新學制

初中算學教科書

三角

全一冊

南京書店發行

1933

新學制

初中算學教科書

三角

(全一册)

中等算學研究會編輯

南京書店發行

初 中 三 角

目 錄

第 一 章 引 論

(P. P. 1—15)

第 二 章 銳角的三角函數

(P. P. 16—43)

第三章 直角三角形的解法和應用問題

(P. P. 44—68)

第四章 特殊的三角函數簡易恆等式和方程式

(P. P. 69--88)

第五章 斜角三角形的解法和應用問題

(P. P. 89—131)

附　　錄

(P. P. 133—193)

I. 任意角的三角函數

II. 和角較角函數的公式和應用

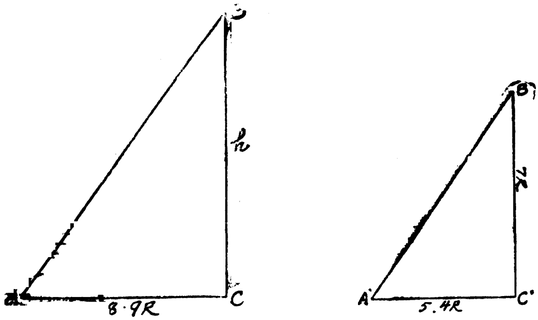
III. 反三角函數和三角方程式

第一章

引論

1. 立竿見影法 一株很高的樹,不容易量他的高,但太陽的光線照過樹頂射到地上的樹影的長,却容易量得到,要是同時拿一根竹竿豎直在地面上,量得竿長和竿影的長,那末就可以算出這株樹有多少高,這一類簡易測量的方法,含有三角學的意義在裏面,所以提出來先講,

凡是在測量裏面所用的方法和一切的圖,都是利用幾何學裏面所講過的相似形,下面的例就是利用兩個相似三角形.



例 一根7尺長的竿和地面垂直,在地面上的竿影長5尺4寸同時一株樹在地面上的樹

影長 1 丈 8 尺 9 寸,求樹的高.

［解］ 設樹高是 h 尺,照上面的圖, BC 是樹, AC 是樹影, $B'C'$ 是竿, $A'C'$ 是竿影, AB 和 $A'B'$ 是表太陽的光線射到地面上的斜線,因爲太陽的光線和地面同時所成的角相等,所以 $\angle A=\angle A'$. 照幾何學的定理,這兩直角三角形 ABC,$A'B'C'$ 相似.

$$\therefore \qquad \frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'},$$

就是

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}.$$

$$\therefore \qquad \frac{h}{18.9}=\frac{7}{5.4}$$

$$\therefore \qquad h=\frac{7}{5.4}\times 18.9$$

$$=24.5\text{ 尺}.$$

故樹高是 2 丈 4 尺 5 寸.

［註一］ 本書的例題和習題中丈,尺,寸等,是指現在通行的市丈,市尺,市寸等,爲便利起見,簡寫做丈,尺,寸等.

［註二］ 太陽的光線和地面所成的角叫做太陽的高度.

2. 成比例的圖形 上節的例能夠求出樹的高,全在利用相似直角三角形的對應邊成比例,照幾何學講,凡是相似形,像相似斜角三角形和相似多角形的角對應相等,他們的邊對應成比例.這種成比例的相似形,應用很廣,從實用方面講,許多圖形的構造和計算,都須利用這些對應的等角和成比例的邊,要是講到三角的實用問題,可說都是利用成比例的圖形來解決.

一幅掛在教室裏的地圖或是一張校舍全圖是依着比例用縮尺製成.講到野外的實用,在測量裏有一種簡單的方法,叫做平板儀測量,是用一塊像畫圖用的方板裝在三脚架上,隨時把測得的圖形,就在野外依着方向和大小的比例畫到釘在板面的圖畫紙上去.所以成比例的圖形,不但在三角裏面是計算的基礎,實用的範圍也着實不小.

習題一

1. 算出第一節例解裏面竿長和竿影的比值到小數點後第五位.

2. A' 角增大時,竿長和竿影的比值怎樣?減小時怎樣?竿長和竿影的比值同太陽的高度有什麼關係?

3. 倘使太陽的高度沒有變,但是換了一根較長或是較短的竿,他和竿影的比值會改變嗎?

4. 太陽的高度增大時,竿長和從竿頂到影端的斜線的比值怎樣?竿影和從竿頂到影端的斜線的比值怎樣?

5. 倘使太陽的高度沒有變,上題的兩個比值會改變嗎?

6. 在第一節的例解裏面,倘使換了一根一丈零五寸長的竿,求竿影的長.

7. 在地面上樹影的長是 9 尺,同時有一根 4 尺 5 寸長的竿和地面垂直,影長 1 尺 8 寸,求樹的高.

8. 1 丈 2 尺長的電桿木,在地面上的影長 7 尺 5 寸,同時樹影的長是 1 丈 8 尺 5 寸,求樹的高.

9. 一根 2 尺長的竿直立在地面上,竿影的長是 9 寸 8 分,同時塔影在地面上的長是 3 丈 7 尺 6 寸,求塔高.

10. 立竿於地,求得竿長和竿影的比值是 0.2126,同時一個 4 丈 3 尺高的烟突,影端恰正射到井上,求從烟突到井的距離.

3. 角的單位 任何量的計算,總要先定一個單位來做標準,所以要量角的大小,先要定角的單位.天然的單位角是一個直角,但是拿直角來做單位,那些小於直角的角,都要用分數來表明,很不便利,所以取一直角的 $\frac{1}{90}$ 叫做度,一度的 $\frac{1}{60}$ 叫做分,一分的 $\frac{1}{60}$ 叫做秒,小於一秒的才用小數來表明.度,分,秒,的記號是°,′,和″,所以 $12°13'45''$ 就是表 12 度 13 分 45 秒,這種制度叫做六十分制.

六十分制的起源甚古,自有米突制後,各種制度都改用十進,現代還用六十分制的,只有角,弧和時間三種,可是計角的大小,也可用度的小數,來代替分秒,不過用慣的六十分制,現在還是通行,另外還有一種叫做百進法,就是拿一個直角

分做 100 度,一度分做 100 分,一分分做 100 秒,但這種方法却不甚通用.

度的小數和分秒的換算,可以看下面的兩個例:

例一. 0.32° 化做分秒.

[**解**] $0.32^\circ=0.32\times 60'=18.2'=18'+.2\times 60''$

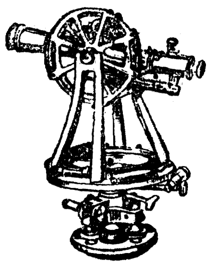
$=18'+1'12''=19'12.''$

例二. $52'37''$ 化做度的小數.

[**解**] $52'37''=52\dfrac{37'}{60}=\dfrac{3157'}{60}$

$=\dfrac{3157^\circ}{60\times 60}=0.8769^\circ$

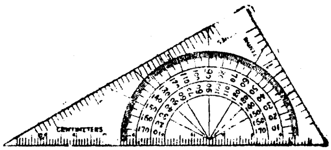
4. 測角的儀器 在野外測角,用一種測量上重要的儀器叫做經緯儀,下面的圖就是表示一個經緯儀.



用經緯儀的時候,把他裝在一個三脚架上,下部的圓盤,可以用裝在傍邊的水準管來較正,使他成為水平,將上部旋轉,可以測水平面內的角,倘使要測縱直

面內的角,只要拿望遠鏡向上或是向下轉動,就可以測到.

在室內所用的量角的儀器,是畫圖儀器裏面的一件,叫做分角器.通常的分角器是一個半圓形,在半圓的沿邊刻着度數.下面的圖就表一個通常的分角器.



量角的時候,拿分角器的圓心合着角頂,角的一邊和半徑疊合,看他邊通過的刻畫,就知道這角的度數;作角的時候,先畫一邊,分角器的圓心合在頂點上,半徑疊在所畫的邊上,照着刻畫上的度數沿弧邊作一細點,移去分角器後,過頂點和所作的一點作一直線,就是所求角的第二邊.

5. 三角形的圖解　照幾何學所講,三角形的三邊和三角叫做三角形的部分.(也叫元

素) 這六個部分裏面,已知三個就可以作這個三角形,換句話,講就是從已知的三個部分可以求出另外三個部分來.不過這三個已知的部分,至少有一個是邊,因爲已知的三個部分倘使都是角,那末這三角形的形象雖已一定,但他的大小却沒有定.所以圖解斜角三角形的已知條件有下面的五種:

1. 兩角和夾邊.
2. 兩邊和夾角.
3. 兩角和一角的對邊.
4. 兩邊和一邊的對角.
5. 三邊.

直角三角形的直角既然一定,除了直角之外,只要有兩個已知部分,就可以圖解,不過至少也須有一個部分是邊.圖解直角三角形的已知條件也是五種:

1. 一銳角和斜邊.

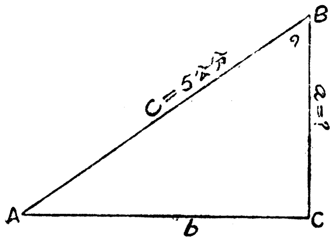
2. 一銳角和對邊.

3. 一銳角和鄰邊.

4. 斜邊和一腰.

5. 兩腰.

例一. 已知一銳角 A 是 $37°$,斜邊 c 是 5 公分,求解直角三角形 ABC.



[解] 用分角器作一個 $37°$ 的角 BAC. 取 AB 的長等於 5 公分,從 B 作 AC 的垂線 BC 成直角三角形 ABC, 量得略值 $B=53°$ $a=3$ 公分, $b=4$ 公分

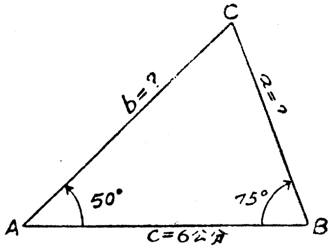
[核算] $A+B=37°+53°=90°$,

$$a^2+b^2=3^2+4^2=5^2=C^2$$

例二. 已知 $A=50°$,$B=75°$,$c=6$ 公分,求解三角形 ABC.

[解] 作直線 AB 使他的長等於 6 公分,用分角器作 $50°$ 的 A 角和 $75°$ 的 B 角, AC 和 BC 相交

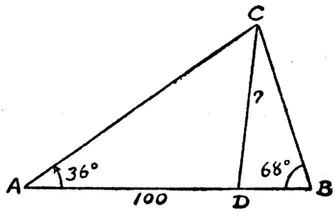
於 C 成三角形 ABC, 量得略值 $a=5\frac{1}{2}$ 公分, $b=7$ 公分, $C=55°$.



［核算］ $A+B+C=50°+75°+55°=180°$.

在實用上要圖解的三角形,大概都很大,不能直接畫在紙上,可依第二節所講的縮尺,照比例把他縮小,但角的大小却沒有改變,所以只求略值不需精密的計算時,許多實用問題都可以圖解.

例三. 在平地上量一根 100 丈長的直線,等飛機飛過直線上面時,從兩端測得他的仰角是 36°和 68°問飛機離地面幾丈?



［解］ 先定適當的縮尺,用一公分來表 10 丈作一根 10 公分長的直線 AB, 用分角器作 $\angle A=36°$, $\angle B=68°$, 成三角形 ABC, 再從 C 點作 AB 的垂線 CD, 量得 CD 的長是 5.7 公分. 所以飛機離地面約 57 丈.

〔註〕　在一個縱直平面內,從測點到目的物的視線和水平線所成的角叫做仰角;倘使從高處測底處的目的物,那末視線和水平線所成的角叫做俯角.

習題二

1.　下面度數裏面的小數化做分秒:

(1)　$0.08°$.　(2)　$0.19°$　(3)　$0.54°$.

(4)　$0.93°$.　(5)　$37.87°$.　(6)　$62.43°$.

2.　下面的分秒化做度的小數,化不盡的化到小數點後四位:

(1)　$15'18''$.　(2)　$45'54''$.　(3)　$43'26''$.

(4)　$32°17'9''$.　(5)　$67°35'42''$.　(6)　$51°28'48''$.

C 是直角,c 是斜邊,A 和 B 是銳角,a 和 b 是他們的對邊,圖解直角三角形 ABC,已知:

3.　$B=29°$,　$c=5$ 公分.

4.　$A=32°$,　$a=3$ 公分 4 公厘.

5.　$A=26°$,　$b=4$ 尺 5 寸.

6.　$a=7$ 公分,$c=4$ 公分 8 公厘.

7.　$a=6$ 丈,　$b=8$ 丈.

A, B, C, 是三角, a, b, c, 是三邊,圖解三角形ABC,已知:

8. $a=3.5$ 公分, $B=109°$, $C=35°$,

9. $a=62$, $b=73$, $C=67°$.

10. $A=68°$, $B=75°$, $c=1$ 公寸 2 公分.

11. $a=76$ 尺, $b=24$ 尺, $A=36°$.

12. $a=50$ 尺, $b=62$ 尺, $c=34$尺.

13. 從地面上一點,測得石碑的仰角是28°,從測點到碑足的距離是50尺,用圖解求碑高.

14. 沿河岸量一條200尺長的直線,從直線的兩端去測對岸靠着河邊的樹,得到兩個水平角是58°和72°,用圖解求河闊的尺數.

6. 直接度量和間接度量

度量是人生最感需要的一件事,米穀的多少,衣服的長短,房屋的大小,路途的遠近,對於食衣住行,到處要用到度量.度量裏面有許多可以直接去量的,像布疋的長短和馬路的廣狹,叫做直接度量.但如果問泰山有多少高,黃河的某處有多少闊,南京距北平有多少里,地球離火星多遠,要

解决這些問題,不能直接量得,一定要間接計算出來,叫做間接度量.

間接度量的實測,是屬測量的範圍,但從實地測來的數量去推算他的結果,是三角所應研究的問題.

7. 度量的準確度 上面所講的直接度量,看來似乎總很準確,但按之事實却不盡然,譬如用尺去量黑板的長度,尺的構造精粗不同,人的眼光疎密各異,要幾個人用不同的尺去量出來平均,才能得到比較準確的結果.又如已知三邊圖解一個三角形,用分角器量角,不過量到30′就是半度,已經不很準確,要是用算式來算可以算出秒數來.(見第五章解任意三角形法.)所以用算式來代替直接度量,也是三角所應研究的問題.

8. 三角的目的 三角形的圖解不能精密準確,要用計算來代替,那末這種算式應該有眞切的根據,所以就實用的眼光來說,三角的目

的是研究三角形的性質和邊角的關係並且應用他來解決許多實際問題.

雜題一

1. 一根測量用的桿長 $16\frac{1}{2}$ 呎,和地面垂直,影長 18 呎,同時地面上塔影的長是 $39\frac{1}{2}$ 呎,問塔高幾呎?

2. 一株 6 公尺高的樹,地面上影長 5 公尺 1 公寸,問同時一根 8 公尺長的旗杆在地面上的影長幾公尺?

3. 一個 4 尺 2 寸高的人距電桿木 4 尺,桿長是 9 尺.人影和桿影在一直線上,影端恰好疊合,問人影長幾尺?

4. 已知 $a=70$, $c=140$, 解直角三角形 ABC.

5. 已知 $B=40°$, $b=68$ 尺解直角三角形 ABC.

6. 已知 $c=80$ 呎,$A=72°$, 求直角三角形 ABC 斜邊上的高.

7. 已知 $B=73°$, $C=68°$, $b=88$. 解三角形 ABC.

8. 已知 $a=180$尺, $b=220$ 尺. $A=36°$, 解三角形 C; 問有幾種解答?

9. 在地面上離樹足400尺的一點,測得樹頂的仰角是22°,問樹高幾尺?

10. 從高出水面60尺的石上,測得船的俯角是17°,問船距石足幾尺,距石頂幾尺?

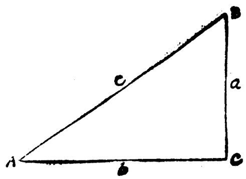
11. 塔高12丈,塔影在地面上長7丈5尺,求太陽的高度.

12. A,B,C三鎮,A距B 7里A距C 9里,若$\angle BAC$是63°,問BC二鎮相隔幾里?

第二章

銳角的三角函數

9. 直角三角形的基本性質 假設有一個直角三角形ABC,照幾何學裏所講的記法,就是用大寫字母來記角,用小寫字母來記邊,並且相對的角和邊用同一的字母.



如上圖C爲直角的頂點,c爲斜邊,A和B爲銳角的頂點,a和b爲兩腰.

在幾何學裏已經講過的有

$$A+B=90^\circ,\qquad a^2+b^2=c^2.$$

這兩種基本性質,分別表出角和角的關係同邊和邊的關係.這種關係在三角裏雖也用得着,但不能用來由角推算邊長,不是主要的關係,在實際上也沒有多大的應用價值,所以我們不得不更去研究角

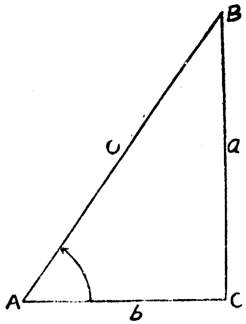
和邊的關係。

10. 直角三角形邊角的關係 由直接的度量,作間接的推算,用縮小的圖形,表碩大的實物,照引論第二節所講,都是根據相似圖形裏對應線段成一定比例的道理.

就直角三角形講,凡是有一銳角相等的,都成相似形,各邊的比有一定的值.倘使我們照各種不同的銳角,求出直角三角形各兩邊的比值,那末遇到一個直角三角形有某銳角時,就可應用這個相同的比值,由角推算出邊長,反過來也可由邊長算出角的大小.拿實例來講,在引論裏第一節的例只要知道樹影和太陽的高度,就可推算出樹高.

11. 正弦,餘弦,正切 照下面的圖,ABC是直角三角形,C是直角,c是斜邊.拿A角來講,a是對邊,b是鄰邊.

三角函數的初步定義,就是直角三角形兩邊



的比,現在先講三種重要的函數:

$\frac{a}{c}$叫做A角的正弦,寫作$\sin A$;

$\frac{b}{c}$叫做A角的餘弦;寫作$\cos A$;

$\frac{a}{b}$叫做A角的正切,寫作$\tan A$

就是
$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}};$$
$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}};$$
$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}.$$

sin, *cos*, 和 *tan*. 是 *sine*, *cosine*, 和 *tangent* 的縮寫.

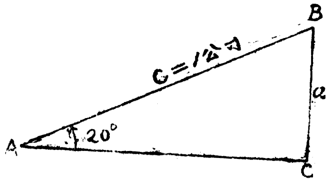
[註一]. 這幾個比的值,隨着A角的值變遷,所以叫做A角的函數.

[註二]. 除了上面這三種函數之外,還有三種函數叫做餘切 (*cotangent*), 正割 (*secant*), 和餘割 (*cosecant*), 不過沒有像上面所講的三種來得重要,所以留在將來再講(第四章)

[註三]. 三角函數,除用比值表明以外,也可用直線來表明,叫做線值;弦,切,割的名稱,將來講到線值,就可以明白.

12. **用圖求三角函數值**　習題一的第一題,算出竿長和竿影的比值,就是太陽高度的正切.所以要求一個銳角的某函數.可用這個銳角作一個直角三角形,再看某函數是那兩邊的比,量出兩邊的長度來相除,就是所求的比值.不過像習題一的第一題,用5.4去除7不很便利,所以造直角三角形的時候,表比值後項的邊,使他等於長度的單位,那末量出表前項的邊長,就是所求函數的畧值.

例一. 用圖求$20°$的正弦,餘弦,和正切.



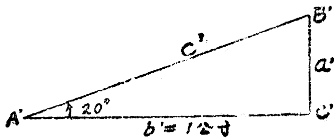
[解]　作直角三角形ABC,使$A=20°$,斜邊$AB=1$公寸.

量得$BC=3$公分4公厘,$AC=9$公分4公厘.

$$\therefore sin\ 20°=sin\ A=\frac{a}{c}=\frac{0.34}{1}=0.34;$$

$$cos\ 20°=cos\ A=\frac{b}{c}=\frac{0.94}{1}=0.94.$$

再作直角三角形$A'B'C'$,使$A'=20°$,鄰邊$A'C'=1$公寸.



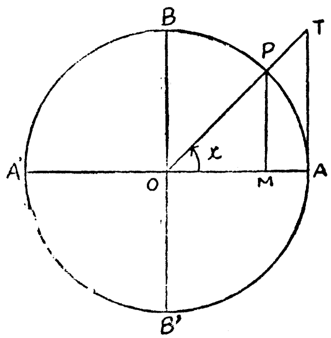
量得 $B'C'=3$ 公分6公厘.

$$\therefore \tan 20^\circ = \tan A' = \frac{a'}{b'} = \frac{0.36}{1} = 0.36.$$

故求得略值 $\sin 20^\circ=0.34$, $\cos 20^\circ=0.94$, $\tan 20^\circ=0.36$

習題三

1. 用長度的單位來做半徑作一圓,作在水平位置的直徑 AA', 直徑 BB' 和 AA' 垂直,作半徑 OP 和 OA 成 x 角,引長 OP 到 T,和在 A 點所作圓的切線相交於 T 點,再作 $MP \perp OA$, 如右圖.問圖裏那一根線是表 x 角的正弦? 那一根線是餘弦? 那一根線是正切?



照上面的圖,如果 x 角增大,問 x 角的正弦怎樣? 餘弦怎樣? 正切怎樣?

如果 x 角減小,問 x 角的正弦怎樣? 餘弦怎樣? 正切怎樣?

[註] 用長度的單位來做半徑所作的圓,叫做單位圓.

2.　在11節的圖裏,問$\frac{a}{c}$是B角的什麼函數? $\frac{b}{c}$是B角的什麼函數?　$\frac{b}{a}$是B角的什麼函數?

3.　ABC是直角三角形,證明:

(1) $\sin A=\cos B$.　　(2) $\cos A=\sin B$.

下列各題所列的數,是直角三角形的三邊a, b, c的值,求出A角的正弦,餘弦,和正切.

4.　5, 12, 13　　5.　8, 15, 17

6.　3.9, 8, 8.9　　7.　9, 40, 41

8.　$2n,\ n^2-1,\ n^2+1$　　9.　$\frac{2mn}{m-n},\ m+n,\ \frac{m^2+n^2}{m-n}$

10.　三根直線用來做邊作一個直角三角形,問這三線的長度有什麼關係?拿這種關係來證明第4題到第9題的線值,恰好是直角三角形的邊.

11.　用圖求下列各角的正弦和餘弦:

(1)　17°.　(2)　41°.　(3)　76°.　(4) 69°.

12.　用圖求下列各角的正切:

(1)　22°.　(2)　23°.　(3)　40°.　(4)　80°

13.　求18°的正弦,餘弦,和正切.

14.　求54°的正弦,餘弦,和正切.

15. 用第 1 題的單位圓來求上面兩題的函數值.

ABC 是直角三角形,已知:

16. $\sin A=\frac{3}{5}$, $C=20.5$, 求 a 邊的長.

17. $\tan A=3\frac{2}{3}$, $b=2\frac{5}{11}$, 求 a 邊的長.

18. $\cos A=\frac{5}{7}$, $C=56$, 求 b 邊的長.

13. 三角函數表的用法 上節所講用圖求出的三角函數祇能求得略值.函數的精密值是用級數算出來.這種計算,不在初步範圍以內,可是照算出來的函數造成的表,我們可以應用.

下頁的表,載着從 0° 到 90° 每度的正弦,餘弦,和正切到小數點後第四位,第四位以後的數照四捨五入來略去或是進 1 併入第四位,所以叫做四位表.左面的表從 0° 到 45°,右面的表從 45° 到 90°.度數列在左邊第一縱列,函數的名稱列在頂行.

從已知的角求函數,可以看左列的度數和頂行的函數名稱從表內檢得相當的函數,從已知函數求角,照着頂

三角函數表

從0°到90°每度的正弦，餘弦，和正切。

角	正弦	餘弦	正切
0°	.0000	1.0000	.0000
1°	.0175	.9998	.0175
2°	.0349	.9994	.0349
3°	.0523	.9986	.0524
4°	.0698	.9976	.0699
5°	.0872	.9962	.0875
6°	.1045	.9945	.1051
7°	.1219	.9925	.1228
8°	.1392	.9903	.1405
9°	.1564	.9877	.1584
10°	.1736	.9848	.1763
11°	.1908	.9816	.1944
12°	.2079	.9781	.2126
13°	.2250	.9744	.2309
14°	.2419	.9703	.2493
15°	.2588	.9659	.2679
16°	.2756	.9613	.2867
17°	.2924	.9563	.3057
18°	.3090	.9511	.3249
19°	.3256	.9455	.3443
20°	.3420	.9397	.3640
21°	.3584	.9336	.3839
22°	.3746	.9272	.4040
23°	.3907	.9205	.4245
24°	.4067	.9135	.4452
25°	.4226	.9063	.4663
26°	.4384	.8988	.4877
27°	.4540	.8910	.5095
28°	.4695	.8829	.5317
29°	.4848	.8746	.5543
30°	.5000	.8660	.5774
31°	.5150	.8572	.6009
32°	.5299	.8480	.6249
33°	.5446	.8387	.6494
34°	.5592	.8290	.6745
35°	.5736	.8192	.7002
36°	.5878	.8090	.7265
37°	.6018	.7986	.7536
38°	.6157	.7880	.7813
39°	.6293	.7771	.8098
40°	.6428	.7660	.8391
41°	.6561	.7547	.8693
42°	.6691	.7431	.9004
43°	.6820	.7314	.9325
44°	.6947	.7193	.9657
45°	.7071	.7071	1.0000

角	正弦	餘弦	正切
45°	.7071	.7071	1.0000
46°	.7193	.6947	1.0355
47°	.7314	.6820	1.0724
48°	.7431	.6691	1.1106
49°	.7547	.6561	1.1504
50°	.7660	.6428	1.1918
51°	.7771	.6293	1.2349
52°	.7880	.6157	1.2799
53°	.7986	.6018	1.3270
54°	.8090	.5878	1.3764
55°	.8192	.5736	1.4281
56°	.8290	.5592	1.4826
57°	.8387	.5446	1.5399
58°	.8480	.5299	1.6003
59°	.8572	.5150	1.6643
60°	.8660	.5000	1.7321
61°	.8746	.4848	1.8040
62°	.8829	.4695	1.8807
63°	.8910	.4540	1.9626
64°	.8988	.4384	2.0503
65°	.9063	.4226	2.1445
69°	.9135	.4067	2.2460
67°	.9205	.3907	2.3559
68°	.9272	.3746	2.4751
69°	.9336	.3584	2.6051
70°	.9397	.3420	2.7475
71°	.9455	.3256	2.9042
72°	.9511	.3090	3.0777
73°	.9563	.2924	3.2709
74°	.9613	.2756	3.4874
75°	.9659	.2588	3.7321
76°	.9703	.2419	4.0108
77°	.9744	.2250	4.3315
78°	.9781	.2079	4.7046
79°	.9816	.1908	5.1446
80°	.9848	.1736	5.6713
81°	.9877	.1564	6.3138
82°	.9903	.1392	7.1154
83°	.9925	.1219	8.1443
84°	.9945	.1045	9.5144
85°	.9962	.0872	11.4301
86°	.9976	.0698	14.3007
87°	.9986	.0523	19.0811
88°	.9994	.0349	28.6363
89°	.9998	.0175	57.2900
90°	1.0000	.0000	∞

行的函數名稱檢得表內和已知函數相同的數,讀出左列的度數來.

例一. 求 $\sin 29°$.

［**解**］ 從左面的表正弦列29°行內檢得

$$\sin 29° = 0.4848.$$

例二. 求 $\tan 54°$.

［**解**］ 從右面的表正弦列54°行內檢得.

$$\tan 54° = 1.3764.$$

例三. 已知 $\cos x = .7314$, 求 x.

［**解**］ 從左面的表餘弦列內檢到函數 .7314, 讀出同行左列的度數 $x = 43°$.

照習題三第12題（3）和（4）的結果, $\tan 80°$ 不是 $\tan 40°$ 的二倍,所以函數和度數不成比例: 但照（1）和（2）的結果, $\tan 22°$ 和 $\tan 23°$ 的差數很小. 在理論上函數和度數雖不成比例,但在實用上兩個相差很小的角和他們的函數也可拿比例來算.

一個有分秒或是有度的小數的角,不能直接在表內檢要函數,可以用比例算出來,叫做補算法.

例四.　求 $\sin 54°20'$.

[解]　$\sin 54°20'$ 在 $\sin 54°$ 和 $\sin 55°$ 的中間.由表檢得

$$\sin 55° = .8192$$

$$\sin 54° = \underline{.8090}$$

$1°$ 卽 $60'$ 的差數叫做表差 $= .0102$

設 $20'$ 的差數是 d, 那末

$$60' : 20' = .0102 : d.$$

$$\therefore d = \frac{20}{60} \times .0102 = .0034.$$

$$\therefore \sin 54°20' = .8090 + .0034. = .8124.$$

例五.　求 $\cos 68.57°$.

[解]　$\cos 68.57°$ 在 $\cos 68°$ 和 $\cos 69°$ 的中間.

$$\cos 68° = .3746$$

$$\cos 69° = \underline{.3584}$$

表差 $= .0162$ ($1°$ 的差數)

$$1° : .57° = .0162 : d.$$

$$\therefore d = .0092$$

$$\therefore \cos 68.57° = .3746 - .0092 = .3654.$$

[註]　如果一個角增大起來,正弦和正切也跟着增大,但餘弦恰反減小.

從已知的函數求角,也可用補算法.

例六. 已知 $\tan x=.4320$, 求 x.

[**解**] 在表內正切列檢得 .4320 在 .4245 和 .4452 的中間.

$$\tan 24^\circ=.4452$$

$$\tan 23^\circ=\underline{.4245}$$

$$\text{表差}=.0207\ (60' \text{ 的差數})$$

$$\tan x\ =.4302$$

$$\tan 23^\circ=.4245$$

$$d=.0075$$

設 x 比 23° 多 y 分, 那末

$$.0207:.0075=60':y.$$

$$\therefore y=\frac{.0075}{.0207}\times 60'=21'36''.$$

$$\therefore x=23^\circ 21'36''.$$

本節的表,載到最近的度爲止,只供初步求略值之用,今再從中等算學研究會編印的乙種三角函數表,節取一部分列在下面,以便舉例來講他的用法.

下頁的表是四位三角函數表,可查到最近的十分,不滿十分的用補算法來算從 0° 到 45° 的

角	正弦	餘弦	正切	餘切	
35° 0′	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55° 0′
10′	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50′
20′	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40′
30′	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30′
40′	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20′
50′	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10′
36° 0′	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54° 0′
10′	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50′
20′	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40′
30′	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30′
40′	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20′
50′	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10′
37° 0′	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53° 0′
	餘弦	正弦	餘切	正切	角

函數,度數和分數記在左列,函數的名稱在頂行,查表的時候從上面向下讀;從45°到90°的函數,度數和分數記在右列,函數的名稱在底行,查表的時候從下面向上讀.

[註] 表裏的餘切,就是直角三角形裏一個銳角的鄰邊和對邊的比.(見第四章)

例一. $\sin 35°40' = 0.5831$.

例二. $\cos 36°20' = 0.8056$.

例三. $\tan 35°10' = 0.7046$.

例四. $\sin 54°30' = 0.8141$.

例五. $\cos 53°20' = 0.5972$.

例六. 已知 $\tan x = 1.4193$, 那末 $x = 54°50'$

例七. 求 $\tan 36°37'$.

$$\tan 36°40' = 0.7445$$

$$\tan 36°30' = \underline{0.7400}$$

表差$=0.0045$ (10′ 的差數)

$$10' : 7' = 0.0045 : d,$$

$$\therefore d = \frac{7}{10} \times 0.0045 = 0.0032.$$

$$\therefore \tan 36°37' = 0.7400 + 0.0032 = 0.7432.$$

例八. 求 $\cos 53°44'$.

$$\cos 53°40' = 0.5925$$

$$\cos 53°50' = \underline{0.5901}$$

表差$=0.0024$ (10′ 的差數)

$$10' : 4' = 0.0024 : d,$$

$$\therefore d = \frac{4}{10} \times 0.0024 = 0.0010$$

$$\therefore \cos 53°44' = 0.5925 - 0.0010 = 0.5915.$$

例九. 已知 $\sin x=0.8028$, 求 x.

$\sin 53°30'=0.8039$　　　　$\sin x=0.8028$

$\sin 53°20'=\underline{0.8021}$　　　　$\sin 53°20'=\underline{0.8021}$

表差$=0.0018$ ($10'$的差數) $d=0.0007$ (y'的差數)

$$.0018:0.0007=10':y'$$

$$\therefore y=\frac{7}{18}\times 10'=4' \text{ (略值)}$$

$$\therefore x=53°24'.$$

上面(7),(8)兩例的差數d,只要求到小數點後第四位,四位以後照四捨五入算,因爲用四位表,本來只有四位有效數字是準確的.

[註] 在測量的近似結果裏,表示準到最近一種單位的倍數的數字,叫做有效數字.所以用來表明測度單位大小的0,不是有效.例如小數前的圈,往往不是有效數字(參看本會出版的算術下册 p.p.342—343).

習題四

由13節第一個表,求下面的函數值:

1. $\sin 38°$.　　2. $\tan 17°$.　　3. $\cos 28°$.

4. $\sin 65°$.　　5. $\tan 73°$.　　6. $\cos 82°$.

從下面的函數求x角的度數:

7. $\sin x=.8192$.　8. $\cos x=.9613$.　9. $\tan x=2.1445$.

由13節第一個表,用補算法求下面的函數值:

10. $\sin 67°37'$.　11. $\cos 28°23'$.　12. $\tan 42°4'$.

由13節第一個表,用補算法求x角:

13. $\sin x=.6197$　14. $\cos x=.8935$.　15. $\tan x=.4352$.

由13節第一個表.用補算法求出下面的函數值來和第二個附表比較:

16. $\sin 36°20'$.　17. $\tan 54°30'$.　18. $\cos 35°40'$.

由第二個附表求下面的函數值:

19. $\sin 53°30'$.　20. $\tan 35°20'$.　21. $\cos 54°28'$.

22. $\sin 53°45'$.　23. $\tan 36°24'$.

由第二個附表,照下面的函數值求x角:

24. $\tan x=.7154$.　25. $\cos x=0.5889$.

14. 三角函數對數表的用法　在代數裏講過,用對數來計算,可以用加代乘,減代除,乘代乘方,除代開方.用對數來計數,既然有這種便利,所以三角實用問題的計算,都用對數,那末三角函數也須造成對數表,下面的表,

是從中等算學研究會編印的乙種三角函數對數表節下來的一部分:

這個表載着正弦,餘弦,正切,餘切四種函數的常用對數,從 5° 到 85° 每十分列一對數,從 0° 到 5° 和從 85° 到 90° 列有每分的對數. 從 0° 到 45° 的度數和分數印在左列,函數的名稱在

角	正弦的對數	一分的差	正切的對數	一分的通差	餘切的對數	餘弦的對數	一分的差	
27° 0′	9.6570		9.7072		10.2928	9.9499		63° 0′
10′	9.6595	2.5	9.7103	3.1	10.2897	9.9492	.7	50′
20′	9.6620	2.5	9.7134	3.1	10.2866	9.9486	.6	40′
30′	9.6644	2.4	9.7165	3.1	10.2835	9.9479	.7	30′
40′	9.6668	2.4	9.7196	3.1	10.2804	9.9473	.6	20′
50′	9.6692	2.4	9.7226	3.0	10.2774	9.9466	.7	10′
28° 0′	9.6716	2.4	9.7257	3.1	10.2743	9.9459	.7	62° 0′
10′	9.6740	2.4	9.7287	3.0	10.2713	9.9453	.6	50′
20′	9.6763	2.3	9.7317	3.0	10.2683	9.9446	.7	40′
30′	9.6787	2.4	9.7348	3.1	10.2652	9.9439	.7	30′
40′	9.6810	2.3	9.7378	3.0	10.2622	9.9432	.7	20′
50′	9.6833	2.3	9.7408	3.0	10.2592	9.9425	.7	10′
29° 0′	9.6856	2.3	9.7438	3.0	10.2562	9.9418	.7	63° 0′
	餘弦的對數	一分的差	餘切的對數	一分的通差	正切的對數	正弦的對數	一分的差	角

項行,查表的時候從上面讀下來;從45°到90°的度數和分數印在右列,函數的名稱在底行,所以要從下面向上讀,和查函數的眞數表相同.

除了90°的正弦和0°的餘弦以外,正弦和餘弦這兩種銳角的函數都比1小;小於45°的正切和大於45°的餘切,這種銳角函數也小於1.直角三角形的斜邊比一腰長,三角形的大角對長邊,這是我們所知道的,所以用圖求函數的時候,已經決定了上面所講的事實.就對數講,凡是小於1的數,對數的定位部是負.那末表裏四種函數的對數,大半都有負定位部.負定位部印在表裏不很便利,並且一個表裏的定位部有正有負也容易弄錯,所以每個對數都加10,這種從表裏直接查出來的對數叫做表對數,應用的時候應該減去10.

小於0°和大於85°的角如有秒數,或是5°和85°中間的角有不滿十分的分數,都可用補算法算出來,通常的誤差不過萬分之一,就是小數點後

的第四位差1,但是從0°到$18'$和從$89^\circ42'$到90°的誤差很大,不甚準確.表的正中一列所載一分的通差,是這列的左右兩列裏面對數所公用;第三列所載的是第二列裏面一分的差數;第八列所載的是第七列裏面一分的差數.不過這種差數是假定萬分位做單位.用不滿十分的分數去乘表裏一分角的差數,可以代替用比例直接算出來的差數.

例一. $\log\sin 61^\circ50'=9.9453-10.$

例二. $\log\tan 27^\circ40'=9.7196-10.$

例三. 已知$\log\cos x=9.9466-10$, 那末$x=27^\circ50'.$

例四. 求$\log\sin 28^\circ33'.$

[**解**] $\log\sin 28^\circ30'=9.6787-10.$

$1'$的差數是2.3 (假定萬分位做單位)

$3'$的差數是$2.3\times3=7.$ (就是.0007)

$\therefore \log\sin 28^\circ33'=9.6787-10+.0007=9.6794-10.$

例五. 求$\log\cos 62^\circ42'.$

[**解**] $\log\cos 62^\circ40'=9.6620-10.$

$1'$的差數是2.5, (假定萬分位做單位)

$2'$ 的差數是 $2.5\times 2=5$. （就是 .0005）

$\therefore$ $\log\cos 62°42'=9.6620-10-0.0005=9.6615-10.$

例六. 已知 $\log\tan x=0.2704$, 求 x.

［解］ $\log\tan x=10.2704-10.$

10.2704 是在 10.2683 和 10.2713 的中間

$\therefore$ x 在 $61°40'$ 和 $61°50'$ 的中間.

$10.2704-10.2683=0.0021.$

$1'$ 的差數是 3（假定萬分位做單位）

$$\frac{21}{3}=7,\quad \therefore\ x=61°47'.$$

例七. 已知 $\log\cos x=9.9451-10$, 求 x.

［解］ 9.9451 是在 9.9453 和 9.9446 的中間.

$\therefore$ x 在 $28°10'$ 和 $28°20'$ 的中間

$9.9453-9.9451=0.0002.$

$1'$ 的差數是 .7 （假定萬分位做單位）

$$\frac{2}{7}\doteq 3.\quad \therefore\ x=28°13'.$$

習題五

求下面各函數的對數:

1. $\log\sin 61°20'$. 2. $\log\tan 27°40'$. 3. $\log\cos 62°30'$.

4. $\log\sin 27°37'$. 5. $\log\tan 28°25'$. 6. $\log\cos 27°46'$.

7. $\log\sin 62°28'$. 8. $\log\tan 61°53'$. 9. $\log\cos 28°8'$.

求下面的餘對數:

10. $colog\ sin\ 27°40'$. 11. $colog\ cos\ 28°50'$.

12. $colog\ tan\ 61°38'$.

從下面的表對數求 x 角:

13. $log\ sin\ x=9.6740$. 14. $log\ tan\ x=9.7196$.

15. $log\ cos\ x=9.9425$. 16. $log\ sin\ x=9.9476$.

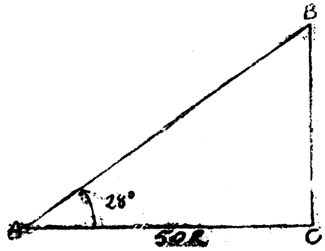
17. $log\ tan\ x=10.2759$. 18. $log\ cos\ x=9.6581$.

19. $log\ sin\ x=9.6674$. 20. $log\ tan\ x=9.7368$.

15. 函數的實用

三角的實用問題,都是利用三角形邊角的關係來解決,凡是能夠直接用一個三角函數算得出來的,就應用這個函數來推算.這種用三角函數直接推算的實用問題,是三角學一切實用題的基礎,所以先舉實例,再由此推出簡單的普遍法則.

現在取習題二第13題的圖解,改用三角函數計算來做例解:



設 h 是碑高的尺數,那末.

$$\frac{BC}{AC}=tan\ A,$$

就是 $\frac{h}{50}=tan\ 28°$

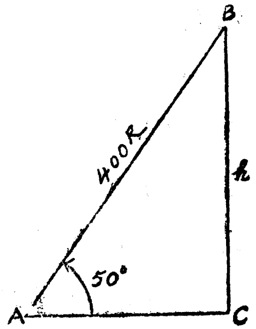
$\therefore \quad h=50 \tan 28^\circ=50\times.5317=26.585$ 尺.

$\therefore$ 碑高 26.585 尺.

照上面的實例,可以推得解簡單應用問題的普遍方法;

法則:只要看所求量和已知量所成的比是已知角的那一種函數就用這個函數來算;要是所求量是角,那末只看兩個已知量的比,是所求角的那一種函數,就用這個函數來推求角.

例一. 放一個風箏,把 400 尺長的線放盡,假使這個線緊張成直線,和地面成 50° 的角,問風箏離地面幾尺?



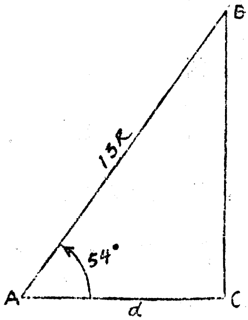
[**解**] 設 h 是風箏離地面的尺數,那末在直角三角形 ABC 內.

$\angle A=50^\circ, \qquad AB=400$尺$, \qquad BC=h.$

$\therefore \dfrac{BC}{AB}=\sin A,$ 就是 $\dfrac{h}{400}=\sin 50^\circ.$

$\therefore h=400 \sin 50^\circ=400\times.7660=306.4$ 尺.

故風箏離地面 306.4 尺.



例二. 1 丈 3 尺長的梯,靠在牆上,和地面成 54° 的角,問梯距牆足幾尺?

[解] 設 d 是梯距牆足的尺數,那末

$$\frac{AC}{AB}=\cos A,\quad \text{就是}\frac{d}{13}=\cos 54^\circ.$$

$$\therefore d=13\cos 54^\circ=13\times .5878=7.6414\ \text{尺}.$$

故梯距牆足 7.6614 尺.

例三. 上題的梯頂靠在牆上窗口,梯長卻沒有知道,只知梯足和牆足相距 7 尺 6 寸,梯和地面成 54° 的角,問窗口離地面幾尺?

[解] 設 h 為窗口距地面的尺數,那末在直角三角形 ABC 內, $\angle A=54^\circ$, $AC=7.6$尺, $BC=h$.

$$\therefore\frac{BC}{AC}=\tan A,\quad \text{就是}\frac{h}{7.6}=\tan 54^\circ.$$

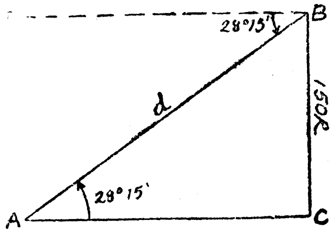
$$\therefore h=7.6\tan 54^\circ=7.6\times 1.3764=10.46\ \text{尺}$$

故窗口距地面 10.46 尺.

上面的三個例,只求簡單的乘積,所以用真數

來算,如有繁複的已知量或是用函數來除,那末用對數來算比較便利.

例四. 從高出水面 150 尺的燈塔,測得船的俯角是$28°15'$,問從船到塔頂相距幾尺



［解］ $\angle A=\angle ABD=28°15'$.

設 d 是從船到塔頂相距的尺數,

那末 $\sin A=\dfrac{BC}{AB}$, 就是 $\sin 28°15'=\dfrac{150}{d}$.

$$\therefore d=\frac{150}{\sin 28°15'}.$$

$$\therefore \log d=\log 150+\operatorname{colog}\sin 28°15'.$$

$$\operatorname{colog}\sin 28°15'=-(9.6752-10)$$

$$=10-9.6752=0.3248$$

$$\log 150=2.1761$$

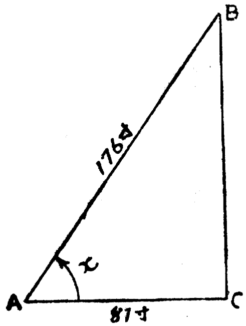
$$\operatorname{colog}\sin 28°15'=\underline{0.3248.}$$

$$\log d=2.5009$$

$$\therefore d=316.9\text{ 尺}.$$

故船距燈塔頂 316.9 尺.

例五. 一旗杆被風吹斷,杆尖着地,但斷處却還連着,斷下來的部分長1丈7尺6寸.杆尖距杆足8尺1寸,求斷下的一段和地面所成的角.



[解] 設 x 是所求的角,那末

$$\cos A=\frac{AC}{AB},$$

$$\text{就是}\ \cos x=\frac{81}{176}.$$

$$\log x=\log 81+\operatorname{colog} 176.$$

$$\log 81=1.9085$$

$$\operatorname{colog} 176=\underline{7.7545-10}$$

$$\log\cos x=9.6630-10$$

$$\therefore x=62°36'.$$

故斷下的一段和地面成62°36′的角.

[註一] 在用對數解應用問題以前,對於代數講過的對數表用法,對數的計算,餘對數的意義和應用等,要先有充分的複習.

[註二] 本節的例解,可用本書的附表來講,使學者便於領會,以後的例和下面的習題,要用完全的三角函數表和三角函數對數表.

習 題 六

ABC 是直角三角形，C 是直角，已知：

1. $A=50°$, $c=75$, 求 a。

2. $c=20$, $a=6.84$, 求 A.

3. $A=43°17'$, $c=26$, 求 b.

4. $c=63$, $b=47$, 求 A.

5. $A=27°12'$, $b=31$, 求 a.

6. $A=13°58'$, $a=152$, 求 b.

7. $a=78$, $b=41.18$, 求 A.

8. $A=54°31'$, $a=47.55$, 求 c.

9. $A=32°14'$, $b=42.4$, 求 c.

10. $B=38°29'$, $c=57$, 求 b.

11. 2丈5尺長的鉛絲，從電線木的頂接到地面，和地面成 $76°30'$ 的角，求電線木的高.

12. 1丈4尺8寸長的梯靠在牆上，梯頂接着牆頂，牆高1丈2尺，問梯和地面成幾度的角？

13. 汽船的速度每時28里，照着北偏東 $36°24'$ 的方向駛行三時，求出發點和終止點東西相隔的距離.

14. 在地面上的水平樹影長80尺,太陽的高度是47°29′,問樹高幾尺?

15. 碑高200尺,碑頂的仰角是3°30′求從測點到碑足的距離.

16. 4尺8寸高的人,在地面上的水平影長3尺7寸3分,求太陽的高度.

17. 從高出海面75丈的炮台頂,測得敵艦的俯角是5°47′,問敵艦距炮台足幾里?

18. 從高出水面3丈7尺的燈塔,測得汽船的俯角是12°13′,求從汽船到塔頂的距離.

19. 裝在路傍的郵政信筒,距牆脚37公尺,從牆上的窗口測得信筒的俯角是20°38′,問窗距信筒幾公尺?

20. 從地面上5尺高的一點,測得樹頂的仰角是36°19′,測點到樹的水平距離是17.34公尺,問樹高幾公尺?

21. 飛機場距警亭1里25丈,飛機升高到場的上面,測得警亭的俯角是32°53′,問飛機距地面幾丈?

22. 兩個燈塔東西相隔 $8\frac{2}{3}$ 里,一船在甲塔的正北,同時在乙塔北偏東 $52°25'$ 的方向,問船距燈塔各幾里?

雜題二

1. 由表求出 $20°$ 的正弦,餘弦,和正切來,同12節例解的結果比較.

2. 由表求出 $\sin 17°$ 和 $\cos 17°$ 來,同習題三第11題(1)的結果比較.

ABC 是直角三角形,應用第9節所講的基本性質,求 A 角的正弦,餘弦和正切:

3. 已知 $a=2b$　　　4. $a=\frac{2}{3}c$.

照上面兩題所應用的基本性質,求 B 角的正弦,餘弦和正切:

5. 已知 $a=24$, $b=143$.

6. 已知 $a=.264, c=.265$.

7. $b=2\sqrt{mn}$, $c=m+n$.

ABC 是直角三角形,已知:

8. $\sin A=\frac{3}{5}$, $c=20.5$, 求 a.

9. $\tan A=3\frac{2}{3}$, $b=2\frac{5}{11}$, 求 a.

10. 求 $2\sin 9^\circ$ 和 $\sin(2\times 9^\circ)$ 的差.

11. 求 $3\tan 5^\circ$ 和 $\tan(3\times 5^\circ)$ 的差.

12. $\sin(10^\circ+20^\circ)$ 和 $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ$ 相等嗎?

13. 照第9節講, $A+B=90^\circ$; 照習題三的第3題, $\sin B=\cos A$. 今設 $\cos A=\sin 2A$, 求 A.

ABC 是直角三角形,已知:

14. $a+c=18$, $b=12$, 求 a, b, 和 A.

15. $b+c=45$, $a=30$, 求 b, c, 和 A.

16. 在一個半徑7尺長的圓裏,求內接正十角形每邊的長.

17. 在一個半徑9寸長的圓裏,求從圓心到內接正六角形一邊的距離.

18. 一個正五角形每邊的長是7寸,求外接圓的半徑.

19. 一個A字形的屋面和水平面成$32^\circ 30'$的角,椽長13尺,求前後兩檐端的距離.

20. 一人在塔的南方測得塔頂的仰角是$54^\circ 16'$;向東行100碼,再測塔頂的仰角是$50^\circ 8'$,求塔高.

第 三 章

直角三角形的解法和應用問題

16. 用三角函數解直角三角形

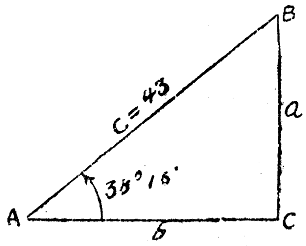
照第5節可講,直角三角形除了直角是定量,和兩個銳角照基本性質可以互求外,凡是已知兩個獨立部分,就可以圖解,不過圖解用直接度量,只能求得略值,所以要用三角函數來推算.

我們做習題六從第1題得第10題的時候,已經曉得怎樣去解直角三角形,就是做過的許多應用問題,也是應用這種局部的解法.現在要就各種不同的已知件,研究整個的有系統的解法,換句話講,就是應用角和角同邊和邊的基本關係,和邊角的函數關係,從已知的部分求出所有的未知部分來.

17. 已知一銳角和斜邊的解法

[問題] 已知 $A=38°16'$, $c=43$, 求 B, a, 和 b.

[解] (1) $B=90°-A=90°-38°16'=51°44'$,



(2) $\frac{a}{c}=\sin A$,

$\therefore a=c \sin A$.

(3) $\frac{b}{c}=\cos A$,

$\therefore b=c \cos A$.

$\log a=\log c+\log \sin A$.

$\log c=1.6335$

$\log \sin A=\underline{9.7920-10}$

$\log a=1.4255$

$\therefore a=26.64$.

$\log b=\log c+\log \cos A$.

$\log c=1.6335$

$\log \cos A=\underline{9.8949-10}$

$\log b=1.5284$

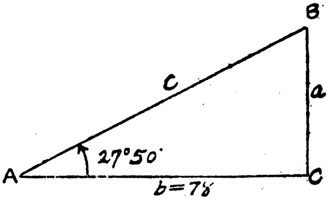
$\therefore b=33.76$.

用四位對數表推算的結果,只有四位有效數字是準確的,所以從第五位起,就四捨五入.推算的結果有沒有錯誤可用右式 $a^2+b^2=c^2$ 來核算,本節和從19節到22節的例解,由學者自己去逐一核算.

18. 已知一銳角和鄰邊的解法

[問題] 已知 $A=27°50'$, $b=78$, 求 B, a, 和 c.

[解] (1) $B=90°-A=62°10'$.



(2) $\frac{a}{b}=\tan A$,

$\therefore\ a=b\tan A$.

(3) $\cos A=\frac{b}{c}$,

$\therefore\ c=\frac{b}{\cos A}$.

$\log a=\log b+\log\tan A$.　　$\log c=\log b+\operatorname{colog}\cos A$.

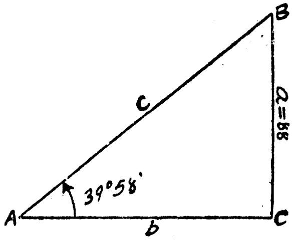
$\log b=1.8921$　　　　$\log b=1.8921$

$\log\tan A=\underline{9.7226-10}$　　$\operatorname{colog}\cos A=\underline{0.0534}$

$\log b=1.6147$　　　　$\log c=1.9455$

$\therefore\ b=41.48.$　　　　$\therefore\ c=88.2$

19. 已知一銳角和對邊的解法



［問題］　已知 $A=39°58'$, $a=88$, 求 B, b, 和 c.

［解］　(1) $B=90°-A=50°2'$.

(2) $\tan A=\frac{a}{b}$, $\therefore\ b=\frac{a}{\tan A}$.

(3) $\sin A=\frac{a}{c}$, $\therefore\ c=\frac{a}{\sin A}$.

$\log b=\log a+\operatorname{colog}\tan A$.　　$\log c=\log a+\operatorname{colog}\sin A$.

$$\begin{array}{rlrl} \log a &= 1.9445 & \log a &= 1.9445 \\ \operatorname{colog} \tan A &= \underline{0.0767} & \operatorname{colog} \sin A &= \underline{0.1922} \\ \log b &= 2.0212. & \log c &= 2.1367 \\ \therefore b &= 105. & \therefore c &= 137. \end{array}$$

上面的例也可以用 c 和 B 角的正切來求 b, 用 a 和 B 角的餘弦來求 c, 那末除了用算出來的 B 角去代替 A 角外, 同前節的算法一樣. 但是直接用題給的已知量 A 角來算, 可以減少錯誤, 就使 B 角算錯了, b 和 c 不會跟着錯, 所以還得分開來講.

習題七

解直角三角形 ABC, C 是直角, 已知:

1. $A=23°30'$, $c=627$.　　2. $A=39°34'$, $c=72.15$,

3 $A=28.25°$, $c=2280$.　　4. $B=21°47'$, $c=200$.

5. $B=76°25'$, $c=93.4$.　　6. $A=4°35'$, $a=637$.

7. $A=36°44'$, $a=48.53$.　　8. $A=43.8°$, $a=50.94$.

9. $A=37°56'$, $b=40$.　　10. $A=29.3°$, $b=6.4$.

11. $A=50°54'$, $b=45.7$.　　12. $B=25.5°$, $b=48$.

13. $B=68°52'$, $a=73$.　　14. $B=80°14'$, $b=19\frac{1}{4}$.

15. $B=45.4°$, $a=2.189$.

16. 等腰三角形的腰長 1 尺 6 寸，底角是 $24°10'$，問底邊長幾尺？

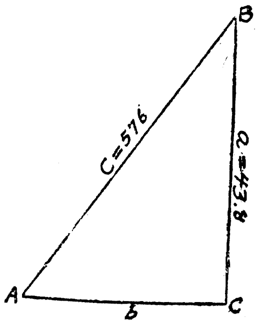
17. 等腰三角形的腰長 2 尺 5 寸，頂角是 $36°40'$，求這三角形的高.

18. 三角形的二角是 $42°17'$ 和 $47°43'$，夾邊長 3 尺 6 寸，求另外兩邊的長.

19. 正五角形的一邊長 1 尺 2 寸，求外接圓的半徑和內切圓的半徑.

20. 從圓外一點 A，作切線 AB，和從 A 到圓心的直線，成 $51°10'$ 的角. 設 $AB=7$ 尺，求圓的半徑.

20. 已知斜邊和一腰的解法



[問題] 已知 $c=57.6$，$a=43.8$，求 A，B，和 b.

[解] (1) $\sin A=\dfrac{a}{c}$.

(2) $B=90°=A$.

(3) $\dfrac{b}{c}=\cos A$.

$\therefore b=c\cos A$.

$\log\sin A=\log a+\operatorname{colog} c$. $\log b=\log c+\log\cos A$.

$\log a = 1.6415$

$\text{colog}\ c = \underline{8.2396-10}$

$\log \sin A = 9.8811-10$

$\therefore A = 49°31'.$

$\therefore B = 40°29'.$

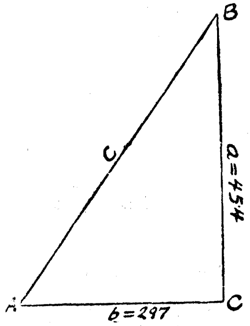
$\log c = 1.7604$

$\log \cos A = \underline{9.8124-10}$

$\log b = 1.5728.$

$\therefore b = 37.39.$

［註］ 學者用 $b = \sqrt{(c+a)\ (c-a)}$ 式，求出 b 來和上面的結果比較.



21. 已知兩腰的解法 ［問題］

已知 $a=454$, $b=297$, 求 A, B, 和 c

［解］ （1） $\tan A = \dfrac{a}{b}.$

（2） $B = 90° - A.$

（3） $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\therefore c = \dfrac{a}{\sin A}.$

$\log \tan A = \log a + \text{colog}\ b.$

$\log a = 2.6571$

$\text{colog}\ b = \underline{7.5272-10}$

$\log \tan A = 10.1843-10$

$\therefore A = 56°49'.$

$\log c = \log a + \text{colog} \sin A$

$\log c = \log a + \text{colog} \sin A.$

$\log a = 2\ 6571$

$\text{colog} \sin A = \underline{0.2618.}$

$\therefore B=33°11'$ $\qquad\qquad$ $\log c=2.9189$

$\therefore c=829.6$

〔註〕 學者用 $c=\dfrac{b}{\cos A}$ 式,求出 c 來和上面的結果比較.

我們爲什麼不用公式 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 來求 c?

22. **直角三角形的面積** 幾何學裏講過,三角形的面積,等於底高乘積的一半,直角三角形的兩腰就是底和高,所以面積 $S=\dfrac{1}{2}a\,b$.

照這樣講,a 和 b 或是題給,或是已經求出,就可以算出直角三角形的面積來,但如果有一個問題,只要求面積,不需別的部分,那末用對數來直接推算,比較來得便利.

例. 已知 $A=36.7°$, $c=76$ 公尺,求直角三角形 ABC 的面積 S.

〔解〕 $A=36.7°=36°42'$.

$$\frac{a}{c}=\sin A,\ \frac{b}{c}=\cos A.$$

$$\therefore a=c\sin A,\ b=c\cos A$$

$$\therefore S=\tfrac{1}{2}\,a\,b=\tfrac{1}{2}\,c^2\sin A\cos A$$

$\therefore \log S = \operatorname{colog} 2 + 2\log c + \log \sin A + \log \cos A$

$\operatorname{colog} 2 = 9.6990 - 10$

$2\log c = 3.7616$

$\log \sin A = 9.7764 - 10$

$\log \cos A = \underline{9.9040 - 10}$

$\log S = 3.1410.$

$\therefore S = 1383.7$ 方公尺.

習　題　八

解直角三角形 ABC, C 爲直角, 已知

1. $a=8.49$, $c=9.35$.　　2. $a=21.9$, $c=91.92$.

3. $b=717.8$, $c=865.3$.　　4. $b=447.6$, $c=859$.

5. $a=13.7$, $b=16.9$.　　6. $a=4153$, $b=6210$.

解直角三角形 ABC, 並且求面積 S, 已知;

7. $a=37$, $b=46$.　　8. $a=22\frac{1}{8}$, $c=31.7$.

9. $b=$ [illegible] $c=\sqrt{3}$.

S 是直角三角形 ABC 的面積, 已知:

10. B 和 c, 求 S.　　11. A 和 a, 求 S.

12. A 和 b, 求 S.

求直角三角形 ABC 的面積 S, 已知

13. $A=60°54'$, $c=68$,

14. $B=44°4'$, $c=27$.

15. $B=48°49'$, $a=47$.

16. $A=18°14'$, $a=7$ 尺.

17. $a=729$ 公尺, $c=968$ 公尺.

18. 長方形的底長 8.5 寸,對角線長 11 寸,求長方形的高,同底和對角線所成的角.

19. 距圓心 6 尺 5 寸的圓外一點,作圓的切線,半徑長 5 尺.求切線的長,並求過切點的半徑和引到圓心的直線所成的角.

20. 造橋用的鋼條釘成直角三角形,水平的鋼條長 8 呎,豎直的鋼條長 12 呎,問傾斜的鋼條長幾尺,並和水平的鋼條成角幾度?

23. 等腰三角形 照幾何學講,從頂點到底邊的垂線把等腰三角形分做兩個全等直角三角形,習題七的 16 和 17 兩題就是應用上面所講的定理,所以**等腰三角形可用解直角三角形的方法來解.**

等腰三角形有下面的幾個元素:

a 是一等腰，

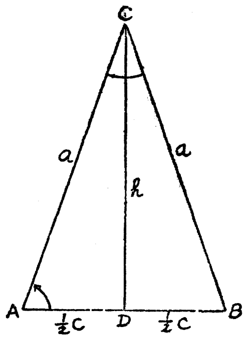
c 是底邊，

h 是高，

A 是一底角，

C 是頂角，

S 是面積，



這六種裏面，除了 A 和 C 可以互求不是獨立的元素以外，已知兩種，就可以求出另外的四種來.

例. 已知 $A=68°20'$, $a=67.5$, 求 C, c, h, 和 S.

[解]　(1) $C=180°-2A=180°-136°40'=43°20'$.

(2) $\frac{\frac{1}{2}c}{a}=\cos A$,　$\therefore c=2a\cos A$.

$\log c=\log 2+\log a+\log\cos A$.

$\log 2=0.3010$

$\log a=1.8293$

$\log\cos A=\underline{9.5673-10}$

$\log c=1.6976$

$\therefore c=49.85$.

(3) $\frac{h}{a}=\sin A$,　$\therefore h=a\sin A$.

$$\log h=\log a+\log \sin A.$$

$$\log a=1.8293$$

$$\log \sin A=\underline{9.9682-10}$$

$$\log h=1.7975$$

$$\therefore h=62.73.$$

(4)　$S=\frac{1}{2}ch.$

$$\log S=\text{colog } 2+\log c+\log h.$$

$$\text{colog } 2=9.6990-10$$

$$\log c=1.6976$$

$$\log h=\underline{1.7975}$$

$$\log S=3.1941.$$

$$\therefore S=1563.5$$

24.　正多角形.幾何學裏講過,正多角形的中心,就是內切圓和外接圓共同的圓心.這兩個圓的半徑和正多角形的半邊,構成一個直角三角形,有一個銳角就是正多角形的半個中心角,所以我們也可以用解直角三角形的方法來解正多角形,在做雜題二第16,17,18各題

和習題七的第 19 題時候,已經曉得過一些大概了.

正多角形有下面的幾個要數:

n是邊數,

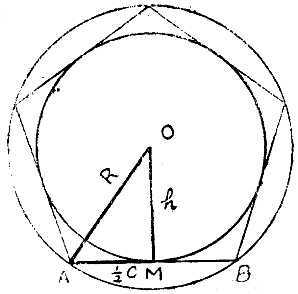
c是一邊,

R是外接圓的半徑,

h是內切圓的半徑,

P是周界,

S是面積.



這六種裏面,我們雖能從別的已知件推算n,通常n總當他是已知件.除了n以外,再知道一種,就可以推算出另外四種,不過用S來做已知件,推算稍繁.中心角$AOB=\frac{360°}{n}$, ∴ $\angle AOM=\frac{180°}{n}$, 那末已知邊數$n$,就可以算出直角三角形$AOM$的一個銳角的度數來,

例. 已知$n=5$, $p=65$尺,求c, R, h,和S,

[解] $\angle AOM=\dfrac{180^\circ}{5}=36^\circ.$

(1) $c=\dfrac{P}{n}=\dfrac{65}{5}=13$ 尺.

(2) $\sin 36^\circ=\dfrac{\frac{1}{2}c}{R}$, $\therefore R=\dfrac{6.5}{\sin 36^\circ}$

$\log R=\log 6.5+\operatorname{colog}\sin 36^\circ.$

$$\log 6.5=0.8129$$

$$\operatorname{colog}\sin 36^\circ=\underline{0.2308}$$

$$\log R=1.0437.$$

$$\therefore R=11.06 \text{ 尺}.$$

(3) $\tan 36^\circ=\dfrac{\frac{1}{2}c}{h}$, $\therefore h=\dfrac{6.5}{\tan 36^\circ}.$

$\log h=\log 6.5+\operatorname{colog}\tan 36^\circ.$

$$\log 6.5=0.8129$$

$$\operatorname{colog}\tan 36^\circ=\underline{0.1387}$$

$$\log h=0.9516.$$

$$\therefore h=8.944 \text{ 尺}$$

(4) $S=\frac{1}{2}ph=\frac{1}{2}\times 65\,h=32.5\,h$

$\log S=\log 32.5+\log h$

$$\log 32.5=1.5119$$

$$\log h = \underline{0.9516}$$

$$\log S = 2.4635$$

$$\therefore \quad S = 290.7 \text{ 方尺.}$$

習 題 九

解下面的等腰三角形:

1. 已知 a 和 C, 求 A, c, 和 h.

2. 已知 c 和 A, 求 C, a, 和 h.

3. 已知 c 和 h, 求 A, C, 和 a.

4. 已知 a 和 h, 求 A, C, c, 和 S.

5. 已知 C 和 h, 求 A, a, c, 和 S.

6. 已知 $a=14.3$, $c=11$, 求 A, C, 和 h.

7. 已知 $c=2.352$, $C=69°49'$, 求 a, h, 和 S.

8. 已知 $h=7.485$, $A=76°14'$, 求 a, c, 和 S.

9. 已知 $c=147$, $S=2572$, 求 A, C, a, 和 h.

解下面的正多角形:

10. 已知 $n=10$, $c=h$, 求 R, h, P, 和 S.

11. 已知 $n=8$, $h=1$, 求 c, R, P, 和 S.

12. 已知 $n=18$, $R=1$, 求, c, h, p, 和 S.

13. 5寸長的弦所對的圓心角是 133°, 求圓的

半徑.

14. 問半徑長30公分的圓內,44公分長的弦所對的圓心角是幾度?

15. *A*字形的屋面中間的支柱是10呎9吋,兩檐端的距離是24呎6吋,求屋面的斜度.

[註] 斜度就是屋面和水平面所成的角.

16. 一個正六角形的崗亭,亭基的周界是31尺8寸問須舖混凝土幾方尺?

25. 測量上的術語 第一節和第五節裏所講過的仰角,俯角和高度是測量裏常用的名稱,也就是測量上專門的術語,現在揀通常所用的加以確切的定義和詳細的解釋.

1. 過一點的縱直線,就是和從這點掛一鉛錘的線相叠合的直線.

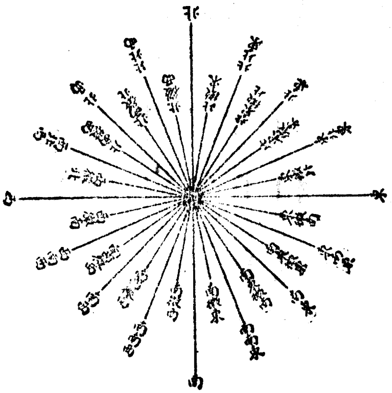
2. 過一點的水平線,就是和通過這點的縱直線垂直的直線.

3. 過一點的縱直面,就是含通過這點的縱直線的平面.

4. 過一點的水平面,就是垂直於通過這點的縱直線的平面.

5. 縱直角,就是在一個縱直面內的角.

6. 水平角,就是在一個水平面內的角.



7. 一個目的物的仰角,就是向上觀測的視線和水平線所成的縱直角,也叫做這個目的物的高度.

8. 一個目的物的俯角,就是向下觀測的視線和水平線所成的縱直角.

9. 二點間的水平距離,就是從一點到通過他點的縱直線的距離.

10. 二點間的縱直距離,就是從一點到通過他點的水平面的距離.

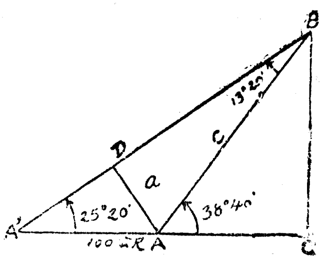
[註] 地面雖是球面,要是所測的範圍不很廣,可以當他平面看,所以通常的應用問題裏,就拿地面當做水平面.

航海用的羅盤,把一個周角分做32個方位,各方位的名稱如上圖.兩個連接的方位中間的角

是 $90°$ 的$\frac{1}{8}$,就是 $11°15'$. 各方位的角,拿直貫南北的子午線來做標準,像北北東就是北偏東 $22°30'$ 東微北,就是北偏東 $78°45'$;南西微南,就是南偏西 $33°45'$,所以**從羅盤所示的方向,可以知道航線和子午線所成的角**.

26. 高的測量　**一個目的物的高,可以用水平距離和測得的仰角或俯角算出來**,這種測法和推算,在第 4 節和第 15 節裏講過,習題六的 20 和 21 兩題,也就是測算高的通例.如果有一個不能行近的目的物,要求他的高,那末只好在和目的物的足成水平直線的兩點,測得兩個仰角,再量這兩點間的距離來推算。

例. 從地面上一點測得一個不可到的炮台頂的仰角是 $38°40'$, 再從和炮台足所成的一直線上遠 100 公尺的一點,測得仰角 $25°20'$. 問炮台高幾公尺?



[解]　設炮台高 h 公尺,並作 $AD \perp A'B$、$\angle ABA'$

$=38°40'-25°20'=13°20'$.

在直角三角形 AAD 內,

$\frac{a}{100}=\sin 25°20'$,　$\therefore a=100\sin 25°20'$.

在直角三角形 ABD 內,

$\sin 13°20'=\frac{a}{c}$,　$\therefore c=\frac{a}{\sin 13°20'}=\frac{100\sin 25°20'}{\sin 13°20'}$.

在直角三角形 ABC 內,

$\frac{h}{c}=\sin 38°40'$,　$\therefore h=c\sin 38°40'$.

$$=\frac{100\sin 25°20'\sin 38°40'}{\sin 13°20'}$$

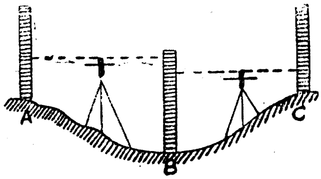
$\log h=\log 100+\log\sin 25°20'+\log\sin 38°40'+\operatorname{colog}\sin 13°20'$.

$$\log 100=2.0000$$
$$\log\sin 25°20'=9.6313-10$$
$$\log\sin 38°40'=9.7957-10$$
$$\operatorname{colog}\sin 13°20'=\underline{0.6371.}$$
$$\log h=2.0641.$$
$$\therefore h=115.9.$$

故炮台高 115.9 公尺,

上面所講的都是間接的測高法.如果要直

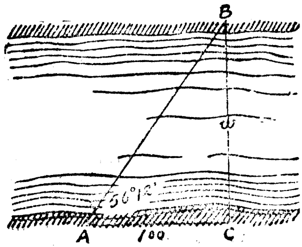
接比較兩地的高低,可用一種測法,在測量裏叫做水準測量.



拿一個水準儀或是經緯儀擺在中間,兩頭豎着兩根標尺如上圖,可以測知A比B高多少尺再用同樣的方法來比較B和C的高低;照這樣,繼續測下去,就使有相隔很遠的兩地,也可以測得他們高低的差數.

27. **距離的測量** 尋常的距離或是測量裏所用的基線,可以用測鎖和捲尺來直接去量.講到從測得的角,間接去推算距離.以前的應用題裏巳有過不少的例.現在再舉一個用直角三角形的解法可以推算的例;

例. 要測河的闊,沿岸量一根 100 尺長的直線AC、C和隔河沿岸的B樹相對,測得BAC角是$56°12'$,問河闊幾尺?



[**解**] 設河闊w尺,那末

$$\frac{w}{100}=\tan 56°12',$$

$$\therefore\quad w=100\tan 56°12'.$$

$$\log w=\log 100+\log\tan 56°12'.$$

$$\log 100=2.0000$$

$$\log\tan 56°12'=\underline{10.1735-10}$$

$$\log w=2.1735$$

$$\therefore w=149.1.$$

故河闊 149.1 尺.

[註一]　測量裏直接去量的線,用來推算所求量的叫做基線.

[註二]　照實際上講, B 樹未必恰巧在河的邊上,樹和河邊,總有少許的距離;就是所取的 C 點也未必在河的邊緣,所以實際的河闊須從 BC 減去 B 和 C 到河邊的距離.但以演習推算方法爲目的,這兩個很小的距離可以略去,就像在計算目的物的高的時候,儀器高可以略去,是一樣的道理.

習題十

1. 在27節例解的圖裏,設 $AC=150$ 丈,$A=83°50'$,問河闊幾里?

2. 從河邊135尺高的石頂,測得對岸的俯角是18°35′,問河闊幾尺?

3. 從戰鬭艦的瞭望台,望見敵方的潛艇透出水面,測得俯角5°28′.瞭望台高出水面35公尺問潛艇距戰艦幾公尺?

4. 飛機從營地上升到空中,在離地面500公尺的地方,測得敵營的俯角是8°15′,問兩營相隔多遠?

5. 一個氣球停在一條直路上面的空間,一人從氣球的下面走了50步,回頭觀測氣球的仰角是75°,問氣球離地面幾丈?

〔註〕照1步等於5尺計算.

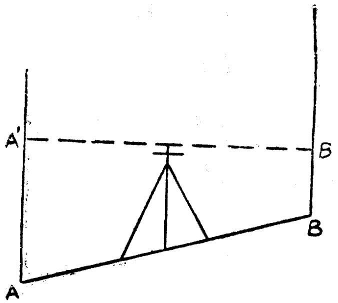
6. 樓房一所造在平地上,從地面上一點測得屋頂的仰角是31°24′,再向屋前進100尺,測得仰角44°16′,求屋的高.

7. 從山頂測得平地上相距1哩的兩個石樁的俯角是5°和15°,這兩個石樁和山頂是在同一縱直面裏,問山高幾呎?

[註] 1 哩 = 5280 呎

8. 從 15 丈高的塔頂，測得地面兩橋的俯角是 $40°10'$，和 $12°50'$，兩橋和塔足在同一水平線內，求兩橋相隔的距離.

9. 在斜坡 AB 上用水準儀測得 $AA' = 48.3$ 尺，$BB' = 3.4$ 尺，倘使兩根標尺中間的水平距離 $A'B' = 12.8$ 尺，求斜坡的斜度和 AB 的距離.



10. 船在燈塔的正西，向着北北東的方位駛行 34 里，這時候燈塔恰在船的正南.求從船到燈塔的兩個距離.

11. 兩船同時從同地開行，一向南西微南，一向南東微東,他們的速度是每時 27 里和 $28\frac{1}{2}$ 里.問過一時後,兩船相隔幾里?

12. 船距燈塔 20 里，從燈塔測得船的方向是北東,船照北西的方向駛行到某地，在這時候再從燈塔測得船的方向是北北西，問這船行了幾里路?

13. 一船向東駛行,他的速度是每時$23\frac{1}{2}$里,在上午11時30分的時候,船在海港的正南;在下午1時42分的時候,從船測得海港的方向是北西微北.問在上午11時30分船距海港幾里?下午1時42分距海港幾里?

14. 從河邊測得對岸樹頂的仰角是$37°48'$,退後200尺再測,得樹頂的仰角$24°36'$.問樹高幾尺河闊幾尺?

雜 題 三

1. 已知面積$S=58$,一腰$a=10$,求解直角三角形ABC.

2. 已知面積$S=98$平方寸,$c=22$寸,求解直角三角形ABC.

3. 已知面積$S=12$,一銳角$A=29°30'$,求解直角三角形ABC.

4. 已知底邊$c=68.7$公分,面積$S=1534$方公分,求解等腰三角形ABC.

5. 已知周界$p=7$尺2寸,求解正九角形.

6. 已知面積$S=20$,求解正十一角形.

7. 證明平行四邊形的面積,等於兩邊和夾角正弦的乘積.

8. 平行四邊形的兩邊 $a=5$ 公　, $b=6$ 公寸,夾角 $A=82°45'$, 求面積 S.

9. 直角三角形的斜邊是一腰的三倍,問兩個銳角各幾度?

10. 一倉屋長 80 尺,闊 40 尺.屋面的斜度是 45°,求椽長和屋頂的全面積.

11. 兩圓外切,他們的半徑是 10 吋和 1 呎 2 吋,求外公切線和聯心線所成的角.

12. 船主觀測燈塔在船的正東,船向北駛行 2 里,再測燈塔的方向是南偏東 55°33'. 求從船到燈塔的兩個距離.

13. 從船觀測相隔 12 里的兩個燈塔,在正西一直線上;船向北駛行 30 分鐘,再測兩燈塔的方向是南西和南南西.求這船每時的速度.

14. 一根旗杆,豎在鐘樓的頂上.在地面上距鐘樓 12 丈的一點,測得樓頂的仰角是 23°22'. 杆頂的仰角是 20°34'. 求鐘樓的高和旗杆的長.

15. 從 18 丈高的窗口,測得塔頂的仰角是 35°

$20'$, 塔足的俯角是$16°28'$, 問塔高幾丈?

16. 飛機離地面360尺飛船離地面510尺. 從飛機測得飛船的俯角是$13°45'$. 求從飛機到飛船的距離.

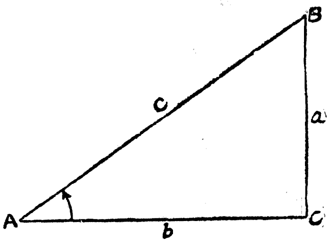
第 四 章

特殊角的三角函數，簡易恆等式和方程式.

28. 餘切,正割,餘割. 三角函數的初步定義,既然是直角三角形各兩邊的比,三角形有三邊,那末就有六個不同的比,也就是有六種三角函數.所以除了在11節裏講過的函數以外,還有下面的三種:

$\frac{b}{a}$ 叫做 A 角的餘切,寫作 $\cot A$;

$\frac{c}{b}$ 叫做 A 角的正割,寫作 $\sec A$;



$\frac{c}{a}$ 叫做 A 角的餘割.寫作 $\csc A$;

就是 $\cot A=\frac{b}{a}=\frac{\text{隣邊}}{\text{對邊}}$;

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜邊}}{\text{隣邊}};$$

$$\csc A=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}},$$

看上面的比值,就可以曉得餘切是正切的反商;正割是餘弦的反商;餘割是正弦的反商.所以有了正弦,餘弦,和正切,在實用上也就夠用,不過在理論方面也該有充分的了解

$$\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}=1,$$

$$\therefore\quad \sin A\csc A=1.$$

所以 $\sin A=\dfrac{1}{\csc A}$;　$\csc A=\dfrac{1}{\sin A}$.

$$\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}=1,$$

$$\therefore\quad \cos A\sec A=1.$$

所以 $\cos A=\dfrac{1}{\sec A}$;　$\sec A=\dfrac{1}{\cos A}$.

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1,$$

$$\therefore\quad \tan A\cot A=1.$$

所似 $\tan A=\dfrac{1}{\cot A}$;　$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$.

［註］　除了這六種函數以外,還有不常用的兩種:

$$versed\ sin\ A=1-cos\ A$$ 叫做 A 角的正矢;

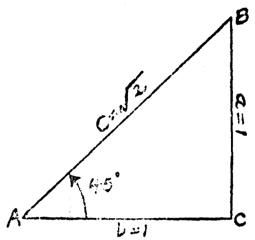
$$coversed\ sin\ A=1-sin\ A$$ 叫做 A 角的餘矢;

29. 45°的三角函數　尋常三角函數的值,須從三角函數表查出來,但是有幾種特殊的角,像 30°, 45°, 和 60° 的函數,在問題裏面用到的時候很多,可以用特殊的方法算出他們的數值來熟記.

用長度的單位來做兩腰,作一個等腰直角三角形 ABC, 那末

$$A=B=45°,$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}.$$



故得 $sin\ 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$cos\ 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$tan\ 45°=1;$$

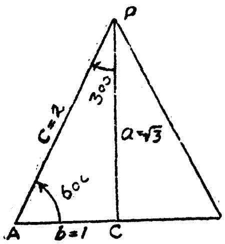
和他們的反商

$$csc\ 45°=\sqrt{2};$$

$$sec\ 45°=\sqrt{2};$$

$$cot\ 45°=1.$$

30. 30°和60°的三角函數 用長度單位的二倍做邊，作一個等邊三角形ABD，從B到AD作垂線BC．照幾何學講，BC平分B角和底邊AD．在直角三角形ABC裏，$\angle A=60°$ $\angle ABC=30°$，$c=2$，$b=1$，



$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

故得 $\sin 30°=\frac{1}{2}$;　$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$;　$\cos 60°=\frac{1}{2}$;

$\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$;　$\tan 60°=\sqrt{3}$;

和他們的反商　$\csc 30°=2$;　$\csc 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}$;

$\sec 30°=\frac{2}{\sqrt{3}}$　$\sec 60°=2$;

$\cot 30°=\sqrt{3}$;　$\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

注意　$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}$，和$\frac{2}{\sqrt{3}}$在計算時可以化做$\frac{1}{2}\sqrt{2}$，$\frac{1}{3}\sqrt{3}$，和$\frac{2}{3}\sqrt{3}$，由$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.732$便

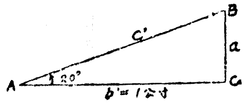
求出這些特殊角函數的差近值.但爲便於反商關係記憶起見,仍用無理數做分母.

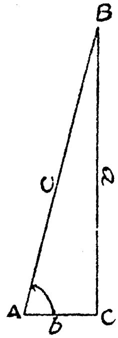
[註] 特殊角的三種重要函數,列成下面的表,以便記憶:

函數 角	正　弦	餘　弦	正　切
30°	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\sqrt{3}$

注意在正弦一行裏,分母都是2,分子是$\sqrt{1}$,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$.餘弦一行,是由正弦一行倒過來的.正切一行是由前二行相除而得的.

31. 0°和90°的三角函數 直角三角形ABC的A角,如果是一個很小的角,那末a邊也很小,但是b邊却差不多要和c邊等長.倘使A角漸漸地減小到





$0°$，那末 $a=o$，b 邊和 c 邊疊合就是 $b=c$

$$\therefore\quad \frac{a}{c}=\frac{o}{c}=0,\quad \frac{b}{c}=\frac{b}{b}=1,\quad \frac{a}{b}=\frac{o}{b}=0,$$ 故

得

$$\sin 0°=0;$$

$$\cos 0°=1;$$

$$\tan 0°=0;$$

又因 $\frac{c}{a}=\frac{c}{o}=\infty$，

$\frac{b}{a}=\frac{b}{o}=\infty$，所以他們的反商

$$\csc 0°=\infty;$$

$$\sec 0°=1;$$

$$\cot 0°=\infty:$$

直角三角形 ABC 的 A 角，如果是一個很大的銳角．那末 a 邊差不多要和 c 邊等長，但是 b 邊却很小，倘使 A 角漸漸地增大到 $90°$，那末 $a=c$　$b=o$

$$\therefore\quad \frac{a}{c}=1,\ \frac{b}{c}=0,\ \frac{a}{b}=\frac{a}{o}=\infty.$$

故得 $\sin 90°=1;$

$$\cos 90°=0;$$

$$\tan 90^\circ = \infty;$$

和他們的反商

$$\csc 90^\circ = 1;$$

$$\sec 90^\circ = \infty;$$

$$\cot 90^\circ = 0.$$

〔註〕 ∞ 是無限大的符號.

習題十一

1. 已知 $\sin A = \frac{12}{13}$, $\cos B = \frac{8}{17}$, 和 $\tan x = 4\frac{4}{9}$, 求 $\csc A$, $\sec B$, 和 $\cot x$.

ABC 是直角三角形, 求 A 角的餘切, 正割, 和餘割, 已知:

2. $a=3$, $b=4$, $c=5$.

3. $a=1.19$, $b=1.2$, $c=1.69$.

4. $a=n$, $b=\frac{n^2-1}{2}$, $c=\frac{n^2+1}{2}$.

5. $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$

ABC 是直角三角形, 求 A 角的六種函數, 已知:

6. $a=16.8$, $b=9.5$.   7. $a=\sqrt{p^2+q^2}$, $c=p+q$.

8. $b=\sqrt{p+1}$, $c=p+1$.

求下面各式的值:

9. $\sin 0°+\sin 45°-\cos 45°+\cos 90°$.

10. $\tan 0°+\cot 90°+\sin 30°+\sec 60°+\cos 60°-\csc 30°-\cot 45°$.

11. $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30°$.

12. $\cos 30° \cos 60° - \sin 30° \sin 60°$.

13. $\sin 90° \cos 60° - \cos 90° \sin 60°$.

14. $\cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$.

15. $a \sin 0° + b \cos 90° - c \tan 0° \; d \cot 90°$.

16. $a \sin 90° - b \cos 0° - (a-b) \tan 45°$.

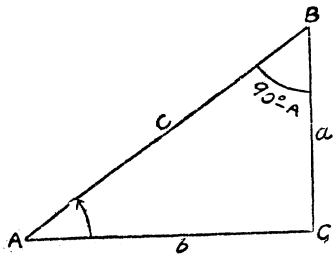
17. $(a^2+b^2) \sec 0°+2 ab \csc 90°-(a-b)^2 \cot 45°$

18. $\sin 30° : \sin 60°$.　　　19. $\tan 45° : \tan 30°$.

20. 用什麼數去乘 $\sin 45°$ 恰好等於 $\tan 30°$?

32. 餘角的三角函數

在直角三角形 ABC 裏.



$B=90°-A$.

$\sin (90°-A) = \sin B$

$= \dfrac{b}{c}$.

但是　$\cos A=\dfrac{b}{c}$,

$$\therefore\quad \sin(90^\circ - A) = \cos A;$$

照樣可以求得

$$\cos(90^\circ - A) = \cos B = \frac{a}{c} = \sin A;$$

$$\tan(90^\circ - A) = \tan B = \frac{b}{a} = \cot A;$$

$$\cot(90^\circ - A) = \cot B = \frac{a}{b} = \tan A;$$

$$\sec(90^\circ - A) = \sec B = \frac{c}{a} = \csc A;$$

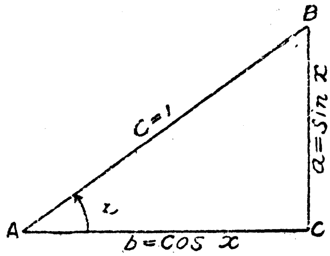
$$\csc(90^\circ - A) = \csc B = \frac{c}{b} = \sec A;$$

看上面的六式,可以曉得**正弦和餘弦;正切和餘切;或是正割和餘割成功相互的餘函數.**餘弦,餘切,和餘割叫做餘函數,意思就是餘角的正弦,餘角的正切,和餘角的正割.

三角函數表裏的函數值,雖然載到90°,但在實際上只須算到45°,因爲45°和90°中間各角的函數,就是0°和45°中間各角的餘函數.在13節的附表裏查出$\sin 46^\circ$和$\cos 44^\circ$的函數值來比較,就可以明白這個道理.

33. 同角諸三角函數間的關係　照12

節用圖來求函數值一樣的方法,可以求出下面四個三角函數間基本關係的公式來用長度的單位來做斜邊,造一個直



角三角形 ABC, 那末因為 $\frac{a}{c}=\frac{a}{1}=a$, $\frac{b}{c}=\frac{b}{1}=b$, 所以 x 角的對邊就是 $\sin x$. 他的鄰邊就是 $\cos x$.

因 $$a^2+b^2=c^2,$$

$$\therefore \quad \sin^2 x+\cos^2 x=1; \qquad [1]$$

又因 $$\tan x=\frac{a}{b};$$

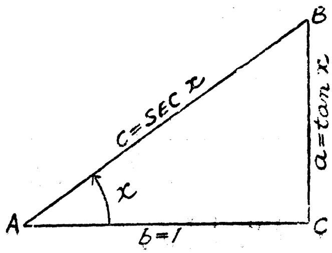
$$\therefore \quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \qquad [2]$$

在左邊的直角三角形裏,x 角的鄰邊 $b=1$, 那末

因為 $\frac{a}{b}=\frac{a}{1}=a$

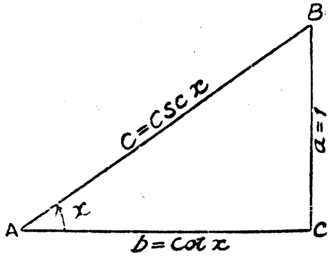
$\frac{c}{b}=\frac{c}{1}=c$, 所以 $a=\tan x$,

$c=\sec x$.



因 $a^2+b^2=c^2$

$\therefore\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x.$　　[3]



看左邊的圖, x 角的對邊 $a=1$. 那末因為

$\frac{b}{a}=\frac{b}{1}=b,$

$\frac{c}{a}=\frac{c}{1}=c,$ 所以 $b=\cot x,$

$c=\csc x.$

因　$a^2+b^2=c^2$

$\therefore\quad 1+\cot^2 x=\csc^2 x.$　　[4]

從公式[1]可以求得 $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$. 和 $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$, 因為銳角的函數都是正值, 所以只取正的主根.

34. 同角諸函數的互求

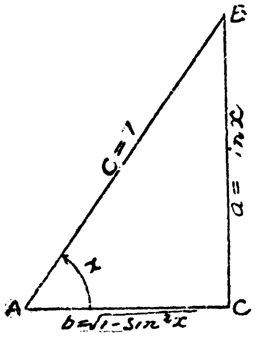
照28節所講的反商關係, 和上節的四個基本公式, 從一個已知函數, 可以算出另外的五個函數來, 如果照下面所舉的例直接畫一個圖來算, 更加簡便.

例一. 用 $\sin x$ 來表 x 角的另外五種函數.

[**解**]　用長度的單位做斜邊, 作一直角三角形 ABC, 並設 $\angle A=x$. 那末 $c=1$, $\sin x=\frac{a}{c}=\frac{a}{1}=a.$

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{1-a^2}$

$=\sqrt{1-sin^2x}.$



$\therefore\ cos\ x=\frac{b}{c}=\sqrt{1-sin^2\ x}.$

$tan\ x=\frac{a}{b}=\frac{siu\ x}{\sqrt{1-sin^2\ x}};$

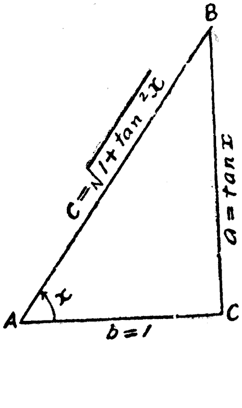
$cot\ x=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{1-sin^2\ x}}{sin\ x};$

$sec\ x=\frac{c}{b}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\ x}};$

$csc\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{sin\ x}.$

例二. 用 $tan\ x$ 來表 x 角的另外五種函數

[解] 在直角三角形 ABC 裏，x 角的鄰邊 $b=1$，那末



$a=tan\ x,\ c=\sqrt{1+tan^2\ x}.$

$sin\ x=\frac{a}{c}=\frac{tan\ x}{\sqrt{1+tan^2\ x}};$

$\therefore\ cos\ x=\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{1+tan^2x}};$

$cot\ x=\frac{b}{a}=\frac{1}{tan\ x};$

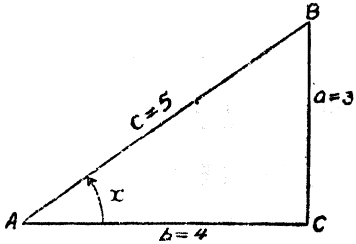
$sec\ x=\frac{c}{b}=\sqrt{1+tan^2\ x};$

$$csc\ x=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{1+tan^2\ x}}{tan\ x};$$

例三. 已知 $sec\ x=\frac{5}{4}$, 求 x 角的另外五種函數.

[**解**] $sec\ x$

$$=\frac{c}{o}=\frac{5}{4},$$



$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$

$$=\sqrt{25-16}=3.$$

$$\therefore\quad sin\ x=\frac{a}{c}=\frac{3}{5};\quad cos\ x=\frac{b}{c}=\frac{4}{5};$$

$$tan\ x=\frac{a}{b}=\frac{3}{4};\quad cot\ x=\frac{b}{a}=\frac{4}{3};$$

$$csc\ x=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}.$$

習題十二

用餘角的函數來表明下面的函數:

1. $sin\ 15°$.　　2. $cos\ 22°30'$.

3. $tan\ 75°$.　　4. $cot\ 67°30'$.

5. $sec\ 81°25'$.　　6. $csc\,19°40'$.

用小於 45° 角的函數來表明下面的函數:

7. $sin\ 46°20'$.　　8. $cos\ 57°30'$.

9. $\tan 68°40'$.　　10. $\cot 79°50'$.

11. $\sec 48°15'$.　　12. $\csc 56°45'$.

13. 設 $\tan A=\cot A$, 求 A 角的度數.

14. 設 $\cos x=\sin 2x$, 求 x 角的度數.

15. 造一個任意的直角三角形 ABC 來證明33節裏的四個公式.

16. 證明 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

17. 證明 $\tan x=\dfrac{\sec x}{\csc x}$.

18. 用 $\cos x$ 來表 x 角的另外五種函數.

19. 用 $\cot x$ 來表 x 角的另外五種函數.

20. 用 $\sec x$ 來表 x 角的另外五種函數.

21. 用 $\csc x$ 來表 x 角的另外五種函數.

從下面的已知函數, 求 x 角的另外五種函數的值:

22. $\sin x=\dfrac{12}{13}$.　　23. $\cos x=.28$

24. $\tan x=1.5$.　　25. $\cot x=1$.

26. $\sec x=2$.　　27. $\sin x=m$.

28. 已知 $\sin x=\dfrac{2m}{1+m^2}$, 求 $\tan x$

29. 已知 $\cos x=\frac{2mn}{m^2+n^2}$, 求 $\cot x$

30. 已知 $\cot 22°30'=\sqrt{2}+1$, 求 $22°30'$ 的另外五種函數,

35. 簡易三角恆等式 代數的等式有恆等式和方程式的分別,三角的等式也是這樣,33節所講的公式,和習題十二的16,17兩題,無論 x 角的度數怎樣,左右兩邊總是相等,所以是恆等式.除了基本公式用函數的定義直接證明以外,通常的三角恆等式,要用函數間的關係來證明他的兩邊相等.

例一. 證明 $\sec x-\tan x\sin x=\cos x$.

[證] $\sec x-\tan x\sin x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\sin x$

[反商函數關係和公式2]

$$=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\cos x} \qquad [公式1]$$

$$=\cos x$$

例二. 證明 $\tan x+\cot x=\sec x\csc x$

[證]　$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$　[公式2和反商函數關係]

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}$$

$$=\frac{1}{\cos x\sin x}\qquad [公式1]$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$=\sec x\cdot\csc x.\qquad [反商函數關係]$$

[註]　要是左邊比右邊來得繁,也可以從右邊化到左邊;有時可化左右兩邊各等於第三式.

36. **簡易三角方程式**　一個三角的等式,用幾個特別數值代入才能成立的,叫做三角方程式.三角方程式像代數的方程式一樣要解出未知數的數值來,不過除了用代數的解法以外,隨時要應用函數的關係,來把幾種函數化成一種,才可以解.

例一.　解方程式　$3\tan^2 x-\sec^2 x=1.$

[解]　$$3\tan^2 x-\sec^2 x=1,$$

$$3\tan^2 x-1-\tan^2 x=1.$$

$$2\tan^2 x=2.$$

$$\tan^2 x=1.$$

$$\tan x=1.$$

$$\therefore\quad x=45°.$$

［註］銳角的函數都是正值,所以開平方的時候只取主根,但照任意角的函數講,負根也可以用（看附錄）

例二. 解方程式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2.$

［解］ $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2.$

$$\sqrt{1-\cos^2 x}=2-\sqrt{3}\cos x.$$

$$1-\cos^2 x=4-4\sqrt{3}\cos x+3\ cox^3\ x.$$

$$4\cos^2 x-4\sqrt{3}\cos x+3=0.$$

$$\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)^2=0.$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad x=30°.$$

習題十三

證明下面的三角恆等式:

1. $\tan x=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.　2. $\tan x=\dfrac{\sqrt{\ -\cos^2 x}}{\cos x}$

3. $\tan x=\sqrt{\sec^2 x-1}$ 4. $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$.

5. $\cot x=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$. 6. $\cot x=\sqrt{\csc^2 x-1}$.

7. $\sec x=\sqrt{1+\tan^2 x}$ 8. $\csc x=\sqrt{1+\cot^2 x}$.

9 $\sin x=\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$. 10. $\cos x=\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

11. $\tan x\cos x=\sin x$.

12. $\cos^2 x+2\sin^2 x=1+\sin^2 x$.

13. $\cot^2 x=\cos^2 x+\cos^2 x\cot^2 x$.

14. $\cot^2 x\sec^2 x=1+\cot^2 x$.

15. $\sec^2 x+\csc^2 x=\sec^2 x\csc^2 x$.

解下面的三角方程式:

16. $2\cos x=\sec x$. 17. $4\sin x=\csc x$

18. $\sin^2 x=3\cos x$. 19. $2\sin^2 x+\cos^2 x=\dfrac{3}{2}$.

20. $\tan x+\cot x=2$. 21. $\tan x=2\sin x$

22. $\sec x=\sqrt{2}\tan x$. 23. $\sin^2 x-\cos x=\dfrac{1}{4}$

24. $\tan^2 x+\csc^2 x=3$. 25. $2\cos x+\sec x=3$.

26. $2\sin x+\cot x=1+2\cos x$

27. $\sin^2 x+\tan^2 x=3\cos^2 x$

28. $\tan x+2\cot x=\frac{5}{2}\csc x$.

雜　題　四

求下面各式的值:

1. $\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$.

2. $\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ$.

3. $\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$　　4. $\dfrac{1+\cot 45^\circ\cot 30^\circ}{\cot 30^\circ+\cot 45^\circ}$

5. $2\tan 30^\circ+\cot 30^\circ-2\sin 60^\circ-\sec 30^\circ$.

6. $\tan(45^\circ+x)=\cot x$; 求 x 角的度數.

7. $\cos 4x=\sin x$, 求 x 角的度數.

8. $\cot A=\tan nA$, 求 A.

9. 已知 $\sec x=2\frac{1}{3}$, 求x角的另外五種函數值:

10. 用 $\cos A$ 來表明 $\tan^2 A+\cot^2 A$.

證明下面的恆等式:

11. $\cos A\csc A=\cot A$.

12. $\sin^2 B+\tan^2 B=\sec^2 B-\cos^2 B$.

13. $\cos^4 C-\sin^4 C=2\cos^2 C-1$.

14. $\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x\cos^2 x$.

15. $\dfrac{\cos y}{1-\tan y}+\dfrac{\sin y}{1-\cot y}=\sin y+\cos y.$

16. $\dfrac{\sin z}{1+\cos z}+\dfrac{1+\cos z}{\sin z}=2\csc z$

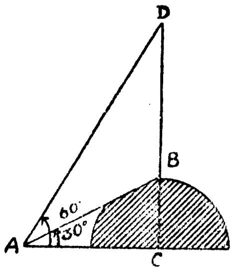
17. 已知 $2\sin x=\cos x$, 求 $\sin x$ 和 $\cos x$.

18. 已知 $5\sin x=\tan x$, 求 $\cos x$ 和 $\sec x$.

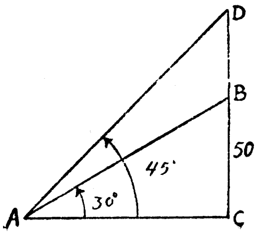
19. 已和 $(\sin x+\cos x)^2-1=(\sin x-\cos x)^2+1$, 求 x.

20. 解方程式 $\sin x-\csc x+1.5=0$, 先求 $\sin x$, 再求 x 的度數. 問 $\sin x$ 的兩個根都適合嗎?

21. 一竿 BD 立在土阜 BC 的頂上, 從地面上 A 點測得竿頂和竿足的仰角是 60° 和 30°. 證明竿長等於阜高的二倍.



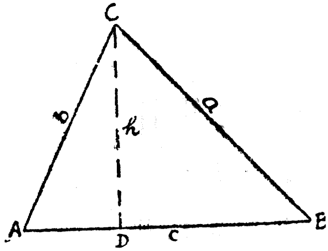
22. 一根旗竿 BD 立在 50 尺高的屋頂上, 從地面上 A 點測得 B, D 兩點的仰角是 30° 和 45°. 求旗竿的長和從測點到屋的距離.



第五章

斜角三角形的解法和應用問題

37. 正弦定律 斜角三角形的解法,除了已知三邊以外,都要用到下面的重要定律,叫做正弦定律.



假設$\angle A, \angle B, \angle C$都是銳角,從$\triangle ABC$的頂點$C$到底邊$AB$,作垂線$CD$,那末

在直角三角形ACD裏,$\frac{h}{b}=\sin A$;

在直角三角形BCD裏,$\frac{h}{a}=\sin B$;

$$\therefore\quad \frac{\frac{h}{b}}{\frac{h}{a}}=\frac{\sin A}{\sin B},\qquad 就是\ \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

照同樣的理,$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$, $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$.

所以三角形任意兩邊的比等於他們的對角正弦的比這就是正弦定律.

上面的三個公式,照比例的理可以寫做

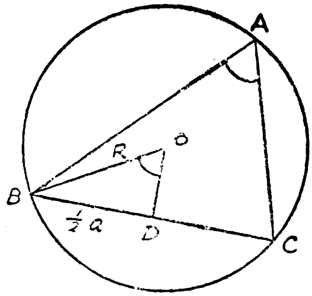
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\text{和}\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

聯合起來,就是 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

所以三角形的任意一邊和他的對角正弦的比都相等.

三角形一邊和對角正弦的比,既然都相等,必有一定的數值,那末他的線值怎樣,我們要加以研究.

這三個等比的值等於外接圓的直徑,可用右面的圖來證明:



ABC 是一個三角形,O 是外接圓的圓心 $OD\perp BC$, 那末 $OB=R$ 是外接圓的半徑, $BD=\frac{1}{2}a$.　$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC=A$.

在直角三角形 BOD 裏面, $\sin BOD=\frac{BD}{OB}$.

$$\therefore\ \sin A=\frac{\frac{1}{2}a}{R}=\frac{a}{2R}.$$

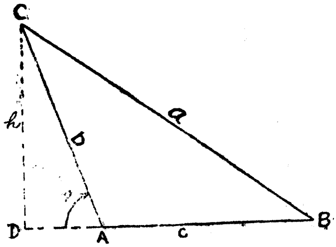
$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=2R,$$

但 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

所以**三角形的任意一邊和他的對角正弦的比等於外接圓的直徑.**

38. 鈍角的三角函數 從前講過的三角函數定義,限定那角一定是銳角.但是斜角三角形裏,可以含有鈍角.我們且看,如果有一鈍角,正弦定律有什麼影響.



如果 A 是鈍角,那末

$$\frac{h}{b}=\sin(180^\circ-A)$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{\sin(180^\circ-A)}{\sin B}$$

正弦定律,便變為 $\dfrac{a}{\sin(180^\circ-A)}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

可見要想正弦定律的形式對於含有一鈍角的情形,仍舊不變.只要設立下面的

規定．如果A是鈍角，那末他的正弦就是他的補角的正弦，就是在

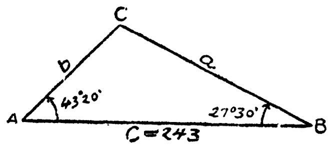
$$180^\circ > A > 90 \text{ 時} \qquad \sin A = \sin(180^\circ - A)$$

所以A是鈍角，正弦定律仍舊不變，不過計算的時候，在表裏檢出$(180^\circ - A)$的正弦來代替A的正弦就行．

［註］　等到廣義的三角函數定義（看附錄）設立以後，這條規定，便可證明，并且不拘A是那一種角，都能成立，在這裏鈍角的三角函數意義還未設立，所以只能視作一種規定．

39，已知兩角和夾邊的解法［問題］

已知$A=43^\circ20'$，$B=27^\circ30'$，$c=243$，求C,a，和b．



(1)　$C = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (43^\circ20' + 27^\circ30')$

$= 180^\circ - 70^\circ50' = 109^\circ10'$．

(2)　照正弦定律，

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \qquad \therefore \quad a = \frac{c \sin A}{\sin C}.$$

$$\log c = 2.3856$$

$$\log \sin A = 9.8365 - 10$$

$$\underline{\operatorname{colog} \sin C = 0.0248}$$

$$\log a = 2.2469$$

$$\therefore \quad a = 176.57.$$

(3) 照正弦定律,

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \therefore \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C}.$$

$$\log c = 2.3856$$

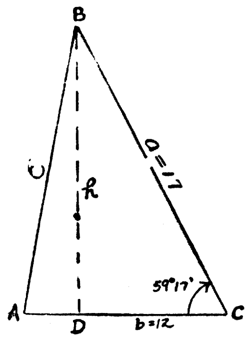
$$\log \sin B = 9.6644 - 10$$

$$\underline{\operatorname{colog} \sin C = 0.0248}$$

$$\log b = 2.0748.$$

$\therefore \quad b = 111.63.$

[註] $\log \sin C$ $= \log \sin 109°10'$ $= \log \sin 70°50' =$ $9.9752 - 10.$



40. 已知兩邊和夾角的解法

[問題] 已知 $a = 17$, $b = 12$, $C = 59°17'$, 求 A, B 和 c.

(1) 從 B 做 AC 的垂線 BD. 那末

$$\tan A=\frac{BD}{AD}=\frac{h}{b-DC}.$$

$$\frac{h}{a}=\sin C, \quad \therefore \quad h=a\sin C.$$

$$\frac{DC}{a}=\cos C, \quad \therefore \quad DC=a\cos C.$$

$$\therefore \quad \tan A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}$$

$$b-a\cos C=12-17\cos 59°17'=12-17\times 0.5108$$

$$=12-8.6836=3.3164.$$

$$\log a=1.2304$$

$$\log\sin C=9.9344-10$$

$$\operatorname{colog} 3.3164=\underline{9.4793-10}$$

$$\log\tan A=0.6441$$

$$\therefore \quad A=77°13'.$$

(2) $B=180°-(A+C)=180°-(77°13'+59°17')$

$$=180°-136°30'=43°30'.$$

(3) $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A} \quad \therefore \quad c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}.$

$$\log a=1.2304$$

$$\log\sin C=9.9344-10$$

$$\operatorname{colog}\sin A=\underline{0.0109}$$

$$\log c=1.1757$$

$\therefore\quad c=14.99.$

［註一］ 如果 c 是鈍角, $\cos C=-\cos(180^\circ-C)$. (看附錄)

［註二］ 分母 $b-a\cos C$ 要先算出，才好用對數，所以沒有像用正切定律（見本章第45節）來得便利.

41. 已知兩角和一角對邊的解法

［問題］ 已知 $A=47°40'$, $B=65°10'$, $a=176$, 求 C, a, 和 b.

(1) $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(47^\circ40'+65^\circ10')$

$$=180^\circ-112^\circ50'=67^\circ10'.$$

(2) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$, $\quad\therefore\quad b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$.

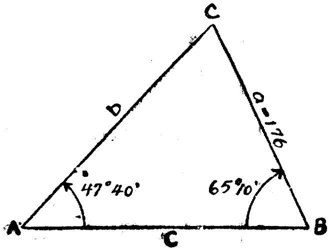
$$\log a=2.2455$$

$$\log\sin B=9.9579-10$$

$$\text{colog}\sin A=0.1312$$

$$\log b=2.3346.$$

$\therefore\quad b=216.1.$



(3) $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}$

$\therefore\quad c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$

$$\log a = 2.2455$$

$$\log \sin C = 9.9646 - 10$$

$$\text{colog} \sin A = \underline{0.1312}$$

$$\log c = 2.3413.$$

$$\therefore \quad c = 219.4$$

習題十四

求下面的函數值：(1—6)

1. $\sin 165°10'$.　　2. $\sin 112°25'$.

3. $\sin 134°20'$.　　4. $\cos 105°35'$.

5. $\cos 147°30'$.　　6. $\cos 128°44'$.

求下面的對數和餘對數：(7—12)

7. $\log \sin 99°15'$.　　8. $\log \sin 127°43'$.

9. $\log \sin 148°46'$.　　10. $\text{colog} \sin 108°35'$.

11. $\text{colog} \sin 156°18'$.　　12. $\text{colog} \sin 161°45'$.

解斜角三角形 ABC, 已知：

13. $A = 39°30'$,　$B = 62°50'$,　$c = 96$.

14. $A = 31°17'$,　$B = 40°52'$,　$c = 112$.

15. $B = 71°25'$,　$C = 62°50'$,　$a = 274$.

16. $A = 53°45'$,　$C = 70°35'$,　$b = 9.8$ 公寸.

17. $A = 47°36'$,　$B = 58°26'$,　$a = 76$.

18. $A = 52°14'$,　$B = 102°7'$.　$b = 214$.

19.　$B=38°27'$,　$C=79°20'$,　$b=67$.

20.　$A=50°6'$.　$C=98°25'$.　$a=118$ 公寸.

21.　$a=100$　$b=900$,　$C=65°$,

22.　$a=55.14$,　$b=33.09$,　$C=30°24'$.

23.　$b=210$,　$c=105$,　$A=36°52'$.

24.　$a=872.5$ 寸,　$c=632.7$ 寸,　$B=80°$.

25. 如果斜角三角形裏,有一個鈍角,正弦定律裏各比的值,還能等於這三角形的外接圓直徑麽?

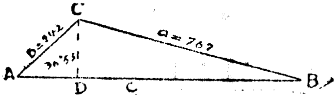
26. 三角形的底邊是 600 公尺,兩個底角是 30° 和 120°,求另外的兩邊和高.

27. 三角形三角的比是 5:10:21,最小角的對邊是 3,求另外的兩邊.

28. 已知平行四邊形的對角線 d,他和兩邊所成的角是 x 和 y,求邊.　如果 $d=11.2$ 尺,$x=19°$, $y=43°$,問各邊長幾尺?

42. 已知兩邊和一邊對角的解法

[問題] 已知 $a=767$, $b=242$, $A=36°53'$, 求 B,C, 和 c.



（1）　照正弦定律

$$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a},\quad \therefore\quad \sin B=\frac{b\ \sin A}{a}$$

$$\log b=2.3838$$

$$\log \sin A=9.7783-10$$

$$\underline{\operatorname{colog} a=7.1152-10}$$

$$\log \sin B=9.2773-10$$

$$\therefore\quad B=10°55'.$$

(2) $C=180°-(A+B)=180°-(36°53'+10°55')$

$$=180°-47°48'=132°12'.$$

(3) 照正弦定律,

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A},\quad \therefore\quad c=\frac{a\ \sin C}{\sin A}$$

$$\log a=2.8848$$

$$\log \sin C=9.8697-10$$

$$\underline{\operatorname{colog} \sin A=0.2217}$$

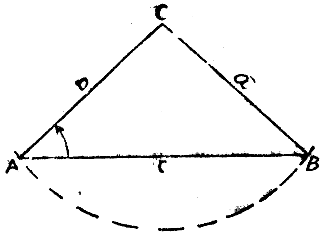
$$\log c=2.9762.$$

$$\therefore\quad c=946.7.$$

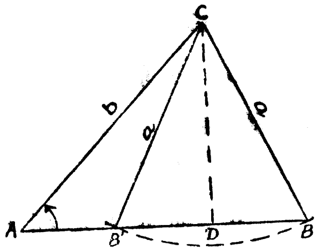
43. 解法的討論 上節的三角形裏面,如果 a 比 b 小, a 比垂線 CD 大,那末就有兩個三角形都合題意;如果 a 比垂線 CD 小,那末這題就不能解.所以已知兩邊和一邊對角的時候,先要把解

法討論一下:

1. 照上節的例, A 是銳角, $a>b$, 只有一個三角形 ABC.



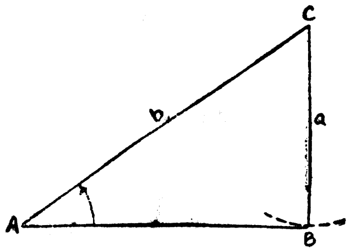
2. 照右邊的圖, 如果 A 是銳角, $a=b$, 那末用 C 做圓心, 用 A 做半徑畫弧, 一定通過 A 點, 只有一個等腰三角形 ABC.



3. A 是銳角, $a<b$, 照右邊的圖 $\frac{CD}{b}=\sin A$.

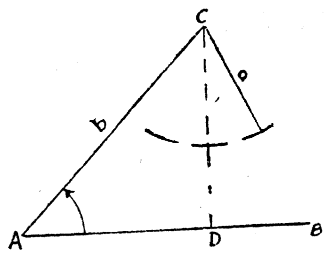
$\therefore\ CD=b\sin A.$

(a) 如果 $a>b\sin A$. 那末用 C 做圓心, 用 a 做半徑畫弧, 在 AB 上得着兩個交點 B 和 B', 所以有兩個三角形 $AB'C$ 和 $AB'C$

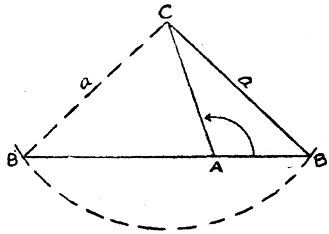


(b) 照右邊的圖, 如果 $a=b\sin A$, 那末所畫的弧和 AB 在 B 點相切, 只有一個直角三角形 ABC.

(c) 照右邊的圖如果 $a<b\sin A$，那末所畫的弧和 AB 沒有交點，就是沒有三角形可以解出來.



4. 如果 A 是鈍角，$a>b$，那末照右邊的圖，銳角三角形 $AB'C$ 不合題意，所以只有一個三角形 ABC.



5. 如果 A 是鈍角，$a=b$，那末照幾何學所講，$A=B$，但是一個三角形不會有兩個鈍角，所以沒有三角形可解.

6. 如果 A 是鈍角，$a<b$，那末照幾何學 $B>A$，但 A 是鈍角，B 比 A 大，至少也是鈍角，但三角形 ABC 不會有兩個鈍角，所以也不能解.

上面討論的結果，可以列成下面的表：

$$A\text{是銳角}\begin{cases} a>b,\ \text{有一解.} \\ a=b,\ \text{有一解.}\quad(\text{等腰三角形}) \\ a<b,\begin{cases} a>b\sin A,\ \text{有二解.} \\ a=b\sin A,\ \text{有一解.}\ (\text{直角三角形}) \\ a<b\sin A,\ \text{不能解.} \end{cases} \end{cases}$$

$$A\text{是鈍角}\begin{cases} a>b, \text{有一解.} \\ a=b, \text{不能解.} \\ a\angle b, \text{不能解.} \end{cases}$$

看上面的表,在A是銳角$a\angle b$的時候,最要注意,因爲他沒有像另外的來得明顯.如果$b\sin A$容易算出來,就可以和a比較大小;如果求$b\sin A$的計算很繁,暫時把這題當做可解的題,算出$\sin B$的數值來;

(a)　若$\sin B\angle 1$或是$\log\sin B\angle 0$,是有二解.照3(a)的圖求出$B'=180°-B$,$\angle ACB'=B-A$,再求出AB',就是第二個三角形的所求的部分.

(b)　若$\sin B=1$或是$\log\sin B=0$,只有一解.因爲B是直角,所以$c=b\cos A$.

(c)　若$\sin B>1$或是$\log\sin B>0$,那就不能解.

例一. 已知$a=36$,$b=80$,$A=30°$,求解三角形ABC.

[解]　$b\sin A=80\sin 30°=80\times\frac{1}{2}=40$.　$a\angle b$

$a \angle b \sin A$, 所以不能解.

例二. $a=25$, $b=50$, $A=30°$, 求解三角形 ABC.

[解] $b \sin A=50 \sin 30°=50\times\frac{1}{2}=25$.

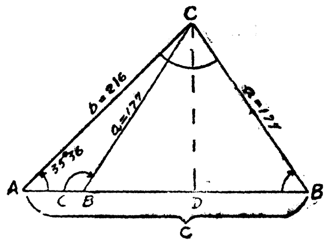
$a \angle b$, $a=b \sin A$, 所以 ABC 是直角三角形, 只有一解.

(1) $B=90°$.

(2) $C=90°-A=60°$.

(3) $c=b \cos A=50 \cos 30°=50\times 0.866=43.3$.

例三. 已知 $a=117$, $b=216$, $A=35°36'$, 求解三角形 ABC.



[解] 照42節的例,

(1) $\sin B=\dfrac{b \sin A}{a}$

$$\log b=2.3345$$

$$\log \sin A=9.7650-10$$

$$\operatorname{colog} a=\underline{7.7520-10}$$

$$\log \sin B=9.8515-10$$

$$\therefore\ B=45°16'.$$

$$或\ B'=134°44'$$

(2)　$C=180°-(A+B)=180°-80°52'=99°8'$.

或 $C'=B-A=45°16'-35°36'=9°40'$.

(3)　$C=\dfrac{a\ \sin\ c}{\sin\ A}$

$\log\ a=2.2480$

$\log\sin C=9.9944-10$

$\underline{\text{colog}\ \sin\ A=0.2350}$

$\log c=2.4774.$

$\therefore\quad c=300.2$

$c'=\dfrac{a\ \sin\ C'}{\sin A}$.

$\log\ a=2.2480$

$\log\ \sin\ C'=9.2251-10$

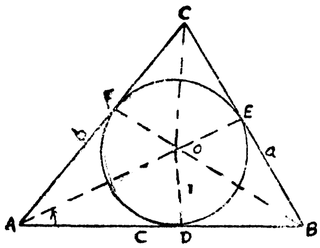
$\underline{\text{colog}\ \sin\ A=0.2350}$

$\log c'=1.7081$

$\therefore\quad c'=51.06.$

44. 已知三邊的解法

已知斜角三角形的三邊，要求三角，可以用下面的公式先求半角。



在上面的三角形 ABC 裏面，O 是內切圓的圓心，$OD=OE=OF=r$ 是內切圓的半徑，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 是三角形三邊的半和。

照幾何學所講，$\triangle ABC$ 的面積$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs$，如果用三邊來表明，$\triangle ABC$ 的面積

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$$\therefore\quad rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\therefore\ r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}},$$

就是 $$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

再看上面的圖，$AD=AF$, $BE=BD$, $CE=CF$.

$$\therefore\ AD+BE+CE=\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

就是 $AD+a=s$, $\therefore\ AD=s-a$

$\angle OAD$ 是 A 角的一半，所以在直角三角形 OAD 裏面，

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\frac{OD}{AD},\qquad \therefore\ \tan\tfrac{1}{2}A=\frac{r}{s-a}.$$

照同樣的理，可以推得 $\tan\frac{1}{2}B=\frac{r}{s-b}$.

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\frac{r}{s-c}.$$

例 已知 $a=34$, $b=26$, $c=16$, 求解三角形 ABC.

［解］ $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$. $\tan\frac{1}{2}A=\frac{r}{s-a}$

$\tan\frac{1}{2}B=\frac{r}{s-b}$, $\tan\frac{1}{2}C=\frac{r}{s-c}$,

$a=34$	$\log(s-a)=0.6021$
$b=26$	$\log(s-b)=1.0792$
$c=16$	$\log(s-c)=1.3424$

$2s=76$　　　　$colog\ s=8.4202-10$

$s=38$　　　　$log\ r^2=1.4439$

$s-a=4$　　　　$log\ r=0.7220$

$s-b=12$

$s-c=22$

$$\log\tan\tfrac{1}{2}A=0.1199$$

$$\log\tan\tfrac{1}{2}B=9.6428-10$$

$$\log\tan\tfrac{1}{2}C=9.3796-10$$

$$\tfrac{1}{2}A=52°49',\quad A=105°38';$$

$$\tfrac{1}{2}B=23°43',\quad B=47°26';$$

$$\tfrac{1}{2}C=13°28',\quad C=26°56';$$

[核算]　$A+B+C=180°\ 0'$

[註] C角本來可以從 $180°-(A+B)$ 求出來，不過也由公式算出來，可以核算有沒有錯誤或是不準確的地方，以便改正。

習題十五

問下面的三角形有幾解？　(1－6)

1. 已知 $a=80,\quad b-100,\quad A=30°.$
2. 已知 $b=50,\quad c=100,\quad B=30°.$
3. 已知 $c=40,\quad a=100,\quad C=30°.$

4. 已知 $a=100$, $b=100$, $A=30°$.

5. 已知 $a=200$, $b=100$, $A=30°$.

6. 已知 $b=746$, $c=534$, $B=96°40'$.

解斜角三角形 ABC, 已知: (7—18)

7. $a=840$, $b=485$, $A=21°31'$.

8. $a=9.4$, $b=9.1$, $A=120°35'$.

9. $a=309$, $b=360$, $A=21°14'$.

10. $a=4.4$, $c=5.21$, $A=57°37'$.

11. $b=29$, $c=21.6$, $C=25°36'$

12. $a=78$ 公尺, $b=107$ 公尺, $B=56°18'$.

13. $a=34$ 尺, $b=22$ 尺, $B=30°20'$

14 $a=43$, $b=50$, $c=57$.

15. $a=91$, $b=82$, $c=73$.

16. $a=78$, $b=101$, $c=29$.

17. $a=21$ 公尺, $b=28$ 公尺, $c=35$ 公尺.

18. $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{7}$.

19. 一個三角形的三邊是481, 612, 和 544, 求最小的角.

20. 三角形的三邊是14.6寸, 16.7寸, 和1.88寸, 求從最大角的頂點到對邊的高.

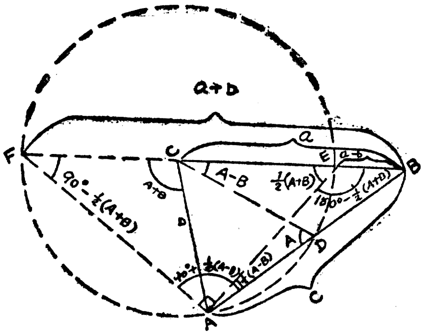
21. 已知 $a=75$, $b=29$, $B=16°15'$, 求解出來的兩個三角形面積的差.

22. $ABCD$ 是一個平行四邊形, $AB=2$ 寸, $AC=3$ 寸, $AD=2.5$ 寸, 求 $\angle ABC$.

23. $ABCD$ 是一個平行四邊形, 已知 $AD=3$ 公寸, $BD=25$ 公分, $A=47°20'$, 求 AB.

24. A, B, C 三個鎮, A 距 B 200 里, 距 C 184 里, B 在 C 的北面 150 里. 問 A 在 C 的北面幾里?

45. 正切定律 已知兩邊和夾角,解斜角三角形,40 節的解法不能適用對數,如果完全用對數來算,就要用到正切定律.



ABC 是一個三角形,用 C 做圓心 b 做半徑畫圓,那末應用幾何定理照上面的圖,因為 $CA=CE=CF$, $\therefore$ $BF=a+b$, $BE=a-b$.

照三角形的外角和內對角的關係, $\angle ACF=A+B$, 又因 $\angle CDA=A$, $\therefore$ $\angle BCD=A-B$.

因為同弧的圓周角等於圓心角的一半，

$\therefore \angle AEC=\frac{1}{2}(A+B)$, $\angle AEB=180^\circ-\frac{1}{2}(A+B)$, $\angle BAE=\frac{1}{2}(A-B)$.

又因$\angle EAF$是直角，$\therefore\ \angle F=90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)$.

$$\angle BAF=90^\circ+\frac{1}{2}(A-B).$$

在三角形ABF裏面，照正弦定律，$\dfrac{BF}{AB}=\dfrac{\sin BAF}{\sin F}$,

就是
$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\left[90^\circ+\frac{1}{2}(A-B)\right]}{\sin\left[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)\right]}.$$

但是$\sin(90^\circ+x)=\sin\left[180^\circ-(90^\circ+x)\right]=\sin(90^\circ-x)$
$=\cos x$.

$$\therefore\quad \sin\left[90^\circ+\tfrac{1}{2}(A-B)\right]=\cos\tfrac{1}{2}(A-B).$$

又
$$\sin\left[90^\circ-\tfrac{1}{2}(A+B)\right]=\cos\tfrac{1}{2}(A+B).$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}. \qquad (1)$$

在三角形ABE裏面，照正弦定律，$\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sin BAE}{\sin AEB}$.

就是
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\left[180^\circ-\frac{1}{2}(A+B)\right]}$$

$$\therefore\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} \qquad (2)$$

用(2)去除(1)，$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\ \cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)\ \sin\frac{1}{2}(A-B)}$

$$=\tan\tfrac{1}{2}\ (A+B)\ \cot\tfrac{1}{2}\ (A-B)$$

但是　$$\cot\tfrac{1}{2}\ (A-B)=\frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}\ (A+B)}{\tan\frac{1}{2}\ (A-B)}.$$

照同樣的理，$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+C)}{\tan\frac{1}{2}(A-C)},$$

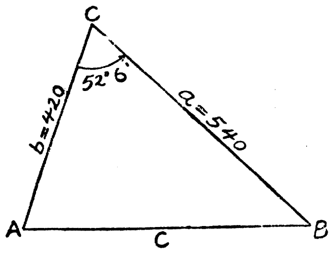
所以**三角形任兩邊的和比這兩邊的差，等於對角半和的正切比對角半差的正切**，這就是正切定律，在解直角三角形的時候，可以把上式寫做

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\tan\tfrac{1}{2}(A+B).$$

因爲 $A+B=180^\circ-C$，$\therefore$ $\frac{1}{2}(A+B)$ 可以從已知的 C 角算出來，等到從正切的對數求出 $\frac{1}{2}(A-B)$ 以後，那末

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)\ ;\ B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B).$$

例．已知 $a=540$，$b=420$，$C=52^\circ6'$，求 A，B，和 c



[解] $a+b=540+420$

$=960.$

$a-b=540-420=120.$

$\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(180°-C)=$

$\frac{1}{2}(180°-52°6')=63°57'.$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{1}{2}(A+B).$$

$$\log(a-b)=2.0792$$

$$\operatorname{colog}(a+b)=7.0177-10$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A+B)=\underline{0.3108\quad}$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=9.4077-10$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(A-B)=14°21'.$$

$$\therefore A=78°18'.$$

$$B=49°36'.$$

應用正弦定律, $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$, $\therefore$ $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$.

$$\log a=2.7324$$

$$\log\sin C=9.8971-10$$

$$\operatorname{colog}\sin A=\underline{0.0091\quad}$$

$$\log c=2.6386$$

$$\therefore\quad c=435.1$$

［註］用來解斜角三角形的，還有餘弦定律，因爲不適於用對數來算，留在附錄裏講.

46. 核算的公式

除了已知三邊的解法只要把求出來的角加起來就好核算以外，另外的解法最好用下面的公式來核算.

上節的（1）和（2）兩式是$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$,

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},$$

但是 $\frac{1}{2}(A+B+C)=90°$, $\therefore\ \frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$.

$$\therefore\ \cos\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos(90°-\tfrac{1}{2}C)=\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\sin(90°-\tfrac{1}{2}C)=\cos\tfrac{1}{2}C.$$

所以

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}, \qquad (1)$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}, \qquad (2)$$

上面的兩式是解斜角三角形核算的公式，因爲三角形的邊和角都包含在一個公式裏面，所以隨便用一式去核算，如果有錯誤總可以驗出來.

習題十六

用正弦定律來解下面的三角形，已知：(1－12)

1. $A=38^\circ$, $B=77^\circ10'$, $a=10$.

2. $A=35^\circ15'$, $C=123^\circ39'$, $c=161$.

3. $B=52^\circ20'$, $C=101^\circ40'$, $b=.8037$.

4. $A=36^\circ8'$, $B=42^\circ87'$, $c=.032$.

5. $A=87^\circ40'$, $C=33^\circ15'$. $b=29.01$.

6. $B=32^\circ3'$, $C=43^\circ25'$, $a=7.86$.

7. $b=3069$, $c=1223$, $C=55^\circ52'$.

8. $a=5.08$, $b=3.59$, $A=63^\circ50'$.

9. $a=8.656$, $c=10$, $A=59^\circ57'$.

10. $a=107$, $c=171$, $C=31^\circ53'$.

11. $a=62.2$, $b=74.8$, $A=27^\circ18'$.

12. $a=214,56$, $b=284.79$, $B=104^\circ20'$.

13. 用48節的公式來核算, 1, 4, 7 三題的結果.

用正切定律來解下面的三角形,已知:(14—21)

14. $a=8$, $b=6$, $C=60^\circ$.

15. $b=12$, $c=4\sqrt{3}$, $A=30^\circ$.

16. $a=8$, $c=3\sqrt{2}$, $B=45^\circ$.

17. $a=27$, $b=15$, $C=46^\circ$.

18. $a=486$, $c=347$, $B=51^\circ36'$

19. $b=77.99$,　　$c=83.39$,　　$A=72°16'$.

20. $a=3$ 尺,　　$b=3$尺6寸3分,　$C=124°56'$.

21. $b=\sqrt{5}$,　　$c=\sqrt{3}$,　　$A=35°53'$.

22. 用 48 節的公式來核算 19 和 20 兩題的結果.

23. 從沿岸 A 和 B 兩點, 都能看見海裏的船 S, 測得 $AB=80$ 公尺, $\angle SAB=67°43'$, $\angle SBA=74°21'$, 求從船到 A 的距離.

24. 從地面上相隔 50 公尺的兩點, 同時測得在縱直面裏一個飛機的仰角是 $55°$ 和 $58°$, 求從飛機到這兩點的距離,和飛機的高.

25. 從 B 到 C 的距離是 145 呎, 從 A 到 C 是 178 呎, 測得 $\angle ABC=41°10'$. 求從 A 到 B 的距離.

26. 平行四邊形的一邊長 3 寸 5 分, 一對角線長 6 寸 3 分, 二對角線所成的角是 $21°37'$, 求另一對角線的長.

27. 平行四邊形的兩個對角線的長是 5 寸和 6 寸, 兩對角線所成的角是 $49°18'$, 求邊的長.

28. 兩列火車同時從同站開出, 兩條直的軌道成 $30°$ 的角, 他們的速度是每時 30 哩和每時 40

哩.問經半時後兩車相隔幾哩?

47. 三角形的面積 三角形的面積在幾何學裏都用線的乘積來表明,現在既然曉得邊角的關係,那末也可以用邊和角來表明,不過在44節裏用到的已知三邊求積的公式,本來用不着角,雖也可用三角的方法求出來,却和幾何的公式一樣,所以就把他列在下面.

1. 已知三邊求面積.

用S來表三角形ABC的面積,$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

那末 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

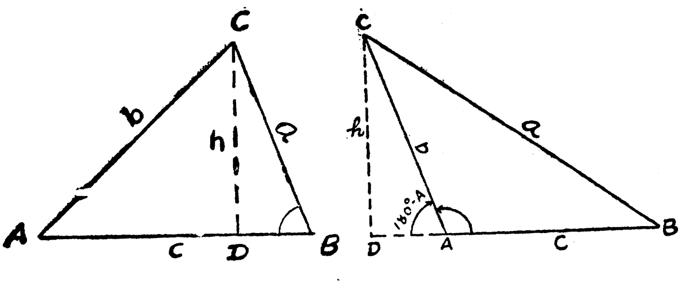
例一. 已知$a=13$, $b=14$, $c=15$,求S.

[**解**] $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=21$, $s-a=8$, $s-b=7$, $s-c=6$.

$$\therefore\ S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{21\times 8\times 7\times 6}=84.$$

[**註**] 如果是不容易開方的數,可以用對數來算.

2. 已知兩邊和夾角求面積.



(1)　　　　(2)

S 是三角形 ABC 的面積，h 是高，那末照幾何學講

$$S=\frac{1}{2}ch.$$

照圖 (1)，　$\dfrac{h}{b}=\sin A,$

照圖 (2)，　$\dfrac{h}{b}=\sin(180°-A)=\sin A.$

$$\therefore\quad h=b\sin A.$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

照同樣的理，　$S=\frac{1}{2}ac\sin B$；

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

所以三角形的面積等於兩邊和夾角正弦乘積的一半.

例二. 已知 $a=31.2$,　$b=17.9$,　$C=69°18'$. 求 S.

[**解**]　　$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$

$$\begin{aligned}
colog\ 2 &= 9.6990-10\\
\log a &= 1.4942\\
\log b &= 1.2529\\
\log \sin C &= \underline{9.9710-10}\\
\log S &= 2.4171\\
\therefore\quad S &= 261.3
\end{aligned}$$

3. 從其他已知部分求面積.

除了已知三邊同已知兩邊和夾角以外,只要應用正弦定律從已知部分再求一邊或一角,就可以用已知兩邊和夾角的公式求出面積來.

例三 已知 $a=26$, $b=19$, $A=112°40'$, 求 S.

[解] $\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{b}{a}$, $\therefore\ \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$.

$$\begin{aligned}
\log b &= 1.2788\\
\log \sin A &= 9.9651-10\\
colog\ a &= \underline{8.5850-10}\\
\log \sin B &= 9.8289-10\\
\therefore\quad B &= 42°24'.
\end{aligned}$$

$C=180°-(A+B)=24°56'$.

$$\begin{aligned}
S &= \tfrac{1}{2}ab\sin C.\\
colog\ 2 &= 9.6990-10\\
\log a &= 1.4150\\
\log b &= 1.2788\\
\log \sin C &= \underline{9.6248-10}\\
\log S &= 2.0176\\
\therefore\quad S &= 104.2
\end{aligned}$$

習題十七

求下面三角形的面積，已知：(1－17)

1. $a=3.9$,　$b=5.2$,　$c=6.5$.

2. $a=40$,　$b=13$,　$c=37$.

3. $a=624$ 步，$b=205$ 步，$c=445$ 步，求畝數.

4. $a=27$,　$b=32$,　$C=40°$.

5. $a=35$,　$b=43$,　$C=37°$.

6. $a=4.8$,　$c=5.3$,　$B=39°27'$.

7. $b=48.35$,　$c=64.32$,　$A=62°37'$

8. $b=423.9$ 丈，$c=417.8$ 丈，$A=68°27'$，求畝數.

9. $a=7$,　$c=3$,　$A=60°$.

10. $a=216$,　$b=186$,　$A=122°10'$.

11. $a=140$丈5尺，$b=170$丈6尺，$A=40°$，求畝數.

(兩解)

12. $a=17$,　$B=48°$,　$C=52°$.

13. $b=483.7$,　$A=84°32'$,　$C=78°49'$.

14. $c=296$丈3尺，$A=58°35'$,　$B=42°36'$，求畝數.

15. $A=70°27'$,　$B=50°13'$,　$a=26.7$.

16. $B=36°15'$,　$C=99°2$,　$b=14.6$.

17. $A=47°26'$.　$B=76°10'$,　$a=892$ 步，求畝數.

18. 已知三邊 a, b, c, 外接圓半徑 R, 證明三角形 ABC 的面積 $S=\frac{abc}{4R}$. 如果 $a=2.4$, $b=3.2$, $c=4$, $R=2$, 求 S.

19. 三角形的兩邊是 18.37 和 13.44, 夾角是 75° 求面積.

20. 一塊三角形的田, 兩邊是 269 丈和 345 丈, 夾角是 58°27′30″. 問面積是幾畝.

21. 證明平行四邊形的面積等於兩鄰邊和夾角正弦的乘積.

22. 平行四邊形的兩邊是 15.36 丈和 11.46 丈, 角是 47°30′, 求面積的畝數.

23. 證明四角形的面積等於兩對角線和夾角的正弦乘積的一半.

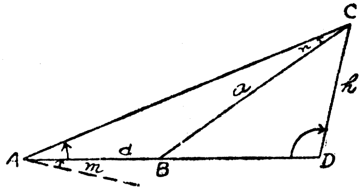
24. 一塊四角形的田, 對角線的長是 340 步和 560 步, 所夾的角是 67°. 問面積有幾畝?

48. 應用問題 關於直角三角形的應用問題已經在第三章裏面講過, 但是有許多問題非用斜角三角形不可, 所以在實際應用上需要斜角三角形的解法.

講到應用問題,實在是千頭萬緒,不過在測量裏面,大概不外測高和測距,下面的幾個例可以做舉一反三的用處.

1. 已經測知傾斜角的斜面上的高.

右圖 AD 是斜面,h 是斜面上目的物的高,m 是已知的傾斜角,A 和 B 是已知角,d 是已知距離,那末



$$n=B-A,\qquad D=90^\circ+m.$$

$$\frac{a}{d}=\frac{\sin A}{\sin n},\qquad \therefore\quad a=\frac{d\sin A}{\sin n}.$$

$$\frac{h}{a}=\frac{\sin B}{\sin D},\qquad \therefore\quad h=\frac{a\sin B}{\sin D}.$$

$$\therefore\quad h=\frac{d\sin A\sin B}{\sin n\sin D}.$$

例一. 建築物在斜面上一點所對的角是 42°17′,從這點往下量到 315 尺的一點,測得對角 21°47′,斜面的傾斜角是 8°53′,求建築物的高.

〔**解**〕 照上圖 $A=21^\circ47'$, $B=42^\circ17'$, $d=31$ 尺,

$$m=8^\circ53'.$$

$\therefore\quad n=B-A=20°30',\quad D=90°+m=98°53'.$

$$h=\frac{d\ \sin\ A\sin B}{\sin n\ \sin\ D}.$$

$$\log d=2.5119$$

$$\log\sin A=9.5695-10$$

$$\log\sin B=9.8279-10$$

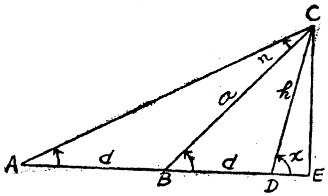
$$\text{colog}\sin n=0.4557$$

$$\text{colog}\sin D=\underline{0.0052\ \ }$$

$$\log h=2.3702$$

$$\therefore\quad h=234.5\text{ 尺}$$

2. 沒有測知傾斜角的斜面上的高.



右圖 AD 是斜面, h 是斜面上目的物的高, A 和 B 是已知角, d 和 d' 是已知距離, $CE\perp AD$ 的引長線, 那末

$$n=B-A.$$

$$\frac{a}{d}=\frac{\sin A}{\sin n},\qquad a=\frac{d\sin A}{\sin n}.$$

$$\frac{CE}{a}=\sin B,\quad\therefore\quad CE=a\ \sin\ B=\frac{d\ \sin A\sin B}{\sin n}$$

$$\frac{BE}{a}=\cos B. \quad \therefore \quad BE=a\ \cos B=\frac{d\ \sin A\ \cos B}{\sin\ n}.$$

$$DE=BE-d'.$$

從 $\tan\ x=\frac{CE}{DE}$ 求得 x 角.

$$\sin\ x=\frac{CE}{h}, \quad \therefore \quad h=\frac{CE}{\sin x}.$$

例二. 距斜面上樹足 40 尺的一點,樹的對角是 41°19′;從這點往下量到 60 尺的一點,樹的對角是 23°45′,求樹高.

[解] 照上圖 $A=23°45'$, $B=41°19'$, $d=60$ 尺, $d'=40$ 尺, $\therefore \quad n=B-A=17°34'$.

$$CE=\frac{d\sin A\sin B}{\sin n}.$$

$$\log d=1.7782$$

$$\log\sin\ A=9.6050-10$$

$$\log\sin\ B=9.8197-10$$

$$\underline{\mathrm{colog}\ \sin\ n=0.5203}$$

$$\log\ CE=1.7232$$

$$\therefore \quad CE=52.87.$$

$$BE=\frac{d\sin A\cos B}{\sin n}.$$

$$\log d = 1.7782$$

$$\log \sin A = 9.6050-10$$

$$\log \cos B = 9.8757-10$$

$$\operatorname{colog} \sin n = \underline{0.5203\quad}$$

$$\log BE = 1.7792$$

$$\therefore \quad BE = 60.14$$

$$DE = BE - d' = 60.14 - 40 = 20.14.$$

$$\tan x = \frac{CE}{DE}.$$

$$\log CE = 1.7232$$

$$\operatorname{colog} DE = \underline{8.6959-10}$$

$$\log \tan x = 0.4191$$

$$\therefore \quad x = 69°9'.$$

$$h = \frac{CE}{\sin x}.$$

$$\log CE = 1.7232$$

$$\operatorname{colog} \sin x = \underline{0.0294\quad}$$

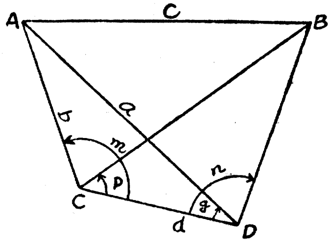
$$\log h = 1.7526$$

$$\therefore \quad h = 56.57 \text{ 尺}.$$

3. 不能接近的兩個目的物中間的

距離。

右圖 A 和 B 是兩個不能接近的目的物，d 是已知距離，$\angle ACD=m$，$\angle BCD=p$，$\angle BDC=n$，$\angle ADC=q$ 都是已知的角，那末



$$\angle ACB=m-p,$$

$$\angle CAD=180^\circ-(m+q),$$

$$\angle CBD=180^\circ-(n+p).$$

$$\frac{a}{d}=\frac{\sin n}{\sin CBD}=\frac{\sin n}{\sin[180^\circ-(n+p)]}=\frac{\sin n}{\sin(n+p)}.$$

$$\therefore\quad a=\frac{d\sin n}{\sin(n+p)}.$$

$$\frac{b}{d}=\frac{\sin q}{\sin CAD}=\frac{\sin q}{\sin[180^\circ-(m+q)]}=\frac{\sin q}{\sin(m+q)}.$$

$$\therefore\quad b=\frac{d\sin q}{\sin(m+q)}.$$

∴ 三角形 ABC 有兩邊 a 和 b，同夾角 $m-p$ 是已知，可以解得第三邊 c 就是所求的距離。

例三. 要從海岸測海裏兩個燈塔 A 和 B 的距離.沿岸量一 400 公尺長的基線,測得$\angle ACD=121°36'$, $\angle BCD=48°56'$, $\angle BDC=110°14'$, $\angle ADC=38°29'$ 求燈塔間的距離.

〔解〕 照上圖 $d=400$ 公尺, $m=121°36'$, $p=48°56'$, $n=110°14'$, $q=38°29'$.

$\therefore \quad n+p=159°10', \quad m+q=160°5',$

$$a=\frac{d \sin n}{\sin(n+p)}. \qquad\qquad b=\frac{d \sin q}{\sin(m+q)}.$$

$$\begin{array}{rlrl} \log d &= 2.6021 & \log d &= 2.6021 \\ \log \sin n &= 9.9723-10 & \log \sin q &= 9.7940-10 \\ \operatorname{colog} \sin (n+p) &= \underline{0.4490} & \operatorname{colog} \sin(m+q) &= \underline{0.4676} \\ \log a &= 3.0234 & \log b &= 2.8637 \end{array}$$

$\therefore \quad a=1055.2$ 公尺 $\qquad \therefore \quad b=730.7$ 公尺.

$$C=m-p=72°40'.$$

$a+b=1785.9, \quad a-b=324.5, \quad A+B=107°20',$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}(A+B)=53°40'$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\tan \tfrac{1}{2}(A+B).$$

$$\log (a-b)=2.5112$$

$$colog\ (a+b)=6.7481-10$$

$$log\ tan\tfrac{1}{2}\ (A+B)=\underline{0.1334}$$

$$log\ tan\tfrac{1}{2}\ (A-B)=9.3927-10$$

$$\tfrac{1}{2}\ (A-B)=13°52'$$

$$\therefore\quad A=67°32',$$

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A},\qquad\therefore\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

$$og\ \ a=3.0234$$

$$log\ sin\ C=9.9798-10$$

$$colog\ sin\ A=\underline{0.0343}$$

$$log\ c=3.0375$$

$$\therefore\quad c=1090.2\ \text{公尺}$$

習題十八

1. 從船測得燈塔的方向是北偏東 34°，船向南駛行 3 浬後，再測燈塔的方向是北偏東 23°，問船距燈塔起初幾浬後來幾浬?

2. 要求從敵方的炮台 A 到某處 B 的距離，量一 322.6 公尺長的 BC 線，測得 $\angle ABC=60°34'$，$\angle BCA=56°10'$，求 AB 的距離.

3. 在一300尺長的船上，從船首 A 和船尾 B

去觀測他船的前梳 C，測得 $\angle ABC-65.46^\circ$，$\angle BAC=112.85^\circ$，求從船首到他船的距離.

4. 兩個浮標中間的距離是 2789 尺，從船到較近的浮標是 4325 尺，從船到浮標的兩直線所夾的角是 $16^\circ13'$，問船距較遠的浮標幾尺？

5. 兩個目的物 A 和 B 的中間隔着一沼，從測點 C 測得 $AC=3824$ 碼，$BC=3476$ 碼，$\angle ACB=62^\circ31'$，問 A 距 B 幾碼？

6 從測點 A 可以看見兩點 B 和 C 在山的兩面，$AB=11.5$ 里，$AC=9.4$ 里，$\angle BAC=59^\circ31'$，求從 A 到 B 的距離.

7. 船距島的一端 3 里，距他端 7 里，從船測得島的對角是 $33^\circ55'$，求島長.

8. A,B,C 三城間的距離是 $AB=165$ 里，$AC=72$ 里，$BC=185$ 里，B 在 A 的東面，求 AC 的方向.

9. 從傾斜角等於 $9^\circ12'$ 的斜面上一點，測得樹的對角是 $40^\circ26'$，向下量到 30 公尺的一點，樹的對角是 $21^\circ13'$，求樹高.

10. 一座紀念塔築在斜面上，從距塔足200尺的一點向上測得塔的對是角 $43^\circ44'$，退後 300 尺

測得對角 25°16′, 求塔高.

11. 要測隔河兩個敵壘中間的距離, 量一 150 公尺長的基線, 從一端測得基線和到兩壘的線成角 115°18′ 和 42°38′, 再從他端測得 103°46′ 和 36°26′. 求兩壘間的距離.

12. 從地面上相隔 5 里的兩點, 同時測得在同一縱直面裏飛船的仰角是 55° 和 58°, 求飛船到各點的距離和距地面的高.

13. 貫通兩個市鎮的直路長 $22\frac{1}{2}$ 里, 飛機在路的上面測得兩鎮的俯角是 43°24′ 和 39°8′. 求從飛機到各鎮的距離和距地面的高.

14. 房屋和斜面成 113°12′ 的角, 向下量到距屋足 90 尺的一點, 房屋的對角是 23°27′, 求屋高.

15. 在傾斜角 15° 的斜坡上, 一人從樹足往上行 80 尺測得樹的對角是 30°, 求樹高.

16. 從 4 丈 2 尺高的窗口測得樹頂的仰角是 14°13′; 再從屋足測得仰角 28°19′, 求樹高.

17. 一船向北駛行, 看見相隔 8 哩的兩個燈塔都在向西的直線上; 駛行一時後, 這兩個燈塔的方向是南偏西 45° 和南偏西 22°30′, 求船的速

度.

18. 在傾斜角$8°53'$,的斜坡上某點,測得炮台的對角是$42°17'$;退後325公尺,測得對角$21°47'$,求炮台的高.

19. 從船看見兩塊高出水面的大石都在北偏東$15°$的直線上;船向北西駛行5里,那時大石的方向一在正東,一在北東,求兩石中間的距離.

20. 要從河西測河東一座紀念塔A和一個瞭望台B中間的距離,做基線CD,(C端距塔較近)測得$\angle ACB=58°20'$, $\angle ACD=95°20'$, $\angle ADB=53°30'$ $\angle BDC=98°45'$, $CD=600$尺. 問所求的距離是幾尺?

21. 從長440碼的水平基線的一頭,測得山頂的仰角是$37°18'$,基線和測山的視線成水平角$76°18'$,從基線的另一頭測得水平角$67°14'$,求山高.

22. 要測從不能接近的一點C到A和B兩點的距離,沒有測角的儀器,只好引長CA到D,引長CB到E;做AB, AE,和BD;量得$AB=500$尺, $AD=100$尺, $BD=560$尺, $BE=100$尺, $AE=550$尺,求AC和BC.

23. 甲船在海港的南西方,距港30里,看見每

時27里速度的乙船照南偏東80°的方向離港駛行，甲就開始追逐，經過$1\frac{1}{2}$時把乙船追着.求甲船的速度和駛行的方向.

24. 飛機從本軍的炮位照12°的傾斜向着敵營飛去，飛行40秒鐘後測得敵營的俯角是21°30′.如果飛行的速度是每分鐘4500公尺，求從本軍的炮位到敵營的距離.

雜題五

*ABC*是斜角三角形，用正弦定律證明下面的恆等式：(1—4)

1. $$\frac{\sin^2 A-m\sin^2 B}{a^2-m\,b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}.$$

2. $R(\sin A+\sin B+\sin C)=s.$

(*R*是外接圓的半徑，*s*是三邊的半和)

3. $$R=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a\,b\,c}{\sin A\sin B\sin C}}.$$

4. $$\sqrt{a\,b\sin A\sin B}=\frac{a^2\sin B+b^2\sin A}{a+b}.$$

5. 用正弦定律來證明下面的幾何定理：

三角形一角的平分線把對邊分做兩個線段

和兩鄰邊成比例.

6. 把斜角三角形分做兩個直角三角形來證明:

(1) $a=b\cos C+c\cos B$.

(2) $b=a\cos C+c\cos A$.

(3) $c=a\cos B+b\cos A$.

7. 用上題的公式來證明 $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}$.

ABC 是斜角三角形,用正切定律來證明:(8和9)

8. $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}A$.

9. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\cot\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}(A+B)}$.

10. 幾何定理"等腰三角形的底角相等"用正切定律來證明.

11. 證明 $\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B=\frac{a+b-c}{a+b+c}$.

12. 證明 $(b+c-a)\tan\frac{1}{2}A=(c+a-b)\tan\frac{1}{2}B$.

證明三角形 ABC 的面積: (13—15)

13. $S=\frac{abc}{4R}$. (R 是外接圓的半徑)

14. $S=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$ (r 是內切圓的

半徑)

15. $S=2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

16. 一個朝南的燈塔送出光線的範圍是從南東到南西的一象限.一船向東駛行,初見燈火的時候距燈塔18里,行了45分鐘,才看不見燈火.問船的速度每時幾里

17. 410磅的力和320磅的力成角$51°37'$.求結果力的磅數和方向.

18. 三角形三邊的和是100尺,A等於B的二倍,B等於C的二倍,求三邊.

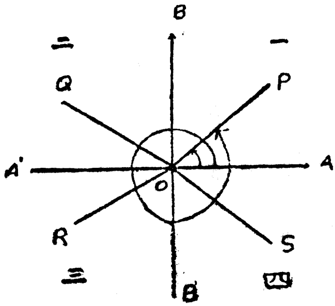
19. 要測不能接近的二點A和B的距離,却找不到可以同時看見這兩點的一點.只好拿$CD=200$碼來做基線,在C點看得見A,D點看得見B.作$CF=200$碼,在F點看得見A;作$DE=200$碼在E點看得見B.測得$\angle AFC=83°$, $\angle ACD=53°30'$ $\angle ACF=54°31'$,$\angle BDE=54°30'$,$\angle BDC=156°25'$,$\angle DEB=88°30'$,求AB

20. 北溫帶裏一個石柱的方向,在測點的南偏東$67°30$,在正午的時候,柱影的一頭在測點的北偏東$45°$.柱影長80尺,柱頂的仰角是$45°$,求柱高.

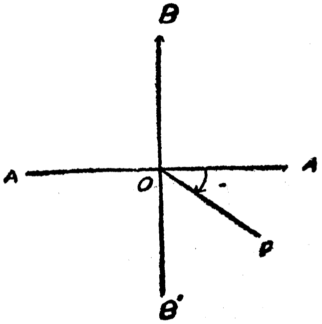
附　　錄

I. 任意角的三角函數

1. 廣義的角. 初等幾何學裏所講的角,不過從0°到360°,但是照定義講,角的大小,依一直線迴轉的量來決定,那就可以大於360°,並且迴轉的方向不同,角也可分正負.



照右邊的圖,從角頂 O 向右所作的水平線 OA 叫做始線.迴轉線和 OA 疊合的時候,這角是0°;從 OA 出發照反時針方向迴轉到終線 OP 的位置成一銳角 AOP;到 OB 成一直角;到 OQ 成一鈍角;到 OA' 成一平角;再以次經過 OR, OB', OS 回到 OA 成360°的角.如果再繼續迴轉到 OP,那末所成的角就大於360°,再迴轉到 OA 成720°的角.照此進行,一個角可有任何的正量沒有限制.



上面所講照反時針方向迴轉所成的角定爲正角,那末照同時針方向迴轉所成的角是負角.

照右邊的圖,迴轉線從OA迴轉到OP成一負角AOP.如果繼續迴轉,所成的角也可有任何的負量.

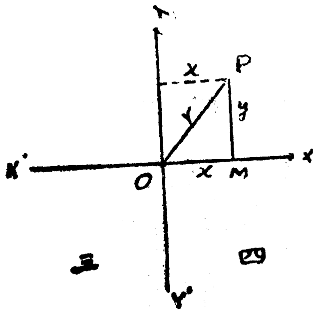
2. 角所在的象限. 爲便於辨別三角函數的正負起見,把上節圖中之平面分爲四個象限照正角的迴轉線經過的次序,AOB爲第一象限;BOA'爲第二象限;$A'OB'$爲第三象限;$B'OA$爲第四象限.

一個已知度數的角,不問是正角或是負角,他的終線是在一定象限之內,就是這個象限內的角.

例如$395°$的角在第一象限,$-135°$的角在第三象限.

3. 一點的坐標 一點的位置可以用坐標

來表明.



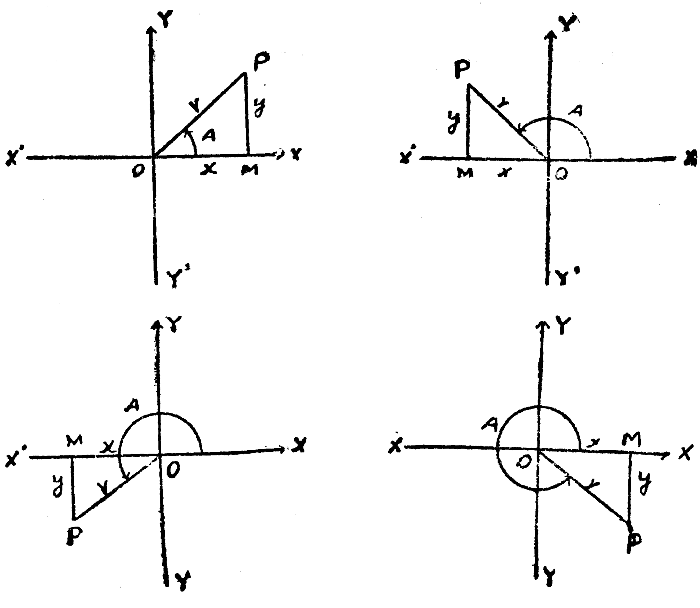
照右邊的圖 XX' 爲橫軸, YY' 爲縱軸, 互相垂直於 O 點, O 爲原點. 從 P 到 YY' 的距離 $NP=OM$ 爲 P 點的橫坐標, 用 x 來表明從 P 到 XX' 的距離 MP 爲 P 點的縱坐標, 用 y 來表明, 那末 P 點的坐標 (x, y) 一定, P 點的位置也就一定.

坐標有正負的分別, 橫坐標在 YY' 的右邊是正, 在左邊的是負; 縱坐標在 XX' 的上面是正, 在下面的是負

照象限講: 第一象限內的橫坐標和縱坐標都是正;
第二象限內的橫坐標是負縱坐標是正;
第三象限內的橫坐標和縱坐標都是負;

第四象限內的橫坐標是正縱坐標是負。

4. 任意角的三角函數. 第二章所講的三角函數定義,只限銳角,現在照任意角講,才是普遍的定義,對於銳角也講得通.



照上面的圖,在迴轉線上取一點P, P點的橫坐標是x, 縱坐標是y. 從P到原點O的距離OP

簡稱距離用 r 來表明，這距離 r 常爲正量.

不問 A 角在那一個象限裏，A 角的三角函數有下面的定義：

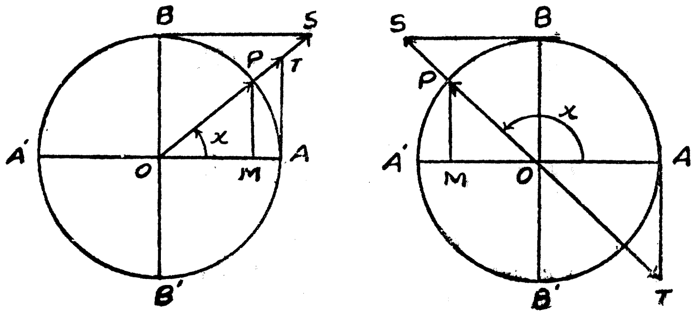
$$\sin A=\frac{y}{r}=\frac{\text{縱坐標}}{\text{距離}},\qquad \csc A=\frac{r}{y}=\frac{\text{距離}}{\text{縱坐標}},$$

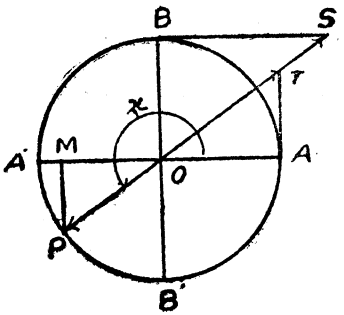
$$\cos A=\frac{x}{r}=\frac{\text{橫坐標}}{\text{距離}},\qquad \sec A=\frac{r}{x}=\frac{\text{距離}}{\text{橫坐標}},$$

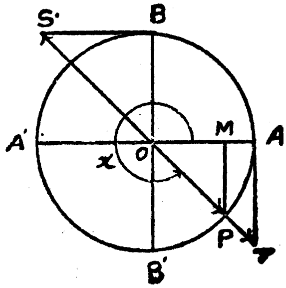
$$\tan A=\frac{y}{x}=\frac{\text{縱坐標}}{\text{橫坐標}},\qquad \cot A=\frac{x}{y}=\frac{\text{橫坐標}}{\text{縱坐標}},$$

[註] 圖中所表出的雖只小於360°的正角，如果 A 大於360°或是負角，上面的定義還是一樣.

5. 函數的線值. 三角函數照定義雖是比值，也可用線值來表明，這種線值可以幫助我們辨別函數的正負.







取長度的單位做半徑作圓,叫做單位圓.在單位圓內作水平直徑 $A'A$, 作直徑 $BB'\perp A'A$. 用 X 表 $\angle AOP$, 作 $MP\perp A'A$, 引長 OP, 或過圓心 O 反向引長,交 A 點上的切線於 T, 並交 B 點上的切線於 S. 那末

$$\sin x=\frac{MP}{OP}=\frac{MP}{1}=MP,$$

$$\cos x=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{1}=OM,$$

$$\tan x=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=\frac{AT}{1}=AT,$$

$$\cot x=\frac{OM}{MP}=\frac{BS}{OB}=\frac{BS}{1}=BS,$$

$$\sec x=\frac{OP}{OM}=\frac{OT}{OA}=\frac{OT}{1}=OT,$$

$$\csc x=\frac{OP}{MP}=\frac{OS}{OB}=\frac{OS}{1}=OS.$$

照坐標的正負，MP 和 AT 在 $A'A$ 的上面爲正，在下面的是負；OM 和 BS 在 BB' 的右邊爲正，在左邊的是負．又 OT，OS 和迴轉線 OP 同方向的爲正，反方向的是負。照這樣講，函數的正負，只要看這角所在的象限來決定，所以列成下面的表．

函數＼象限	一	二	三	四
正弦和餘割	+	+	−	−
餘弦和正割	+	−	−	+
正切和餘切	+	−	+	−

習題一

問下面的角在第幾象限裏(1−18)？

1. $120°$.　　2. $210°$.　　3. $300°$.

4. $135°$.　　5. $225°$.　　6. $315°$.

7.	150°.	8.	240°.	9.	330°.
10.	390°.	11.	510°.	12.	585°.
13.	780°.	14.	855°.	15.	960°.
16.	-75°.	17.	-150°	18.	-240°.

寫出下面的函數的符號 (19—30):

19.	$\sin 165^\circ$.	20.	$\cos 318^\circ$.	21.	$\tan 220^\circ$.
22.	$\sin 325^\circ$.	23.	$\cos 115^\circ$.	24.	$\tan 290^\circ$.
25.	$\sin 582^\circ$.	26.	$\cos 938^\circ$.	27.	$\tan 413^\circ$.
28.	$\sin(-254^\circ)$.	29.	$\cos(-375^\circ)$.	30.	$\tan(-136^\circ)$

用單位圓表出下面函數的線值(31—36):

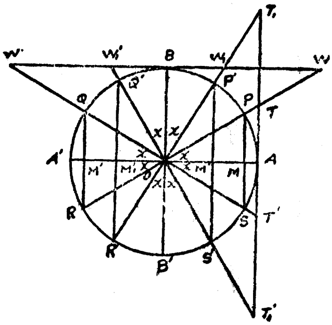
31.	$\sin 325^\circ$	32.	$\cos 245^\circ$.	33.	$\tan 125^\circ$.
34.	$\cot 75^\circ$.	35.	$\sin 475^\circ$.	36.	$\tan(-65^\circ)$.

用單位圓內函數的線值來證明下面的等式 (37—42)·

37.	$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$.	38.	$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$.
39.	$\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$.	40.	$\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ$.
41.	$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ$.	42.	$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ$.

6. 化任意角函數爲銳角函數. 在下面的單位圓裏, 作 $\angle AOP = \angle B' P = \angle BOQ' = \angle A'OQ$

$=\angle A'OR=\angle B'OR=\angle B'OS'=AOS=x$. 那末



$$AOQ'=90°+x,$$

$$AOP'=90°-x,$$

$$AOS'=270°+x,$$

$$AOR'=270°-x,$$

又 $$AOR=180°+x,$$

$$AOQ=180°-x,$$

$$AOP=360°+x,$$

$$AOS=360°-x.$$

應用全等三角形的對應邊相等，照絕對值講 $M'Q'=M_1'P'=M'R'=M'S'=OM$.

就是照絕對值 $\sin(90°+x)=\sin(90-x)=\sin(270+x)=\sin(270°-x)=\cos x$, 其他的函數可以類推.

又 $M'R=M'Q=MS=MP$, 其他函數的線值可以類推.

就是照絕對值 $\sin(180°+x)=\sin(180°-x)=\sin(360°+x)=\sin(360°-x)=\sin x$.

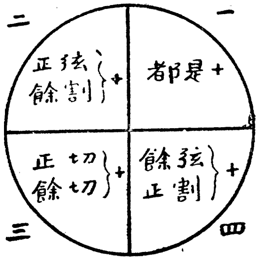
由上面所講的道理便可得到**化任意角的三角函數爲銳角函數的法則如下:**

法則（一） 假設 X 爲一銳角，凡 $90°$

$\pm X$ 和 $270^\circ \pm X$ 的三角函數，其絕對值等於 X 的餘函數.

(二)　凡 $180^\circ \pm X$ 和 $360^\circ \pm X$ 的三角函數其絕對值仍等於 X 的原有函數.

(三)　各函數的符號，照這角所在的象限來決定. 定函數的正負，可用上節的表或用下面的圖來幫助:



[註]　圖中沒有表出的函數都是負.

上面所說的法則可以包括下面各組公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^\circ-x)&=\cos x\\ \cos(90^\circ-x)&=\sin x\\ \tan(90^\circ-x)&=\cot x\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\sin(90^\circ+x)&=\cos x\\ \cos(90^\circ+x)&=-\sin x\\ \tan(90^\circ+x)&=-\cot x\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°-x)&=\sin x\\ \cos(180°-x)&=-\cos x\\ \tan(180°-x)&=-\tan x\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\sin(180°+x)&=-\sin x\\ \cos(180°+x)&=-\cos x\\ \tan(180°+x)&=\tan x\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(270°-x)&=-\cos x\\ \cos(270°-x)&=-\sin x\\ \tan(270°-x)&=\cot x\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\sin(270°+x)&=-\cos x\\ \cos(270°+x)&=\sin x\\ \tan(270°+x)&=-\cot x\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(360°-x)&=-\sin x\\ \cos(360°-x)&=\cos x\\ \tan(360°-x)&=-\tan x\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\sin(360°+x)&=\sin x\\ \cos(360°+x)&=\cos x\\ \tan(360°+x)&=\tan x\end{aligned}\right\}$$

因爲 $360°-x$ 和 $-x$ 在同一象限之內，迴轉線的位置相同，可以推得化負角函數爲正角函數的公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\sin(-x)&=-\sin x\\ \cos(-x)&=\cos x\\ \tan(-x)&=-\tan x\end{aligned}\right\}$$

［註一］ 上面的法則和公式中的 x 角，并不以銳角爲限.

［註二］ 餘割，正割，餘切的公式和正弦，餘弦正切的公式一樣，容易推得，所以沒有寫出來.

習 題 二

用上節的圖證明下面絕對值相等(1—6):

1. $\cot AOQ' = \cot AOR' = \cot AOS' = \tan AOP$.

2. $\sec AOQ = \sec AOR = \sin AOS = \sec AOP$.

3 $\cos AOQ' = \cos AOR' = \cos AOS' = \sin AOP$.

4. $\cos(180° - x) = \cos(180° + x) = \cos(360° - x) = \cos x$.

5. $\tan(90° + x) = \tan(270° - x) = \tan(270° + x) = \cot x$.

6. $\tan(180° - x) = \tan(180° + x) = \tan(360° - x) = \tan x$.

化下面的函數爲銳角(正的銳角)的函數(7—21):

7. $\sin 170°$. 8 $\cos 160°$. 9. $\tan 148°$.

10. $\sin 200°$. 11 $\cos 262°$. 12. $\tan 258°$.

13. $\sin 345°$. 14 $\cos 290°$. 15. $\tan 282°$.

16. $\sin 384°$. 17. $\cos 484°$. 18. $\tan 586°$.

19. $\sin(-155°)$. 20. $\cos(-64°)$. 21. $\tan(-243°)$.

化下面的函數爲小於45°正角的函數(22—33)

22. $\sin 100°$. 23. $\cos 95°$. 24. $\tan 93°$.

25. $\sin 200°$. 26. $\cos 195°$. 27. $\tan 261°$.

28 $\sin 287°$. 29. $\cos 347°$. 30. $\tan 350°$.

31. $\sin 815°$. 32. $\cos 645°$. 33. $\tan(-75°)$.

求下面的函數（照函數表求出來再定符號）

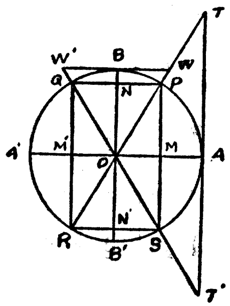
(34—40)：

34. $\sin 216°20'$. 35. $\cos 144°40'$. 36. $\tan 323°30'$

37. $\sin 324°10'$. 38. $\cos 215°50'$. 39. $\tan 125°10'$

40. $\sin(-124°40')$.

7. 三角函數的變值和變跡 在單位圓內，迴轉線 OP 從 OA 出發和時針反向迴轉一周，那末 $\angle AOP$ 從 $0°$ 增大到 $360°$，P 點繞圓運動一周，M 點沿 AA' 從 A 經 O 到 A' 再回到 A，T 點沿 TT' 從 A 向上到無限遠，再從下面無限遠回到 A，W 點沿 WW' 從右邊無限遠經 B 向左到無限遠移行兩次.



拿正弦來講，在 $0°$ 時 P 和 M 都疊在 A 點，所以 $MP=0$. 增大到 $90°$ 和 OB 疊合為 1，到 $180°$ 又為 0 到 $270°$ 和 OB' 疊合為 -1，到 $360°$ 又變為 0.

再拿正切來講，在 $0°$ 時 T 和 A 疊合，所以 $AT=0$ 增大到 $90°$ T 點漸漸地向上到無限遠，$AT=\infty$. 但在 $90°$ 的時候，假定從第一象限來是 $+\infty$，要是到

第二象限去，立即變爲AT'，不過T'是在下面無限遠的地方，所以$AT'=-\infty$. 到180°爲0，到270°又變爲∞；從270°到360°又從$-\infty$增大到O.

再把其他函數逐一研究，得到下面表裏的結果：

角 函數	從0°到90°	從90°到180°	從180°到270°	從270°到360°
正弦	從0到1	從1到0	從0到−1	從−1到0
餘弦	從1到0	從0到−1	從−1到0	從0到1
正切	從0到∞	從−∞到0	從0到∞	從−∞到0
餘切	從∞到0	從0到−∞	從∞到0	從0到−∞
正割	從1到∞	從−∞到−1	從−1到−∞	從∞到1
餘割	從∞到1	從1到∞	從−∞到−1	從−1到−∞

從上列的表，可以看到正弦和餘弦在+1和−1之間；就是不能大於1和小於−1.

正割和餘割的正值大於+1，負值小於−1；就是不能有在+1和−1中間的值.

正切和餘切有正或負的任何值.

雜 題 一

1. $\cot 360°$ 爲什麽有 $+\infty$ 和 $-\infty$ 兩值?

2. 一個三角形的角有什麽負函數? 在什麽情形之下才有負函數?

3. 一個角的正弦和餘弦都是負, 問在第幾象限? 餘切和正切都是負, 在第幾象限?

求 $\sin 450°$, $\tan 540°$, $\cos 630°$, $\cot 720°$. $\sec 810°$, $\csc 900°$, $\cos 1800°$ 和 $\sin 3600°$ 的函數值.

已知下面的函數, 求作兩個 x 角 (5—10):

5. $\sin x=\frac{1}{2}$. 6. $\cos x=-\frac{4}{5}$. 7. $\tan x=-\frac{2}{3}$.

8. $\cot x=-1$. 9. $\sec x=2$. 10. $\csc x=-2$.

已知下面的函數, 求作 A 角的其他函數 (11—14):

11. $\sin A=-\frac{2}{3}$. 12. $\cos A=\frac{3}{4}$.

13. $\tan A=-\frac{3}{8}$. 14. $\cot A=-\frac{1}{2}$.

從下面的函數求四個最小正角 (15—18):

15. $\sin x=-\frac{1}{2}$. 16. $\cos x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

17. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.　　　　18. $\cot x = 1$.

從下面的函數求小於360°的兩個正角 (19—22):

19. $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.　　　　20 $\cos x = \frac{1}{2}$.

21. $\tan x = -1$.　　　　22. $\cot x = -\sqrt{3}$.

23. 證明 42°, 138°, −318°, 402° 和 −222° 有相同的正弦.

24. 作一單位圓來表明−325°各函數的線值。

25. 作圖來證明 $\sin 195° = \cos(-105°)$ 和 $\cos 300° = \sin(-210°)$.

26. 在三角形 ABC 內, 證明 $\cos A = -\cos(B+C)$ 和 $\cos B = -\cos(A+C)$.

求下面各式的值 (27—30):

27. $(a^2-b^2)\cos 360° - 4ab \sin 270° + \sin 360°$.

28. $(a^2+b^2)\cos 180° + (a^2+b^2)\sin 180° + (a^2+b^2)\tan 135°$.

29. $(a+b)^2 \sin 90° + (a-b)^2 \cos 180° - 4ab \tan 225°$.

30. $(a-b+c-d)\sin 270° - (a-b+c-d)\cos 180° +$

$a \tan 360°$.

x 角從 $0°$ 增大到 $360°$, 求下面各式的變化

(31—34):

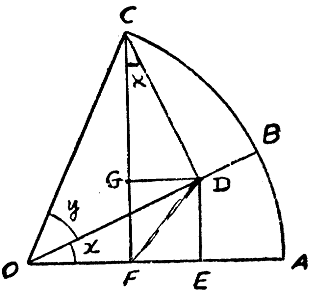
31. $\sin x \cos x$. **32.** $\sin x+\cos x$.

33. $\sin x-\cos x$. **34.** $\tan x+\cot x$.

II. 和角較角函數的公式和應用

8. 兩角和的函數 兩角和的函數,可以用這兩角的函數來表明,有下面的幾個公式:

照右邊的圖 $\angle AOB=x$, $\angle BOC=y$, 那末 $\angle AOC=x+y$. 由 C 作 $CF\perp OA$, $CD\perp OB$, 由 D 作 $DE\perp OA$, $DG\perp CF$, 那末 $\angle DCG=x$.



因 OC 爲單位圓的半徑,

$$\therefore\quad OD=\cos y,\qquad CD=\sin y$$

(1) $\sin(x+y)=CF=DE+CG.$

$$\frac{DE}{OD}=\sin x,\qquad \therefore\quad DE=\sin x\times OD=\sin x\cos y,$$

$$\frac{CG}{CD}=\cos x,\qquad \therefore\quad CG=\cos x\times CD=\cos x\sin y.$$

$$\therefore\quad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.\qquad [1]$$

(2) $\cos(x+y)=OF=OE-DG.$

$$\frac{OE}{OD}=\cos x,\qquad \therefore\quad OE=\cos x\times OD=\cos x\cos y,$$

$$\frac{DG}{CD}=\sin x, \quad \therefore \quad DG=\sin x\times CD=\sin x\sin y$$

$$\therefore \quad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y. \qquad [2]$$

(3) $$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

用 $\cos x\cos y$ 除右邊的分子和分母,

$$\tan(x+y)=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin y}{\cos y}}{1-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}$$

但 $$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x, \qquad \frac{\sin y}{\cos y}=\tan y,$$

$$\therefore \quad \tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}. \qquad [3]$$

(4) 用相像的方法求得

$$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x} \qquad [4]$$

[註] 上面四個公式和以後所講公式裏的 x, y, $(x+y)$ 等角不以銳角爲限, 任何角都講得通.

9. 兩角較的函數. 兩角較的函數也可用這兩角的函數來表明:

(1) $\sin(x-y)=\sin[x+(-y)]=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)$.

但 $\cos(-y)=\cos y,\ \sin(-y)=-\sin y$.

$\therefore \quad \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$ [5]

(2) $\cos(x-y)=\cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y)$.

但 $\cos(-y)=\cos y,\ \sin(-y)=-\sin y,$

$\therefore \quad \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$ [6]

(3) $$\tan(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$$

$$=\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}$$

用 $\cos x\cos y$ 除右邊的分子和分母,

$$\tan(x-y)=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sin y}{\cos y}}{1+\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}},$$

但 $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x,\quad \dfrac{\sin y}{\cos y}=\tan y$

$$\therefore \quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x \tan y} \qquad [7]$$

(4) 用相像的方法求得

$$\cot(x-y)=\frac{\cot x \cot y+1}{\cot y-\cot x}. \qquad [8]$$

習 題 三

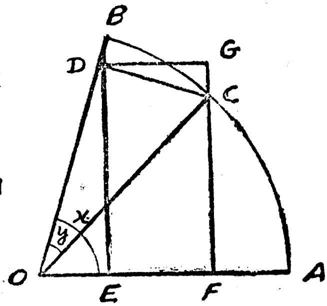
1. 證明公式[4]和[8].

2. 照右邊的圖直接求出 $\sin(x-y)$

$=\sin x \cos y-\cos x \sin y$ 和

$\cos(x-y)$

$=\cos x \cos y+\sin x \sin y.$



已知 $\sin x=\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$, $\sin y=\frac{5}{13}$, $\cos y=\frac{12}{13}$, 求下面的函數值 (3—8):

3. $\sin(x+y)$.　4. $\cos(x+y)$.　5. $\tan(x+y)$.

6. $\sin(x-y)$.　7. $\cos(x-y)$.　8. $\tan(x-y)$

已知 30°, 45° 和 60° 的各函數 (第四章29節及30節) 用和較角公式求下面的函數 (9—21):

9. $\sin 75°$. 10. $\cos 75°$. 11. $\tan 75°$.

12. $\sin 15°$. 13. $\cos 15°$. 14. $\tan 15°$.

15. $\sin 105°$. 16. $\cos 105°$. 17. $\tan 105°$.

18. $\sin 90°$. 19. $\cos 90°$. 20. $\tan 90°$.

21. $\cot 15°$.

代入公式去化下面各式(22－27):

22. $\sin (45°-y)$ 23. $\cos (30°+y)$. 24. $\tan (60°-y)$.

25. $\sin (x-90°)$. 26. $\cos (x-180°)$. 27. $\tan (x+180°)$

28. 已知 $\tan A=0.5$, $\tan B=0.25$, 求 $\tan (A+B)$ 和 $\tan (A-B)$.

29. 已知 $\sin x=0.2\sqrt{5}$, $\sin y=0.1\sqrt{10}$, 證明 $x+y=45°$. 問 $x+y$ 還有另外的值麼?如果是有的,再寫出兩個來.

30. 證明 $\tan (x-45°)$ 同 $\cot (x+45°)$ 的和等於0

10. 倍角的函數. 用 $2x$, $(x+x)$ 去代 $x+y$, 便把第8節的公式化成二倍角函數公式如下:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x \qquad [9]$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x \qquad [10]$$

$$=2\cos^2 x-1$$

$$=1-2\sin^2 x$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad [11]$$

$$\cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x} \qquad [12]$$

[註] 上面的公式同兩角和的公式連絡了算,可用一個角的函數來表明這角任何倍的函數.

上面的公式是用一個角的函數來表二倍角的函數.但一個整個的角是半角的二倍,這樣又可以推得用半角函數來表全角函數的公式如下:

$$\sin x=2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x \qquad [13]$$

$$\cos x=\cos^2\tfrac{1}{2}x-\sin^2\tfrac{1}{2}x \qquad [14]$$

$$=2\cos^2\tfrac{1}{2}x-1$$

$$=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}x.$$

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan^2\frac{1}{2}x}. \qquad [15]$$

$$\cot x=\frac{\cot^2\frac{1}{2}x-1}{2\cot\frac{1}{2}x}. \qquad [16]$$

11. 半角的函數 用半角函數表全角函

數的公式和第四章33節公式(I)連合起來,可以求得用全角函數表半角函數的公式如下:

$$\cos^2\tfrac{1}{2}x+\sin^2\tfrac{1}{2}x=1$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}x-\sin^2\tfrac{1}{2}x=\cos x$$

相減, $2\sin^2\tfrac{1}{2}x=1-\cos x$

$$\therefore\quad \sin\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}. \qquad [17]$$

相加, $2\cos^2\tfrac{1}{2}x=1+\cos x$

$$\therefore\quad \cos\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \qquad [18]$$

[17]用[18]除,因 $\tan\tfrac{1}{2}x=\dfrac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}$,

$$\therefore\quad \tan\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad [19]$$

[18]用[17]除,因 $\cot\tfrac{1}{2}x=\dfrac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}$.

$$\therefore\quad \cot\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}. \qquad [20]$$

習　題　四

求 $\sin 2x$, 已知(1—2):

1. $\sin x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$,

2.　$\sin x=\frac{1}{2}$,　　$\cos x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

求 $\cos 2x$, 已 知 (3—7)：

3.　$\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$　　$\cos x=\frac{1}{2}$.

4.　$\cos x=\frac{4}{5}$.　　5.　$\sin x=\frac{5}{13}$.

6.　已 知 $\tan x=0.3673$, 求 $\tan 2x$.

7.　已 知 $\cot x=0.2701$, 求 $\cot 2x$.

已 知 $\sin 30°=\frac{1}{2}$, 求 下 面 的 函 數 (8—11)：

8.　$\sin 15°$.　　9.　$\cos 15°$.

10.　$\tan 15°$.　　11.　$\cot 7°30'$.

已 知 $\tan 45°=1$, 求 下 面 的 函 數 (12—15)：

12.　$\sin 22°30'$.　　13.　$\cos 22°30'$.

14.　$\tan 22°30'$.　　15.　$\cot 11°15'$.

16.　已 知 $\sin x=0.2$, 求 $\sin\frac{1}{2}x$ 和 $\cos\frac{1}{2}x$.

17.　求 用 $\sin x$ 來 表 $\sin 3x$ 的 公 式.

18.　求 用 $\cos x$ 來 表 $\cos 3x$ 的 公 式.

12. 函數的和同較　兩角的正弦同餘弦的和同較,用兩角半和同半較的正弦同餘弦來表明

是重要的三角公式如下.

由公式[1]和[5].

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$

相加 $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y.$

相減 $\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y$

公式[2]和[6],相加或相減,可得

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y,$$

$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y,$$

設 $x+y=A$, $x-y=B$, 那末 $x=\frac{1}{2}(A+B)$, $y=\frac{1}{2}(A-B)$

故得

$$\sin A+\sin B=2\sin\ (A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B) \qquad [21]$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\ (A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B). \qquad [22]$$

$$\cos A-\cos B=2\cos\ (A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B). \qquad [23]$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\ (A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B). \qquad [24]$$

用[22]除[21],可得

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\tan\tfrac{1}{2}(A+B)\cot\tfrac{1}{2}(A-B),$$

但 $$\cot\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}. \qquad [25]$$

13. 函數的化和爲積　三角函數的代數和不適於對數計算,所以常把函數的和化爲函數的積. 函數的化和爲積,雖沒有一定的法則,但總不外利用三角的公式,上節的幾個公式尤其顯著.

例一.　化簡

$$\frac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}$$ 使適於對數計算.

$$\frac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin y}{\cos y}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\cos y}{\sin y}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\sin y}}$$

$$=\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\tan x\tan y$$

例二.　$\sin x+2\sin 3x+\sin 5x$ 化和爲積.

[解]　原式 $=\sin 5x+\sin x+2\sin 3x$

$=2\sin 3x\cos 2x+2\sin 3x$

$$=2\sin 3n\ (\cos 2x+1)$$

$$=2\sin 3x\ (2\cos^2 x-1+1)$$

$$=4\sin 3x\cos^2 x.$$

14. 三角恆等式 簡易的恆等式在第四章35節已經講過,但包含和角倍角等函數的恆等式,證法稍繁,也沒有一定的證法,下面的普通法則,可以幫助我們證恆等式:

法則 (一) 恆等式中,如有倍角分角和角較角的函數,化為單純角的函數.

(二) 如有各種不同的函數,先化為正弦和餘弦.

(三) 化去分數和根號.

(四) 化各函數為一種函數(如已經過(二)的化簡,現都化為正弦或餘弦.)

例一. 證明 $1+\tan 2x\tan x=\sec 2x.$

[證] $1+\tan 2x\tan x=1+\dfrac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

$$=\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

$$=\frac{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1}{\cos 2x}$$

$$=\sec 2x$$

例二. 證明 $\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2 x-\sin^2 y$.

[證] $\sin(x+y)\sin(x-y)=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)$

$(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$

$$=\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y$$

$$=\sin^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\sin^2 x)\sin^2 y$$

$$=\sin^2 x-\sin^2 x\sin^2 y-\sin^2 y+\sin^2 x\sin^2 y$$

$$=\sin^2 x-\sin^2 y.$$

習　題　五

化下面的三角函數和爲積: (1—10)

1. $\cot x+\tan x$.　　2. $\cot x+\tan y$.

3. $\cot x-\tan y$.　　4. $1+\tan x \tan y$.

5. $\cot x\cot y-1$.　　6. $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.

7. $\sin 3x-\sin x$　　8. $\cos 2x+\cos 4x$.

9. $\csc x-2\cot 2x\cos x$.

10. $\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y$.

證明下面的恆等式：(11—27)

11. $\sin 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

12. $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

13. $\tan\frac{1}{2}x=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

14. $\cot\frac{1}{2}x=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

15. $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$.

16. $\tan(45^\circ-x)=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

17. $\tan 18^\circ=\dfrac{\sin 33^\circ+\sin 3^\circ}{\cos 33^\circ+\cos 3^\circ}$

18. $\cos 45^\circ+\cos 75^\circ=\cos 15^\circ$

19. $\sin 4x=4\sin x\cos x-8\sin^3 x\cos x$.

20. $\cos 4x=1-8\cos^2 x+8\cos^4 x$

21. $\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$.

22. $$\frac{\sin 3x+\sin 5x}{\sin x+\sin 3x}=2\cos 2x$$

23. $$\tan 2x+\sec 2x=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

24. $$\sin x+\sin 3x+\sin 5x=\frac{\sin^2 3x}{\sin x}.$$

25. $$\sin 5x=5\sin x-20\sin^3 x+16\sin^5 x.$$

26. $$1+\cot^2\frac{x}{2}=\frac{2}{\sin x\tan\frac{x}{2}}.$$

27. $$\cos(x+y+z)+\cos(x+y-z)+\cos(x-y+z)$$
$$+\cos(y+z-x)=4\cos x\cos y\cos z.$$

28. 已知 $A+B+C=180°$, 求證
$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

29. 已知 A, B, C 爲三角形 ABC 的三角, 求證
$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

30. 已知 $A+B+C=90°$, 求證
$$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1.$$

15. 正切定律的簡便求法. 第五章45節所講的正切定律, 因其時還沒有講過和角較角函數,求法很繁, 如果用公式[25]和正弦定律

聯絡起來求,甚為簡便

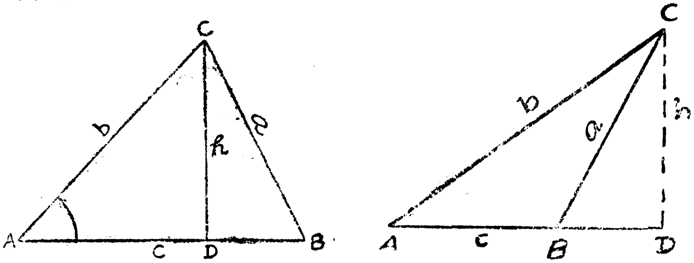
照正弦定律, $$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

由比例的分合理, $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}.$$

由公式[25], $$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

故得 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$$

16. 餘弦定律. 斜角三角形的一邊,可用其他兩邊和夾角的餘弦來表明如下:



照上面兩圖, $$a^2=h^2+\overline{BD}^2$$

照上面左邊的圖, $$BD=c-AD,$$

照上面右邊的圖. $$BD=AD-c.$$

但總是 $$\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+c^2-2c\times AD.$$

$$\therefore\quad a^2=h^2+\overline{AD}^2+c^2-2c\times AD.$$

但　　$h^2+AD^2=b^2,\quad \overline{AD}=b\cos A.$

$\therefore$　　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

照同樣方法可求得

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

所以**三角形任一邊的平方等於另外兩邊平方的和減去這兩邊和夾角餘弦乘積的二倍**這就叫做**餘弦定律.**

〔註〕 直接用餘弦定律來解斜角三角形,不適用於對數計算,所已知兩邊和夾角解斜角三角形,通常用正切定律.

雜　題　二

1. 使 $x=(x-y)+y$, 試由兩角和的正弦餘弦公式求出兩角較的正弦餘弦公式。

2. 解直角三角形時,遇到所求的 A 角很小,那末 b, c 兩邊的長度相差也很小,所以常用下面的公式.試用半角函數公式來證明:

$$\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

3. 已知 $\tan \frac{1}{2}x=1$, 求 $\cos x$.

4. 已知 $\cot \frac{1}{2}x=\sqrt{3}$, 求 $\sin x$.

5. 求證 $\tan \frac{1}{2}x=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

6. 求證 $\cot \frac{1}{2}x=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

7. 設 $\tan x=\dfrac{a}{1+a}$　　$\tan y=\dfrac{1}{1+2a}$,

求證 $\tan(x+y)=1$.

8. 分一直角爲三角 x、y z, 求證

$$\tan x=\frac{1-\tan y\tan z}{\tan y+\tan z}.$$

已知 ABC 爲斜角三角形,求證: (11—13)

11. $a^2+b^2+c^2=2(ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B)$.

12. $\dfrac{b^2}{a}\cos A+\dfrac{c^2}{b}\cos B+\dfrac{a^2}{c}\cos C=\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2abc}$.

13 $a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C$

$=3abc$.

已知 ABC 爲直角三角形, C 爲直角, 求證:(14—22)

14. $\sin 2A=\dfrac{2ab}{c^2}$.　　15. $\cos 2A=\dfrac{b^2-a^2}{c^2}$.

16. $\tan\ 2A=\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$.　17. $\sin(A-B)+\cos 2a=0$

18. $\cos\ 2B=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}$.

19 $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}$.

20. $\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{c-a}{2c}$.　21. $\dfrac{a-b}{a+b}=\tan\frac{1}{2}(A-B)$

22. $\sin\ 3A=\dfrac{3ab^2-a^3}{c^3}$.

23. 求證 $\tan 4x=\dfrac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$.

24. 求證 $\cos 20°+\cos 100°+\cos 140°=0$.

已知 $A+B+C=90°$, 求證: (25—26)

25. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\sin A\sin B\sin C$.

26. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$.

已知 ABC 爲斜角三角形求證: (27—28)

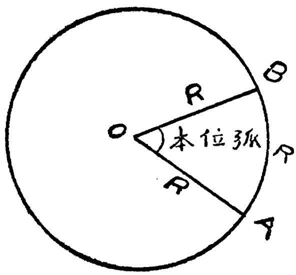
27. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

28. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$.

III 反三角函數和三角方程式

17. 弧度法 三角在實用上雖都用角度，但在理論上的研究不很適用. 照幾何學講，圓心角和對弧的度數相同，又圓周和半徑之比爲常數，根據這個道理就定出下面的單位來.

照右邊的圖，用和半徑等長的弧 AB 來做單位，那末所對的圓心角 AOB 和 AB 弧同度. 和半徑等長的弧，或是他所對的圓心角爲弧度的單位叫做本位弧.



照上面的定義，一個角所含本位弧的數，等於對弧所含半徑的數，

$$\text{所以 角所含本位弧} = \frac{\text{對弧}}{\text{半徑}}.$$

18. 弧度和角度的互化. 因爲一周角等於 $360°$，圓周等於 $2\pi\times$半徑，那末照上節的公式

$$360^\circ\text{所含的本位弧}=\frac{2\pi\times\text{半徑}}{\text{半徑}}=2\pi.$$

就是　2π 本位弧$=360^\circ$.

$\therefore$　π 本位弧$=180^\circ$.

$$1\text{本位弧}=\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{3.1416}.$$

$\therefore$　1 本位弧$=57.2957^\circ$……

又　$360^\circ=2\pi$ 本位弧.

$$\therefore\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{本位弧}=\frac{3.1416}{180}\text{本位弧}.$$

$\therefore$　$1^\circ=.01745$……本位弧.

這樣得到弧度和角度互化的法則如下:

法則一.　化弧度為角度,用 57.2957 或 $\frac{180}{\pi}$ 乘弧度(本位弧)就得角度(度數)

法則二.　化角度為弧度,用 .01745 或 $\frac{\pi}{180}$ 乘角度(度數)就得弧度(本位弧).

在三角函數裏可用弧度代替角度,有幾個特殊的角,時常要用到,所以列在下面:

$360°=2\pi$ 本位弧,　　$45°=\frac{1}{4}\pi$ 本位弧,

$180°=\pi$ 本位弧,　　$30°=\frac{1}{6}\pi$ 本位弧,

$90°=\frac{1}{2}\pi$ 本位弧,　　$22°30'=\frac{1}{8}\pi$ 本位弧,

$60°=\frac{1}{3}\pi$ 本位弧,　　$15°=\frac{1}{12}\pi$ 本位弧,

[註], 用本位弧來表角,在三角函數裏,可以把本位弧畧去. 例如 $\sin 180°$ 寫作 $\sin \pi$,

$\sin 2$ (本位弧) 寫作 $\sin 2$.

習 題 六

問下面的角在第幾象限:(1—8)

1. $\frac{5}{12}\pi$.　　2. $-\frac{1}{6}\pi$.　　3. $-\frac{7}{3}\pi$.

4. $\frac{15}{16}\pi$.　　5. $-\frac{11}{4}\pi$.　　6. $\frac{\pi+2}{6}$

7. $-\frac{3\pi+2}{5}$　　8. $-\frac{5}{2}$.

化下面的弧度爲角度：(9—14)

9. $\frac{1}{2}$.　10. $\frac{2}{3}\pi$.　11. -2.5

12. $-\frac{3}{8}\pi$.　13. $\frac{\pi+1}{6}$.　14. $\frac{3\pi+2}{5}$

化下面的角度爲弧度：(15—20)

15. $135°$.　16. $990°$.　17. $-120°$.

18. $11.25°$.　19. $1440°$.　20. $-200°$.

用角度和弧度來表明下面的角：(21—22)

21. $\frac{2}{3}$直角　22. $1\frac{1}{4}$平角,

23. 圓的半徑爲25尺，對弧長$37\frac{1}{2}$尺，求圓心角的弧度.

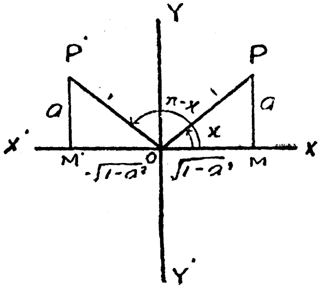
24. 圓的半徑爲4尺，圓心角爲80°，問對弧長幾尺?

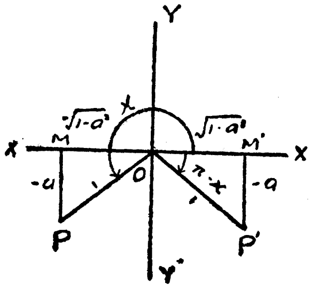
25. 弧長9.6尺，所對的圓心角爲1.2本位弧，求圓的半徑.

19. 從已知的函數求角. 從已知函數求出來的角不止一個，可以多到無限，不過小於2π的正角也只有兩個.

用公式來表明從某函數求得此無限多之角，叫做角的普遍值；在普遍值裏，絕對值最小的角叫做角的主值.

1. 已知正弦的角. [問題] 已知 $\sin x=a$ 或 $-a$，求 x 角.



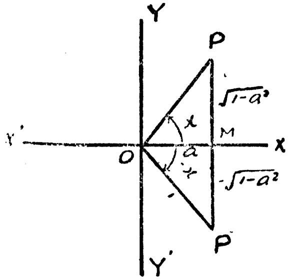


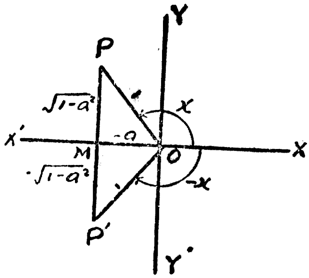
如果 a 爲正照左邊的圖，如果 a 爲負照右邊的圖，x 和 $\pi-x$ 的正弦都是 a 或都是 $-a$. 因 $\pi=180°$，所以 n 爲正或負的整偶數時，$(n\pi+x)$ 角的迴轉線總在 OP 位置；n 爲正或負的整奇數時，$(n\pi-x)$ 角的迴轉線總在 OP' 位置，這些角的正弦都等於 a 或都等於 $-a$. 又 -1 的偶次冪爲正，奇次冪爲負，連合起來講，得到下面的公式：

n 爲 o 或爲正或負的任何整數時，

$$\sin x=\sin[n\pi+(-1)^n x]. \qquad [1]$$

2. 已知餘弦的角. [問題]. 已知 $\cos x=a$ 或 $-a$, 求 x 角.



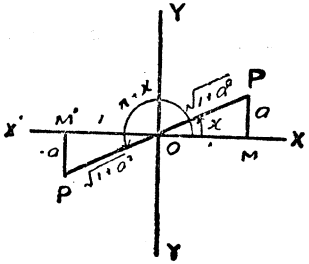


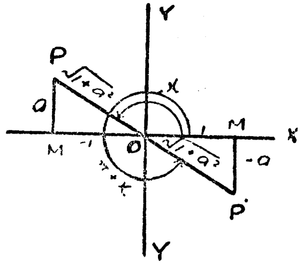
如果 a 爲正照左邊的圖,如果 a 爲負照右邊的圖, x 和 $-x$ 的餘弦都是 a 或都是 $-a$. n 爲正或負的任何整數時, $2n$ 一定是偶數, 所以 $(2n\pi+x)$ 角的迴轉線總在 OP 位置, $(2n\pi-x)$ 角的迴轉線總在 OP' 位置, 這些角的餘弦都等於 a 或都等於 $-a$, 故得公式如下:

n 爲 o 或爲正或負的任何整數時,

$$\cos x=\cos(2n\pi\pm x). \qquad [2]$$

3. 已知正切的角. [問題]. 已知 $\tan x=a$ 或 $-a$, 求 x 角.





如果 a 爲正,照左邊的圖, $\tan x=\dfrac{a}{1}=a$,

$\tan(\pi+x)=\dfrac{-a}{-1}=a$; 如果 a 爲負,照右邊的圖,

$\tan x=\dfrac{a}{-1}=-a$, $\tan(\pi+x)=\dfrac{-a}{1}=-a$, n 爲正或負的整偶數時, $(n\pi+x)$ 角的迴轉線,總在 OP 位置; n 爲正或負的整奇數時, $(n\pi+x)$ 角的迴轉線,總在 OP' 位置。這些角的正切都等於 a,或都等於 $-a$,故得公式如下:

n 爲 o 或爲正或負的任何整數時,

$$\tan x=\tan(n\pi+x). \qquad [3]$$

[註] 照反商函數的關係,已知其他三種函數求角的公式如下:

$$\csc x=\csc[n\pi+(-1)^n x],$$

$$\sec x=\sec(2n\pi\pm x),$$

$$\cot x = \cot(n\pi + x),$$

例一. 已知 $\sin x = \frac{1}{2}$, 求 x 的普遍值和四個最小的正角.

[解] 正弦等於$\frac{1}{2}$的角的主值爲$\frac{1}{6}\pi$ (即 30°)

$x = \frac{1}{6}\pi$ 代入 (1).

$$\sin x = \sin\left[n\pi + (-1)^n \frac{1}{6}\pi\right]$$

$$\therefore \quad x = n\pi + (-1)^n \frac{1}{6}\pi.$$

$$n=0, \qquad x = \frac{1}{6}\pi = 30^\circ;$$

$$n=1, \qquad x = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ;$$

$$n=2, \qquad x = 2\pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{13}{6}\pi = 390^\circ;$$

$$n=3, \qquad x = 3\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{17\pi}{6} = 510^\circ.$$

例二. 已知 $\tan x = -1$, 求 x 的普遍值和小於 2π 的正角.

[解]. 正切爲 -1 的角的主值等於 $-\frac{1}{4}\pi$, (即 $-45°$) $x=-\frac{1}{4}\pi$ 代入 (3),

$$\tan x=\tan\left(n\pi-\frac{1}{4}\pi\right).$$

$$\therefore \qquad x=n\pi-\frac{1}{4}\pi.$$

$$n=1, \qquad x=\pi-\frac{1}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi=135°;$$

$$n=2, \qquad x=2\pi-\frac{1}{4}\pi=\frac{7}{4}\pi=315°$$

20、 反三角函數, 從已知三角函數既然可以求角, 那末一定可以用已知函數來表角. **用已知三角函數來表明的角叫做反三角函數.**

例如 $\sin 30°=\frac{1}{2}$, 那末正弦爲 $\frac{1}{2}$ 的角, 等於 $30°$, 寫作 $\sin^{-1}\frac{1}{2}=30°$. 記在函數右邊上角的 -1 爲反函數的記號.

但是正弦等於 $\frac{1}{2}$ 的角不止一個 $30°$, 還有許多像 $150°$, $390°$, $-210°$ 等, 所以反三角函數有許多

的值,這就是反三角函數的多值性,這個絕對值最小的角像30°,就是上節所講的角的主值,叫做反三角函數的主值.

照上面所講,如果 $\sin x=a$, 那末照主值講 $\sin^{-1} a=x$. 照普遍值講,

$$\sin^{-1} a=n\pi+(-1)^n x.$$

照同樣的理,如果 $\cos x=b$, 那末

$$\cos^{-1} b=2n\pi\pm x;$$

如果 $\tan x=c$, 那末

$$\tan^{-1} c=n\pi+x.$$

例如 $\tan\frac{1}{4}\pi=1$, $\quad\therefore\quad \tan^{-1}1=n\pi+\frac{1}{4}\pi$.

(註一) 既然用 -1 表反三角函數的記號,所以三角函數的負指數 -1 寫在括弧外面如

$$(\tan x)^{-1}=\frac{1}{\tan x}.$$

(註二) 上面所講的是英美通用的記號,在歐陸諸國,用 arc 做反三角函數記號,如

$\operatorname{arc}\sin a=x$, 表明正弦為 a 的弧或角

習 題 七

從下面的已知函數，求角的普遍值和兩個最小的正角(1–8).

1. $\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$　　2. $\cos A=\frac{1}{2}.$

3. $\tan A=1.$　　4. $\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

5. $\sin x=-1.$　　6. $\tan x=-\sqrt{3}.$

7. $\cos x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}.$　　8. $\tan x=-\frac{1}{5}\sqrt{3}.$

求下面各角的普遍值(9–14)：

9. $\sin x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}.$　　10. $\cos y=-\frac{1}{2}.$

11. $\tan A=\pm 1$　　12. $\cot B=\pm\sqrt{3}.$

13. $\sec C=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}.$　　14. $\csc A=\pm\sqrt{2}.$

用弧度來表明下面反三角函數的普遍值(15–18)：

15. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right).$　　16. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

17. $\tan^{-1}(\pm\sqrt{3}).$　　18. $\cot^{-1}(\pm 1)$

19. 已知 $\sin x=-\frac{1}{2}$, $\tan x=\frac{1}{3}\sqrt{3}$,求$x$的普遍值.

20. 已知 $\sin 2x=\frac{1}{2}$, 證明 $x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

21. 三角方程式 解三角方程式所得的根大概是角,所以用弧度或角度來表明;如果已知數是文字,也可用反三角函數式來表明.

三角方程式,沒有一定的解法,下面的法則,可以幫助我們解三角方程式:

法則 (一) 方程式中如有倍角,分角,和角,較角的函數,化爲單純角的函數.

(二) 如有各種不同的函數,化爲正弦和餘弦.

(三) 化去分數和根號.

(四) 化各函數爲一種函數.

(五) 用代數方法解出上面化得含一種函數的方程式的根.

(六) 照上面求得的函數值,求角的

普遍值或小於360°的兩個正角.

[註一] 有時直接用倍角等的函數來解,不一定要照法則(一).

[註二] 法則(五)的代數解法如能用因式分解較爲便利.

[註三] 法則(四)的化爲一種函數,如用因式分解,只要每因式含一種函數.

[註四] 如果函數值用文字表明,只要用反三角函數式來表方程式的根.

例一. 解方程式　$\cos 2x \sec x+\sec x+1=0.$

[解]　$\cos 2x \sec x+\sec x+1=0,$

$$(2\cos^2 x-1)\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}+1=0,$$

由公式[10]　$2\cos^2 x-1+1+\cos x=0$

$$2\cos^2 x+\cos x=0$$

$$\cos x(2\cos x+1)=0$$

$$\cos x=0$$

$$\therefore \quad x=\cos^{-1} 0=2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$2\cos x+1=0, \qquad \cos x=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad x=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=2n\pi \pm \frac{2\pi}{}.$$

例二 解方程式 $\sin 2x=\cos x$.

[解] $$\sin 2x=\cos x,$$

$$2\sin x\cos x-\cos x=0$$

$$\cos x\,(2\sin x-1)=0.$$

$$\cos x=0, \qquad \therefore \quad x=90^\circ \text{ 或 } 270^\circ,$$

$$2\sin x-1=0, \quad \sin x=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad x=30^\circ \text{ 或 } 150^\circ,$$

$$\therefore \quad x=30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ \text{或 } 270^\circ.$$

例三. 解方程式 $\sin 4x-\sin 2x-\cos 3x=0$.

[解] $$\sin 4x-\sin 2x-\cos 3x=0,$$

由公式[22], $$2\cos 3x\sin x-\cos 3x=0$$

$$\cos 3x\,(2\sin x-1)=0.$$

$$2\sin x-1=0, \quad \sin x=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad x=30^\circ \text{ 或 } 150^\circ,$$

$$\cos 3x=0,$$

$$3x=90^\circ,\ 270^\circ,\ 450^\circ,\ 630^\circ,\ 810^\circ \text{ 或 } 990^\circ.$$

$$\therefore \quad x=30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 210^\circ\ 270^\circ \text{ 或 } 330^\circ.$$

〔註〕 例二照〔註三〕所講的方法;例三照〔註一〕所講的方法.

22. 消去法 二個或二個以上方程式可以利用三角函數的關係來消去一文字.消去某文字後所得的結果叫做某文字的消去式.

例一. 已知 $\sin x=a$, $\cos x=b$. 求 x 的消去式.

〔解〕 $\sin^2 x=a^2$ $\cos^2 x=b^2$.

相加, 因 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,

$\therefore\ a^2+b^2=1$,

例二 已知 $\sec A=m$, $\tan A=n$, 求 A 的消去式.

〔解〕 $\sec^2 A=m^2$,, $\tan^2 A=n^2$.

因 $\sec^2 A-\tan^2 A=1$,

相減, $m^2-n^2=1$.

23. 三角聯立方程式 解三角聯立方程式,和代數的解法相同,不過消去某未知數的時候,要用三角函數的關係來求他的消去式.

例一. 解方程式 $\sin x+\sin y=a$, $\cos x+\cos y=b$,

求 x 和 y.

[解] $$\sin x+\sin y=a, \tag{1}$$

$$\cos x+\ os\ y=b. \tag{2}$$

由公式[21]， $$2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=a, \tag{3}$$

由公式[23]， $$2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=b. \tag{4}$$

相除， $$\tan\frac{1}{2}(x+y)=\frac{a}{b}. \tag{5}$$

$$\therefore\quad x+y=2\tan^{-1}\frac{a}{b} \tag{6}$$

由 (5)， $$\sin\frac{1}{2}(x+y)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

代入 (3)， $$\cos\frac{1}{2}(x-y)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad x-y=2\cos^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}. \tag{7}$$

由 (6) 和 (7). $$x=\tan^{-1}\frac{a}{b}+\cos^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$y=\tan^{-1}\frac{a}{b}-\cos^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

例二. 解方程式

$r\cos x\sin y=a$, $r\cos x\cos y=b$, $r\sin x=c$. 求 x, y 和 r.

[解]　$$r\cos x\sin y=a, \tag{1}$$

$$r\cos x\cos y=b, \tag{2}$$

$$r\sin x=c. \tag{3}$$

用 (2) 除 (1),　$\tan y=\dfrac{a}{b}$,　$\therefore$　$y=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}$.

由 (1),　$r^2\cos^2 x\sin^2 y=a^2$,

由 (2),　$r^2\cos^2 x\cos^2 y=b^2$.

相加,　$$r^2\cos^2 x=a^2+b^2. \tag{4}$$

$$\therefore\quad r\cos x=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{5}$$

用 (5) 除 (3),　$\tan x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b}}$,

$$\therefore\quad x=\tan^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(3) 的平方和 (4) 相加,　$r^2\ a^2+b^2+c^2$,

$$\therefore\quad r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

習　題　八

解下面的方程式,求角的普遍值 (1—10):

1.　$2\sin^2 x+3\cos x=0$.　　2.　$\cos^2 x-\sin^2 x=\dfrac{1}{2}$.

3. $2\sqrt{3}\cos^2 x=\sin x$.　　4. $\sin A+\cos A=\sqrt{2}$.

5. $4\sec^2 y-7\tan^2 y=3$.　　6. $\tan B+\cot B=2$.

7. $\tan^2 x+\cot^2 x=2$.　　8. $\csc x\cot x=2\sqrt{3}$.

9. $\sin\frac{1}{2}x=\csc x-\cot x$.　　10. $3(\sec^2 x+\cot^2 x)=13$.

解下面的方程式,求出小於360°的兩個正角(11－22):

11. $\cos x+\cos 2x=0$.　　12. $\tan 2x\cot x=3$.

13. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.　　14. $\sin x+\sin 2x=\sin 3x$.

15. $\cos 5x+\cos 3x+\cos x=0$.

16. $\sin 4x-\sin 2x=\sin x$.

17. $\sin(x+12^\circ)+\sin(x-8^\circ)=\sin 20^\circ$.

18. $\sec(x+120^\circ)+\sec(x-120^\circ)=2\cos x$.

19 $\sin(x+12^\circ)\cos(x-12^\circ)=\sin 57^\circ\cos 33^\circ$.

20. $\sin\frac{1}{2}x(\cos 2x-2)(1-\tan^2 x)=0$.

21. $\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x+1=0$.

22. $\sin x\cos 2x\tan x\cot 2x\sec x\csc 2x=1$.

求 x 的消去式:

23. $a\sin x+\cos x=1$.　　24. $\sin x+1=m$.

$b\sin x-\cos x=1$.　　$\cos x-1=n$.

25. $\tan x - a = 0.$ 　　26. $\sin x + m = n.$

$\cot x - b = 0.$ 　　$\cos x + p = q.$

解下面的聯立方程式:

27. $y \sin x = a.$ 　　28. $y \sin (x+a) = m.$

$y \cos x = b.$ 　　$y \cos (x+b) = n.$

29. $\sin^2 x + \sin^2 y = a.$ 　　30. $\sin^2 x + y = m.$

$\cos^2 x - \cos^2 y = b.$ 　　$\cos^2 x + y = n.$

24. 反三角函數恆等式和方程式.

關於反三角函數的問題,仍用三角函數的關係來解決,所以**解反三角函數恆等式,或解反三角函數方程式,可先逆推爲三角恆等式或方程式然後再應用三角方程式來推算**下列兩條可以幫助我們解決反三角函數的問題:

(一) 照反三角函數的定義,某數的反函數的同名函數就是某數. 如

$$\sin (\sin^{-1} a) = a$$

(二) 設 $a > 0$, $a \leqq 1$, 那末 $\sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$;

設 $a>0$, 那末 $\tan^{-1} a+\cot^{-1} a=\frac{\pi}{2}$;

設 $a>1$, 那末 $\sec^{-1} a+\csc^{-1} a=\frac{\pi}{2}$

例一. 證恒等式 $2\tan^{-1} a=\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}$.

[證] $\tan(2\tan^{-1} a)=\frac{2\tan(\tan^{-1} a)}{1-\tan^2(\tan^{-1} a)}=\frac{2a}{1-a^2}$

$$\therefore\quad 2\tan^{-1} a=\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}.$$

例二. 證恒等式 $2\sin^{-1} a=\cos^{-1}(1-2a^2)$.

[証]. 設 $\sin^{-1} a=x$, 那末 $\sin x=a$.

$$\cos(2\sin^{-1} a)=\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2a^2.$$

$$\therefore\quad 2\sin^{-1} a=\cos^{-1}(1-2a^2).$$

例三. 解方程式 $\tan^{-1} 2x+\tan^{-1} 3x=\frac{\pi}{4}$

[解]. 設 $\tan^{-1} 2x=A$, $\tan^{-1} 3x=B$,

那末 $\tan A=2x$, $\tan B=3x$.

$$\tan(\tan^{-1} 2x+\tan^{-1} 3x)=\tan\frac{\pi}{4}.$$

$$\tan(A+B)=1,$$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1,$$

$$\frac{2x+3x}{1-2x\cdot 3x}=1,$$

$$\frac{5x}{1-6x^2}=1,$$

$$6x^2+5x-1=0,$$

$$(x+1)(6x-1)=0.$$

$\therefore$ $x=-1$ 或 $\frac{1}{6}$.

例四. 解方程式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}$.

[解] $\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}x.$

$$\sin(\sin^{-1}2x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}x\right),$$

$$2x=\sin\frac{\pi}{3}\cos(\sin^{-1}x)-\cos\frac{\pi}{3}\sin(\sin^{-1}x)$$

$$2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}x,$$

$$\frac{5x}{2}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}}{2},$$

$$5x=\sqrt{3}\sqrt{1-x^2},$$

$$25x^2=3(1-x^2),$$

$$28x^2=3.$$

$$\therefore \qquad x=\pm\sqrt{\frac{3}{28}}=\pm\sqrt{\frac{21}{28\times 7}}=\pm\frac{1}{14}\sqrt{21}.$$

習 題 九

證明下面的反三角函數恆等式(1—16):

1. $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}.$

2. $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x.$

3. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}.$

4. $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}.$

5. $\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x$

6. $\tan^{-1}2+\tan^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\pi.$

7. $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}).$

8. $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

9. $\sin^{-1}x=\sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\pi$.

11. $\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\sin^{-1}\dfrac{12}{13}=\sin^{-1}\dfrac{63}{65}$.

12. $\tan^{-1}\dfrac{1}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{5}=\tan^{-1}\dfrac{4}{7}$.

13. $\sin^{-1}0.5+\sin^{-1}\dfrac{1}{2}\sqrt{3}=\sin^{-1}1$.

14. $\cos^{-1}\dfrac{3}{10}\sqrt{10}+\sin^{-1}\dfrac{1}{5}\sqrt{5}=\dfrac{1}{4}\pi$.

15. $\sin^{-1}\sqrt{x:y}=\tan^{-1}\sqrt{x:(y-x)}$

16. $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}[(3x-x^3):(1-3x^2)]$.

解下面的方程式(17—24):

17. $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{5}{12}$.

18. $\cot^{-1}x=2\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$.

19. $\cos^{-1}x=2\cos^{-1}a$

20. $\cos^{-1}x=2\tan^{-1}k$.

21. $\sin^{-1}x-\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$.

22. $sin^{-1}\frac{5}{x}+sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$.

23. $tan^{-1}x+2\,cot^{-1}x=\frac{2}{3}\pi$.

24. $cot^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}+tan^{-1}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2}{3}\pi$.

雜 題 三

1. 一輪每秒鐘旋轉10次,問旋轉兩個本位弧需要幾秒鐘?(照 $\pi=\frac{22}{7}$ 算)

2. 已知 $cos\,3x=-\frac{1}{2}$, 證明 $x=\frac{2n\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{9}$.

3. 求正弦爲 $-\frac{1}{2}$ 的大於 $-360°$ 的兩角負角

4. 求正切爲 $\sqrt{3}$ 的四個最小正角.

求下面各式的值(5—8):

5 $sin^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 6 $tan^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

7. $sin(cos^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3})$. 8 $tan\,(2\,tan^{-1}a)$.

證明下面的恆等式(9—14):

9. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$.

10. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$.

11 $\tan^{-1}\frac{m}{n}-\tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}=\frac{1}{4}\pi$.

12. $2\sec^{-1}a=\tan^{-1}[2\sqrt{x^2-1}:(2-x^2)]$.

13. $\sin^{-1}\sqrt{(x-y):(x-z)}=\tan^{-1}\sqrt{(x-y):(y-z)}$.

14. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$.

解下面的方程式(15—27):

15. $\sin(x-30^\circ)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x$.

16. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\cos x$.

17. $\tan(60^\circ+x)\tan(60^\circ-x)=-2$.

18. $(1-\tan x)\cos 2x=a(1+\tan x)$.

19. $\sin 11x\sin 4x+\sin 5x\sin 2x=0$.

20. $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$.

21. $\sin^{-1}x+2\cos^{-1}x=\frac{2}{3}\pi$.

22. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\frac{1}{2}x=120^\circ$.

23. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \tan^{-1} 3\sqrt{3}$.

24. $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} 2x$.

25. $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x) = \tan^{-1}\frac{4}{3}$.

26. $\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1} + \tan^{-1}\frac{x-1}{x} = \tan^{-1}(-7)$.

27. $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\frac{8}{31}$.

28. 已知 $\sin(x+y) = \frac{1}{2}$, $\cos(x-y) = \frac{1}{2}$, 求 x 和 y 的正值.

29. 已知 $\tan(A-B) = 1$, $\sec(A+B) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, 求 A 和 B 的正值.

30. 從公式 $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, 證明 $\cos x > \quad = \frac{x^2}{2}$.

三角

編輯者	中等算學研究會
校訂者	段調元　周家樹
發行者	南京書店 上海河南路
總發行所	南京書店 南京太平路
特約經售處	開封龍文書莊　廣州現代書局　廈門開明書店
分售處	各省各大書局

每冊售實價大洋八角

（外埠酌加郵費）

中華民國二十二年二月初版

余介石先生編譯書名

書名	冊數	印行者	備註
(一)中等幾何研究法	一	中等算學研究會	編。已出
(二)微積術大要	一	仝右	合編。已出
(三)簡明幾何學	一	仝右	仝右
(四)新學制初中算術	二	南京書店	主編。已出
(五)新學制初中代數	二	南京書店	仝右
(六)新學制初中幾何	二	南京書店	仝右
(七)新學制初中三角	一	南京書店	仝右
(八)霍氏高中代數	一	南京書店	主譯。即出
(九)三S氏高中平面幾何	一	南京書店	仝右
(十)三S氏高中立體幾何	一	南京書店	仝右
(十一)格氏高中平三角	一	南京書店	仝右
(十二)格氏高中球三角	一	南京書店	仝右
(十三)格氏對數表及三角表	一	南京書店	仝右
(十四)溫氏平面解析幾何	一	南京書店	仝右
(十五)溫氏立體解析幾何	一	南京書店	仝右
(十六)代數升學指導	一	南京書店	合編。已出
(十七)算學通論	一	中華書局	編。已出
(十八)新中華高中代數	一	仝右	仝右
(十九)幾何作圖原理 佩式森 Petersen	一	仝右	譯。即出

書名	冊數	印行者	備註
(二十)混合算學準備書	六	商務印書館	合編。已出
(二一)初中算術題解	一	仝右	仝右
(二二)初中代數題解	一	仝右	仝右
(二三)初中三角題解	一	仝右	仝右
(二四)幾何三大問題 克萊因 Klein	一	仝右	譯。已出
(二五)高等混合法算學 布利士 Breslich	一	仝右	譯。即出
(二六)高中平球三角 巴散儒 Passano	一	仝右	合譯。即出
(二七)微分方程式 皮阿喬 Piaggio	一	中央大學講義處	合譯。已出
(二八)非歐幾何學 卡士羅 Carslaw	一	仝右	仝右
(二九)近世代數補證 卜西 Bocher	一	仝右	編。已出
(三十)解析幾何講義	一	仝右	仝右
(三一)球三角學講義	一	東南大學講義處	編。售缺
(三二)北新初中算術	二	北新書局	合編。已出
(三三)北新初中代數	二	仝右	合編。即出
(三四)北新初中三角	一	仝右	仝右