【解】 $1-\cos^2 x=\frac{3}{2}\cos x.$

分母ヲ去リテ轉項スレバ $2\cos^2 x+3\cos x-2=0,$

即チ $(2\cos x-1)(\cos x+2)=0.$ ∴ $\cos x=\frac{1}{2}$ 或ハ $-2.$

$\cos x=\frac{1}{2}$ ヨリ $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}.$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x=2p\pi\pm\frac{\pi}{3}.$

又 $|\cos x| \ngtr 1$ ナルヲ以テ $\cos x=-2$ ハ成立セズ.

(答) $2p\pi\pm\frac{\pi}{3}.$

405. 次式ニ適スベキ正ノ鋭角 A ヲ求ム:

$$\frac{\cot(90^\circ-A)\operatorname{cosec}^2(180^\circ-A)\cot^3 A}{\operatorname{cosec}^2 A\sin^2(270^\circ+A)}=2.$$

【解】 變形シテ $\frac{\tan A\operatorname{cosec}^2 A\cot^3 A}{\operatorname{cosec}^2 A\cos^2 A}=2,$ 即チ $\frac{1}{\sin^2 A}=2,$

∴ $\sin A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

∴ A ノ値ノ中 90° 以内ノモノハ 45° ナリ.

406. $2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$ ニ適スル 360° 以下ノ正角ヲ求メヨ.

【解】 $2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-3=0,$ 即チ $2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0,$

即チ $(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)=0.$ ∴ $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 或ハ 1.

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ ヨリ $\theta=60^\circ$ 或ハ $300^\circ.$

$\cos\theta=1$ ヨリ $\theta=0^\circ$ 或ハ $360^\circ.$

(答) 0°, 60°, 300°, 360°.

407. $\cos 2x=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$ ヲ解ケ.

【解】 $\cos 2x$ ノ代ハリニ $2\cos^2 x-1$ ヲ用ヒテ轉項スレバ

$$2\cos^2 x-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=0.$$

二次方程式ノ根ノ公式ニ由リ

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+4.2.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ 或ハ }-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヨリ $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}.$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x=2p\pi\pm\frac{\pi}{6}.$

$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヨリ $\cos x=\cos\frac{3}{4}\pi.$

∴ 基本ノ場合ニヨリ $x=2m\pi\pm\frac{3}{4}\pi.$

(答) $2p\pi\pm\frac{\pi}{6},\ 2m\pi\pm\frac{3}{4}\pi.$

408. $6\cot^2 x=1+4\cos^2 x$ ヲ解ケ.

【解】 $6\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=1+4\cos^2 x$..........(i).

$\sin^2 x=0$ トスレバ $\cos^2 x=1$ トナリ. (i) ハ $\infty=5$ トナル. 是レ背理ナリ. ∴ $\sin^2 x\neq 0.$ ∴ (i) ノ分母ヲ去ルコトヲ得, 即チ

$6\cos^2 x=(1+4\cos^2 x)\sin^2 x.$

$\sin^2 x$ ニ $1-\cos^2 x$ ヲ代用シテ轉項スレバ

$4\cos^4 x+3\cos^2 x-1=0,$ 即チ $(4\cos^2 x-1)(\cos^2 x+1)=0.$

∴ $\cos x=\pm\frac{1}{2}$ 或ハ $\pm\sqrt{-1}.$

$\cos x=\frac{1}{2}$ ヨリ $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}.$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x=2p\pi\pm\frac{\pi}{3}$............(ii).

$\cos x=-\frac{1}{2}$ ヨリ $\cos x=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$.

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x=2m\pi\pm\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=(2m\pm1)\pi\pm\frac{\pi}{3}$.........(iii).

(ii), (iii) テ取リ纏ムレバ $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

又 cos. ノ値ハ實數ニ限ルヲ以テ $\cos x=\pm\sqrt{-1}$ ハ成立セズ.

(答) $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

---

〔68〕 一角ノ正弦, 餘弦ヲ含ム三角方程式.

問題 224 ニ於テ行ヒシ方法ハ屢々三角方程式ノ解法ニ使用セラルヽコトアリ. 次ギニ此種ノ問題ヲ解セン.

問　　題

409. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$ ヲ解ケ.

【解】 兩邊ヲ未知項ノ係數ノ平方ノ和ノ平方根卽チ $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ ニテ除スレバ

$\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2}$, 卽チ $\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\frac{1}{2}$.

卽チ $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$.

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x-\frac{\pi}{3}=2p\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

∴ $x=2p\pi+\frac{2}{3}\pi$ 或ハ $2p\pi$............(答)

注意. 本題ハ次ギノ如ク解スルモ可ナリ:

$\cos x+\tan 60^\circ\sin x=1$, 卽チ $\cos x+\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin x=1$;

$\cos 60^\circ\neq0$ ナルヲ以テ分母ヲ去レバ $\cos x\cos 60^\circ+\sin x\sin 60^\circ=\cos 60^\circ$.

餘ハ上ノ解ノ如クスベシ.

410. $\sin 3x-\cos 3x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ.

【解】 $\cos 3x-\sin 3x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

兩邊ヲ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ニテ除スレバ

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x=-\frac{1}{2}$, 卽チ $\cos\frac{\pi}{4}\cos 3x-\sin\frac{\pi}{4}\sin 3x=-\frac{1}{2}$,

卽チ $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi$.

∴ 基本ノ場合ニ由リ $3x+\frac{\pi}{4}=2p\pi\pm\frac{2}{3}\pi$.

∴ $x=\frac{1}{3}\left(2p\pi+\frac{5}{12}\pi\right)$ 或ハ $\frac{1}{3}\left(2p\pi-\frac{11}{12}\pi\right)$.

注意. 本題ハ次ギノ如ク解スルモ可ナリ:

$\sin 3x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 卽チ $2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

兩邊ヲ $\sqrt{2}$ ニテ除スレバ $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$;

∴ 基本ノ場合ニ由リ $3x-\frac{\pi}{4}=p\pi+(-1)^p\frac{\pi}{6}$.

p ヲ偶數 $2m$ トスレバ

$3x-\frac{\pi}{4}=2m\pi+\frac{\pi}{6}$, ∴ $x=\frac{1}{3}\left(2m\pi+\frac{5}{12}\pi\right)$;

p ヲ奇數 $2n-1$ トスレバ

$3x-\frac{\pi}{4}=2n\pi-\pi-\frac{\pi}{6}$, ∴ $x=\frac{1}{3}\left(2n\pi-\frac{11}{12}\pi\right)$.

411. $sin\theta+cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ニ適スル 360° 以下ノ正角ヲ求メヨ.

【解】 兩邊ヲ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ニテ除スレバ

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}cos\theta=\dfrac{1}{2}$, 即チ $sin45°sin\theta+cos45°cos\theta=cos60°$,

即チ $cos(\theta-45°)=cos60°$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $\theta-45°=p.360°\pm60°$.

∴ $\theta=p.360°+105°$ 或ハ $p.360°-15°$.

∴ 360° 以下ノ正値ヲ求ムレバ 105°, 345° ヲ得.

412. 方程式 $\sqrt{3}\,cos\theta+sin\theta=\sqrt{2}$ ヲ滿足スル最小正角ヲ求メヨ.

【解】 兩邊ヲ $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ ニテ除スレバ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta+\frac{1}{2}sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

即チ $sin60°cos\theta+cos60°sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 即チ $sin(60°+\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

60° ヨリモ大ニシテ正弦ガ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナル最小角ハ 135°.

∴ $60°+\theta=135°$, ∴ $\theta=75°$.

413. 二等邊三角形ノ底角ノ正弦ト餘弦トノ和ガ $\sqrt{2}$ ニ等シキトキハ頂角ハ何度ナルカ.

【解】 底角ヲ x トスレバ $sinx+cosx=\sqrt{2}$.

兩邊ヲ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ニテ除スレバ

$cos45°sinx+sin45°cosx=1$, $sin(x+45°)=1$.

然ルニ $0°<x<90°$ ナルベキヲ以テ $45°<x+45°<135°$.

∴ $x+45°=90°$, $x=45°$.

∴ 頂角ハ $180°-45°\times2=90°$……………(答)

414. 方程式 $sin\,x+cos\,x=1{\cdot}2$ ニ適スル x ノ最小正角ヲ求メヨ. 但シ $log2=\cdot3010300$, $log3=\cdot4771213$, $Lsin58°3'=9{\cdot}9286571$, $D=787$.

【解】 方程式ノ兩邊ヲ $\sqrt{2}$ ニテ除スレバ

$$sin\,x\,cos45°+cos\,x\,sin45°=\frac{1{\cdot}2}{\sqrt{2}}.$$

即チ $sin(x+45°)=\dfrac{2^{\frac{3}{2}}\times3}{10}$.

∴ $Lsin(x+45°)=\dfrac{3}{2}log2+log3-1+10=9{\cdot}9286663$.

$$787:663-571=60:y,\quad y=7.$$

∴ $x+45°=58°3'7''$. ∴ $x=13°3'7''$…………(答)

415. $sin^2x+2sinx\,cosx-2cos^2x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$ ヲ解ケ.

【解】 $\dfrac{1-cos2x}{2}+sin2x-(1+cos2x)=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$.

分母ヲ去リテ轉項スレバ $2sin2x-3cos2x=\sqrt{13}$.

兩邊ヲ $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ ニテ除スレバ $\dfrac{2}{\sqrt{13}}sin\,x-\dfrac{3}{\sqrt{13}}cos2x=1$,

即チ $\dfrac{3}{\sqrt{13}}cos2x-\dfrac{2}{\sqrt{13}}sin2x=-1$.

今 $cos\phi=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ トスレバ $sin\phi=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ トナルヲ以テ最後ノ方程式ハ

$cos\phi\,cos2x-sin\phi\,sin2x=-1$, 即チ $cos(2x+\phi)=cos\pi$.

∴ 基本ノ場合ニ由リ $2x+\phi=2p\pi\pm\pi=(2p\pm1)\pi$.

然ルニ $2p\pm1$ ハ總ベテノ奇數ヲ表ハスヲ以テ之ヲ $2m+1$ ト置ケバ

$2x+\phi=(2m+1)\pi,$　　$\therefore\ x=m\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\phi}{2}$……………(答)

---

〔69〕 正弦, 餘弦ノ和, 差或ハ積ヲ含ム方程式.

未知角ノ $\sin.$ 或ハ $\cos.$ ノ和或ハ差ヲ含ム方程式ハ此和或ハ差ヲ積ニ變ジテ解セラルヽコト屢々コレアリ.

又反對ニ未知角ノ $\sin.$ 或ハ $\cos.$ ノ積ヲ含ム方程式ハ此積ヲ和或ハ差ニ變ジテ解セラルヽコト甚ダ多シ.

次ギニ此ノ如キ問題ヲ擧ゲン.

問　題

416. $\cos nx+\cos(n-2)x=\cos x$ ヲ解ケ.

【解】 $2\cos(n-1)x\cos x=\cos x;$

$\therefore$ $\cos x=0$ 或ハ $\cos(n-1)x=\frac{1}{2}.$

$\cos x=0$ ヨリ $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$　[問 392 ヲ見ヨ].

$\cos(n-1)x=\frac{1}{2}$ ヨリ $\cos(n-1)x=\cos\frac{\pi}{3}.$

$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ $(n-1)x=2p\pi\pm\frac{\pi}{3};$　$\therefore\ x=\frac{6p\pm1}{3(n-1)}\pi.$

(答) $n\pi+\frac{\pi}{2},\ \frac{6p\pm1}{3(n-1)}\pi.$

417. $\cos1'-\cos59°59'=\cos x°$ ナルトキ x ノ値如何.

【解】 $2\sin30°\sin29°59'=\cos x°,$

$2\times\frac{1}{2}\times\sin29°59'=\cos x°.$

$\therefore$ $\cos x°=\sin29°59'=\cos(90°-29°59')=\cos60°1'.$

$\therefore$ $x=n.360\pm60\frac{1}{60}.$

418. $\cos3\theta+\cos2\theta+\cos\theta=0$ ニ適スル $180°$ 以下ノ正角ヲ求メヨ.

【解】 $2\cos2\theta\cos\theta+\cos2\theta=0.$　$\therefore$ $\cos2\theta=0$ 或ハ $\cos\theta=-\frac{1}{2}.$

$\cos2\theta=0$ ヨリ $2\theta=90°,\ 270°;$　$\therefore\ \theta=45°,\ 135°.$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ヨリ $\theta=120°.$

(答) $45°,\ 120°,\ 135°.$

419. $\sin x+\sin2x+\sin3x=4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x$ ヲ解ケ.

【解】 $2\sin2x\cos x+2\sin x\cos x=4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x;$

$\therefore$ $\cos x=0$ 或ハ $\sin2x+\sin x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x.$

$\cos x=0$ ヨリ $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$　[問 392 ヲ見ヨ].

$\sin2x+\sin x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x$ ヨリ $2\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x;$

$\therefore$ $\cos\frac{x}{2}=0$ 或ハ $\sin\frac{3}{2}x=\cos\frac{3}{2}x.$

$\cos\frac{x}{2}=0$ ヨリ $\frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2},$　$\therefore$ $x=(2n+1)\pi.$　[問 392 ヲ見ヨ].

$sin\frac{3}{2}x=cos\frac{3}{2}x$ ヨリ $\frac{3}{2}x=m\pi+\frac{\pi}{4}$ [問 398 ヲ見ヨ].

$\therefore\ x=\frac{2}{3}\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.

(答) $n\pi+\frac{\pi}{2},\ (2n+1)\pi,\ \frac{2}{3}\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.

420. 方程式 $cos\theta cos3\theta-sin3\theta sin5\theta=0$ ヲ解ケ.

【解】 $\frac{1}{2}(cos4\theta+cos2\theta)-\frac{1}{2}(cos2\theta-cos8\theta)=0$,

$\frac{1}{2}(cos4\theta+cos8\theta)=0,\quad cos6\theta\,cos2\theta=0$;

$\therefore\ cos6\theta=0\cdots\cdots\cdots(i),\quad cos2\theta=0\cdots\cdots\cdots(ii)$.

(i) ヨリ $cos6\theta=cos\frac{\pi}{2}$; $\therefore\ 6\theta=2p\pi\pm\frac{\pi}{2}=(4p\pm1)\frac{\pi}{2}=(2m\pm1)\frac{\pi}{2}$;

$\therefore\ \theta=(2m+1)\frac{\pi}{12}\cdots\cdots\cdots(iii)$.

(ii) ヨリモ同様ニ $2\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $\therefore\ \theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots(iv)$.

(iii), (iv) ヲ取リ纏ムレバ $\theta=(2m+1)\frac{\pi}{12}\cdots\cdots\cdots$(答)

但シ p, m, n ハ皆 0 或ハ任意ノ整數ナリトス.

421. $sin\,x\,sin3x=\frac{1}{2}$ ヲ解ケ.

【解】 $\frac{1}{2}(cos2x-cos4x)=\frac{1}{2}$, 即チ $cos2x-(2cos^2 2x-1)=1$,

即チ $2cos^2 2x-cos2x=0$; $\therefore\ cos2x=0$ 或ハ $\frac{1}{2}$.

$cos2x=0$ ヨリ $2x=n\pi+\frac{\pi}{2}$; $\therefore\ x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$.

$cos2x=\frac{1}{2}$ ヨリ $cos2x=cos\frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ $2x=2p\pi\pm\frac{\pi}{3}$; $\therefore\ x=p\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

(答) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2},\quad p\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

422. 方程式 $sec\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+sec\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{2}$ ヲ解ケ.

【解】 $\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}+\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=2\sqrt{2}$,

$$\frac{cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=2\sqrt{2},$$

$$\frac{2cos\frac{\pi}{4}cos\,x}{cos^2\frac{\pi}{4}-sin^2x}=2\sqrt{2},\qquad \frac{cos\,x}{\frac{1}{2}-sin^2x}=2.$$

分母ヲ 0 トスレバ $\infty=2$ ナル背理ヲ得ル故分母ハ 0 ニアラズ.

$\therefore$ 分母ヲ去レバ $cos\,x=1-2sin^2x=cos2x$.

$\therefore\ 2x=2n\pi\pm x$. $\therefore\ x=2n\pi$ 或ハ $\frac{2}{3}n\pi$.

之ヲ取リ纏メテ $x=\frac{2}{3}n\pi$.

---

〔70〕 $sin.$ 及ビ $cos.$ ノ他ノ三角函數ヲ含ム方程式.

此ノ如キ方程式ヲ解クニハ通例之ヲ $sin.$ 及ビ $cos.$ ノミヲ含ムモノニ變ジ以テ前諸條ノ方法ヲ行フナリ. 但シ例外ノ場外モ稀ニハコレアリ.

次ギニ此ノ如キ問題ヲ解セン.

問　　題

423. $\cos x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ ヲ解ケ.

【解】 右邊$=\dfrac{2\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\sec^2 x}=2\dfrac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x=2\sin x\cos x.$

$\therefore$ 所題ノ方程ハ $\cos x=2\sin x\cos x$;　$\therefore$ $\cos x=0$ 或ハ $\sin x=\dfrac{1}{2}.$

$\cos x=0$ ヨリ $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$　[問 392 ヲ見ヨ].

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ ヨリ $\sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}$;

$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ　$x=p\pi+(-1)^p\dfrac{\pi}{6}.$

(答)　$n\pi+\dfrac{\pi}{2},\ p\pi+(-1)^p\dfrac{\pi}{6}.$

424. $\tan x+\cot x=2\sec x$ ヲ解ケ.

【解】 $\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{2}{\cos x}$,　即チ $\dfrac{1}{\cos x\sin x}=\dfrac{2}{\cos x}$;

$\therefore$ $\dfrac{1}{\cos x}=0$,　或ハ $\dfrac{1}{\sin x}=2.$

$\dfrac{1}{\cos x}=0$ ヨリ $\cos x=\infty$ ヲ得レドモ $\cos x$ ハ -1 ト $+1$ トノ間ニアルヲ以テ此方程式ハ成立セズ.

又 $\dfrac{1}{\sin x}=2$ ヨリ $\sin x=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}.$

$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ　$x=p\pi+(-1)^p\dfrac{\pi}{6}$…………(答)

425. $\tan(a+x)\tan(a-x)=\dfrac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$ ヲ解ケ.

【解】 左邊$=\dfrac{\sin(a+x)}{\cos(a+x)}\cdot\dfrac{\sin(a-x)}{\cos(a-x)}=\dfrac{\sin^2 a-\sin^2 x}{\cos^2 a-\sin^2 x}.$

$\therefore$ 所題ノ方程式ハ　$\dfrac{\sin^2 a-\sin^2 x}{\cos^2 a-\sin^2 x}=\dfrac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}.$

兩邊ヨリ 1 ヲ減ズレバ　$\dfrac{-\cos 2a}{\cos^2 a-\sin^2 x}=\dfrac{-4\cos 2a}{1+2\cos 2a}.$

$\therefore$ 一般ニ　$4(\cos^2 a-\sin^2 x)=1+2\cos 2a,$

即チ　$2(1+\cos 2a)-4\sin^2 x=1+2\cos 2a$;

$\therefore$ $\sin x=\pm\dfrac{1}{2}=\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right).$

$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ　$x=p\pi+(-1)^p\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)=p\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$…………(答)

426. $\sec^2\theta+3\operatorname{cosec}^2\theta=8$ ヲ解セヨ.

【解】 $\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{3}{\sin^2\theta}-8=0$,　即チ　$\dfrac{\sin^2\theta+3\cos^2\theta-8\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}=0$;

$\therefore$ $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=0,\ \dfrac{1}{\sin^2\theta}=0$ 或ハ $\sin^2\theta+3\cos^2\theta-8\cos^2\theta\sin^2\theta=0.$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=0,\ \dfrac{1}{\sin^2\theta}=0$ ヨリ $\cos^2\theta=\infty,\ \sin^2\theta=\infty$ ヲ得レドモ $\cos^2\theta,\ \sin^2\theta$ ハ何レモ 0 ト 1 トノ間ノ値ナルヲ以テ此兩方程式ハ不成立ナリ.

$\sin^2\theta+3\cos^2\theta-8\cos^2\theta\sin^2\theta=0$ ヨリ

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos^2\theta-8\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)=0,$

即チ　$8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+1=0$,　即チ　$(4\cos^2\theta-1)(2\cos^2\theta-1)=0$;

$\therefore$ $\cos\theta=\pm\dfrac{1}{2}$ 或ハ $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

$\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$ ヨリ $\cos\theta=\cos\frac{\pi}{3}$ 或ハ $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$;

∴ 基本ノ場合ニ由リ $\theta=2p\pi\pm\frac{\pi}{3}$

或ハ $2m\pi\pm\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=(2m\pm1)\pi\pm\frac{\pi}{3}$;

之ヲ取リ纏メテ $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

同様ニ $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヨリ $\theta=p\pi\pm\frac{\pi}{4}=(4p\pm1)\frac{\pi}{4}$;

然ルニ $4p\pm1$ ハ總ベテノ奇數ヲ表ハスヲ以テ之ヲ $2q+1$ ト置ケバ

$\theta=(2q+1)\frac{\pi}{4}$.

(答) $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $(2q+1)\frac{\pi}{4}$

427. $\tan\theta+\tan3\theta=2\tan2\theta$ ヲ解ケ.

【解】 $\tan\theta-\tan2\theta=\tan2\theta-\tan3\theta$.

即チ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}-\frac{\sin3\theta}{\cos3\theta}$, 即チ $\frac{\sin(-\theta)}{\cos\theta\cos2\theta}=\frac{\sin(-\theta)}{\cos2\theta\cos3\theta}$;

∴ $\sin(-\theta)=0$, $\frac{1}{\cos2\theta}=0$ 或ハ $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos3\theta}$.

$\sin(-\theta)=0$ ヨリ $\sin\theta=0=\sin0$;

∴ 基本ノ場合ニ由リ $\theta=p\pi+(-1)^p0=p\pi$.

$\frac{1}{\cos2\theta}=0$ ヨリ $\cos2\theta=\infty$; 然ルニ $\cos2\theta$ ハ -1 ト $+1$ トノ間ニ在ルヲ以テ此方程式ハ成立セズ.

又 $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos3\theta}$ ヨリ $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta(4\cos^2\theta-3)}$;

∴ $\frac{1}{\cos\theta}=0$ 或ハ $1=\frac{1}{4\cos^2\theta-3}$;

$\frac{1}{\cos\theta}=0$ ヨリ $\cos\theta=\infty$ ヲ得レドモ $\cos\theta$ ハ -1 ト $+1$ トノ間ニアルヲ

以テ此方程式[illegible]セズ.

又 $1=\frac{1}{4\cos^2\theta-3}$ ヨリ $4\cos^2\theta-3=1$;

∴ $\cos\theta=\pm1=\cos0$ 或ハ $\cos\pi$.

∴ 基本ノ場合ニ由リ $\theta=2p\pi$ 或ハ $2m\pi\pm\pi$.

之ヲ取リ纏メテ $\theta=n\pi$.

而シテ $\theta=p\pi$, $\theta=n\pi$ ヲ取リ纏ムレバ矢張リ $\theta=q\pi$……….(答)

428. $2\cot2x-\tan2x=3\cot3x$ ヲ解ケ.

【解】 $2(\cot2x-\cot3x)=\cot3x+\tan2x$,

$2\left(\frac{\cos2x}{\sin2x}-\frac{\cos3x}{\sin3x}\right)=\frac{\cos3x}{\sin3x}+\frac{\sin2x}{\cos2x}$,

$2\frac{\sin x}{\sin2x\sin3x}=\frac{\cos x}{\sin3x\cos2x}$, $\frac{1}{\cos x\sin3x}=\frac{\cos x}{\sin3x\cos2x}$.

∴ $\frac{1}{\sin3x}=0$ 或ハ $\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos2x}$.

$\frac{1}{\sin3x}=0$ ヨリ $\sin3x=\infty$ ヲ得レドモ $\sin3x$ ハ -1 ト $+1$ トノ間ニアルヲ以テ此方程式ハ成立セズ.

又 $\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos2x}$ ヨリ分母ヲ去レバ $2\cos^2x-1=\cos^2x$;

∴ $\cos x=\pm1$.

是レ此方程式ノ分母ヲ 0 トスル値ニアラザルヲ以テ此方程式ノ根ナリ.

$\cos x=\pm1=\cos0$ 或ハ $\cos\pi$. 之ヨリ前問ノ如クシテ $\theta=n\pi$ (答)

429. $\mathrm{cosec}\,3\theta+\mathrm{cosec}\,2\theta=\sin2\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta\,\mathrm{cosec}\,3\theta$ ヲ解ケ.

【解】 $\frac{1}{\sin3\theta}+\frac{1}{\sin2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\sin3\theta}$,

$\frac{1}{\sin\theta(3-4\sin^2\theta)}+\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta(3-4\sin^2\theta)}=0$.

$\frac{2\cos\theta+3-4\sin^2\theta-4\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta\{3-4(1-\cos^2\theta)\}}=0$, $\frac{2\cos\theta-1}{2\sin\theta\cos\theta(4\cos^2\theta-1)}=0$,

$$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta(2\cos\theta+1)}=0;$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sin\theta}=0,\quad \frac{1}{\cos\theta}=0,\quad \frac{1}{2\cos\theta+1}=0.$$

此三方程式ヨリ夫々 $\sin\theta=\infty$, $\cos\theta=\infty$, $\cos\theta=\infty$ ヲ得. 然レドモ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ハ何レモ -1 ト $+1$ トノ間ニアルヲ以テ此三方程式ハ成立セズ.

(答) 根ナシ.

430. $\tan 2\theta=8\cos^2\theta-\cot\theta$ ヲ解ケ.

【解】 $\tan 2\theta+\cot\theta=8\cos^2\theta$, $\quad \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=8\cos^2\theta$,

$$\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta\sin\theta}=8\cos^2\theta;\qquad \therefore\quad \cos\theta=0 \text{ 或ハ } \frac{1}{\cos 2\theta\sin\theta}=8\cos\theta.$$

$\cos\theta=0$ ヨリ $\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$. [問 392 ヲ見ヨ].

又 $\dfrac{1}{\cos 2\theta\sin\theta}=8\cos\theta$ ニ於テ分母ヲ 0 トスレバ方程式ハ $\infty=$(有限數) トナリテ背理ナルガ故ニ分母ハ 0 ナラズ.

∴ 分母ヲ去リ.

$8\cos 2\theta\sin\theta\cos\theta=1$, 卽チ $4\cos 2\theta\sin 2\theta=1$, 卽チ $2\sin 4\theta=1$;

$$\therefore\quad \sin 4\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}.$$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $4\theta=p\pi+(-1)^p\dfrac{\pi}{6}$;

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{4}\left\{p\pi+(-1)^p\frac{\pi}{6}\right\}.$$

(答) $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{1}{4}\left\{p\pi+(-1)^p\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

431. $\tan(45^\circ+x)=1+\sin 2x$ ヲ解ケ.

【解】 $\dfrac{\sin(45^\circ+x)}{\cos(45^\circ+x)}=1+\cos(90^\circ-2x)$.

卽チ $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

$$\therefore\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0. \text{ 或ハ } \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0$ 卽チ $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0=\cos\dfrac{\pi}{2}$ ヨリ問 392 ノ如クニシテ

$x-\dfrac{\pi}{4}=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 卽チ $x=n\pi+\dfrac{3}{4}\pi=m\pi-\dfrac{\pi}{4}$ ヲ得.

又 $\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ ニ於テ分母ヲ 0 トスレバ此方程式ハ $\infty=$(有限數) トナリテ背理ナルガ故ニ分母ハ 0 ニアラズ.

∴ 分母ヲ去レバ

$1=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$, 卽チ $1=\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos 2x$,

卽チ $\cos 2x=1=\cos 0$; $\qquad\therefore\quad 2x=2p\pi\pm 0,\quad x=p\pi.$

(答) $m\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $p\pi$.

432. $\cot 15^\circ\cos\theta+\sin\theta=1$ ヲ解ケ.

【解】 $\dfrac{\cos 15^\circ\cos\theta}{\sin 15^\circ}+\sin\theta=1$, $\quad \dfrac{\cos\frac{\pi}{12}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{12}\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{12}}=1$,

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\cos\frac{5}{12}\pi;$$

∴ 基本ノ場合ニ由リテ $\theta-\dfrac{\pi}{12}=2p\pi\pm\dfrac{5}{12}\pi$;

∴ $\theta=2p\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 或ハ $2p\pi-\dfrac{\pi}{3}$……………(答)

433. $\sec 4\theta-\sec 2\theta=2$ ヲ解ケ.

【解】 $\frac{1}{\cos 4\theta}-\frac{1}{\cos 2\theta}-2=0$, $\frac{\cos 2\theta-\cos 4\theta-2\cos 4\theta\cos 2\theta}{\cos 4\theta\cos 2\theta}=0$,

$\frac{\cos 2\theta-\cos 4\theta-\cos 6\theta-\cos 2\theta}{\cos 4\theta\cos 2\theta}=0$, $\frac{2\cos 5\theta\cos\theta}{\cos 4\theta\cos 2\theta}=0$;

$\therefore$ $\sec 4\theta\sec 2\theta\cos 5\theta\cos\theta=0$.

然ルニ $\sec 4\theta\neq 0$, $\sec 2\theta\neq 0$ ナルヲ以テ $\cos 5\theta=0$ 或ハ $\cos\theta=0$.

$\cos 5\theta=0$ ヨリ $\cos 5\theta=\cos\frac{\pi}{2}$, 之ヨリ問 392 ノ如クニシテ

$$5\theta=n\pi+\frac{\pi}{2},\qquad \therefore\ \theta=(2n+1)\frac{\pi}{10}$$

同様ニ $\cos\theta=0$ ヨリ $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}=(10n+5)\frac{\pi}{10}$.

以上ノ結果ヲ取リ纏ムレバ $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{10}$…… ……..(答)

434. $\tan x+\sec 2x=1$ ヲ解ケ.

【解】 $\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos 2x}-1=0$, $\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}=0$;

$\therefore$ $\sin x=0$ 或ハ $\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin x}{\cos 2x}=0$,

$\sin x=0$ ヨリ $\sin x=\sin 0$; $\therefore$ $x=p\pi+(-1)^p 0=p\pi$.

又 $\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin x}{\cos 2x}=0$ ヨリ $\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos x\cos 2x}=0$,

即チ $\sec x\sec 2x(\cos 2x+\sin 2x)=0$.

然ルニ $\sec x\neq 0$, $\sec 2x\neq 0$ ナルヲ以テ $\cos 2x+\sin 2x=0$,

即チ $\cos 2x=-\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$;

$\therefore$ $2x=2p\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$, $\therefore$ $x=(4p-1)\frac{\pi}{8}$.

(答) $p\pi$, $(4p-1)\frac{\pi}{8}$.

435. $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$ ヲ解ケ.

【解】 $1-\tan x+\sin 2x-\frac{\sin x}{\cos x}.2\sin x\cos x=1+\tan x$,

$$2\sin x\cos x-2\sin^2 x=2\frac{\sin x}{\cos x};$$

$\therefore$ $\sin x=0$…………(i), 或ハ $\cos x-\sin x=\frac{1}{\cos x}$…………(ii)

(i) ヨリ $\sin x=\sin 0$; $\therefore$ $x=p\pi+(-1)^p 0=p\pi$.

(ii) ニ於テ $\cos x=0$ トスレバ (ii) ハ(有限數)$=\infty$ トナリテ背理ナリ.

$\therefore$ $\cos x\neq 0$. $\therefore$ (ii) ノ分母ヲ去レバ

$\cos^2 x-\sin x\cos x=1$, 即チ $-\sin x\cos x=\sin^2 x$;

$\therefore$ $\sin x=0$ 或ハ $\cos x=-\sin x$.

$\sin x=0$ ヨリハ上ト同様ニ $x=p\pi$,

$\cos x=-\sin x$ ヨリハ前問ト同様ニ $x=n\pi-\frac{\pi}{4}$.

(答) $p\pi$, $n\pi-\frac{\pi}{4}$.

436. $\tan x+\tan 2x=\tan 3x$ ヲ解ケ.

【解】 $\tan x+\tan 2x=\tan(x+2x)=\frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}$;

$\therefore$ $\tan x+\tan 2x=0$……(i), 或ハ $1=\frac{1}{1-\tan x\tan 2x}$…………(ii).

(i) ヨリ $\tan 2x=-\tan x=\tan(-x)$,

$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ $2x=p\pi-x$; $\therefore$ $x=\frac{p}{3}\pi$.

(ii) ヨリ $1-\tan x\tan 2x=1$; $\therefore$ $\tan x\tan 2x=0$;

$\therefore$ $\tan x=0=\tan 0$, 或ハ $\tan 2x=0=\tan 0$;

$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ $x=p\pi$, 或ハ $2x=p\pi$ 即チ $x=\frac{p}{2}\pi$.

以上ノ結果ヲ取リ纏ムレバ $x=\frac{p}{3}\pi$ 或ハ $\frac{p}{2}\pi$…………(答)

437. $\cot\theta-\tan\theta=\cot\alpha-\tan\alpha$ ヲ解ケ.

【解】 $\frac{1}{tan\theta}-tan\theta=\frac{1}{tan\alpha}-tan\alpha$,　$\frac{1-tan^2\theta}{tan\theta}=\frac{1-tan^2\alpha}{tan\alpha}$,

$\frac{1-tan^2\theta}{2tan\theta}=\frac{1-tan^2\alpha}{2tan\alpha}$,　$cot2\theta=cot2\alpha$;

∴ 基本ノ場合ニ由リ　$2\theta=p\pi+2\alpha$;　∴ $\theta=\frac{p}{2}\pi+\alpha$............(答)

438. $tanx+tan(x-45^\circ)=2$ ヲ解ケ.

【解】 $tan\,x+\frac{tan\,x-1}{1+tan\,x}-2=0$,　$\frac{tan^2x-3}{1+tan\,x}=0$;

然ルニ $1+tan\,x=0$ トスレバ $tan\,x=-1$ トナリ, 方程式ハ $\infty=0$ トナル. 是レ背理ナリ. ∴ $1+tan\,x\neq0$. ∴ 分母ヲ去レバ

$tan^2x-3=0$, 即チ $tan\,x=\pm\sqrt{3}=tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$;

∴ 基本ノ場合ニ由リ　$x=p\pi\pm\frac{\pi}{3}$............(答)

439. $8cot\theta=sec^2\frac{\theta}{2}+cosec^2\frac{\theta}{2}$ ニ適スル 360° 以下ノ正角ヲ求メヨ.

【解】 $8\frac{cos\theta}{sin\theta}=\frac{1}{cos^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}sin^2\theta}$.

$\frac{2cos\theta}{sin\theta}=\frac{1}{sin^2\theta}$.

∴ $\frac{1}{sin\theta}=0$...............(i),　或ハ $2cos\theta=\frac{1}{sin\theta}$...............(ii).

(i) ヨリ $sin\theta=\infty$ ヲ得レドモ $sin\theta$ ハ ∞ トナルコトヲ得ザルガ故ニ (i) ハ成立セズ.

(ii) ニ於テ $sin\theta=0$ トスレバ (ii) ハ(有限數)$=\infty$ トナリテ背理ナリ.

∴ $sin\theta\neq0$.　∴ (ii) ノ分母ヲ去レバ　$sin2\theta=1$.

之ヨリ $2\theta=90^\circ,\ 450^\circ$;　∴ $\theta=45^\circ,\ 225^\circ$............(答)

440. $sec^3\theta-2tan^2\theta=2$ ニ適スル 360° 以下ノ正解ヲ求メヨ.

【解】 $sec^3\theta=2(1+tan^2\theta)=2sec^2\theta$.

∴ $sec\theta=0$...............(i),　或ハ $sec\theta=2$...............(ii).

$|sec\theta|\not<1$ ナルヲ以テ (i) ハ成立セズ.

(ii) ヨリハ　$\theta=60^\circ,\ 300^\circ$...............(答)

441. $cos\theta+tan\theta=sec\theta$ ニ適スル 360° 以下ノ正角ヲ求メヨ.

【解】 $tan\theta=\frac{1}{cos\theta}-cos\theta=\frac{1-cos^2\theta}{cos\theta}=\frac{sin^2\theta}{cos\theta}=tan\theta\,sin\theta$.

∴ $tan\theta=0$...............(i),　或ハ $sin\theta=1$............(ii).

(i) ヨリ　$\theta=0^\circ,\ 180^\circ,\ 360^\circ$.

(ii) ヨリ　$\theta=90^\circ$.

(答)　$0^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ,\ 360^\circ$.

---

〔71〕 聯立三角方程式.

聯立三角方程式ノ解法ハ聯立代數方程式ノ解法ト同樣ノ考察ニ據ルベシ. 次ギニ最簡單ナルモノヲ解セン.

問　　題

442. 聯立方程式 $x+y=\frac{\pi}{3}$.........(i),

$sinx+siny=1$.........(ii) ヲ解セヨ.

【解】 (i) ヨリ　$y=\frac{\pi}{3}-x$ ヲ得．　之ヲ (ii) ニ代用スレバ

$$\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1,\quad 即チ\quad 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

即チ
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1=\cos 0;$$

∴ 基本ノ場合ニ由リ　$x-\frac{\pi}{6}=2p\pi;$　∴　$x=2p\pi+\frac{\pi}{6}.$

之ヲ (i) ニ代用スレバ　$y=\frac{\pi}{3}-\left(2p\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-2p\pi+\frac{\pi}{6}.$

(答)　$x=2p\pi+\frac{\pi}{6},\quad y=-2p\pi+\frac{\pi}{6}.$

443. 聯立方程式 $x+y=150°,$

$$\tan x+\tan y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$ ヲ解ケ．

【解】 第二方程式ヨリ　$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=-\frac{2}{\sqrt{3}},$

$$\frac{\sin(x+y)}{\frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x\sim y)\}}=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{2\sin 150°}{\cos 150°+\cos(x\sim y)}=-\frac{2}{\sqrt{3}},\qquad \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos(x\sim y)}=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

∴　$\cos(x\sim y)=0=\cos 90°.$

∴　$x\sim y=n.360°\pm 90°=(4n\pm 1)90°=(2m+1)90°=m.180°+90°.$

之ト第一方程式トヨリ

$x=m.90°+120°,\quad y=-m.90°+30°;$

或ハ $x=-m.90°+30°,\quad y=m.90°+120°.$

444. 聯立方程式 $x+y=90°,\ \sin(3x-y)=\frac{1}{2}$ ニ適スル 180° ヨリモ小ナル總ベテノ角 x, y ヲ求ム．

【解】 第一方程式ヨリ $y=90°-x$..............(i).

之ヲ第二方程式ニ代用スレバ

$\sin(3x+x-90°)=\frac{1}{2}$　即チ　$\cos 4x=\cos 120°.$

∴　$4x=n.360°\pm 120°,\quad x=n.90°\pm 30°.$

然ルニ　$y=180°-\alpha$ ナル故 (α ハ正角),

$x=90°-(180°-\alpha)=-90°+\alpha.$

∴　x ハ $-90°$ ヨリモ大ニシテ 180° ヨリモ小ナル値トナル．

∴　n ニ $-1, 0, 1, 2$ ヲ代用シテ

$x=-60°,\ -30°,\ 30°,\ 60°,\ 120°,\ 150°.$

之ヲ (i) ニ代用スレバ y ノ相應値ヲ得，即チ

$y=150°,\ 120°,\ 60°,\ 30°,\ -30°,\ -60°.$

445. 聯立方程式 $\sin x=\sqrt{2}\sin y$.........(i),

$\tan x=\sqrt{3}\tan y$.........(ii) ヲ解ケ．

【解】 (ii) ヨリ　$\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}\frac{\sin y}{\cos y}$ ヲ得．　之ニ (i) ヲ代用スレバ

$$\frac{\sqrt{2}\sin y}{\cos x}=\sqrt{3}\frac{\sin y}{\cos y};$$

∴　$\sin y=0$..............(iii),　或ハ　$\frac{\sqrt{2}}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{\cos y}$..............(iv).

(iii) ヨリ $\sin y=\sin 0;$　∴　$y=p\pi+(-1)^p 0=p\pi.$

(iii) ヲ (i) ニ代用スレバ $\sin x=0;$　∴　$x=m\pi.$

又 (iv) ニ (i) ヲ代用スレバ　$\frac{\sqrt{2}}{\pm\sqrt{1-2\sin^2 y}}=\frac{\sqrt{3}}{\cos y}$...........(v).

(v) ノ何レノ分母ヲ 0 トスルモ (v) ハ成立セザルヲ以テ (v) ノ分母ヲ去レバ

$$\sqrt{2}\cos y=\pm\sqrt{3}\sqrt{1-2\sin^2 y}.$$

平方ニスレバ　$2\cos^2 y=3(1-2\sin^2 y),$

即チ　$2(1-\sin^2 y)=3(1-2\sin^2 y),$　∴　$\sin y=\pm\frac{1}{2}=\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right);$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $y=p\pi\pm(-1)^p\frac{\pi}{6}$.

又此 $\sin y$ ノ値ヲ (i) ニ代用スレバ　$\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\therefore\quad x=m\pi\pm(-1)^m\frac{\pi}{2}.$$

(答)　$m\pi,\ p\pi;\ m\pi\pm(-1)^m\frac{\pi}{2},\ p\pi\pm(-1)^p\frac{\pi}{6}$.

[但シ複號ハ同ジ順序ニ取ルベシ]

446. $\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ガ同時ニ成立スルトキハ x ノ値如何.

【解】 $\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$;　∴ $x=p\pi+(-1)^p\frac{\pi}{6}$,

即チ　$x=2n\pi+\frac{\pi}{6}$ 或ハ $(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}$.

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$;　∴ $x=2m\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

∴ 双方ニ共通ナル x ノ値ハ $2m\pi+\frac{\pi}{6}$............(答)

447. 聯立方程式

$$\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{............(i)},$$

$$\sin(x-y)=\frac{1}{2}\text{..............(ii)}$$ ヲ解ケ.

但シ x, y ハ共ニ正ノ鋭角ナリトス.

【解】 $0<x+y<180°$ ナルヲ以テ (i) ヨリ $x+y=\frac{\pi}{4}$............(iii).

又 $0\leqq|x-y|<90°$ ナルヲ以テ (ii) ヨリ $x-y=\frac{\pi}{6}$............(iv).

(iii), (iv) ノ和及ビ差ノ半ヲ取レバ　$x=\frac{5}{24}\pi$,　$y=\frac{\pi}{24}$...........(答)

448. △ABC ニ於テ

$$\sin(180°-A)=\sqrt{2}\cos(B-90°),$$
$$\sqrt{3}\cos A=-\sqrt{2}\cos(180°+B)$$

ナルトキ A, B, C ノ値如何.

【解】 與ヘラレタル二ツノ關係式ヲ變形スレバ

$$\sin A=\sqrt{2}\sin B\text{...........(i)}.$$
$$\sqrt{3}\cos A=\sqrt{2}\cos B\text{...........(ii)}.$$

(i) ノ平方ト (ii) ヲ $\sqrt{3}$ ニテ除シタルモノノ平方トノ和ヲ作レバ

$$\sin^2A+\cos^2A=2\sin^2B+\frac{2}{3}\cos^2B$$

即チ　$1=2\sin^2B+\frac{2}{3}(1-\sin^2B)$　∴ $\sin B=\pm\frac{1}{2}$.

然ルニ $0°<B<180°$ ナル故 $\sin B=\frac{1}{2}$ ノミヲ取リ B=30° 或ハ 150° ヲ得.

今 B=150° トスレバ $\cos B$ ハ負トナリ從ツテ (ii) ヨリ $\cos A$ モ負トナル. 然ルトキハ A>90°, 從ツテ A+B>180°.・.是レ背理ナリ.

∴ B=30° ノミヲ取ルベシ.

而シテ之ヲ (ii) ニ代用シテ　$\cos A=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

之ヨリ A=45°　[∵ $0°<A<180°$].

∴ C=180°−(30°+45°)=105°.

(答) A=45°, B=30°, C=105°.

449*.

聯立方程式　$\sin\theta+\cos\phi=1$...........(i),

$\cos\theta-\sin\phi=1$...........(ii) ヲ解ケ.

【解】 (ii) ヨリ $\cos\theta=1+\sin\phi$ ヲ得. 之ヲ (i) ニ代用スレバ

$$\pm\sqrt{1-(1+\sin\phi)^2}+\cos\phi=1.$$

$\cos\phi$ ヲ右邊ニ移シテ兩邊ヲ平方ニシ且ツ之ヲ簡單ニスレバ

$$\cos\phi-\sin\phi=1,$$

兩邊ヲ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ニテ除スレバ

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 卽チ $\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\phi-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\phi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

卽チ $$\cos\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4};$$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $\phi+\dfrac{\pi}{4}=2p\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$,

∴ $\phi=2p\pi$ 或ハ $2p\pi-\dfrac{\pi}{2}$.

$\phi=2p\pi$ ヲ用フレバ (i) 及ビ (ii) ヨリ夫々 $\sin\theta=0$, $\cos\theta=1$ ヲ得.

之ヲ解ケバ $\sin\theta=0=\sin 0$ ヨリ $\theta=n\pi$ ヲ得, $\cos\theta=1=\cos 0$ ヨリ $\theta=2n\pi$ ヲ得.

∴ (i), (ii) ニ適スベキ θ ハ $n\pi$ ヨリモ區域ノ狹キ $2n\pi$ ヲ採ラザルベカラズ.

又 $\phi=2p\pi-\dfrac{\pi}{2}$ ヲ用フレバ (i) 及ビ (ii) ヨリ夫々 $\sin\theta=1$, $\cos\theta=0$ ヲ得.

之ヲ解ケバ $\sin\theta=1=\sin\dfrac{\pi}{2}$ ヨリ $\theta=p\pi+(-1)^p\dfrac{\pi}{2}=2m\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ヲ得,

$\cos\theta=0=\cos\dfrac{\pi}{2}$ ヨリ $\theta=2p\pi\pm\dfrac{\pi}{2}=(4p\pm1)\dfrac{\pi}{2}=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ヲ得.

∴ (i), (ii) ニ適スベキ θ ハ $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ヨリモ區域ノ狹キ $2m\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ヲ採ラザルベカラズ.

(答) $\theta=2n\pi$, $\phi=2p\pi$; $\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\phi=2p\pi-\dfrac{\pi}{2}$.

450. $x-y\cos\gamma-z\cos\beta=0$...... (i),

$y-z\cos\alpha-x\cos\gamma=0$......(ii),

$z-x\cos\beta-y\cos\alpha=0$......(iii) ナル三ツノ方程式ガ 0 ニアラザル一組ノ根ヲ有スルトキハ s, $s-\alpha$, $s-\beta$,

$s-\gamma$ ナル四ツノ角ノ中少クトモ一ツハ $\dfrac{\pi}{2}$ ノ奇數倍ナルコトヲ證セヨ. 但シ $2s=\alpha+\beta+\gamma$ トス.

【解】 (iii)$\times\cos\beta+$(i) $x\sin^2\beta-y(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)=0$.........(iv);

(iii)$\times\cos\alpha+$(ii) $y\sin^2\alpha-x(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)=0$.........(v).

(iv)$\times\sin^2\alpha+$(v)$\times(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)$ トスレバ

$$x\{\sin^2\alpha\sin^2\beta-(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)^2\}=0,$$

卽チ $$x\{\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma\}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma\}=0,$$

卽チ $$4x\cos s\cos(s-\alpha)\cos(s-\beta)\cos(s-\gamma)=0.$$

然ルニ $x\neq0$ ナルヲ以テ少クトモ $\cos s$ 等ノ中ノ一因數ハ 0 ナリ.

今 $\cos s=0$ トスレバ $\cos s=\cos\dfrac{\pi}{2}$;

∴ 基本ノ場合ニ由リ $s=2p\pi\pm\dfrac{\pi}{2}=(4p\pm1)\dfrac{\pi}{2}=(2m+1)\dfrac{\pi}{2}$.

$\cos(s-\alpha)$ 等ヲ用フルモ同樣ナリ.

∴ 題言ノ如キヲ知ル.

---

〔72〕 三次ノ代數方程式.

三次ノ代數方程式ハ三角函數ヲ用ヒテ簡單ニ解シ得ラルヽコトアリ. 次ギノ問題ノ如キ是レナリ.

問　　題

451*. $x^3-6x+4=0$ ヲ解ケ.

【解】 $x=ny$ トスレバ方程式ハ次ギノ如クナル:

$n^3y^3-6ny+4=0$ 卽チ ($n\neq0$ トシテ) $y^3-\dfrac{6}{n^2}y+\dfrac{4}{n^3}=0$.........(i).

然ルニ $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ ヨリ

$$\cos^3\alpha-\frac{3}{4}\cos\alpha-\frac{1}{4}\cos 3\alpha=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}.$$

(i) ト (ii) トヲ同一ナルモノト見做ストキハ

$$y=\cos\alpha,\quad \frac{6}{n^2}=\frac{3}{4} \text{ 卽チ } n=\pm 2\sqrt{2}.$$

今 $n=2\sqrt{2}$ トスレバ $\dfrac{4}{n^3}=-\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$ ヨリ

$$\cos 3\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{3}{4}\pi.$$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $3\alpha=2p\pi\pm\dfrac{3}{4}\pi$ 卽チ $\alpha=\dfrac{2}{3}p\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$.

$p=3m$ トスレバ

$$\cos\alpha=\cos\left(2m\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$p=3m\pm 1$ トスレバ

$$\cos\alpha=\cos\left(2m\pi\pm\frac{2}{3}\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{2}{3}\pi\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-1\mp\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

∴ $x=ny=2\sqrt{2}\cos\alpha=2$ 或ハ $-1\pm\sqrt{3}$ ……………(答)

452*. $x^3-6x^2+9x-3=0$ ヲ解ケ.

【解】 $x=y+k$ トスレバ方程式ハ次ギノ如クナル：

$$(y+k)^3-6(y+k)^2+9(y+k)-3=0.$$

卽チ $y^3+(3k-6)y^2+(3k^2-12k+9)y+k^3-6k^2+9k-3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}.$

y^2 ノ係數 $3k-6$ ヲ 0 ニ等シト置ケバ $k=2$ トナル.

∴ $x=y+2$ トスレバ原方程式ハ (i) ニ於ケル k ヲ 2 トシタルモノ

卽チ $$y^3-3y-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

トナル.

然ルニ (ii) ハ前問ニ於ケルモノト同形ナルヲ以テ前問ノ如ク解スレバ

$$y=2\cos\frac{\pi}{9},\ -2\cos\frac{2}{9}\pi \text{ 或ハ } -2\cos\frac{4}{9}\pi$$

ヲ得.

∴ $x=y+2=2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{9}\right),\ 2\left(1-\cos\dfrac{2}{9}\pi\right)$ 或ハ $2\left(1-\cos\dfrac{4}{9}\pi\right)$.

∴ $x=4\cos^2\dfrac{\pi}{18},\ 4\sin^2\dfrac{\pi}{9}$ 或ハ $4\sin^2\dfrac{2}{9}\pi$…………(答)

---

〔73〕 三角不等式.

三角方程式ノ解法ヲ應用スレバ三角不等式ヲ解スルコトヲ得ベシ. 次ギニ最簡單ナル例ヲ擧ゲン.

問　題

453. $\sin^2x>\cos^2x$ ヲ解ケ.

【解】 $\sin^2x>1-\sin^2x$, 卽チ $2\sin^2x>1$, 卽チ $\sin^2x>\dfrac{1}{2}$.

∴ $\sin x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或ハ $\sin x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\sin x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヨリ $2p\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2p\pi+\pi-\dfrac{\pi}{4}$ ヲ得；

$\sin x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヨリ $2m\pi+\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2m\pi+2\pi-\dfrac{\pi}{4}$ ヲ得.

此等ヲ取リ纒ムレバ $n\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<n\pi+\dfrac{3}{4}\pi$…………(答)

454. $\sin x>\cos x$ ヲ解ケ.

【解】 $\sin x-\cos x>0$.

兩邊ヲ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ニテ除スレバ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x>0,\quad \text{卽チ}\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0.$$

$$\therefore\quad 2n\pi<x-\frac{\pi}{4}<(2n+1)\pi,$$

$$\therefore\quad 2n\pi+\frac{\pi}{4}<x<(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}\text{..............(答)}$$

455. $\dfrac{\cos^2x}{4\cos^2x-3}>\dfrac{\sin^2x}{1-4\sin^2x}$ ヲ解ケ.

【解】 $\dfrac{1-\sin^2x}{4(1-\sin^2x)-3}+\dfrac{\sin^2x}{4\sin^2x-1}>0,$ 卽チ $\dfrac{2\sin^2x-1}{4\sin^2x-1}>0,$

卽チ
$$\frac{\sin^2x-\frac{1}{2}}{\sin^2x-\frac{1}{4}}>0.$$

$\therefore\quad \sin^2x-\dfrac{1}{2}>0,\ \sin^2x-\dfrac{1}{4}>0$ ナルカ或ハ

$\sin^2x-\dfrac{1}{2}<0,\qquad \sin^2x-\dfrac{1}{4}<0$ ナリ.

卽チ $\sin^2x>\dfrac{1}{2}$ ナルカ或ハ $\sin^2x<\dfrac{1}{4}$ ナリ.

$\sin^2x>\dfrac{1}{2}$ ヨリ $\qquad 2p\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2p\pi+\dfrac{3\pi}{4}$

及ビ $\qquad 2p\pi+\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2p\pi+\pi+\dfrac{3\pi}{4}.$

之ヲ取リ纏ムレバ $\qquad p\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<p\pi+\dfrac{3\pi}{4}.$

$\sin^2x<\dfrac{1}{4}$ ヨリ $\qquad 2p\pi-\dfrac{\pi}{6}<x<2p\pi+\dfrac{\pi}{6}$

及ビ $\qquad 2p\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6}<x<2p\pi+\pi+\dfrac{\pi}{6}.$

之ヲ取リ纏ムレバ $p\pi-\dfrac{\pi}{6}<x<p\pi+\dfrac{\pi}{6}.$

(答) $p\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<p\pi+\dfrac{3\pi}{4},\qquad p\pi-\dfrac{\pi}{6}<x<p\pi+\dfrac{\pi}{6}.$

消去法

逐 ヒ 出 ダ シ

〔74〕 角ヲ逐ヒ出ダスコト.

與ヘラレタル一組ノ方程式ヨリ其中ニ含マレタル一ツ或ハ多クノ角ヲ取リ去リタル一ツノ新方程式ヲ求ムルコトヲ其一組ノ方程式ヨリ其角ヲ逐ヒ出ダス(或ハ消去スル)ト云フ.

〔75〕 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ヲ用フル逐ヒ出ダシ.

逐ヒ出ダシニハ一般ノ法則ナク,唯既知ノ諸公式ヲ適宜ニ活用スルニ過ギズト雖ドモ,最屢々用ヒラルヽ二三ノ方法ヲ擧グレバ次ギノ如シ.

先ヅ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ナル公式ニ據ルモノヲ說明セン.

問 題

456. $x=a\cos^3\phi$.........(i), $\quad y=b\sin^3\phi$.........(ii)

ヨリ ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヨリ $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\phi;\qquad$ (ii) ヨリ $\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\phi.$

此二式ヲ加ヘ合ハセバ　$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$……………(答)

457.　$cos\theta+sin\theta=a$……(i),　$cos\theta-sin\theta=b$……(ii)

ヨリ θ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】（第一）(i), (ii) ノ和及ビ差ノ半ヲ取レバ

$$cos\theta=\frac{a+b}{2},\quad sin\theta=\frac{a-b}{2}.$$

此二式ノ平方ノ和ヲ取レバ

$$1=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\quad 即チ\quad a^2+b^2=2\text{………………(答)}$$

【解】（第二）(i), (ii) ノ平方ノ和ヲ取レバ

$$(cos^2\theta+sin^2\theta+2cos\theta\ sin\theta)+(cos^2\theta+sin^2\theta-2cos\theta\ sin\theta)=a^2+b^2;$$

即チ　$2=a^2+b^2$……………(答)

458.　$1-cos\theta=a\ sin\theta$……(i),　$1+cos\theta=b\ sin\theta$……(ii)

ヨリ θ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】（第一）(i), (ii) ノ和ヲ取レバ

$$2=(a+b)sin\theta,\quad 即チ\quad sin\theta=\frac{2}{a+b}\text{……………(iii).}$$

(iii) ヲ (i) ニ代用スレバ

$$cos\theta=1-a\frac{2}{a+b}=\frac{b-a}{a+b}\text{……………(iv).}$$

(iii), (iv) ノ平方ノ和ヲ取レバ

$$1=\frac{4+(b-a)^2}{(a+b)^2};\quad 之ヲ簡単ニシテ\quad ab=1\text{…………(答)}$$

【解】（第二）(i), (ii) ヲ相乗スレバ

$$1-cos^2\theta=ab\ sin^2\theta,\quad 即チ\quad sin^2\theta=ab\ sin^2\theta.$$

兩邊ヲ $sin^2\theta$ ニテ除スレバ　$1=ab$……………(答)

459.　$sin\phi+cos\phi=m$………(i),　$sin2\phi=n$………(ii)

ヨリ ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (ii) ハ $2sin\phi\ cos\phi=n$ ナルヲ以テ, 之ト (i) トヲ結ビ付ケ, $sin\phi$ 及ビ $cos\phi$ ノ値ヲ求メ, 其平方ノ和ヲ 1 ニ等シト置ケバ可ナレドモ此場合ニ於テハ次ギノ如クスル方ガ簡單ナリ:

(i) ヲ平方ニスレバ　$sin^2\phi+cos^2\phi+2sin\phi\ cos\phi=m^2,$

即チ　$1+sin2\phi=m^2,$

之ニ (ii) ヲ代用スレバ　$1+n=m^2$…………(答)

460.　$x=sec\phi-cos\phi$……(i),　$y=cosec\phi-sin\phi$……(ii)

ヨリ ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヨリ $x=\frac{1}{cos\phi}-cos\phi$,　即チ　$cos^2\phi+x\ cos\phi-1=0;$

之ヲ解キテ　$cos\phi=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+4}}{2}$…………(iii).

(ii) ヨリモ同様ニ　$sin\phi=\frac{-y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$…………(iv).

(iii), (iv) ノ平方ノ和ヲ取レバ

$$1=\frac{x^2+2\mp x\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{y^2+2\mp y\sqrt{y^2+4}}{2},$$

即チ　$-2-x^2-y^2=\mp x\sqrt{x^2+4}\mp y\sqrt{y^2+4};$

平方ニシテ簡單ニスレバ　$x^2y^2+2=\pm xy\sqrt{(x^2+4)(y^2+4)};$

更ニ平方ニシテ簡單ニスレバ　$x^2y^2(x^2+y^2+3)=1$…………(答)

461.　$x=a\ cos(\theta-\alpha)$……(i),　$y=b\ cos(\theta-\beta)$……(ii)

ヨリ θ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヨリ　$a\ cos\theta\ cos\alpha+a\ sin\theta\ sin\alpha-x=0$…………(iii);

(ii) ヨリ　$b\ cos\theta\ cos\beta+b\ sin\theta\ sin\beta-y=0$…………(iv).

(iii), (iv) ヲ二未知數 $cos\theta$, $sin\theta$ ヲ含ム聯立方程式ト見做シテ解スルトキハ

$$cos\theta=\frac{bx\ sin\beta-ay\ sin\alpha}{ab\ cos\alpha\ sin\beta-ab\ sin\alpha\ cos\beta}=\frac{bx\ sin\beta-ay\ sin\alpha}{ab\ sin(\beta-\alpha)},$$

$$\sin\theta=\frac{ay\cos\alpha-bx\cos\beta}{ab\sin(\beta-\alpha)}.$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ト置クトキハ

$$1=\frac{(ay\cos\alpha-bx\cos\beta)^2+(bx\sin\beta-ay\sin\alpha)^2}{\{ab\sin(\beta-\alpha)\}^2},$$

即チ $a^2b^2\sin^2(\beta-\alpha)=b^2x^2+a^2y^2-2abxy\cos(\beta-\alpha)$............(答)

462. $\sin(\theta+\alpha)=k\sin2\theta$.........(i),

$\sin(\theta+\beta)=k\sin2\theta$.........(ii) ヨリ θ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヨリ $\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha=2k\sin\theta\cos\theta$,

即チ $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}-2k=0$............(iii);

同様ニ (ii) ヨリ $\dfrac{\cos\beta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\beta}{\sin\theta}-2k=0$............(iv).

(iii), (iv) ヲ $\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\dfrac{1}{\sin\theta}$ ナル二未知數ヲ含ム聯立方程式ト見做シテ解クトキハ

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{2k(\sin\beta-\sin\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}=2k\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{2k(\cos\alpha-\cos\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}=2k\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ト置クトキハ $1=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{4k^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$;

$$\therefore\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm k\sin(\alpha+\beta)\text{............(答)}$$

463. $\sin\theta+\sin2\theta=a$......(i), $\cos\theta+\cos2\theta=b$......(ii) ヨリ θ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i), (ii) ノ平方ノ和ヲ取レバ

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^22\theta+\cos^22\theta)+2(\sin\theta\sin2\theta+\cos\theta\cos2\theta)=a^2+b^2$,

即チ $2\cos\theta=a^2+b^2-2$;

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{a^2+b^2-2}{2}\text{..............(iii).}$$

(ii) ヨリ $\cos\theta+2\cos^2\theta-1=b$. 之ニ (iii) ヲ代用スレバ

$$\frac{a^2+b^2-2}{2}+\frac{(a^2+b^2-2)^2}{2}-1=b;$$

之ヲ簡單ニスレバ $(a^2+b^2)^2-3(a^2+b^2)-2b=0$..............(答)

464. $x=x'\cos\phi+y'\sin\phi\cos\theta$.........(i),

$y=x'\sin\phi-y'\cos\phi\cos\theta$.........(ii),

$z=y'\sin\theta$.........(iii) ヨリ θ, ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i), (ii) ノ平方ノ和ヲ取レバ $x^2+y^2=x'^2+y'^2\cos^2\theta$.

之ニ (iii) ノ平方ヲ加フレバ $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2$..............(答)

465. $\sin A+\sin B=a$, $\cos A+\cos B=b$, $\cos(A-B)=c$ ヲ與ヘテ A, B ヲ消去セヨ.

【解】 始メノ二ツノ等式ノ平方ノ和ヲ作レバ

$\sin^2A+\cos^2A+\sin^2B+\cos^2B+2(\cos A\cos B+\sin A\sin B)=a^2+b^2$,

即チ $2+2\cos(A-B)=a^2+b^2$.

之ニ第三ノ關係ヲ代用スレバ

$2+2c=a^2+b^2$................(答)

466. $\dfrac{ax}{\cos\theta}-\dfrac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2=\dfrac{ax}{\cos\phi}-\dfrac{by}{\sin\phi}$.........(i),

$\theta-\phi=\dfrac{\pi}{2}$.........(ii) ヨリ θ, ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (ii) ヨリ $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\phi$.

之ヲ (i) ニ代用スレバ $\dfrac{ax}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\phi\right)}-\dfrac{by}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\phi\right)}=a^2-b^2,$

卽チ $\dfrac{by}{\cos\phi}+\dfrac{ax}{\sin\phi}+(a^2-b^2)=0$............(iii);

又 (i) ヨリ $\dfrac{ax}{\cos\phi}-\dfrac{by}{\sin\phi}-(a^2-b^2)=0$............(iv).

(iii), (iv) ヲ $\dfrac{1}{\cos\phi}$, $\dfrac{1}{\sin\phi}$ ナル二未知數ヲ含ム聯立方程式トシテ解クトキハ

$$\frac{1}{\cos\phi}=\frac{(a^2-b^2)(by-ax)}{-(b^2y^2+a^2x^2)},\qquad \frac{1}{\sin\phi}=\frac{(a^2-b^2)(ax+by)}{-(b^2y^2+a^2x^2)}.$$

$\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$ ト置クトキハ $1=\left(\dfrac{a^2x^2+b^2y^2}{a^2-b^2}\right)^2\cdot\dfrac{2(b^2y^2+a^2x^2)}{(b^2y^2-a^2x^2)^2},$

卽チ $\{(a^2-b^2)(a^2x^2-b^2y^2)\}^2=2(a^2x^2+b^2y^2)^3$..............(答)

---

〔76〕 他ノ公式ヲ用フル逐ヒ出ダシ.

前條ニ於ケル公式ニアラザル諸公式ヲ用フルモ前條ト同樣ニ逐ヒ出ダシヲ爲シ得ベシ. 次ギノ問題ノ如キ是レナリ.

問　題

467. $\tan\theta+\sin\theta=a$.........(i), $\tan\theta-\sin\theta=b$.........(ii)

ヨリ θ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i), (ii) ノ和及ビ差ノ半ヲ取レバ

$$\tan\theta=\frac{a+b}{2},\qquad \sin\theta=\frac{a-b}{2}.$$

$\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$ ト置クトキハ $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}{1-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}.$

卽チ $16ab=(a^2-b^2)^2$..............(答)

注意. 本題ト同樣ニシテ次ギノ問題ヲ解クコトヲ得:

$\tan\theta+\cos\theta=a,\ \tan\theta-\cos\theta=b$ ヨリ θ ヲ消去セ.

(答) $1+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\left(\dfrac{2}{a-b}\right)^2.$

---

〔77〕 比較ニ依ル逐ヒ出ダシ.

或ル角ヲ逐ヒ出ダサントスルニ當リ其角ノ同ジ三角函數ノ値ヲ比較スルノ便利ナルコト屢々コレアリ. 次ギノ問題ノ如キ是レナリ.

問　題

468. $a\tan^2x+b\tan x+c=0$.........(i),

$a'\tan^2x+b'\tan x+c'=0$.........(ii)

ヨリ x ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i), (ii) ヲ二未知數 $\tan^2x$, $\tan x$ ヲ含ム聯立方程式トシテ解クトキハ

$$\tan^2x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\qquad \tan x=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

$\tan^2x=\tan^2x$ ト置クトキハ

$$\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\left(\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^2,$$

卽チ $(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(ca'-c'a)^2$...........(答)

469. $\tan(\alpha+\phi)=m\ldots\ldots(\mathrm{i}),\qquad \tan(\alpha-\phi)=n\ldots\ldots(\mathrm{ii})$

ヨリ ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヨリ $\dfrac{\tan\alpha+\tan\phi}{1-\tan\alpha\tan\phi}=m;\qquad \therefore\ \tan\phi=\dfrac{m-\tan\alpha}{1+m\tan\alpha}.$

(ii) ヨリ $\dfrac{\tan\alpha-\tan\phi}{1+\tan\alpha\tan\phi}=n;\qquad \therefore\ \tan\phi=\dfrac{\tan\alpha-n}{1+n\tan\alpha}.$

$\tan\phi=\tan\phi$ ト置クトキハ $\dfrac{m-\tan\alpha}{1+m\tan\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-n}{1+n\tan\alpha};$

分母ヲ去リテ變化スレバ $2(1-mn)\tan\alpha=(m+n)(1-\tan^2\alpha),$

卽チ $\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{m+n}{1-mn},\qquad$ 卽チ $\tan2\alpha=\dfrac{m+n}{1-mn}\ldots\ldots\ldots\ldots$(答)

注意. $\alpha+\phi$ ト $\alpha-\phi$ トノ和ガ 2α ナルコトヲ注意スレバ上ノ問題ハ下ノ如ク解スルコトヲ得:

$$\frac{\tan(\alpha+\phi)+\tan(\alpha+\phi)}{1-\tan(\alpha+\phi)\tan(\alpha-\phi)}=\tan\{(\alpha+\phi)+(\alpha-\phi)\}=\tan2\alpha.$$

之ニ (i), (ii) ヲ代用スレバ $\dfrac{m+n}{1-mn}=\tan2\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots$(答)

---

〔78〕 代用ニ依ル逐ヒ出ダシ.

與ヘラレタル方程式ノ或ルモノヲ變形シテ, 之ニ他ノ與ヘラレタル方程式ヲ代用シ, 以テ逐ヒ出ダシヲ爲スコトノ便利ナル場合屢々コレアリ. 次ギニ其一例ヲ擧グ.

問　　題

470. $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\phi}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{i}),$

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\phi=\cos\gamma\cos\theta\ldots\ldots\ldots(\mathrm{ii})$$

ヨリ $\theta,\ \phi$ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヲ平方ニスレバ

$$\sin^2\alpha=2\sin^2\frac{\theta}{2}.2\sin^2\frac{\phi}{2}=(1-\cos\theta)(1-\cos\phi)\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{iii}).$$

(ii) ヨリ $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\ \cos\phi=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$

此等ヲ (iii) ニ代用スレバ $\sin^2\alpha=\left(1-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)\left(1-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right);$

分母ヲ去リテ簡單ニスレバ

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\cos\beta+\cos\gamma-\cos\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots(答)$$

---

〔79〕* 補足ニ依ル逐ヒ出ダシ.

與ヘラレタル方程式ニ或ル三角函數ヲ補ヒテ變形ヲ行ヒ, 以テ逐ヒ出ダシヲナスコトアリ. 次例ノ如シ.

問　　題

471.* $\dfrac{\cos^3\theta}{\cos(\alpha-3\theta)}=\dfrac{\sin^3\theta}{\sin(\alpha-3\theta)}=m$ ヨリ θ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 $\dfrac{\sin\theta\cos^3\theta}{\sin\theta\cos(\alpha-3\theta)}=\dfrac{\cos\theta\sin^3\theta}{\cos\theta\sin(\alpha-3\theta)}=m;$

之ニ加比ノ理ヲ用フレバ

$\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin(\alpha-2\theta)}=m,\qquad$ 卽チ $\dfrac{\sin2\theta}{2\sin(\alpha-2\theta)}=m;$

$\therefore\ \dfrac{1}{2m}=\sin\alpha\cot2\theta-\cos\alpha;\quad \therefore\ \cot2\theta=\left(\dfrac{1}{2m}+\cos\alpha\right)\mathrm{cosec}\,\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{i}).$

又 $\dfrac{\cos^4\theta}{\cos\theta\cos(\alpha-3\theta)}=\dfrac{\sin^4\theta}{\sin\theta\sin(\alpha-3\theta)}=m$;

之ニ減比ノ理ヲ用フレバ $\dfrac{\cos^4\theta-\sin^4\theta}{\cos(\alpha-2\theta)}=\dfrac{\cos 2\theta}{\cos(\alpha-2\theta)}=m$;

$\therefore\ \dfrac{1}{m}=\cos\alpha+\sin\alpha\tan 2\theta$;　$\therefore\ \tan 2\theta=\left(\dfrac{1}{m}-\cos\alpha\right)\operatorname{cosec}\alpha$............(ii)

$\tan 2\theta\cot 2\theta=1$ ト置ケバ (i), (ii) ヨリ

$$\left(\frac{1}{2m}+\cos\alpha\right)\left(\frac{1}{m}-\cos\alpha\right)=\sin^2\alpha;$$

之ヲ簡單ニスレバ　$2m^2=1+m\cos\alpha$............(答)

---

〔80〕* 根ト係數トノ關係ヲ用フル逐ヒ出ダシ.

與ヘラレタル方程式ニ根ト係數トノ關係ヲ適用シ，以テ逐ヒ出ダシヲ爲スコトアリ．次ギニ此種ノ問題ヲ擧ゲン.

問　　題

472*.　$a\cos\theta+b\sin\theta=c$...............(i),

$a\cos\phi+b\sin\phi=c$...............(ii),

$\tan\theta\tan\phi=m$...................(iii)

ヨリ θ,ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヨリ　$a\cos\theta=c-b\sin\theta$.

之ヲ平方ニスレバ　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$　ナルヲ以テ

$$a^2(1-\sin^2\theta)=c^2+b^2\sin^2\theta-2bc\sin\theta,$$

卽チ　$(a^2+b^2)\sin^2\theta-2bc\sin\theta+c^2-a^2=0$..............(iv).

(ii) ヨリモ之ト同樣ニスレバ (iv) ト同形ノ方程式ヲ得.

$\therefore$ (iv) ヨリ得ベキ $\sin\theta$ ノ二値ハ一般ニ之ヲ $\sin\theta,\ \sin\phi$ ノ値ト見做スコトヲ得.　$\therefore$ (iv) ヨリ根ト係數トノ關係ニ由リ

$$\sin\theta\sin\phi=\frac{c^2-a^2}{a^2+b^2}\text{...............(v).}$$

又 (i) ヨリ $\cos\theta$ ヲ求ムベキ方程式ヲ作レバ上ト同樣ノ考案ニ由リ

$$\cos\theta\cos\phi=\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}\text{...............(vi).}$$

然ルニ (iii) ヨリ $\dfrac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi}=m.$

之ニ (v), (vi) ヲ代用スレバ $\dfrac{c^2-a^2}{c^2-b^2}=m$..............(答)

473.*

$x\cos\theta+y\sin\theta=1$......(i),　$x\cos\phi+y\sin\phi=1$.........(ii),

$a\cos\theta\cos\phi+b\sin\theta\sin\phi+c(\cos\theta+\cos\phi)+d(\sin\theta+\sin\phi)=0$

(iii)

ヨリ θ,ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヨリ　$y\sin\theta=1-x\cos\theta$　ヲ得，之ヲ平方ニスレバ

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ ナルヲ以テ　$y^2(1-\cos^2\theta)=1+x^2\cos^2\theta-2x\cos\theta$,

卽チ　$(x^2+y^2)\cos^2\theta-2x\cos\theta+1-y^2=0$.................(iv).

(ii) ハ (i) ト同形ナルヲ以テ前問ト同樣ニ考察スレバ (iv) ヨリ

$$\cos\theta\cos\phi=\frac{1-y^2}{x^2+y^2}\text{.........(v),}\qquad \cos\theta+\cos\phi=\frac{2x}{x^2+y^2}\text{............(vi).}$$

又 (i) ヨリ $\sin\theta$ ヲ求ムベキ方程式ヲ作リ上ト同樣ニ考察スレバ

$$\sin\theta\sin\phi=\frac{1-x^2}{x^2+y^2}\text{.........(vii),}\qquad \sin\theta+\sin\phi=\frac{2y}{x^2+y^2}\text{.........(viii).}$$

(v) 乃至 (viii) ノ關係ヲ (iii) ニ代用スレバ

$$\frac{a(1-y^2)}{x^2+y^2}+\frac{b(1-x^2)}{x^2+y^2}+\frac{2cx}{x^2+y^2}+\frac{2dy}{x^2+y^2}=0.$$

卽チ　$a+b+2cx+2dy=ay^2+bx^2$..............(答)

474.* $x\cos\theta+y\sin\theta=2a$…………(i),

$x\cos\phi+y\sin\phi=2a$………(ii),

$2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}=1$…………(iii)

ヨリ θ, ϕ ヲ逐ヒ出ダセ.

【解】 (i) ヨリ前問ノ如クスレバ

$(x^2+y^2)\cos^2\theta-4ax\cos\theta+4a^2-y^2=0$…………(iv).

前問ノ如ク考察スレバ

$\cos\theta+\cos\phi=\frac{4ax}{x^2+y^2}$……(v), $\cos\theta\cos\phi=\frac{4a^2-y^2}{x^2+y^2}$…………(vi).

然ルニ (iii) ヲ平方ニスレバ

$2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot2\cos^2\frac{\phi}{2}=1$, 卽チ $(1+\cos\theta)(1+\cos\phi)=1$,

卽チ $\cos\theta+\cos\phi+\cos\theta\cos\phi=0$. 之ニ (v), (vi) ヲ代用スレバ

$\frac{4ax}{x^2+y^2}+\frac{4a^2-y^2}{x^2+y^2}=0$, 卽チ $y^2=4a(x+a)$…………(答)

逆三角函數

〔81〕 逆三角函數ニ關スル注意.

逆三角函數及ビ其主値ノ意義如何ハ既ニ第 13 條ニ於テ之ヲ說明セリ. 故ニ爰ニハ之ヲ再說セズ, 唯逆三角函數ノ演算ニ關スル二三ノ注意スベキ事項ヲ述ベン.

I. $\sin(\sin^{-1}A)=A$ ナリ.

【證】 $\sin^{-1}A$ ハ A ナル値ヲ sin. トスル所ノ總ベテノ角ヲ表ハスガ故ニ此角ノ sin. ガ A ナルコトハ明カナリ.

∴ 所題ノ關係式ヲ得.

注意. 此關係式ニ於ケル sin., $\sin^{-1}$. ノ代ハリニ他ノ任意ノ同名ノ三角函數及ビ其逆函數ヲ用フルモ可ナルコトハ明カナリ.

II. $\sin^{-1}(\sin A)=A$ ナリ.

【證】 角 A ノ sin. ト同ジ sin. ヲ有スル多クノ角ノ中一ツハ A ナルコト明カナリ. ∴ 所題ノ關係式ヲ得.

注意. II ニ於ケル相當號 = ハ其兩邊ノ全ク相等ナルコトヲ表ハサズシテ左邊ノ一値ト右邊トノ相等ノミヲ表ハス. 逆三角函數ノ關係式ニハ屢々此ノ如キコトアルヲ注意スベシ.

又 $\sin^{-1}$., sin. ノ代ハリニ他ノ任意ノ同名ノ逆三角函數及ビ三角函數ヲ用フルモ可ナルコトハ I ト同樣ナリ.

III. 三ツノ逆三角函數ヲ含ム等式ニ於テ二ツガ主値ヲ表ハストモ第三ハ强チ主値ヲ表ハサズ.

【證】 例ヘバ $\tan^{-1}1+\tan^{-1}\sqrt{3}=\tan^{-1}\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ニ於テ始メノ二項ガ主値ヲ表ハストスレバ左邊ハ $45°+60°=105°$ トナル.

然ルニ右邊ノ主値ハ $-75°$ ナリ.

∴ 與ヘラレタル等式ハ各項ヲ主値トスルトキニ成立セザルコトヲ知ル.

---

〔82〕 逆三角函數ノ關係ヲ作ルコト.

逆三角函數ノ定義及ビ既ニ修得シタル諸公式ヲ適宜ニ活用スレバ三角函數ヲ含ム關係式ヲ逆三角函數ノモノニ變ズルヲ得ベシ. 次ギニ此ノ如キ問題ヲ解セン.

問　　題

475. $tan(A-B)=\dfrac{tanA-tanB}{1+tanAtanB}$ ヲ逆三角函數ニテ記セヨ.

【解】 $A-B=tan^{-1}\left(\dfrac{tanA-tanB}{1+tanAtanB}\right)$..............(i).

$tanA=a,\ tanB=b$ トスレバ　$A=tan^{-1}a,\ B=tan^{-1}b.$

此等ヲ (i) ニ代用スレバ　$tan^{-1}a-tan^{-1}b=tan^{-1}\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$............(答)

476. $sin3A=3sinA-4sin^3A$ ヲ逆三角函數ニテ記セヨ.

【解】 $3A=sin^{-1}(3sinA-4sin^3A)$..............(i).

$sinA=a$ トスレバ　$A=sin^{-1}a.$

之ヲ (i) ニ代用スレバ　$3sin^{-1}a=sin^{-1}(3a-4a^3)$..............(答)

477. $sin(A+B)=sinAcosB+cosAsinB$ ヲ逆三角函數ニテ記セヨ.

【解】 $A+B=sin^{-1}(sinAcosB+cosAsinB)$..............(i).

$sinA=a,\ sinB=b$ トスレバ　$A=sin^{-1}a,\ B=sin^{-1}b,$

$cosA=\pm\sqrt{1-a^2},\quad cosB=\pm\sqrt{1-b^2},$

此等ヲ (i) ニ代用スレバ

$sin^{-1}a+sin^{-1}b=sin^{-1}(\pm a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2})$............(答)

---

〔83〕 比較ニ依リテ證セラルル逆三角函數關係式.

逆三角函數ヲ含ム等式ヲ證スルニハ相等號ノ兩邊ノ同名ノ三角函數ヲ比較スルニ在リ. 次ギニ此種ノ問題ヲ解セン.

問　　題

478. $tan^{-1}\dfrac{1}{2}+tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ ヲ證セヨ. (此等式ハ「オイレル」Euler ノ公式ト稱スルモノナリ. 「オイレル」ハ瑞西ノ數學者ニシテ西暦 1707 年生レ同 1783 年死セリ.)

【解】 $tan\left(tan^{-1}\dfrac{1}{2}+tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{tan\left(tan^{-1}\frac{1}{2}\right)+tan\left(tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1-tan\left(tan^{-1}\frac{1}{2}\right)tan\left(tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$　[第 81 條ノ 1 ニ由ル]

$=1;$

而シテ $tan\dfrac{\pi}{4}=1.$

∴ 所題ノ如シ.

479. $cot^{-1}\dfrac{3}{4}+cot^{-1}\dfrac{1}{7}$ ノ一値ハ $\dfrac{3}{4}\pi$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $tan\left(cot^{-1}\dfrac{3}{4}+cot^{-1}\dfrac{1}{7}\right)=tan\left(tan^{-1}\dfrac{4}{3}+tan^{-1}7\right)$

$=\dfrac{tan\left(tan^{-1}\frac{4}{3}\right)+tan(tan^{-1}7)}{1-tan\left(tan^{-1}\frac{4}{3}\right)tan(tan^{-1}7)}=\dfrac{\frac{4}{3}+7}{1-\frac{4}{3}\cdot 7}$　[第 81 條, I.]

$$=-1=\tan\frac{3}{4}\pi.$$

$$\therefore\quad \cot^{-1}\frac{3}{4}+\cot^{-1}\frac{1}{7}=\frac{3}{4}\pi$$

480.* $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}-\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$ ヲ證セヨ.

【解】 所題ノ等式ヲ證スルニハ之ヲ轉項シタル

$$4\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{1}{239}+\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ $\tan\left(4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{2\tan\left(2\tan^{-1}\dfrac{1}{5}\right)}{1-\tan^2\left(2\tan^{-1}\dfrac{1}{5}\right)}$

$$=\frac{2\dfrac{2\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)}{1-\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)}}{1-\left\{\dfrac{2\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)}{1-\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)}\right\}^2}=\frac{\dfrac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{25}}}{1-\left(\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right)^2}=\frac{120}{119};$$

又 $\tan\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{239}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{239}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{239}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{1}{239}+1}{1-\frac{1}{239}}=\dfrac{120}{119}.$

∴ (i) ハ眞ナリ, 從ツテ所題ノ式モ眞ナリ.

481. $\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\sin^{-1}\dfrac{4}{5}=\dfrac{\pi}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right)$

$$=\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}+\frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=1;$$

而シテ $\sin\dfrac{\pi}{2}=1.$

∴ 所題ノ如シ.

482.* $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=\dfrac{\pi}{4}$ ヲ證セヨ.

【解】 $\tan\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3\right)$

$$=\tan\left\{\tan^{-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right\}\quad\left[\because\ \tan a=\pm\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}\right]$$

$=\tan\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right)=1$ 「問 478 ニ由ル].

而シテ $\tan\dfrac{\pi}{4}=1.$

∴ 所題ノ如シ.

483.* $\tan^{-1}a=\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊 $=\tan^{-1}a-\tan^{-1}b+\tan^{-1}b-\tan^{-1}c+\tan^{-1}c=\tan^{-1}a.$

484.* $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}+\sin^{-1}\dfrac{5}{13}+\sin^{-1}\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 所題ノ等式ヲ證スルニハ之ヲ轉項シタル

$$\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{16}{65}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ $tan\left(sin^{-1}\frac{4}{5}+sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$

$$=tan\left\{tan^{-1}\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}+tan^{-1}\frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}}\right\}\quad\left[\because\ tan\,a=\pm\frac{sin\,a}{\sqrt{1-sin^2a}}\right]$$

$$=tan\left(tan^{-1}\frac{4}{3}+tan^{-1}\frac{5}{12}\right)=\frac{tan\left(tan^{-1}\frac{4}{3}\right)+tan\left(tan^{-1}\frac{5}{12}\right)}{1-tan\left(tan^{-1}\frac{4}{3}\right)tan\left(tan^{-1}\frac{5}{12}\right)}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}}=\frac{63}{16};$$

又 $tan\left(\frac{\pi}{2}-sin^{-1}\frac{16}{65}\right)=cot\left(sin^{-1}\frac{16}{65}\right)$

$$=cot\left\{cot^{-1}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2}}{\frac{16}{65}}\right\}\qquad\left[\because\ cot\alpha=\pm\frac{\sqrt{1-sin^2\alpha}}{sin\alpha}\right]$$

$$=cot\left(cot^{-1}\frac{63}{16}\right)=\frac{63}{16}.$$

∴ (i) 從ツテ所題ノ等式ノ眞ナルコトヲ知ル.

485.* $sin^{-1}\dfrac{2ab}{a^2+b^2}+sin^{-1}\dfrac{2a'b'}{a'^2+b'^2}+sin^{-1}\dfrac{2a''b''}{a''^2+b''^2}+\ldots\ldots$

$=sin^{-1}\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ ヲ證セヨ. 但シ m, n ハ a, b, a', b', a'', $b'',\ldots\ldots$ ニ就キテ有理ナル整式ナリトス.

【解】 $sin^{-1}\alpha+sin^{-1}\beta=sin^{-1}(\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2})$ ナルコト問 477 ニテ明カナルヲ以テ

$$sin^{-1}\frac{2ab}{a^2+b^2}+sin^{-1}\frac{2a'b'}{a'^2+b'^2}$$

$$=sin^{-1}\left\{\frac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{1-\left(\frac{2a'b'}{a'^2+b'^2}\right)^2}+\frac{2a'b'}{a'^2+b'^2}\sqrt{1-\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2}\right\}$$

$$=sin^{-1}\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{a'^2-b'^2}{a'^2+b'^2}+\frac{2a'b'}{a'^2+b'^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$=sin^{-1}\frac{2(aa'-bb')(a'b+ab')}{(aa'-bb')^2+(a'b+ab')^2}.$$

∴ 左邊ニ於ケル初メノ二角ノ和ハ矢張リ此等ノ角ノ各ト同形ノ sin. ヲ有スル角ナリ.

之ト同様ニ論ズレバ此等ノ角ノ和ニ第三角ヲ加ヘタルモノハ矢張リ同形ノ sin. ヲ有スル角ナルコトヲ知ル.

次第ニ此ノ如クスレバ左邊ハ遂ニ同形ノ sin. ヲ有スル角卽チ右邊トナルコトヲ知ル.

---

〔84〕* 逆三角函數方程式.

逆三角函數ヲ含ム方程式ヲ解スルニハ前條ノ如ク兩邊ノ同名ノ三角函數ヲ比較シ, 以テ得タル代數方程式ヲ解スレバ可ナリ. 次ギニ此種ノ問題ヲ解カン.

問　題

486*. 方程式 $tan^{-1}(x-1)+tan^{-1}x+tan^{-1}(x+1)$ $=tan^{-1}3x$ ヲ解ケ.

【解】 轉項スレバ $tan^{-1}(x-1)+tan^{-1}(x+1)=tan^{-1}3x-tan^{-1}x$;

兩邊ノ tan. ノ値ヲ比較スレバ

$$\frac{tan\{tan^{-1}(x-1)\}+tan\{tan^{-1}(x+1)\}}{1-tan\{tan^{-1}(x-1)\}tan\{tan^{-1}(x+1)\}}=\frac{tan(tan^{-1}3x)-tan(tan^{-1}x)}{1+tan(tan^{-1}3x)tan(tan^{-1}x)},$$

$$\frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)}=\frac{3x-x}{1+3x.x},\qquad 卽チ\ \frac{2x}{2-x^2}=\frac{2x}{1+3x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(i);$$

$\therefore\ 2x=0$……….(ii), 或ハ $\dfrac{1}{2-x^2}=\dfrac{1}{1+3x^2}$……………(iii).

(ii), (iii) ヨリ

$x=0$ 或ハ $\pm\dfrac{1}{2}$……………(答)

487.* $\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\dfrac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$ ノ一根ハ $\dfrac{a+b}{1-ab}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\sin 2\alpha$ ナルヲ以テ $\tan\alpha=a$ トスレバ

$\dfrac{2a}{1+a^2}=\sin 2\alpha$, 卽チ $2\alpha=2\tan^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2}$;

同樣ニ $\sin^{-1}\dfrac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}b$.

$\therefore$ 所題ノ方程式ハ $2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}x$.

卽チ $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}x$.

兩邊ノ tan. ノ値ヲ比較スレバ $\tan(\tan^{-1}a+\tan^{-1}b)=\tan(\tan^{-1}x)$.

卽チ $\dfrac{\tan(\tan^{-1}a)+\tan(\tan^{-1}b)}{1-\tan(\tan^{-1}a)\tan(\tan^{-1}b)}=\tan(\tan^{-1}x)$, 卽チ $\dfrac{a+b}{1-ab}=x$.

$\therefore$ 題言ノ如シ.

488*. $\sin 2\cos^{-1}\cot 2\tan^{-1}x=0$ ヲ解ケ.

【解】 $\sin 2\cos^{-1}\cot\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}=0$, $\sin 2\cos^{-1}\cot\cot^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x}=0$,

$\sin 2\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x}=0$, $\sin\sin^{-1}\left\{\pm2\dfrac{1-x^2}{2x}\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{2x}\right)^2}\right\}=0$,

$\pm2\dfrac{1-x^2}{2x}\cdot\dfrac{\sqrt{6x^2-1-x^4}}{2x}=0$;

$\therefore\ \dfrac{1-x^2}{2x}=0$…………(i), 或ハ $\dfrac{\sqrt{6x^2-1-x^4}}{2x}=0$…………(ii).

(i) ヨリ分母ヲ去リテ解シ $x=\pm1$ ヲ得. 而シテ此値ハ (i) ノ分母ヲ 0 トナサズ. $\therefore$ 是レ (i) ノ根ナリ.

(ii) ヨリ分母ヲ去リテ解シ $x^2=3\pm\sqrt{8}$ 卽チ $x=\pm(\sqrt{2}\pm1)$ ヲ得. 而シテ此値ハ (ii) ノ分母ヲ 0 トナサズ. $\therefore$ 是レ (ii) ノ根ナリ.

(答) ±1, $\pm(\sqrt{2}\pm1)$.

---

〔85〕* 逆三角函數不定方程式.

逆三角函數ヲ含ム不定方程式ノ正整數ノ根ヲ求ムルニハ, 先ヅ前條ノ如ク代數方程式ヲ作リ然ル後之ニ代數學ノ方法ヲ用フベシ. 次ギノ問題ノ如キハ是レナリ.

問　題

489*. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}y=\tan^{-1}3$ ノ正整數根ヲ求メヨ.

【解】 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{y}=\tan^{-1}3$;

兩邊ノ tan. ノ値ヲ比較スレバ $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{1-\dfrac{x}{y}}=3$;

之ヲ解ケバ $x=\dfrac{3y-1}{y+3}=3-\dfrac{10}{y+3}$;

$y=2$ トスレバ $x=1$, $y=7$ トスレバ $x=2$.

此等ノ値ハ皆原方程式ニ適スルヲ以テ所求ノモノナリ.

490*. c ヲ正整數トシテ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}c$ ノ正整數根ヲ求メヨ.

【解】 兩邊ノ tan. ノ値ヲ比較スレバ

$\dfrac{x+y}{1-xy}=c$, 卽チ $x=\dfrac{c-y}{1+cy}$.

然ルニ c, y ハ何レモ正整數ナルヲ以テ $c-y<1+cy$.

$\therefore$ x ハ眞分數トナル, 換言スレバ所題ノ方程式ハ正整數ノ根ヲ有セズ.

491*. c ヲ正整數トスレバ

方程式 $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}c$ ノ正整數根ノ數ハ $1+c^2$ ノ正ナル約數ノ數ニ等シキコトヲ證セヨ.

【解】 所題ノ方程式ヲ變形スレバ $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}+\tan^{-1}\dfrac{1}{y}=\tan^{-1}\dfrac{1}{c}$;

兩邊ノ $\tan.$ ノ値ヲ比較スレバ $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{1-\dfrac{1}{xy}}=\dfrac{1}{c}$;

之ヲ解ケバ $x=\dfrac{cy+1}{y-c}=c+\dfrac{1+c^2}{y-c}$.

然ルニ $x=\dfrac{cy+1}{y-c}$ ニ於テ c, x, y ハ何レモ正整數ナルヲ以テ $y-c$ ハ亦正數ナリ. $\therefore$ $\dfrac{1+c^2}{y-c}$ ハ正整數ナリ.

今 $1+c^2$ ノ正ナル約數ヲ $\alpha, \beta, \gamma,$ ....トスレバ此等ヲ $y-c$ トスルヲ得, 從ツテ $y=c+\alpha,\ y=c+\beta,\ y=c+\gamma,$ ....

$\therefore$ y ノ値, 從ツテ x ノ値ノ數ハ $1+c^2$ ノ正ナル約數ノ數ニ等シキコトヲ知ル.

[illegible] ashikawa nobakayaro.

[illegible]

Mitachiyama

附　　録

大正元年度

諸官立學校入學試驗問題

及ビ

答　　解

專門學校入學者檢定

1. 次式ヲ簡單ニセヨ.

$$tan(45^\circ+\theta)+tan(45^\circ-\theta).$$

【解】 原式$=\dfrac{tan45^\circ+tan\theta}{1-tan45^\circ tan\theta}+\dfrac{tan45^\circ-tan\theta}{1+tan45^\circ tan\theta}=\dfrac{1+tan\theta}{1-tan\theta}+\dfrac{1-tan\theta}{1+tan\theta}$

$$=\frac{2(1+tan^2\theta)}{1-tan^2\theta}=\frac{2sec^2\theta}{1-\dfrac{sin^2\theta}{cos^2\theta}}=\frac{2sec^2\theta cos^2\theta}{cos^2\theta-sin^2\theta}=\frac{2}{cos2\theta}$$

$=2sec2\theta$…………(答)

2. 次ギノ方程式ヲ解ケ：

$$3sin^3x+3sinx\,cos^2x+2cos^2x=0.$$

【解】 $3sin^3x+3sinx(1-sin^2x)+2(1-sin^2x)=0,$

卽チ $2sin^2x-3sinx-2=0,$ 卽チ $(2sinx+1)(sinx-2)=0$

$\therefore\ sinx=-\dfrac{1}{2}$ 或ハ 2.

$sinx=-\dfrac{1}{2}$ ヨリ $x=n\pi+(-1)^n\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=n\pi-(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$.

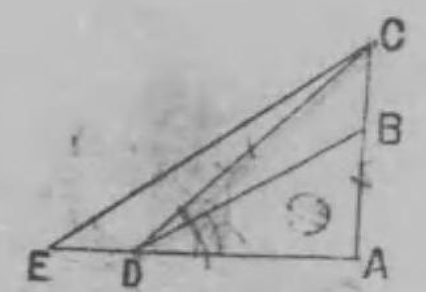
$sinx=2$ ハ $sinx$ ノ絕對値ガ 1 ヨリモ大ナル故背理ナリ.

∴ 之ヲ棄ツ.

(答) $n\pi-(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$.

③ 塔上ニ直立セル旗竿アリ. 平地上ノ一點ヨリ其旗竿ノ上端及ビ下端ノ仰角ヲ測リ夫々 α 及ビ β ヲ得. 夫レヨリ a 尺ダケ退キテ再ビ上端ノ仰角ヲ測リ α' ヲ得タリ. 旗竿ノ長サヲ求ム.

【解】 AB ヲ塔, BC ヲ旗竿トシ D, E ヲ前後ノ測點トスレバ



$A\hat{D}C=\alpha$, $A\hat{D}B=\beta$, $ED=a$ 尺, $A\hat{E}C=\alpha'$.

△CDE ニ於テ正弦比例ニ由リ

$$DC=\frac{a\,sin\alpha'}{sin(\alpha-\alpha')}.$$

又 △BCD ニ於テ正弦比例ニ由リ

$$BC=\frac{DC\,sin(\alpha-\beta)}{sin(90^\circ+\beta)}=\frac{a\,sin\alpha' sin(\alpha-\beta)}{cos\beta\, sin(\alpha-\alpha')}\text{(尺)}\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

東京高等工業學校

a, $b+c$, r (內接圓ノ半徑) ヲ與ヘテ △ABC ヲ解セヨ.

【解】 $tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\dfrac{1}{s-a}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

$$=\frac{2}{2s-2a}r \quad \left[\because\ r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\right]$$

$$=\frac{2r}{b+c-a} \quad [\because\ 2s=a+b+c].$$

∴ $log\,tan\dfrac{A}{2}=log2+logr-log(b+c-a)$.

之ヨリ A ヲ求ムルコトヲ得.

又 $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{sinB+sinC}{sinA}=\dfrac{2sin\dfrac{B+C}{2}cos\dfrac{B-C}{2}}{2sin\dfrac{A}{2}cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{cos\dfrac{B-C}{2}}{sin\dfrac{A}{2}}$.

∴ $log\,cos\dfrac{B-C}{2}=log\,sin\dfrac{A}{2}+log(b+c)-loga$.

之ヨリ $\dfrac{B-C}{2}$ ヲ求ムルコトヲ得.

然ルニ $\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$ ナルヲ以テ $\dfrac{B+C}{2}$ ハ既知ナリ.

∴ $\dfrac{B+C}{2}$ ト $\dfrac{B-C}{2}$ トノ和, 差ヲ求メテ B, C ヲ見出ダスコトヲ得.

又 $b=\dfrac{a\,sinB}{sinA}$. ∴ $log\,b=log\,a+log\,sinB-log\,sinA$.

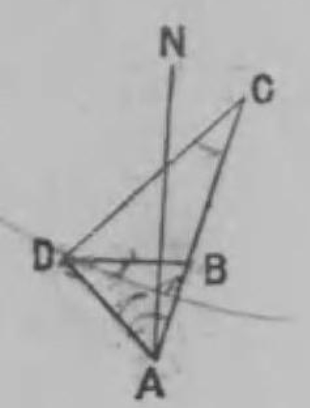
之ヨリ b ヲ求ムルコトヲ得.

之ヲ $b+c$ ヨリ減ズレバ c ヲ求ムルコトヲ得.

大阪高等工業學校

碇泊セル一船ヨリ二ツノ燈臺ヲ望ミシニ此船ト二ツノ燈臺トハ一直線上ニ在リテ其ノ方向ハ N15°E ナルコトヲ知レリ. 今此船ガ北西ノ方向ニ 5哩進ミテ再ビ此燈臺ヲ望ミシニ一ハ正東他ハ北東ニ在ルヲ知レリ. 燈臺間ノ距離ヲ求ム.

【解】 A, D ヲ船ノ前後ノ位置トシ B, C ヲ燈臺トシ AN ヲ正北ノ方向トスレバ



$N\hat{A}C=15°,\ N\hat{A}D=45°,\ A\hat{D}B=B\hat{D}C=45°,$

AD=5 哩.

△ABD ニ於テ正弦比例ニ由リ

$$DB=\frac{AD\,sin\,BAD}{sin\,ABD}=\frac{5sin60°}{sin75°}.$$

△BCD ヨリハ

$$BC=\frac{DB\,sin\,BDC}{sin\,BCD}=\frac{5sin60°\,sin45°}{sin75°\,sin30°}=\frac{5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}}=5(3-\sqrt{3})\text{ (哩) (答)}$$

仙臺高等工業學校

1. $A+B+C=180°$ ナルトキハ次式ヲ證セヨ:

$$sin^2A=sin^2B+sin^2C-2sinB\,sinC\,cosA.$$

【解】 $sin^2B+sin^2C-sin^2A=sin^2B+sin(C+A)sin(C-A)$

$$=sinB\,sin(C+A)+sinB\,sin(C-A)\qquad[\because\ A+B+C=180°]$$

$$=sinB\{sin(C+A)+sin(C-A)\}=2sinB\,sinC\,cosA.$$

之ヲ轉項シテ全體ノ符號ヲ變ズレバ所題ノ如クナル.

2. 次式ヲ最簡ニセヨ:

$$1+log_{10}75-log_{10}(13\times8)+\frac{1}{2}log_{10}10816-2log_{10}sin60°.$$

【解】 $1+log_{10}\frac{75\times104\times4}{13\times8\times3}=1+log_{10}10^2=1+2=3$............(答)

米澤高等工業學校

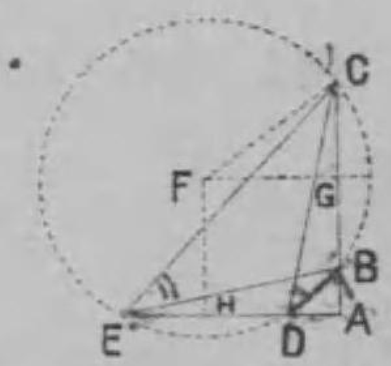
1. 下式ヲ證セヨ:

$$tan3A=\frac{3tanA-tan^3A}{1-3tan^2A}.$$

【解】 是レ第 21 條ノ公式ナリ.

2. 塔ノ頂上ニ鉛直ニ立テル旗竿アリ. 塔ノ基礎ト同水平ニシテ且ツ之ヨリ同方向ニ 23 尺及ビ 77 尺距リタル二點ニ於テ旗竿ニ對スル角ヲ測リシニ何レモ $6°20'$ ヲ得タリ. 旗竿ノ長サヲ求メヨ. 但シ $tan6°20'=\cdot1110$ トス.

【解】 AB ヲ塔, BC ヲ旗竿トシ D, E ヲ測點トスレバ



AD=23 尺, AE=77 尺, $B\hat{D}C=B\hat{E}C=6°20'$.

$B\hat{D}C=B\hat{E}C$ ナルコトヨリ C, B, D, E ヲ過グル一圓周ヲ作リ得ルコトヲ知ル.

今此圓ノ中心ヲ F トシ F ヨリ夫々 AC, AE ニ垂線 FG, FH ヲ引キ且ツ FC ヲ引クトキハ

$$BG=GC,\ DH=HE,\ FG=HA=\frac{1}{2}(AD+AE),\ G\hat{F}C=B\hat{D}C.$$

∴ △FGC ヨリ $GC=FG\,tan\,GFC$, 即チ $\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(23+77)\times\cdot1110.$

∴ $BC=100\times\cdot1110=11\cdot1$ (尺)............(答)

名古屋高等工業學校

△ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ:

$$b^2 sin2C + c^2 sin2B = 2bc\, sinA.$$

【解】 問題 292 ノコトナリ.

熊本高等工業學校

△ABC ニ於テ $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=\boxed{2R}$ ヲ證セヨ.

但シ R ハ外接圓ノ半徑トス.

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

盛岡高等農林學校

1. $sinA+sinB=a,\ cosA+cosB=b$ ナルトキ下式ヲ證セヨ:

$$sin(A+B)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

【解】 假設ヨリ $2sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}=a,\ 2cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}=b.$

除法ニ由リ $\boxed{tan\frac{A+B}{2}=\frac{a}{b}}.$

然ルニ $sin2\alpha=\frac{2tan\alpha}{1+tan^2\alpha}$ ナル故 〔問 78 參照〕

$$sin(A+B)=\frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

2. $cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ sin45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ知リテ次ギノ函數ノ値ヲ求メヨ:

$$sin315^\circ,\ cos157^\circ{\cdot}5,\ tan(\pi+15^\circ),\ cot(2\pi-15^\circ),\ cosec75^\circ.$$

【解】 $sin315^\circ=sin(360-45^\circ)=sin(-45^\circ)=-sin45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}},$

$$cos157^\circ{\cdot}5=-\sqrt{\frac{1+cos315^\circ}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-sin^2315^\circ}}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$tan(\pi+15^\circ)=tan15^\circ=tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{tan45^\circ-tan30^\circ}{1+tan45^\circ tan30^\circ}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3},$$

$$cot(2\pi-15^\circ)=cot(-15^\circ)=-cot15^\circ=-\frac{1}{tan15^\circ}=-\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$=-(2+\sqrt{3}),$$

$$cosec75^\circ=sec15^\circ=\sqrt{1+tan^215^\circ}=\sqrt{1+7-4\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

注意. π ハ弧度ナレバ之ニ 15° ヲ加ヘタル $\pi+15^\circ$ 等ノ形式ハ弧度法ト六十分法トヲ混用シタルモノニシテ整頓シタル形式ニ非ズ. 成ルベクハ

$180°+15°$ 或ハ $\pi+\frac{\pi}{12}$ 等ト記スヲ穩當ナリトス.

鹿兒島高等農林學校

1. $\triangle ABC$ ニ於テ C ガ鈍角ナルトキハ $tanAtanB$ ハ 1 ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ.

【解】 C ガ鈍角ナル故 A+B 卽チ $180°-C$ ハ銳角ナリ.

∴ $tan(A+B)$ 卽チ $\frac{tanA+tanB}{1-tanAtanB}$ ハ正ナリ.

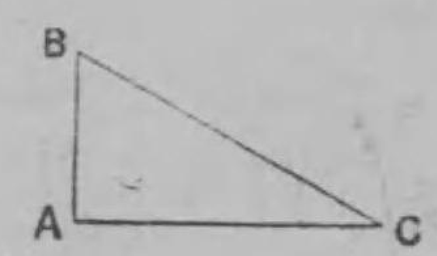
然ルニ A, B ハ何レモ A+B ノ部分ナル故銳角ナリ.

∴ $tanA$, $tanB$ ハ何レモ正, 從ツテ $tanA+tanB$ ハ正ナリ.

∴ $1-tanA\,tanB$ ハ正, 卽チ $tanA\,tanB<1$ ナリ.

2. 幅 300 尺ノ河岸ニ直立セル塔ガ其正對岸ノ一點ニ於テ $22°30'$ ノ角ニ對向スト云フ. 塔ノ高サヲ求ム. 但シ尺以下二位迄計算スベシ.

【解】 AB ヲ塔トシ, C ヲ測點トスレバ



$CA=300$ 尺, $A\hat{C}B=22°30'$. $C\hat{A}B=90°$ ナル故

$AB=CAtanACB=300tan22°30'$

$$=300\frac{sin45°}{1+cos45°}=300\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=300\frac{1}{\sqrt{2}+1}=300(\sqrt{2}-1)$$

$=124{\cdot}26$ (尺)……………(答)

秋田鑛山專門學校

1. $A+B+C=180°$ ナラバ次式ヲ證セヨ:

$$cos^2A+cos^2B+cos^2C+2cosAcosBcosC=1.$$

【解】 $cos^2A+cos^2B+cos^2C-1=cos^2A+cos^2B-sin^2C$

$=cos^2A+cos(B+C)cos(B-C)=cos^2A-cosAcos(B-C)$

$=-cosA\{cos(B+C)+cos(B-C)\}=-2cosAcosBcosC.$

之ヲ轉項スレバ所題ノ如クナル.

2. 電柱 A ヨリ北西 35° ニ方リ一ツノ旗竿ヲ望ミ, 次ギノ電柱 B ヨリ同ジ旗竿ヲ見タルニ北西 20° ノ方向ニ認メシト云フ. 若シ BA ヲ結ブ線ガ子午線ヨリ西ヘ 10° ヲ成シテ 200尺ノ長サアリトセバ電柱 A ト旗竿トノ距離幾何ナルカ. (答ハ尺ノ單位以下二位迄算出セヨ).

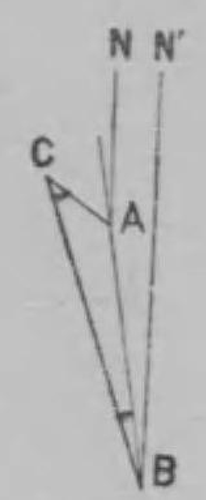
度	正弦ノ値	度	正弦ノ値
5	·0872	11	·1908
6	·1045	12	·2079
7	·1219	13	·2250
8	·1392	14	·2419
9	·1564	15	·2588
10	·1736	16	·2756

【解】 C ヲ旗竿トシ AN, BN′ ノ方向ヲ北トスレバ

$N\hat{A}C=35°$, $N'\hat{B}C=20°$, $N'\hat{B}A=10°$, $BA=200$尺.

今 $AC=x$尺 トスレバ △ABC ニ就キテ正弦比例ヲ用ヒ

$$AC=\frac{AB\sin ABC}{\sin ACB},$$



即チ $$x=\frac{200\sin(20^\circ-10^\circ)}{\sin\{35^\circ-10^\circ-(20^\circ-10^\circ)\}}=\frac{200\sin 10^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$=\frac{200\times\cdot1736}{.2588}=134\cdot16$$ 弱. (答) 134·16 尺弱.

上田蠶絲專門學校

1. △ABC ニ於テ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ ヲ證セヨ.

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

2. 下式ヲ證セヨ:

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

【解】 第 19 條ノ公式ナリ.

東京商船學校

1. $\sin 15^\circ$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 問 60 ヲ見ヨ.

2. $\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c$ ヲ一項ニ化セヨ.

【解】 原式$=\cos a-\cos(b+c)=2\sin\dfrac{a+b+c}{2}\sin\dfrac{b+c-a}{2}$………(答)

3. $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ ハ θ ノ如何ナルトキニ最大ナル値ヲ有スルカ.

【解】 原式$=\dfrac{2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta.$

$\sin 2\theta$ ガ最大ナル値ヲ有スル場合ハ

$$2\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}=2m\pi+\frac{\pi}{2}. \qquad \therefore\ \theta=m\pi+\frac{\pi}{4}\text{…………(答)}$$

4. $\sin\theta+2\cos\theta=1$ ヲ解ケ.

【解】 $2\cos\theta=1-\sin\theta.$

兩邊ヲ平方ニスレバ $4\cos^2\theta=1-2\sin\theta+\sin^2\theta,$

$$4(1-\sin^2\theta)=1-2\sin\theta+\sin^2\theta, \qquad 5\sin^2\theta-2\sin\theta-3=0,$$

$$(5\sin\theta+3)(\sin\theta-1)=0.$$

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ 或ハ 1.

$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ トスレバ $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}.$

但シ此二値ノ中 $\dfrac{4}{5}$ ノミガ原方程式ニ適スルコト實驗ニ由リテ明カナリ.

$\therefore$ θ ハ第四象限ニ在リテ $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ ナリ.

$\therefore\ \theta=2n\pi-\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{4}{5}.$

又 $\sin\theta=1$ トスレバ $\cos\theta=\pm\sqrt{1-1^2}=0.$

之ハ明カニ原方程式ニ適ス.

$\therefore\ \theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{2}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}.$

(答) $\theta=2n\pi-\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{4}{5},\ 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}.$

5. $x\cos\phi=a,\quad y=b\tan\phi$ ヨリ ϕ ヲ消去スベシ.

【解】 第二式ヨリ $\tan^2\phi=\dfrac{y^2}{b^2}$.

$\therefore\ 1+\tan^2\phi=\sec^2\phi=\dfrac{1}{\cos^2\phi}=1+\dfrac{y^2}{b^2}$..............(i).

第一式ヨリ $\cos^2\phi=\dfrac{a^2}{x^2}$.

之ヲ (i) ニ代用スレバ $\dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{y^2}{b^2}$ 卽チ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$..............(答)

6. $\triangle ABC$ ニ於テ下式ヲ證セヨ:

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

【解】 是レ第 48 條ノ公式ナリ.

7. 同上, $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$.

【解】 正弦比例ヲ用フレバ本題ハ下式ヲ證スルコトニ歸ス:

$\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C=2\sin A\sin B\sin C$.

然ルニ此等式ノ證ハ 問 630 ノ解ノ中ニ在リ.

8. 碇泊セル一汽船アリ. 海岸ニ沿ヒタル直線上ノ一點ヨリ之ヲ測レバ其方向ハ此直線ト 30° ノ角ヲ成シ, 此線ニ沿ヒ 150間 進ミテ再ビ其方向ヲ測レバ 60° ノ角ヲ成スト云フ. 然ラバ船ト直線トノ距離如何.

【解】 問 355 ト同様ナルヲ以テ之ヲ省ク.

---

1. $\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$ ヲ證セヨ.

【解】 是レ第 20 條ノ公式ニシテ普通ノ教科書ニ其證明アリ.

2. $\dfrac{2\sin A+\sin 2A}{2\sin A-\sin 2A}$ ヲ簡單ニセヨ.

【解】 原式 $=\dfrac{2\sin A+2\sin A\cos A}{2\sin A-2\sin A\cos A}=\dfrac{2\sin A(1+\cos A)}{2\sin A(1-\cos A)}=\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}$

$=\cot^2\dfrac{A}{2}$ [第 20 條公式參照]. (答) $\cot^2\dfrac{A}{2}$.

3. $\sin A=\dfrac{15}{17},\ \sin B=\dfrac{4}{5}$ ナルトキハ $\sin(A+B)$ 及ビ $\cos(A+B)$ ノ數値如何. 又 $A+B$ ハ第何象限ニ位置スル角ナルカ.

【解】 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\dfrac{15}{17}\left\{\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}\right\}+\left\{\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{15}{17}\right)^2}\right\}\dfrac{4}{5}=\dfrac{15}{17}\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)+\left(\pm\dfrac{8}{17}\right)\dfrac{4}{5},$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\left(\pm\dfrac{8}{17}\right)\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{15}{17}\cdot\dfrac{4}{5}.$

$\therefore$ $\cos A,\ \cos B$ ガ同號ナルトキハ

$$\sin(A+B)=\pm\left(\frac{15}{17}\cdot\frac{3}{5}+\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5}\right)=\pm\frac{77}{85}.$$

$$\cos(A+B)=\frac{8}{17}\cdot\frac{3}{5}-\frac{15}{17}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{36}{85}.$$

$\therefore$ 此場合ニハ $A+B$ ハ第二象限或ハ第三象限ニ在リ.

又 $\cos A,\ \cos B$ ガ異號ナルトキハ

$$\sin(A+B)=\pm\left(\frac{15}{17}\cdot\frac{3}{5}-\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5}\right)=\pm\frac{13}{85},$$

$$\cos(A+B)=-\frac{8}{17}\cdot\frac{3}{5}-\frac{15}{17}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{84}{85}.$$

$\therefore$ 此場合ニモ $A+B$ ハ亦第二象限或ハ第三象限ニ在リ.

4. $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ$ ノ數値ヲ求ム.

【解】 第 24 條ノ方法ヲ用フレバ容易ニ答ノ o ナルコトヲ知ル.

5. n ヲ奇數トシテ $\sin\{n\times 180^\circ-(-1)^n A\}$ ヲ A ノ三角函數ニテ表ハセ.

【解】 $n=2m+1$ トスレバ (m ハ零或ハ任意ノ整數トス)

原式$=sin(m.\,360^\circ+180^\circ+A)=sin(180^\circ+A)=-sinA$..........(答)

6. $sec(-780^\circ)\times tan1290^\circ$ ノ數値ヲ求ム.

【解】 原式$=sec780^\circ\times tan1290^\circ$

$=sec(360^\circ\times2+60^\circ)\times tan(360^\circ\times4-150^\circ)=sec60^\circ\times tan(-150^\circ)$

$=-sec60^\circ\times tan(90^\circ+60^\circ)=-sec60^\circ\times(-cot60^\circ)$

$=2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$..............(答)

7. $Lsin13^\circ10'=9.35752$, $Lsin13^\circ20'=9.36289$ ヨリ $Lsin13^\circ17'12''$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $(13^\circ20'-13^\circ10'):(13^\circ17'12''-13^\circ10')=(9.36289-9.35752):x$,

$x=.00387$.　　　$9.35752+.00387=9.36139$...........(答)

8. $\triangle ABC$ ニ於テ $cosA:cosB=b:a$ ナルトキハ $\triangle ABC$ ハ二等邊ナルカ又ハ直ナルコトヲ證セヨ.

【解】 本問ハ問 285 ト同ジ.

京都府立醫學專門學校

$\triangle ABC$ ニ於テ次式ヲ證セヨ:

$$\frac{a\,cosB-b\,cosA}{sin(A-B)}=\frac{c}{sinC}.$$

【解】 正弦比例ニ由レバ本題ハ次ギノ等式ヲ證スルコトニ歸ス:

$$\frac{sinAcosB-sinBcosA}{sin(A-B)}=\frac{sinC}{sinC}.$$

然ルニ兩邊共ニ 1 ナリ.

∴ 本題ヲ證シ得タリ.

醫學專門學校

1. 三ツノ角 A, B, C ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ $cosA$, $cosB$, $cosC$ ノ間ニ存スル一ツノ關係式ヲ求メヨ.

【解】 A+B ト C トハ互ニ補角ヲナス故

$cos(A+B)=-cosC$, 卽チ $cosAcosB-sinAsinB=-cosC$,

卽チ $cosAcosB+cosC=sinAsinB$.

兩邊ヲ平方ニスレバ

$cos^2Acos^2B+cos^2C+2cosAcosBcosC=(1-cos^2A)(1-cos^2B)$,

卽チ $cos^2A+cos^2B+cos^2C+2cosAcosBcosC=1$...........(答).

~~2.~~ 或ル人河岸 A 點ニ於テ河幅ヲ知ランガ爲メニ其眞向ノ岸ニ立テル樹木 C ヲ選ビ AC ノ方向ニ垂直ニ A 點ヨリ 16間距リタル B 點ニ於ケル AC ノ視角 ABC ヲ測リ 75° ヲ得タリ. 此河幅ハ何間何尺ナルカ.

【解】 $\hat{A}=90^\circ$ ナル故

$AC=ABtan75^\circ=16tan(45^\circ+30^\circ)=16\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{16(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1}=16(2+\sqrt{3})=59.7$(間)　　(答) 59 間 4 尺

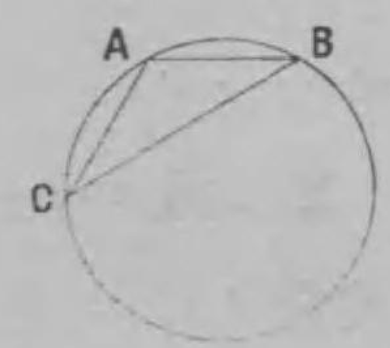
新潟醫學專門學校

1. $tan(A+B+C)$ ヲ $tanA, tanB, tanC$ ノ項ニテ表ハセ.

【解】 $tan(A+B+C)=tan\{(A+B)+C\}=\dfrac{tan(A+B)+tanC}{1-tan(A+B)tanC}$

$$=\frac{\dfrac{tanA+tanB}{1-tanAtanB}+tanC}{1-\dfrac{tanA+tanB}{1-tanAtanB}tanC}=\frac{tanA+tanB+tanC-tanAtanBtanC}{1-tanAtanB-tanBtanC-tanCtanA}\quad(答)$$

2. 或ル長サノ塀ガ一觀測點ニ於テ $30°$ ノ角ヲ含ム. 此塀ノ兩端ト觀測點トヲ通ズル圓ノ半徑ハ塀ノ長サニ等シキコトヲ證セヨ.



【解】 AB ヲ塀トシ, C ヲ觀測點トスレバ $A\hat{C}B=30°$.

圓ABC ノ半徑ヲ R尺 トスレバ公式ニ依リ

$$\frac{AB}{sinC}=2R \quad 即チ \quad \frac{AB}{sin30°}=\frac{AB}{\frac{1}{2}}=2R,$$

即チ $2AB=2R$, $\therefore\ AB=R$.

陸軍士官候補生

1. 次ギノ各問題ニ答ヘヨ:

(A) $cos4A$ ヲ $cosA$ ニテ表ハス式ヲ作レ.

(B) 恒等式 $\dfrac{sec8A-1}{sec4A-1}=\dfrac{tan8A}{tan2A}$ ヲ證セヨ.

【解】 (A) $cos4A=2cos^2 2A-1=2(2cos^2A-1)^2-1=8cos^4A-8cos^2A+1$.

(B) 問 132 ノコトナリ.

2. 三角形ノ三邊ヲ三, 五及ビ六トス. 此三角形ノ內接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

【解】 半周$=\dfrac{1}{2}(3+5+6)=7$.

面積$=\sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}=2\sqrt{14}$.

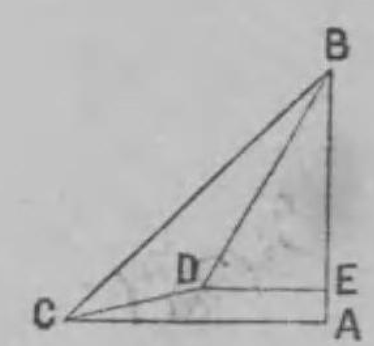
內接圓半徑＝面積÷半周$=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$…………(答)

外接圓半徑$=3\times5\times6\div(4\times2\sqrt{14})=\dfrac{45\sqrt{14}}{56}$…………(答)

3. 測量師アリ. 山麓ニ於テ山頂ノ仰角ヲ測リテ $45°$ ヲ得. 次ギニ其點ヨリ山頂ニ向ヒ傾斜角 $15°$ ナル山路上ヲ 1000 米ダケ前進シテ再ビ山頂ノ仰角ヲ測リ $60°$ ヲ得タリ. 然ラバ山ノ高サハ幾米ナルカ. 但シ米以下ハ4捨5入スベシ.

【解】 AB ヲ山ノ高サトシ C, D ヲ前後ノ測點, DE ヲ CA ニ平行ナリトスレバ

$A\hat{C}B=45°$, $A\hat{C}D=15°$, $CD=1000$ 米, $E\hat{D}B=60°$.



△BCD ニ於テ正弦比例ニ由リ

$$CB=\frac{CDsinCDB}{sinCBD}=\frac{1000sin135°}{sin15°}.$$

又 △ABC ニ於テ

$$AB=CBsinACB=\frac{1000sin135°sin45°}{sin15°}=\frac{1000\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=1932(米).\ (答)$$

陸軍經理學校

1. $\tan A=\cot 3A$ ヨリ A ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $\tan A=\tan\left(\frac{\pi}{2}-3A\right)$.

$\therefore\ A=n\pi+\frac{\pi}{2}-3A,\quad \therefore\ A=(2n+1)\frac{\pi}{8}$..........(答)

2. $\cos\theta+\sin\theta=a,\ \cos 2\theta=b$ ヨリ θ ヲ消去セヨ.

【解】 第一式ヲ平方ニスレバ

$1+\sin 2\theta=a^2,\quad$ 卽チ $\sin 2\theta=a^2-1$.

之ト第二式トノ平方ノ和ヲ作レバ

$1=(a^2-1)^2+b^2,\quad$ 卽チ $a^4+b^2=2a^2$..........(答)

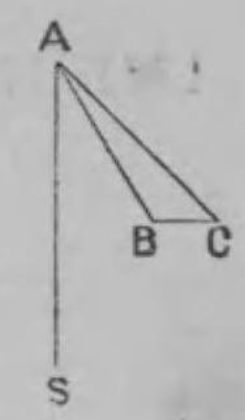
3. 直立セル物體ノ基礎ニ達シ得ザルトキ其基礎ト同平面上ニ在ル地上ノ二點ニ於テ之ヲ觀測シ其高サ及ビ距離ヲ求ムル法如何.

【解】 問 353 ヲ參照スレバ明カナラン.

東北帝國大學農科豫科

1. 每時 12 海里ノ速度ニテ正東ニ航行スル船アリ. 或ル人正午ニハ此船ヲ南ヨリ 30° 東ニ見, 午後 0 時 40 分ニハ此船ヲ南東ニ見タリ. 正午ニ於テ此人ヨリ此船迄

ノ距離幾海里ナリシカ. 但シ小數第二位迄正シク算出セヨ.



【解】 A ヲ測者ノ位置, AS ヲ正南ノ方向トシ B, C ヲ船ノ前後ノ位置トスレバ

$S\hat{A}B=30°,\ S\hat{A}C=45°,\ BC=\left(12\times\frac{40}{60}\right)$海里$=8$海里.

△ABC ニ於テ正弦比例ニ由リ

$$AB=\frac{BC\sin ACB}{\sin BAC}=\frac{8\sin 45°}{\sin 15°}$$

$$=8\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=21.85\ (\text{海里})..........(\text{答})$$

2. △ABC ニ於テ次ギノ關係ヲ證セヨ:

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

【解】 問 192 ノコトナリ.

水產講習所

1. $A+B+C=90°$ トスレバ下式ヲ證セヨ:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\sin A\sin B\sin C.$$

【解】 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-1=\sin^2 A+\sin^2 B-\cos^2 C$

$=\sin^2 A-\cos(C+B)\cos(C-B)=\sin^2 A-\sin A\cos(C-B)$

$=\sin A\{\cos(B+C)-\cos(C-B)\}=-2\sin A\sin C\sin B$.

之ヲ轉項スレバ所題ノ如クナル.

2. 山麓ノ一點 B ニ於テ山頂 A ノ仰角ヲ測リシニ 60° アリ. B 點ヨリ山頂ニ向ツテ 30° ノ傾斜ヲ登ルコ

ト 1哩ニシテ C 點ニ達シ $\mathrm{B\hat{C}A}$ ヲ測リシニ 135° ヲ得タリ. 山ノ高サヲ求ム.

【解】 問 363 ト同様ナレバ解ヲ省ク.

高 等 學 校

1. △ABC ニ於テ $2b=a+c$ ナルトキハ次式ヲ證セヨ:

$$2sin\frac{B}{2}=cos\frac{C-A}{2}.$$

【解】 正弦比例ヲ用ヒテ假設ヨリ

$$2sinB=sinA+sinC,\quad 4sin\frac{B}{2}cos\frac{B}{2}=2sin\frac{A+C}{2}cos\frac{A-C}{2},$$

$$2sin\frac{B}{2}=cos\frac{C-A}{2}.\ \Big[\because\ \frac{A+C}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ,\quad \therefore\ cos\frac{B}{2}=sin\frac{A+C}{2};$$

$$\text{又}\ cos\frac{B}{2}\neq 0\ \text{且ツ}\ cos\alpha=cos(-\alpha).\Big]$$

2. 或ル人山麓ノ一點ニ於テ山頂ノ仰角ヲ測リ 45° ヲ得タリ. 此處ヨリ山頂ニ向ヒ眞直ニ傾斜 15° ナル坂路ヲ登ルコト 160 尺ニシテ再ビ山頂ノ仰角ヲ測リタルニ 60° ヲ得タリ. 山ノ高サヲ求ム.

【解】 本年度陸軍士官候補生試驗問題ノ (3) ト同様ナレバ解ヲ省ク.

海 軍 機 關 學 校

1. $sinA=\frac{3}{5}$ ナルコトヲ知リテ $tanA-secA$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $$tanA-secA=\frac{sinA}{cosA}-\frac{1}{cosA}=\frac{sinA-1}{cosA}=\frac{\frac{3}{5}-1}{\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}}=\pm\frac{1}{2}\cdots\cdots\text{(答)}$$

2. 下ノ二式ヲ最簡ニセヨ:

(甲) $$\frac{(a+b)tan(90^\circ-A)}{cot(180^\circ-A)}+\frac{(a-b)tan(90^\circ+A)}{cot(180^\circ+A)},$$

(乙) $$sinAsin(2B+A)-sinBsin(2A+B).$$

【解】 (甲) 原式$=\dfrac{(a+b)cotA}{-cotA}+\dfrac{(a-b)(-cotA)}{cotA}$

$$=-(a+b)-(a-b)=-2a\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

(乙) 原式$=\dfrac{1}{2}\{cos2B-cos(2A+2B)-cos2A+cos(2A+2B)\}$

$$=sin(A+B)sin(A-B)=sin^2A-sin^2B\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

3. 長サ 9尺ノ梯アリ. 其上端ハ直立セル壁ニ倚リ, 下端ハ地面ニ接シ, 且ツ其下端ヨリ壁迄ノ距離 3.5尺ナリ. 今地面ガ水平ナルモノト假定シテ梯ガ地面ト成ス角ヲ計算セヨ. 但シ答ハ分ノ位ニ止メ以下四捨五入セヨ.

$log3=\cdot4771$
$log5=\cdot6990$
$log7=\cdot8451$

角	正弦ノ對數	
22° 0′	$\bar{1}\cdot5736$	68° 0′
10′	$\bar{1}\cdot5767$	50′
20′	$\bar{1}\cdot5798$	40′
30′	$\bar{1}\cdot5828$	30′
40′	$\bar{1}\cdot5859$	20′
50′	$\bar{1}\cdot5889$	10′
23° 0′	$\bar{1}\cdot5919$	67° 0′
	餘弦ノ對數	角

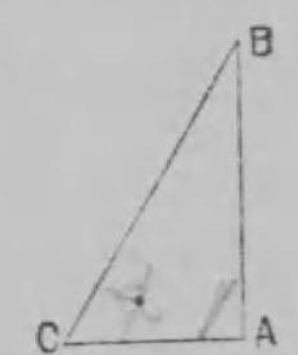
【解】 AB ヲ壁, CB ヲ梯トスレバ CB=9尺, CA=3·5尺, $C\hat{A}B=90°$.

$\therefore \quad cosACB=\frac{3\cdot5}{9}=\frac{5\times7}{3^2\times10}$

$\therefore \quad log\ cosACB=log5+log7-2log3-1=\bar{1}\cdot5899.$

$5919-5889:5919-5899=10:x, \quad x \doteqdot 7.$

(答) 67°7′



4. 正北ニ航行セル一軍艦正西ニ當リテ二ツノ燈臺ヲ見タリ. 一時間航行ノ後其一燈臺ハ南西ニ, 他ノ一燈臺ハ S30°W ノ方位ニ見ヘタリ. 而シテ二燈臺ノ距離 12 浬ナリト云フ. 此軍艦ノ速度幾浬ナルカ.

【解】 A, N ヲ軍艦ノ前後ノ位置トシ B, C ヲ兩燈臺トスレバ

$A\hat{N}B=45°$, $A\hat{N}C=30°$, CB=12浬.

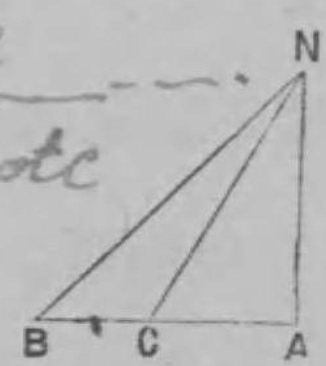
$B\hat{A}N=90°$ ナル故

$AB=ANtan45°=AN,$

$AC=ANtan30°=AN\times\frac{1}{\sqrt{3}}.$

$\therefore \quad AB-AC=CB=12=AN\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

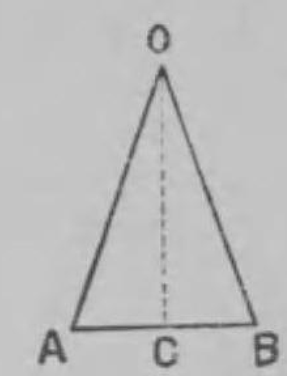
AN= BC/(cotB-cotC) ノ公式,



$\therefore \quad AN=\frac{12}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=6(3+\sqrt{3}).$ (答) 一時間ニ 6(3+√3) 浬.

5. 一邊ノ長サ a 尺ナル正多角形アリ. 其邊數ガ n ナルトキハ此多角形ノ面積幾何ナルカ.

【解】 AB ヲ一邊トシ, 中心ヲ O トシ, △OAB ヲ作レバ此形ノ面積ハ全形ノソレノ $\frac{1}{n}$ ナリ.



OC ヲ AB ニ垂線ニ引クトキハ

$AC=\frac{a}{2}, \ A\hat{O}C=\frac{1}{2}A\hat{O}B.$

又 $OC=ACcotCOA=\frac{a}{2}cot\frac{180°}{n}.$

$\therefore \quad \triangle OAB=\frac{1}{2}AB.\ OC=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}cot\frac{180°}{n}.$

$\therefore$ 所求ノ面積ハ $\frac{na^2}{4}cot\frac{180°}{n}$ (平方尺).

海軍經理學校

1. $p\ cotA=\sqrt{q^2-p^2}$ ナルトキ $sinA$, $cosA$, $tanA$ ヲ求メヨ.

【解】 $tanA=\frac{1}{cotA}=\frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$ …………(答)

$sinA=\pm\frac{1}{\sqrt{1+cot^2A}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2-p^2}{p^2}}}=\pm\frac{p}{q}$ …………(答)

$cosA=sinAcotA=\pm\frac{p}{q}.\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}=\pm\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}$ …………(答)

但シ複號ハ同順ニ採ルモノトス.

2. 或ル人河岸ヨリ其正對岸ノ樹木ノ頂上ヲ測リテ仰角 60° ヲ得タリ. 更ニ 20間ヲ退キテ再ビ仰角ヲ測リシニ 45° ヲ得タリト云フ. 樹高及ビ河幅各幾何.

【解】 問 353 ト同樣ナレバ解ヲ略ス.

3. 下式ヲ最簡ニセヨ:

$$\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}-\frac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}+\frac{\cos A\cos 0^\circ}{\sin(90^\circ+A)}.$$

【解】 原式 $=\frac{-\sin A}{-\sin A}-\frac{-\cot A}{\cot A}+\frac{\cos A}{\cos A}=1+1+1=3$............(答)

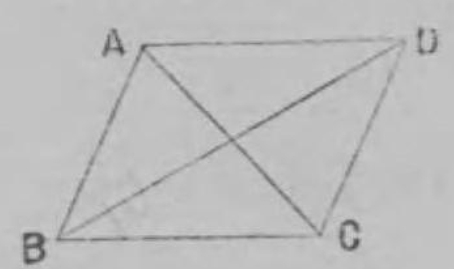
4. 下式ヲ證セヨ:

$$\cos^2 a+\cos^2(120^\circ+a)+\cos^2(120^\circ-a)=\frac{3}{2}.$$

【解】 問 173 ノコトナリ.

5. 平行四邊形ノ相隣レル二邊ヲ a, b トシ其夾角ヲ θ トセバ其對角線ノ長サハ $\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\theta}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 ▱ABCD ニ於テ $AB=a$, $BC=AD=b$ トシ, $A\hat{B}C=\theta$ トス.



△ABC ニ於テ $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$-2AB\cdot BC\cos ABC=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$

∴ $AC=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}.$

又 △ABD ニ於テ

$$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2AB\cdot AD\cos BAD=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=a^2+b^2+2ab\cos\theta.$$

∴ $BD=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}.$

∴ 所題ノ如シ.

海軍兵學校

1. $\tan A=\sqrt{3}$, $\cos A=-\frac{1}{2}$ ナルトキ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ ノ値ヲ求ム.

【解】 $\tan A=\sqrt{3}$, $\cos A=-\frac{1}{2}$ ナルトキノ角 A ハ廻線ガ首線ト $\pi+\frac{\pi}{3}$ ナル角ヲ成ストキノ總ベテノ角ナリ.

∴ $A=2n\pi+\pi+\frac{\pi}{3}$. 但シ n ハ零或ハ任意ノ整數トス

∴ $\sin\frac{A}{2}=\sin\left(n\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin n\pi\cos\frac{2\pi}{3}+\cos n\pi\sin\frac{2\pi}{3}$

$=0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(\pm1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ (n ノ偶數, 奇數ニ從ヒ)

$=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

又 $\cos\frac{A}{2}=\cos\left(n\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos n\pi\cos\frac{2\pi}{3}-\sin n\pi\sin\frac{2\pi}{3}$

$=(\pm1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ (n ノ偶數, 奇數ニ從ヒ)

$=\mp\frac{1}{2}.$

(答) $\sin\frac{A}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{A}{2}=\mp\frac{1}{2}$. 但シ複號ハ同順トス.

2. 下式ヲ最簡ニセヨ:

$$\frac{sec(-120^\circ)\{sin(60^\circ-A)-cos(A-30^\circ)\}}{2tanA+cot\frac{A}{2}-tan\frac{A}{2}}.$$

【解】 $原式=\dfrac{sec120^\circ\{cos(90^\circ-60^\circ+A)-cos(A-30^\circ)\}}{2tanA+\dfrac{cos\frac{A}{2}}{sin\frac{A}{2}}-\dfrac{sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}}$

$$=\frac{-2\{cos(30^\circ+A)-cos(A-30^\circ)\}}{2tanA+\dfrac{cos^2\frac{A}{2}-sin^2\frac{A}{2}}{sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}}}=\frac{-2.\,2sinAsin(-30^\circ)}{\dfrac{2sinA}{cosA}+\dfrac{2cosA}{sinA}}$$

$$=\frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)sinA}{\dfrac{1}{sinAcosA}}=sin^2AcosA\text{..........(答)}$$

3. 方程式 $sin5\theta+sin2\theta-sin\theta=0$ ニ適スル 90° 以下ノ正ナル θ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $(sin5\theta-sin\theta)+sin2\theta=0.$ $2cos3\theta sin2\theta+sin2\theta=0.$

$\therefore$ $sin2\theta=0$..........(i), 或ハ $cos3\theta=-\frac{1}{2}$..........(ii).

然ルニ題意ニ由リ $0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ ナル故 $0^\circ\leqq2\theta\leqq180^\circ$.

此制限ノ下ニ (i) ヨリ $2\theta=0^\circ,\ 180^\circ$. $\therefore$ $\theta=0^\circ,\ 90^\circ$.

又 (ii) ヨリハ $3\theta=120^\circ,\ 240^\circ$. $\therefore$ $\theta=40^\circ,\ 80^\circ$.

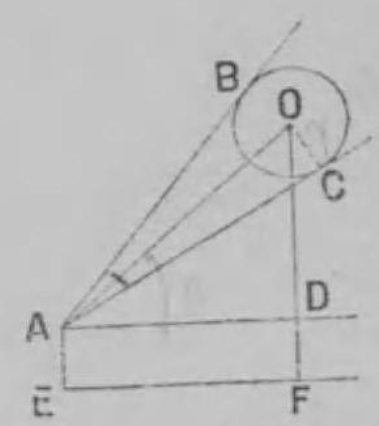
(答) $0^\circ,\ 40^\circ,\ 80^\circ,\ 90^\circ$.

4. 三角形ノ三邊ノ比 3:5:7 ナルトキ最大角ノ値如何.

【解】 所求ノ角ヲ x トスレバ

$$cosx=\frac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5}=-\frac{1}{2}.\qquad\therefore\ x=120^\circ\text{..........(答)}$$

5. 半徑 r 尺ノ球狀輕氣球ノ上昇セルヲ見ルニ, 球ガ眼ニ開ク角 α ニシテ, 其中心ノ仰角 β ナリト云フ. 眼ノ高サ地上 h 尺ナリトセバ氣球ノ中心ノ高サハ地上何尺ナルカ.



【解】 O ヲ氣球ノ中心, A ヲ眼ノ位置, AE ヲ眼高トシ, 直線 AO ヲ含ム平面ニテ氣球ヲ截リタルトキ生ズル大圓ニ A ヨリ引キタル切線ヲ AB, AC トシ AD ヲ A ヲ過グル水平線ニシテ OA ヲ含ム鉛垂面上ニアルモノトス.

O ヨリ地面ニ垂線ヲ引クトキハ此線ハ必ズ AD ト交ルベシ. 此交點ヲ D トシ, 又垂足ヲ F トス.

然ルトキハ $B\hat{A}C=\alpha,\ D\hat{A}O=\beta,\ AE=h$ 尺ナリ.

切點ヘノ半徑 OC ヲ引クトキハ $OC=r$ 尺.

AO ハ $B\hat{A}C$ ヲ二等分シ $O\hat{C}A=90^\circ$ ナル故

$$AO=OC\,cosec\,CAO=r\,cosec\frac{\alpha}{2}.$$

又 $A\hat{D}O=90^\circ$ ナルヲ以テ

$$OD=AO\,sin\,DAO=r\,cosec\frac{\alpha}{2}sin\beta.$$

而シテ $DF=AE=h$ 尺.

$\therefore$ $OF=DF+OD=(h+r\,cosec\frac{\alpha}{2}sin\beta)$ 尺..........(答)

6. $tan\theta+cot\theta$ ノ絶對値ガ最小ナルトキノ θ ノ正ノ最小角ヲ求ム.

【解】 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin2\theta}$ (分母子ニ 2 ヲ乘セリ).

∴ 所題ノ式ノ最小絶對値ハ $\sin2\theta=\pm1$ ナルトキニシテ 2 ナリ.

然ルニ $\sin2\theta=1$ ナルトキノ 2θ ノ最小正値ハ $90°$. ∴ $\theta=45°$.

又 $\sin2\theta=-1$ ナルトキノ $\sin2\theta$ ノ最小正値ハ $270°$. ∴ $\theta=135°$.

∴ θ ノ所要ノ値ハ $45°$ ナリ.

若者の為が宜イカラト云フテ

此ノ[illegible]宜[illegible] 何ト[illegible]

下手な[illegible]

大正二年度

諸官立學校入學試驗問題

及ビ

答　解

專門學校入學者檢定

1. $\triangle ABC$ ニ於テ次ギノ等式ヲ證セヨ:

$$\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}.$$

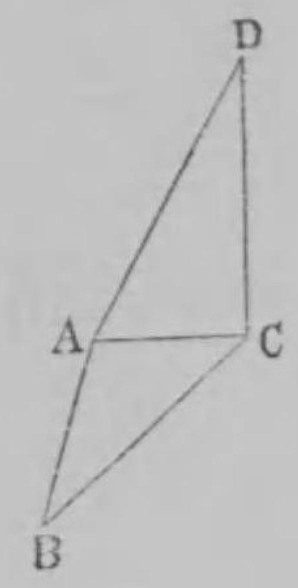
【解】 第 49 條ノ公式ニ由リ

$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C,\qquad a^2-b^2+c^2=2ca\cos B.$$

$$\therefore\ \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}=\frac{2ab\cos C}{2ca\cos B}=\frac{b}{c}\cdot\frac{\cos C}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{\cos C}{\cos B}$$

$$=\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\cos C}{\sin C}=\tan B\cot C=\frac{\tan B}{\tan C}.$$

2. A, B ハ水平面ニ垂直ニ立テル煙突 CD ノ基脚 C ト同ジ水平面上ノ二點ナリ. $C\hat{A}B=105°$, $C\hat{B}A=30°$, $D\hat{A}C=60°$ ニシテ AB ノ長サ 30 間ナルトキハ煙突ノ高サ如何.



【解】 $\hat{ACB}=180°-105°-30°=45°.$

今 $CD=x$ 間トスレバ

$$AC=CD\,cot\,CAD=x\,cot60°=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$\triangle ABC$ ニ於テ正弦比例ヲ作レバ

$$\frac{AC}{AB}=\frac{sinB}{sinC} \quad 即チ \quad \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{30}=\frac{sin30°}{sin45°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$\therefore\ x=15\sqrt{6}$ (間)…………(答)

3. $cos(\alpha-\beta)=m\,sin(\alpha+\beta)$ ナルトキハ

$$tan(45°+\alpha)=\frac{m+1}{m-1}tan(45°-\beta) \quad ヲ證セヨ.$$

【解】 假設ヨリ $\quad \frac{m}{1}=\frac{cos(\alpha-\beta)}{sin(\alpha+\beta)}.$

合除ノ理ニ由リ

$$\frac{m+1}{m-1}=\frac{cos(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha-\beta)-sin(\alpha+\beta)}=\frac{sin(90°+\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)}{sin(90°+\alpha-\beta)-sin(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{2sin(45°+\alpha)cos(45°-\beta)}{2cos(45°+\alpha)sin(45°-\beta)}=\frac{tan(45°+\alpha)}{tan(45°-\beta)}.$$

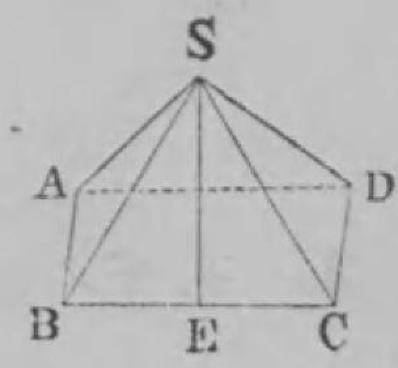
$\therefore$ 終結ノ如シ.

東北帝國大學工學專門部

1. 正方形ヲ底トスル直角錐ノ斜稜及ビ底ノ一邊ノ長サノ比 3 : 2 ナルトキ斜面ノ頂點ニ於ケル平面角ノ正弦ヲ求ム.

【解】 直角錐 S-ABCD ニ於テ SB : BC=3 : 2 トス.

$\triangle SBC$ ニ於テ $SB=SC$ ナル故, S ヨリ BC ニ垂線 SE ヲ引クトキハ



$$BE=EC, \quad \hat{BSE}=\frac{1}{2}\hat{BSC}.$$

$$\therefore\ \frac{EB}{SB}=\frac{1}{3}=sin\,BSE=sin\frac{1}{2}BSC.$$

$$\therefore\ sin\,BSC=2sin\frac{1}{2}BSC\,cos\frac{1}{2}BSC=2\times\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$ …………(答)

2. $\triangle ABC$ ニ於テ下式ヲ證セヨ:

$$c(cosA+cosB)=2(a+b)sin^2\frac{C}{2}.$$

【解】 $c\,cosA+a\,cosC=b, \quad c\,cosB+b\,cosC=a.$

加法ヲ行ヒ $\quad c(cosA+cosB)+(a+b)cosC=a+b.$

$$\therefore\ c(cosA+cosB)=(a+b)(1-cosC)=2(a+b)sin^2\frac{C}{2}.$$

東京高等工業學校

1. 次式ノ x ノ値ヲ計算セヨ:

$$x=a^m b^n (a^2+b^2)^p sin\theta.log_{10}r.$$

但シ $a=16,\ b=4,\ \theta=30°,\ m=1{\cdot}5,\ n=0{\cdot}5,\ p=-1,\ r=15,\ log_{10}2=\cdot301,\ log_{10}3=\cdot477.$

【解】 $sin\theta=sin30°=\frac{1}{2}.$

$$log_{10}r=log_{10}\frac{30}{2}=log_{10}3+log_{10}10-log_{10}2=\cdot477+1-\cdot301=1{\cdot}176,$$

$$\therefore\quad x=16^{1.5}\times4^{0.5}\times272^{-1}\times\frac{1}{2}\times1{\cdot}176$$

$$=(2^4)^{\frac{3}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{272}\times\frac{1}{2}\times1{\cdot}176={\cdot}277(\text{弱})\text{…………(答)}$$

2. 次ギノ恒等式ヲ證セヨ:

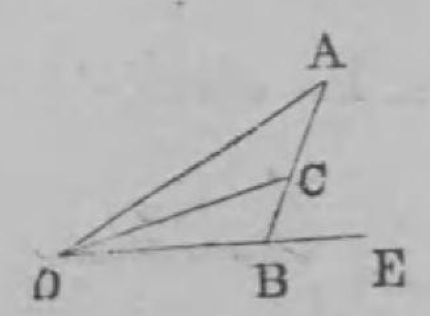
$$\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}=\cot\frac{x}{2}.$$

【解】 問 133 ヲ視ヨ.

名古屋高等工業學校

坂路ノ頂上ヨリ平地上ニ在ル一點ヲ觀測シ俯角 30° ヲ得, 夫レヨリ坂路ヲ其 $\frac{3}{4}$ 下リテ同一ノ點ヲ觀測シ俯角 15° ヲ得タリ. 其坂路ノ傾斜角ヲ α トセバ

$\tan\alpha=\dfrac{3}{3\sqrt{3}-2}$ ナルコトヲ證セヨ.



【解】 AB ヲ坂路トシ A, C ヲ前後ノ測點トシ D ヲ平地上ノ一點トシ DE ヲ地平線トス, 然ルトキハ $A\hat{D}B=30°$, $AC=\frac{3}{4}AB$, $C\hat{D}B=15°$, $C\hat{B}E=\alpha$.

$A\hat{D}C=C\hat{D}B=15°$ ナル故幾何學ノ定理ニ由リ

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}.$$

然ルニ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{\sin CBD}{\sin A}=\dfrac{\sin(180°-\alpha)}{\sin(\alpha-30°)}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-30°)}.$

$$\therefore\quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-30°)}=\frac{AC}{CB}=3.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=3(\sin\alpha\cos30°-\cos\alpha\sin30°)=\frac{3}{2}(\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha).$$

$\cos\alpha$ ニテ兩邊ヲ除シ $\tan\alpha=\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}\tan\alpha-1).$

$$\therefore\quad \tan\alpha=\frac{3}{3\sqrt{3}-2}$$

米澤高等工業學校

1. $\cot\left(45°-\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ ナルコトヲ示セ.

【解】 右邊 $=\sqrt{\dfrac{1+\cos(90°-x)}{1-\cos(90°-x)}}=\sqrt{\dfrac{2\cos^2\left(45°-\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(45°-\frac{x}{2}\right)}}=\pm\cot\left(45°-\frac{x}{2}\right)$

注意. 問題ノ根號ノ前ニハ (±) ナル符號ノ略サレタルモノナリ.

2. 地球ヲ半徑 4000 哩ノ球ト見做シ其一自轉ニ要スル時間ヲ 24 時間トスレバ北緯 45° ノ場所ニ於ケル自轉ノ速サ如何.

【解】 問 351 ト同ジモノナリ.

熊本高等工業學校

$\sin15°$, $\cos15°$ ノ値ヲ小數第二位迄算出セヨ.

【解】 問 60 ノ結果ヲ計算スレバ可ナリ.

大阪高等工業學校

$\sin A+\sin B$ ト $\sin(A+B)$ トノ大小ヲ次ギノ四ツノ場合ニ於テ比較セヨ: (甲) A, B 共ニ第一象限ノ角ナルトキ; (乙) A, B 共ニ第二象限ノ角ナルトキ; (丙) A, B 共ニ第三象限ノ角ナルトキ; (丁) A, B 共ニ第四象限ノ角ナルトキ.

【解】 (甲) $\sin A, \sin B$ ハ正ニシテ且ツ $\cos A<1, \cos B<1$.

$\therefore\ \sin A>\sin A\cos B,\ \sin B>\sin B\cos A.$

$\therefore\ \sin A+\sin B>\sin A\cos B+\sin B\cos A,$

即チ $\sin A+\sin B>\sin(A+B)$.

(乙) $\sin A, \sin B$ ハ正ニシテ $\cos A, \cos B$ ハ負ナリ.

$\therefore\ \sin A>\sin A\cos B,\ \sin B>\sin B\cos A.$

$\therefore$ 甲ノ如クニシテ $\sin A+\sin B>\sin(A+B)$.

(丙) $\sin A, \sin B, \cos A, \cos B$ ハ皆負ナリ.

$\therefore\ \sin A<\sin A\cos B,\ \sin B<\sin B\cos A.$

$\therefore\ \sin A+\sin B<\sin(A+B).$

(丁) $\sin A, \sin B$ ニ負ハシテ且ツ $\cos A<1, \cos B<1$.

$\therefore\ \sin A<\sin A\cos B,\ \sin B<\sin B\cos A.$

$\therefore\ \sin A+\sin B<\sin(A+B).$

秋田鑛山專門學校

1. $1+\tan x\tan 2x=\sec 2x$ ヲ證セヨ.

【解】 $左邊=1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}=\dfrac{\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}$

$$=\frac{\cos(2x-x)}{\cos x\cos 2x}=\frac{1}{\cos 2x}=右邊.$$

2. $\sin A+\cos A=a$ ナルトキハ $\sin A$ 及ビ $\cos A$ ハ二次方程式 $2x^2-2ax+a^2-1=0$ ノ根ナルコトヲ證セヨ.

【解】 假設ノ等式ノ平方ヲ作レバ

$\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A=a^2$, 　即チ　$1+2\sin A\cos A=a^2$.

$$\therefore\qquad \sin A\cos A=\frac{a^2-1}{2}$$

之ト假說ノ等式トニヨリ $\sin A, \cos A$ ハ方程式 $x^2-ax+\dfrac{a^2-1}{2}=0$

即チ $2x^2-2ax+a^2-1=0$ ノ根ナルコトヲ知ル.

上田蠶絲專門學校

1. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$ ヲ證セヨ.

【解】 第 32 條ヲ見ヨ.

2. 二ツノ鋭角 α, β ノ和ガ定角 θ ニ等シキトキ $\cos\alpha\cos\beta$ ノ最大値ヲ求ム.

【解】 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}=\dfrac{1}{2}\{\cos\theta+\cos(\alpha-\beta)\}.$

$\cos\theta$ ハ常數ニシテ $\dfrac{1}{2}$ ハ正ナルヲ以テ $\cos\alpha\cos\beta$ ノ最大値ハ $\cos(\alpha-\beta)$ ガ最大ナルトキニ得ラルベシ. 然ルニ $\cos(\alpha-\beta)$ ノ最大値ハ 1 ナリ.

$\therefore$ $\cos\alpha\cos\beta$ ノ最大値ハ

$$\frac{1}{2}(\cos\theta+1)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}\ \cdots\cdots\cdots(答)$$

盛岡高等農林學校

1. 三角方程式 $6\cot^2\phi-4\cos^2\phi=1$ ヲ解ケ.

【解】 $\dfrac{6\cos^2\phi}{1-\cos^2\phi}-4\cos^2\phi=1$…………(i).

$1-\cos^2\phi=0$ トスレバ方程式ハ $\infty-4=1$ トナリテ成立セズ.

$\therefore\ 1-\cos^2\phi\neq0.$ $\therefore$ (i) ノ分母ヲ去ルモ根ニ變化ナシ.

即チ $6\cos^2\phi-4\cos^2\phi+4\cos^4\phi=1-\cos^2\phi,$

$$(4\cos^2\phi-1)(\cos^2\phi+1)=0.$$

$\therefore\ 4\cos^2\phi-1=0$…………(ii) 或ハ $\cos^2\phi+1=0$…………(iii).

(ii) ヨリ $\cos\phi=\pm\dfrac{1}{2},$

$\therefore\ \phi=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$ 或ハ $2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}=(2n\pm1)\pi\mp\dfrac{\pi}{3}.$ $\therefore\ \phi=m\pi\pm\dfrac{\pi}{3}.$

(iii) ヨリ $\cos\phi=\pm i.$ 之ハ背理ナリ.

(答) $m\pi\pm\dfrac{\pi}{3}.$

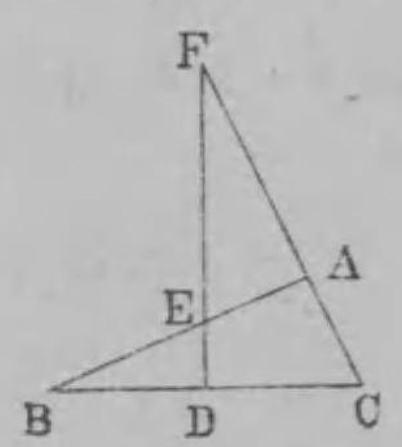
V **2.** 既知ノ △ABC ノ邊 BC ノ中點 D ニ於テ BC ニ垂線ヲ作リ之ト他ノ邊（又ハ其延長）トノ交點ヲ E 及ビ F トスレバ △AEF ノ各邊ノ長サ如何.

【解】 $AE=AB-EB=c-BD\sec B$

$$=c-\frac{a}{2}\sec B=a\left(\frac{c}{a}-\frac{\sec B}{2}\right)=a\left(\frac{\sin C}{\sin A}-\frac{1}{2\cos B}\right)$$

$$=a\frac{\sin(C+B)+\sin(C-B)-\sin A}{2\sin A\cos B}=\frac{a\sin(C-B)}{2\sin A\cos B}.$$

$$AF=CF-CA=CD\sec C-b=\frac{a}{2}\sec C-b=a\left(\frac{\sec C}{2}-\frac{b}{a}\right)$$



$$=a\left(\frac{1}{2\cos C}-\frac{\sin B}{\sin A}\right)=a\frac{\sin A-\sin(B+C)-\sin(B-C)}{2\sin A\cos C}=\frac{a\sin(C-B)}{2\sin A\cos C}.$$

$$EF=DF-DE=CD\tan C-BD\tan B=\frac{a}{2}(\tan C-\tan B)=\frac{a\sin(C-B)}{2\cos B\cos C}.$$

注意. 圖ガ種々ニ變化スレバ AE, AF, EF ノ値ノ中負トナルモノアルベシ. 然ルトキル其絕對値ヲ取リテ答トスレバ可ナリ.

陸軍士官候補生

1. 次ギノ各式ノ値ヲ求メヨ:

(i) $\sin 67^\circ\!\cdot\!5$. 但シ此値ハ小數（第二位マデ）ニテ表ハスコトヲモ要ス.

(ii) $\cos^4A+\cos^4(120^\circ+A)+\cos^4(240^\circ+A).$

V 【解】 (i) $\sin 67^\circ\!\cdot\!5=\sqrt{\dfrac{1-\cos135^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos45^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\cdot92\ (強).$$

V (ii)

原式 $=\cos^4A+(\cos120^\circ\cos A-\sin120^\circ\sin A)^4+(\cos240^\circ\cos A-\sin240^\circ\sin A)^4$

$$=\cos^4A+\left(-\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^4+\left(-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^4$$

$$=\cos^4A+\frac{1}{16}\{(\cos A+\sqrt{3}\sin A)^4+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)^4\}$$

$$=\cos^4A+\frac{1}{8}(\cos^4A+18\cos^2A\sin^2A+9\sin^4A)$$

$$=\frac{1}{8}(9\cos^4A+18\cos^2A\sin^2A+9\sin^4A)=\frac{9}{8}(\cos^2A+\sin^2A)^2=\frac{9}{8}.\ (答)$$

2. A+B+C=90° ナルトキ次ギノ等式ヲ證セヨ:

$$\frac{sin4A+sin4B+sin4C}{sin2A+sin2B+sin2C}=8sinAsinBsinC.$$

【解】 $sin4A+sin4B+sin4C$

$=2sin(2A+2B)cos(2A-2B)+2sin2Ccos2C$

$=2sin2Ccos(2A-2B)-2sin2Ccos(2A+2B)$　[∵ 2A+2B+2C=180°]

$=2sin2C\{cos(2A-2B)-cos(2A+2B)\}$

$=4sin2C\,sin2A\,sin2B=4(2sinCcosC)(2sinAcosA)(2sinBcosB)$

$=32sinA\,sinB\,sinC\,cosA\,cosB\,cosC,$

$sin2A+sin2B+sin2C=2sin(A+B)cos(A-B)+2sinCcosC$

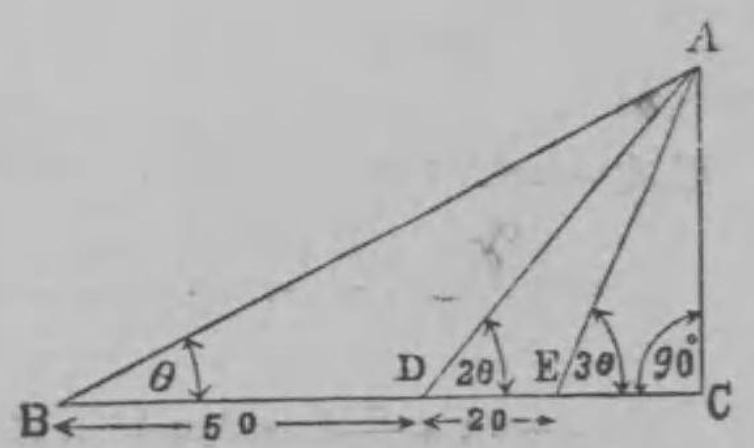
$=2cosCcos(A-B)+2cos(A+B)cosC$　[∵ A+B+C=90°]

$=2cosC\{cos(A-B)+cos(A+B)\}=4cosC\,cosA\,cosB.$

∴ 等式ノ左邊$=\dfrac{32sinA\,sinB\,sinC\,cosA\,cosB\,cosC}{4cosAcosBcosC}=8sinA\,sinB\,sinC.$

3. 次ギノ各問題ニ答ヘヨ:

(i) 下ニ記セル圖形ニ就キテ CA 及ビ EC ノ長サヲ求メヨ:



(ii) 水平ナル地面ニ東西ニ亘リテ長サ l 高サ h ナル板塀アリ. 太陽ノ方位ガ南 θ 西ニシテ其高度ガ α ナルトキ其板塀ノ影ニテ蔽ハル、地面ノ面積ハ幾何ナルカ.

【解】 (i) CA$=x$, EC$=y$ トスレバ

$tan\theta=\dfrac{x}{50+20+y}$…………(i),　　$tan2\theta=\dfrac{x}{20+y}$…………(ii),

$tan3\theta=\dfrac{x}{y}$…………(iii).

$tan2\theta=\dfrac{2tan\theta}{1-tan^2\theta}$ ナルヲ以テ (i), (ii) ヨリ $\dfrac{x}{20+y}=\dfrac{2\dfrac{x}{50+20+y}}{1-\left(\dfrac{x}{50+20+y}\right)^2}$

即チ　　$(70+y)(30-y)-x^2=0$…………(iv).　　但シ $x\neq0$.

又 $tan3\theta=\dfrac{tan2\theta+tan\theta}{1-tan2\theta tan\theta}$ ナルヲ以テ (i), (ii), (iii) ヨリ

$$\frac{x}{y}=\frac{\dfrac{x}{20+y}+\dfrac{x}{50+20+y}}{1-\dfrac{x}{20+y}\cdot\dfrac{x}{50+20+y}}$$

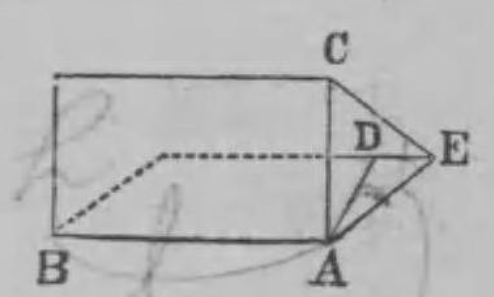
即チ　　$y^2+x^2=1400$…………(v).　　但シ $x\neq0$.

(iv)+(v)　　$y=17{\cdot}5$.

之ヲ (v) ニ代用シテ $x=\sqrt{1093{\cdot}75}=33{\cdot}1$(弱). 但シ負値ヲ棄ツ.

(答) CA=33·1(弱), EC=17·5.

【解】 (ii) AB ヲ塀ノ長サ, AC ヲ其高サトシ, ▱BE ヲ塀ノ影, AD⊥AB トスレバ



AB$=l$, AC$=h$, $E\hat{A}D=\theta$, $A\hat{E}C=\alpha$.

$E\hat{A}C=90°$ ナルヲ以テ　EA$=$ACcotAEC$=h\,cot\alpha$.

∴ AD$=$EAcosEAD$=h\,cot\alpha\,cos\theta$.

∴ ▱BE$=$AB . AD$=lh\,cot\alpha\,cos\theta$…………(答)

4. 三角形ノ三邊ガ $2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$ ナル比ヲナストキ其各角ヲ求メヨ.

【解】 三邊ヲ順次ニ a, b, c トスレバ

$a=2x$,　$b=\sqrt{6}x$,　$c=(\sqrt{3}+1)x$.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{6}x)^2+\{(\sqrt{3}+1)x\}^2-(2x)^2}{2(\sqrt{6}x)(\sqrt{3}+1)x}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore\ A=45°.$

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{6}x.\frac{1}{\sqrt{2}}}{2x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ [或ハ $\cos B$ ノ公式ニ依ルモ可ナリ.]

$\therefore\ B=60°.\quad \therefore\ C=180°-A-B=180°-45°-60°=75°.$

(答) 45°, 60°, 75°.

陸軍經理學校

1. $4\sin x+3\cos x=5$ ヨリ x ノ値ヲ求ム.

【解】 兩邊ヲ $\sqrt{4^2+3^2}=5$ ニテ除スレバ $\dfrac{4}{5}\sin x+\dfrac{3}{5}\cos x=1.$

$\sin\phi=\dfrac{4}{5},\ \cos\phi=\dfrac{3}{5}$ ト命ズレバ $\sin x\sin\phi+\cos x\cos\phi=1.$

卽チ $\cos(x-\phi)=\cos 0.$

$\therefore\ x-\phi=2n\pi,\quad x=2n\pi+\phi=2n\pi+\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{4}{5}$…………(答)

2. 邊數 n, 一邊 a ナル正多角形ノ內接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求ム.

【解】 AB ヲ多角形ノ一邊トシ OA, OC ヲ外接圓及ビ內接圓ノ半徑トスレバ $AC=\dfrac{a}{2},\quad OC\perp AB$

$\therefore\ OC=\dfrac{a}{2}\cot AOC=\dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\pi}{n},\quad OA=\dfrac{a}{2}\mathrm{cosec}\,AOC=\dfrac{a}{2}\mathrm{cosec}\dfrac{\pi}{n}.$

3. 高サ h 尺ナル塔上ニ旗竿ヲ立ツルアリ. 塔底ヨリ a 尺離レタル地平上ノ一點ニ於テ其塔頭及ビ竿頭ヲ望ミタルニ等角ニ見ヘタリト云フ. 旗竿ノ長サ幾何ナルカ.

【解】 問 380 ノ注意ヲ見ヨ.

4. 三角形ノ一角ガ 120° ナルトキ其對邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ大ナルコト其二邊ノ積ダケナルコトヲ證セヨ.

【解】 三角形ヲ ABC ト命ジ A=120° トスレバ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos 120°=b^2+c^2+bc.$$

∴ 題言ノ如シ.

海軍機關學校

1. 下式ヲ最簡ニセヨ:

$$\frac{\sin(180°+\theta)\tan^2(180°-\theta)}{\cos(270°+\theta)}-\frac{\sin(270°-\theta)\sec^2\theta}{\sin(90°+\theta)}.$$

【解】 原式$=\dfrac{-\sin\theta(-\tan\theta)^2}{\sin\theta}-\dfrac{-\cos\theta\sec^2\theta}{\cos\theta}=-\tan^2\theta+\sec^2\theta$

$=-\tan^2\theta+1+\tan^2\theta=1$…………(答)

2. 下ノ恒等式ヲ證セヨ:

$$\cos 4\theta-4\cos 2\theta+3=8\sin^4\theta.$$

【解】 左邊$=2\cos^2 2\theta-1-4\cos 2\theta+3=2\cos^2 2\theta-4\cos 2\theta+2$

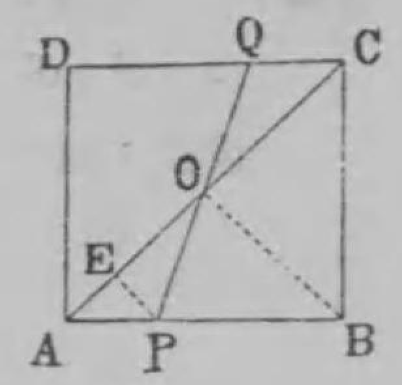
$=2(1-\cos 2\theta)^2=2(2\sin^2\theta)^2=8\sin^4\theta.$

3. A+B+C=180° ナルトキハ下ノ關係アルコトヲ證セヨ:

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

【解】 問 330 ノ解ノ中ヲ見ヨ.

4. 正方形 ABCD ノ二邊 AB, CD ノ上ニ夫々二點 P, Q ヲ取リ $AP=CQ=\frac{1}{3}AB$ ナラシムルトキハ直線 PQ ト對角線 AC トノ成ス角ノ正切如何.



【解】 AC, PQ ノ交點ヲ O トスレバ O ハ AC ノ中點ナルコト明ナリ.

PE ヲ AC ニ垂線ニ引キ, OB ヲ引キ引ケバ

$$A\hat{O}B=90°,$$

從ツテ　PE ∥ BO　ナルヲ以テ

$$\frac{EA}{OE}=\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}.$$

然ルニ　$E\hat{P}A=P\hat{A}E=45°$ ナル故　EA=EP

$$\therefore\ \frac{EA}{OE}=\frac{EP}{OE}=tan AOP=\frac{1}{2}\text{............(答)}$$

5. 方程式 $cos\theta-sin\theta=\frac{1}{2}$ ヲ解キテ

(i) $cos\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

(ii) $cos24°18'=\cdot9114$ ナルコトヲ知リテ θ ノ値ヲ 0° ヨリ 360° マデノ範圍内ニ於テ求メヨ.

【解】 (i) $cos\theta-\frac{1}{2}=sin\theta,\qquad cos^2\theta-cos\theta+\frac{1}{4}=1-cos^2\theta.$

$$2cos^2\theta-cos\theta-\frac{3}{4}=0.$$

$$\therefore\ cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{1+6}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}\text{............(答)}$$

[$sin\theta$ ニ正負兩樣ノ値アル上ニ最後ノ二値ハ共ニ絕對値 1 ヨリ大ナラザルヲ以テ複號ハ成立スルモノナリ].

【解】 (ii) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}=\cdot9114$ ニシテ $cos\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$(正數)　ナルトキ

$$sin\theta=cos\theta-\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{7}-1}{4}\ \text{(正數) ナリ.}$$

∴ 0° ト 360° トノ間ニ於テハ θ ハ第一象限ニ在リテ $\theta=24°18'$.

又 $cos\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$ (負數) ナルトキ

$$sin\theta=cos\theta-\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{7}}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1+\sqrt{7}}{4}=-\cdot9114$$

$$=-cos24°18'=-sin(90°-24°18')=-sin65°42'.$$

∴ 0° ト 360° トノ間ニ於テハ θ ハ第三象限ニ在リテ $\theta=180°+65°42'=245°42'$.

(答) 24°18'. 245°42'.

海軍經理學校

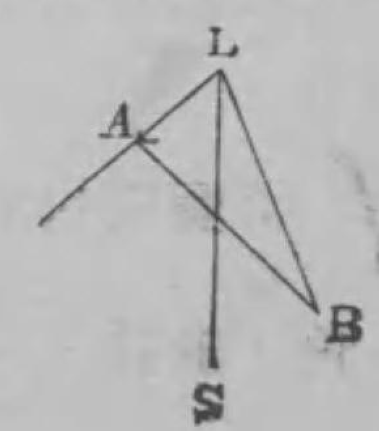
1. $sinA=\frac{3}{5}$ ヲ知リテ $tanA$ 及ビ $cosecA$ ヲ求メヨ.

【解】 $tanA=\frac{sinA}{cosA}=\frac{sinA}{\pm\sqrt{1-sin^2A}}.$

最後ノ式ニ sinA ノ値ヲ入ルレバ　$tanA=\pm\frac{3}{4}.$

又　$cosecA=\frac{1}{sinA}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}.$

2. 或ル人燈臺 L ヨリ南西及ビ南 15° 東ノ方向ニ二艘ノ船 A 及ビ B ヲ見タリ. AB ノ方向ハ南東ニシテ AL ノ距離ハ 4 哩アリト云フ. 二船ノ距離如何.



【解】 LS ヲ正南ノ方向トスレバ

$L\hat{A}B=90^\circ,\quad A\hat{L}B=45^\circ+15^\circ=60^\circ.$

$\therefore\ AB=AL\,tan\,ALB=4\sqrt{3}$ (哩)…………(答)

3. 三角形ノ一ツノ角ガ 120° ナルトキ其對邊ノ平方ト他ノ二邊ノ各平方ノ和トノ差ヲ問フ.

【解】 三角形ヲ ABC トシ $A=120^\circ$ トスレバ

$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A=2bc\left(-\frac{1}{2}\right)=-bc.$$

$\therefore\ a^2-(b^2+c^2)=bc.$　　$\therefore$ 所求ノ差ハ其二邊ノ積ニ等シ.

4. $tan^{-1}\frac{3}{4}=2tan^{-1}\frac{1}{3}$ ナルヤ如何.

【解】 $$tan\left(2tan^{-1}\frac{1}{3}\right)=\frac{2tan\left(tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1-\left\{tan\left(tan^{-1}\frac{1}{3}\right)\right\}^2}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

$\therefore\ tan^{-1}\frac{3}{4}=2tan^{-1}\frac{1}{3}$ ハ眞ナリ.

5. $log512$ ヲ算出スベシ. 但シ $log2=\cdot30103.$

【解】 $log512=log2^9=9log2=9\times\cdot30103=2\cdot70927$…………(答)

水　產　講　習　所

平面三角形ノ二邊ノ長サ 13 尺及ビ 15 尺ニシテ其夾角ノ餘弦ハ $\frac{33}{65}$ ナルトキ第三邊ノ長サ如何.

【解】 夾角ヲ A トシ第三邊ヲ x 尺トスレバ

$$x^2=13^2+15^2-2\times13\times15\times\cos A=196.\quad\left[\cos A=\frac{33}{65}\text{ ヲ代用ス}\right]$$

$\therefore\ x=14$ (尺)…………(答)

東京高等商業學校

1. $sinA+cosA=a$ ナルトキ $tanA+cotA$ ノ値ヲ a ニテ表ハセ.

【解】 $tanA+cotA=\frac{sinA}{cosA}+\frac{cosA}{sinA}=\frac{1}{sinAcosA}.$

假設ニ於ケル等式ノ平方ヲ作レバ　$1+2sinAcosA=a^2.$

$$\therefore\ sinAcosA=\frac{a^2-1}{2}.$$

$\therefore\ tanA+cotA=\frac{2}{a^2-1}$…………(答)

2. 三角形ノ三邊ノ比 7 : 8 : 13 ナリ. 此三角形ノ最大角ヲ求メヨ.

【解】 三邊ハ順次ニ $7x$, $8x$, $13x$ ニシテ, $13x$ ガ最大邊ナル故其對角ガ最大角ナリ. 今此角ヲ ϕ ト命ズレバ

$$\cos\phi=\frac{(7x)^2+(8x)^2-(13x)^2}{2(7x)(8x)}=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore\ \phi=120^\circ$…………(答)

高等學校（第二, 三部）

1. A ハ 0° ト 180° トノ間ニ在ル角ニシテ

$tan\mathrm{A}=-\frac{4}{3}$ ナルトキ $tan\frac{\mathrm{A}}{2}$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $tan\mathrm{A}=\dfrac{2tan\frac{\mathrm{A}}{2}}{1-tan^2\frac{\mathrm{A}}{2}}$ ナル公式ニ由リ

$$-\frac{4}{3}=\frac{2tan\frac{\mathrm{A}}{2}}{1-tan^2\frac{\mathrm{A}}{2}}\text{..........(i).}$$

分母ヲ去レバ　$-4+4tan^2\frac{\mathrm{A}}{2}=6tan\frac{\mathrm{A}}{2}.$

卽チ　$\left(2tan\frac{\mathrm{A}}{2}+1\right)\left(tan\frac{\mathrm{A}}{2}-2\right)=0.$　∴ $tan\frac{\mathrm{A}}{2}=-\frac{1}{2}$ 或ハ 2.

而シテ此二値ハ何レモ (i) ノ分母ヲ 0 トスルモノニアラザルガ故ニ (i) ノ根ナリ.

然ルニ $0°<\mathrm{A}<180°$.　從ツテ $0°<\frac{\mathrm{A}}{2}<90°$ ナルヲ以テ $tan\frac{\mathrm{A}}{2}>0$.

∴ $tan\frac{\mathrm{A}}{2}=2$ ノミヲ答トス.

2. $tan\theta=\frac{b}{a}$ ナルトキハ $a\,cos2\theta+b\,sin2\theta=a$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 終結ノ左邊 $=a(1-2sin^2\theta)+2b\,sin\theta\,cos\theta$

$=a(1-2sin^2\theta)+2sin\theta(b\,cos\theta).$

然ルニ假設ニ由リ　$\frac{sin\theta}{cos\theta}=\frac{b}{a}$,　∴ $a\,sin\theta=b\,cos\theta.$

∴ 終結ノ左邊 $=a(1-2sin^2\theta)+2sin\theta.\,a\,sin\theta=a.$

東京農科大學實科

1. 方程式 $cos\theta+cos2\theta+cos3\theta=0$ ヲ解ケ.

【解】 問 418 ノ如クニシテ

$cos2\theta=0$..........(i)　或ハ　$cos\theta=-\frac{1}{2}$..........(ii).

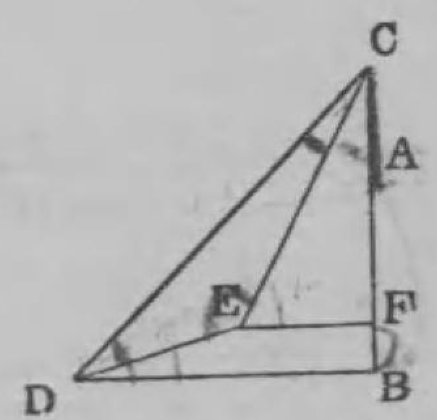
(i) ヨリ　$2\theta=2m\pi\pm\frac{\pi}{2}$,

∴ $\theta=m\pi\pm\frac{\pi}{4}=(4m\pm1)\frac{\pi}{4}=(2n+1)\frac{\pi}{4}=n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}.$

(ii) ヨリ　$\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$

(答)　$n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$　或ハ　$2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$

2. 山上ニ高サ 30 尺ノ塔アリ.　塔頂ノ仰角ヲ測リ 45° ヲ得. 夫レヨリ塔ニ向ヒテ 15° ノ傾斜角ヲ成ス直線狀ノ坂路ヲ登ルコト 5町ニシテ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得タリ. 初メノ測點ヨリ山ノ高キコト幾間ナルカ.



【解】 AB ヲ山ノ高サ, AC ヲ塔, D 及ビ E ヲ前後ノ測點, EF ヲ地平線トスレバ

$\mathrm{AC}=5$ 間,　$\mathrm{B\hat{D}C}=45°$,　$\mathrm{B\hat{D}E}=15°$,

$\mathrm{DE}=300$ 間,　$\mathrm{F\hat{E}C}=60°$.

$\mathrm{AB}=x$ 間トスレバ　$\mathrm{BC}=x+5$,

$\mathrm{CD}=\mathrm{BC}\,cosec\mathrm{BDC}=(x+5)\sqrt{2}$,

$\mathrm{E\hat{C}D}=\mathrm{A\hat{C}D}-\mathrm{A\hat{C}E}=45°-30°=15°$,

$\mathrm{E\hat{D}C}=45°-15°=30°$,　$\mathrm{D\hat{E}C}=180°-15°-30°=135°$.

△CDE ヨリ正弦比例ニ由リ

$$CD=\frac{DE\sin DEC}{\sin ECD}=\frac{300\sin 135^\circ}{\sin 15^\circ}.$$

$$\therefore\quad (x+5)\sqrt{2}=300\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad x=150(\sqrt{2}+\sqrt{6})-5=574\ (強).\qquad (答)\ 574\ 間强.$$

東北農科大學

1. $\tan z=\dfrac{\sin x}{\sin y}$ ナルトキ

$$\tan(z-45^\circ)=\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}$$ ヲ證セヨ.

【解】 假設ヨリ $\dfrac{\tan z}{1}=\dfrac{\sin x}{\sin y}.$

合除ノ理ニ由リ $\dfrac{\tan z-1}{\tan z+1}=\dfrac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y},$

即チ $\dfrac{\tan z-\tan 45^\circ}{1+\tan z\tan 45^\circ}=\dfrac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}},$ 即チ所題ノ如シ.

2. 90° ヨリモ小ナル正角ニシテ

$\cos\theta\sec 60^\circ-\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ ヲ滿足スル θ ノ値ヲ求ム.

【解】 與ヘラレタル方程式ヨリ $2\cos\theta-\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}.$

$$2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2},\qquad \left(4\sin\frac{\theta}{2}+3\right)\left(2\sin\frac{\theta}{2}-1\right)=0.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\theta}{2}=-\frac{3}{4}\ 或ハ\ \frac{1}{2}.$$

然ルニ $0^\circ<\theta<90^\circ$ ナルヲ以テ $0^\circ<\dfrac{\theta}{2}<45^\circ.$

$\therefore$ $\sin\dfrac{\theta}{2}$ ハ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヨリモ小ナル正數ナリ.

$\therefore$ $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ ノミヲ採用シ $\dfrac{\theta}{2}=30^\circ,$ 從ツテ $\theta=60^\circ$............(答)

醫學專門學校

1. A, B ヲ各々正ノ鋭角ナリトセバ $\sin(A+B)$ ト $\sin A+\sin B$ トハ何レガ大ナルカ.

【解】 本年度大阪高等工業學校ノ問題ヲ参照セヨ.

2. $\triangle ABC$ ニ於テ $\sin A=2\cos B\sin C$ ナル關係アルトキハ此三角形ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ.

【解】 假設ヨリ $\sin A=\sin(B+C)-\sin(B-C)$

$=\sin A-\sin(B-C).\quad [\because\ A+B+C=180^\circ]$

$\therefore\quad \sin(B-C)=0.$

然ルニ $|B-C|<180^\circ.\quad \therefore\ B-C=0^\circ,\quad \therefore\ B=C.$

$\therefore$ 題言ノ如シ.

【別解】 假設ニ正弦比例及ヒ $\cos.$ ノ公式ヲ用フレバ

$a=2\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}c,$ 即チ $a^2=c^2+a^2-b^2.$

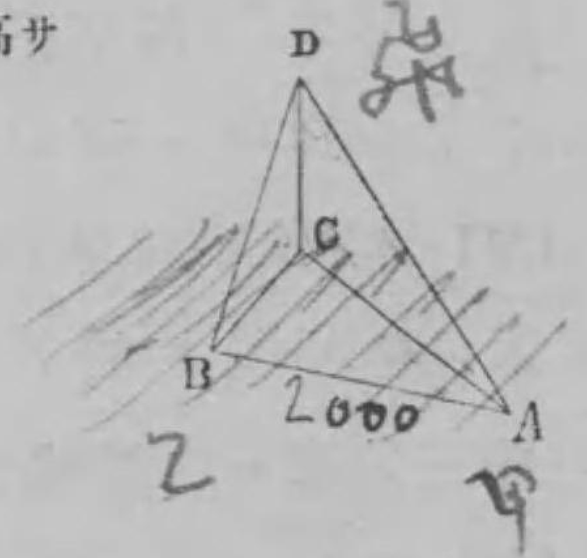
$\therefore\ b^2=c^2,\ b=c.$

新潟醫學專門學校

1. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ヲ證セヨ.

【解】 問 140 ノ注意ヲ見ヨ.

2. 同一水平面上ニ在リテ相距ルコト二粁ナル甲乙二點ニ於テ同時ニ飛行船ノ方位及ビ仰角ヲ測リタルニ甲ニ於テハ方位北, 仰角 30°, 乙ニ於テハ方位東, 仰角 60° ヲ得タリ. 飛行船ノ高サヲ米ノ位マデ計算シ未滿ハ四捨五入セヨ.



【解】 A, B ヲ甲乙ノ測點, CD ヲ飛行船ノ高サトスレバ AB=2000 米.

$A\hat{C}B=90^\circ$, $C\hat{A}D=30^\circ$, $C\hat{B}D=60^\circ$.

CD$=x$ 米トスレバ $A\hat{C}D=B\hat{C}D=90^\circ$ ナル故

$$AC=x\cot 30^\circ=x\sqrt{3},$$

$$BC=x\cot 60^\circ=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

「ピタゴラス」ノ定理ニ由リ

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2 \quad 卽チ \quad x^2\left(3+\frac{1}{3}\right)=4000000.$$

∴ $x=\sqrt{1200000}=1095$ (米) 强…………(答)

$1+ta^2=sec^2$ $\frac{1}{cos^2}$ $1-ta^2$

鹿兒島高等農林學校

1. $\frac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{1+\tan^2(45^\circ-A)}=\sin 2A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\frac{\cos^2(45^\circ-A)-\sin^2(45^\circ-A)}{\cos^2(45^\circ-A)}\div\sec^2(45^\circ-A)$

$$=\frac{\cos 2(45^\circ-A)}{\cos^2(45^\circ-A)}\times\cos^2(45^\circ-A)=\cos(90^\circ-2A)=\sin 2A.$$

2. △ABC ニ於テ $\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$ ナルトキハ此三角形ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ.

【解】 本年度醫學專門學校ノ問題 (2) ト同ジモノナリ.

海軍兵學校

1. 次式ヲ積ノ形ニ改ムベシ:

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta.$$

【解】 原式$=(\sin\theta+\sin 4\theta)+(\sin 2\theta+\sin 3\theta)$

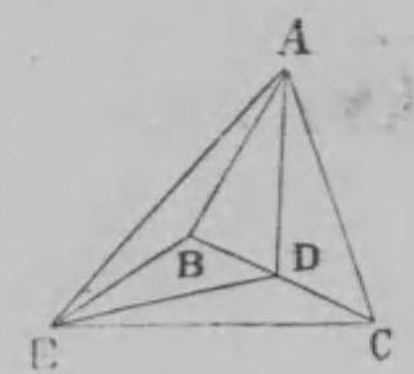
$$=2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{5\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{5\theta}{2}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}$$…………(答)

2. 二等邊三角形ノ板アリ. 其底邊ハ五間半ニシテ底角ハ 60° ナリ. 今之ヲ底邊ヲ下方ニシテ高度 30° ナ

ル太陽ニ正面ニシ且ツ地面ニ垂直ニ立ツルトキハ此板ノ投影ノ面積ハ幾何トナルカ.

【解】 板ヲ ABC トシ, 其投影ヲ EBC トス. A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ引キ, ED ヲ引ケ.



然ルトキハ $BC=5\frac{1}{2}$間.

$A\hat{B}C=60°$, $A\hat{D}E=90°$, $D\hat{E}A=30°$,

$AD=BD\,tan ABC=5\frac{1}{2}\div 2\times\sqrt{3}$

[∵ D ハ BC ノ中點].

$ED=AD\,cot DEA=5\frac{1}{2}\div 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$.

$$\therefore\ \triangle EBC=\frac{1}{2}BC\times ED=\frac{1}{2}\times 5\frac{1}{2}\times\left(5\frac{1}{2}\div 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right)$$

$$=22\frac{11}{16}\text{(坪)}\dots\dots\dots\text{(答)}$$

---

3. $sin A+cos A=-1$ ナル方程式ヲ滿足スル A ノ値ヲ 360° 以内ノ正角ニテ求メヨ.

【解】 方程式ノ兩邊ヲ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ニテ除スレバ

$\frac{1}{\sqrt{2}}sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}cos A=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 即チ $sin(A+45°)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore\ A+45°=225°,\ 315°.$ $\quad\therefore\ A=180°,\ 270°$…………(答)

4. 方程式 $x^2+ax+b=0$ ノ二根ハ $tan\theta$ 及ビ $tan\phi$ ナルコトヲ知リテ $cos^2(\theta+\phi)$ ノ値ヲ a 及ビ b ニテ表ハセ.

【解】 根ト係數トノ關係ニ由リ $tan\theta+tan\phi=-a$, $tan\theta\,tan\phi=b$.

$$\therefore\ tan(\theta+\phi)=\frac{tan\theta+tan\phi}{1-tan\theta\,tan\phi}=\frac{-a}{1-b}.$$

$$\therefore\ cos^2(\theta+\phi)=\frac{1}{sec^2(\theta+\phi)}=\frac{1}{1+tan^2(\theta+\phi)}=\frac{1}{1+\left(\frac{-a}{1-b}\right)^2}$$

$$=\frac{(1-b)^2}{a^2+(1-b)^2}\dots\dots\dots\text{(答)}$$

5. 角 A ガ 200° ナルトキ下式ニ於テ其複符號ノ何レヲ採用スベキカヲ研究セヨ:

$$tan\frac{A}{2}=cot A(\pm sec A-1).$$

【解】 $tan\frac{A}{2}=tan 100°=$(負數) ナル故與ヘラレタル等式ノ右邊亦負數ナラザルベカラズ.

然ルニ $cot A=cot 200°=$(正數) ナルヲ以テ $\pm sec A-1$ ハ負數ナルヲ要ス.

而シテ $sec A=sec 200°=$(負數) ニシテ其絕對値ハ 1 ヨリ大ナルガ故ニ $\pm sec A-1$ ヲ負トナスニハ複符號ノ中ノ (+) ヲ採ルヲ要ス.

即チ A=200° ナルトキハ $+sec A$ ヲ採ルベシ.

注意. $$tan\frac{A}{2}=\frac{sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}=\frac{2sin^2\frac{A}{2}}{2sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}}=\frac{1-cos A}{sin A}=\frac{cos A(sec A-1)}{sin A}$$

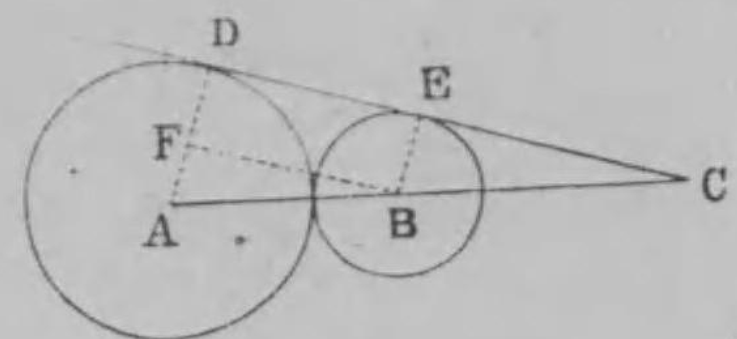
$$=cot A(sec A-1).$$

$\therefore\ tan\frac{A}{2}=cot A(\pm sec A-1)$ ト複號ヲ用フルハ宜シカラズ. 出題者ノ不注意ナリト認ム.

6. 半徑ノ長サ夫々 R, r ナル大小ノ二圓ガ互ニ外切セルアリ. 此兩圓ノ共通切線ノ成ス角ヲ α トスレバ次ギノ關係ノ成立スルコトヲ證セヨ:

$$sin\alpha=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.$$

【解】 二圓ノ中心ヲ A, B トシ, 共通切線ノ切點ヲ D, E トシ, 二直線 AB, DE ノ交點ヲ C トスレバ明カニ



$$B\hat{C}E=\frac{\alpha}{2}.$$

半徑 AD, BE ヲ引キ, BF ヲ ED ニ平行ニ引ケ.

然ルトキハ $$A\hat{B}F=B\hat{C}E=\frac{\alpha}{2}.$$

$B\hat{F}A=90°$ ナルヲ以テ $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin ABF=\frac{FA}{BA}=\frac{R-r}{R+r}.$$

又 $$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{BF}{AB}=\frac{\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AF}^2}}{AB}=\frac{\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}}{R+r}=\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\frac{R-r}{R+r}\cdot\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.$$

注意. 共通切線トハ外共通切線ノ意ナリ. 問題ヲ此クノ如ク漠然ト出ダスコトハ出題者ノ故意カ不注意カ疑ハシ.

商船學校

1. 下式ヲ簡單ニセヨ:

$$(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha-\sec\alpha)^2-(\tan\alpha-\cot\alpha)^2.$$

【解】 原式 $=\sin^2\alpha-2+\operatorname{cosec}^2\alpha+\cos^2\alpha-2+\sec^2\alpha-\tan^2\alpha+2-\cot^2\alpha$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\operatorname{cosec}^2\alpha+\sec^2\alpha-(1+\tan^2\alpha)-(1+\cot^2\alpha)$

$=1+\operatorname{cosec}^2\alpha+\sec^2\alpha-\sec^2\alpha-\operatorname{cosec}^2\alpha=1$..............(答)

2. $\tan\alpha$ ヲ以テ α ノ他ノ三角函數ヲ表ハスベキ式ヲ作レ.

【解】 本問ハ問 10 ト同ジ.

3. 下式ヲ證セヨ:

$$\sin 2A=2\sin A\cos A,\quad \sin 3A=3\sin A-4\sin^3A.$$

【解】 本問ハ第 19 條及ビ第 21 條ニ擧ゲタル公式ニシテ其證ハ普通ノ教科書ニ在リ.

4. $$\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A}=\tan 4A$$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊 $=\dfrac{(\sin A+\sin 7A)+(\sin 3A+\sin 5A)}{(\cos A+\cos 7A)+(\cos 3A+\cos 5A)}=\dfrac{2\sin 4A\cos 3A+2\sin 4A\cos A}{2\cos 4A\cos 3A+2\cos 4A\cos A}$

$=\dfrac{\sin 4A(\cos 3A+\cos A)}{\cos 4A(\cos 3A+\cos A)}=\dfrac{\sin 4A}{\cos 4A}=\tan 4A.$

5. 方程式 $\sec 4\theta-\sec 2\theta=2$ ヲ解ケ.

【解】 $\dfrac{1}{\cos 4\theta}-\dfrac{1}{\cos 2\theta}=2,\qquad \dfrac{\cos 2\theta-\cos 4\theta}{\cos 4\theta\cos 2\theta}-2=0.$

$\sec 4\theta\sec 2\theta(\cos 2\theta-\cos 4\theta-2\cos 4\theta\cos 2\theta)=0,$

$\cos 2\theta-\cos 4\theta-\cos 6\theta-\cos 2\theta=0$ 〔$\sec 4\theta\ \sec 2\theta\neq 0$〕,

$\cos 4\theta=-\cos 6\theta=\cos(180°+6\theta),\quad \therefore\ 180°+6\theta=n.360°\pm 4\theta.$

$\therefore\ \theta=(2m+1)90°$ 或ハ $(2m+1)18°$..............(答)

6. $A+B+C=180°$ トシテ下式ヲ證スベシ:

$$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=2\sin A\sin B\cos C.$$

【解】 左邊 $=\sin^2A+\sin(B+C)\sin(B-C)$ 〔第 67 頁ノ公式〕

$=\sin A\sin(B+C)+\sin A\sin(B-C)$ 〔$\because\ A+B+C=180°$〕

$=\sin A\{\sin(B+C)+\sin(B-C)\}=$ 右邊

7. △ABC ニ於テ三邊ノ和半ヲ s トスレバ下ノ關係アルコトヲ證セヨ:

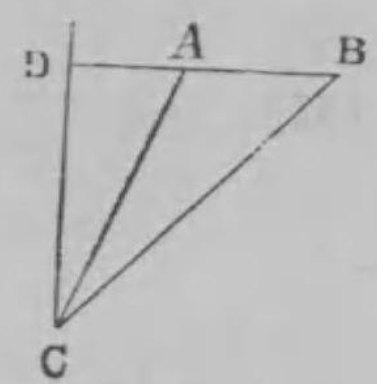
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

【解】 是レ第 50 條ノ公式ニシテ普通ノ教科書ニ其證アリ.

8. 正北ニ向ヒテ航海セル船ヨリ二ツノ燈臺ヲ望ミタリシニ或ル時ニハ夫レガ北東及ビ北々東ノ方向ニ在リタルモノガ二十浬走リタル後ニハ孰レモ正東ニ在リテ一直線上ニ見ヘタリト云フ. 兩燈臺ノ距離如何.

【解】 A, B ヲ兩燈臺トシ C, D ヲ前後ノ測點トスレバ $D\hat{C}B=45°$, $D\hat{C}A=22°\cdot5$,

$\hat{D}=90°$, $CD=20$ 浬.



今 $AB=x$ 浬トスレバ $AB=DB-DA$ ナルヲ以テ

$x=20\tan45°-20\tan22°\cdot5=20(1-\tan22°\cdot5)$.

然ルニ $\tan22°\cdot5=\sqrt{\dfrac{1-\cos45°}{1+\cos45°}}=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\sqrt{2}-1$.

$\therefore\ x=20(1-\sqrt{2}+1)=20(2-\sqrt{2})$ (浬)…………(答)

同　上　(第二回)

1. $\sec A=\sqrt{2}$ ナルトキ A ヲ直角以內トシテ次式ノ數値ヲ求ムベシ:

$$\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\cos A}}.$$

【解】 $\cos A=\dfrac{1}{\sec A}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}$ 〔A ハ直角以內ナル故正根ヲ採ル〕

$=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ 原式$=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{2}-1$………(答)

2. $\sin5A$ ヲ $\sin A$ ニテ表ハセ.

【解】 $\sin5A=\sin5A+\sin A-\sin A=2\sin3A\cos2A-\sin A$

$=2(3\sin A-4\sin^3A)(1-2\sin^2A)-\sin A$

$=5\sin A-20\sin^3A+16\sin^5A$…………(答)

3. $$\frac{\tan(180°-A)\sec^2(270°-A)\tan^3(90°-A)}{\sec^2(90°-A)\cos^2(180°+A)}=-\frac{4}{3}$$

ナルトキハ二直角以內ニ於ケル A ノ數値如何.

【解】 左邊$=\dfrac{-\tan A\sec^2(360°-90°-A)\cot^3A}{\mathrm{cosec}^2A\cos^2A}=\dfrac{-\sec^2(90°+A)\cot^2A}{\mathrm{cosec}^2A\cos^2A}$

$=\dfrac{-\mathrm{cosec}^2A\cot^2A}{\mathrm{cosec}^2A\cos^2A}=-\dfrac{1}{\sin^2A}=-\mathrm{cosec}^2A$.

$\therefore\ -\mathrm{cosec}^2A=-\dfrac{4}{3}$,

$\therefore\ \mathrm{cosec}A=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ [A ガ 180° 以內ノモノナル故正根ヲ採レリ].

$\therefore\ A=60°$ 或ハ $120°$.

4. $\tan^2\theta=2\tan^2\phi+1$ ナルトキハ下式ヲ證セヨ:

$$\cos2\theta+\sin^2\phi=0.$$

【解】 假設ノ兩邊ニ 1 ヲ加フレバ $\sec^2\theta=2\sec^2\phi$.

反數ヲ比較スレバ $\cos^2\theta=\dfrac{\cos^2\phi}{2}$. $\therefore\ 2\cos^2\theta-\cos^2\phi=0$,

$2\cos^2\theta-1+1-\cos^2\phi=0$, 即チ $\cos2\theta+\sin^2\phi=0$.

5. 直角三角形 ABC(C=90°) ニ就キテ次式ヲ證セヨ:

$$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{c-a}{2c}.$$

【解】 右邊$=\frac{sinC-sinA}{2sinC}=\frac{1-cosB}{2}$ [$\because$ C=90°, A+B=90°.]

=右邊.

6. 一邊ノ長サ2寸ナル正六邊形ニ内切スル圓ノ面積ヲ求ム.

【解】 所求ノ圓ノ半徑ハ一邊ノ長サ 2 寸ナル正三角形ノ高サニシテ, 換言スレバ斜邊ノ長サガ 2 寸ニシテ一鋭角ガ 60° ナル直角三角形ノ此角ノ對邊ナリ.

$\therefore$ 半徑$=2sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 面積$=\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$(平方寸)…………(答)

7. △ABC ニ就キテ $sin\frac{B\sim C}{2}=\frac{b\sim c}{a}cos\frac{A}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊$=\frac{sinB\sim sinC}{sinA}cos\frac{A}{2}$ [正弦比例]

$$=\frac{2cos\frac{B+C}{2}sin\frac{B\sim C}{2}}{2sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}}cos\frac{A}{2}$$

$$=\frac{sin\frac{A}{2}sin\frac{B\sim C}{2}}{sin\frac{A}{2}} \quad \left[\because \frac{B+C}{2}+\frac{A}{2}=90°\right]$$

=左邊.

8. 三角形ノ三邊ヲ a, b, c トシ之ニ對スル角ヲ夫々 $2\theta, 3\theta, 4\theta$ トシテ次式ヲ證セヨ:

$$tan^2\theta=\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2-1.$$

【解】 右邊$=\left(\frac{2sinB}{sinC+sinA}\right)^2-1=\left(\frac{2sin3\theta}{sin4\theta+sin2\theta}\right)^2-1.$

$$=\left(\frac{2sin3\theta}{2sin3\theta cos\theta}\right)^2-1=sec^2\theta-1=1+tan^2\theta-1=\text{左邊}.$$

大正三年度

諸官立學校入學試驗問題

及ビ

答　　解

專門學校入學者檢定

1. $\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\ \cos\beta=\dfrac{5}{13}$ ナルトキ $\tan 2(\alpha+\beta)$ ノ值ヲ求ム. 但シ α,β ハ何レモ 90° 未滿ノ正角ナリトス.

【解】 $\tan\alpha=\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-1}=\dfrac{4}{3}$ (α ガ 90° 未滿ノ正角ナル故 $\tan\alpha$ ハ正ナレバナリ). 同樣ニ $\tan\beta=\dfrac{12}{5}$.

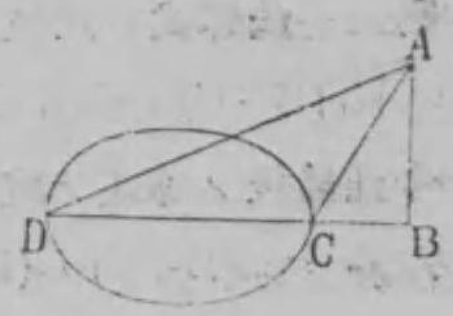
$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{4}{3}+\dfrac{12}{5}}{1-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{12}{5}}=-\frac{56}{33}$$

$$\therefore\quad \tan 2(\alpha+\beta)=\frac{2\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\left(-\dfrac{56}{33}\right)}{1-\left(-\dfrac{56}{33}\right)^2}=\frac{3696}{2047}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

2. $A=18°$ ナルトキハ $\sin 2A=\cos 3A$ ナリ. 之ニ由リテ $\sin 18°$ ノ值ヲ求ム.

【解】 問 99 ヲ見ヨ.

3. 丘上ヨリ其麓ニ在ル圓形ノ池ヲ望見シ, 池畔ノ最モ近キ點及ビ最遠キ點ノ俯角ヲ測リ, 夫々 45° 及ビ 30° ヲ得タリ. 池ノ直徑ヲ求ム. 但シ丘ノ頂上ハ池面ヨリ 500 尺ノ高サニ在リ.



【解】 AB ヲ丘トシ, C 及ビ D ヲ夫々池畔ノ最近點及ビ最遠點トスレバ, DC ハ丘脚ニ向フ直徑トナル. 而シテ題意ニ由リ $A\hat{C}B=45°$, $A\hat{D}B=30°$, $AB=500$ 尺.

偖 $A\hat{B}C=90°$ ナル故, $DB=BA\cot ADB=500\sqrt{3}$,

$CB=BA\cot ACB=500.$

$\therefore\ DC=DB-CB=500(\sqrt{3}-1).$　　(答) $500(\sqrt{3}-1)$ 尺.

東北帝國大學工學部專門部

1. 方程式 $\tan\theta+\tan 2\theta+\tan 3\theta=0$ ヲ解ケ.

【解】 $\tan\theta+\tan 2\theta=-\dfrac{\tan\theta+\tan 2\theta.}{1-\tan\theta\tan 2\theta}.$

$\therefore\ \tan\theta+\tan 2\theta=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$, 或ハ $1=-\dfrac{1}{1-\tan\theta\tan 2\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$

(i) ヨリ　$\tan\theta=\tan(-2\theta)$, $\theta=n\pi-2\theta$, $\theta=\dfrac{n}{3}\pi.$

(ii) ヨリ　$\tan\theta\tan 2\theta=2$, $\tan\theta\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2$, $\tan\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

$\therefore\ \theta=n\pi\pm\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$　　(答) $\dfrac{n}{3}\pi,\ n\pi\pm\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

2. △ABC ニ於テ角 A, B, C ニ對スル邊ノ長サヲ夫

々 a, b, c トスレバ次式ヲ證セヨ:

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin C}=0.$$

【解】 兩邊ニ $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$ ヲ乘ズレバ 本問ハ

$a \sin(B-C)+b \sin(C-A)+c \sin(A-B)=0$ トナル.

然ルニ此等式ハ正弦比例ヲ用フレバ

$\sin A \sin(B-C)+\sin B \sin(C-A)+\sin C \sin(A-B)=0$ トナル.

今此最後ノ等式ヲ證セン.

左邊$=\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)+\sin(A+B)\sin(A-B)$

$=\sin^2 B-\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A+\sin^2 A-\sin^2 B=0.$

∴ 本問ヲ證シ得タリ.

米澤高等工業學校

恒等式 $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta=$右邊.

名古屋高等工業學校

邊 a, b, c 及ビ對角 A, B, C ナル三角形ニ於テ

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊$=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}=\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2(A+B)}=$左邊.

神戸高等商業學校

塔アリ. 或ル地點ヨリ其頂點ヲ望ミタルニ, 仰角 30° ナリ. 而シテ此地點ヨリ塔ニ向ヒ 100尺 進ミ, 再ビ之ヲ望ミタルニ仰角 45° ナリシト云フ. 塔ノ高サ幾尺ナルカ.

【解】 問 353 ヲ簡單ニシタルモノナル故解ヲ略ス.

盛岡高等農林學校

1. 直角三角形ノ直角ノ二邊ノ比ヲ $2+\sqrt{3}:1$ トセバ二鋭角ノ差ノ餘弦ノ値如何.

【解】 大小二鋭角ヲ夫々 A, B トスレバ, $\sin A=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B=2\sin A\sin B$

$=2\times\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\times\dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{2}$..............(答)

2. $\tan A+\sin A=m$, $\tan A-\sin A=n$ ナレバ

$m^2-n^2=4\sqrt{mn}$ ヲ證セヨ.

【解】 問 25 ヲ見ヨ.

秋田鑛山專門學校

1. a ナル高サノ塔ノ上ニ b ナル長サノ柱ヲ樹テタ

ルアリ．今一人ノ觀測者カ塔底ヲ通ズル水平面上ニ在リテ塔ト柱トヲ相等シキ角度ノ內ニ視ントセバ，塔底ヨリ幾何ノ距離ニ在ルベキカ．

【解】 問 380 ヲ見ヨ．

2. $sin(B+C-A)$, $sin(C+A-B)$, $sin(A+B-C)$ ガ等差級數ヲナストキハ $tanA$, $tanB$, $tanC$ モ亦等差級數ヲナスコトヲ證セヨ．

【解】 假設ニ由リ

$$sin(B+C-A)-sin(C+A-B)=sin(C+A-B)-sin(A+B-C).$$

卽チ $$2cosC\,sin(B-A)=2cosA\,sin(C-B).$$

兩邊ヲ $2cosA\,cosB\,cosC$ ニテ除スレバ $$\frac{sin(B-A)}{cosA\,cosB}=\frac{sin(C-B)}{cosB\,cosC},$$

卽チ $$tanB-tanA=tanC-tanB.$$

∴ 題言ノ如シ．

上田蠶絲專門學校

1. 一ツノ圓形ノ池ガ地上ノ一點ニ於テ張ル視角ハ 60° ニシテ此點ト池邊トノ最近距離ハ 15 間ナリト云フ．池ノ直徑幾何．

【解】 問 350 ヲ見ヨ．

2. A, B, C ガ一ツノ三角形ノ三ツノ角ナルトキ

$$sinA+sinB+sinC=4cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2}$$ ヲ證セヨ．

【解】 普通ノ教科書ニ解アリ．

商船學校 (第一回)

1. 次式ヲ A ノ三角函數ニテ表ハセ．

$$\frac{sin(A-90°)}{cos(A+90°)}.$$

【解】 原式$=\dfrac{-cosA}{-sinA}=cotA$ (答)

2. $sin\theta=m-n$, $tan\theta=m+n$ ナラバ $(m^2-n^2)^2=4mn$ ナルコトヲ證セヨ．

【解】 $$(m^2-n^2)^2=\{(m+n)(m-n)\}^2=(sin\theta\,tan\theta)^2=\frac{sin^4\theta}{cos^2\theta}=\frac{sin^2\theta(1-cos^2\theta)}{cos^2\theta}$$
$$=tan^2\theta-sin^2\theta=(m+n)^2-(m-n)^2=4mn.$$

3. $8sin^4\dfrac{\theta}{2}=cos2\theta-4cos\theta+3$ ヲ證セヨ．

【解】 大正二年度海軍機關學校問題 (2) ヲ見ヨ．

4. $tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $tan\beta=\dfrac{1}{3}$ ナラバ $\alpha+\beta=45°$ トナルコトアルヲ示セ．

【解】 問 70 ヲ見ヨ．

5. 方程式 $tan^2\theta-4tan\theta+1=0$ ヲ解ケ．

【解】 $tan\theta=2\pm\sqrt{3}=tan\dfrac{5\pi}{12}$ 或ハ $tan\dfrac{\pi}{12}$．

∴ $\theta=n\pi+\dfrac{5\pi}{12}$ 或ハ $n\pi+\dfrac{\pi}{12}$…………(答)

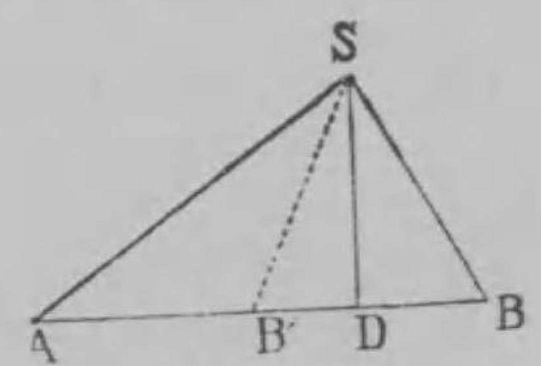
6. △ABC ニ於テ $sin(B-C)=\dfrac{b^2-c^2}{a^2}sinA$ ヲ證セヨ．

【解】 $sinA=sin(B+C)$ ナル故，本問ハ本年度名古屋高等工業學校ノ問題ト同ジモノトナルベシ．

7. 三角形ノ三邊ガ 5, 7, 8 ナルトキハ 7 ニ對スル角如何.

【解】 所求ノ角ヲ A トスレバ $\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$. $\therefore$ $A=60°$.

8. 某港ニ碇泊スル船ノ距離ヲ知ラント欲シ, 海岸ニ於テ長サ c 尺ノ基線ヲ測リ, 其兩端ノ點ニ於テ船ノ方向ガ基線ト成セル角ヲ測リ α, β ヲ得タリ. 然ラバ船ト基線トノ距離ヲ見出ダス式如何.



【解】 S ヲ船ノ位置トシ A, B ヲ測點トスレバ $AB=c$ 尺, $S\hat{A}B=\alpha$, $S\hat{B}A=\beta$.

S ト AB トノ距離ヲ SD トシ, 此長サヲ x 尺トスレバ

$$x\cot\alpha+x\cot\beta=c.$$

$$\therefore\quad x=\frac{c}{\cot\alpha+\cot\beta}=\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}(\text{尺})\quad(\text{答}).$$

注意. 二測點ヲ A, B′ トシ $S\hat{B'}B=\beta$ トスレバ

$$x\cot\alpha-x\cot\beta=c.$$

之ヨリ $x=\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$(尺) ヲ得. 之ヲ答トスルモ可ナリ.

大阪高等工業學校

方程式 $\cos\theta+\cos3\theta=\frac{1}{2}$ ノ根ハ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ニヨリ與ヘラルヽコトヲ證明シ且ツ 180° 以下ノ正角ニテスベテノ根ヲ求メヨ.

【解】 $\cos\theta+4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\quad 8\cos^3\theta-4\cos\theta-1=0$.

然ルニ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ヲ知レルヲ以テ最後ノ方程式ノ左邊ニハ $2\cos\theta+1$ ナル因數アルベシ.

$\therefore$ 最後ノ方程式ハ $(2\cos\theta+1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0$.

$\therefore$ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$..........(i) 或ハ $4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$..........(ii).

(i) ヨリ $\theta=120°$.

(ii) ヨリ $\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. 之ヨリ $\theta=36°$ 或ハ 108°.

(答) 36°, 108°, 120°.

陸軍士官候補生採用試驗

1. A ガ 7°.5, 15°, 30°, 60° ナルトキノ $\sin^4A-\cos^4A$ ノ値ヲ求メヨ. 但シ 7°.5 ノ場合ノミ運算ヲ記セヨ.

【解】 $\sin^4A-\cos^4A=(\sin^2A+\cos^2A)(\sin^2A-\cos^2A)=-\cos2A$.

$\therefore$ $A=7°.5$ ナルトキ $-\cos2A=-\cos15°=-\cos(45°-30°)$

$$=-\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°=-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

又 A ガ 15°, 30°, 60° ナル場合ニ $-\cos2A$ ハ夫々 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ トナル.

2. 三角形 ABC ノ二邊 b, c ト夾角 A トヲ與ヘテ此三角形ヲ解ク方法ニ就キ次ノ各問題ニ答ヘヨ:

(A) 眞數計算ニ適スルモノヲ記セヨ.

(B) 對數計算ニ適スルモノヲ記セヨ.

(C) $b=2$寸, $c=\sqrt{6}$寸, $A=75°$ ナルトキ殘リノ邊

a ヲ計算セヨ.

【解】 (A) $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$ ヨリ a ヲ求ム.

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ ヨリ B ヲ求メ, $C=180°-(A+B)$ ヨリ C ヲ求ム.

(B) $L\tan\dfrac{B-C}{2}=\log(b-c)+L\cot\dfrac{A}{2}-\log(b+c)$ ヨリ $\dfrac{B-C}{2}$ ヲ求メ,

之ト $\dfrac{B+C}{2}=90°-\dfrac{A}{2}$ トヨリ B, C ヲ求ム.

$\log a=\log b+L\sin A-L\sin B$ ヨリ a 求ム.

(C) $a=\sqrt{2^2+(\sqrt{6})^2-2\times2\times\sqrt{6}\times\cos75°}$

$=\sqrt{\left(4+6-4\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}=1+\sqrt{3}.$

3. 三角形ノ各角ヲ A, B, C トシ之ニ對セル邊ヲ夫々 a, b, c トスルトキ, 次ノ各等式ヲ證セヨ.

(A) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{abc}{2S}.$ 但シ S ハ三角形ノ面積ナリトス.

(B) $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}.$

【解】 (A) 第 52 條ノ公式ト問 317 トヲ見ヨ.

(B) $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ [問 183 ノ注意].

$\dfrac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}=\dfrac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$ [正弦比例ニ由ル].

$$=\frac{2\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

[分子ハ第 19 條ノ公式ニ依リ, 分母ノ變形ハ普通ノ教科書ニ其說明アリ.]

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$\therefore\quad \cos A+\cos B+\cos C-1=\dfrac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}.$

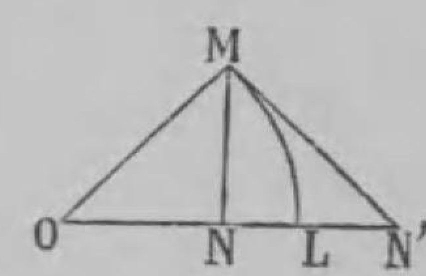
-1 ヲ右邊ニ移セバ所題ノ如クナル.

4. $0°<A<90°$ ナル一角 A ノ弧度ヲ θ トスルトキ次ノ問題ニ答ヘヨ:

(A) $\sin\theta<\theta$ ヲ證セヨ.

(B) A ガ微小ナルトキハ $\sin\theta, \theta, \tan\theta$ ハ殆相等シク, $\cos\theta$ ト $1-\dfrac{\theta^2}{2}$ トモ亦殆相等シキコトヲ證セヨ.

(C) 身長五尺四寸ノ兵士ノ直立セルヲ十八町二十四間ノ距離ヨリ見タルトキノ身長ノ視角ヲ弧度竝ニ六十分法ノ單位ナル分ニテ表ハセ.



【解】 (A) $L\hat{O}M=A$ トシ, O ヲ中心トシ任意ノ長サ OL ヲ半徑トシテ LM 弧ヲ作リ, MN ヲ OL ニ垂線ニ引ケ.

然ルトキハ幾何ノ定理ニ由リ $NM<\widehat{LM}$ ナル故, 双方ヲ OM ニテ除スレバ

$\dfrac{NM}{OM}<\dfrac{\widehat{LM}}{OM}$ 卽チ $\sin\theta<\theta.$

(B) 上圖ニ於テ M ニ於ケル切線 MN′ ヲ引クトキハ, 幾何ノ定理ニ由リ $\widehat{LM}<MN'.$ $\therefore$ $\dfrac{\widehat{LM}}{OM}<\dfrac{MN'}{OM}$ 卽チ $\theta<\tan\theta.$

之ト (A) トニ由リ $\sin\theta<\theta<\tan\theta$

全體ヲ $sin\theta$ ニテ除スレバ $1<\frac{\theta}{sin\theta}<\frac{1}{cos\theta}$.

今 θ ヲ微小トスレバ $\frac{1}{cos\theta}$ ハ殆 1 ニ等シキガ故ニ之ト 1 トノ間ノ値ナル $\frac{\theta}{sin\theta}$ モ亦殆 1 ニ等シ.　∴ 此場合ニ殆 $sin\theta=\theta$.

又 $\frac{tan\theta}{sin\theta}=\frac{1}{cos\theta}$ ナル故 θ ノ微小ナルトキ $\frac{tan\theta}{sin\theta}$ モ殆 1 ニ等シ.

∴ 此場合ニ殆 $sin\theta=tan\theta$.

又 θ ガ微小ナルトキハ $cos\theta=1-2sin^2\frac{\theta}{2}$ ヨリ

$$殆\quad cos\theta=1-2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=1-\frac{\theta^2}{2}.$$

(C) 視角ノ弧度ヲ θ トスレバ, θ ハ微小ナルヲ以テ (B) ニ由リ

$$\theta=tan\theta=\frac{54\text{寸}}{18\text{町}24\text{間}}=\frac{3}{3680}(\text{レーディアン})$$

又 $\frac{3}{3680}$(レーディアン)$=\frac{3}{3680}\times\frac{180}{\pi}\times 60$ (分)$=\frac{405}{46\pi}$(分).

注意. 本問ハ試驗問題トシテ不適當ナリ.

陸軍經理學校

1. $sin^6A+cos^6A=1-\frac{3}{4}sin^2 2A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=(sin^2A+cos^2A)(sin^4A-sin^2A\,cos^2A+cos^4A)$

$$=(sin^2A+cos^2A)^2-3sin^2A\,cos^2A=1-\frac{3}{4}(2sinA\,cosA)^2=\text{右邊}.$$

2. $A=30°$, $a=3$, $b=3\sqrt{3}$ ナルトキハ C ヲ求ム.

但シ $sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解】 $A<90°$, $b\,sinA<a<b$ ナル故本題ハ兩意ノ場合ナリ.

$$sinB=\frac{b\,sinA}{a}=\frac{3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\qquad \therefore\ B=60°\ 或ハ\ 120°.$$

∴ $C=180°-(A+B)=90°$ 或ハ $30°$……………(答).

3. 四邊形ノ兩對角線ヲ d, d' トシ其夾角ヲ θ トスレバ, 其面積ハ $\frac{1}{2}dd'sin\theta$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 問 333 ヲ見ヨ.

4. 學校ノ建物ノ長サガ某點ニ於テ $30°$ ノ角ヲ含ムコトヲ觀測セリ. 然ラバ其建物ノ兩端ト測點トヲ過ル圓ノ徑ハ建物ノ長サノ二倍ナルコトヲ證セヨ.

【解】 建物ノ長サヲ x トシ, 直徑ヲ d トスレバ, $\frac{x}{sin30°}=d$.

∴ $d=2x$.　　卽チ 題言ノ如シ.

海軍機關學校

1. 下ノ二式ヲ最簡ニセヨ:

$$\text{(i)}\quad \frac{cos\theta-cos\frac{m+n}{m}\theta}{sin\theta+sin\frac{m+n}{m}\theta}.\qquad \text{(ii)}\quad \frac{sin3\theta+4cos2\theta+3sin\theta-4}{cos3\theta-4sin2\theta+5cos\theta}.$$

【解】 (i) 分子$=2sin\frac{2m+n}{2m}\theta\,sin\frac{n}{2m}\theta$,　分母$=2sin\frac{2m+n}{2m}\theta\,cos\frac{n}{2m}\theta$.

∴ 分數$=\tan\frac{n}{2m}\theta$.

(ii) 分子$=3\sin\theta-4\sin^3\theta+4-8\sin^2\theta+3\sin\theta-4$

$=-2\sin\theta(2\sin^2\theta+4\sin\theta-3)$

分母$=4\cos^3\theta-3\cos\theta-8\sin\theta\cos\theta+5\cos\theta=2\cos\theta(2\cos^2\theta+1-4\sin\theta)$

$=2\cos\theta(2-2\sin^2\theta+1-4\sin\theta)=-2\cos\theta(2\sin^2\theta+4\sin\theta-3)$

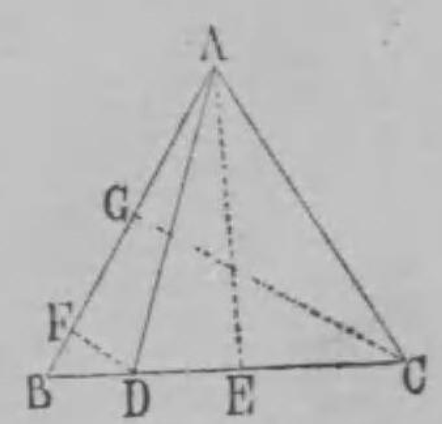
∴ 分數$=\tan\theta$.

2. 下ノ恒等式ヲ證セヨ:

$$\tan\left(45°+\frac{A}{2}\right)=\sec A+\tan A.$$

【解】 問 129 ヲ見ヨ.

3. 等邊三角形 ABC ノ一邊 BC ノ上ニ點 D ヲ取リ, BD ヲ BC ノ五分ノ一ニ等シカラシムルトキハ, 角 BAD ノ正弦ノ値幾何ナルカ. 但シ小數第三位マデ求メ以下四捨五入セヨ.



【解】 AB=5 トスレバ BD=1.

AE ヲ BC ニ垂線ニ, 又 DF, CG ヲ AB ニ垂線ニ引ケ.

然ルトキハ $AD=\sqrt{\overline{DE}^2+\overline{AE}^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{21}.$$

又 $\frac{FD}{GC}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{5}$ ナル故 $FD=\frac{GC}{5}=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore\ \sin BAD=\frac{FD}{AD}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{7}}{14}=\cdot189\ (約).$$

4. 三角形ノ二邊ガ 5 寸及ビ 6 寸ニシテ此二邊ノ夾

ム角ガ 70°20′ ナルトキハ他ノ一邊ノ長サ何寸何分ナルカ. 但シ $\sin 70°20'=0\cdot942$.

【解】 所求ノ長サハ $\sqrt{5^2+6^2-2\times5\times6\times\sqrt{1-(0\cdot942)^2}}=6\cdot4(-)$.

(答) 6 寸 4 分弱.

5. 高サ h 尺ノ塔アリ. 今塔底ヲ過グル一ツノ水平線上ノ二點ニ於テ此塔ノ仰角ヲ測リテ α, β ヲ得タリ. 此二點ノ距離幾何ナルカ.

【解】 測點ガ塔ノ一方ニノミアレバ. 所求ノ距離ハ

$$h\cot\alpha\sim h\cot\beta=\frac{h\sin(\alpha\sim\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}(尺).$$

又測點ガ塔ノ兩方ニ在レバ, 所求ノ距離ハ

$$h\cot\alpha+h\cot\beta=\frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}(尺).$$

東京高等工業學校

$m\sin2\theta=\sin\theta$, $\cos2\theta=l\cos\theta$, $\sin\theta\neq0$ ナルトキハ次ノ關係アルコトヲ證セヨ.

$$2m^2+lm-1=0.$$

【解】 $m\sin2\theta=\sin\theta$ ヨリ $2m\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$.

然ルニ $\sin\theta\neq0$ ナル故最後ノ等式ノ兩邊ヲ $\sin\theta$ ニテ除スルコトヲ得.

卽チ $2m\cos\theta=1$.

爰ニ $m=0$ トスレバ $0=1$ トナル故, $m\neq0$.

∴ $2m$ ニテ除スレバ $\cos\theta=\frac{1}{2m}$…………(i).

$\cos 2\theta = l\cos\theta$ ヨリ $2\cos^2\theta - 1 = l\cos\theta$.

之ニ (i) ヲ代入スレバ $2\left(\frac{1}{2m}\right)^2 - 1 = l\left(\frac{1}{2m}\right)$.

兩邊ニ $2m^2(\neq 0)$ ヲ乘ズレバ $1-2m^2=lm$.

轉項シテ符號ヲ變ズレバ所題ノ如クナル.

水産講習所

1. $\sin(60°+A)-\sin(60°-A)=\sin A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=2\cos 60° \sin A = 2\times\frac{1}{2}\times\sin A=$右邊.

2. 人アリ河岸ノ一地點ニ於テ對岸ニ在ル一樹ノ仰角ヲ測リタルニ $75°$ アリタリ. 其處ヨリ眞後ロニ 20尺退歩シタル地點ニテハ其樹ノ仰角ハ $60°$ ナリシト云フ. 樹ノ高サ如何.

【解】 問 353 ノ簡單ナル場合ナレバ解ヲ略ス.

海軍經理學校

1. $\sec\theta=4$ ヲ知リテ $\cot\theta$, $\tan\theta$ 及ビ $\sin\theta$ ヲ求メヨ.

【解】 $\tan\theta=\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}=\pm\sqrt{4^2-1}=\pm\sqrt{15}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\pm\sqrt{15}}$

$=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$, $\sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}=\frac{\pm\sqrt{15}}{4}=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$. 但シ複號ハ同ジ順トス.

2. $\sin(150°+\alpha)+\sin(150°-\alpha)$ ヲ簡單ニセヨ.

【解】 原式$=2\sin 150°\cos\alpha=2\times\frac{1}{2}\times\cos\alpha=\cos\alpha$ (答).

3. $\log_{49}343\sqrt{7}$ ヲ求メヨ.

【解】 所求ノ値ヲ x トスレバ $49^x=343\sqrt{7}$, $7^{2x}=7^{\frac{7}{2}}$.

$\therefore$ $x=\frac{7}{4}$ (答)

4. 高サ h 米ナル臺上ニ立テル銅像アリ. 其臺ヨリ a ナル距離ノ一點ニ於テ之ヲ望ムニ銅像ノ上端ノ仰角ハ下端ノ仰角ノ二倍ナルコトヲ知レリ. 銅像ノ高サ幾何.

【解】 問 380 ノ注意ヲ見ヨ.

5. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ニ適スル $360°$ 以内ノ正角ヲ求ム。

【解】 問 411 ヲ見ヨ.

東京高等商業學校

1. $\log 2=0{\cdot}30103$, $\log 3=0{\cdot}47712$ ヲ知リテ $\log\cos 30°$ 及ビ $\log\sec 45°$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $\log\cos 30°$ ノ値ハ問 260 ニ求メアリ.

$\log\sec 45°=\log\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log 2=\frac{1}{2}\times 0{\cdot}30103=0{\cdot}15052$.

2. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ ヲ證セヨ. 但シ A, B, C ハ一ツノ三角形ノ三ツノ角ナリ.

【解】 問 330 ノ解ノ中ニ解アリ.

第一高等學校（支那留學生）

1. 作圖ニヨリテ $\sin\theta=\frac{1}{2}$ ナル角 θ ヲ作レ.

【解】 30°, 150° ヲ幾何學的ヲ作レバ可ナリ.

2. $\tan A=\sqrt{2}\sin A$ ナルトキ銳角 A ノ値如何.

【解】 $\frac{\sin A}{\cos A}=\sqrt{2}\sin A$, $\therefore$ $\sin A=0$ 或ハ $\frac{1}{\cos A}=\sqrt{2}$.

$\therefore$ A=0° 或ハ 45°.

注意. 單ニ銳角トアルハ正ノ銳角ノ意ナラン.

高等學校（第二, 三部）

$A+B+C=180°$ ナルトキハ $\cot A+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$ ハ A, B 及ビ C ノ中何レノ二ツヲ交換スルモ變ズルコトナキヲ證セヨ.

【解】 與ヘラレタル式ハ $\cot A+\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\cot A+\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin B\sin C}$

$=\cot A+\cot C+\cot B$.

然ルニ最後ノ式ハ A, B, C ノ何レノ二ツヲ交換スルモ變セザルモノナル故, 題言ノ如キヲ知ル.

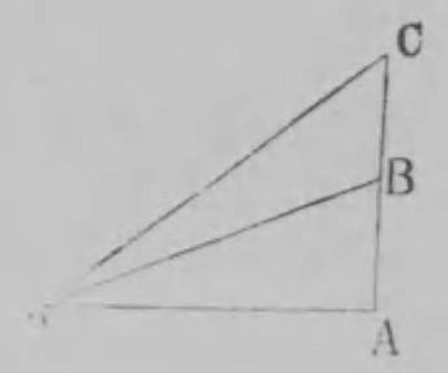
東京農科大學實科

1. $\cos 4A=1-8\cos^2A+8\cos^4A$ ヲ證セヨ.

【解】 大正元年度陸軍士官候補生問題 (1) ヲ見ヨ.

2. 或ル塔ノ礎ヨリ水平距離 b 尺ヲ隔リタル點ニ於ラ其塔ノ頂上ニ立テタル長サ a 尺ノ旗竿ヲ見タルニ其上下兩端ノ仰角ノ差ハ α ナリ. 然ルトキハ其塔ノ高サ幾尺ナルカ.

【解】 AB ヲ塔, BC ヲ旗竿, D ヲ測點トスレバ,



DA=b 尺, BC=a 尺, $B\hat{D}C=\alpha$.

今 AB=x 尺 トスレバ

$$\tan BDC=\tan(ADC-ADB)=\frac{\tan ADC-\tan ADB}{1+\tan ADC\tan ADB},$$

即チ
$$\tan\alpha=\frac{\frac{x+a}{b}-\frac{x}{b}}{1+\frac{x+a}{b}\cdot\frac{x}{b}}.$$

之ヲ解キテ $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b^2+4ab\cot\alpha}}{2}$.

然ルニ複號 (±) ノ中ノ (−) ヲ採ルトキハ x ガ負トナル故, 之ハ棄テザルベカラズ.

又 (+) ヲ取ルモ $4ab\cot\alpha>4b^2$ 卽チ $\cot\alpha>\frac{b}{a}$ ナラザレバ x ハ正トラザルヲ以テ次ノ如キ答ヲ得ベシ.

$\cot\alpha>\frac{b}{a}$ ナルトキニ於テ塔ノ高サハ $\frac{-a+\sqrt{a^2-4b^2+4ab\cot\alpha}}{2}$ 尺ナリ

東北農科大學豫科

$$\frac{(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2}{\cos^2\frac{1}{2}(A-B)}=6\sec^2 45°\tan^2 30°$$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{cos^2A+2cosA\,cosB+cos^2B+sin^2A+2sinA\,sinB+sin^2B}{cos^2\frac{1}{2}(A-B)}$

$$=\frac{2\{1+cos(A-B)\}}{cos^2\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{4cos^2\frac{1}{2}(A-B)}{cos^2\frac{1}{2}(A-B)}=4,$$

右邊$=6\times2\times\dfrac{1}{3}=4.$

$\therefore$ 左邊=右邊.

熊本高等工業學校

角 θ ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ增スニ從ヒ $tan\theta$ ノ値ハ如何ニ變化スルカ.

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

鹿兒島高等農林學校

1. $\dfrac{2sinA-sin2A}{2sinA+sin2A}=tan^2\dfrac{A}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 大正元年度商船學校問題 (2) ヲ見ヨ.

2. 三角形ニ於テ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ $\dfrac{tanB}{tanC}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 大正二年度專問學校入學者檢定問題 (1) ヲ見ヨ.

海軍兵學校

1. 次式ヲ $cos\theta$ ノミヲ含ム最簡單ナルモノニ直セ:

$$sin\theta-\frac{sin(-2\theta)}{2tan\theta\,sin(\theta-90°)}-\frac{tan135°}{sin(270°-\theta)\{1+cot^2(180°-\theta)\}}.$$

【解】 原式$=sin\theta-\dfrac{-2sin\theta\,cos\theta}{-2tan\theta\,cos\theta}-\dfrac{-1}{-cos\theta\,cosec^2\theta}=sin\theta-cos\theta-\dfrac{1-cos^2\theta}{cos\theta}$

$$=\pm\sqrt{1-cos^2\theta}-\frac{1}{cos\theta}.$$

2. ϕ ガ $0°$ ト $180°$ トノ間ノ角ナルトキ $2sin\phi$ ト $sin2\phi$ トノ大小ヲ比較セヨ.

【解】 $2sin\phi-sin2\phi=2sin\phi-2sin\phi cos\phi.$

然ルニ $0°<\phi<180°$ ナル故, $sin\phi$ ハ正ナリ. 又 $cos\phi$ ノ絕對値ハ一ヨリモ小ナル故 $2sin\phi\,cos\phi$ ノ絕對値ハ $2sin\phi$ ヨリモ小ナリ.

$\therefore$ $2sin\phi-2sin\phi\,cos\phi$ ハ正ナリ.

$\therefore$ $2sin\phi>sin2\phi.$

注意. $0°$ ト $180°$ トノ間ニアリト云フコトヲ $0°$ 以上 $180°$ 以下ト解釋スレバ. $2sin\phi \not< sin2\phi$ トナルコト上ト同樣ニシテ明カナルベシ.

3. 三邊ガ等差級數ヲナス直角三角形ノ二ツノ銳角ノ正弦ノ値ヲ求メヨ.

【解】 三角形ヲ ABC トシ, A=90°, B>C トス. 然ルトキハ

$$a+c=2b,\qquad a^2-c^2=b^2.$$

除法ニ由リ $a-c=\dfrac{b}{2}.$

之ト $a+c=2b$ トニ由り, $a=\dfrac{5b}{4},\quad c=\dfrac{3b}{4}.$

$\therefore$ $sinB=\dfrac{b}{a}=b\div\dfrac{5b}{4}=\dfrac{4}{5},\quad sinC=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3b}{4}\div\dfrac{5b}{4}=\dfrac{3}{5}.$

4. $\triangle$ABC ニ於テ $tan\mathrm{A}=2,\ tan\mathrm{B}=3$ ナルトキハ C 角ハ何度ナルカ.

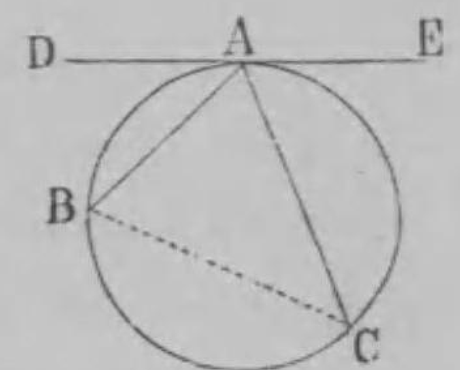
【解】 $tan\mathrm{C}=-tan(\mathrm{A}+\mathrm{B})=-\dfrac{tan\mathrm{A}+tan\mathrm{B}}{1-tan\mathrm{A}\ tan\mathrm{B}}=-\dfrac{2+3}{1-2\times3}=1.$

$\therefore\ \mathrm{C}=45^\circ.$

5. $\triangle$ABC ノ正弦比例式 $\dfrac{a}{sin\mathrm{A}}=\dfrac{b}{sin\mathrm{B}}=\dfrac{c}{sin\mathrm{C}}$ ニヨリテ $a^2=b^2+c^2-2bc\ cos\mathrm{A}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 問 295 ヲ見ヨ.

6. 圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ割線ノ比ハ其點ニ於ケル切線ト此等ノ割線トガ成ス角ノ正弦ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.



【解】 AB, AC ヲ二ツノ弦トシ, DE ヲ A ニ於ケル切線トシテ, $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{sin\mathrm{BAD}}{sin\mathrm{CAE}}$ ナルコトヲ證セントス.

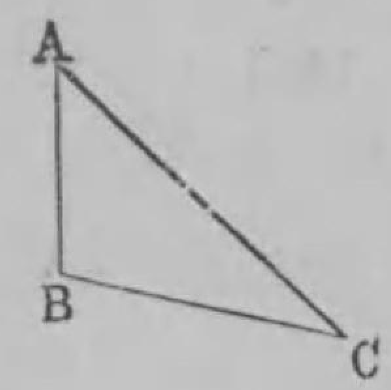
BC ヲ引クトキハ幾何ノ定理ニ由リテ,

$$\mathrm{B\hat{C}A}=\mathrm{B\hat{A}D},\ \mathrm{A\hat{B}C}=\mathrm{C\hat{A}E}.$$

$\triangle$ABC ニ於テ正弦比例ニ由リ. $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{sin\mathrm{BCA}}{sin\mathrm{ABC}}=\dfrac{sin\mathrm{BAD}}{sin\mathrm{CAE}}.$

$\therefore$ 證シ得タリ.

7. 敵ノ港口ヲ距ルコト南方 $5\sqrt{2}$ 海里ノ沖ニ於テ封鎖ノ任ニアリタル我艦ハ敵ノ一船密カニ港口ヲ出デ南東ノ方向ニ遁走スルヲ發見シ, 直チニ或ル一定ノ方向ニ毎時 20 海里ノ速サニテ追フコト半時間ノ後ニシテ拿捕セリ. 我艦ノ取リシ方向及ビ敵船ノ速サヲ問フ.



【解】 A ヲ港口, B ヲ我艦ノ始ノ位置, C ヲ拿捕點トスレバ, $\hat{\mathrm{A}}=45^\circ$, $\mathrm{AB}=5\sqrt{2}$ 海里, BC=10 海里.

$$sin\mathrm{C}=\frac{5\sqrt{2}\,sin45^\circ}{10}=\frac{1}{2}$$

[BC>AB ナル故兩意ノ場合ニアラズ].

$\therefore\ \mathrm{C}=30^\circ.$　從ツテ $\mathrm{B}=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ.$

$\therefore$ 我艦ノ取リシ方向ハ南 75° 東ナリ.

又 $\mathrm{AC}=\dfrac{10sin105^\circ}{sin45^\circ}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{2}.$

$\therefore$ 敵艦ノ速サハ毎時 $10(\sqrt{3}+1)=27{\cdot}32$ (約) 海里ナリ.

醫學專門學校

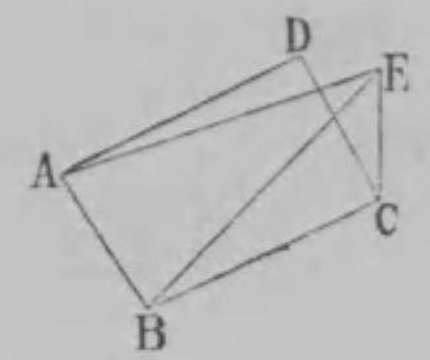
1. $tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ ナルトキ $sin\mathrm{A}$ ノ値ヲ求ム.

【解】 $sin\mathrm{A}=2\,sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}cos\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\dfrac{2tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}}{sec^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}}=\dfrac{2tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}}{1+tan^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}}.$

此 $tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ ニ與ヘラレタル値ヲ代入スレバ $sin\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}$ トナル.

2. 矩形ノ地面 ABCD アリ. 其一隅 C ニ直立セル柱ノ頂上ノ仰角ヲ A 及ビ B ニ於テ測リタルニ夫々 18° 及ビ 30° ヲ得, 且ツ AB ノ長サヲ測リタルニ 48尺 アリタリト云フ. 柱ノ高サ何尺何寸ナルカ.

但シ　$sin18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$



【解】 CE ヲ柱トスレバ，$C\hat{A}E=18^\circ$，$C\hat{B}E=30^\circ$，$AB=48$ 尺.

$\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$ 卽チ $(CE\cot18^\circ)^2-(CE\cot30^\circ)^2=48^2$.　　$\therefore\ CE=\dfrac{48}{\sqrt{\cot^2 18^\circ-\cot^2 30^\circ}}$.

然ルニ　$\cot18^\circ=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}}{\sin18^\circ}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$，　$\cot30^\circ=\sqrt{3}$.

此等ヲ用ヒテ CE ヲ計算スレバ，$CE=12\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}=18.9$ (約).

(答)　18 尺 9 寸.

新潟醫學專門學校

1. 二角ノ和ノ正弦及ビ餘弦ヲ此等ノ二角ノ正弦及ビ餘弦ニテ表ハス公式ヲ記シ，此等二角及ビ其和ガ何レモ銳角ナル場合ニ就キテ之ヲ證セヨ.

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

2. 角ノ比ガ 3 : 4 : 5 ナル三角形ニ於テ最短邊ガ 5尺ナルトキハ他ノ二邊ノ長サ各何程ナルカ.

【解】 180° ヲ 3 : 4 : 5 ナル比ニ按分スレバ 45°, 60°, 75° トナル今 60°, 75° ノ對邊ヲ夫々 x 尺, y 尺トスレバ

$$x=\frac{5\sin60^\circ}{\sin45^\circ}=\frac{5\sqrt{6}}{2}(\text{尺}),\quad y=\frac{5\sin75^\circ}{\sin45^\circ}=\frac{5(1+\sqrt{3})}{2}(\text{尺}).$$

商船學校 (第二回)

1. $\sin A=\dfrac{5}{13}$，$\tan B=\dfrac{4}{3}$ ナルトキ $\sin(A+B)$ ノ値ヲ求ムベシ. 但シ A ヲ鈍角，B ヲ銳角トスベシ.

【解】 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\dfrac{12}{13}$，　$\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}}=\dfrac{3}{5}$，

$\sin B=\tan B\cos B=\dfrac{4}{5}$.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}+\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{4}{5}=-\frac{33}{65}\ (\text{答})$$

2. $\sin^2 A-\cos^2 A\cos2B=\sin^2 B-\cos^2 B\cos2A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\sin^2 A-(1-\sin^2 A)(1-2\sin^2 B)$
$=-1+2(\sin^2 A+\sin^2 B)-2\sin^2 A\sin^2 B$.

然ルニ最後ノ式ハ A, B チ交換スルモ變ゼザルモノナリ.
$\therefore$ 左邊ハ A, B ヲ交換シタルモノ卽チ右邊ニ等シ.

3. $\tan2A-\tan A=\dfrac{2\sin A}{\cos A+\cos3A}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{\sin2A}{\cos2A}-\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin(2A-A)}{\cos2A\cos A}=\dfrac{2\sin A}{2\cos2A\cos A}=$右邊.

4. $A+B+C=90^\circ$ ナラバ $\sin2A+\sin2B+\sin2C=4\cos A\cos B\cos C$ ヲ證スベシ.

【解】 本年度上田蠶絲專門學校問題 (2) ノコトナリ.

5. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ下式ヲ證セヨ:

$$\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A+\cos C\sin A\sin B=1+\cos A\cos B\cos C.$$

【解】 問 196 ノ解ノ中ヲ見ヨ.

6. 方程式 $\cot\theta-\operatorname{cosec}2\theta=1$ ヲ解ケ.

【解】 $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\sin2\theta}=1,\qquad \dfrac{2\cos^2\theta-1}{\sin2\theta}=1,\qquad \cot2\theta=1.$

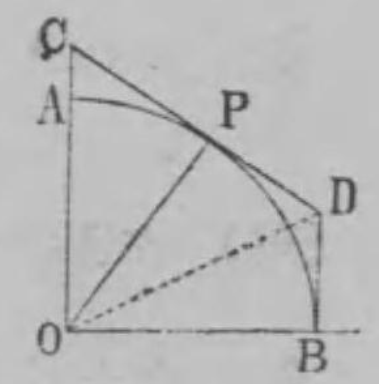
$\therefore\quad 2\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{4},\qquad \theta=\dfrac{n}{2}\pi+\dfrac{\pi}{8}=(4n+1)\dfrac{\pi}{8}$ ………(答).

7. 三角形ニ就テ下式ヲ證スベシ:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

8. 四分圓 AOB ノ弧上ノ任意ナル一點 P ニ切線ヲ引キ, 半徑 OA ノ延長ト C ニ, 半徑 OB ノ端 B ニ於ケル切線ト D ニ會セシム. 半徑ヲ a, $A\hat{O}P$ ヲ θ トシテ OC, BD, CD ヲ表ハス式ヲ作リ, 然ル後式ノ變化ニ由テ OC, CD ノ等長ナルコトヲ證明スベシ.



【解】 $O\hat{P}C=90^\circ$ ナル故, $OC=a\sec\theta.$

$O\hat{B}D=90^\circ,\ B\hat{O}D=\dfrac{1}{2}(90^\circ-\theta)=45^\circ-\dfrac{\theta}{2}$ ナル故

$$BD=a\tan\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right).$$

$$CD=PC+PD=PC+BD=a\tan\theta+a\tan\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=a\left\{\tan\theta+\tan\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)\right\}=a\left\{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}\right\}$$

$$=a\frac{\sin\left(\theta+45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}=a\frac{\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}=a\sec\theta=OC.$$

大　正　四　年　度

諸官立學校入學試驗問題

及　ビ

答　　解

專門學校入學者檢定

1. $\cot A=\dfrac{p}{q}$ ナルトキ $\dfrac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 問 15 ヲ見ヨ.

2. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ $\sin2A+\sin2B+\sin2C$ ヲ A, B, C ノ函數ノ積ニ變ゼヨ.

【解】 問 330 ノ解ノ中ニ解アリ.

3. 塔ノ正北ナル地上ノ一點ニ於テ塔頂ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得タリ. 之ヨリ正西ニ 20 間距リタル地上ノ一點ニ於テ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得タリト云フ. 塔ノ高サヲ求メヨ. 但シ尺マデ正確ニ求メヨ.

【解】 AB ヲ塔トシ C, D ヲ前後ノ測點トスレバ,

$A\hat{C}B=60^\circ,\ A\hat{D}B=30^\circ,\ CD=20$ 間, $A\hat{C}D=90^\circ.$

$AB=x$ 間トスレバ, $\quad CA=x\cot60^\circ=\dfrac{x}{\sqrt{3}},$

$$DA=x\cot30^\circ=x\sqrt{3}.$$

$\overline{DA}^2-\overline{CA}^2=\overline{CD}^2$ ナル故, $\left(x\sqrt{3}\right)^2-\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=20^2$.

之ヨリ x ノ正値ヲ採レバ約 12間 1尺トナル.

東北帝國大學工學專門部

1. $sin(B+C-A)$, $sin(C+A-B)$, $sin(A+B-C)$ ガ等差級數ヲナセバ $tanA$, $tanB$, $tanC$ モ亦等差級數ナルコトヲ證明セヨ.

【解】 大正三年度秋田鑛山專門學校入學試驗問題ト同一ナリ.

2. 方程式 $4cos^2x+cos^22x=1$ ヲ解ケ.

【解】 $4cos^2x+(2cos^2x-1)=1$, $4cos^4x=0$, $cos\,x=0$, $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

名古屋高等工業學校

$\triangle ABC$ ニ於テ $a=4b\,cos\left(30°+\dfrac{C}{2}\right)cos\left(30°-\dfrac{C}{2}\right)$

ナルトキハ $C=2B$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 假設ニ於ケル等號ノ兩邊ガ三角形ノ邊ニ就キテ一次ノ齊次式ナルニ由リ. 正弦比例ノ理ヲ用ヒテ

$$sinA=4sinB\,cos\left(30°+\frac{C}{2}\right)cos\left(30°-\frac{C}{2}\right)$$

卽チ

$$sin(B+C)=2sinB(cos60°+cosC).$$

$$sinB\,cosC+cosB\,sinC=sinB+2sinB\,cosC.$$

$$sin(C-B)=sinB.$$

$C-B$, B ハ何レモ $0°$ ト $180°$ トノ間ノ角ナル故, 最後ノ等式ヨリ

$$C-B=B \quad 或ハ \quad C-B+B=180°.$$

$\therefore$ $C=2B$ 或ハ $C=180°$.

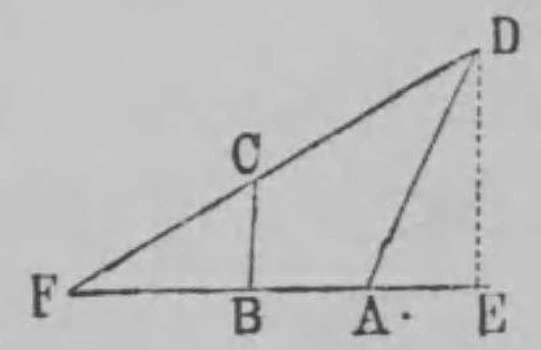
然ルニ $C=180°$ ハ C ガ三角形ノ一角ナル故不可ナリ.

$\therefore$ $C=2B$.

米澤高等工業學校

小山ノ麓ヨリ a 町離レテ平野ノ中ニ聳ユル塔アリ. 今小山ノ傾斜角ヲ α トスレバ其麓ヨリ c 町登リタル人ガ塔頂ヲ眺ムルトキ塔ノ向側ニ塔ヨリ b 町ノ距離ニ在ル沼池ヲ眺ムルコトヲ得ルト云フ. 然ラバ塔ノ高サ如何.

【解】 A ヲ小山ノ麓, BC ヲ塔, D ヲ觀測點, F ヲ沼池トスレバ $BA=a$ 町, $E\hat{A}D=\alpha$, $AD=c$ 町, $FB=b$ 町, $F\hat{B}C=90°$.



DE ヲ FA ニ垂線ニ引クトキハ, $AE=c\,cos\,\alpha$, $ED=c\,sin\,\alpha$.

$$\therefore \quad tanF=\frac{c\,sin\,\alpha}{a+b+c\,cos\,\alpha}.$$

仍テ $BC=FB\,tanF=\dfrac{bc\,sin\,\alpha}{a+b+c\,cos\alpha}$ (町)………(答)

盛岡高等農林學校

1. $sin80°-sin40°=sin20°$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=2\cos 60^\circ \sin 20^\circ = 2\times\frac{1}{2}\times\sin 20^\circ=$右邊.

2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}+\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}.$$

【解】 原式$=\frac{\cos\alpha\ \sin\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha\,(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha}=-\sin\alpha+\sin\alpha=0$............(答)

秋田鑛山專門學校

1. 人ガ川ノ岸ニ立チテ對岸ノ樹木ヲ見ルニ 60° ノ仰角ヲ有シ, 反對ノ方向ヘ 40 尺立退キテ見ルニ 30° ノ仰角ヲ有スト云フ. 川幅及ビ樹木ノ高サヲ求ム.

【解】 第一測點ト樹頂トノ距離ハ 40 尺トナル.

∴ 川幅ハ $40\cos 60^\circ=40\times\frac{1}{2}=20$ (尺),

樹高ハ $40\sin 60^\circ=40\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}$ (尺).

2. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ ヲ證セヨ.

【解】 問 330 ノ解ノ中ニ解アリ.

上田蠶絲專門學校

1. $\tan A=2-\sqrt{3}$, $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ

$\tan(2A-B)$ ノ値ヲ求ム.

【解】 $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{2}\div\left\{\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}=\pm\sqrt{3}$.

$\tan(2A-B)=\frac{\tan 2A-\tan B}{1+\tan 2A\tan B}$. 此右邊ニ上ニ得タル値ヲ代用スレバ

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或ハ ∞............(答)

2. 三角形ノ三ツノ角ノ大サガ 1:2:3 ノ如クナルトキハ三邊ノ長サノ比如何.

【解】 問 268 ヲ見ヨ.

陸軍士官候補生

1. 次ノ關係ヲ知リテ 5° ノ餘切ノ對數ヲ求メヨ:

$\log(\sin 50^\circ-\sin 40^\circ)=\bar{1}.09081$,

$\log(\sin 50^\circ+\sin 40^\circ)=0.14886$.

【解】 與ヘラレタル二式ニ減法ヲ行ヘバ $\log\frac{\sin 50^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 50^\circ-\sin 40^\circ}=1.05805$.

然ルニ此等式ノ左邊ハ $\log\frac{2\sin 45^\circ\cos 5^\circ}{2\cos 45^\circ\sin 5^\circ}=\log\cot 5^\circ$.

∴ $\log\cot 5^\circ=1.05805$.

2. 三角形ノ各角ヲ A, B, C トシ之ニ對セル邊ヲ夫々 a, b, c トスルトキ次ノ關係アラバ此三角形ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ.

$$a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\frac{A+B}{2}.$$

【解】 問 286 ヲ見ヨ.

3. $\sin A = \dfrac{15}{17}$, $\cos B = \dfrac{4}{5}$ ナルトキ次ノ各函數ノ値ヲ求メヨ.

$$\cos(A+B),\quad \sin(A-B).$$

【解】 $\cos A = \pm\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \pm\frac{8}{17}$, $\sin B = \pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\frac{3}{5}$.

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B = \pm\frac{8}{17}\times\frac{4}{5} - \frac{15}{17}\times\left(\pm\frac{3}{5}\right)$$

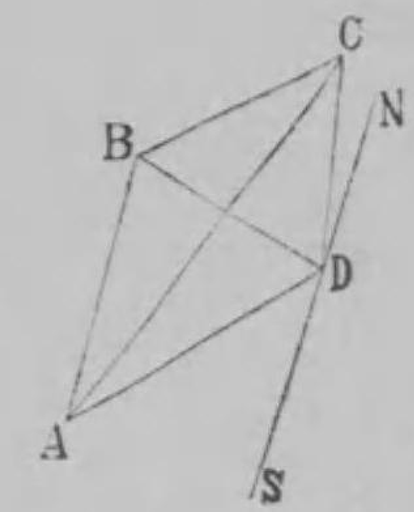
$$= \pm\frac{77}{85} \text{ 或ハ } \pm\frac{13}{85}.$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B = \frac{15}{17}\times\frac{4}{5} - \left(\pm\frac{8}{17}\right)\times\left(\pm\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{84}{85} \text{ 或ハ } \frac{36}{85}.$$

(答) $\pm\frac{77}{85}$, $\frac{84}{85}$ 或ハ $\pm\frac{13}{85}$, $\frac{36}{85}$.

4. A, B ハ同一ノ水平面上ニ在ル二個ノ目標ニシテ中間ニ遮蔽物アリ. C ハ一ノ高地ニ在ル觀測點ニシテ A, B ノ水平面上ニ在ル一點 D ノ直上 h 米ノ高サニ在リ. 今 C ニ於ケル觀測ノ結果トシテ A ノ方位ハ南 m 度西, 俯角ハ α ニシテ B ノ方位ハ北 n 度西, 俯角ハ β ナルコトヲ知リ得タリトスルトキハ A, B 間ノ距離及ビ A ニ於ケル B ノ方位ハ如何. 但シ C ヨリ見タル A ノ方位トハ C 水平面ニ於ケル CA ノ正射影ノ方向ヲ北或ハ南ヨリ起算シタル角度ナリ.



【解】 SN ヲ正北ノ方位トスレバ, $A\hat{D}S = m°$,

$B\hat{D}N = n°$.

$C\hat{D}A = C\hat{D}B = 90°$ ナル故. $AD = h\cot\alpha$. $BD = h\cot\beta$.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2AD.BD\cos ADB$$

$$= h^2\cot^2\alpha + h^2\cot^2\beta + 2h\cot\alpha\, h\cot\beta\cos(m°+n°).$$

$\therefore\quad AB = h\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta + 2\cot\alpha\cot\beta\cos(m°+n°)}$ 米.

又 $B\hat{A}D = r°$ トスレバ $\dfrac{\sin ABD}{\sin BAD} = \dfrac{AD}{BD}$ ヨリ

$$\frac{\sin(r°+180°-m°-n°)}{\sin r°} = \frac{h\cot\alpha}{h\cot\beta},\qquad \frac{\sin(m°+n°-r°)}{\sin r°} = \frac{\cot\alpha}{\cot\beta},$$

$$\sin(m°+n°)\cot r° - \cos(m°+n°) = \frac{\cot\alpha}{\cot\beta}.$$

$$\therefore\quad \cot r° = \cot\alpha\tan\beta\,\mathrm{cosec}(m°+n°) + \cot(m°+n°).$$

之ヨリ r ヲ求ムレバ, 所求ノ B ノ方位ハ北 $m-r$ 度東トナル.

商 船 學 校

1. $\sin(A+B) = -\dfrac{1}{2}$, $\cos(A-B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ滿足スル正角 A, B ノ中何レモ 90° ヨリ大ニシテ 360° ヨリ小ナルモノヲ求ム.

【解】 $180°<A+B<720°$ ナル故，第一方程式ヨリ

$A+B=210°,\ 330°,\ 570°,\ 690°\dots\dots\dots(i).$

$A\sim B<270°$ ナル故，第二方程式ヨリ $A\sim B=30°\dots\dots\dots(ii).$

(i), (ii) ヲ組ミ合ハセテ所題ノ範圍内ニ在ルモノノミヲ採レバ

$A=180°,\ B=150°;\ A=150°,\ B=180°;$

$A=300°,\ B=270°;\ A=270°,\ B=300°.$ (答)

2. $tanA-tan\frac{A}{2}=tan\frac{A}{2}secA$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{sinA}{cosA}-\dfrac{sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}=\dfrac{sin\left(A-\frac{A}{2}\right)}{cosA\ cos\frac{A}{2}}=$右邊.

3. $\dfrac{sin(\alpha-\beta)}{sin\alpha\ sin\beta}+\dfrac{sin(\beta-\gamma)}{sin\beta\ sin\gamma}+\dfrac{sin(\gamma-\alpha)}{sin\gamma\ sin\alpha}=0$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊ノ第一項ハ

$$\frac{sin\alpha\ cos\beta-cos\alpha\ sin\beta}{sin\alpha\ sin\beta}=cot\beta-cot\alpha.$$

第二項，第三項モ亦同様ニ變化シ得ルヲ以テ

左邊$=cot\beta-cot\alpha+cot\gamma-cot\beta+cot\alpha-cot\gamma=0.$

4. $sin2x=\sqrt{2}\,cosx$ ヲ解キテ $90°$ ト $180°$ トノ間ニ在ル x ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $2sin\,x\,cos\,x=\sqrt{2}\,cos\,x.$

$cos\,x\neq0,\quad \therefore\ sin\,x=\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad \therefore\ x=135°.$ (答) $135°.$

5. $\sqrt{a^2+b^2}=a\,sec\phi$ ナルトキハ $b=a\,tan\phi$ ナル關係アリ．之ヲ證セヨ.

【解】 與ヘラレタル關係式ノ兩邊ノ平方ヨリ a^2 ヲ減ズレバ

$$b^2=a^2(sec^2\phi-1)=a^2tan^2\phi.$$

之ヲ平方ニ開キテ一ツノ場合ヲ採レバ所題ノ如シ.

6. 任意ノ三角形 ABC ニ就キテ次式ヲ證セヨ:

$$a(cosC-cosB)=2(b-c)cos^2\frac{A}{2}.$$

【解】 $a\,cosC+c\,cosA=b,\quad a\,cosB+b\,cosA=c$ ニ減法ヲ行ヘバ

$$a(cosC-cosB)-(b-c)cosA=b-c.$$

$\therefore\ a(cosC-cosB)=(b-c)(1+cosA)=2(b-c)cos^2\frac{A}{2}.$

正弦法則ニヨルモ可ナリ.

7. 任意ノ三角形 ABC ニツキテ次式ヲ證セヨ:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,cosA.$$

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

8. 任意ノ三角形 ABC ニツキテ次式ヲ證セヨ:

$$cot\frac{A}{2}+cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2}=cot\frac{A}{2}.cot\frac{B}{2}.cot\frac{C}{2}.$$

【解】 問 195 ヲ見ヨ.

---

1. $sinA=\frac{12}{13},\ tanB=\frac{15}{8}$ ナラバ $sin(A-B)$ ノ値如何. 但シ A ハ第二象限ノ角，B ハ第一象限ノ角ナリ.

【解】 $cosA=-\sqrt{1-sin^2A}=-\frac{5}{13},\quad cosB=\frac{1}{\sqrt{1+tan^2B}}=\frac{8}{17},$

$sinB=tanB\ cosB=\frac{15}{17}.$

$\therefore\ sin(A-B)=sinAcosB-cosAsinB=\frac{12}{13}\times\frac{8}{17}-\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{15}{17}=\frac{171}{221}$ (答)

2. $sin\alpha\ sin\beta=sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}-sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 之ハ第 32 條公式 I ノコトナリ.

3. 若シ $\sin A$ ガ $\sin B$ ト $\cos B$ トノ等差中項ニ相當セバ $\cos 2A=\cos^2(B+45°)$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 假設ヨリ $\sin A=\dfrac{\sin B+\cos B}{2}=\dfrac{\sin B+\sin(90°+B)}{2}$

$$=\sin(45°+B)\cos 45°.$$

$$\therefore\ \cos 2A=1-2\sin^2 A=1-2\sin^2(45°+B)\cos^2 45°=1-\sin^2(45°+B)$$
$$=\cos^2(B+45°).$$

4. 三角方程式 $2\sin\theta=\tan\dfrac{\theta}{2}$ ヲ解ケ.

【解】 $2\times 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}.$

$\therefore\ \sin\dfrac{\theta}{2}=0$.........(i) 或ハ $4\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$............(2).

(i) ヨリ $\dfrac{\theta}{2}=n\pi,\quad \theta=2n\pi=3n.\dfrac{2\pi}{3}$............(3).

(ii) ヨリ $\cos\dfrac{\theta}{2}\neq 0$ ナルヲ以テ $4\cos^2\dfrac{\theta}{2}=1$ 即チ $2(1+\cos\theta)=1.$

$\therefore\ \cos\theta=-\dfrac{1}{2}.$

$\therefore\ \theta=2n\pi\pm\dfrac{2}{3}\pi=(3n\pm 1)\dfrac{2\pi}{3}$............(4).

(3), (4) ヲ取リ纏ムレバ $\theta=m.\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2m\pi}{3}$............(答).

5. $\tan 15°$ ノ値ヲ求ム.

【解】 問 60 ヲ見ヨ.

6. △ABC ニ就キテ下式ヲ證セヨ:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{4}(a+b+c)\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}.$$

【解】 正弦比例ノ證ハ普通ノ教科書ニ在リ.

此比例ニ加比ノ理ヲ用フレバ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$$
$$=\frac{a+b+c}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\quad\text{(普通ノ教科書ニ解アリ)}$$
$$=\frac{1}{4}(a+b+c)\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}.$$

7. △ABC ニ就キテ下式ヲ證セヨ:

$$\frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}.$$

【解】 左邊 $=\dfrac{1+\cos(A-B)\{-\cos(A+B)\}}{1+\cos(A-C)\{-\cos(A+C)\}}=\dfrac{1-(\cos^2 A-\sin^2 B)}{1-(\cos^2 A-\sin^2 C)}$

$$=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 C}=\text{右邊}.$$

8. 90尺ト 60尺トノ高サヲ有シテ直立セル二個ノ煙突アリ. 其頂點ヲ連ヌル直線ガ水平面ト 36° ノ角ヲナストキハ煙突ノ距離如何, 分位迄計算スベシ.

但シ $\tan 36°=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ナリ.

【解】 所求ノ距離ヲ x 尺トスレバ $x=90\cot 36°-60\cot 36°=30\cot 36°$

$=\dfrac{30}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}\doteqdot 41.29.$ (答) 41尺2寸9分.

大阪高等工業學校

海上ニ碇泊スル船ヨリ二個ノ燈臺ヲ北東及ビ北々東ノ方向ニ望ミ，其處ヨリ此船ガ毎時 12 哩ノ速サニテ北ノ方ニ 3 時間半進行シタルトキ再前ノ二燈臺ヲ眺メタルニ何レモ東ノ方ニ在ルヲ見タリト云フ．此二燈臺間ノ距離ハ何程ナルカ．

【解】 大正二年度商船學校問題 8 ノ如クニスレバ答ハ

$42(2-\sqrt{2})$ 哩トナル．

海軍機關學校

1. $cot\theta=-\dfrac{2}{3}$ ナルトキ $sin\theta, cos\theta, sec\theta$ ノ値ヲ求メヨ．但シ θ ハ 180° ヲ超エザル正角トス．

【解】 $sin\theta=\dfrac{1}{cosec\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{(1+cot^2\theta)}}$ （$sin\theta$ ハ正ナル故）

$$=\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\}}}=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$cos\theta=cot\theta\, sin\theta=\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$sec\theta=\frac{1}{cos\theta}=-\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

2. 下式ノ値ヲ求メヨ：

$$cos105°cos255°-sin105°sin285°.$$

【解】 原式$=\dfrac{1}{2}(cos360°+cos150°)-\dfrac{1}{2}(cos180°-cos390°)$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$$ （答）

3. 下ノ二式ヲ最簡ニセヨ：

（i） $tanA+tan(45°-A)+tanA\,tan(45°-A)$,

（ii） $\dfrac{2sinA\,sin2A-sin2A}{1-sinA-cos2A}$.

【解】 (i) 原式$=tanA+tan(45°-A)(1+tanA)$

$$=tanA+\frac{1-tanA}{1+tanA}(1+tanA)=1.$$

(ii) 原式$=\dfrac{sin2A(2sinA-1)}{1-sinA-(1-2sin^2A)}=\dfrac{2sinA\,cosA(2sinA-1)}{sinA(2sinA-1)}=2cosA.$

4. 北 15° 西ノ方位ニ向ヒ一直線ノ道路ヲ歩行セル人北ニ當リテ塔ヲ望ミ更ニ 200 間進ミタルトキ此塔ヲ北東ノ方位ニ見タリト云フ．然ラバ塔ヲ北ニ望ミタル位置ヨリ塔迄ノ距離幾間ナルカ．但シ四捨五入シテ間ノ小數第一位迄求メヨ．

【解】 前後ノ測點ヲ A, B トシ，塔ヲ C トスレバ， $B\hat{A}C=15°$, $A\hat{C}B=45°$, $AB=200$ 間．

AC＝x 間トスレバ， 正弦比例ニ由リ $x=\dfrac{200sin120°}{sin45°}=200\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}$

$=244.9$（强）． （答）． 244.9 間．

5. 半徑 1尺ナル圓ニ內接スル正十六邊形ノ一邊幾尺ナルカ．四捨五入シテ尺ノ小數四位迄求メヨ．

但シ $log2=0.3010$, $\left.\begin{array}{l}log\,sin11°10'=\bar{1}.2870\\ log\,sin11°20'=\bar{1}.2934\end{array}\right\}$,

$$\left.\begin{array}{l}\log 3.90=0.5911\\ \log 3.91=0.5922\end{array}\right\}.$$

【解】所求ノ一邊ヲ x 尺トスレバ, $x=1\times\sin\frac{360^\circ}{32}\times 2=2\sin 11^\circ 15'$.

$\therefore\ \log x=\log 2+\log\sin 11^\circ 15'$.

$11^\circ 20'-11^\circ 10' : 11^\circ 15'-11^\circ 10'=2934-2870 : y,\qquad y=32.$

$\therefore\ \log\sin 11^\circ 15'=\bar{1}.2870+.0032=\bar{1}.2902.$

$\therefore\ \log x=0.3010+\bar{1}.2902=\bar{1}.5912.$

$3.91-3.90 : z=5922-5911 : 5912-5911,\quad z=0.0009.$

$\therefore\ x=0.3901$ (尺) (答).

海軍經理學校

1. $\dfrac{(\tan A+\cot A)\sin A\cos A}{\dfrac{1}{\tan^2 A+1}+\dfrac{1}{\cot^2 A+1}}$ ヲ簡單ニセヨ.

【解】原式$=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)\sin A\cos A\div(\cos^2 A+\sin^2 A)$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)\div 1=1$ (答).

2. 地上60呎及ビ40呎ノ高サヲ飛行スル飛行機ヲ連ヌル直線ガ水平面ト $33^\circ 41'$ ノ角ヲ成ストキ此二個ノ飛行機ノ距離如何. 但シ $\cot 33^\circ 41'=1.5$.

【解】$\mathrm{cosec}\,33^\circ 41'=\sqrt{1+(1.5)^2}=\sqrt{3.25}$.

∴ 所求ノ距離ハ $(60-40)\sqrt{3.25}=36.1$ (呎) (答).

3. $\alpha=\left(n+\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{1}{6}\right)180^\circ$ ナルトキ $\tan\alpha+\cot\alpha$ ノ値ヲ

問フ. 但シ n ハ零或ハ整數トス.

【解】$\tan\alpha=\tan\left(\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{1}{6}\right)180^\circ=\tan(45^\circ\pm 30^\circ)=\dfrac{1\pm\tan 30^\circ}{1\mp\tan 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{3}\mp 1}.$

$\therefore\ \tan\alpha+\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{3}\mp 1}+\dfrac{\sqrt{3}\mp 1}{\sqrt{3}\pm 1}=4$ (答).

4. $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}+\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=90^\circ$ ヲ證セヨ.

【解】$\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ ノ一ツノ値ハ 30°, $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ノ一ツノ値ハ 60° ナリ.

$\therefore\ \sin^{-1}\dfrac{1}{2}+\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=30^\circ+60^\circ=90^\circ$ ナルコトアリ.

5. $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ ヲ與ヘテ $\log\sin 60^\circ$ ヲ計算スベシ.

【解】問 260 ヲ見ヨ.

陸軍經理學校

1. $\cot A-\tan A=2\cot 2A$ ヲ證セヨ.

【解】左邊$=\cot A-\dfrac{1}{\cot A}=\dfrac{\cot^2 A-1}{\cot A}=2\times\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}=$右邊.

2. $\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha$ ヲ證セヨ.

【解】左邊$=2\sin 60^\circ\sin\alpha=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\alpha=$右邊.

3. △ABC ニ於テ $\sin(A+B)=\dfrac{1}{2}$, $\cos(A-C)=\dfrac{1}{2}$

ナルトキ A, B, C ノ大サ幾何ナルカ.

【解】 第一方程式ヨリ $A+B=180°-C=30°$ 或ハ $150°$,

$\therefore$ $C=150°$ 或ハ $30°$.

第二方程式ヨリ $A-C=\pm 60°$..............(i).

$C=150°$ トスレバ (i) ヨリ $A=210°$ 或ハ $90°$. 何レニシテモ $C+A>180°$ ナル故背理ナリ.

又 $C=30°$ トスレバ (i) ヨリ $A=90°$ 或ハ $-30°$. A ノ負値ヲ棄ツレバ $B=150°-90°=60°$.

(答) $A=90°$, $B=60°$, $C=30°$.

4. 等邊三角形ノ地面ニ石ヲ敷ク費用(一平方尺ニ付八錢)ハ周邊ニ柵ヲ作ル費用(一尺ニ付八十四錢)ニ等シト云フ. 然ルトキハ各邊ノ長サ幾何ナルカ.

【解】 各邊ノ長サヲ x 尺トスレバ, 面積ハ $\frac{1}{2}x^2 \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ (平方尺)ニシテ, 周邊ハ $3x$ 尺ナリ.

$\therefore$ 題意ニ由リ $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times 8=3x\times 84$.

之ヲ解キテ $x=0$ ヲ省ケバ, $x=42\sqrt{3}$. (答) $42\sqrt{3}$ 尺.

東京高等工業學校

方程式 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos 2x$ ヲ解ケ.

【解】 $2\sin 2x\cos x+2\sin x\cos x=2\cos^2 x$.

$\therefore$ $\cos x=0$............(i), 或ハ $\sin 2x+\sin x=\cos x$............(ii).

(i) ヨリ $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}=(4n\pm 1)\frac{\pi}{2}=(2m+1)\frac{\pi}{2}$.

(ii) ヨリ $-(\sin x-\cos x)^2+1+(\sin x-\cos x)=0$,

$$\sin x-\cos x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2},$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{4}.$$

正弦ノ絶對値ハ 1 以下ナル故 (±) ノ中ノ (+) ヲ棄テ.

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}.$$

$$\therefore\quad x-\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\operatorname{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\pi}{4}+n\pi+(-1)^n\operatorname{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}.$$

(答) $(2m+1)\frac{\pi}{2}$, 或ハ $n\pi+\frac{\pi}{4}+(-1)^n\operatorname{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$.

水産講習所

○ $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊 $=\left(\frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^2=\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)^2=\frac{1+2\sin x\cos x}{1-2\sin x\cos x}=$ 左邊.

東京農科大學實科

1. $tan3A=\dfrac{3tanA-tan^3A}{1-3tan^2A}$ ヲ證セヨ.

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

2. 直立セル樹木ヨリ水平ニ五間隔リタル處ニ於テ梢端ノ仰角 $45°$, 根元ノ俯角 $15°$ ヲ測リ得タリ. 樹ノ高サ幾何ナルカ.

【解】 所求ノ間數ハ $5(tan45°+tan15°)=5(1+2-\sqrt{3})=5(3-\sqrt{3})$ (答).

鹿兒島高等農林學校

1. $cotx=6$ ヲ知リテ $sinx$, $cosx$, $tanx$, $secx$ 及ビ $cosec\,x$ ノ値ヲ求ム. 但シ四捨五入ニヨリテ小數第三位迄算出スベシ.

【解】 $tan\,x=\dfrac{1}{6}=\cdot167$, $\quad cosec\,x=\pm\sqrt{1+36}=\pm6\cdot083$,

$sin\,x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{37}}=\pm\cdot164$, $\quad cos\,x=6\times\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{37}}\right)=\pm\cdot986$,

$sec\,x=\dfrac{1}{6}\times(\pm\sqrt{37})=\pm1\cdot014$.

2. 或ル人河岸ニ立チテ其對岸ニ在ル樹木ノ仰角ヲ測リ $60°$ ヲ得, 次ニ其レヨリ 40 尺退キテ同樹木ノ仰角ヲ測リ $30°$ ヲ得タリ. 樹木ノ高サ及ビ河幅ヲ求ム.

【解】 本年度秋田鑛山專門學校問題ト同一ナリ.

醫學專門學校

1. 次ノ式ヲ證セヨ:

(イ) $sin(A-B)+sin(B-C)+sin(C-A)$

$$+4sin\frac{A-B}{2}sin\frac{B-C}{2}sin\frac{C-A}{2}=0.$$

(ロ) $cot\dfrac{A}{2}-cotA=cosecA$.

【解】 (イ) $sin(A-B)+sin(B-C)+sin(C-A)=2sin\dfrac{A-C}{2}cos\dfrac{A-2B+C}{2}$

$$+2sin\frac{C-A}{2}cos\frac{C-A}{2}=2sin\frac{C-A}{2}\left(-cos\frac{A-2B+C}{2}+cos\frac{C-A}{2}\right)$$

$$=2sin\frac{C-A}{2}\cdot2sin\frac{C-B}{2}sin\frac{A-B}{2}=-4sin\frac{A-B}{2}sin\frac{B-C}{2}sin\frac{C-A}{2}.$$

∴ 左邊$=0$.

(ロ) 問 151 ヲ見ヨ.

2. 東京淺草ノ凌雲閣ノ高サハ 220 尺ナリ. 或觀測者某地點ニ於テ其頂ノ仰角ヲ測リタルニ $15°$ ヲ得タリ. 今此觀測者ト凌雲閣ノ基底トガ同一水平面上ニ在リトセバ此地點ハ凌雲閣ヲ距ルコト何町何間何尺ナルカ.

【解】 所求ノ距離ノ尺數ハ $220cot15°=220(2+\sqrt{3})=821$ (强).
卽チ 2 町 16 間 5 尺强 (答).

海軍兵學校

1. $tan15°$, $tan75°$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

2. $\dfrac{sin(x+2y)-2sin(x+y)+sinx}{cos(x+2y)-2cos(x+y)+cosx}$ ヲ簡單ニセヨ.

【解】 原式 $=\dfrac{2sin(x+y)\,cosy-2sin(x+y)}{2cos(x+y)cosy-2cos(x+y)}=\dfrac{sin(x+y)}{cos(x+y)}=tan(x+y)$ (答).

3. $360°$ ヨリ小ニシテ $sin3\theta=\dfrac{1}{2}$ ヲ滿足スル θ ノ總ベテノ正角ヲ求メヨ.

【解】 $3\theta=30°,\ 150°,\ 390°,\ 510°,\ 750°,\ 870°.$

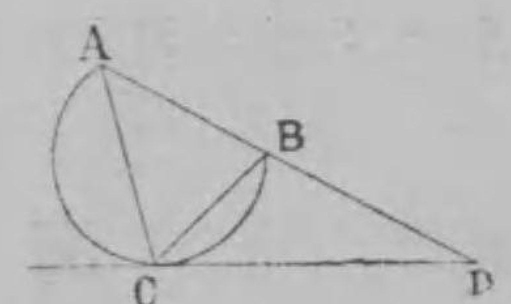
$\therefore\ \theta=10°,\ 50°,\ 130°,\ 170°,\ 250°,\ 290°.$ (答).

4. $sin(B+C-A)$, $sin(C+A-B)$, $sin(A+B-C)$ ガ等差級數ヲナストキハ, $tanA$, $tanB$, $tanC$ モ亦等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

【解】 大正三年度秋田鑛山專門學校入學試驗問題ト同一ナリ.

5. 或ル人眞直ナル道路ヲ進ミ, 其一方ニ在ル物體ノナス角ヲ測リシニ某地點ニテ最大角 α ヲ得, 更ニ c ナル距離ヲ進ミシニ道路ト β ナル角ヲナス一直線上ニ二物體ノ重ナルヲ見タリ. 二物體ノ距離ハ $\dfrac{2c\,sin\alpha\,sin\beta}{cos\alpha+cos\beta}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 A, B ヲ二物體トシ C, D ヲ前後ノ測點トスレバ, $A\hat{C}B=\alpha$, $\hat{D}=\beta$, $CD=c$ ニシテ且ツ CD ハ圓 ABC ト C ニテ切スベシ.



$\hat{A}=B\hat{C}D=\dfrac{180°-\alpha-\beta}{2}=90°-\dfrac{\alpha+\beta}{2},$

$C\hat{B}D=\hat{A}+\alpha=90°-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\alpha=90°+\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

$\triangle BCD$ ヨリ $BC=\dfrac{c\,sin\,\beta}{sin\left(90°+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\dfrac{c\,sin\,\beta}{cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}.$

$\triangle ABC$ ヨリ $AB=\dfrac{BC\,sin\,\alpha}{sin\left(90°-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\dfrac{c\,sin\,\beta\,sin\alpha}{cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{2c\,sin\alpha\,sin\beta}{cos\,\alpha+cos\,\beta}.$

$\therefore$ 題言ノ如シ.

熊本高等工業學校

$0°,\ 22°.5,\ 90°,\ 180°,\ 210°,\ 270°,\ 300°$, ノ正弦, 餘弦ヲ求メヨ.

【解】 普通ノ教科書ニ在リ.

東京高等師範學校

1. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ:

$(sinA+cosA)^2+(sinA-cosA)^2.$

容易ニ答 2 トナル. 讀者自ラ試ムベシ.

2. $cosA=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ ナルトキ $sinA$, $cotA$, $cosecA$ ヲ求ム.

(答) $\pm\dfrac{\sqrt{11}}{4}$, $\pm\dfrac{\sqrt{55}}{11}$, $\pm\dfrac{4\sqrt{11}}{11}$. 但シ複號ハ同順.

3. 次ノ方程式ヲ滿足スル x ノ一ツノ値ヲ求ム:

$$\tan 2x - \cot x = 0.$$

【解】 $\tan 2x = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

$\therefore\quad 2x = n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right),\qquad x = \frac{2n+1}{6}\pi.$

$n=0$ トスレバ $x = \frac{\pi}{6}$…………(答).

注意. "x ノ一ツノ値ヲ求ム" ト云フ問ヒ方ハ漠然タルノ嫌ヒアリ. 上ノ場合ニテハ n ヲ 0 トスルノ外任意ノ整數トシテ x ノ多クノ値ヲ求メ得ベキモノナリ.

4. 河ノ幅ヲ測ラントシテ其岸ニ沿ヒ 50 間隔テテ二點 A, B ヲ定メ A, B ヨリ對岸ノ目標 C 點ヲ望ムニ角 BAC ハ $45°$ ニシテ角 ABC ハ $60°$ ナリト云フ. 河ノ幅幾許ナルカ. 間ノ小數第二位迄計算セヨ.

【解】 問 352 ノ如クシテ解セヨ. (答) 31.70 間.

5. $\triangle ABC$ ニ於テ $\frac{\cos A}{b} = \frac{\cos B}{a}$ ナルトキハ此三角形ハ二等邊ナルカ又ハ直ナルコトヲ證セヨ.

【解】 問 285 ヲ見ヨ.

廣島高等師範學校

直角三角形ノ一鋭角ノ正切ガ $\frac{3}{4}$ ニシテ周ガ 12 米ナルトキハ斜邊ノ長サ如何.

【解】 直角ノ二邊ヲ 4, 3 トスレバ 斜邊 $= \sqrt{3^2+4^2} = 5.$

$\therefore$ 斜邊ノ長サハ $12 \times \frac{5}{3+4+5} = 5$ (米) ナリ.

大正五年度

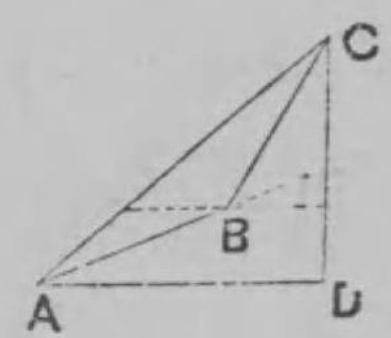
諸官立學校入學試驗問題

及ビ

答解

專門學校入學者檢定

1. 山麓ニテ山頂ノ仰角ヲ測リタルニ角 α ヲ得タリ; 然ルニ夫レヨリ山頂ニ向ツテ水平面ト角 β ナル傾斜ヲナス坂路ヲ 200 尺ダケ登リテ, 再ビ山頂ノ仰角ヲ測リタルニ角 γ ヲ得タリト云フ; 此山ノ高サヲ求メヨ.



【解】 A, B ヲ前後ノ測點, C ヲ山頂, CD ヲ山ノ高サトス.

$\triangle CAD$ ヨリ $CD = AC\sin\alpha.$

次ニ $\triangle CAB$ ニ於テ $A\hat{C}B = \gamma - \alpha,$

$A\hat{B}C = 180° - (\gamma - \beta)$

$\therefore\quad AC = \frac{AB\sin ABC}{\sin ACB} = \frac{200\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)},$

之レヲ前式ニ代入シテ $CD = \frac{200\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}.$

(答) $\frac{200\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$ 尺.

2. 三角形ニ於テ $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$ ナルトキハ此三角

形ハ如何ナル三角形ナルカ.

【解】 所設ノ式ヲ變形シテ　$\dfrac{sin A.\,cos B}{cos A.\,sin B}=\dfrac{sin^2 A}{sin^2 B}$,

玆ニ　$sin A,\ sin B \neq 0$　ナルヲ以テ　$\dfrac{sin A}{sin B}$　ニテ兩邊ヲ除シ

$\dfrac{cos B}{cos A}=\dfrac{sin A}{sin B}$, 分母ヲ拂ヒテ　$sin B cos B = sin A cos A$.

$\therefore\ \ sin 2B = sin 2A$.

$\therefore\ \ 2B=2A$　或ハ　$2A+2B=180°$.　$[0°<A,\ B<180°]$.

$\therefore\ \ A=B$　或ハ　$A+B=90°$.

卽チ此三角形ハ二等邊或ハ直ナリ.

東北帝國大學工學專門部

1. 一ツノ三角形ノ二邊ノ比ハ　$21:11$　ニシテ其夾角ハ　$84°20'$　ナリ他ノ角ヲ求ム.

但シ　$log 2=0{\cdot}30103$,　$L tan 47°50'=10{\cdot}04302$

$L tan 19°2'=9{\cdot}53779$　($1'$　ニ對スル差$=0{\cdot}00041$)

【解】 三角形ヲ　ABC　トシ　$a:b=21:11$　トセバ

$a=21p,\ b=11p$　(p　ハ未定數), $C=84°20'$　ナリ.

公式ニ依リ　$\dfrac{tan\dfrac{A-B}{2}}{tan\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{10p}{32p}=\dfrac{10}{32}$,

$\dfrac{A+B}{2}=90°-\dfrac{C}{2}=47°50'$.　　$\therefore\ \ tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{10}{32}tan 47°50'$

$\therefore\ \ L tan\dfrac{A-B}{2}=log 10-5 log 2+L tan 47°50'$.

$=9{\cdot}53787$

$\dfrac{L tan 19°2'=9{\cdot}53779}{12''\qquad\quad 8}$　　　　$60'':x''=41:8$

$x \fallingdotseq 12$

$\therefore\ \ \dfrac{A-B}{2}=19°2'12''$.

之レト　$\dfrac{A+B}{2}=47°50'$　トノ和及ビ差ヲ取リテ

$A=66°52'12''$,　$B=28°47'48''$…………(　)

2. $\alpha,\ \beta,\ \gamma$　ヲ任意ノ角トシテ

$$\frac{cos 2\alpha+cos 2\beta+cos 2\gamma-3\,cos(2\alpha+2\beta+2\gamma)}{cot(\alpha+\beta)+cot(\beta+\gamma)+cot(\gamma+\alpha)}$$

$=4 sin(\alpha+\beta) sin(\beta+\gamma) sin(\gamma+\alpha)$　ヲ證明セヨ.

【解】 左邊ノ分子$=cos 2\alpha-cos(2\alpha+2\beta+2\gamma)$

$+cos 2\beta-cos(2\alpha+2\beta+2\gamma)+cos 2\gamma-cos(2\alpha+2\beta+2\gamma)$

$=2 sin(2\alpha+\beta+\gamma) sin(\beta+\gamma)+2 sin(\alpha+2\beta+\gamma) sin(\alpha+\gamma)$

$+2 sin(\alpha+\beta+2\gamma) sin(\alpha+\beta)$

$=2\{sin(\alpha+\beta)cos(\alpha+\gamma)+cos(\alpha+\beta)sin(\alpha+\gamma)\}sin(\beta+\gamma)$

$+2\{sin(\alpha+\beta)cos(\beta+\gamma)+cos(\alpha+\beta)sin(\beta+\gamma)\}sin(\alpha+\gamma)$

$+2\{sin(\alpha+\gamma)cos(\beta+\gamma)+cos(\alpha+\gamma)sin(\beta+\gamma)\}sin(\alpha+\beta)$

$=2 sin(\alpha+\beta) sin(\beta+\gamma) sin(\gamma+\alpha)\left\{\dfrac{cos(\alpha+\gamma)}{sin(\alpha+\gamma)}+\dfrac{cos(\alpha+\beta)}{sin(\alpha+\beta)}\right.$

$\left.+\dfrac{cos(\beta+\gamma)}{sin(\beta+\gamma)}\quad\dfrac{cos(\alpha+\beta)}{sin(\alpha+\beta)}+\dfrac{cos(\beta+\gamma)}{sin(\beta+\gamma)}+\dfrac{cos(\alpha+\gamma)}{sin(\alpha+\gamma)}\right\}$

$=4 sin(\alpha+\beta) sin(\beta+\gamma) sin(\gamma+\alpha)\{cot(\gamma+\alpha)+cot(\alpha+\beta)+cot(\beta+\gamma)\}$.

之レヲ分母　$cot(\alpha+\beta)+cot(\beta+\gamma)+cot(\gamma+\alpha)$　ニテ除スレバ右邊ト等シキモノヲ得. 仍テ所題ノ等式ノ正シキコトヲ知ル.

東京高等工業學校

次ノ式ヲ證明セヨ.

$$\sin\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-120^\circ)\sin(\beta-120^\circ)$$
$$+\sin(\alpha-240^\circ)\sin(\beta-240^\circ)=\frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta).$$

【解】 左邊$=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$

$$+\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-240^\circ)\}+\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-480^\circ)\}$$

$$=\frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta-240^\circ)+\cos(\alpha+\beta-480^\circ)\}$$

$$=\frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\times 2\cos(\alpha+\beta-360^\circ)\cos120^\circ$$

$$=\frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta).$$

大阪高等工業學校

二次方程式 $x^2-2x\cot A-1=0$ ノ根ヲ求メ, 之レヲ出來ル丈ケ簡單ナル形ニ直シテ表ハセ.

【解】 根ノ公式ニ依リ

$$x=\cot A\pm\sqrt{\cot^2A+1}$$

$$=\cot A\pm\operatorname{cosec}A=\frac{\cos A\pm1}{\sin A}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} \quad 或ハ \quad \frac{-2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\cot\frac{A}{2} \quad 或ハ \quad -\tan\frac{A}{2}.$$

名古屋高等工業學校

二次方程式 $x^2\cos2\alpha-2\sqrt{2}\,x\cos\alpha+2=0$ ノ兩根ハ $\sec(45^\circ+\alpha)$, $\sec(45^\circ-\alpha)$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 根ノ公式ニヨリ

$$x=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha\pm\sqrt{2\cos^2\alpha-2\cos2\alpha}}{\cos2\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha\pm\sqrt{2(\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha+1)}}{\cos2\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha\pm\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha-\sin\alpha},\quad\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha},\quad\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{\cos(45^\circ+\alpha)},\quad\frac{1}{\cos(45^\circ-\alpha)}\qquad\left[\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos45^\circ=\sin45^\circ\right]$$

$$=\sec(45^\circ+\alpha),\quad\sec(45^\circ-\alpha).$$

米澤高等工業學校

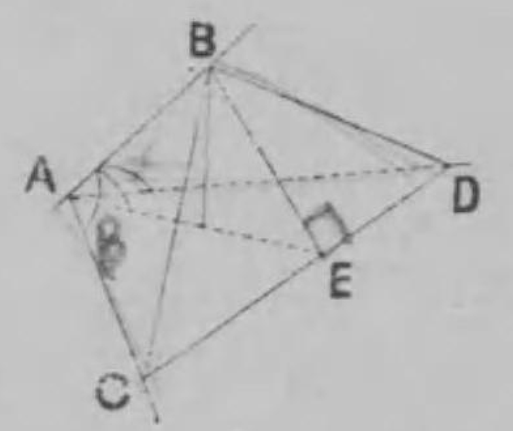
1. 半徑ニ等シキ長サノ圓弧ノ中心角ハ凡ソ何度トナルカヲ計算セヨ.

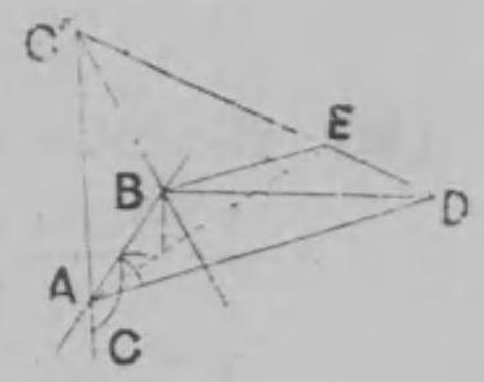
【解】 一「レーディアン」チ六十分法ニテ表ハシタルモノニシテ普通ノ敎科書ニアリ.

2. 直線 AB ニテ直角ニ交ハル二ツノ平面ニ直線 AD

及ビ直線 AC ニテ交ハル第三平面アリトシ角 DAB 及ビ角 CAB ヲ夫々 α 及ビ β トスレバ直線 AB ガ平面 CAD トナス角ノ正切ハ

$$\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}$$ ナルコトヲ證セヨ.





【解】 直線 AB 上ノ一點 B ニ於テ之レト直交スル平面ヲ作リ, 所題ノ二平面リトノ交ヲ BC, BD トセバ $C\hat{B}D$ ハ直角ニシテ, 直線 CD ハ前記ノ平面ト第三ノ平面トノ交リナルコト明カナリ.

直線 AB ノ面 ACD ノ上ニ於ケル正射影ト AB トノ定ムル平面ト CD トノ交リヲ E トセバ $B\hat{A}E$ ハ AB ガ平面 CAD トナス角ニシテ

平面 AEB$\perp$ 平面 ACD, 平面 AEB$\perp$ 平面 BCD [AB$\perp$ 平面 BCD]

$\therefore$ CD$\perp$ 面 AEB 從ッテ CD$\perp$BE.

直三角形 ABD ヨリ $BD=AB\tan\alpha$.

又 $BC=AB\tan\beta$ (第二圖ノ如ク $\beta>90^\circ$ ナルトキハ

$$BC'=AB\tan(180^\circ-\beta)=-AB\tan\beta),\quad BE=AB\tan BAE.$$

而シテ $BE.CD=2\triangle BCD=BC.BD.$ $\therefore$ $BE=\dfrac{BC.BD}{CD}.$

$$\therefore\ \tan BAE=\frac{BE}{AB}=\frac{BC.BD}{AB.CD}=\frac{AB\tan\beta.AB\tan\alpha}{AB\sqrt{AB^2\tan^2\beta+AB^2\tan^2\alpha}}$$

$$=\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}.$$

[α, β ノ何レカガ鈍角ナルトキハ分母ノ平方根ハ負ノ方ヲ採ルベク, 然ラザルトキハ正ノ方ヲトルベシ].

盛岡高等農林學校

半徑 r ノ圓ニ内接セル n 邊ノ正多角形ノ周圍及ビ面積ヲ求ム.

【解】 一邊 AB ノ長サヲ a トス.

$$A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{n}.\qquad \therefore\ \frac{a}{2}=r\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times\frac{1}{2}\right).$$

$\therefore$ n 邊形ノ周$=na=2nr\sin\dfrac{180^\circ}{n}.$

又 $\triangle OAB$ ノ面積$=\dfrac{1}{2}OA.OB\sin AOB=\dfrac{r^2}{2}\sin\dfrac{360^\circ}{n}.$

$\therefore$ n 邊形ノ面積$=n.OAB=\dfrac{1}{2}nr^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}.$

鹿兒島高等農林學校

1. 次ノ恆等式ヲ證明スベシ

$$\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}=\tan\frac{A}{2}.$$

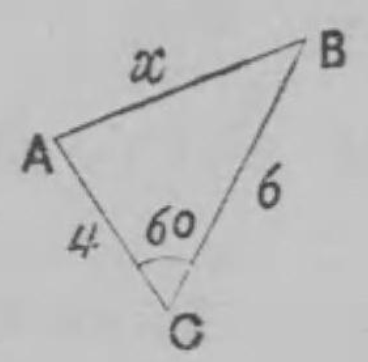
【解】 $$左邊=\frac{(1-\cos A)+\sin A}{(1+\cos A)+\sin A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}.$$

$$\left[但シ\ \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\neq 0\ トス\right]$$

2. 海岸ニ人アリ海上ニ碇泊スル二ツノ軍艦ノ距離ヲ知ラント欲シ二艦ニ對スル角ヲ測リ六十度ヲ得又各艦ヨリ發スル砲火ヲ見シヨリ砲撃ヲ聞クマデノ時間ヲ檢シテ四秒及ビ六秒ヲ得タリ音響ノ速度ハ毎秒三百三十米突ナリトスレバ二艦ノ距離何米突ナリヤ. 但シ米突以下四捨五入トス.

【解】 兩軍艦ノ位置ヲ A, B 其ノ距離ヲ x 米突トシ又觀測點ヲ C トス.



$AC=330\times4$ (米突), $BC=330\times6$ (米突).

$c^2=a^2+b^2-2ab\,cosC$ ナル公式ニヨリ

$$x^2=(330\times6)^2+(330\times4)^2-2\times330\times6\times330\times4\times\frac{1}{2}$$

$$=330^2(36+16-24)=330^2\times28.$$

$\therefore\ x=\sqrt{330^2\times28}\fallingdotseq1746.$

(答) 約 1746 米突.

秋田鑛山專門學校

1. $cotA=\dfrac{p}{q}$ ナル時 $\dfrac{p\,cosA-q\,sinA}{p\,cosA+q\,sinA}$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 所題ノ式ノ分母子ヲ $sinA$ ニテ除シ

$$\frac{p\dfrac{cosA}{sinA}-q}{p\dfrac{cosA}{sinA}+q}=\frac{p\,cotA-q}{p\,cotA+q}.$$

之レニ $cotA$ ノ値ヲ代入シテ $\dfrac{p\times\dfrac{p}{q}-q}{p\times\dfrac{p}{q}+q}=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$…………(答)

2. 三角形ノ二邊ノ長サガ夫々 1.22 及ビ 0.75 ニシテ其夾角ハ 30° ナリトス. 殘リノ一邊ノ長サヲ小數點以下二位迄計算セヨ.

【解】 所求ノ邊ノ長サヲ x トセハ前々題ト同樣ニ

$$x^2=1.22^2+0.75^2-2\times1.22\times0.75\times\frac{\sqrt{3}}{2}\fallingdotseq0.466075.$$

$\therefore\ x\fallingdotseq\sqrt{0.466075}\fallingdotseq0.68.$

上田蠶絲專門學校

$sin2\theta$ ト $sin\theta$ トノ比ガ 3 : 2 ナルトキ $cos\theta$ ノ値幾何ナルカ.

【解】 假設ヨリ $\dfrac{sin2\theta}{sin\theta}=\dfrac{3}{2}$ 卽チ $\dfrac{2sin\theta cos\theta}{sin\theta}=\dfrac{3}{2}$ 卽チ $2cos\theta=\dfrac{3}{2}$

[$sin\theta=0$ トセバ左邊ノ値不定トナル $\therefore\ sin\theta\neq0$].

$\therefore\ cos\theta=\dfrac{3}{4}.$

桐生高等染織學校

$A+B+C=180°$ ナルトキ次ノ等式ヲ證セヨ.

$$\frac{sinA+sinB-sinC}{sinA+sinB+sinC}=tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}.$$

【解】 左邊$=\dfrac{2sin\dfrac{A+B}{2}cos\dfrac{A-B}{2}-sin(A+B)}{2sin\dfrac{A+B}{2}cos\dfrac{A-B}{2}+sin(A+B)}$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}}{2\sin\frac{A+B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}}$$

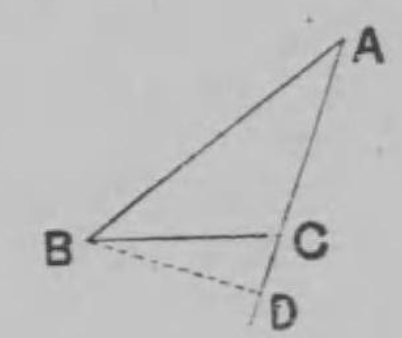
$$\left[\sin\frac{A+B}{2}\neq 0\right]$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}.$$

東京高等蠶絲學校

三角形ノ内角ヲ A, B, C トシコレニ對スル邊ヲソレゾレ a, b, c トスレバ $b=a\cos C+c\cos A$ ナルコトヲ C 角ガ鈍角ナル三角形ニ就キテ證明セヨ.

【解】 B ヨリ AC ヘノ垂線ヲ BD トセバ $\hat{C}$ ハ鈍角ナルヲ以テ D ハ AC ノ引長上ニアリ. 故ニ AC=AD−CD.



而シテ $AD=AB\cos A$,

$CD=BC\cos BCD=BC\cos(180°-C)=-BC\cos C$.

此等ヲ上ノ式ニ代入シテ

$$b=c\cos A-(-a\cos C)=c\cos A+a\cos C.$$

商船學校

1. 72° 31′ 30″ ナル角ヲ直角ヲ單位トセル既約分數ニテ表ハセ

【解】 $$\frac{72\frac{31\frac{1}{2}}{60}}{90}=\frac{72\frac{21}{40}}{90}=\frac{967}{1200}.$$

2. $\tan\theta=\dfrac{2a^2+2a}{2a+1}$ ナルトキハ $\cos\theta$ ノ値如何. 但シ θ ハ第三象限ニアル角ナリ.

【解】 $$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2a^2+2a}{2a+1}\right)^2}}=\pm\frac{2a+1}{2a^2+2a+1}\cdots\cdots\cdots(\alpha)$$

而シテ θ ハ第三象限ノ角ナルヲ以テ其ノ tan. ノ値ハ正ナリ.

$\therefore\ \dfrac{2a^2+2a}{2a+1}>0.\quad \therefore\ a>0$ 或ハ $-\dfrac{1}{2}>a>-1.$

サテ (α) ノ分母ハ變形シテ $a^2+(a+1)^2$ トナルカ故ニ a ノ値ガ實數ナル以上ハ恒ニ正ナレドモ, 分子 $2a+1$ ハ $a>0$ ナルトキハ正ニシテ, $-\dfrac{1}{2}>a>-1$ ナルトキハ負トナル.

$\therefore\ a>0$ ナルトキハ $\cos\theta=-\dfrac{2a+1}{2a^2+2a+1}$,

$-\dfrac{1}{2}>a>-1$ ナルトキハ $\cos\theta=\dfrac{2a+1}{2a^2+2a+1}$.

[第三象限ノ角ノ cos. ハ負ナルヲ以テ]

3. $\dfrac{5}{2}\times 180°+A$ ナル角ノ三角函數ヲ A ノ三角函數ニテ表ハセ.

【解】 所題ノ角ヲ B トセバ

$B=360°+90°+A.$

$\therefore\ \sin B=\sin(90°+A)=\cos A,$

$$\cos B=\cos(90^\circ+A)=-\sin A,$$

從ツテ $\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\cos A}{-\sin A}=-\cot A,$

$\cot B=-\tan A,\ \sec B=-\operatorname{cosec} A,\ \operatorname{cosec} B=\sec A.$

4. $\operatorname{cosec}2x+\cot 4x=\cot x-\operatorname{cosec}4x$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{1}{\sin 2x}+\dfrac{\cos 4x}{\sin 4x}=\dfrac{2\cos 2x+\cos 4x}{2\sin 2x\cos 2x}$

$$=\frac{2\cos 2x+2\cos^2 2x-1}{2\sin 2x\cos 2x}=\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{1}{\sin 4x}$$

$$=\frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}-\frac{1}{\sin 4x}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin 4x}=\text{右邊}.$$

5. $\tan x.\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\tan 3x$ ヲ證セヨ.

【解】 $\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\dfrac{\sin(60^\circ-x)\sin(60^\circ+x)}{\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)}$

$$=\frac{\cos 2x-\cos 120^\circ}{\cos 120^\circ+\cos 2x}=\frac{2\cos 2x+1}{-1+2\cos 2x}=\frac{2(1-2\sin^2 x)+1}{-1+2(2\cos^2 x-1)}=\frac{3-4\sin^2 x}{4\cos^2 x-3}.$$

∴ 所題ノ式ノ左邊

$$=\frac{\sin x(3-4\sin^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\text{右邊}.$$

6. 三角形 ABC ニ就テ $\sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=n\sin\dfrac{C}{2}$

ナルトキハ $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{n-1}{n+1}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\tan\dfrac{A}{2}\tan\left(90^\circ-\dfrac{A+C}{2}\right)$

$$=\tan\frac{A}{2}\cot\frac{A+C}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A+C}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left\{\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)-\sin\frac{C}{2}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}\right\}}$$

$$=\frac{n\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}}{n\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}}=\frac{n-1}{n+1}.\qquad\left[\sin\frac{C}{2}\neq 0\right]$$

7. $a,\ b,\ A$ ヲ與ヘテ三角形ヲ作ラントスレバ一般ニ二ツノ三角形ヲ得其第三邊ヲ c 及 c' トスレバ

$c+c'=2b\cos A$ ナリ. 之ヲ證セヨ.

【解】 二ツノ三角形ニ於テ b ノ對角ヲ B, B′ トシ, c, c' ノ對角ヲ夫々 C, C′ トセバ.

$$B'=180^\circ-B,\qquad C=180^\circ-(A+B),\qquad C'=180^\circ-(A+B')=B-A$$

$$\therefore\quad \frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin B},$$

$$\frac{c'}{b}=\frac{\sin C'}{\sin B'}=\frac{\sin(B-A)}{\sin(180^\circ-B)}=\frac{\sin(B-A)}{\sin B}.$$

$$\therefore\quad \frac{c+c'}{b}=\frac{\sin(A+B)+\sin(B-A)}{\sin B}=\frac{2\sin B\cos A}{\sin B}=2\cos A.$$

$$\therefore\quad c+c'=2b\cos A.$$

8. $a=18,\ b=20,\ c=22$ ナル三角形ニ於テ

$\log\tan\dfrac{A}{2}$ ヲ求メヨ.

但シ $\log 2=0.3010,\ \log 3=0.4771.$

【解】 $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$

而シテ $s=\dfrac{1}{2}(18+20+22)=30,\quad s-a=12,\quad s-b=10,\quad s-c=8.$

$$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{10\times 8}{30\times 12}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\therefore\quad \log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\log 2-\log 3$$

$$=\frac{1}{2}\times 0{\cdot}3010-0{\cdot}4771=\bar{1}{\cdot}6734.$$

熊本高等工業學校

$\sin 40^\circ = 0{\cdot}64$ トシテ $\tan 140^\circ$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $\tan 140^\circ = -\tan 40^\circ = -\dfrac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}$

$$= -\frac{\sin 40^\circ}{\sqrt{1-\sin^2 40^\circ}} = -\frac{0.64}{\sqrt{1-0.64^2}} = -0.83.$$

大阪府立醫科大學豫科

△ABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{1-\cos A+\cos B+\cos C}{1-\cos C+\cos A+\cos B} = \cot\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}.$$

【解】 左邊 $= \dfrac{2\sin^2\dfrac{A}{2}+2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\cos^2\dfrac{A}{2}-2\sin\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}}$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B+C}{2}-\sin\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\cdot 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cdot 2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \text{右邊}.$$

陸軍士官候補生

1. 次ノ各恆等式ヲ證セヨ.

(A) $8\sin A^4 = 3-4\cos 2A+\cos 4A,$

(B) $\sin A+\sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}.$

【解】 (A) 左邊 $=2(2\sin^2 A)^2 = 2(1-\cos 2A)^2$

$= 2(1-2\cos 2A+\cos^2 2A) = 2-4\cos 2A+1+\cos 4A =$ 右邊.

(B) 必要ナル公式ニシテ其ノ作リ方普通ノ教科書ニアリ.

2. 三角形 ABC ニ於テ $B\hat{A}C=75^\circ$, $A\hat{B}C=60^\circ$, $AB=m$ 尺. 次ノ各項ヲ求メヨ.

(i) AC 及ビ BC ノ長サ.

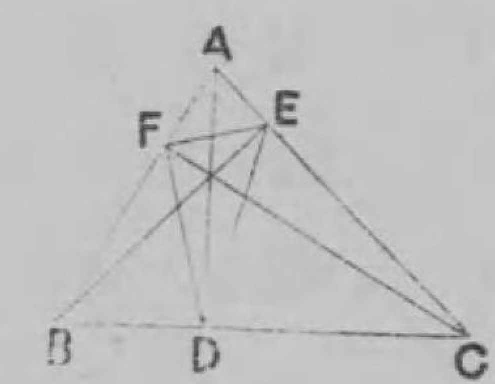
(ii) 三角形 ABC ノ垂足三角形 DEF ノ各邊ノ長サ.

(iii) 三角形 ABC ノ面積.

(iv) 三角形 DEF ノ面積.

【解】 (i) $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$, $\quad C = 180^\circ-(75^\circ+60^\circ) = 45^\circ.$

$$\therefore\ AC = \frac{m\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{m\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{m\sqrt{6}}{2}\ (\text{尺}).$$



同理ニヨリ

$$BC = \frac{m\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{m\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{m(\sqrt{3}+1)}{2}\ (\text{尺}).$$

(ii) △AEF ヨリ $\dfrac{EF}{\sin A} = \dfrac{AF}{\sin AEF}$,

$A\hat{E}F = A\hat{B}C$ 〔∵ 四邊形 EFBC ハ圓ニ內接ス〕

又 $AF = AC\cos A.$

$$\therefore\ EF=\frac{AC\cos A\sin A}{\sin B}=\frac{BC\cos A\sin A}{\sin A}$$

$$=BC\cos A=\frac{m(\sqrt{3}+1)}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{m\sqrt{2}}{4}\text{(尺)}.$$

同樣ニシテ $FD=AC\cos B=\dfrac{m\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{m\sqrt{6}}{4}$ (尺),

$$DE=AB\cos C=m\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{m\sqrt{2}}{2}\text{ (尺)}.$$

(iii) ABC ノ面積$=\dfrac{AB\cdot BC}{2}\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot\dfrac{m(\sqrt{3}+1)}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{m^2(3+\sqrt{3})}{8}\text{(平方尺)}.$$

(iv) DEF ノ面積$=\dfrac{DE\cdot DF}{2}\sin EDF.$

而シテ $E\hat{D}F=180^\circ-(E\hat{D}C+F\hat{D}B)=180^\circ-2B\hat{A}C=30^\circ$

∴ DEF ノ面積$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{m\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{m\sqrt{6}}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{m^2\sqrt{3}}{16}$(平方尺).

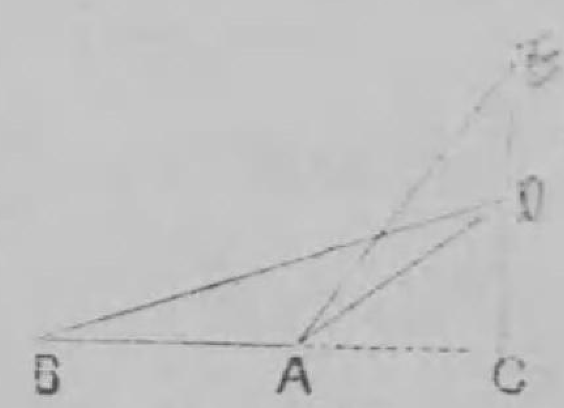
3. 海濱ノ丘上ニ立チタル燈臺アリ今其ノ濱ノ或地點ニ於テ丘及ビ燈臺ノ各頂點ノ仰角ヲ測リシニ夫々 36°, 54° ヲ得次ニ其ノ觀測點ヨリ後方ニ 100尺ヲ退キテ再ビ丘ノ頂ノ仰角ヲ測リシニ 18° ヲ得タリト云フ之レニヨリテ燈臺ノ高サヲ尺ノ位マデ求メヨ.

但シ $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ ナリ.

【解】 圖ニ於テ CD ヲ丘, DE ヲ燈臺, A, B ヲ前後ノ測點トス.

△ADE ヨリ $\dfrac{ED}{\sin(54^\circ-36^\circ)}=\dfrac{AD}{\sin(90^\circ-54^\circ)}$

$$\therefore\ ED=\frac{AD\sin 18^\circ}{\sin 36^\circ}.$$



又 △ADB ヨリ $\dfrac{AD}{\sin 18^\circ}=\dfrac{AB}{\sin(36^\circ-18^\circ)}$

∴ $AD=\dfrac{100\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ}=100.$ 之レヲ上式ニ代用シ

$$ED=\frac{100\sin 18^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{50}{\cos 18^\circ}.$$

サテ $\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$

$$\therefore\ ED=\frac{50\times 4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{50\times 4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{100-20}}$$

$$=10\sqrt{50-10\sqrt{5}}\fallingdotseq 10\sqrt{50-22.36}\fallingdotseq 52.$$

(答) 52 尺餘.

陸軍主計候補生

1. 次ノ兩式ヲ證明セヨ.

(A) $\tan\theta+\cot\theta=\sqrt{(\sec^2\theta+\mathrm{cosec}^2\theta)}$

(B) $\sin 31^\circ+\sin 29^\circ=\cos 1^\circ.$

【解】 (A) 左邊$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}.$

又 右邊$=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)}=\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}}=\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}.$

∴ 左邊=右邊.

(B) 積ノ形ニ變ジテ

左邊$=2\sin 30^\circ\cos 1^\circ=2\times\dfrac{1}{2}\cos 1^\circ=\cos 1^\circ.$

2. 三角形アリ其ノ三ツノ邊ハ夫々六尺, 十尺, 十四尺ナリト云フ此ノ三角形ノ最大角ヲ求ム.

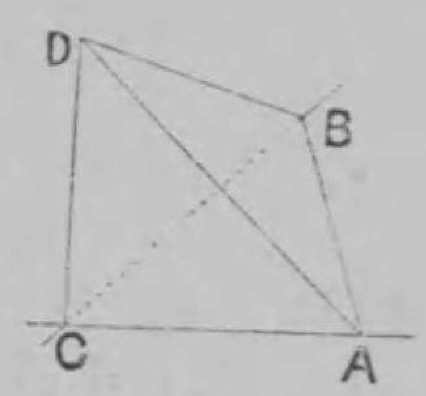
【解】 所題ノ三角形ヲ ABC ト名ヅケ a, b, c ヲ夫々 6, 10, 14 トス. 然ラバ $\hat{C}$ ハ最大ナリ.

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{6^2+10^2-14^2}{2\times6\times10}=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ $C=120^\circ$..............(答)

3. 塔アリ夫ヨリ正東ニアル點 A 及ビ正北ニアル點 B ヨリ其ノ仰角ヲ測リシニ A ヨリハ四十五度, B ヨリハ三十度ヲ得タリ而シテ A, B ノ距離ハ二百四十尺ナリシト云フ, 塔ノ高サ何程ナルカ.

【解】 CD ヲ塔トス. $A\hat{C}D=90^\circ$, $C\hat{A}D=45^\circ$ ナルヲ以テ $CA=CD$.



次ニ直三角形 BCD ヨリ

$BC=CD\cot30^\circ=CD\sqrt{3}$

又 $A\hat{C}B=90^\circ$ ナルヲ以テ $CA^2+CB^2=AB^2$

卽チ $CD^2+(CD\sqrt{3})^2=240^2$

$\therefore$ $CD^2=\frac{240^2}{4}=4\times60^2$ $\therefore$ $CD=2\times60=120$

(答) 120尺

海軍機關學校

1. 下式ヲ最簡ニセヨ.

$$\frac{\cos(-A)\sin(90^\circ-A)\tan(540^\circ+A)}{\sin(-A)\cos(A-270^\circ)\cot(180^\circ-A)}.$$

【解】 所題ノ式 $=\frac{\cos A\cos A\tan(180^\circ+A)}{-\sin A\cos(A+90^\circ)(-\cot A)}$

$$=\frac{\cos^2A\tan A}{\sin A(-\sin A)\cot A}=\frac{\cos A\sin A}{-\sin A\cos A}=-1.$$

2. 二角ノ和ト差トノ正弦ト餘弦トノ公式ヲ書キ, コレニヨリ

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

【解】 何レノ教科書ニモアリ.

3. $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ ヲ證セヨ.

若シ $270^\circ>A>0^\circ$ ナラバ複號ノ中ノ何レカヲ取ルベキカ.

【解】 同上.

又 $270^\circ>A>0^\circ$ ナルトキハ $135^\circ>\frac{A}{2}>0^\circ$ ニシテ $\frac{A}{2}$ ノ cos. ハ正トモ負トモ決セズ. 之レヲ決定スルニハ A ノ範圍ノ今一層狹小ナランコトヲ要ス.

4. ABC ナル三角形ニ於テ

$A=43^\circ24'$, $C=90^\circ$, $b=250$ (尺) ナリトセバ a 邊ノ長サ如何.

但シ $\tan43^\circ20'=0.9435$, $\tan43^\circ30'=0.9490$.

【解】 $a=b\tan A=250\tan43^\circ24'$,

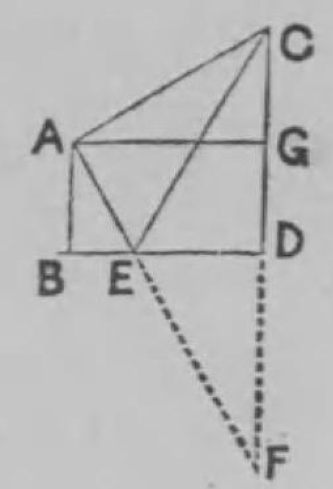
$$\begin{array}{ll} \tan43^\circ20'=0.9435 & 0.9490 \\ \quad 4' \qquad\quad 22 & \underline{0.9435} \\ \tan43^\circ24'=0.9457 & 55\times\frac{4}{10}=22 \end{array}$$

$\therefore$ $a=250\times0.9457\fallingdotseq236.4$ (尺)..............(答)

5. 人アリ二 ノ窓ヨリ或木ノ頂點ヲ望ミ仰角 30° ヲ

得同時＝庭園ノ小池＝映セル其ノ像ヲ望ミ俯角 60° ヲ得タリト若シ池面ヨリ二階ノ窓マデノ高サ 18 尺ナリトセバ此ノ木ノ高サ幾何.

【解】 A ヲ觀測點, AB ヲ家, CD ヲ木, E ヲ樹梢ノ影トス. AE, CD ノ延長ノ交點ヲ F, A ヲ過グル水平線ガ CD ト交ハル點ヲ G トス.



$ED \perp CF$,　$F\hat{E}D = B\hat{E}A = C\hat{E}D$　ナルガ故＝

$FD = DC$.　又　$GD = AB$.

今 CD ヲ x 尺, AG ヲ y 尺トセバ

$\triangle CAG$ ヨリ　$\dfrac{x-18}{y} = \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$\triangle AFG$ ヨリ　$\dfrac{18+x}{y} = \tan 60° = \sqrt{3}$.

$\therefore$　$\dfrac{x-18}{y} \times \dfrac{y}{18+x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　即チ　$\dfrac{x-18}{x+18} = \dfrac{1}{3}$

比例ノ理＝ヨリ　$\dfrac{2x}{36} = \dfrac{3+1}{3-1} = 2$

$\therefore$　$x = 36$.　　　(答) 36 尺.

海 軍 經 理 學 校

1. $\dfrac{\dfrac{1}{\tan^2 A+1} + \dfrac{1}{\cot^2 A+1}}{\left(1-\dfrac{\sin^4 A}{\cos^4 A}\right)\cos^2 A + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$ ヲ簡單＝セヨ.

【解】 所題ノ式

$$= \frac{\dfrac{1}{\sec^2 A} + \dfrac{1}{\mathrm{cosec}^2 A}}{\dfrac{\cos^4 A - \sin^4 A}{\cos^2 A} + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\dfrac{(\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)}{\cos^2 A} + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}} = 1.$$

2. $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x - \dfrac{7}{4} = 0$　ナル時 x 角ノ値ヲ求メヨ. 但シ x ハ鋭角トス.

【解】 $1 - \cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - \dfrac{7}{4} = 0$.

兩邊＝ -4 ヲ掛ケ, 整頓スレバ

$4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$

$(2\cos x - \sqrt{3})^2 = 0$　　$\therefore$　$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$　$x = 30°$..............(答).

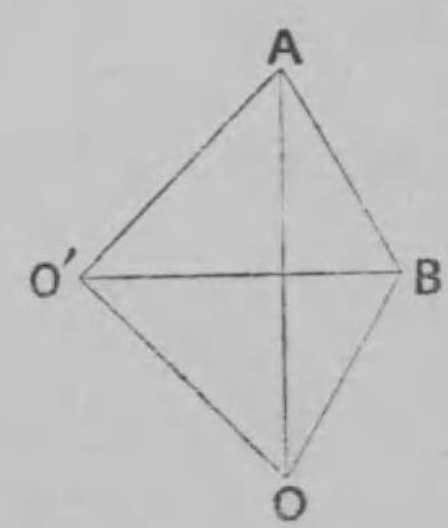
3. 人アリ O 點ヨリ北及ビ北ヨリ 30° 東ノ方向＝二點 A 及ビ B ヲ望ミ而シテ北西ノ方向＝ 10 哩ヲ進ミ A 及ビ B ノ方向ヲ望ミシ＝北東及ビ東トナレリト云フ. A, B ノ距離如何.

【解】 第二ノ觀測點ヲ O′ トス.

$O'B \perp AO$,　$O\hat{O'}B = 45° = B\hat{O'}A$　ナルガ故＝ O′B ハ AO ヲ二等分ス

$\therefore$　$AB = OB$.

又　$O\hat{B}O' = 90° - B\hat{O}A = 60°$.



$\triangle OBO'$ ヨリ　$\dfrac{OB}{\sin O'} = \dfrac{OO'}{\sin B}$

$\therefore$　$OB = BA = \dfrac{10\sin 45°}{\sin 60°}$

$= \dfrac{10 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{10\sqrt{6}}{3} \fallingdotseq 8.2$.

(答) 8.2 哩.

4. $sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}cos\theta$ ヲ解ケ.

【解】 兩邊ヲ $cos\theta(\neq 0)$ ニテ除シ

$$tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=tan30^\circ$$

$\therefore\ \theta=n180^\circ+30^\circ$ (n ハ零又ハ正, 負ノ整數).

5. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$log(x^2-6x+8)-log(x-4)=1.$$

【解】 變形シテ $log\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}=log10$

$\therefore\ \dfrac{x^2-6x+8}{x-4}=10$ 卽チ $x-2=10$

$\therefore\ x=12$................(答)

東北帝國大學農科大學豫科

1. $cos(\alpha-\beta)sin(\gamma-x)=cos(\alpha+\beta)sin(\gamma+x)$ ナルトキ $tan\,x$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 比例式ノ形ニ直シ $\dfrac{sin(\gamma-x)}{sin(\gamma+x)}=\dfrac{cos(\alpha+\beta)}{cos(\alpha-\beta)}$

比例ノ理ニヨリ $\dfrac{sin(\gamma+x)-sin(\gamma-x)}{sin(\gamma+x)+sin(\gamma-x)}=\dfrac{cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)}{cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)}$

卽チ $\dfrac{2sinx\ cos\gamma}{2sin\gamma\ cosx}=\dfrac{2sin\alpha\ sin\beta}{2cos\alpha\ cos\beta}$

$\therefore\ \dfrac{sinx}{cosx}=\dfrac{sin\alpha\ sin\beta\ sin\gamma}{cos\alpha\ cos\beta\ cos\gamma}$ 卽チ $tanx=tan\alpha\ tan\beta\ tan\gamma.$

2. 直角三角形 ABC ニ於テ, C ハ直角, B ハ 15° ニ

シテ AB ハ $\sqrt{12}$ 寸ナルトキ C ノ二等分線ノ長サ何寸ナルカ.

【解】 C ノ二等分線ヲ CD トス.

△ADC ヨリ $\dfrac{CD}{sinA}=\dfrac{AC}{sinADC}$

而シテ $A\hat{D}C=45^\circ+15^\circ=60^\circ.$

又 △ABC ヨリ $AC=ABsinB=\sqrt{12}\,sin15^\circ$

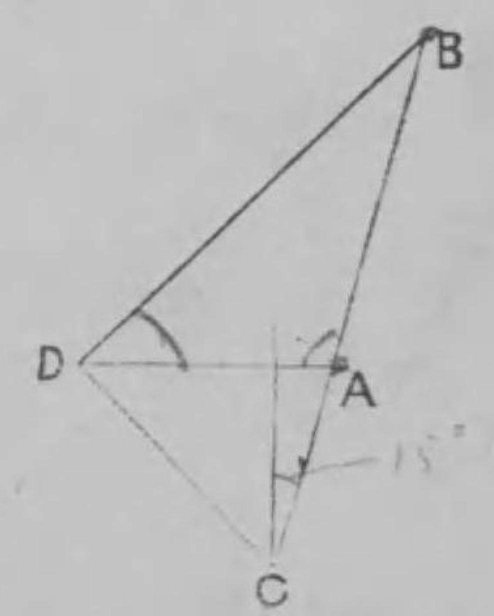
$$\therefore\ CD=\frac{\sqrt{12}sin15^\circ sin75^\circ}{sin60^\circ}=\frac{\sqrt{12}.\frac{1}{2}(cos60^\circ-cos90^\circ)}{sin60^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-0\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$$

(答) 1 寸.

水産講習所

航行中ノ船ヨリ北十五度東ニ當リテ一直線ニ二個ノ岩ヲ發見セリ船ハ夫ヨリ北西ニ五浬進ミタルトキ第一ノ岩ハ東ニ見ヘ第二ノ岩ハ北東ニ見エタリ. 二岩ノ距離幾浬ナルカ.



【解】 A, B ヲ二岩ノ位置, C, D ヲ前後ノ觀測點トス.

△ABD ヨリ $\dfrac{AB}{sinBDA}=\dfrac{BD}{sinBAD},$

而シテ $B\hat{D}A=45^\circ,\ B\hat{A}D=A\hat{D}C+A\hat{C}D$
$=45^\circ+(45^\circ+15^\circ)=105^\circ.$

又 △BDC ニ於テ $B\hat{D}C=90^\circ$

$\therefore\ BD=DCtanBCD=DCtan60^\circ.$

$$\therefore\ AB=\frac{DC\tan 60^\circ \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{5\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=5(3-\sqrt{3})$$

$\fallingdotseq 6.34$(浬)..............(答)

高　等　學　校

1. $\tan\theta=-2\sqrt{2}$ ナルトキ $\sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$ ノ値ヲ求メヨ. 但シ θ ハ 360° ヨリ小ナル正角トス.

【解】 $\tan$. ガ負ナルヲ以テ θ ハ第二象限若クハ第四象限ノ角ナリ.
先ヅ第二象限ノ角トシテ考ヘン

此ノ場合ニハ $\cos\theta$ ハ負, $\sin\frac{\theta}{2}$ ハ正, $\cos\frac{\theta}{2}$ ハ正ナリ.

$$\therefore\ \cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{\sec^2\theta}}=-\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=-\sqrt{\frac{1}{1+(-2\sqrt{2})^2}}=-\frac{1}{3},$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\therefore$ 所題ノ式$=\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}=0.$

次ニ第四象限ノ角ナルトキハ $\cos\theta$ ハ正, $\sin\frac{\theta}{2}$ ハ正, $\cos\frac{\theta}{2}$ ハ負ナリ.

$\therefore$ 前ノ計算ヲ應用シテ $\cos\theta=\frac{1}{3}$, $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$\sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\sqrt{3}.$$

(答) 0 或ハ $\sqrt{3}$.

2. 三角形 ABC ノ三邊 a, b, c ガ等差級數ヲナストキ

ハ次ノ等式ノ成立スルコトヲ證セヨ. 但シ $a>b>c$ ナリトス.
$$\frac{\sin(A-C)}{\sin(A+C)}=\frac{4(a-c)}{a+c}.$$

【解】 左邊$=\dfrac{\sin A\cos C-\cos A\sin C}{\sin B}=\dfrac{a.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{b}$

$$=\frac{2(a^2-c^2)}{2b^2}=\frac{2(a+c)(a-c)}{2b^2}.$$

然ルニ $a+c=2b$ $\therefore$ 上式$=\dfrac{2.2b(a-c)}{b(a+c)}=\dfrac{4(a-c)}{a+c}.$

即チ證シ得タリ.

東京帝國大學農科大學實科

1. 次ノ方程式ヲ解ケ $2\sin^2\theta-5\cos\theta-4=0.$

【解】 $2(1-\cos^2\theta)-5\cos\theta-4=0$

$2\cos^2\theta+5\cos\theta+2=0$, $(2\cos\theta+1)(\cos\theta+2)=0$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{2}$ 〔-2 ハ採用スベカラズ〕

$\therefore\ \theta=n360^\circ\pm120^\circ$ 即チ $(2m+1)180^\circ\pm60^\circ$.

〔m, n ハ正又ハ負ノ整數又ハ零〕

2. 三邊ヲ知ノテ三角形ノ面積ヲ求ムル公式ヲ導キ出セ.

【解】 何レノ敎科書ニモアリ.

海 軍 兵 學 校

1. 二邊ノ長サ 9 尺ト 40 尺トニシテ夾角 30° ナル三角形ト等積ナル等邊三角形ノ一邊及ビ其ノ內接圓ノ半徑ノ長サヲ各寸マデ求メヨ.

【解】 所設ノ三角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}.9.40 sin30° = 90$(平方尺) ナリ. 之レト等積ナル正三角形ノ一邊チ x 尺トスレバ

$$\frac{1}{2}x^2 sin60° = 90 \qquad \therefore \quad x^2 = \frac{4\times 90}{\sqrt{3}} = 120\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{120\sqrt{3}} \fallingdotseq 14.4 \ (\text{尺}).$$

又其ノ正三角形ノ內切圓ノ半徑チ y 尺トセバ

$$y = \frac{x}{2} tan30° = \frac{\sqrt{120\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{10\sqrt{3}} \fallingdotseq 4.1 \ (\text{尺}).$$

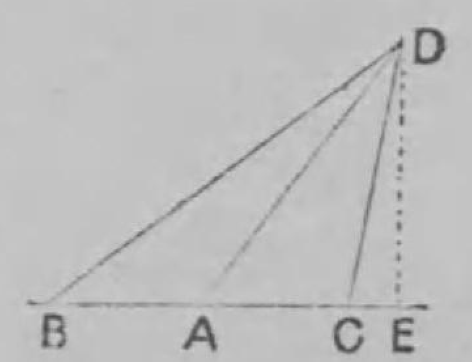
(答) 邊 14.4 尺, 半徑 4.1 尺.

2. 水平ナル地平面上ニ正東ニ傾キテ立テル竿アリ其ノ基點ヨリ正西ニ距離 a 及 b ナル二點ニ於テ竿ノ頂點ヲ望ミ夫々仰角 α, β ヲ得タリト云フ. 竿ノ水平面トナス角ヲ θ トシ其ノ鉛直ノ高サヲ h トスレバ

$$tan\theta = \frac{a-b}{b\,cot\alpha - a\,cot\beta}, \qquad h = \frac{b-a}{cot\beta - cot\alpha}$$

ナルコトヲ證セヨ.

【解】 竿チ CD, 竿頭 D ノ地平面ニ於ケル正射影チ E トシ, A, B チ前後ノ測點トス.



BA=BC−AC=BE−AE 卽チ

$$b-a = h cot\beta - h cot\alpha = h(cot\beta - cot\alpha)$$

$$\therefore \quad h = \frac{b-a}{cot\beta - cot\alpha}.$$

次ニ AC=AE−CE 卽チ $a = h\,cot\alpha - h\,cot\theta$

$$\therefore \quad cot\theta = cot\alpha - \frac{a}{h} = cot\alpha - \frac{a(cot\beta - cot\alpha)}{b-a} = \frac{b\,cot\alpha - a\,cot\beta}{b-a}$$

$$\therefore \quad tan\theta = \frac{b-a}{b\,cot\alpha - a\,cot\beta}.$$

3. 30° ト 45° トノ正弦及餘弦ノ値ヲ知リテ 15°, $22°\frac{1}{2}$, 75°, $67°\frac{1}{2}$ ノ正弦及餘弦ノ値ヲ求ム.

【解】 此等ノ角ハ何レモ第一象限ニアルガ故ニ其ノ三角函數ノ値ハ凡テ正數ナリ.

$$cos75° = sin15° = \sqrt{\frac{1-cos30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$sin75° = cos15° = \sqrt{\frac{1+cos30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$cos67°\frac{1}{2} = sin22°\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1-cos45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

同樣ニシテ $sin67°\frac{1}{2} = cos22\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$

4. $p\,sin(\theta+\alpha) = q\,sin(\theta+\beta)$ ナルトキ

$$\frac{p\,sin\alpha - q\,sin\beta}{q\,cos\beta - p\,cos\alpha}$$ ナル式ヲ最モ簡單ニセヨ.

【解】 假設ヨリ $p(sin\theta\,cos\alpha + cos\theta\,sin\alpha) = q(sin\theta\,cos\beta + cos\theta\,sin\beta)$

$$\therefore \quad (p\,sin\alpha - q\,sin\beta)cos\theta = (q\,cos\beta - p\,cos\alpha)sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{p\,sin\alpha - q\,sin\beta}{q\,cos\beta - p\,cos\alpha} = \frac{sin\theta}{cos\theta} = tan\theta.$$

5. 次ノ方程式ニ適スル $360°$ ヲ超エザル θ ノ總テノ正値ヲ求メヨ　$2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0.$

【解】 $2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-3=0,$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0,\qquad (2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)=0$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}$ 或ハ 1.

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ ヨリ $\theta=60°,\ 300°,$　$\cos\theta=1$ ヨリ $\theta=360°,$

($\cos 0°=1$ ナレドモ 0 ハ正數ナラザレバ $0°$ ハ採ラズ)

(答) $60°,\ 300°,\ 360°.$

商　船　學　校

1. 下式ヲ簡單ニスベシ.

$$\left(\tan\frac{A}{2}-\cot\frac{A}{2}\right)^2(1-2\tan A\cot 2A).$$

【解】 所題ノ式$=\left(\dfrac{\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}\right)^2\left(\dfrac{\cos A\sin 2A-2\sin A\cos 2A}{\cos A\sin 2A}\right)$

$$=\left(\frac{2(-\cos A)}{\sin A}\right)^2\left(\frac{\sin(2A-A)-\sin A\cos 2A}{\cos A\sin 2A}\right)$$

$$=\frac{4\cos^2 A\sin A(1-\cos 2A)}{\sin^2 A\cos A\sin 2A}=\frac{4\cos A.\ 2\sin^2 A}{\sin A\cdot 2\sin A\cos A}$$

$=4$……………(答)

2. 若シ $\tan\theta\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ ナレバ $a\sec\theta+b\operatorname{cosec}\theta$ ノ値如何

【解】 本書問 30 ト同ジ.

3. $A+B+C=180°$ ナルトキ, 下式ヲ證明スベシ.

$$\tan\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}.$$

【解】 $\cos\frac{A}{2}=\cos\left(90°-\frac{B+C}{2}\right)=\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$

$$\therefore\ \cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}.$$

$\therefore$ 所設ノ式ノ左邊$=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}.$

同樣ニシテ　右邊$=\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}.$

$\therefore$ 左邊$=$右邊.

4. $A+B+C+D=360°$ ナルトキ, 下式ヲ證明スベシ.

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{C+A}{2}.$$

【解】 $A+B+C+D=360°$　　$\therefore\ \sin D=-\sin(A+B+C).$

$\therefore$ 左邊$=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B+2C}{2}\sin\frac{-A-B}{2}$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B+2C}{2}\right\}$$

$=2\sin\frac{A+B}{2}.\ 2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{C+B}{2}=$右邊.

5. 下式ヲ解ケ　$\cos\theta-\cos3\theta=\sin4\theta.$

【解】 變形シ轉項シテ　$2\sin2\theta\sin\theta-2\sin2\theta\cos2\theta=0.$

卽チ　$2\sin2\theta(\sin\theta-\cos2\theta)=0.$

$\therefore\ \sin2\theta=0\ldots\ldots\ldots(\mathrm{i}),\qquad \sin\theta=\cos2\theta\ldots\ldots\ldots(\mathrm{ii}).$

(i) ヨリ　$2\theta=n\,180^\circ\qquad\therefore\ \theta=n\,90^\circ.$

(ii) ヨリ　$\cos2\theta=\cos(90^\circ-\theta)$

$\therefore\ 2\theta=2n180^\circ\pm(90^\circ-\theta)$

$\therefore\ 3\theta=2n180^\circ+90^\circ$　或ハ　$\theta=2n180^\circ-90^\circ$

$\therefore\ \theta=2n60^\circ+30^\circ$　或ハ　$(4n-1)90^\circ.$

$(4n-1)90^\circ$ ハ 90° ノ倍數中，特別ナルモノニシテ $n\,90^\circ$ ノ內ニ含マル，故ニ θ ノ値ハ取リ纒メテ $n\,90^\circ,\ (4n+1)30^\circ$ ナリ．

但シ n ハ正又ハ負ノ整數又ハ零ヲ表ハス．

6. C ガ直角ナル三角形ニ就キ，下式ヲ證スベシ．

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos2B}}.$$

【解】 左邊$=\dfrac{a+b+a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{2\sin A}{\sqrt{\sin^2A-\sin^2B}}$〔正弦比例ニヨリ〕

$$=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos^2B-\sin^2B}}\quad〔\sin A=\sin(90^\circ-B)=\cos B〕$$

＝右邊．

7. 一般三角形ニ就キ，下式ヲ證スベシ

$b\cos B+c\cos C<a.$

【解】 $b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C.$　〔R ハ外接圓ノ半徑〕

$\therefore\ b\cos B+c\cos C=R(2\sin B\cos B+2\sin C\cos C)$

$=R(\sin2B+\sin2C)=R.\,2\sin(B+C)\cos(B-C)$

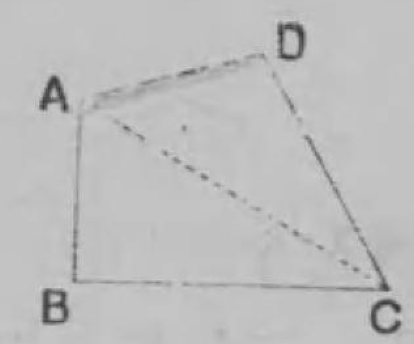
$=2R\sin A\cos(B-C)=a\cos(B-C),$　而シテ　$a>0,\quad \cos(B-C)\leqq1.$

$\therefore\ a\cos(B-C)\leqq a$　卽チ　$b\cos B+c\cos C\leqq a.$　仍テ題言ノ如シ．

8. 四邊形 ABCD ニ於テ $A\hat{B}C=90^\circ,\ B\hat{C}A=A\hat{C}D=30^\circ,\ B\hat{A}D=105^\circ$ ニシテ一邊 AB ガ 15 吋ナルトキハ他ノ三邊ノ長サ各如何．

【解】 $BC=AB\cot ACB=15\cot30^\circ=15\sqrt{3}.$

$AC=AB\,\mathrm{cosec}ACB=15\times2=30.$



$\triangle ACD$ ヨリ正弦比例ヲ用ヒテ

$$CD=\frac{AC\sin CAD}{\sin ADC},\qquad AD=\frac{AC\sin ACD}{\sin ADC}.$$

而シテ　$C\hat{A}D=105^\circ-(90^\circ-30^\circ)=45^\circ,$

$A\hat{D}C=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ.$

又　$\sin105^\circ=\sin75^\circ=\cos15^\circ=\sqrt{\dfrac{1+\cos30^\circ}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$

$$\therefore\ CD=\frac{30\sin45^\circ}{\sin105^\circ}=\frac{30\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=30(\sqrt{3}-1),$$

$$AD=\frac{30\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=15(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

(答)　BC $15\sqrt{3}$ 吋，　CD $30(\sqrt{3}-1)$ 吋，　AD $15(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 吋．

東京高等師範學校

1. α ガ銳角ナルトキハ $\sin\alpha$ ト $\tan\alpha$ トハ何レガ大ナルカ．

【解】 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

而シテ α ハ銳角ナルヲ以テ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ハ共ニ正數ニシテ $\cos\alpha$ ハ 1 ヨリモ小ナリ. ∴ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 卽チ $\tan\alpha$ ハ $\sin\alpha$ ヨリモ大ナリ.

2. A 及 B ハ銳角ニシテ $\tan A=\dfrac{1}{2}$, $\tan B=\dfrac{1}{3}$ ナルトキハ $A+B=45°$ ナルコトヲ證明セヨ.

【解】 本書問 69 ヲ見ヨ.

3. 三角形ノ面積ハ二邊ト其ノ夾角ノ正弦トノ積ノ二分ノ一ニ等シ, 之ヲ證明セヨ.

【解】 何レノ教科書ニモアリ.

4. A, B ガ三角形ノ角ニシテ $\cos^2 A=\cos^2 B$ ナルトキハ A, B ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ.

【解】 所設ノ等式ヲ變形シテ

$$\frac{1+\cos 2A}{2}-\frac{1+\cos 2B}{2}=0 \qquad \therefore\ \cos 2A-\cos 2B=0$$

卽チ　$2\sin(A+B)\sin(B-A)=0$.

而シテ　A, B ハ三角形ノ角ナルガ故ニ $180°>A+B>0°$.

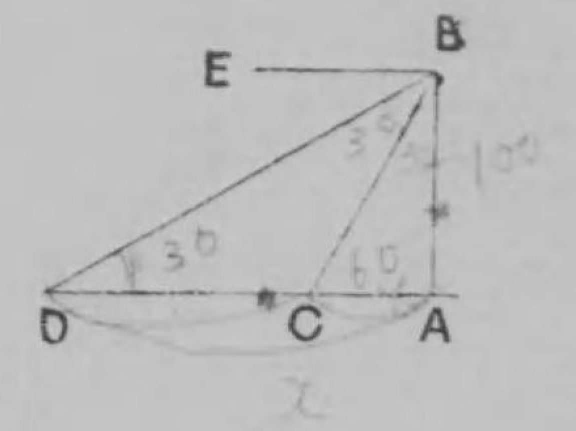
$\therefore\ \sin(A+B)\neq 0 \qquad \therefore\ \sin(A-B)=0$.

而シテ又　$180°>A,\ B>0°$.　　$\therefore\ A-B=0$.

卽チ　$A=B$..............(答)

5. 高サ 100 尺ナル塔ノ頂上ヨリ塔ノ基底ト同一ノ水平面上ニ於テ同方位ニ在ル二點ノ俯角ヲ測リテ 60° 及 30° ヲ得タリ其ノ二點ノ距離ヲ求ム.

【解】 AB ヲ塔, C, D ヲ水平面上ノ二點トス.



$\hat{BCA}=\hat{CBE}=60°$,　$\hat{BDA}=\hat{DBE}=30°$,

$CD=DA-CA=AB\cot 30°-AB\cot 60°$

$=100\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{200\sqrt{3}}{3}\fallingdotseq 115.5.$

(答)　約 115.5 尺.

大正五年度分ハ畏知岡本熊男答解シテ蛇足ヲ加フル所ナリ.

大正六年三月十日印刷
大正六年三月十五日發行

著者檢印

三角法模範問題解義
定價金壹圓拾錢

著者　宮本藤吉

發行者　株式會社明治書院
取締役社長　三樹一平
東京市神田區錦町一丁目十番地

印刷者　守岡功
東京市本所區番場町四番地

東京市神田區錦町一丁目
發行所　株式會社明治書院

終