Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

30. Mai 2015

Analysis I

Nachklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
mögliche Pkt.:	3	3	6	4	4	3	5	6	6	7	4	5	8	64
erhaltene Pkt.:														

Note:

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

AUFGABE 1. (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* eines Elementes x in einem angeordneten Körper K.
(2) Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
(3) Die Funktion
$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) *nimmt* in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum an.*
(4) Die Zahl π (gefragt ist nach der analytischen Definition).
(5) Die *Potenzreihe* in $z \in \mathbb{C}$ zu den Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.
(6) Die *Zeitunabhängigkeit* einer gewöhnlichen Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)\,.$$

AUFGABE 2. (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.
(2) Die *Funktionalgleichung* der komplexen Exponentialfunktion.
(3) Der Satz über *partielle Integration.*

AUFGABE 3. (6 (1+1+1+1+2) Punkte)

Bei einer Fernsehaufzeichnung sitzen n Zuschauer im Studio, die über ein elektronisches Gerät auf verschiedene Fragen mit Ja oder Nein antworten und wobei das Ergebnis (die Ja-Antworten) in vollen Prozent auf einem Bildschirm erscheint und wobei ab $,5$ nach oben gerundet wird.

a) Erstelle eine Formel mit Hilfe der Gaußklammer $\lfloor\ \rfloor$, die bei gegebenem n aus i die Prozentzahl $p(i)$ berechnet.

b) Für welche n ist die Prozentabbildung aus a) injektiv und für welche surjektiv?

c) Es sei $n = 99$. Welche Prozentzahl tritt nie auf dem Bildschirm auf?

d) Es sei $n = 101$. Hinter welcher Prozentzahl können sich unterschiedlich viele Ja-Stimmen verbergen?

e) Es sei $n = 102$. Hinter welchen Prozentzahlen können sich unterschiedlich viele Ja-Stimmen verbergen?

AUFGABE 4. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Zeige, dass die Produktfolge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) \,=\, \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Es seien

$$f, g \colon\, [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $f(a) \,\geq\, g(a)$ und $f(b) \,\leq\, g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) \,=\, g(c)$ gibt.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Beweise die Funktionalgleichung für die komplexe Exponentialfunktion.

Aufgabe 8. (6 (3+3) Punkte)

Untersuche die Funktionenfolge

$$\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f_n(x),$$

mit

$$f_n(x) \,=\, x^{\frac{n}{n+1}}$$

auf

a) punktweise Konvergenz und auf

b) gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 9. (6 (4+2) Punkte)

a) Man gebe ein quadratisches Polynom an, dessen Graph die Diagonale und die Gegendiagonale bei $y \,=\, 1$ jeweils tangential schneidet.

b) Man zeige, dass der Graph des Lösungspolynoms aus Teil a) innerhalb des oberen, durch die Diagonale und die Gegendiagonale begrenzten Viertels der Ebene liegt.

Aufgabe 10. (7 (1+1+3+2) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

b) Skizziere f für x zwischen -2π und 2π.

c) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.

d) Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 11. (4 (2+2) Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion mit der Periode $L > 0$.

a) Es sei f differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung f' ebenfalls periodisch mit der Periode L ist.

b) Man gebe ein Beispiel einer nichtkonstanten, periodischen, stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Stammfunktion nicht periodisch ist.

Aufgabe 12. (5 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{e^{3x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Aufgabe 13. (8 (2+2+4) Punkte)

Es sei

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und es sei

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung dazu auf einem offenen Intervall I.

a) Drücke die zweite Ableitung von y mit h, h' und y aus.

b) Drücke die dritte Ableitung von y mit h, h', h'' und y aus.

c) Zeige, dass die n-te Ableitung von y die Form

$$\left(\sum_{\nu} a_{\nu} \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(h^{(j)} \right)^{\nu_j} \right) \right) \circ y$$

mit gewissen Zahlen $a_\nu \in \mathbb{N}$ für jedes n-Tupel $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ mit $\nu_j \leq n-1$ besitzt.

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* eines Elementes x in einem angeordneten Körper K.
(2) Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
(3) Die Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) *nimmt* in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum an.*
(4) Die Zahl π (gefragt ist nach der analytischen Definition).
(5) Die *Potenzreihe* in $z \in \mathbb{C}$ zu den Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.
(6) Die *Zeitunabhängigkeit* einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)\,.$$