高サ4米ナル直圓錐ノ體積ハ立方米ニテ $\frac{1}{3}\pi\times3^2\times4$.

故ニ此ノ體積ノ比ハ

$$\frac{4}{3}\pi\times3^3:\frac{1}{3}\pi\times3^2\times4=3:1.$$

7. 徑 6cm, 高サ 28cm ノ直圓壔ノ兩端ニ同ジ徑ノ半球ヲ附シタル立體アリ, 之ト同ジ體積ヲ有スル球ノ徑ヲ求ム. [44. 小. 高. 商.]

解 本題ニ於ケル立體ノ體積ハ立方糎ニテ

$$\pi\times3^2\times28+\frac{4}{3}\pi\times3^3=3\pi(3\times28+12),$$

故ニ所題ノ球ノ半徑ヲ r トスレバ

$$\frac{4}{3}\pi r^3=3\pi(3\times 28+12),$$

故ニ　$r^3=216$,　故ニ　$r=6$,

依リテ所要ノ徑ハ 12cm ナリ

最近二年間

試驗問題講義

三角法之部

A'. 對數表

1. $(.36)^x=144$ ヲ解ケ.　[44. 海. 經.]

但 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$.

解　所題ノ方程式ノ兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$x\log\frac{36}{100}=\log 144,$$

即チ　$x\{\log(2^2.3^2)-\log 100\}=\log(2^4.3^2)$,

故ニ　$$x=\frac{4\log 2+2\log 3}{2\log 2+2\log 3-2}$$

$$=\frac{2\times 0.30103+0.47712}{0.30103+0.47712-1}$$

$$=-\frac{107918}{22185}$$

B′. 鋭角の三角函數

1. $\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}=(\operatorname{cosec}A+\cot A)^2$

ナルコトヲ證セヨ. [43. 鹿. 高. 農.]

證 $(\operatorname{cosec}A+\cot A)^2$

$$=\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2=\frac{(1+\cos A)^2}{\sin^2 A}=\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A}$$

$$=\frac{(1+\cos A)^2}{(1+\cos A)(1-\cos A)}=\frac{1+\cos A}{1-\cos A}.$$

2. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)$

$=\sec A+\operatorname{cosec}A$ ナルコトヲ證セヨ.

[43. 新. 醫. 專.]

證 $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)$

$$=\frac{\sin A(\cos A+\sin A)}{\cos A}+\frac{\cos A(\sin A+\cos A)}{\sin A}$$

$$=\frac{(\sin A+\cos A)(\sin^2 A+\cos^2 A)}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}=\sec A+\operatorname{cosec}A.$$

注意 別證ハ 13 頁 7 題ヲ見ヨ.

3. 次式ヲ證セヨ. [44. 新. 醫. 專.]

$$\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}+\frac{1+\sin A+\cos A}{1+\sin A-\cos A}=2\operatorname{cosec}A.$$

證 60 頁 38 題ニ同ジ.

4. 次式ヲ簡單ニセヨ. [44. 商船.]

$(\operatorname{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A)$.

解 所題ノ式

$$=\left(\frac{1}{\sin A}-\sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A}-\cos A\right)\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)$$

$$=\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\times\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\times\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{\cos^2 A\sin^2 A}{\cos^2 A\sin^2 A}=\underset{\sim}{1}.$$

5. 次式ヲ簡單ニセヨ. [43. 海. 兵.]

$$\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 A}+\frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 x}.$$

解 所題ノ式=

$$\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 x}+\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 x}$$

$$=\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2 x}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2 x}}\right)$$

$$=\frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x}+\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=1+1=\underset{\sim}{2}.$$

C′. 任意の角の三角函數

1. $\sec A=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ ナルトキ A ノ總テノ三角

函數ヲ小數第二位マデ算出セヨ. [44. 熊. 高. 工.]

解 $\sec A=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

$$=1.414\ldots\ldots+1\fallingdotseq 2.41.$$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\sqrt{2}-1=1.414\ldots\ldots-1\fallingdotseq 0.41.$$

$$\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2A}=\pm\sqrt{1-(3-2\sqrt{2})}$$

$$=\pm\sqrt{2\sqrt{2}-2}=\pm\sqrt{0.8284\ldots}\fallingdotseq\pm 0.91.$$

$$\tan A=\pm\sqrt{\sec^2A-1}=\pm\sqrt{3+2\sqrt{2}-1}$$

$$=\pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}=\pm\sqrt{4.8284\ldots}\fallingdotseq\pm 2.19.$$

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\pm\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}=\pm\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2(\sqrt{2}-1)}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\pm\sqrt{0.2071\ldots\ldots}\fallingdotseq\pm 0.45.$$

$$\operatorname{cosec}A=\frac{1}{\sin A}=\pm\frac{1}{\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

$$=\pm\sqrt{1.2071\ldots\ldots}\fallingdotseq 1.09.$$

2. $\sec A=\sqrt{2}$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\sin A}}$ ノ一ツノ値ハ $\sqrt{2}+1$ ナルコトヲ證セヨ.

[43. 陸. 士.]

證 $\sec A=\sqrt{2}$ ヨリ $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore\ \sin A=\pm\sqrt{(1-\cos^2A)}=\pm\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故ニ $\sqrt{\left(\dfrac{1+\cos A}{1-\sin A}\right)}$ ノ一ツノ値ハ

$$\sqrt{\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1.$$

D'. 複角の三角函數

I. 恒等式

1. $1+\tan A\tan 2A=\sec 2A$ ナルコトヲ證セヨ.

[44 小. 高. 商.]

證 所題ノ式ノ左邊 $=1+\dfrac{\sin A\sin 2A}{\cos A\cos 2A}$

$$=\frac{\cos A\cos 2A+\sin A\sin 2A}{\cos A\cos 2A}$$

$$=\frac{\cos(2A-A)}{\cos A\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}=\sec 2A.$$

2. $\cot^2A-\tan^2A=4\cot 2A\operatorname{cosec}2A$ ナルコトヲ證セヨ.

[43. 盛. 高. 農.]

證 I. $\cot^2A-\tan^2A$

$$=\frac{\cos^2A}{\sin^2A}-\frac{\sin^2A}{\cos^2A}.$$

$$=\frac{\cos^4A-\sin^4A}{\sin^2A\cos^2A}$$

$$=\frac{4(\cos^2A+\sin^2A)(\cos^2A-\sin^2A)}{4\sin^2A\cos^2A}$$

$$=\frac{4(\cos^2A-\sin^2A)}{\sin^22A}$$

$$=\frac{4.\cos2A}{\sin^22A}$$

$$=4.\frac{\cos2A}{\sin2A}.\frac{1}{\sin2A}$$

$$=4\cot2A\operatorname{cosec}2A.$$

證 II. $\cot^2A-\tan^2A=\operatorname{cosec}^2A-\sec^2A$

$$=\frac{1}{\sin^2A}-\frac{1}{\cos^2A}=\frac{\cos^2A-\sin^2A}{\sin^2A\cos^2A}$$

$$=\frac{4\cos2A}{\sin^22A}=4\cot2A\operatorname{cosec}2A.$$

注意 44 頁 12 題ヲ參照セヨ.

3. 次式ヲ證セヨ. [44. 長. 高. 商.]

$$\cot\theta=\operatorname{cosec}2\theta+\cot2\theta.$$

證 $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{1+\cos2\theta}{\sin2\theta}=\frac{1}{\sin2\theta}+\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}$$

$$=\operatorname{cosec}2\theta+\cot2\theta.$$

4. 次ノ等式ヲ證セヨ.

(a) $\operatorname{cosec}\alpha-\cot\alpha=\tan\frac{1}{2}\alpha.$

(b) $\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$ [43. 長. 高. 商.]

證 (a) $\operatorname{cosec}\alpha-\cot\alpha$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}=\tan\frac{1}{2}\alpha.$$

(b) 43 頁 8 題ニ同ジ.

5. $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos7\alpha}{2\sin\alpha}$

ナルコトヲ證セヨ. [43. 陸. 經.]

證 $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha$

$$=\frac{2\sin\alpha\sin2\alpha+2\sin\alpha\sin4\alpha+2\sin\alpha\sin6\alpha}{2\sin\alpha}=$$

$$\frac{(\cos\alpha-\cos3\alpha)+(\cos3\alpha-\cos5\alpha)+(\cos5\alpha-\cos7\alpha)}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos7\alpha}{2\sin\alpha}.$$

6. $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=\tan2A+\sec2A$

ナルコトヲ證セヨ. [43. 農. 大. 實.]

證 $\tan2A+\sec2A$

$$=\frac{\sin2A}{\cos2A}+\frac{1}{\cos2A}$$

$$=\frac{1+\sin2A}{\cos2A}$$

$$=\frac{\cos^2A+\sin^2A+2\cos A\sin A}{\cos^2A-\sin^2A}$$

$$=\frac{(\cos A+\sin A)^2}{\cos^2A-\sin^2A}$$

$$=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}.$$

7. $\dfrac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

ナルコトヲ證セヨ. [43. 七高.]

證 $\dfrac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}$

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\frac{1}{2}(\sin2A-\sin2B)}$$

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\sin(A-B)}$$

$$=\tan(A+B).$$

8. 次式ヲ證セヨ. [44. 盛.高.農.]

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}.$$

證 所題ノ式ノ右邊

$$=\frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}$$

$$=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)+\sin2.\frac{\theta}{2}}{\sin2.\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1+1}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}.$$

9. $3\sin A-\sin3A=2\sin A(1-\cos2A)$ ヲ證セヨ. [44. 水. 講.]

證 I. 所題ノ式ノ左邊

$$=2\sin A-(\sin3A-\sin A)$$

$$=2\sin A-2\sin A\cos2A$$

$$=2\sin A(1-\cos2A).$$

證 II. 所題ノ式ノ左邊

$$=3\sin A-(3\sin A-4\sin^3A)$$

$$=4\sin^3A$$

$$=2\sin A(2\sin^2A)$$

$$=2\sin A(1-\cos2A).$$

10. 次式ヲ證セヨ. [44. 各醫. 專.]

$$\cos(A+B+C)+\cos(B+C-A)+\cos(C+A-B)$$
$$+\cos(A+B-C)=4\cos A\cos B\cos C.$$

證 所題ノ式ノ左邊

$=\cos(A+B+C)+\cos(A+B-C)$

$\quad+\cos(A-B+C)+\cos(A-B-C)$

$=2\cos(A+B)\cos C+2\cos(A-B)\cos C$

$=2\cos C\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$

$=2\cos C.2\cos A\cos B$

$=4\cos A\cos B\cos C.$

11. 次式ヲ證セヨ. [44. 東. 高. 商.]

$\sin A\sin B\sin(A-B)+\sin B\sin C\sin(B-C)$

$+\sin C\sin A\sin(C-A)$

$+\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)=0.$

證 所題ノ式ノ左邊

$=\frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}\sin(A-B)$

$\quad+\frac{1}{2}\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\}\sin(B-C)$

$\quad+\frac{1}{2}\{\cos(C-A)-\cos(C+A)\}\sin(C-A)$

$\quad+\frac{1}{2}\sin(A-B)\{\cos(A+B-2C)-\cos(B-A)\}$

$=\frac{1}{2}\{\cos(A-B)\sin(A-B)-\cos(A+B)\sin(A-B)$

$\quad+\cos(B-C)\sin(B-C)-\cos(B+C)\sin(B-C)$

$\quad+\cos(C-A)\sin(C-A)-\cos(C+A)\sin(C-A)$

$\quad+\sin(A-B)\cos(A+B-2C)-\sin(A-B)\cos(B-A)\}$

$=\frac{1}{4}\{\sin2(A-B)-\sin2A+\sin2B$

$\quad+\sin2(B-C)-\sin2B+\sin2C$

$\quad+\sin2(C-A)-\sin2C+\sin2A$

$\quad-\sin2(C-A)-\sin2(B-C)-\sin2(A-B)\}=0.$

12. 次式ヲ證セヨ. [44. 盛. 高. 農.]

$2\sin^2\theta\sin^2\phi+2\cos^2\theta\cos^2\phi-\cos2\theta\cos2\phi=1.$

證 I. 所題ノ式ノ左邊

$=2(1-\cos^2\theta)(1-\cos^2\phi)+2\cos^2\theta\cos^2\phi$

$\qquad-(2\cos^2\theta-1)(2\cos^2\phi-1)$

$=2\{1+2\cos^2\theta\cos^2\phi-(\cos^2\theta+\cos^2\phi)\}$

$\qquad-\{4\cos^2\theta\cos^2\phi-2(\cos^2\theta+\cos^2\phi)+1\}$

$=2-1=1.$

證 II. 所題ノ式ノ左邊

$=2\sin^2\theta\sin^2\phi+2(1-\sin^2\theta)(1-\sin^2\phi)$

$\qquad-(1-2\sin^2\theta)(1-2\sin^2\phi)$

$=2\sin^2\theta\sin^2\phi+2-2\sin^2\theta-2\sin^2\phi+2\sin^2\theta\sin^2\phi$

$\qquad-1+2\sin^2\theta+2\sin^2\phi-4\sin^2\theta\sin^2\phi=1.$

E′. 複角の三角函數

II. 等式［特別角を含むもの］

1. 次式ヲ證セヨ. ［44. 農. 大. 實.］

$\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ = 0.$

證 所題ノ式ノ左邊 $= 2\sin 30^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ$

$= 2 \times \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \cos 20^\circ = 0.$

2. 次ノ等式ヲ證セヨ. ［44. 海. 兵

(1) $\sin 95^\circ - \sin 25^\circ - \sin 35^\circ = 0.$

(2) $4\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta) = \sin 3\theta.$

證 (1) 所題ノ式ノ左邊

$= \sin(90^\circ + 5^\circ) - (\sin 25^\circ + \sin 35^\circ)$

$= \cos 5^\circ - 2\sin 30^\circ \cos 5^\circ$

$= \cos 5^\circ\left(1 - 2\times\frac{1}{2}\right) = 0.$

(2) 所題ノ式ノ左邊

$= 2\sin\theta(\cos 2\theta - \cos 120^\circ)$

$= 2\sin\theta\cos 2\theta - 2\cos 120^\circ \sin\theta$

$= \sin 3\theta - \sin\theta - 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\theta = \sin 3\theta$

注意 (2) ノ別證ハ 68 頁 6 題ヲ見ヨ.

3. $\sin(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ) = -\frac{\cos 2\alpha}{2}$ ヲ證セヨ. ［43. 海. 經.］

證 $\sin(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ)$

$= \frac{1}{2}(\cos 90^\circ - \cos 2\alpha)$

$= -\frac{\cos 2\alpha}{2}.$

4. $\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ) = \frac{1+2\cos 2A}{1-2\cos 2A}$ ナルコトヲ證セヨ. ［44. 專. 入. 檢.］

證 73 頁 12 題ニ同ジ.

5. $\sin 18^\circ$ ノ値ハ $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ナルコトヲ證セヨ. ［44. 新. 醫. 專.］

證 $18^\circ \times 5 = 90^\circ$ ナルガ故ニ $18^\circ = \alpha$

トスレバ $\cos 3\alpha = \sin 2\alpha,$

即チ $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$

而シテ $\cos\alpha \neq 0$ ナルヲ以テ兩邊ヲ $\cos\alpha$

ニテ除シ $4\cos^2\alpha - 3 = 2\sin\alpha.$

即チ $4(1-\sin^2\alpha) - 3 = 2\sin\alpha,$

之ヨリ $4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0,$

之ヲ解キ $\sin\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4},$

然ルニ $\sin\alpha > 0$ ナルヲ以テ

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

注意 $\sin 18^\circ$ ハ圓ノ半徑ヲ單位トスルトキニ內接正十邊形ノ一邊ノ半分ニテ表サルベシ.

F. 複角の三角函數

III. 等式[條件附]

1. $A+B+C=\pi$ ナルトキ

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ. [43. 陸. 經., 東北農. 大.]

證 89頁13題ニ同ジ.

2. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セヨ.

$$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

[44. 鹿. 高. 農.]

證 所題ノ式ノ左邊

$$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B)-2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{1}{2}(A-B)-\cos\frac{1}{2}(A+B)\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

3. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セヨ.

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

[44. 米. 高. 工.]

證 所題ノ式ノ左邊

$$=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+1-2\sin^2\frac{1}{2}C=$$

$$2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A-B)+1-2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A+B)$$

$$\left[\because\ \frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}C=90^\circ\right]$$

$$=1+2\left\{\cos\frac{1}{2}(A-B)-\cos\frac{1}{2}(A+B)\right\}\sin\frac{1}{2}C$$

$$=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C.$$

4. $A+B+C=\pi$ ナルトキ次式ヲ證セヨ.

$$\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C.$$

[44. 陸. 經.]

證 $A+B$ ト C トハ互ニ補角ナルコトニ注意シ所題ノ式ノ左邊

$$=2\cos(A+B)\sin(A-B)+2\sin C\cos C$$

$$=-2\cos C\sin(A-B)+2\sin(A+B)\cos C$$

$$=2\cos C\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$$

$$=4\cos C\cos A\sin B=4\cos A\sin B\cos C.$$

5. $A+B+C=180^\circ$, $\cos A=\cos B\cos C$

ナルキ $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$ ナルコトヲ示セ.

[44. 仙. 高. 工.]

證 $\cot B\cot C=\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$

$$=\frac{\cos A}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{-\cos(B+C)}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{-\cos B\cos C+\sin B\sin C}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin B\sin C}{2\sin B\sin C}=\frac{1}{2}.$$

6. $\tan^2A=1+2\tan^2B$ ナルトキハ

$\cos B^2=1+\cos 2A$ ナルコトヲ證セヨ.

[43. 名醫. 專.]

證 $\tan^2A=1+2\tan^2B$

ヨリ $1+\tan^2A=2(1+\tan^2B)$,

即チ $\frac{1}{\cos^2A}=\frac{2}{\cos^2B}$,

故ニ $\cos^2B=2\cos^2A$

$$=1+\cos 2A.$$

7. $\cos\theta=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ ナルトキハ

$\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}.\tan^2\frac{\beta}{2}$

ナルコトヲ證セヨ. [44. 名. 高. 工.]

證 $\frac{\cos\theta}{1}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}.$

故ニ $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}.$$

故ニ 公式 $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan^2\frac{\theta}{2}$

ニ依リ $\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}.\tan^2\frac{\beta}{2}.$

8. $\tan\theta=\frac{A}{B}$ ナルトキハ

$A\cos\omega+B\sin\omega=\pm\sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\omega)$

ナルコトヲ證セヨ. [43. 東. 高. 工.]

證 $\tan\theta=\frac{A}{B}$ ヨリ

$1+\tan^2\theta=\frac{A^2+B^2}{B^2}$ 及ビ $1+\cot^2\theta=\frac{A^2+B^2}{A^2}$,

即チ $\sec^2\theta=\frac{A^2+B^2}{B^2}$ 及ビ $\mathrm{cosec}^2\theta=\frac{A^2+B^2}{A^2}$

ヲ得.

故ニ $\cos\theta=\pm\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$,

及ビ $\sin\theta=\pm\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}.$

而シテ公式

$\sin\theta\cos\omega+\cos\theta\sin\omega=\sin(\theta+\omega)$

ニ上ノ値ヲ代入スレバ

$$\pm\frac{A\cos\omega}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\pm\frac{B\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2)}}=\sin(\theta+\omega),$$

$\therefore\ A\cos\omega+B\sin\omega=\pm\sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\omega).$

G'. 複角の三角函數

IV. 簡單にせよ

1. 次式ヲ簡單ニセヨ. [43. 水. 講.]

$\sin^2B+\sin^2(A-B)+2\sin B\sin(A-B)\cos A.$

解 所題ノ式

$=\sin^2B+\sin(A-B)\{\sin(A-B)+2\cos A\sin B\}$

$=\sin^2B+\sin(A-B)\{\sin A\cos B+\cos A\sin B\}$

$=\sin^2B+\sin(A-B)\sin(A+B)$

$=\sin^2B+(\sin^2A-\sin^2B)$

$=\sin^2A.$

2. 次式ヲ簡單ニスベシ. [44. 商船.]

(1) $\sin 2A\cos A-\cos 2A\sin A.$

(2) $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)$

$+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta).$

解 (1) $\sin 2A\cos A-\cos 2A\sin A$

$=\sin(2A-A)=\sin A.$

(2) 所題ノ式 $=\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)$

$+\sin\beta(\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha)$

$+\sin\gamma(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$

$+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

$+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma=0.$

3. 次ノ二式ヲ簡單ニセヨ. [44. 海. 機.]

(1) $(\tan A+\tan B)(\cot A-\cot B)$

$+(\tan A-\tan B)(\cot A+\cot B).$

(2) $\dfrac{\cos(\alpha-30^\circ)}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin\alpha}.$

解 (1) 所題ノ式

$=\tan A\cot A+\tan B\cot A-\tan A\cot B-\tan B\cot B$

$+\tan A\cot A-\tan B\cot A+\tan A\cot B-\tan B\cot B$

$=2(\tan A\cot A-\tan B\cot B)$

$=2\left(\tan A\dfrac{1}{\tan A}-\tan B\dfrac{1}{\tan B}\right)$

$=2(1-1)=0.$

(2) 所題ノ式

$=\dfrac{\sin\alpha\cos(\alpha-30^\circ)-\cos\alpha\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{\sin\{\alpha-(\alpha-30^\circ)\}}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin 2\alpha}=\operatorname{cosec}2\alpha.$

4. 次ノ無限級數ノ和ヲ最モ簡單ナル形ニテ

表ハセ. [43. 仙. 高. 工.]

$a\sin\theta,\ a\sin\theta\cos\theta,\ a\sin\theta\cos^2\theta,\ a\sin\theta\cos^3\theta,\ldots\ldots$

解 和ヲ S ニテ表ハセバ

$$S=a\sin\theta+a\sin\theta\cos\theta+a\sin\theta\cos^2\theta+\ldots\ldots$$

$$=a\sin\theta(1+\cos\theta+\cos^2\theta+\ldots\ldots).$$

此ノ式ニ於テ θ ヲ π ノ整數倍トスレバ $\sin\theta=0$ ナルガ故ニ $S=0$ トナル，依リテ θ ヲ π ノ整數倍ナラズトセン. 然レバ $-1<\cos\theta<1$ ナルヲ以テ公比ノ絶對値ハ1ヨリ小ナリ，依リテ

$$S=\frac{a\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=a\cot\frac{\theta}{2}.$$

H'. 複角の三角函數

V. 値を求めよ

1. $\sin18^\circ$ ノ値ヲ算出セヨ.

[43. 東北農. 大.]

解 E'. 5題ヲ見ヨ.

2. $\sin18^\circ$ ノ値ヲ求メ，小數第五位マデニ縮メテ表ハセ. [44. 大. 高. 工.]

解 E'. 5題ノ如クシテ

$$\sin18^\circ=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})=\frac{1}{4}(-1+2.236067\ldots\ldots)$$

$$=0.309016\ldots\ldots\fallingdotseq0.30902.$$

3. 75° ノ正弦及ビ餘弦ヲ求ム. [44. 海. 經.]

解 $\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$

$$=\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

又 $\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)$

$$=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

4. 次ノ諸式ノ値ヲ求メヨ. [44. 陸. 士.]

(1) $\sin20^\circ\sin35^\circ\sin45^\circ+\cos25^\circ\cos45^\circ\cos80^\circ$.

(2) $\sin3A-\cos3B$, 但 $\sin A=\frac{1}{3}$, $\cos B=\frac{2}{3}$.

(3) $\cos138^\circ+\cos102^\circ+\cos18^\circ$.

(4) $\tan\{2(x+y)\}$, 但 $\tan x=2$, $\tan y=3$.

解 (1) 所題ノ式

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 20^\circ \sin 35^\circ+\cos 25^\circ \cos 80^\circ)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(\cos 15^\circ-\cos 55^\circ)+(\cos 105^\circ+\cos 55^\circ)\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos 15^\circ+\cos 105^\circ)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 60^\circ \cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}.$$

(2) 所題ノ式

$$=3\sin A-4\sin^3 A-4\cos^3 B+3\cos B$$

$$=3\times\frac{1}{3}-4\times\frac{1}{27}-4\times\frac{8}{27}+3\times\frac{2}{3}$$

$$=1-\frac{4}{27}-1\frac{5}{27}+2=1\frac{2}{3}.$$

(3) 所題ノ式

$$=2\cos 120^\circ \cos 18^\circ+\cos 18^\circ$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\cos 18^\circ+\cos 18^\circ=0.$$

(4) $\tan\{2(x+y)\}=\dfrac{2\tan(x+y)}{1-\tan^2(x+y)}.$

然ルニ $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\dfrac{2+3}{1-2\times 3}$

$$=-1.$$

故ニ 所題ノ式 $=\dfrac{-2}{1-1}=-\dfrac{2}{0}=-\infty.$

5. $\sin 2A$, $\cos 2A$ ヲ $\sin A$ 及ビ $\cos A$ ニテ表ハセル結果ヲ知リテ $\sin 3A$ ヲ $\sin A$ ニテ，又 $\cos 3A$ ヲ $\cos A$ ニテ表ハセ． [43. 海. 機.]

解 $\sin 2A=2\sin A\cos A,$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$$

ナルユエ $\sin 3A=\sin(2A+A)$

$$=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$$

$$=(2\sin A\cos A)\cos A+(1-2\sin^2 A)\sin A$$

$$=2\sin A(1-\sin^2 A)+(1-2\sin^2 A)\sin A$$

$$=3\sin A-4\sin^3 A.$$

$\cos 3A=\cos(2A+A)$

$$=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A$$

$$=(2\cos^2 A-1)\cos A-2(1-\cos^2 A)\cos A$$

$$=4\cos^3 A-3\cos A.$$

6 $\alpha=24^\circ$ ナルトキ

$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$ ノ値ヲ求メヨ．

[44. 新. 醫. 専.]

解 所題ノ式

$$=(\cos\alpha+\cos 4\alpha)+(\cos 2\alpha+\cos 8\alpha)$$

$$=2\cos\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{3}{2}\alpha+2\cos 5\alpha\cos 3\alpha$$

$=2\cos 60^\circ\cos 36^\circ+2\cos 120^\circ\cos 72^\circ$

$=\cos 36^\circ-\cos 72^\circ$

$=1-2\sin^2 18^\circ-\sin 18^\circ$

$=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2}.$

7. $\tan\theta=\frac{2ab}{a-b}$ ナルトキ $\sin 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ. [43. 熊. 高. 工.]

解 $\tan\theta=\frac{2ab}{a-b}$

ヨリ $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{4a^2b^2}{(a-b)^2},$

即チ $\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{4a^2b^2}{(a-b)^2},$

$\therefore\ \frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{(a-b)^2+4a^2b^2}{(a-b)^2},$

$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2+4a^2b^2}.$

依リテ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\tan\theta.\cos^2\theta$

$=2.\frac{2ab}{a-b}.\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2+4a^2b^2}$

$=\frac{4ab(a-b)}{(a-b)^2+4a^2b^2}.$

8. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$ ナルトキ $\tan(\alpha+\beta)$ ヲ求メヨ. [43. 海. 經.]

解 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{3+2}{6-1}=1.$

9. $\sin A+\cos A=1.2$ ヲ與ヘテ次ノ二式ノ値ヲ求メヨ. [43. 海. 機.]

(I) $\sin 2A$. (II) $\sin^3 A+\cos^3 A$.

解 (I) 所題ノ式ノ兩邊ヲ二乘シ

$\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A=1.44,$

即チ $1+\sin 2A=1.44,$

$\therefore\ \sin 2A=.44.$

(II) 所題ノ式ノ兩邊ヲ三乘シ

$\sin^3 A+\cos^3 A+3\sin A\cos A(\sin A+\cos A)=1.728,$

即チ $\sin^3 A+\cos^3 A+\frac{3}{2}\sin 2A\times 1.2=1.728,$

即チ $\sin^3 A+\cos^3 A+\frac{3}{2}\times .44\times 1.2=1.728,$

$\therefore\ \sin^3 A+\cos^3 A=.936.$

10. $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$ ナルトキハ $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ ノ値如何. [43. 海. 兵.]

解 $\sin\theta+\sin\phi=a$

ヨリ $2\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)=a \quad \ldots (1)$

$$\cos\theta+\cos\phi=b$$

ヨリ $$2\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)=b \quad \ldots \quad (2)$$

$(1)\div(2)$ ヨリ $$\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)}{\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)}=\frac{a}{b},$$

兩邊ヲ自乘シテ $$\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)}{1-\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)}=\frac{a^2}{b^2},$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)=\frac{a^2}{a^2+b^2},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

11. 次ノ等式ヲ證シ，且其ノ各邊ノ最大值最小值及ビ各ノ場合ニ應ズル θ ノ一般ノ值ヲ求メヨ． [44. 陸. 士.]

$$\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta.$$

證 所題ノ式ノ左邊

$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta,$$

次ニ所題ノ式ノ各邊ノ最大值及ヒ最小值ヲ求メンニハ右邊

卽チ $$1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

ノ最大值及ビ最小值ヲ求ムレバ可ナリ．

サテ (1) 式ガ最大值ヲモツ爲ニハ $\sin^2 2\theta$ ガ最小值ヲ有ツコトヲ要ス．

故ニ $\sin 2\theta=0$ ナルトキニシテ其ノ值ハ 1 ナリ．

而シテ之ニ應ズル θ ノ值ハ $2\theta=n\pi$ ヨリ

$$\theta=n\frac{\pi}{2}.$$

又 (1) 式ガ最小值ヲモツ爲ニハ $\sin^2 2\theta$ ガ最大值ヲモツコトヲ要ス． 故ニ $\sin^2 2\theta=1$,

從ヒテ $\sin 2\theta=\pm 1$ ナルトキニシテ其ノ值ハ $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ ナリ． 而シテ之ニ應ズル θ ノ值ハ

$$2\theta=n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \text{ヨリ} \quad \theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}.$$

I'. 三角形の性質

1. 三角形 ABC ニ於テ

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

ヲ證セヨ． [44. 海. 經.]

證 所題ノ式ノ左邊

$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$

$$=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$$

$$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$

$$=2\sin C.2\sin A\sin B$$

$$=4\sin A\sin B\sin C.$$

注意 90 頁 14 題ヲ參照セヨ.

2. 三角形 ABC ニ就キテ次式ヲ證明スベシ.

$$\tan A+\tan B=\sec A\sec B\sin C.$$

[43, 44. 商船.]

解 $\tan A+\tan B=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}.$$

而シテ $A+B+C=180°$

ナルユヱ $\sin(A+B)=\sin C,$

$$\therefore\ \tan A+\tan B=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$$

$$=\sec A\sec B\sin C.$$

3. 三角形 ABC ニ於テ次ノ恒等式ヲ證セヨ.

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

[44. 京. 醫. 專.]

證 所題ノ式ノ左邊

$$=\frac{1}{2}(1+\cos A)+\frac{1}{2}(1+\cos B)-\frac{1}{2}(1+\cos C)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos A+\cos B-\cos C+1)$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos A+\cos B-\cos C-\cos(A+B+C)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

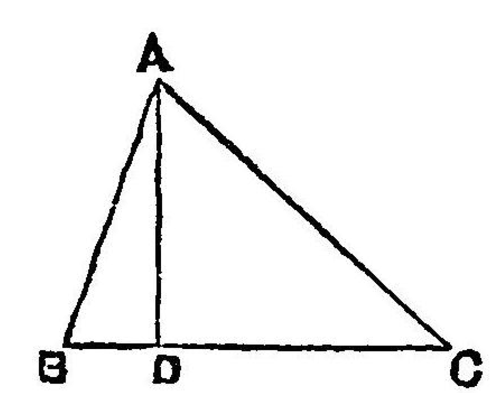
$$=\cos\frac{A+B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B+2C}{2}\right\}$$

$$=\sin\frac{C}{2}.2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

4. 任意ノ三角形ニ於テ $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$ ノ關係アルコトヲ證セヨ. [43. 海. 兵.]

證 I. A ヨリ對邊 BC ニ下セル垂線ノ趾ヲ D トスレバ



$$AD=AB\sin B=c\sin B,$$

及ビ $AD=AC\sin C=b\sin C.$

$$\therefore\ c\sin B=b\sin C,$$

$$\therefore\ \frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},$$

同樣ニ $\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin A}{a},$

$$\therefore\ \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},$$

垂線 AD ガ形外ニアルトキモ

$\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$ ナル關係ヲ有スルヲ以テ上ニ得タル關係式ハ一般ニ成立スベシ.

證 II. $bc\sin A=ca\sin B=ab\sin C\ [=2\Delta]$ ヲ既知ノ公式トス. 此ノ各邊ヲ abc ニテ除スレバ

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

5. 一ツノ三角形ニ於テ其ノ邊ト對角ノ正弦トノ比ハ一定ナルコトヲ證セヨ.

[44. 東. 高. 工.]

證 一ツノ三角形ヲ ABC トシ; 角 A, B, C ノ對邊ヲ a, b, c, 外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R},\quad \sin C=\frac{c}{2R}.$$

故ニ $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

即チ題言ノ如シ.

注意 本題ハ前題ト同意ナリ. 尚 136 頁 **11** 題ヲ參照セヨ.

6. 三角形ニ於テ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$ ヨリシテ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ヲ作レ.

[43. 大. 高. 工.]

解 $a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C,$

$$\therefore\ b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$=k^2\{\sin^2B+\sin^2C-2\sin B.\sin C.\cos A\}$$
$$=k^2\{\sin^2B+\sin^2C+[\cos(B+C)-\cos(B-C)]\cos A\}.$$

而シテ $A+B+C=180^\circ$

ナルガ故ニ $\cos(B+C)=-\cos A.$

$$\therefore\ b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=k^2\{\sin^2B+\sin^2C-\cos^2A+\cos(B+C)\cos(B-C)\}$$
$$=k^2\{\sin^2B+\sin^2C-\cos^2A+\cos^2B-\sin^2C\}$$
$$=k^2\{1-\cos^2A\}=k^2\sin^2A=a^2,$$

即チ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

7. 三角形 ABC ニ就キテ次式ヲ證セヨ.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$ [43. 商船.]

證 140 頁 **14** 題 (1) ニ同ジ.

8. 三角形 ABC ノ角ト其ノ對邊 a, b, c ノ間ニハ $a=c\cos B+b\cos C$ ナル關係アルコトヲ證セヨ.

[44. 海. 兵.]

證 I. 137 頁 **12** 題ニ同ジ.

證 II. 任意ノ三角形 ABC ニ於テ

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

ナルユヱ

$$c\cos B+b\cos C=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$$

$$=\frac{c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a.$$

9. 三角形 ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ.

$$\frac{a\sin C}{b-a\cos C}=\tan A.$$

[44. 上. 鑛. 專.]

證 $a:c=\sin A:\sin C$, 及ビ $b=c\cos A+a\cos C$ ヨリ

$$\frac{a\sin C}{b-a\cos C}=\frac{c\sin A}{c\cos A}=\tan A.$$

注意 148 頁 25 題ヲ參照セヨ.

10. 三角形 ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ.

$$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$$

[44. 長. 高. 商.]

證 $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ

所題ノ式ノ左邊 $=2R\sin A\sin(B-C)$

$+2R\sin B\sin(C-A)+2R\sin C\sin(A-B)$

$=R\{\cos(A-B+C)-\cos(A+B-C)$

$+\cos(B-C+A)-\cos(B+C-A)$

$+\cos(C-A+B)-\cos(C+A-B)\}=0.$

注意 143 頁 18 題ヲ參照セヨ.

11. 三角形 ABC ニ就キテ次式ヲ證セヨ.

$$a\sec A-b\sec B=\sec C(b\sec A-a\sec B).$$

[44. 商船.]

證 $\sec C(b\sec A-a\sec B)=\frac{1}{\cos C}\left(\frac{b}{\cos A}-\frac{a}{\cos B}\right)$,

正弦比例ニ依リテ

$$=\frac{c}{\sin C\cos C}\left(\frac{\sin B}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos B}\right)$$

$$=\frac{c}{\sin C\cos C}\left(\frac{\sin(C+A)}{\cos A}-\frac{\sin(C+B)}{\cos B}\right)$$

$$=\frac{c}{\sin C\cos C}\left(\frac{\cos C\sin A}{\cos A}-\frac{\cos C\sin B}{\cos B}\right)$$

$$=\frac{c}{\sin C}\left(\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin B}{\cos B}\right)$$

又正弦比例ニ依リ

$$=\frac{a}{\cos A}-\frac{b}{\cos B}=a\sec A-b\sec B.$$

12. 三角形 ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ.

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C.$$

[43. 陸. 士., 仙. 高. 工.]

證 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

ヨリ $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}.$$

$$\therefore\quad \tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C.$$

13. 三角形 ABC ニ於テ次ノ等式ノ成立スルコトヲ證セヨ.

$$a=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$ [43. 陸. 士.]

證 I. $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

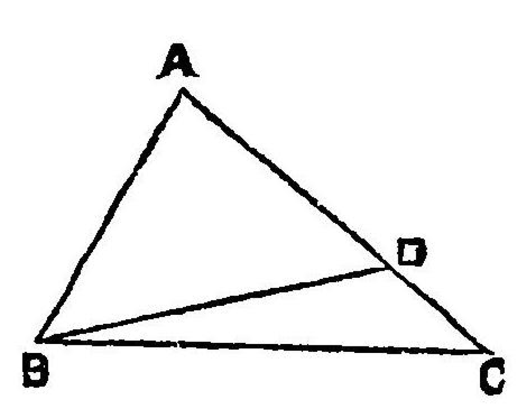
ヨリ $\dfrac{b-c}{a}=\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin A}$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$\therefore\quad a=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

證 II. 幾何學的證明ヲ次ニ示サン.



三角形ヲ ABC トシ, AC>AB トス. AC ノ邊ニ AD=AB ヲ取リ, BD ヲ結ビ付クレバ平面幾何

學ニ依リテ $\widehat{BDC}=90^\circ+\frac{1}{2}A$, $\widehat{CBD}=\frac{1}{2}(B-C)$ ナルコトハ容易ニ證明セラル.

依リテ $\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{\sin BDC}{\sin CBD}$

$$=\frac{\sin\left(90^\circ+\frac{1}{2}A\right)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)},$$

故ニ $$a=\frac{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$$

14. 三角形 ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$$

[44. 專. 入. 檢.]

證 正弦比例式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$

ヨリ $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$$

15. 三角形 ABC ニ於テ

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}$$

ナルコトヲ證明セヨ. [43. 專. 入. 檢.]

證 147 頁 24 題ニ同ジ.

16. 三角形 ABC ニ於テ $C=90^\circ$ トセバ

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}$$

ナルコトヲ證セヨ. [43. 各醫. 專.]

證 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$, 及ビ $A+B=90^\circ$

ナルユヱ $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$

$$=\sqrt{\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}}+\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}}$$

$$=\frac{2\sin A}{\sqrt{\sin^2 A-\sin^2 B}}$$

$$=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos^2 B-\sin^2 B}}=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}.$$

17. 三角形 ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ.

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

[44. 秋. 鑛. 專.]

但 r ハ內切圓ノ半徑, $2p=a+b+c$ トス.

證 面積ヲ S トスレバ

$$S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

故ニ
$$r=\frac{1}{p}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

18. 三角形 ABC ニ於テ

$$a\cos A+b\sin A=a\cos B+b\sin B=c$$

ナルトキ $\dfrac{a}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{b}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$

ナルコトヲ證セヨ. [43. 各高等.]

證 與ヘラレタル式ヨリ

$$a\cos A+b\sin A-(a\cos B+b\sin B)=0,$$

即チ $a(\cos A-\cos B)+b(\sin A-\sin B)=0,$

之ヨリ
$$-2a\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$+2b\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0,$$

即チ $\sin\dfrac{A-B}{2}\left(b\cos\dfrac{A+B}{2}-a\sin\dfrac{A+B}{2}\right)=0.$

$$\therefore\ b\cos\frac{A+B}{2}-a\sin\frac{A+B}{2}=0,$$

$$\therefore\ \frac{a}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\qquad\cdots\ (1)$$

次ニ $a\cos A+b\sin A+(a\cos B+b\sin B)=2c.$

之ヨリ

$$2a\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2b\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2c.$$

故ニ

$$\cos\frac{A-B}{2}\left(a\cos\frac{A+B}{2}+b\sin\frac{A+B}{2}\right)=c \ldots (2)$$

然ルニ (1) ヨリ $a=\dfrac{b\cos\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}$,

之ヲ (2) ニ代入シ

$$\cos\frac{A-B}{2}\left(\frac{b\cos^2\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}+b\sin\frac{A+B}{2}\right)=c,$$

即チ $\cos\dfrac{A-B}{2}\cdot\dfrac{b}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=c.$

$$\therefore\ \frac{b}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\dfrac{A-B}{2}}\cdots\ \cdots (3)$$

(1) ト (3) トニ依リテ

$$\frac{a}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\dfrac{A-B}{2}}.$$

19. 三角形 ABC ニ於テ A=2C ナルトキハ $a^2=bc+c^2$ ナルコトヲ證セヨ.

[43. 新. 醫. 專.]

證 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

ヨリ $\dfrac{a^2}{\sin^2 A}=\dfrac{bc+c^2}{\sin B\sin C+\sin^2 C}$,

然ルニ $\sin B\sin C+\sin^2 C$

$=\sin(A+C)\sin C+\sin^2 C$

$=\sin 3C\sin C+\sin^2 C$

$=(3\sin C-4\sin^3 C)\sin C+\sin^2 C$

$=3\sin^2 C-4\sin^4 C+\sin^2 C$

$=4\sin^2 C(1-\sin^2 C)$

$=4\sin^2 C\cos^2 C$

$=\sin^2 2C=\sin^2 A.$

$\therefore\ a^2=bc+c^2.$

20. 三角形 ABC ニ於テ $b\cos A=a\cos B$ ナルトキハ $a=b$ ナルコトヲ證セヨ.

[44. 小. 高. 商.]

證 △ABC ニ於テ $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$,

及ビ $2ca\cos B=c^2+a^2-b^2.$

邊々相減ジテ $2c(b\cos A-a\cos B)=2(b^2-a^2)$,

故ニ $b\cos A=a\cos B$ ナルトキハ $b^2-a^2=0$,

即チ $(b+a)(b-a)=0$, 然ルニ $b+a\neq 0$,

依リテ $b-a=0$, 即チ $a=b$.

21. 三角形 ABC ニ於テ $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$ ナルトキハ,此ノ三角形ハ直角三角形,或ハ二等邊三角形ナルコトヲ證セヨ. [44. 東. 高. 商.]