Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1. Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} - 1$.

Aufgabe 9.2. Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} + 1$.

Aufgabe 9.3. Finde einen Primfaktor der folgenden drei Zahlen

$$2^{33} - 1,\ 2^{91} - 1,\ 2^{13} + 1\,.$$

Aufgabe 9.4.*

Finde die Primfaktorzerlegung von 1728.

Aufgabe 9.5.*

Man gebe zwei Primfaktoren von $2^{35} - 1$ an.

Aufgabe 9.6.*

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

Aufgabe 9.7.*

Beweise den Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 9.8. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass es unendlich viele normierte irreduzible Polynome in $K[X]$ gibt.

Aufgabe 9.9. Zeige, dass in einem faktoriellen Bereich R der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei Elementen $f, g \in R$ existieren.

Aufgabe 9.10. Zeige, dass die Verknüpfung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a,b) \longmapsto \operatorname{kgV}(a,b),$$

(wobei man das kgV ≥ 0 wählt), ein Monoid definiert.

Aufgabe 9.11. Sei R ein faktorieller Bereich. Zeige, dass jedes von null verschiedene Primideal ein Primelement enthält.

Aufgabe 9.12. Charakterisiere in $\mathbb{Z}$ die Radikale mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 9.13. Seien a, b und r positive natürliche Zahlen. Zeige, dass die Teilbarkeit $a^r | b^r$ die Teilbarkeit $a|b$ impliziert.

Aufgabe 9.14.*

a) Berechne den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen $2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$ und $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^{11} \cdot 7$.

b) Berechne den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen $2 \cdot 3^2 \cdot 6 \cdot 7$ und $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$.

Aufgabe 9.15. Begründe, ob der größte gemeinsame Teiler zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ im Allgemeinen einfacher über die Primfaktorzerlegung der beiden Zahlen oder über den euklidischen Algorithmus zu finden ist.

Die folgenden Aufgaben zeigen, dass die eindeutige Primfaktorzerlegung keineswegs selbstverständlich ist.

Aufgabe 9.16. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge, die aus allen natürlichen Zahlen besteht, die bei Division durch 4 den Rest 1 besitzen, also $M = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$. Zeige, dass man 441 innerhalb von M auf zwei verschiedene Arten in Faktoren zerlegen kann, die in M nicht weiter zerlegbar sind.

Aufgabe 9.17. Betrachte den Unterring

$$R = K[X^2, X^3, X^4, X^5, \ldots] \subset K[X].$$

Zeige, dass X^6 zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen in irreduzible Elemente besitzt.

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit dem kommutativen Ring $R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$, wobei K ein fixierter Körper ist. Er besteht aus allen Ausdrücken der Form

$$a_1X^{q_1} + a_2X^{q_2} + \cdots + a_nX^{q_n}$$

mit $a_i \in K$ und $q_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ besteht, und wobei die Addition komponentenweise und die Multiplikation durch distributive Fortsetzung der Regel

$$X^q \cdot X^p \ := \ X^{p+q}$$

gegeben ist. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}\left(2X^{1/2} + 5X^{2/3}\right)\left(3X^{1/2} - 4X^{1/3}\right) &= 6X - 8X^{5/6} + 15X^{7/6} - 20X \\ &= -14X - 8X^{5/6} + 15X^{7/6}.\end{aligned}$$

Man kann sich bei $K = \mathbb{R}$ die Elemente $X^{a/b}$ als die Funktionen

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$$

vorstellen.

Aufgabe 9.18. Berechne in $R = \mathbb{R}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Produkt

$$\left(X^2 + 4X^{3/2} - 5X + X^{1/2}\right)\left(2X^{3/2} + 4X - 7X^{1/2}\right) .$$

Aufgabe 9.19. Zeige, dass man jedes Element $F \in R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ (K ein Körper) als ein Polynom in $X^{1/b}$ mit einem $b \in \mathbb{N}_+$ schreiben kann, dass es also ein $P \in K[Y]$ derart gibt, dass $F = P(X^{1/b})$ gilt. Welches Polynom kann man bei

$$F \ = \ X^{1/2} + X^{1/3} + X^{1/5}$$

nehmen?

Aufgabe 9.20. Zeige, dass in $R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Element X keine Zerlegung in irreduzible Elemente besitzt.

Aufgabe 9.21. Zeige, dass in $R = \mathbb{R}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Element $X^2 + 1$ nicht irreduzibel ist.

Die folgende Aufgabe verwendet Logarithmen und benötigt Grundkenntnisse in linearer Algebra.

Aufgabe 9.22. Betrachte die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\ln p$, wobei p durch die Menge der Primzahlen läuft, linear unabhängig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.23. (2 Punkte)

Man bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\,.$$

Aufgabe 9.24. (4 Punkte)

Es sei S ein Integritätsbereich und $R \subseteq S$ ein Unterring mit

$$S^\times \cap R = R^\times .$$

In S besitze jede Nichteinheit eine Zerlegung in irreduzible Elemente. Zeige, dass diese Eigenschaft auch in R gilt.

Aufgabe 9.25. (4 (2+2) Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $a_1, a_2, \ldots, a_n, b, f \in R$ Elemente. Zeige die folgenden Aussagen.

1) Wenn b ein größter gemeinsamer Teiler der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist, so ist auch fb ein größter gemeinsamer Teiler der $fa_1, fa_2, \ldots, fa_n$.

2) Wenn f ein Nichtnullteiler ist, so gilt hiervon auch die Umkehrung.

Aufgabe 9.26. (3 Punkte)

Es sei R ein faktorieller Bereich und $a, b \in R$. Zeige, dass ab und das Produkt aus $\operatorname{kgV}(a, b)$ und $\operatorname{ggT}(ab)$ zueinander assoziiert sind.

Aufgabe 9.27. (2 (1+1) Punkte)

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ Elemente in einem faktoriellen Bereich R und $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass

$$\operatorname{kgV}\left(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k\right) \text{ und } \left(\operatorname{kgV}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right)^k$$

zueinander assoziiert sind.

b) Zeige, dass

$$\operatorname{ggT}\left(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k\right) \text{ und } \left(\operatorname{ggT}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right)^k$$

zueinander assoziiert sind.

Aufgabe 9.28. (5 Punkte)

Zeige, dass es in $R = \mathbb{C}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ keine irreduziblen Elemente gibt.