量度之精密及圖解法概論

吳[illegible][illegible]
呂大元 譯

量度之精密及圖解法概論

H. M. GOODWIN 著
(PROFESSOR OF PHYSICS,
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY)

國立中山大學理工學院助教
吳蔭圃

國立編譯館編譯
呂大元

合譯

序

茲所刊印的量度之精密及圖解法概論（Elements of the Precision of Measurements and Graphical Methods），久經著者據為教材，用以教授麻省工業專門學校（Massachusetts Institute of Technology）的學生，俾可與他們在物理實驗室內的工作，相輔而行。著者已將原有印就的講義，加以補充，編成此册，以廣流播，而應多方面的需求。這本書原來雖只為這班上學生之需要而寫的，但望其他工業學校或專門學校其課程中饒有數量的工作者，採作教本，也能適用，即對一般在實驗室裏作測驗的工程師，也求其能有所裨益。許多實驗所對於討論結果中誤差來源的影響與數值，每多忽視。這件事實，所以達到作者的注意，乃是與數百個研究生個別談話所得的結果。他們當進入麻省工專之頃，每作豁免實驗工作之請求。固然，你把學生的實驗記錄簿翻開一看，覺得他們對於實驗工作，未嘗馬虎，但其能瞭解如何從個別量度的

精密，用數字來表示最後計算結果之精密程度者，實不多覯。 不過著者卻敢斷言：物理實驗的訓練，對於讀科學或學工程的人，最有價值而歷久不磨滅的裨益，乃是教他從事任何研究，不管是純粹科學的或是屬於工業的，開始時就能具有正確的見地；換言之，他在未動手研究之前，就有認識問題要點的本領，以後作起實驗來，時間與工作，就可兩不虛擲。 固然不錯，解決一切實驗問題最要之點，全靠判斷力的訓練，此乃由實驗者個人的經驗得來，但在學生最初從事實驗時，卽須引起他對精密方法的注意，仍屬當務之急。 而且從經驗上我們知道：只要學生略受精密量度之訓練，及能運用初步的微分學，這一樁事，卽能辦到。 所以本校學生讀到二年級中期，把力學的基本量度實驗，作過六個或八個後，就可攻讀此課。 三四年級所作實驗，當須繼續應用本課所授之原理，而在畢業論文中"精密的討論"一事，也是非常重要。 據著者經驗，一般學生對了解原理，尚無多大困難，至將原理應用到具體問題，就覺得有點無所適從了。 因此，要想

把這班課,教得很滿意,最好是讀者不多,而使學生作口頭的問答,及多多選作書中問題,或將與所作實驗有關之問題,拿來叫他們解決。教室內所講授的與實驗室中所作的,要有極密切的連絡,像洛格物理實驗室(Rogers Laboratory of Physics)之規定,凡屬實驗報告,必須附有數據精密的討論,或必須解幾個有關實驗精密的問題,而所用實驗教程,也本此目標寫就,如此,理論與應用,方能兩皆顧到。

本書寫法,力求簡短。設如根據最小二乘法(Method of Least Squares)及或然率之理論(Theory of Probability),對這門學問作完備的討論,及詳盡的證明,則所須工作,不知要擴大到若干倍,這反失了開設本課程的目標。少數的理論與公式,其證明為學生所應當知道者,可於普通講最小二乘的冊籍中尋得。書之頂好的,要算巴爾力之最小二乘法(Bartlett's Method of Least Squares);關於精密方法詳盡的論述,可閱何爾曼的量度之精密(Holman's Precision of Measurements)。

例題詳解一章之加入,是為着一般無處請益

的學生自行解題時，可以獲到幫助。 問題一百多則，係由最近許多試題集合而成。 圖解法一章，專門論及作圖的方法；從圖中尋求兩變數間函數關係的法則，也包含在這一章內。 對數作圖，對於讀物理或學工程的用途最廣。幾張有助於精密計算的表格，皆載在附錄中。

年來著者教授此課，深得本校同人的幫助，著者附此致謝。 得銳士柯教授(Professor William J. Drisko) 講授此課及其他有關之學科，經驗極富，故他對我的幫助更多，著者尤深感激。

鼓德溫(H. M. Goodwin)

目　錄

第二章 圖解法……………………………………51

量度之精密及圖解法概論

第一章

量度之精密

1. 物理量度的分類

一切物理的量度，可別為直接和間接兩種。凡量度可直接表示所求結果的，叫直接量度(Direct Measurement)。如用尺測距離的長短，用等臂天平秤物體的質量，和用直接代替法量導線的電阻等，都是直接量度的例子。假設所求結果，要由數個量度，用某種公式，計算而得的，這種量度，就叫間接量度(Indirect Measurement)。用擺測定重力加速度 g 時，包含測量擺的長短和振動的時間；用分光計測定物質的折射率，先要量度稜鏡的角度和最小偏向；用混合法測定物體的比熱，也要由若干個溫度和重量的量度，合併計算，才得結果。這皆是間

接量度的例子。 實際問題,多屬於第二種。

2. 結果的可靠度

一種結果, 不論是得自直接量度或是得自間接量度,要想在科學上或工業上,確有價值,則對結果的可靠度 (Reliability) 非有數字上的估計或測定不可。 這種估計,非常重要。 因爲測驗的結果,一器一法的考探,或者常數的測定, 假如研究者不能說出結果的可靠度究竟怎樣,這種結果, 不會具有什麼價值的。 所以從事實驗者,可靠度的研究,應該時念不忘。 學子對於研究數據 (Data) 可靠度的能力,和他能做準確工作的本領, 有同樣的重要性,兩皆不可偏廢。

結果的精密 (Precision) 或精密度 (Precision Measure) (簡作 p. m.),常爲表示結果可靠度最良之數值,是可由各種已知誤差推算而得,推算方法,以後再說。 嚴格的講,結果的準確(Accuracy),應指測得的結果數值, 和真正數值間吻合的程度。然真正數值,常不可知,所以表明量度絕對準確之

數值,勢不可得。 多數情况之下,只要能毅求到估計的或推算的精密度,我們也就認爲滿意了。 準確和精密兩個名詞,常常被人家不小心的混用起來。

直接量度的精密度,不見得比間接量度的精密度,來得次要。 因爲間接量度是由各個直接量度推算而得,前一個的精密度,當然以後一個的爲轉移,所以本書也是先述如何測定一組直接觀察可靠度的數字估計,再及其他。

3. 誤差的分類

當測定一種量時,縱使器具或方法,在可能範圍內,已達極度的精密,但如反復量度,各次結果,總難盡同。 此不獨人異器異法異時爲然,就是同一觀察者在同一情况下,幾次量度的結果,也多不一致。 這種一不致,是由種種來源不同之誤差(Error)所造成的,而此種誤差,又是一切實驗數據所難避免者。 爲便利計,特將一切誤差,分爲兩類:一是可測定的,一是不可測定的。

(1)可測定的誤差* (Determinate Errors)

顧名思義,可測定誤差的數值,當可測定;因可測定,故對結果的影響,就能消除。 此類誤差,又分下列數種:

a. **儀器誤差**(Instrumental Errors) 這種誤差,多因儀器的粗疏,調變的失當所致。 例如測微螺旋構造不良,標尺或圓周刻度不勻,圓心偏側,和天平兩臂長短不等之類。

b. **個人誤差**(Personal Errors) 這種誤差,是由於各個觀察者個性的特異而生的。例如記載一種現象的發生,有人恆失之太快,有人恆失之太慢。測記某一事物,經過某一定地點時,這種誤差,至易發生。 所以觀察者的人差(Personal Equation)在此項觀察中,實是一個重要的因子。

c. **方法差誤或理論誤差** (Error of Method, Theoretical Errors) 這種誤差,多因所用儀器上的

*這種誤差,值量的大小,同符號的正負,常有一定,所以又叫做常定誤差(Constant Errors)。

刻度,在觀察時之情況下,不可作爲標準而生的。

現在把上述各種誤差來源的性質，舉例說明如下:設有化學上用的天平一架,兩臂長度,略有不同;如依常法使用他,所有秤量，皆因兩臂異長，發生誤差;誤差的大小,當依兩臂不等的程度而定。拿同一物質,在同一天平上,用同一方法,反復秤量,看不出這種誤差的來源。獨立的秤量,重復多次,固然能盡量利用天平的靈敏度,把屢次的結果,互相校正,然而常定的儀器誤差,仍可使最後結果,錯得很大。這種誤差的存在,祇有用不同的天平,比較同一物質的重量,或用不同的方法,秤量同一物質,方可檢查出來。因為不同的儀器而有相同並大小差不多的儀器誤差者,他的或然率(Probability),真是渺乎小矣。

又如用尺量一距離，尺的溫度是攝氏二十度，但知尺之刻定標準,是在另一溫度(例如 0°C.),那末依照同一方法,處在同一情況下,探用此尺,反復量度,所得的結果,大概彼此極表一致,而對常定誤差的存在，也覺並無端緒可尋。但這結果一定失

之太小，因溫度從 0°C. 變到 20°C. 後，尺起膨脹，他的單位值，已經統同變大了。不過這種由於用尺時與刻定標準時情況之不同，所引起的誤差，在性質上是可以測定的。因為尺的膨脹係數，定標準時和使用時的溫度，都是改變觀察結果成為應有數值的必須數據，此種數據，現既完備，前所引生的誤差，當可稿定；至於所謂應有數值云者，就是說刻定標準和量度時，溫度如同，這個距離，應該是多長？由上可知，在同樣情况下，一組觀察，縱極一致，並不能認為常定誤差確不存在的標準，結果中甚或含有很大的誤差，也說不定。

要想檢查與消除此等誤差，必須用不同的方法，不同的儀器，如可能時，更由不同的觀察者，共作量度；比較這些各別測定的結果，並用下述特殊方法平均之，目的方可達到。因為在不同情况下，發現同樣來源的誤差，這種或然率，非常之小。常定誤差，雖然存在，有時未能發覺，最有趣味的實例，便是不列顛科學促進協會委員會(British Association Committe) 最初測定電阻單位－歐姆－的一段故

事。他們因所得各個觀測,非常一致,遂斷定結果的可靠度極高。但是後來由不同的觀測者用不同的方法,再行測定,所得數值,竟與該會結果差至百分之一以上,這是遠超於該會測定所得到精密之程度。於是一般人遂注意到委員會所得的結果中,也許有常定誤差存在,幾經研究,這個事實,居然證明了。

d. **剩餘誤差**(Residual Errors)　結果裏面所有可測定的誤差來源,完全改正後,其中仍會有微小誤差的遺留,微差的大小,無法測定,所以他就另屬一類,叫做不可測定的誤差(Indeterminate Errors)。如因天平兩臂不等所生的儀器誤差,他的修正,是用兩臂的比率,而這比率測定的精密,也僅能達到某一限度,那末更正後的秤量,仍可含有誤差,誤差的大小,全看測定更正量時所達到的精密而定。又如更正尺的膨脹,必須知道造尺物質的膨脹係數,而此係數的測定,也僅能精密到一定限度,用此係數改正某量時,因係數本身的不可信確,故在一定限度以外,某量仍然不能碻定。因爲常定誤差

未能完全更正而遺存的小量誤差，叫做剩餘誤差；他的數值和代數符號，不能測知，但其極限值，常可估定。因此，把剩餘誤差，放在"不可測定的誤差"一類中去敘說，較爲適合。

(2)不可測定的誤差

偶然誤差(Accidental Errors) 從經驗上知道：一種量度，由同一觀察者用同一器具，在顯著的同樣情况下，反復測定若干次，結果的末位數字，或末兩位數字，每不相同。就是極簡單的量度，如用刻有毫米的尺，去測兩線間的距離，假若毫米以下的小數，是用目力估計的，那末繼續量度若干次，誤差也可達到十分之一毫米。這種誤差，能使結果數值，時覺過高，時覺太低的，完全是由於觀察者對於誤差的原因，無法控制的緣故。通常如溫度的忽昇忽降，致使儀器各部，膨脹不均，或使折射改變，又如氣壓之變化，機械之移動，或風之吹擾，而令儀器搖擺等，更如觀察者耳目的缺陷或疲勞所引起的生理上的原因，都是觀察者無法制止的。

4. 誤差定律

上述不可測定的誤差,其值雖不可測,但其大小和符號,卻能服從一種完全有定的機會定律(Law of Chance)。* 定律的性質,可用下例來說明。設有一位精練的槍手,在同樣情況下,向同一靶上,發彈一千次。由經驗得知:各彈分配的狀况,初看似乎全無規則,但詳加考察,即知他幾乎同一個完全有定的定律相符合。現就實在的例子說:在槍靶上,繪了若干條水平線,每線距離各一英尺,與鵠的相當的中線,位於槍靶中部的一個空格中間,彈子射完後,所得結果如下:

位		置	中彈數
$+5\frac{1}{2}$	到	$+4\frac{1}{2}$	1
$+4\frac{1}{2}$	到	$+3\frac{1}{2}$	4
$+3\frac{1}{2}$	到	$+2\frac{1}{2}$	10
$+2\frac{1}{2}$	到	$+1\frac{1}{2}$	89

*又名誤差定律(Law of Error)

$+1\frac{1}{2}$	到	$+\frac{1}{2}$	190
$+\frac{1}{2}$	到	$-\frac{1}{2}$	212
$-\frac{1}{2}$	到	$-1\frac{1}{2}$	204
$-1\frac{1}{2}$	到	$-2\frac{1}{2}$	193
$-2\frac{1}{2}$	到	$-3\frac{1}{2}$	79
$-3\frac{1}{2}$	到	$-4\frac{1}{2}$	16
$-4\frac{1}{2}$	到	$-5\frac{1}{2}$	2

倘若把槍彈落在各格裏的數目做縱坐標,格子與中線的距離做橫坐標,用上數據,就畫得圖1.。

由圖可知:從中線起,槍彈的正差數發現的次數,與負差數發現的次數,大約相等,而且小差數比大差數發現的次數較多。 如果發彈次數(相當於觀察次數)增加時,曲線上高低不規則之處,就漸漸消滅,終成一光滑曲線;而且可用數學證明,在極限時,代表機會定律的曲線,通常形狀,就像圖2.的樣子。 他的方程式是

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}.$$

這裏，x 表誤差大小，y 表 x 發現次數，h 是常數，值隨觀察性質以變，而各觀察的精密度，又可利用 h 來作一種計量。此方程式所表的曲線，叫做誤差曲線(Curve of Error)，

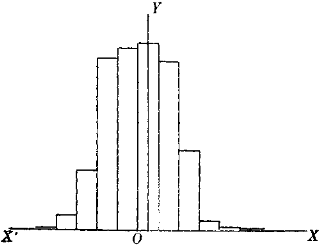

圖 1.

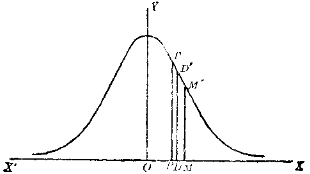

圖 2.

詳細考察此曲線,得知:

第一——小的誤差比大的誤差發現次數多($x=0$時,誤差曲線有一極大值)。

第二——很大的誤差,不易發現(曲線漸近於X軸)。

第三——數値大小相同的正誤差和負誤差,發現的次數,極近相等(誤差曲線,對Y軸對稱)。

因一組觀察的偶然誤差(Accidental Errors)和剩餘誤差,都遵機會定律,故以根據此定律的數學方法,來處理他們,照理是沒有問題的。不過要記得:定律的自身,是表示一種極限的情況,乃和無限數觀察相當的,現在引申起來,把他應用在有限數的觀察上,或然率當然是有限,並且觀察次數越少,或然率也越小。

5. 最小二乘法

上面已經說過,在大多數量度當中,所測的量之真正數値,是無人知道,而且沒法子測定的,假如已經知道,那末量度一舉,反屬多事了。所以我們

從實驗數據裏,能毅希望求得的,不過是問題中一量或數量的最近或然値*(Most Probable Value)。就多數情形而論,要求此値,並不繁難,但遇觀察的次數,比待測定的未知量的數目還多時,這個問題就多少有點麻煩了。數學裏有一門分科,專講改正觀察誤差的方法,使誤差對結果的影響,變得極小,因可求得所要的最良代表値;此門分科,就叫最小二乘法(Method of Least Squares)。這個名稱,是由於改正觀察結果時所根據標準而來的。標準是這樣定的:一組互相關連的觀察,其最近或然値,是一種數値,應用他時,可使各誤差的平方和,成爲極小。由最小二乘法引生的許多推論,以後本書將設爲正確而應用之,至於他的證明,讀者可參考巴爾力之最小二乘法,或其他書籍。本書圖解法一章中,將說明如何應用最小二乘法,來推算實驗方程式(Empirical Equation)中之常數。

*大概是這個數値,叫「或然値」;有極大或然性的數値,或近似眞正數値的程度極高的或然値,叫「最近或然値」。

6. 算術平均數——差數度

現在研究直接量度之精密。設 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 等爲某量的一組觀察值，各觀察值的或然性程度，完全相等。在此種情況下，該量的最近或然值，是此組數量的算術平均數 m(Arithmetical Mean)，卽

$$m = \frac{\Sigma a}{n}。\qquad (1)$$

但是因爲該量的真正數值，無法知道，所以各觀察自身及平均數 m 同真值間的誤差，不能測定，不過在每個觀測與平均數間之相差，我們是能夠得一個數量。從此，平均數本身的或然差(Probable Deviation)，便可計算出來。這種一組觀察值中任意一個與平均數間的差數，叫做觀察值與平均數的差數。此差數，和觀察值的絕對誤差（或卽觀察值和真實值間的較數），應該分別清楚，兩者不但不同，有時竟可相差很大。如此推得的差數，和不可測定的誤差，同遵機會定律，故可受同一的數學處理。這種差數，雖能表示該量度偶然誤差的大小，但對存沒未明的常定誤差之是否存在或值

之大小,則無所指示。

如上所述,假設一組觀察值的數字差數爲d_1,d_2,……d_n,則因正差數和與負差數和相等,故d_1,d_2,……d_n,的代數和必定是零。但如祇計他們的算術平均數,而不管他們符號的正負,則結果的數目,就是表明:從一組觀察值中任意取出一個來,平均的講,他可以與平均數m,相差到這樣的一個數量(正的或負的)。這個算術平均數

$$a.d. = \frac{\Sigma d}{n} \qquad (2)$$

叫做一個觀察值的平均差數,通常用$a.d.$表之。記錄a_1,a_2,……a_n時,要留餘地以便計算d_1,d_2,……d_n和$a.d.$,寫的方式如下:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & - & m & = & d_1 \\ a_2 & - & m & = & d_2 \\ a_3 & - & m & = & d_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_n} & - & m & = & \underline{d_n} \end{array}$$

$$m = \frac{\Sigma a}{n} \quad a.d. = \frac{\Sigma d}{n}$$

從另一方面看起來，$a.d.$ 的意義是這樣的：在同樣情況下，重作一個新觀察時，觀察值和平均數 m 間的差數，大於或小於 $a.d.$ 的可能性，是完全相同而無所偏傾。再就量度為偶然誤差所影響而論，$a.d.$ 又是表示一組中任一個觀察值不定性的一種數字計量，他為正為負的機會是完全相等。

7. 平均數的差數

通常我們所要知道的，是平均數的可靠度，而非各個觀察值的可靠度。因為平均數是從各個觀察值中求出來的，所以或然性程度，比較各個觀察值要高，因而平均數的差數，比較各個觀察值的差數小；平均數的可靠度較大到什麼程度，他的差數就較小到什麼程度，兩者適成比例。從 n 個或然率相等的觀察值中，求出來的算術平均數，其可靠度，是一個觀察值的可靠度之 $\sqrt{n}$ 倍，這是有法證明的。因此，如一組中一個觀察值的差數是 $a.d.$，那末 n 個此種觀察值的平均數之差數，他的大小，祇有 $a.d.$ 的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$，即平均數的差數(Deviation of the

Mean 以 A. D. 略語表示)為

$$A.D.=\frac{a.d.}{\sqrt{n}} \qquad (3)$$

如此,假設兩線間的距離,經過九次量度後,得到的平均值是 1.3215 毫米,而任一量度的平均差數 $a.d.$ 是 0.0033 毫米,則平均值的或然差,不會大於 $\frac{0.0033}{\sqrt{9}}$ 或 0.0011 毫米。由此可知在一般情形之下,不必把觀察的次數,增多過一定限度(如九個或十六個),* 因為觀察次數增多時,精密度的增進並不能同時間及工作兩項增加的一樣快,得不償失,殊可不必。

8. 分數差數度及百分差數度

為便利起見,常用量度本身的分數或百分數,表示量度的可靠度。由前所述,可得下列兩種最通用的差數度(Deviation Measure)。

*原子量的測定,八次到十次也就夠了,試驗一種方法的精密時,每個變數,不過測定四次到六次,標準溶液的配製,不過測定三次到四次,通常測定,二次到三次也就可以了。

一個觀察的分數差數 $= \frac{a.d.}{a}$；

一個觀察的百分差數 $= 100\,\frac{a.d.}{a}$；

平均數的分數差數 $= \frac{A.D.}{m}$；

平均數的百分差數 $= 100\,\frac{A.D.}{m}$。

上面這些差數度，向無計算到兩位以上有效數字者(詳後)，所以 a 和 m，値近相等，計算時不妨隨便使用。*

9. 差數度與精密度之關係

稍加思索，卽可明瞭；上述差數度，都不過是偶然誤差之大小的一種計量；要知一個結果，能因剩餘誤差發生極大錯誤，而各觀察彼此間，依然表示一致，他們的差數度，也與之互相對應的，取値很小。故必剩餘誤差的大小，可以估計，則結果的真正精密度(簡作 $p.m.$)，方可算出，算法如下：

*在化學分析方面，因爲結果是用百分數表示的，如再用百分數表示差數度，易生混亂，所以化學分析裏面，常用千分之幾表示結果的精密。

令剩餘誤差的估計值是 $r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$。又令 $d.m.$ 表示偶然誤差的差數度。$d.m.$ 可用平均差表示，也可用分數差或百分差表示。但是不論用何種方法表示，一經決定後，所有剩餘誤差必須用同法表示之。由此可知，結果的可靠度之最近或然度(Most Proper Measure)為

$$\overline{p.m.}^2 = \overline{d.m.}^2 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots\cdots + r_n^2, \quad (4)$$

$$\text{或 } p.m. = \sqrt{\overline{d.m.}^2 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots\cdots + r_n^2}. \quad (4a)$$

如此，一個結果的精密度，與其差數度不同之點，是前者包有偶然誤差外，更含剩餘誤差。就大多數情形而論，剩餘誤差與偶然誤差相較，每因太小而被略去。此時 $p.m. = d.m.$。在這種 Σr^2 可不計算的特殊情況下，δ 一符號，每被採用，以表 $p.m.$ 或 $d.m.$ 之值。在計算 $p.m.$ 時，如任一剩餘誤差

$$r_k \lesseqgtr \frac{1}{3} p.m. \quad (5)$$

則 r_k 可以略去不計；其理由後將說明。同樣，如有剩餘誤差 p 個，而

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \cdots\cdots + r_p^2} \lesseqgtr \frac{1}{3} p.m., \quad (6)$$

則他們也可同時略去不計。

10. 或然誤差及平均誤差

用最小二乘法討論觀察時，或在他種論著中，或然誤差（Probable Error）及平均誤差（Mean Error）兩個名詞，常常用着。一個觀察值的或然誤差，值量之大小是這樣的：一個誤差可以大於此值的或然率，和他可以小於此值的或然率，剛好相等，各爲二分之一。單個觀察值的或然誤差，和 n 個觀察值的平均數之或然誤差，可用

$$p.e.=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n-1}},$$

$$和\quad P.E.=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n(n-1)}}$$

分別表示之。式內 Σd 是各個觀察值與平均數的差數之平方和。在計算時，採用下面兩個近似式，

$$p.e.=0.8453\frac{\Sigma d}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$及\quad P.E.=0.8453\frac{\Sigma d}{n\sqrt{n-1}},$$

較爲便利。

至於平均誤差 μ 的定義，就是誤差平方的算術平均之平方根。除在論述最小二乘法的書籍中，不大用他。

根據誤差曲線的方程式，用幾何學上的解釋，得知 $p.e.=OP$,（看圖 2）此是剖分面積 OXY 爲相等部分的縱線之橫坐標；$a.d.=OD$，此是穿過一半面積重心的縱線之橫坐標；而 $\mu=OM$，是曲線反曲點的橫坐標。由此知

$$p.e.=\frac{0.4769}{h};$$

$$a.d.=\frac{1}{h\sqrt{\pi}};$$

$$\mu=\frac{1}{h\sqrt{2}},$$

或
$$p.e.=0.85\,a.d.=0.67\,\mu.$$

物理學家雖常用或然誤差表示一種精密度，其實用平均誤差較爲簡單，故此書中全部採用之。

11. 重數

在相同情況下所得之結果，他們的或然性當

非完全相等，換句話說，就是各個結果中沒有同一的精密度；遇到這種情形，而想把各結果加以平均，則首先當以相對的重數（Relative Weights）配於各觀察値，使在平均時，比較精密的量度，給以比例較大的重數，而不甚精密的量度，則給以較小的重數。

又一組觀察値的相對重數，與觀察値之精密度的平方成反比例；如令 P_1, P_2, P_3, ……等爲一組觀察値的重數，而觀察値的精密度爲 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, ……則

$$P_1 : P_2 : P_3 : \cdots\cdots = \frac{1}{\delta_1^2} : \frac{1}{\delta_2^2} : \frac{1}{\delta_3^2} : \cdots \qquad (7)$$

決定 P 的數値，以選取適合上述比例而幾近於整數的數値爲宜。

因各種精密度及差數度，彼此不同的祇是一個常數因子，故任取一種，以計重數，都屬可能。不過在同一問題中，將各精密度合併時，必須用同一種量度，切不可用平均差表示第一量的精密，用或然誤差表示第二量的精密，又用百分差來表示第三量的精密。

12. 加重平均數

既將重數 P_1, P_2, P_3 ……分配於一組觀察值 m_1, m_2, m_3 ……後，最足以代表此組的數值 M 或加權平均數(Weighted Mean)，顯可用下式計算之:

$$M=\frac{P_1\times m_1+P_2\times m_2+P_3\times m_3+\cdots\cdots}{P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots}。\quad (8)$$

13. 觀察去取的標準

在相似情況下所得的一組量度中，常有一個觀察值與此組中其他觀察值相差極大，此時觀察者每認此觀察值爲錯誤而想丟掉他。初從事於實驗者，尤易懷有此種意向。假如這個觀察值，的確含有錯誤，譬如記錯數字，讀錯標尺的刻度，重量相加時，加法未算對等等，那當然把他棄去不用；但如並無顯明的錯誤，則觀察者除有極嚴密極公正的判斷能力，或應用某種數學標準作可疑的觀察值之去取而外，此種觀察值絕不應棄之不要。富有經驗的觀察者，縱然知道像培爾司(Peirce)趙費勒(Chauvenet)等氏所推出的數學標準，在觀察次數

很多時，是非常合用，但是他們這般老手，仍願用其嚴正的判斷力，來決去取。多數物理的量度，次數並不很多，內中如有一個與其他的相差過遠，則他對於平均值必有過份的影響；所以卽令這個觀察值未含明顯的誤差，仍以把他去掉爲妙。遇到這樣情形，最好按照下述的標準，以定去取：

略去可疑的觀察值，計算其他各觀察值的平均數 m 及平均差 $a.d.$，再從平均數 m 算出可疑觀察值的差數 d。如

$$d \geqq 4a.d.$$

則此可疑觀察值，可以不要。因爲我們可以證明：一個觀察值的差數，能等於平均差四倍的，這種觀察發生的或然率，僅爲千分之一。如此非常大的誤差，叫做巨大誤差(Huge Error)。

14. 計算規則及有效數字

因爲保留數字超過數據所能及的精密以外，或是不用對數表及計算尺來代替繁長的乘除法，常使用於計算的時間，至少有一半是白白的耗費

了。記載數據和計算結果，有效數字(Significant Figures)要用得正當，乃是物理實驗工作中特要之點。開始記載數據，就要養成一種習慣，即在每一步工作中，凡屬不能影響最後結果的數字，皆須刪去不要。至於有效數字正當用法的規則，何爾曼(Holman)的計算規則及對數表(Computation Rules and Logarithm Tables)一書之緒論中，已經論及，此書對實驗工作，裨益很大。規則的討論和說明在何氏的量度之精密一書中，講得很多。茲擇要述之如下：

數字是指 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 十個字中任一個字。

有效數字，是表示該數所在位置之量的大小的。當寫零時，如果不僅是拿他來定小數點的位置，並且用以指出他所在位置的量，與零之接近，較與其他任何數字之接近為尤甚，那末零也是有效數字。

例如測一距離，幾乎已經量到一英寸的五十分之一，結果得 205.46 英寸，這幾個數字，連零在

內，都是有效數字。同樣，如測知此距離之値，與 205.41 或 205.39 之相近，不如與 205.40 之幾等，則 205.40 末位的零，確是有效數字，而且必須保存。因爲有零存在，才能表示此位數字，也與其他各位數字，同樣的曾經一番量度，並非隨便寫出。如此時竟然寫作 205.4，而不寫作 205.40，定會令人疑惑：這個量度，沒有測定到百分之一英寸，或者以爲記載數字的人對於數字的正當用法，不大明瞭，或許是不甚小心。不守這種簡單的規則，常會生出麻煩同疑竇來。

按照上說，僅僅用以記載小數點位置的零，不算有效數字，因爲不論在何種量度中，全看用什麼單位來表示問題內的量，然後小數點的位置，方能決定。所以結果裏小數位數之多少，並不能表示量度的精密。例如測某一距離，得 122.48 釐米，他的 A. D. 是 0.12 釐米，那末他的百分精密度是

$$\frac{0.12}{120}\times 100=0.10\%。$$

不論是用米（如長 =1.2248 米，A. D. = 0.0012 米），或用毫米（如長 =1224.8 毫米，A.D. = 1.2

毫米)來表示,所得結果,總歸含有五個有效數字,而他的精密,依然未變,還是 0.10%。平常說一個距離,已經量到 0.12 釐米,這對於量度的精密,是毫無意義,除非把所量的距離長短,完全講出來,方知精密到什麼程度。但是分數精密度或百分精密度一名詞,卻和上述者相反,他毋須更進一步的說明,已能明確的表示量度之精密,因爲那兩名詞,已將所測的數值和他的平均差,包羅無遺了。

在一個計算過程中,就是略去無用數字到十六次之多,他所累集的誤差,也要不致影響最後結果的第二位不定數字到一個單位以上。這是推引下述數規則時,所遵循的條件。有了這個條件,則應用下列規則於多數的物理工作,可保無虞。因就普通物理工作講,在一個簡單計算中,用的數量超過十六種之多,或經歷的計算手續,超過十六次之繁者,很不常見。

規則一. 棄去冗贅數字時,應用四捨五入法。

規則二. 一切差數度及精密度,祇保留兩位有效數字。

原因如下：試就上述的例子，加以討論。所量的長是 m，值爲 122.48 釐米，又 A.D. 是 0.12 釐米。此處 A.D. 的意義，是講 m 中 4 所佔的數字位，有 1 個單位疑惑不定；次位 8 所佔的數字位，有 12 個單位疑惑不定，而第三位小數，疑惑不定的至少當有 120 個單位，換句話說，這位數字，實際上已是毫無價值。照普通情形說，與差數度第一位有效數字相當的數字位，略有疑惑（1 個到 9 個單位），與差數度第二位有效數字相當的數字位，他的不定，爲前者的十倍（10 個到 90 個單位，更切當的說，10 到 99 個單位）。過此位次以外，所加數字之無關緊要，幾同沒有數值一樣。因爲差數度和精密度，至多不過是結果可靠度的一種估計，假使計算到對於所指結果並沒有真正意義的位數，則毫無用處。

如精密度的第一位有效數字，竟然大到 8 或 9，此時數據裏，與精密度第二位相對應的數字位有 80 到 90 個單位疑惑不定，那末在精密度中祇留一位有效數字就夠了。

規則三. 平均結果與數據中所留的數字位數，一般應與差數度或精密度中有效數字的第二位相對應。

所以在數據和計算當中，應留兩位可疑數字，使多次棄去數字後，累集的誤差，對結果中第一位不定數字，不致發生影響。

規則四. 二個或二個以上數量的和或較，在數值上不能比含有最大平均差的原有數量，還要精密。因此，在加減幾個數量時，先求各量的平均差，各量的數字位數，應該保留多少，須與最大差數的第二位有效數字相當。

規則五. 乘除時，積或商的百分精密度，不會比最不精密之因子的百分精密度還要大，所以計算乘除時，各因子所留的有效數字位數，依照百分差最大的因子的有效位數(按規則三所留下的)來決定。計算之精密，不須大於 $\frac{1}{4}$ % 者，應用計算尺，更求精密者，須用對數表，如不得不用乘除法者，當採"簡算法"(Short Method)而演算時每一個步驟要儘量的去掉多餘的數字。

規則六. 用對數表計算乘除法時，各因子的對數假數 (Mantissa) 中，應留的數字位數，要照前述各因子自身所應保留之數字的規則辦理。

15. 論間接量度的精密

現在討論間接量度的精密。 所謂間接量度，就是量度的最後結果，是一個或幾個直接量度的複雜函數。 因此，有兩類問題發生:

第一類問題——已知直接量度所得各量的精密度(用上述方法求得的)，求最後結果的精密度。

第二類問題 —— 最後結果所要的精密，先行規定，現求各量度所應具有之精密，使諸量度累集的誤差，在最後結果中所生影響，不致超過規定的限度。

此等問題，殊爲重要；因在第一類問題，最後結果，不論他是化學分析的結果，物理常數的數值，一個定律的代數式，或是一件機器的效率測定，如果不能說出可靠度估計的數值，那末這些結果，實際上是毫無價值。 但如可靠度估得過高，而非已知

數據所能達到者,則較之僅僅毫無價值,流弊更大。第二類問題,也同樣重要,因為未行工作前,實驗者對於實驗方法和所用儀器的精密，如不能預先有所討論,俾可略知影響最後結果的各量，應當測定到如何精密，則事實上每至浪費許多時間及精力，祇是把幾種數量測得超過必需的精密，而其餘數量的精密程度,又測定得太低,至使最後結果所想達到的精密,不能達到。

16. 記號

以後作精密之討論時,採用下列記號(Notation)

M＝任何間接測得數量的最後算出之結果。

Δ ＝M的數字精密度。

m_1, m_2, ……＝直接測出的數量；可為平均結果,可為單獨觀察值。

δ_1, δ_2,…… ＝ m_1, m_2,……等的數字精密度。

各 δ 的值,可以用平均差,或然誤差,或平均誤差來表示。 但是在同一問題當中,將各個精密度合併時,切不可用或然誤差表示若干量的精密，而

其他各量又用平均差或百分差或分數差來表示。在下面討論中，δ 的數值，將以差數表之（δ 或 Δ 前面所附的士號，通常略去）。

令成分量度 m_1, m_2，……的差數 δ_1, δ_2，……對於 M 所生的差數爲 Δ_1, Δ_2……。

用上述記號，得

$\frac{\Delta}{M}$ = 最後結果的分數精密；

$100\frac{\Delta}{M}$ = 最後結果的百分精密；

$\frac{\delta_1}{m_1}, \frac{\delta_2}{m_2}$，……= 成分 m_1, m_2，……的分數精密；

$100\frac{\delta_1}{m_1}, 100\frac{\delta_2}{m_2}$……= 成分 m_1, m_2，…的百分精密。

一般，

$$M = f(m_1, m_2, \cdots\cdots m_n), \tag{9}$$

爲簡單計，又可寫成

$$M = f(\quad),$$

函數 $f(\quad)$，乃是從 m_1, m_2，……等數計求 M 時所引用的公式。於是第一類問題可用數學術語，敍述如下：

17. 第一類——直接問題

已知各成分量度 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$ 的精密度爲 $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots \delta_n$，試求結果 M 的精密度 Δ。

解此問題，應先求每一成分的差數對於 M 所發生的效應，卽所謂個別效應 (Separate Effects)，後再合併之以求合成效應 (Resultant Effect)。最後手續中須用何種計算方法，應照差數所遵循的定律而定。現在述之如下：

(1) 個別效應

任一成分量度 m_k 的差數 δ_k，他的影響所及將使結果 M 內發生差數 Δ_k，Δ_k 的大小是

$$\Delta_k = \frac{\partial M}{\partial m_k} \cdot \delta_k,$$

$$= \frac{\partial}{\partial m_k} f(\quad) \cdot \delta_k, \qquad (10)$$

就是等於函數 $M = f(\quad)$ 之值因 m_k 變化（其餘成分 m_1, m_2, 等仍然不變）而變化的變率，與 m_k 的真實變值 δ_k 之相乘積，也就是對於 m_k 的函數偏微

係數乘以 m_k 之實在差數 δ_k 後所得的乘積。

例題 1. 球的直徑爲 10.013 厘米，如直徑量度的平均差 $A.\ D. = 0.012$ 厘米，試求此球體積的差數。

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

與前述記號相比較，知

$$M = V = f(\quad) = \frac{1}{6}\pi D^3,$$

$$m_l = D = 10.013 \text{ 厘米},$$

而　$$\delta = A.\ D. = 0.012 \text{ 厘米}。$$

V 的計算值爲

$$V = \frac{1}{6} \times 3.1416 \times \overline{10.013}^3$$

$$= 525.64 \text{ 立方厘米}$$

由(10)又知因直徑的差數 δ 而生的體積差數 Δ 爲

$$\Delta = \frac{d}{dD}\left(\frac{1}{6}\pi D^3\right)\cdot\delta$$

$$= \frac{1}{6}\pi\cdot 3D^2\cdot\delta$$

$$= \frac{1}{6} \times 3.1 \times 3 \times \overline{10}^2 \times 0.012$$

$$= 1.9 \text{ 立方厘米};$$

卽體積 525.6 立方厘米中，游移不定的，有 1.9 立方厘米，或卽 5300 分中有 19 分不能確定。 直徑中如有差數 $100 \times \frac{\delta}{D} = 100\,\frac{0.012}{10} = 0.12\%$，將使體積發生差數 $100\cdot\frac{\Delta}{V} =$

$100\frac{1.9}{530}=0.36\%$。　即後者的百分差數為前者的三倍。

又此問題中 V 僅為一個變數的函數，故 V 的合成差數，就可以用上面的結果直接表示出來。

例題 2.　用秒擺（Seconds Pendulum）測定 g 值，在測定振動時間時，差數 $A.D.$ 為 0.0020 秒，測定長度時，差數 $A.D.$ 為 0.10 厘米，則 g 值的數字差數是多少？

$$g=\frac{\pi^2 l}{t^2}.$$

由前述記號，知

$$M=g=f(l,t)=\frac{\pi^2 l}{t^2};$$

$$m_1=l=100\text{ 厘米};$$

$$m_2=t=1\text{ 秒};$$

$$\delta_1=\delta_l=0.10\text{ 厘米};$$

$$\delta_2=\delta_t=0.0020\text{ 秒}。$$

由 l 的差數 δ_l 所生之 g 的差數 Δ_l，依(10)為

$$\Delta_l=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\pi^2 l}{t^2}\right)\delta_l$$

$$=\frac{\pi^2}{t^2}\times 1\times\delta_l$$

$$=\frac{3.14^2}{1^2}\times 1\times 0.10$$

$$=0.96\text{ 厘米/秒}^2;$$

即 l 量度的差數 0.10 厘米，在 g 值上發生的差數為 0.96 厘

米/秒²。同樣，由 t 的差數 δ_t 在 g 上發生的差數 Δ_t，依(10)爲

$$\Delta_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\pi^2 l}{t^2}\right)\cdot\delta_t$$

$$= -2\frac{\pi^2 l}{t^3}\cdot\delta_t$$

$$= -\frac{2\times 3.1^2\times 100}{1^3}\times 0.0020$$

$$= -3.8\ \text{厘米/秒}^2.$$

即時間測定的差數 0.0020 秒，在 g 值上發生的差數是 3.8 厘米/秒²。

此處負號的意義是表示 t 的正差數在 g 值上引生負差數，t 的負差數在 g 值上引生正差數。然而一切差數，可正可負之機會均等，所以在討論精密時，由函數微分所引生之附號如何，可以不管。又如直接應用公式(10)，則任何成分的差數對於最後結果的影響，都可計算出來。遇有特殊情形，倘有簡單方法，尤當提出討論。

(2)合成效應

試求各成分量度引生之個別差數 Δ_1, Δ_2 ……等對於結果所生的合成效應 Δ。

如欲求若干差數 $\pm\Delta_1$，$\pm\Delta_2$，…… $\pm\Delta_n$ 的

極大合成效應，而是假定各個差數同時有相同的符號發生者，那末合成效應就是各差數的算術和，

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots\cdots + \Delta_{n_0} \qquad (11)$$

此種情形，僅於計算誤差的極大限度時始見重要。 Δ_1, Δ_2, ……等數值爲正或爲負的趨勢相等，而各值之大小又爲一般差數定律所決定者，則情形至爲重要，頗值討論。 若每一 Δ_k，皆照公式(10)計算，即

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial m_k} f(\quad)\cdot\delta_k,$$

則必適合上述的條件，因 δ_k 的數值用以決定 Δ_k 者，具有真實差數的性質。 在此等情形之下，M 中之最近的或然合成差數 Δ，可以最小二乘法表示。 此乃用下列公式將 Δ_k 各值合併而得，

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots\cdots + \Delta_{n}^2 \quad (12)$$

$$\text{即}\quad \Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots\cdots + \Delta_{n_0}^2} \quad (12a)$$

此非告訴我們問題的真正解答，但用這方法合併 Δ_k 各值而求最後答案，較用其他方法，要高明得多。不過採用此法，各個差數的符號是正還是負，完全

不計在內*，而合成値數 Δ 的符號，當然認爲可正也可負。

例題 2.（續前） 在前例題 2 中，l 和 t 的差數對於 g 値的合成效應，可由差數 Δ_l 和 Δ_t 之平方和的平方根求得，而 Δ_l 及 Δ_t 乃是 δ_l 和 δ_t 在 g 上所分別發生的，卽

$$\Delta = \sqrt{\Delta_l^2 + \Delta_t^2}$$

$$= \sqrt{0.96^2 + 3.8^2}$$

$$= 3.9 \text{ 厘米}/\text{秒}^2$$

由此，l 的差數 0.10 厘米，和 t 的差數 0.0020 秒，可使 g 値（=980 厘米/秒²）的差數近 4 厘米/秒²。

18. 成分中差數删略的標準

判斷某一成分或數個成分的差數，在計算最後結果的差數 Δ 時，究竟可否略去，是很重要的一件事。想解決這個問題，可用下述的標準。

依照前述之有效數字規則，任何差數度，祇當保留兩位有效數字。一個數量，他對結果的影響，如只有結果的差數度或精密度的十分之一，那末他對結果的增損，也祇限於與差數度第二位相當

*因各 Δ_k 値皆要平方。

的有效數字。但這位數字,本非確定,故該數量常可視為無足重輕。$\frac{1}{10}p.m.$ 或 $\frac{1}{10}d.m.$ 可以刪略不計的假設,雖然有點近於武斷,但確是一個很實用而且很便利的標準。

設某量 M 的 Δ 值,是由 Δ_1, Δ_2,$\cdots\cdots$ Δ_n 等構成,而後者又係由成分 m_1, m_2,$\cdots\cdots$ m_n 之差數 δ_1, δ_2, $\cdots\cdots$ δ_n 所引起,那末在計算 Δ 時,是否有若干個 Δ (如 Δ_k) 可以省略? 換句話講,是否有成分如 m_k 者,他對於 M 可以認為無明顯的誤差。

想解答這個問題,可令

$$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_k^2 + \cdots + \Delta_n^2};$$

略去 Δ_k, $\Delta' = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}$。

現如 $\Delta - \Delta' \leqq \frac{1}{10}\Delta$

或 $\Delta' \geqq 0.9\Delta$,

按照上述標準,Δ_k 可以省略。

$$\text{但}\quad \Delta_k^2 = \Delta^2 - \Delta'^2$$
$$= \Delta^2(1 - 0.9^2)$$
$$= 0.19\Delta^2,$$
$$\therefore \quad \Delta_k = 0.43\Delta。$$

因此,計算Δ時,如某成分 m 的差數,對於 M 的影響,是等於或小於 0.43Δ,則該差數,就可省略。成分之數目,常屬不多,故上述公式,實非必需應用,於是一種比較便利而仍靠得住的標準,就不妨採用,此標準是

$$\Delta_k \lesseqgtr 0.33\Delta \lesseqgtr \frac{1}{3}\Delta。\qquad (13)$$

同樣,在 P 個成分當中,如

$$\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots\cdots+\Delta_p^2} \lesseqgtr \frac{1}{3}\Delta,\quad (14)$$

則這些差數就可同時略去。

用 $p.m.=\sqrt{\overline{d.m.}^2+r_1^2+r_2^2+\cdots\cdots+r_n^2}$ 一公式,來計算精密度的數値,上述標準,仍能通用於剩餘差數的省略。

19. 第二類　逆問題——相等效應

設最後結果 M 欲得的精密為Δ;各成分 m_1, m_2 ……等所許有的差數 δ_1, δ_2, ……等對於 M 的合成效應,在數値上不得大於 Δ,試求 d_1, d_2, ……等之値。

設差數服從誤差定律，則

$$\Delta^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots\cdots+\Delta_n^2,$$

此中　$$\Delta_k=\frac{\partial}{\partial m_k}f(\quad)\cdot\delta_k$$

或　$$\delta_k=\Delta_k\div\frac{\partial}{\partial m_k}f(\quad)。\qquad(15)$$

若 Δ 的值已確定，而不附有其他條件，那末此問題的答案，可有無限個，卽能滿足上面方程式的 Δ_1, Δ_2, ……等值可有無限個，於是對應的 δ_1, δ_2, ……等值，也有無限個。

成分量度中誤差之分配，最便利的一種，係使實驗者祇用最少工作和時間，就能求到所欲得的精密。但是各個問題中，誤差分配的方法，變異很大，所以包括一切情形而能列成公式的數學標準，沒法尋出。不過——至少是對各成分誤差初步的分佈而言——最好也得把各變數或各成分中隱有的誤差，加以調整，使對最後結果，發生同等程度的效應。此卽所謂"相等效應"(Equal Effect) 的解題法。

照此條件(卽 $\Delta_1^2=\Delta_2^2=\cdots=\Delta_k^2=\cdots=\Delta_n^2$),

以求合成效應的公式，即得

$$\Delta^2 = n\,\Delta_1^2,$$

而對任何成分，遂有

$$\Delta_k = \frac{\Delta}{\sqrt{n}}。 \qquad (16)$$

如此決定 Δ_k 後，其對應值 δ_k 可由方程式 (15) 直接求得

例題 3.　欲使 g 的計算值可靠到千分之一，則秒擺的長度和振動的時間，應當量度到如何精確?

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2}.$$

因題中所說的擺是"秒擺，"故 $t = 1$ 秒，而 $l = 100$ 厘米。題中又規定 $100\frac{\Delta}{g} \leqq 0.10$；故 g 的合成差數 Δ 許可之數值，定不能大於 $g \times 0.0010$ 即 $\Delta = 0.98$ 厘米/秒²。在此種精密的限度下，求 δ_t 及 δ_l 的適宜數值。如依相等效應解此問題，換言之，即假設 g 的合成差數，是 t 和 l 的差數相等時發生者，則得

$$\Delta_t = \Delta_l = \frac{\Delta}{\sqrt{n}} = \frac{0.98}{\sqrt{2}}\text{ 厘米/秒}^2 = 0.70\text{ 厘米/秒}^2。$$

因此，時間與長度測定中可能的差數必須減低到如此大小，即他們分別存在時，不致使 g 發生大於 0.70 厘米/秒² 的差數，方算適當；但由一般方程式 (10)，

$$\Delta_t = \frac{\partial g}{\partial t}\delta_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\pi^2 l}{t^2}\right)\cdot\delta_t = \frac{2\pi^2 l}{t^3}\cdot\delta_t$$

或　0.70 厘米/秒$^2 = \dfrac{2\times 3.14^2\times 100\ \text{厘米}}{1^3\ \text{秒}^3}\cdot\delta_t$

由此，　$\delta_t = 0.00037$ 秒.

同樣，　$\Delta_l = \dfrac{\partial g}{\partial l}\cdot\delta_l = \dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\pi^2 l}{t^2}\right)\cdot\delta_l = \dfrac{\pi^2}{t^2}\cdot\delta_l$

或　0.70 厘米/秒$^2 = \dfrac{3.14^2}{1^2\ \text{秒}^2}\cdot\delta_l$,

由此，　$\delta_l = 0.073$ 厘米

故擺的振動時間，當測定到 0.00037 秒，而他的長度要測定到 0.073 厘米。

20. 分數解法或百分解法

從各成分量之已知的或估計的精密，來求最後結果的精密，或先規定最後結果的精密，再來計算各成分所需的精密，通常皆是利用上述的公式，並且不論問題之形式如何，都可利用他們來解決。在這種精密討論中，所當特別注意的，是要知道此處精密度或差數度（δ 和 Δ），乃係一種數值的差數，他所用的單位，應與所指之量的單位完全相同。

把一般公式(10)應用到(12a)，(15)和(16)上去，

百分差和分數差，絕不可用。如遇題中僅給有分數精密或百分精密(如在例題3)，則當先計算相對應的差數 δ 或 Δ，然後再行解題。

但是有很多公式，如用百分差或分數差來討論精密，常可省卻許多時間和工作，如當函數 $M=f(m_1m_2\cdots\cdots m_n)$ 可以寫成普通乘積形狀，如

$$M=k\cdot m_1^a\cdot m_2^b\cdots\cdots m_n^p \qquad (17)$$

時，卽以應用百分或分數解法爲便，式中 $k, a, b,\cdots\cdots p$ 等爲常數(正數，負數，分數或整數均可)。凡遇此類情形，任何成分的分數差或百分差，和產生於最後結果中的分數差或百分差，二者之間，定有極簡單的關係存在，此可說明如下：遇有上述特別情況，利用一般公式 (10) 以求個別效應，則 m_1 的差數 δ_1 對於 M 所生的差數 Δ_1，爲

$$\Delta_1=\frac{\partial M}{\partial m_1}\cdot\delta_1=(k\cdot m_2^b\cdots\cdots m_n^p)\cdot a m_1^{a-1}\delta_1\cdot$$

以方程式(17)除之，得

$$\frac{\Delta_1}{M}=a\cdot\frac{\delta_1}{m_1} \qquad (18)$$

卽 m_1 的分數差 $\frac{\delta_1}{m_1}$，在最後結果上發生的分數差

要增大了 a 倍。若 $a=2$，則 m_1 有了 1% 的差數（卽 $100\frac{\delta_1}{m_1}=1$）後，不問其餘因子的數值如何，他在 M 上必會引生 2% 的差數。故設所討論的公式，能寫如上述的乘積，則各成分的已知分數差或百分差，在最後結果上的個別效應，可僅由視察，直接寫出。

因合成效應之公式（12a），亦可寫作：

$$\frac{\Delta}{M}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{M}\right)^2+\left(\frac{\Delta_2}{M}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\Delta_n}{M}\right)^2}, \tag{19}$$

今如成分量度的分數差 $\frac{\delta_1}{m_1}$ 等，値量已知，則像方程式（17）所表示的任何乘積函數，他的完全解式，可由觀察法直接寫成

$$\frac{\Delta}{M}=\sqrt{\left(a\frac{\delta_1}{m_1}\right)^2+\left(b\frac{\delta_2}{m_2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(p\frac{\delta_n}{m_n}\right)^2}。 \tag{20}$$

同理，這種乘積函數的逆問題之解式，亦極簡單，因爲相等效應的條件，現可寫作：

$$\frac{\Delta_1}{M}=\frac{\Delta_2}{M}=\cdots\cdots=\frac{\Delta_i}{M}=\cdots\cdots=\frac{\Delta_n}{M}。 \tag{21}$$

因此，任一成分如 m_k，在最後結果上可以發生的分數差爲

$$\frac{\Delta_k}{M} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\Delta}{M}, \qquad (22)$$

此處 $\frac{\Delta}{M}$,係最後結果的分數差，其值是早經規定而不可超越者；$\frac{\Delta_k}{M}$ 的數值,如此決定後,由方程式(18)所表示的簡單關係，僅須稍加視察，相應成分 m_k 的許有之分數差 $\frac{\delta_k}{m_k}$，可立卽求出。

又因子的指數 a, b, c 等數值,可正可負,所以上述的解式,可應用於有因子相乘的公式，也可應用於有因子相除的公式。

但是有一層要特別注意,如函數 M 含有若干成分的和或較,或者 M 是個三角函數或對數函數,則成分的分數差和發生於最後結果的分數差，兩者之間,沒有簡單關係存在;因而上述的特殊方法,也就“無用武之地”了。 現舉例說明如下:

設　　$M = am_1 + bm_2$，

則　　$\Delta_1 = \frac{\partial M}{\partial m_1} \cdot \delta_1 = a \cdot \delta_1$

而　　$\frac{\Delta_1}{M} = \frac{a\delta_1}{am_1 + bm_2}$,

可見 $\frac{\Delta_1}{M}$ 與 $\frac{\delta_1}{m_2}$ 之間，無簡單的關係存在,除非 bm_2

一項與 am_1 相較，他的大小適可省略不計。 不過如有此種情形，我們在開始討論精密時，又必早已假定 $M=am_1$ 了。

幾個變數的改變，或在討論精密時，看那幾個成分可以省略不計，常能把很複雜的函數，化成簡單的因數乘積。 此種事件，如能辦到，則對每一因子皆可應用分數法，那就討了許多便宜。

例題 4. 例題 2 的解法如用分數法或百分法，較用普通方法，來得簡單。 因公式 $g=\pi^2\dfrac{l}{t^2}=\pi^2lt^{-2}$，明明是變數 l 和 t 的簡單乘積函數。 欲求 l 的差數 δ_l ($=0.10$ 厘米)和 t 的差數 δ_t ($=0.0020$ 秒)對於 g 所生的差數，可先求 l 和 t 的分數差

$$\frac{\delta_l}{l}=\frac{0.10\text{ 厘米}}{100\text{ 厘米}}=0.0010,$$

$$\frac{\delta_t}{t}=\frac{0.0020\text{ 秒}}{1.0\text{ 秒}}=0.0020。$$

由視察得知 g 與 l 的一次方成正比例，故

$$\frac{\Delta_l}{g}=\frac{\delta_l}{l}=0.0010;$$

又因 g 與 t 的二次方(略去符號)成正比例，故

$$\frac{\Delta_t}{g}=2\frac{\delta_t}{t}=2\times0.0020=0.0040.$$

因之
$$\frac{\Delta}{g}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_l}{g}\right)^2+\left(\frac{\Delta_t}{g}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(0.0010)^2+(0.0040)^2}$$
$$=\pm 0.0041.$$

或
$$\Delta=\pm 0.0041\times 980 \text{ 厘米/秒}^2.$$
$$=\pm 4.0\text{厘米/秒}^2.$$

此答數實際上與前法所得的相同。不過因計算時祇用兩位有效數字,故稍有差異。

例題 5. 又例題 3 的解法,也可用分數法使計算手續簡單。如 g 的值要測定到 0.10%,即 $100\ \frac{\Delta}{g}\leqq 0.10$,那末指定的分數差為 $\frac{\Delta}{g}\leqq 0.0010$,應用相等效應的標準,把此數分配於 l 與 t 二成分量度,乃得:

$$\frac{\Delta_l}{g}=\frac{\Delta_t}{g}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\Delta}{g}=\frac{0.0010}{\sqrt{2}}=0.00071.$$

但一看公式 $g=\frac{\pi^2 l}{t^2}$,就曉得 g 與 l 的一次方,與 t 的二次方成正比例,即

$$\frac{\Delta_l}{g}=\frac{\delta_l}{l}\quad\text{而}\quad\frac{\Delta_t}{g}=2\ \frac{\delta_t}{t}.$$

因此

$$\frac{\delta_l}{l}=0.00071,$$

即長度必須量到

$$\delta_l = 100\ 厘米 \times 0.00071 = 0.071\ 厘米。$$

同樣，

$$\frac{\delta_t}{t} = \frac{1}{2} \times 0.00071 = 0.00036,$$

即時間必須量到

$$\delta_t = 1\ 秒 \times 0.00036 = 0.00036\ 秒。$$

實際上此等數值與前用微分法所得的相同，惟因計算時祇用兩位有效數字，故第二位數字稍有差異。

21. 相等效應解法的討論

用上法解題，常見某成分量度(或幾個成分量度)不須多費時間和工作，就能測得異常精密，比他應具的精密度，還要高得多；遇此情况，仍須把這個成分或因子測到這樣精，而在討論精密時，簡直把他看成常數，因爲他的誤差，在最後結果上的影響，幾可略去不計了。如此減少了一個變數後，重來解題，則其他較難測定的成分，此時不妨比較第一次解式中所要求的精密，測得稍低一點。

如欲自由使用儀器，及以最少時間與工作求得最後結果所需的精密，則研究者對於各成分的

精密之適當分配，須有一點經驗，而且要有正確的判斷。 但初學者要是能用上述相等效應作標準，也就不致誤入歧途了。

第二章

圖解法

1. 問題的性質

如所研究的問題，是決定兩個數量間的定律或基本關係，則用圖解法(Graphical Method)以討論實驗之數據，是非常便利而且非常重要的；科學上及工業上之研究，這類問題，至易發生。此外，圖解對於內插(Interpolation)或討論更正等，也有很大的價值。

2. 作圖的手續

用圖解法，討論觀察結果，通常所需的手續，可用下例逐步說明之。假設溫度自 10°C. 變至 100°C. 試求線圈(Coil)的電阻(Resistance)與其本身溫度的關係；換言之，即局於此種溫度範圍內，要決定一個公式，用了他後，能由任何溫度，算出線圈

電阻之值。 本實驗內要做的事，就是在 10°C. 至 100°C. 中各個不同的溫度 t 時，測定線圈電阻 r 之值。 設由實驗結果，得下二列數據，又從差數度或精密度，知電阻量度可靠到 0.003 歐姆(Ohm)，溫度量度可靠到 0.02°C。

實 驗 數 據

r = 線圈的電阻 (以歐姆計)	t = 線圈的溫度 (以°C 計)
10.421	10.50
10.939	29.49
11.321	42.70
11.799	60.01
12.242	75.51
12.668	91.05

欲對 r 與 t 間的關係，得知梗概(其間關係，設尚未知)，直接作圖(Direct Plot)，應先畫就。 所用作圖紙上的格子，當用鋼筆小心劃分，否則因分格不精而引起的誤差，常易超過只有中等準確程度的數據所生之誤差。 紙的大小，以長約十英寸寬

約八英寸的爲合用。紙上劃分的單位,或用毫米,或用二十分之一英寸。

(1) 縱橫坐標的選擇　作圖手續中第一步要決定的是把那種數據繪作縱坐標(Ordinates),那種繪作橫坐標(Abscissæ)。解析幾何學上現行的習慣,仍須依循不改。如就目前所討論的問題來講,表示 r 爲 t 之函數的關係,是我們所尋求的,故 r 之值應當繪作縱坐標,而 t 之值繪作橫坐標。反之,設想得一公式以推算與任何電阻 r 相對應的溫度 t 如"電阻量溫法"(Resistance Pyrometry)者,則兩坐標的選擇,應與上述者相反。

(2) 比例尺的選擇　作圖上所謂"比例尺"(Scale),是說數據中的一個單位,相當於圖上幾個單位(英寸釐米等等)。縱坐標和橫坐標兩者所用的比例尺,應當在圖上明白表示出來。例如:繪圖時以10英寸長代表100°C,則比例尺爲10″:100°=1:10,卽十分之一。通常叫做每英寸等於10°C。一般,縱坐標和橫坐標,選用同一的比例尺,事不可行,而原點(Origin)之一定要繪入圖中,也大可不

必。 如縱坐標和橫坐標都用一種比例尺，則數據的軌跡 (Locus)，易成一近於水平或趨於垂直的直線；近於水平者，表如縱坐標之數據的精密，將被犧牲，而趨於垂直者，表如橫坐標之數據的精密，亦無法表現。 而且幾成水平的線與平行於 x 軸的各直線之交點，頗難讀出，即能讀出，亦易訛誤，惟此時與 y 軸所成的交點，則較易決定。 如欲兩個坐標的內插，保有同等精密，則所作線對於兩軸的傾斜以能達到 45° 角爲佳。 若不是正 45° 角，而與此位置相差，左右不過 10° 者，尚不要緊。

其次，所選的比例尺，當便於應用，換句話說，如想把數據分配在作圖紙上幾成 45°，則當選用一英寸等於 1, 2, 4, 5, 10 個單位的比例尺(或者用此單位的 $10^{\pm n}$ 倍，此處 n 爲一整數)；一英寸等於 3, 7, 6, 1 1 個單位的比例尺，絕不可用。 因後幾種比例尺，不但使作圖麻煩，且易致誤，如選用前者，則圖表數據時，可以運用自如。 又所選比例尺，不可過大或過小。 因如過小，所作的圖，每太窄狹，於是數據的精密，致被犧牲，太大呢，又把數據與他所應

遵守的定律間之差數，放得過大，以至很難或竟不能繪得一條可以代表他的線，而且這種作圖對於數據的精密觀念，也必失之於大而不當。可靠而應遵循的選用比例尺規則，是要選取一種易於內插而不多過數據中兩位不定數字的比例尺，亦即能使相當於差數度或精密度的第二位有效數字便於內插的比例尺，用之爲當，這是選用比例尺的最高限度。在數字範圍不大及在補正等時，頗切實用。

就上述問題而論，r 的最大變化爲 2.3 歐姆，t 的最大變化約爲 90°C。故所選比例尺，要能使此等數量在紙上的分配，很是適當。此時以 1″＝0.4 歐姆，及以 1″＝10°C. 爲比例尺，得與上述條件相符，而應用起來，也較便利。不過選用這兩種比例尺來作圖，一部分數據的精密，定要犧牲，因爲這樣大小的圖形，不能把數據的末位數字，表記得如何精密。尙須注意者，此時原點，將不在圖內。不過原點之繪出與否，在本問題中，並無多大關係，只有遇到兩變數的數據，同時趨近微小數值(零)時，圖

上原點方須繪出。雖然如此，橫坐標的零值，最好還是繪在圖上，用便測定曲線與 y 軸的交點，其理由容後再說。

(3) 記出數據 沿橫軸找出第一點的橫坐標，經過此點直放一尺，約在要記的相當縱坐標處，繪一長約 $\frac{1}{8}$ 英寸的細線。再沿縱軸記出第一點的縱坐標，繪短水平線，與前繪的垂直線相交。交點就是所求點的位置。記數據時，絕對不可用點表示，否則不但犧牲了作圖紙可達到的精確，而且想以一點同時記出縱坐標和橫坐標，也最易發生誤差。

(4) 引畫最好的代表線 數據記出後，次一步驟就是要畫一條光滑的曲線，這曲線的方程式，應當確足表示連系問題中兩變數的定律。考查此種曲線的約略形狀，對於所求方程式的形狀，常可獲得有價值的預示。

如所記各點，似乎沿着一直線排列，那末最好的代表線，可照下法求出：用一根拉緊的細黑線在各點間移動，等到各點幾乎交互排列在黑線的兩

邊,而且線之上方各點與線所成的差數,約和線下各點與他所成的差數,値常相同,則細黑線的位置就是所求的直線位置。決定最好代表線位置的確切標準,乃是在此線上方各點的差數平方和,應等於線下各點的差數平方和(最小二乘法的標準)。

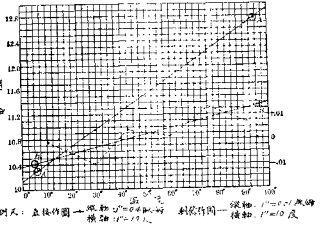

圖　3.

細黑線的最好位置如已求得,即將通過此線之兩點的位置記出,再用硬鉛筆,或鴨嘴筆和尺,過此兩點,作一直線。

如各點並不沿一直線分布,而與直線成有系統的偏差,那末最好的代表線,當用曲線板或彎曲

自如之尺繪之。這種曲線的繪法,和上面一樣,也要使各點幾乎能夠交互分布在線的兩邊。根據所得曲線形狀,曲線的方程式,常能推出。此後的工作,即用下述方法之一,把此曲線改變成一直線,而定其常數。直線方程式中的數字常數,每可根據圖形,直接決定之。

就上述問題而論,如圖 3 所示,各點皆緊密的靠着直線 AA'。其與此線離判的差數,是不規則的,而且沒有系統性。所以 r 與 t 的關係,應是直線的,或即是一次的。要想完全決定函數 $r=f(t)$,我們必須求得 AA' 線方程式中常數的數值。

3. 直線方程式常數的決定

直線的一般方程式是

$$y = ax + b, \tag{1}$$

此處 a 和 b 是常數。

常數 $a\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ 是直線和 x 軸所成角(名以 θ)的正切。但我們不能用"量角器"(Protractor)測出此角度後,再求其正切,而定 a 的數值。因爲作

圖時兩坐標所用比例尺之不等,常使此角失真。那末要決定 a 值,就當先讀出線上任何二點的縱橫坐標 x', y' 及x'', y'';所取之點,以能近線的兩端者爲佳,但他們不限定是已有之觀察點中的兩個。由此

$$a=\tan\theta=\frac{y''-y'}{x''-x'},$$

如二點 A' 及 A'' 的坐標,是 $x'=6.0^{\circ}\mathrm{C}$, $y'=10.30$ 歐姆,和 $x''=94.5^{\circ}\mathrm{C}$, $y''=12.76$ 歐姆,則

$$a=\tan\theta=\frac{12.76-10.30}{94.5-6.0}=\frac{2.46}{88.5}=0.0278。$$

常數 b 爲 $x=0$ 時 y 之值,就是直線在 y 軸上的截線(有時須將直線引長,始可得之),故依照縱坐標所用的比尺,可讀得 b 之數值。由圖 3 知在 $x=0^{\circ}$ 時,$A'A''$ 與縱軸相交於 $y=10.13$ 處,卽 $b=10.13$。因此連系 r 與 t 的方程式爲

$$r=0.0278\,t+10.13。\qquad(2)$$

如依數據所繪得的直線,須引伸極長,始能與縱坐標相割,或縱坐標竟不在圖中,因而所作直線無法與之相割,則 b 值可用下法求之。把上已決定的

a 值，和線上任意點的坐標 x' 及 y'，統同代入方程式(1)；解方程式，直接求 b。這裏要注意的是方程式(2)裏面常數的精密，比較原有數據的精密，要差一點。用這個方程式解得之 r 值，無論如何，不能精密過千分之一，或千分之二，而上述觀察數值，則可靠到萬分之二；換句話講，此處所作圖形的大小，並沒有把數據的精密，完全利用出來。常數測定的精密，要想提高，有效數字位的獲得，欲求增多，手續如何，當詳述於後(參看剩餘作圖)。

4. 曲線的直線化

如根據數據所畫得之各點，並非緊緊貼着一條直線，則代表各點的光滑曲線之形狀，對我們所尋求的方程式，每能有所暗示。像圓錐曲線或三角函數曲線，不難一看即知。遇有此等情形，應當把這些曲線改變成直線，以便測定方程式中的常數。如由觀察曲線形狀，看出可設 $y = F(x)$，以表 x, y 的關係，則 $F(x)$ 如能分解爲因子式，或可寫成下形

$$F(x)=af(x)+b,$$

式中 a 和 b 是數字常數,而 $f(x)$ 不含常數,於是所設的函數,不難用圖形檢考之。至於 $a=1$,和 $b=0$,或即函數

$$y=af(x),\quad y=f(x),\quad 和\ y=f(x)+b$$

之種種特殊情狀,當亦包含在內。在此種情形下,可令 $f(x)=z$,並由數據中之每一 x 值,計算相應的 z 值。用 z 值作橫坐標,對應的(即所觀察的) y 值作縱坐標,繪一新線。該線的一般方程式將為

$$y=az+b,$$

而對應於上述各特殊情形的方程式為

$$y=az,\quad y=z,\quad 和\ y=z+b。$$

這都是直線方程式,他的常數,不難用前節所述方法來決定。所設的方程式 $y=af(x)+b$,是否能代表實驗所得之數據,可依畫記數據的諸點* 與直線相差之大小及符號,來作判決。如所設函數,已屬正確,而數據的精密,又允用剩餘作圖法以修正常數 a,b 的值,則 a,b 之值,當用此法修正之。

*按即 (z,y) 諸點。

問題一(1)三角函數

假設一電流計 (Galvanometer) 通過電流 I 後，發生偏轉 θ，現欲測定電流計之定律，或即須決定函數 $I=F(\theta)$之形狀，使能由任何偏轉θ，算出對應的I 值。

觀 察 數 據

偏轉 θ	電流 I	$z=\tan\theta$
10.17°	0.0704	0.1794
19.27°	0.1268	0.3496
29.16°	0.2184	0.5580
40.47°	0.3348	0.8532
48.45°	0.4430	1.128
55.90°	0.5780	1.477

以 I 值爲縱坐標，θ 值爲橫坐標，把數據直接繪出，即見各數據的位置，皆依循着曲線 A (圖4)，並顯示有

$$I=a\tan\theta$$

的關係，此處 a 是常數。 在 $\theta=0°$ 時，$I=0$，而

$\theta=90^\circ$ 時，I 趨近一極大值（即無限值）。 把上列方程式與 $y=af(x)$ 相比較，可知 $f(x)=\tan\theta$。因此，欲將上述方程式加以考核，可由各次觀察所得之 θ 值，算出 $z(=\tan\theta)$ 值，並用 I 值作縱坐標，z 值作橫坐標，仍循前法，作一新線。 代表此等數據的最好線段，形狀如 B。 此線定須經過原點，因電流與對應的電流計之偏轉，皆同時趨近於

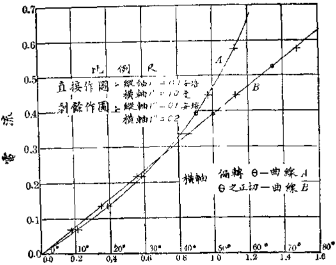

圖　4

零的。 在 0° 與 60° 之間，電流計服從正切定律，此可由圖見到。 又因 B 線經過原點，所以常數 a 的

値卽 B 線與 x 軸所成角的正切，此可由任一點的坐標 x''，y'' 算出，

$$a=\frac{y''}{x''}=\frac{0.525}{1.34}=0.392$$

在這特別問題中，a 的數値，也可用下法求得：因 $\tan 45^\circ=1$，故從 $y=a\tan\theta$ 一式知在 $\theta=45^\circ$，或 $z=1$ 時，$y=a$；卽在 45° 時曲線 A 的縱坐標，或在 $z=1$ 時 B 的縱坐標，直接表示 a 値。用此法，由曲線 A 上的 M'，得 $a=0.393$；由 B 線上 M''，得 $a=0.392$，兩値皆與用常法求得的結果，頗能吻合。

故所希冀的電流計公式爲

$$I=0.392\tan\theta$$

如觀察範圍超過 $\theta=60^\circ$ 以外，則對應此等數據的各點，與直線的偏差，就儼有規則；故可斷言：這副儀器之能遵循正切定律者，僅限於某種範圍以內，而此範圍，現遂可以決定了。

(2) 倒函數

定溫下定量氣體，所受的壓力 p，經過種種變易時，測得他的體積 v 之各値如下。試求連系 p,v

的定律，卽須決定函數 $p=f(v)$ 的形狀。

觀察數據

壓力(p) (計以水銀的高，單位用厘米。)	體積(v) (計以立方厘米)	$\frac{1}{v}$
37.60	41.90	0.02380
39.35	40.13	0.02493
43.59	36.51	0.02739
47.50	33.67	0.02971
54.34	29.65	0.03373
56.26	28.63	0.03497
58.28	27.70	0.03610

依照此等數據，直接作圖，得一稍彎的 A 線(圖 5)，由圖可見：壓力增大，體積反減；不過因爲代表數據的各點，並非全居一直線上，故 p 之增大與 v 之減小，不能洽成比例。此曲線暗示是一個以漸近線爲軸的等邊雙曲線，其方程式爲 $xy=$ 常數。假如這種假設的關係未錯，則 vp 是等於常數，或 p 是等於常數乘 $\frac{1}{v}$，那末把 v 改作 $z=\frac{1}{v}$ 時，就得 p 等於常數乘 z 的一個直線方程式。現仍以 p

值作縱坐標，而以 v 的倒數作橫坐標，另繪一圖，得 B 線。 如問題裏所講的氣體，在實驗誤差範圍內，服從波義耳定律 (Boyle's Law)，B 線應當呈一直線，事實上也的確如此。 設如不呈一直線，則研究數據點與直線所成的差數，倒是討論該種氣體與波義耳定律相差的一個正當方法。

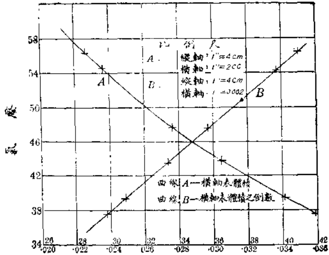

圖　5.

上述問題，尙可用下法解決。 依據 p 與 v 的每對值，計算乘積 pv；嗣用作圖法討論此乘積的值，方法如下：以 p 值為橫坐標，相應的 pv 值為縱

坐標,畫一個圖。 如數據在實驗誤差範圍內,滿足"$pv=$ 常數"的關係,則最好的代表線,將與橫軸平行,而代表 pv 值之各點,也將交互的而且幾乎相等的分布在線之兩邊。 反之,如此氣體與波義耳定律發生差異(有些氣體,卽在通常情況下,亦與該律不符,而一切氣體,在 p 的巨大値下,無不與此定律有異),則所得曲線,不僅對於差數的總量有所暗示,且可藉知如何修正上設的簡單關係式,俾令他與實驗事實,較相切合。

5. 對數法——指數函數

$$(1) \quad y=mx^n$$

若直接作圖所得的數據點,與一直線繼續發生差異,則可以形如(1)的指數方程式表之,此處 m 及 n 是兩個常數,可爲任何數值。 此種情形,最爲常見,故對是種關係的檢討,及 m, n 兩常數值的決定,都很重要。 這兩件事,常用對數作圖(Logarithmic Plot)來解決。 所謂對數作圖,卽以 y 的對數值爲縱坐標,以相應的 x 之對數值爲橫

坐標，繪製圖形。兹求方程式 $y=mx^n$ 兩邊的對數，得

$$\log y = n \log x + \log m$$

令 $x'=\log x, y'=\log y$，方程式中之變數 x 及 y，卽變爲 x' 及 y'。再以 b 代 $\log m$，則上列方程式成爲 $y'=nx'+b$，這是一直線的方程式，他在 y 軸上的截點爲 $b=\log m$，而直線與 x 軸所成角的正切爲 n。所以只要尋出此直線在 y 軸上之截線，並決定了他與 x 軸所成角的正切，原方程式 $y=mx^n$ 中常數 m, n 兩值，就可立卽求得。

又用此法所定的常數值（m 及 n），可靠程度不出 0.5%，故各原來數據，如可靠到 0.5% 以上，則當用剩餘作圖，加以修正。

問題——兹特討論自由墜體實驗中所得的實驗數據，以說明對數作圖法。設由實驗，得下列 S 與 t 之值，S 爲墜體——球——在 t 時間內所經的距離，現在要求連系 S 與 t 的定律，卽求一方程式，俾由任何時間 t 可以算出距離 S 的值。

觀 察 數 據

距離 S (以厘米計)	時間 t (以秒計)	$S'=\log S$	$t'=\log t$
30.13	0.2477	1.4790	$\bar{1}.3939$
85.26	0.4175	1.9308	$\bar{1}.6207$
150.39	0.5533	2.1772	$\bar{1}.7430$
223.60	0.6760	2.3495	$\bar{1}.8300$
274.20	0.7477	2.4381	$\bar{1}.8737$

一看 S 及 t 的直接作圖 A（圖 6），卽知 S

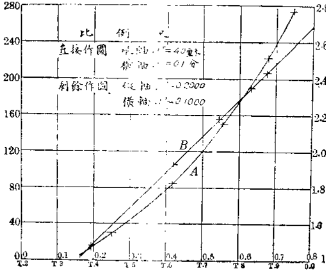

圖 6.

與 t 不成比例；惟各數據點與直線間的偏差，殊有規則，故可假設 S 與 t 的關係爲一指數曲線，即 $S=mt^n$。要想考驗這假設關係是否正確，可在通常坐標紙上，以 $S'(=\log S)$ 爲縱坐標，以 $t'(=\log t)$ 爲橫坐標，繪一對數作圖 B。如欲所得數據在圖上的分佈，約與圖之底邊成 45°，以選用 $1''=0.2$ 爲縱坐標及 $1''=0.1$ 爲橫坐標的比例尺，最爲便利。此時要注意的是 t 值小於 1 時，$\log t$ 之值成爲負數，其橫坐標當在原點的左方，曲線遂入第二象限。觀圖，知各數據幾乎在一直線上，此直線的常數，可用前述方法決定之。該線在 y 軸上的截線 $b=\log m=2.688$，故 $m=488$。該線與 x 軸所成角之正切 n 求得爲 1.995，或在作圖的誤差範圍內，可說 $n=2.00$。於是所求之方程式爲

$$S=488\,t^{2.00}$$

因爲由墜體的定律已知 $S=\frac{1}{2}gt^2$，故 $\frac{1}{2}g=488$，即在直接作圖的誤差範圍內，由上數據所得之 g 的平均值，爲 $g=2\times488=976$ 釐米/秒^2。

若 S 及 t 之數據可靠程度超過 0.5%，則常數

m 及 n，當用剩餘作圖，加以修正。關於此種對數作圖，還有一重要之點，應加注意。如作上圖以決定 y 軸上的截線時，橫坐標之單位，須細心選擇，一定要用了他之後，所得曲線不需長的外插(Extrapolation)卽能與 y 軸相割，才算選的適當。所用單位，如選擇甚妥，這件事情，不難辦到，因把表示橫坐標的單位，放大或縮小十倍，並不能影響線之傾斜，但可使此線平行自身的移近或移遠於原點。

對數作圖紙——指數曲線像 $y=mx^n$ 一類的，欲定其中常數值，則以採用對數作圖紙，爲能節省時間並可減輕工作。圖 7 所示，係一具有四個象限的對數坐標紙。ox 與 oy 同長，各等於 10 或 10 個單位的整數方。把他再分爲若干格，令 1 到 2, 1 到 3, 1 到 4 等的距離與 2, 3, 4 等數的對數成比例。故紙上標有 2 之一點，並非像在一般作圖紙上是記於 ox 間距離的 $\frac{2}{10}$ 處，而是點在 ox 距離之 $\log 2(=0.301)$ 的地方。此種分法，遂使由 0 向 x 及向 y 走時，格數愈變愈密。在 10 以外，如

仍繼續的分下去，則單位方形 xoy 將重複出現，乃至於無窮；因為任何數量乘以 10^k（此處 k 為一整數，或正或負）後，他的對數值等於原數量之對數加 k。 由此，表 0.2 之點，應記於 o 之左方，他與 o 之距離等於 $\log 0.2 = \log(2 \times 10^{-1}) = \log 2 + \log 10^{-1}$ $-1 + 0.301$，這同從 2 字到 x 的距離相等，餘可類推。 是知能滿足方程式

$$y = mx^n$$

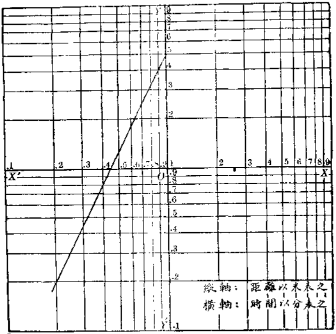

圖 7.

的 x 及 y 之若干值，如直接繪於對數紙上，必呈一直線形；因此紙可使所記之 y 及 x 的數據，皆各與其對數成比例，故按諸五十七頁的證明，知所記各點必在一直線上。這樣一來，所有從前作圖於方格紙上的麻煩，如翻檢對數等，統可避免了。外此，因現所用之縱坐標與橫坐標的比例尺完全相等，故所得直線的斜度，當無乖誤，逕用比例尺測定 $y''-y'$ 和 $x''-x'$ 之距離，再求其比率 $\frac{y''-y'}{x''-x'}$，遂得直線和 x 軸所成角的正切 n，此卽 x 的指數值，而為吾人所尋求者。

因 $x=1$ 時，

方程式 $\log y = n\log x + \log m$

變為 $\log y = \log m$，

又因從對數紙上讀出來的數值，必與該數的對數相對應，故對數曲線與經過 $x=1$ 的縱坐標相交之點，卽直接表示 m 之值，惟在普通方格紙上曲線與 y 軸所成的截線，則僅能給與 $\log m$ 之值。

對數作圖，繪於直交作圖紙與繪於對數作圖紙，其不同之處，應加注意，茲特述之如下：假設對

數紙上表示數據的線,他所交割之縱坐標,不經過 $x=1$ 而經過 $x=10^k$(此處 k 爲任何正整數或負整數),並令 m' 爲該截線之値。要想從 m' 以求方程式 $y=mx^n$ 中 m 之値,則因 $x=10^k$ 時,$y=m'$,故

$$m'=m10^{kn}$$

或即

$$m=\frac{m'}{10^{kn}}。$$

但如所用的是直交作圖紙,那末此線將與經過 $x=\log 10^k=k$ 的縱坐標相交於 m'' 處。

由此截線求 m,

則 $$m''=\log y=nk\log 10+\log m$$
$$=nk+\log m$$

故 $$\log m=m''-nk$$

用對數紙解前述之自由墜體問題,如以縮小的比例尺繪圖,則得狀如圖 7 之直線。S 與 t 値,可直接繪之,所得各點,顯在一直線上。此處以米計 S 的長,比用釐米,來得便利。此線與 x 軸所作角的正切,可直接由量度 oy 及 ox' 上的截線而得,値爲 2.00, 引長直線使與經過 $x=1$ 之縱坐

標相交，他的截線是

$$m = 4.89,$$

故連系 S 及 t 的方程式是

$$S = 4.89\ t^{2.00}$$

在作圖誤差範圍內，此式與前用直交坐標紙所得者，頗相符合。不過要記得，上述方程式內 S 的單位是米，而非釐米。

(2)　$y=m(x+\beta)^n$ 形狀的方程式

此種方程式，比較前述 $y=mx^n$ 一式，關係稍繁，但也可用對數方法來解決。式中的 β 是個常數。如以滿足上式的數據 x_1y_1，x_2y_2 等，繪一對數圖，則當變數值很大與很小時，所得各點並不緊靠着一直線。如當 x 值與 y 值甚大時曲線呈一直線，而當小值時卽變彎曲，則須研究最好的代表對數線，是否不能用前述方法，將上面的方程式變為直線。蓋如以 z 代 $x+\beta$，方程式就化為

$$y = mz^n$$

式中 y 及 z 之值，若用對數作圖法繪之，則 m 及 n 極易決定。現在所須尋求的，只是加在 x 後面的

常數 β。求 β 的方法如次：在原對數曲線的兩端，選擇 x_1y_1 及 x_2y_2 兩點。求一中點的縱坐標 y_3，使

$$\log y_3=\frac{1}{2}\log y_1+\frac{1}{2}\log y_2$$

或卽 $$y_3=\sqrt{y_1y_2},$$

同時並須找出與之相應的橫坐標 x_3。

如 x_3y_3 能滿足 $y=m(x+\beta)^n$ 形狀的方程式，就有

$$\log(x_3+\beta)=\frac{1}{2}\log(x_1+\beta),+\frac{1}{2}\log(x_2+\beta)$$

或 $$x_3+\beta=\sqrt{(x_1+\beta)(x_2+\beta)},$$

由此得 $$\beta=\frac{x^2_3-x_1x_2}{x_1+x_2-2x_3},$$

β 求出後，可將方程式 $y=mz^n$（此處 $z=x+\beta$）的對數作圖，重行繪出，再依常法決定 m 及 n。

(3) $y=m10^{nx}$；$y=m\epsilon^{nx}$ 形狀的方程式

所得數據，如能滿足

$$y=m\,10^{nx}\text{ 及 }y=m\,\epsilon^{nx}$$

形狀的方程式（後一式中 ε 爲納氏對數之底），則可用下述特殊的對數方法，繪圖解決之。求此等方程式的對數，得

$$\log y = nx + \log m,$$

及
$$\log y = Mnx + \log m,$$

此處 $M=0.4343$，乃化納氏對數爲通常對數的率數 (Modulus)，在通常作圖紙上，如以 y' ($=\log y$) 值爲縱坐標，以 x 的原值爲橫坐標作圖，則所得兩曲線，* 將呈直線形。 $x=0$ 時，y 軸上的截線爲 $y'=\log m$，兩直線與 x 軸所成角的正切，分表 n 及 Mn 之值。

6. 作圖的精密

由直接作圖或改訂作圖所得來之常數，精密如何，是現要討論的。討論範圍，僅限於由作圖方法，內插手續，及作圖紙本身所生的誤差。

最小分度十分之幾的估計，所引起的誤差，記載數據的劃線之闊度，以及紙上的分度不勻，伸縮失均等等，所生的不精確，我們因可估定 0.02 英寸爲讀出數或作圖的最精密的限度。如圖的每邊爲

*一表 $\log y = nx + \log m$

一表 $\log y = Mnx + \log m$

10 英寸(通常的圖,最大不過如此),則所能達到的分數精密,不能大於 $\frac{0.02}{10}=0.002$, 或 0.2%。 普通直接作圖所能達到的精密而較屬可信者, 爲自 0.4% 到 0.5%;由每邊 10 英寸直接作圖求得之常數,他的精密,通常祇到三位有效數字,第四位則不可確定。

實驗數據若可靠到四位或四位以上的有效數字 (卽到 0.1% 以上),則在直接作圖時, 圖形如不較大,精密之一部分,必被犧牲。 欲使此種數據的精密,全用無遺,那末直接作圖之後,還要有個剩餘作圖 (Residual Plot) 爲之補充。 有了剩餘作圖,前得的常數,可獲修正而更趨精密。 這樣一來,圖解法的精密大大增進了. 剩餘作圖的手續如何,敍述如下:

7. 剩餘作圖

此種作圖係將"最好代表線"與觀察數據間的差數,用放大比例尺詳繪出來。 他的用處是修正直線在各點間的位置;校核常數的數值; 並考探數

據在量度的精密範圍內，是否服從所擬之定律。圖的作法如下：根據直接作圖或改訂作圖中的最好代表線，推得方程式 $y=ax+b$，將 x 的觀察值代入式內，以求對應的 y 值。此等計算所得之 y 值與其對應的觀察值，兩者間之差數，叫做剩餘(Residuals)。研究剩餘的符號與大小，對於所選擇的"最好線"之代表性質，常能給與一種有價值的暗示，而剩餘作圖之內容，也就是用作圖法對剩餘的符號與大小加以討論而已。若以剩餘值 r (即 y 之觀察值與其計算值的差) 爲縱坐標，以相應的 x 值爲橫坐標來繪製圖形，並且所用的圖紙，與所採的橫坐標之比例尺，同前作直線圖時，完全一樣，則觀察數據和"最好代表線"間的差數，得由圖形表出，要想對這些差數，作一番詳盡的研究，須用較大的比例尺繪圖，以免所含誤差隱匿不彰。實際上應取之手續，是將"最好代表線"作水平的投射，並將數據與他的差數，加以放大。如見所繪剩餘數各點，交互且等距的位於水平線之兩側，而水平線又是通過剩餘零值的，則原作之線，即爲代

表數據的最好線。不過照普通情形說，在所繪的剩餘數間常可另作一新線，使剩餘數之交互分布於其兩旁，較對上述的水平線尤為貼切。故由原代表線所得的斜度 a 及截線 b 之值，應依剩餘作圖的新代表線之斜度和截線值加以改正。但從新代表線求得的數值，必以剩餘作圖所用的比例尺為定，用來改正 a,b 時須加注意，不要弄錯。依循此法，原有常數，可望修正到第四位有效數字。如所想達到的精密，是異常深淺，則在第一剩餘作圖後，還須繼以第二剩餘作圖纔行。

如剩餘數與直線的偏差很有系統，則在量度的精密範圍內，觀察的數據，不能用那線來代表。果有此種情形，即應另求新公式。

茲就圖 3 所討論的問題，說明剩餘曲線的作法。代表數據的最好直線，其方程式已知為

$$r=0.0278\,t+10.13,$$

要考核這方程式是否為已知數據的最好代表式，則當先行計算剩餘數值，法以 t 的觀察值代入上方程式，而計算 r。

觀察的 t	觀察的 γ	計算的 γ'	第一次剩餘 $\gamma-\gamma'$	計算的 γ''	第二次剩餘 $\gamma-\gamma''$
10.50	10.421	10.422	−0.001	10.413	+0.008
29.49	10.939	10.949	−0.010	10.946	−0.007
42.70	11.321	11.317	+0.004	11.317	+0.004
60.01	11.799	11.798	+0.001	11.802	−0.003
75.51	12.242	12.229	+0.013	12.237	+0.005
91.05	12.668	12.661	0.007	12.673	−0.005

$$\Sigma(\gamma-\gamma')^2=437 \quad \Sigma(\gamma-\gamma'')^2=188$$

看看第四行各剩餘數值，已能得到有價值的消息,倘用作圖法,當可作較精的研究,尤其是在觀察次數多時，更以用作圖法爲便。 繪圖時縱坐標所選的比例尺,不得超過以 1 英寸代表 0.01 歐姆,因爲如此,才可不必內插，即能直接把要繪的剩餘數,表示到數據的最末位有效數字。 並由估計,下一位有效數字，即 0.0001 歐姆，又可由圖讀得,此數比較數據的精密，已大到十倍以上。 剩餘圖可與直接圖用同一橫坐標的比例尺畫在同一紙上,如圖 3 所示。 經過 O 的粗橫線,是 $A'A''$ 在水平

方向的投影。 放大比例尺後,所繪的剩餘數,以點線連成之。 略加視察,即知正剩餘數多偏集於粗橫線之一邊,此時實可另繪一新線 $B'B''$ 使剩餘數較均勻的分布在其兩旁。 於此可見,原來 $A'A''$ 線的斜度,必須增大一點才對。 新線 $B'B''$ 在 y 軸上截線之值,依剩餘線所用的比例尺言,是負的 0.011。 他與 x 軸所成角的正切,由線上 B' 及 B'' 二點的縱橫坐標,可以求得: 取 $x'=5.00°C$, $y'=0.0095$; 及 $x''=95.05°C$, $y''=0.0135$,則

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{0.0135-(-0.0095)}{95.05-5.00}=0.00025,$$

因而原方程式中的常數,當用此兩數量加以修正,

即 $$b'=10.13-0.011=10.119$$

$$a'=0.0278+0.00025=0.02805$$

故連系 r 及 t 的方程式,經過修正後,即為

$$r=0.02805\ t\ +10.119。$$

此式之代表原來數據,遠勝於初得的方程式,這只要看一看由修正方程式中求出各組新剩餘 $(r-r'')$ 的大小與符號,如表中最後一行(第六行)所示者,就可明瞭。 因這末行剩餘數值中,既不見有

系統的差數,而且各剩餘數值的平方和,也比較從第一方程式中所得剩餘數值平方的和,要小得多。

8. 內插法公式

實驗數據的軌跡,往往與一直線相差甚微,但卻繼續相差不已,此等數據,遂不能用含有兩個常數的一般指數公式如 $y=mx^n$ 者來表示。 例如有幾種物質的膨脹係數, 在廣大的溫度範圍內所得的數據, 即有此種情形。 此時欲得一代數上的關係,普通假設的內插公式常為

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots。$$

式中所取項數(即待決的常數之數目),以數據的精密,及表示數據的曲線與直線差數之大小而定。

此種方程式中常數的數值, 最好用分析法決定。 為達此目的故,x 及 y 之值的組數,至少當與待決的常數之數目相同。 如代表數據的方程式為 $y=a+bx+cx^2$, 則至少須有三組 x y 之值;將此等數值代入方程式後,乃有三個聯立方程式,用消去法,由此三式可求未知數 a, b, c 之值。普

通問題取三項已足，採用含有第四項以外的級數，殊屬不必！ 然而一般實驗數據，x 及 y 之值的組數，每較待決的常數之數目為多；遇此情形，常數的最近或然值可用下述作圖解法或最小二乘法決定。

9. 作圖解法

令 x_1, y_1；x_2, y_2；……x_n, y_n 為變數 x 及 y 的各組觀察數值，並假定他們能滿足方程式

$$y = a + bx + cx^2。$$

任取三組數值，代入上式，即得三個聯立方程式，由此三式，可求 a, b, 及 c；但所得常數值，變而不定究竟變到什麼程度，全看所選用之 x 及 y 的各組數值而定。 要想求得 a, b, c 之最好的或最近或然值，全簡的手續，莫若將所有的 x 及 y 值，用圖形表出，再在各數據當中，引一最好的代表線。 線畫好後，就在線上選出三點（以兩端及中間各選一點為宜），測定其縱橫坐標；用這三對數值，代入上式，作成三個聯立方程式，乃可計求 a, b 及 c。 如

此求得各常數値後，尙須小心翼翼而去取合法的計算剩餘値,繪製剩餘圖,以便作進一步的修正。此外,還有一個比較麻煩但更精確可靠的方法，卽用最小二乘法來解上述方程式。

10. 最小二乘解法

如前,令 x_1y_1, x_2y_2, ……x_ny_n 爲觀察的數値;

$$y = a + bx + cx^2$$

爲常數待決的方程式。 此式又可寫成

$$y - a - bx - cx^2 = 0.$$

假如 x, y 的觀察値確無一切實驗誤差,而所設的方程式,又真是連系諸數據的定律，那末採用適當的常數值後,每組的 x y 値，必能滿足上方程式。 不過事實上，那能如此，因不可測定的誤差，乃是一切觀察中所難避免者，故將各個觀察値代入方程式後,右邊並不能等於零，而爲與零相差極小的數 v，卽所謂剩餘誤差 (Residual Error),此數可爲正亦可爲負。 現將各觀察値代入所擬方程式,就有下列的"觀察方程式"(Observation Equation)

$$y_1-a-bx_1-cx_1^2=v_1,$$
$$y_2-a-bx_2-cx_2^2=v_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n-a-bx_n-cx_n^2=v_n。$$

常數 a, b, c 的最近或然值,應由此一組方程式決定之。依最小二乘法原則,a, b, c 的最近或然值,係能使剩餘誤差 v 平方的和,成一個最小數值。換言之,即能使 $\Sigma v^2(=v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2)$ 爲最小數值的 a, b, c 才是我們所要的。Σv^2 係 a, b, c 各量的函數,函數值成爲極小時的條件,必是對於變數 a, b, c 的一次微係數爲零,二次微係數爲正。

但通常祇求第一次微係數爲零即可,因 Σv^2 之爲極大抑爲極小,僅由視察,已可分辨,而爲極大時的 x, b, c 之極限,顯然是無窮大。

應用此種條件於上述觀察方程式,得

$$\frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}(v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2)$$
$$=2\left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial a}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial a}+\cdots\cdots+v_n\frac{\partial v_n}{\partial a}\right)$$
$$=0。$$

$$\frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}(v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2)$$

$$=2(v_1\frac{\partial v_1}{\partial b}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial b}+\cdots\cdots+v_n\frac{\partial v_n}{\partial b})$$

$$=0_{\circ}$$

$$\frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial c}=\frac{\partial}{\partial c}(v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2)$$

$$=2(v_1\frac{\partial v_1}{\partial c}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial c}+\cdots\cdots+v_n\frac{\partial v_n}{\partial c})$$

$$=0_{\circ}$$

將 v_1, v_2 等值代入,再行微分,即有

$$(y_1-a-bx_1-cx_1^2)+(y_2-a-bx_2-cx_2^2),+$$
$$\cdots\cdots+(y_n-a-bx_n-cx_n^2)=0,$$
$$(y_1-a-bx_1-cx_1^2)x_1+(y_2-a-bx_2-cx_2^2)x_2$$
$$+\cdots\cdots+(y_n-a-bx_n-cx_n^2)x_n=0,$$
$$(y_1-a-bx_1-cx_1^2)x_1^2+(y_2-a-bx_2-cx_2^2)x_2^2$$
$$+\cdots\cdots+(y_n-a-bx_n-cx_n^2)x_n^2=0_{\circ}$$

把上式簡單寫之,可得下列三個方程式:

$$\Sigma y\ -\Sigma a-b\Sigma x-c\Sigma x^2=0,$$
$$\Sigma xy-a\Sigma x-b\Sigma x^2-c\Sigma x^3=0_{\circ}$$
$$\Sigma x^2y-a\Sigma x^2-b\Sigma x^3-c\Sigma x^4=0,$$

這三式叫做標準方程式(Normal Equation),現因方程式的數目與未知數的數目相等，故用通常消去法，可得常數 a, b, c 之值。但是要把 Σy, Σxy, Σx^2y 等値代入標準方程式，再來解他以求常數，手續極其麻煩，而待決的常數加多時，工作亦更繁重，此亦顯而易見的事實。

欲作進一步的研究，關於最小二乘法方面，可參考巴爾來之最小二乘法，賴德之觀察處理法(Wright's Treatise on the Adjustment of Observation)或麥里曼之最小二乘(Merriman's Least Squares)。關於專門的圖解法，可參考柏得耳之圖形繪製法(Peddle's The Construction of Graphical Charts)。

第三章

例題詳解及習題

1. 例題詳解

未作精確問題數值的解法以前，學子對於下舉的幾個問題，應當先自考決。

第一 所討論的公式，是否形狀已極簡單，而便於精密處理？ 普通有略去式中一兩項（這一兩項的差數對於最後結果的影響，當係可以省略不計的），因將極複雜的公式，變為較便利的形狀的。 如能改為乘積函數時，應即行改易，以便運算。

第二 對所應討論的函數之形狀，加以考慮後，就要拿定主意，看是採用何種方法來解題，較為妥善。 換言之，卽是究竟用含有函數微分的一般差數法好呢，還是用分數法或視察法好。

第三 上兩點解決後，再對問題中的敍述加

以研究。把所有的數據按着系統，謄寫下來，看他大體的形式，是否合於所採用的解題法。設如不合，則數字差 δ 或 Δ 當改變爲相應的分數差 $\frac{\delta}{m}$ 或 $\frac{\Delta}{m}$，也許是分數差要改爲相應的字數差，這完全看情形說話，臨機應變，責在作者。

現把這些通則，用幾個標準問題的解法，來說明如下：

問題 1. 設四個物質重量的平均值，和差數度如下：

$W_1 = 3147.226$ 克　$A.D. = 0.312$ 克

$W_2 = 100.4211$ 克　可靠到 0.015%

$W_3 = 1.3246$ 克　概然誤差 $P.E. = 0.0011$ 克

$W_4 = 604.279$ 克　可靠到 5000 分之 1

(a) 設各量度彼此無關，試指出各量度中過多數字。

各數量應依平均差所示兩位有效數字(依前述規則三)，留兩位不定數字。故各量度中如有未用平均差表示差數者，應先求其平均差。計算平均差，並應用計算規則一，二，三，後，所留的正確數字如下：

$W_1=3147.23$ 克 $A.D.=\delta_1=0.31$ 克

$W_2=100.421$ 克 $A.D.=\delta_2=0.015$ 克,因 $100\frac{A.D.}{100}=0.015$

$W_3=1.3246$ 克 $A.D.=\delta_3=0.0013$ 克,因 $P.E.=0.85A.D.$

$W_4=604.28$ 克 $A.D.=\delta_4=0.12$ 克,因 $\frac{A.D.}{600}=\frac{1}{5000}$

(b) 此等量度當中,那個最精密,那個最不精密?

比較各量的精密時,如各量的大小,並不近似的相等,則當將各量的分數差或百分差,互相比較,以求相對的精密,而平均差及或然誤差,皆不採用。 所以現須計算上述各量的分數差或百分差。

關於 W_1, $100\frac{\delta_1}{W_1}=100\frac{0.31}{3100}=0.010\%$;

W_2, $100\frac{\delta_2}{W_2}=100\frac{0.015}{100}=0.015\%$;

W_3, $100\frac{\delta_3}{W_3}=100\frac{0.0013}{1.3}=0.10\%$;

W_4, $100\frac{\delta_4}{W_4}=100\frac{0.12}{600}=0.020\%$。

故精密之順序爲 W_1, W_2, W_4, W_3。 可注意的是 W_3, 他雖秤定到一克的較小分數,爲他量所不及,但其百分差比較任何數量的都要大,所以他的量度之精密,仍是最小。

(c) 求諸量度的和及其差數度,計算時留適當有

效數字。

$$M = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

有最大 $A.D.$ 的量度是 W_1，其平均差為 0.31 克，所選表示量度的單位，第一二兩位小數，疑而不定。故由計算規則四(24 頁)，知在各量中，祇當留兩位小數。

$$\begin{array}{r}
3147.23 \text{ 克} \\
100.42\phantom{\text{ 克}} \\
1.32\phantom{\text{ 克}} \\
601.28\phantom{\text{ 克}} \\
\hline
M = 3850.25 \text{ 克}
\end{array}$$

總和 M 的合成差 Δ 為

$$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial M}{\partial W_1} \cdot \delta_1 = \delta_1 = 0.31 \text{ 克}$$

同樣　$\Delta_2 = \delta_2 = 0.015$ 克，此數可以省略，

$\Delta_3 = \delta_3 = 0.0013$ 克，此數可以省略，

$\Delta_4 = \delta_4 = 0.12$ 克

故　$$\Delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_4^2} = \sqrt{0.31^2 + 0.12^2} = 0.33 \text{ 克}$$

(d)求四量的積及其精密度。

$$M = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4$$

由計算規則五，最不精密的因子為 W_3，其正確的程度僅及 0.10%，故計算時當留五位有效數字，最後兩位，疑而

不定。W_1，W_2，W_4各因子，亦當留五位有效數字，計算時當用五位對數表。

$$W_1=3147.2 \qquad \log W_1=3.49793$$

$$W_2=100.42 \qquad \log W_2=2.00182$$

$$W_3=1.3246 \qquad \log W_3=0.12209$$

$$W_4=604.28 \qquad \log W_4=2.78124$$

$$\log M=8.40308$$

故　$M=25298\times10^4$ 克^4　或 2.5298×10^8 克^4。

M的精密，當以分數法或視察法計算，因為他是乘積函數。再看問題(b)，知W_1，W_2及W_4的百分精密，比較W_3要大到 5 倍至 10 倍，故實際上乘積當中所有不定值，完全由W_3的差數生出。因M值隨W_3的一次方成比例。

$$100\frac{\Delta_3}{M}=100\frac{\delta_3}{W_3}$$

故乘積的百分差為

$$100\frac{\Delta}{M}=0.10\%,$$

因此　$$\Delta=M\cdot\frac{0.10}{100}=25\times10^4\quad(\text{克})^4$$

(c) 設各量以下式連合

$$M=W_1\times W_2-W_3\times W_4$$

試計算M及其差數度。

當未代入W之值而實行計算M以前，最好能留意各項

的近似值。看一看數據,得知 $W_1 \times W_2$ 之近似值爲 310000,因最不精密的因子 W_2,祇量度到 0.015%,故此乘積當計算到六位有效數字,最後兩位,疑而不定。不定數的第二位是單位的位,此位以下,一概可以略去。$W_3 \times W_4 = 600$ 一項,將來要在 $W_1 \times W_2$ 當中減去,故亦毋須計算到單位以下數字,有三位有效數字,已經夠用。計算 $W_1 \times W_2$ 時,要用六位對數表,而計算 $W_3 \times W_4$ 時,用三位對數表,或簡略乘法,或計算尺,也就行了。

今者 $W_1 = 3147.23$ 克 $\qquad \log W_1 = 3.497928$

$W_2 = 100.421$ 克 $\qquad \log W_2 = 2.001825$

$\log W_1 \times W_2 = 5.499753$

$\therefore W_1 \times W_2 = 316048$ (克)^2

$W_3 = 1.32$ 克 $\qquad \log W_3 = 0.121$

$W_4 = 60.4$ 克 $\qquad \log W_4 = 2.781$

$\log W_3 \times W_4 = 2.902$

$\therefore W_3 \times W_4 = 798$(克)^2

$M = 316048$ (克)$^2 - 798$(克)$^2 = 315250$(克)^2

欲決定 M 的精密,不可不注意此處公式的形狀,如就 $M = W_1 \times W_2 - W_3 \times W_4$ 而論,則必須用一般微分法,求 δ 在 M 上的效應,再求平方和的平方根。但因 W_3 精密到 0.1%,而 W_4 到 0.02%,是則 $W_3 \times W_4$ 的前三位有效數字,全無不定者。故 W_3 及 W_4 中的差數,在最後結果 M 上,

並未引入不定數。所有不定數,皆從 W_1 及 W_2 二量度帶來的。又因 $W_3\times W_4$ 在數量上比較 $W_1\times W_2$ 要小,所以在討論精密時,$W_3\times W_4$ 可以略去,而 M 得以寫作下形:

$$M = W_1\times W_2$$

並且 M 的精密,可用分數法求之。

M 中合成分數差爲

$$\frac{\Delta}{M}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{M}\right)^2+\left(\frac{\Delta_2}{M}\right)^2}$$

但　$$\frac{\Delta_1}{M}=\frac{\delta_1}{W_1}=0.00010$$

$$\frac{\Delta_2}{M}=\frac{\delta}{W_2}=0.00015$$

故　$$\frac{\Delta}{M}=0.0001\sqrt{1^2+1.5^2}=0.00018$$

或　$$100\frac{\Delta}{M}=0.018\%$$

$$\Delta=320000\ (\text{克})^2\times 0.00018=58\ (\text{克})^2;$$

即　M 值的不定,有 ±58 個單位。

上題說明:一個量度的有效數字應該多少,全看計算的情形而定。 如在問題 (d),W_3 需要精密的全量,而在問題 (e) 其量度的精確,就不妨減低。

問題 2.　玆想測定一白熾燈在一小時內所發生的熱量 H,並欲以卡 (Calories) 及百分數計其差

數。設由安培計(Ammeter)及伏特計(Voltmeter)所得的平均量度爲 $I=2.501\pm0.012$ 安培，及 $E=109.72\pm0.34$ 伏特，開閉路線的時間，每次不定到 ±0.5 秒。以卡表 H 的值，則

$$H=0.2390\,I\cdot E\cdot t_{\circ}$$

此處表 H 的公式，是變數 I, E 及 t 的一個簡單乘積函數，故此問題，當用分數法來解。

已知數據爲

$I=2.501$	安培	$\delta_I=0.012$	安培
$E=109.72$	伏特	$\delta_E=0.34$	伏特

$t=t_2-t_1=1$ 時 $=3600$ 秒

$\delta_{t1}=\delta_{t2}=0.50$ 秒，但 δ_t 爲未知數。

要求的結果，是用卡表示的 H 值，H 的差數 Δ，及百分差 $100\,\frac{\Delta}{H}$。

第一步把各成分中已知差數 δ，改變爲分數差。

I 的分數差爲 $\quad \frac{\delta_I}{I}=\frac{0.012}{2.5}=0.0048$

E 的分數差爲 $\quad \frac{\delta_E}{E}=\frac{0.34}{110}=0.0031$

欲求 t 的分數差，必須先求其數字差。因 $t=t_2-t_1$ 及 $\delta_{t1}=\delta_{t2}=0.50$ 秒，

故 t 的數字差爲

$$\delta=\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2};$$

但　$$\Delta_1=\frac{\partial t}{\partial t_1}\quad\delta_{t1}=\delta_{t1}=0.50\text{ 秒},$$

$$\Delta_2=\frac{\partial t}{\partial t_2}\cdot\delta_{t2}=\delta_{t2}=0.50\text{ 秒。}$$

故　$$\delta=\sqrt{0.5^2+0.5^2}=0.70\text{ 秒}$$

而 t 的分數差爲

$$\frac{\delta}{t}=\frac{0.70}{3600}=0.00019_{\circ}$$

此數與電流 I 及電壓 E 的分數差相比較，可以略去不計，故 H 的合成分數差爲

$$\frac{\Delta}{H}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_I}{H}\right)^2+\left(\frac{\Delta_E}{H}\right)^2}\text{。}$$

試考査表 H 的公式，知 I 及 E 在公式中皆爲一次因子，則

$$\frac{\Delta_I}{H}=\frac{\delta_I}{I}=0.0048,$$

$$\frac{\Delta_E}{H}=\frac{\delta_E}{E}=0.0031$$

故　$$\frac{\Delta}{H}=\sqrt{0.0048^2+0.0031^2}=0.0057$$

或即 H 的百分差爲　$100\ \frac{\Delta}{H}=0.57\%$。

在計算 H 時，已知最不精密的因子是電流，其不定數爲 0.48%，所以應當計算到四位有效數字。因之須用四位對

數表,來計算 H,而每一因子,皆須保留四位數字,就是化焦耳(Joule)爲卡的常數也當如是。

$$H=0.2390\times 2.501\times 109.7\times 3600$$

$$=2361\times 10^2 \text{ 卡}$$

H 的數字差 Δ,可從其分數差算出,値爲

$$\Delta=240.0\times 10^2\times 0.0057$$

$$=14\times 10^2 \text{ 卡}$$

問題 3. 用光度計 (Photometer) 及標準燭來測定某煤氣燈的燭光(Candle Power)。燈是放在棒的一端,他與標準燭相距 100 英寸。設棒上所放紙盤與燭的距離 a,經過若干次的測定,得平均値爲 $a=20.17\pm 0.27$英寸。試計算燈的燭光及其差數,假定標準燭是依着正常速度燃燒的。

$$\frac{L\,(\text{燈})}{L_0(\text{燭})}=\frac{(100-a)^2}{a^2}$$

上式可寫成 $\quad L=L_0\left(\frac{100-a}{a}\right)^2,$

因 $L_0=1$ 燭光=常數,故 $L=\left(\frac{100-a}{a}\right)^2$,代入 a 値,

$$L=\left(\frac{100-20.17}{20.17}\right)^2=\left(\frac{79.83}{20.17}\right)^2=15.67 \text{ 燭光}$$

L 爲單變數 a 的函數;討論精密時,要注意此函數不能看成分子差數與分母差數是毫無關係的一個分數。不過此式能

化簡如下:

$$L'=\sqrt{L}=1\times\frac{100-a}{a},$$

先解出 L' 的差數,則 L 應具的差數,極易求到。

由 a 的差數 $\delta=0.27$ 與上面引生的 L' 之差數 Δ' 爲

$$\Delta'=\frac{d}{da}\left(1\times\frac{100-a}{a}\right)\cdot\delta=1\times\frac{100}{a^2}\cdot\delta$$

$$=1\,(\text{燭光})^{\frac{1}{2}}\times\frac{100\ \text{厘米}}{20^2\ \text{厘米}^2}\times0.27\ \text{厘米}=0.068(\text{燭光})^{\frac{1}{2}}$$

求 L 的差數,有二法:

第一 一般微分法:

$$L'=\sqrt{L}=L^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\qquad \Delta'=\frac{dL'}{dL}\cdot\Delta=\frac{1}{2}L^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\Delta。$$

此式中 Δ 爲 L 應具的差數.

故 $$\Delta=2\sqrt{L}\cdot\Delta'$$

$$=2\times\sqrt{16\ \text{燭光}}\times0.068(\text{燭光})^{\frac{1}{2}}$$

$$=0.54\ \text{燭光}。$$

第二 分數法:

與 Δ' 相應之 L' 的分數差爲

$$\frac{\Delta'}{L'}=\frac{0.068}{\sqrt{L}}=\frac{0.068}{\sqrt{16}}=0.017;$$

因 $L'=L^{\frac{1}{2}}$,則 L' 的分數差爲 L 的分數差之二分之一;即

$$\frac{\Delta'}{L'}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{L},$$

$$\therefore\frac{\Delta}{L}=2\cdot\frac{\Delta'}{L'}=2\times0.017=0.034$$

故 $\Delta=0.034\times L=0.034\times16$ 燭光 $=0.54$ 燭光。

此結果當然與用一般微分法所得者相同，不過用微係數的結果數值，有時稍較複雜。

原來量度 a 時，百分差雖僅有 $100\dfrac{0.27}{20}(=1.4\%)$，但因假定測量時標準燭發生的平均光度，是等於1枝燭光，於是得到的煤氣燈燭光，就爲 15.67 ± 0.54 燭光，即量度的百分差已達 $100\times\dfrac{0.54}{16}(=3.4\%)$ 之多了。

問題4. 設一物質的折射率(Index of Refraction)係由測量光線的入射角 i(Angle of Incidence)及折射角 r (Angle of Reflection)而得。約略的量度，得 $i=45°$, $r=30°$. 如欲使 n 精密到0.2%，則兩角當量度到如何精密?

n 的公式爲

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}。$$

此式並非變數 i 及 r 的乘積函數，似須用一般差數法來解決，然若改換變數 i, r 爲 x 與 y，而令 $x=\sin i$,

$y=\sin r$，則函數成為 $n=\frac{x}{y}$，是可用分數解法，以求 x 及 y 所許有的差數。不過差數求得後，仍有兩個新問題，須用一般法解決，即如何由 $x=\sin i$ 及 $y=\sin r$ 二式中決定 i 及 r 的差數。分數法與差數法，法雖有異，所得最後結果，當然相同。現就用此兩法，解題如下：

第一解　一般法：

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}.$$

已知　$100\frac{\Delta}{n}=0.2$；　$i=45^\circ$；　$r=30^\circ$；　求 δ_i 及 δ_r

現當先由規定的百分精確，求出 n 的差數 Δ，再行解題，不過欲得 Δ，須知 n 的近似值，而此值不難於數據中求得之。

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\div\frac{1}{2}=1.4(\text{約數})。$$

因之　$\Delta=1.4\times0.0020=0.0028$。

以相等效應分配此差數於 i 及 r，就有

$$\Delta_i=\Delta_r=\frac{\Delta}{\sqrt{2}}=\frac{0.0028}{1.4}=0.0020。$$

但　$$\Delta_i=\frac{\partial n}{\partial i}\cdot\delta_i=\frac{\cos i}{\sin r}\cdot\delta_i$$

$$\therefore\delta_i=\Delta_i\frac{\sin r}{\cos i}=0.0020\frac{\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ}=0.0014$$

如以角度表比差數當知

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}=0.017 \text{ 弧度}$$

故 $$\delta_i=\frac{0.0014}{0.017}=0.082^\circ\text{，或}4.9'。$$

同樣 $$\Delta_r=\frac{\partial n}{\partial r}\cdot\delta_r=\frac{\sin i\ \cos r}{\sin^2 r}\cdot\delta_r$$

$$\therefore\ \delta_r=\Delta_r\frac{\sin^2 r}{\sin i\ \cos r}=0.0020\frac{\sin^2 30^\circ}{\sin 45^\circ\cos 30^\circ}$$

$$=0.00082,$$

以角度表之，$\delta_r=\dfrac{0.00082}{0.017}=0.048^\circ$，或 $2.9'$

因知要 n 的精密，達到 0.2%，所用儀器至少須能讀到三分。實際上也當然是要能夠讀到分的儀器，方行採用。

第二解 分數法：

如令 $n=\sin i$，$y=\sin r$，n 遂等於 $\dfrac{x}{y}$，於是下述的觀察法就可應用。題中曾限定 n 的分數差不能大於 $\dfrac{\Delta}{n}=0.0020$。故用相等效應分配此差數於 x 及 y 之上，得

$$\frac{\Delta_x}{n}=\frac{\Delta_y}{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\Delta}{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0.0020=0.0014$$

因 $$n=\frac{x}{y},$$

是以 $$\frac{\Delta_x}{n}=\frac{\delta_x}{x},\qquad \text{並}\frac{\Delta_y}{n}=\frac{\delta_y}{y},$$

於是　$\frac{\delta_x}{x}=0.0014$，　$\frac{\delta_y}{y}=0.0014$。

現在有兩個新問題要解決，即是如何由 x，y 所許可的精確，來求 δ_i 及 δ_r。

因　$x=\sin i$ 是三角函數，所以因 x 的差數 δ_x 而引起的 i 之差數，必須用一般微分法求之。

因知　$\frac{\delta_x}{x}=0.0014$，

故　$\delta_x=0.0014x=0.0014\sin 45^\circ=0.0010$。

又　$\delta_x=\frac{d\sin i}{di}\cdot\delta_i=\cos i\cdot\delta_i$

$$\therefore\delta_i=\frac{\delta_x}{\cos i}=0.0010\div\frac{1}{\sqrt{2}}=0.0014,$$

以度數計，$\delta_i=\frac{0.0014}{0.017}=0.082^\circ=4.9'$

同樣，已知 $y=\sin r$ 及 $\frac{\delta_y}{y}=0.0014$，故

$$\delta_y=0.0014\,y=0.0014\sin 30^\circ=0.00070;$$

惟　$\delta_y=\frac{d\sin r}{dr}\cdot\delta_r=\cos r.\delta_r$

$$\therefore\quad\delta_r=\frac{\delta_y}{\cos r}=0.00070\div\frac{\sqrt{3}}{2}=0.00082,$$

以角度計，$\delta_r=\frac{0.00082}{0.017}=0.048^\circ=2.9'$

在此問題，把函數變成乘積形式，而用分數法解題，工作並

不減少，因爲最後一步，還是免不了要用一般微分法。

問題 5. 欲測定一物質的比熱到 0.5% 則各種量度當測定到如何精密？ 茲由預試(Preliminary Experiment)得知各量的近似值如下：

$S=$ 物質的比熱 $=0.10$

$W=$ 物質的重量 $=300$ 克。

$W_0=$ 水的重量 $=500$ 克。

$W_1=$ 卡計(Calorimeter)等物的重量 $=100$ 克。

$S_1=$ 卡計的比熱 $=0.095$

$k=W_1S_1=$ 卡計的水當量(Water Equivalent) $=9.5$。

$t_s=$ 熱物質的溫度 $=100^\circ C.$

$t_1=$ 卡計的最初溫度 $=15^\circ C$

$t_2=$ 卡計的最終溫度 $=20^\circ C.$

$t_s-t_2=$ 物質溫度的下降 $=100^\circ-20^\circ=80^\circ C.$

$t_2-t_1=$ 卡計及其內容物溫度的上升 $=20^\circ-15^\circ=5^\circ C.$

$$S=\frac{(W_0+k)(t_2-t_1)}{(W)(t_s-t_2)}$$

初看起來，好像此題祇能用一般微分法去解，因爲 S 不是直接量度的乘積函數；不過他卻是外包括弧的四因子之乘積，此等因子，除 (t_2-t_1) 及 (t_s-t_2) 二個中皆含 t_2 外，餘俱各自獨立。 但 t_2 的誤差，在 $t_s-t_2=80^\circ C.$ 時的百分效應，同在 $t_2-t_1=5^\circ C.$ 時的百分效應，相比之下，要小得多，當我

們討論精密時，簡直可把前一因子略去不要，則較爲便利的百分法，就可應用。將 S 寫作：

$$S=\frac{m_1\times m_2}{m_3\times m_4}$$

用相等效應，得

$$\frac{\Delta_1}{S}=\frac{\Delta_2}{S}=\frac{\Delta_3}{S}=\frac{\Delta_4}{S}=\frac{\Delta}{S}\ \frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{0.005}{2}=0.0025。$$

因各因子皆爲一次，則

$$\frac{\Delta_1}{S}=\frac{\delta_1}{m_1}=\frac{\delta_1}{(W_0+E)}=0.0025,$$

$$\therefore \delta_1=510克\times 0.0025=1.3\ 克$$

$$\frac{\Delta_2}{S}=\frac{\delta_2}{m_2}=\frac{\delta_2}{(t_2-t_1)}=0.0025,$$

$$\therefore \delta_2=5^\circ\times 0.0025=0.013^\circ。$$

$$\frac{\Delta_3}{S}=\frac{\delta_3}{m_3}=\frac{\delta_3}{W}=0.0025$$

$$\therefore \delta_3=300\ 克\ \times 0.0025=0.75\ 克$$

$$\frac{\Delta_4}{S}=\frac{\delta_4}{m_4}=\frac{\delta_4}{(t_3-t_4)}=0.0025$$

$$\therefore \delta_4=80^\circ\times 0.0025=0.20$$

這些量度中，最難滿足上述條件的是 $m_2(=5^\circ\pm 0.013^\circ)$。因爲他既要一個能讀到 0.01° 的正確卡計溫度計，而一切手術還須特別小心。至於測定 $m_4(=80^\circ)$ 到 $\pm 0.20^\circ$，則較容易，但是也要一個很精密而曾經校準過的溫度計才行。在此數溫度測定中，溫度的範圍，應當放廣些。從他方面

說，測定物質的重量 W，他的精密，縱然要比解中所須求的還高些，亦極容易。因將 300 克的物質放在通常天平上秤，要精密到 0.1 克，並不費事，但既精密到 0.1 克，則他的精密，已比所求的，大到八倍了；故在上述 0.5% 的限制內，W 對於 S，決不會引入誤差。同樣，因子 $W_0+k(=W_0+W_1S_1=500+100\times0.095=500+9.5=510)$ 的測定，也易超過 ±1.3 克之精密，因 $S(=0.095)$ 僅精密到 1%，而 100 克的 W_1 如已秤到 1% 或 ±1.0 克，則 $k(=W_1S_1=9.5)$ 之可靠，幾近 ±0.13 克。又重量為 W_0 的水，如已秤到近乎十分之一或十分之二克，則 W_0+k 一因子在結果上所生的誤差，可以不計。因而可用相等效應法，解此問題，並假定所許誤差，僅須分配於二個因子，不必由四因子均攤，如此一辦，這兩因子所許的差數，就比前所限制的又增大了許多。

按上說法，有

$$\frac{\Delta_2}{S}=\frac{\Delta_4}{S}=\frac{\Delta}{S}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{0.005}{1.4}=0.0036$$

因之
$$\frac{\delta_2}{m_2}=\frac{\delta_2}{t_2-t_1}=0.0036\qquad\therefore\ \delta_2=0.018^\circ。$$

$$\frac{\delta_4}{m_4}=\frac{\delta_4}{t_4-t_2}=0.0036\qquad\therefore\ \delta_4=0.29^\circ。$$

如 t_s-t_2 的誤差，能小於 0.29°（按此情形，不難做到），則 δ_2 的範圍，尚可放廣。*

---

*按即謂 δ_2 的值尚可變大。

2. 習題

(1) 解釋題

1. 試解釋下列各名詞: 精密度; 差數度; 常定誤差;剩餘誤差;或然誤差;平均誤差;巨大誤差;不可測定的誤差;加重平均數;重數。

2. 平均差,或然誤差及平均誤差,對於表示機會定律的曲線,有何幾何學上的意義?

3. 增多觀察的次數,實際上是否即可減少平均結果的平均差到任何所求的數值? 為什麽?

4. 若棒長的平均值,由九次量度而得者為 24.213 厘米,$A.D.=0.012$ 厘米,則擬令 $A.D.=0.0060$ 厘米,應該加多幾個同樣的觀察?

5. 在何種情况之下,某觀察即可棄去不用? 為什麽?

6. 當計算時,任何部分應留幾位有效數字,是靠什麽來決定的? 在何種情况之下,計算時當用

四位,五位,或七位對數表?

7. 結果的有效數字位數，是否依照小數點的位置而定? 說明所答理由。一個結果的精密,是否因小數點的位置而變化? 爲什麽?

8. 幾個觀察數量相加相減時,數字的棄擲,當受制於小數位數,而在乘除時,所應注意的是有效數字的位數,而非小數點,這是什麽緣故?

(2) 關於有效數字,簡算法,加重觀察等問題

9. 根據實驗,得數據如下:

$m_1 = 10.4238$ 歐姆 $\pm$ 0.0101 歐姆。

$m_2 = 1000.129$ 歐姆 $\pm$ 0.020%。

$m_3 = 0.1427$ 歐姆 ± 0.0014 歐姆。

$m_4 = 2.4426$ 歐姆 $\pm$2,000 分之 1.04。

(a)指出各量度的過多數字,和精密之順序。

(b)求他們的和。

(c)指出計算乘積時,應當保留的數字。

(d)指出計算 M 時各部分中應當保留的適當位數,假設

$$M = m_2 \times m_3 - m_1 \times m_4。$$

10. 已知下列重量和其差數度:

$m_1 = 241.631$ 克 $\pm 0.25\%$。

$m_2 = 5020.124$ 克 ± 0.98 克。

$m_3 = 10.005$ 克 $\pm$1,000 分之 1。

$m_4 = 7141.110$ 克$\pm$"或然誤差"

$= \pm 0.603$ 克。

(a)指出過多數字。

(b)那個是最精密,那個是最不精密的數量?

(c)計算該四數和時,指出各數應保留之數字。

(d)計算各數的連乘積時,指出各數應保留的數字。

(e)計算 $M=\frac{m_1\times m_2}{m_3}+m_4$ 時,指出各量應留之數字。

11. 已知一棒的長度和精密度如下:

24.316 厘米 ±0.028 厘米。

24.3922 厘米 ±1,000 分之 6。

24.3184 厘米"或然誤差"±0.0121 厘米。

24.3091 厘米 ±0.12%。

24.3100 厘米 ±0.0152 厘米。

(a)指出過多數字。

(b)指出結果可靠度的次序。

(c)計算相對重數。

(d)計算加重平均數。

12. 某電池的電動勢,經各個獨立測定後,得值如下:

1.4273 伏特 ±0.0014 伏特

1.4291 伏特 ±0.15%

1.4278 伏特 ±1,000 分之 1.6。

試求各次測定應具之相對重數，並說明怎樣計算加重平均數。

13. 四個獨立觀察者，測定近似 1 歐姆的電阻。甲測到 0.10%，乙測到 0.0030 歐姆，丙測到五百分之一，丁則有或然誤差 0.00085 歐姆。試求這些測定的相對可靠度及其重數。

14. 將一碼尺與一標準米尺相較十六次，其平均結果爲

1 碼 = 0.91449 米，$A.D.$ = ±0.00011 米，

如所有常定誤差的來源，統加改正後，米尺中尙有剩餘誤差 ±0.007 厘米，那麼碼的數値可靠到 1 英寸的幾分之幾？設此米尺係在 0°C. 時刻定標準，而在 20°C. 時使用，現如忽略尺的膨脹，則結果所生的常定誤差(以英寸計)，大小如何？（假定昇高一度，其膨脹數爲全長的 0.0025%）。

15. 如近似 10 英尺的距離，測量到 1% 的十

分之一，則距離以米計時，其平均差，百分差，及或然誤差，各爲若干？（1 米＝39.370 英寸）。

16. 不用計算尺及對數表，儘量使用簡算法，試由下列數據算出 M。計算時每一步驟中僅留兩位不定數，計算完畢，要費多少時間？

$$M = M_1 + M_2(1 + a)^2。$$

$$M_1 = 1.04329 \pm 0.20\%。$$

$$a = 0.00503（誤差可略去）。$$

17. 試以簡算法，由下列數據及公式算出溫度 t；惟計算時，每一步驟棄去的數字，應不致影響結果到不定數字的第二位，（可能時，用近似公式，見附錄 21）。

$$t = \frac{p_t - p_0}{a p_0 - k p_t}\left(1 + \frac{r}{1 + a t_1} \times \frac{p_t}{p_0}\right)$$

$p_t = 921.18$ 厘米 ± 0.10 厘米

$p_0 = 672.29$ 厘米 ± 0.10 厘米

$a = 0.00367$，誤差可省略

$k = 0.000027$，可靠到二位數字

$t_1 = 20.0^\circ \pm 0.1^\circ$。

$r = 0.0173 \pm 0.0010$。

18. 試用手續最簡而與量度精密適合的算法，從下列數據，計求液體的比重。

$$s=\frac{w_2-b}{w_1-b}\cdot\frac{1}{1+k(t_2-t_1)}\cdot\frac{D_{t2}}{D_{t1}}$$

$w_1=35.1432$ 克 ± 0.0014 克。

$w_2=39.2764$ 克 ± 0.0012 克。

$b=10.1211$ 克 ± 0.0011 克。

$t_1=20.0^\circ\pm 0.1^\circ$。

$t_2=25.0^\circ\pm 0.1^\circ$

$k=0.000026$。

$D_{t_1}=0.99825$。

$D_{t_2}=0.99710$。

(3) 一般差數法的問題

a. 合成效應

19. 一記秒的標準擺 A，電連於另一擺 B，則兩擺何時作同相之振盪，易得正確記錄。設由一組觀察結果，知兩次同相相隔的平均時間爲 $m=67.2$ 秒 ±1.1 秒，如 B 比 A 走得慢，試以秒求其振動時間及差數度。

$$t=\frac{m}{m-1}。$$

計算 t 時，當用幾位的對數？為什麼？

20. 用面積計(Planimeter)測定一面積，得5.143平方英寸。此計每平方英寸有 $+0.012$ 平方英寸的常定誤差，而量度的平均偶然誤差爲 ±0.025 平方英寸。問改正後的面積是若干？數字差及百分差各爲若干？

21. 某停錶每15分鐘要慢1.2秒，秒針停止和開始時的不定，每次爲±0.1秒。現用此錶記錄一英里的賽跑，得 4 分 $35\frac{4}{5}$ 秒。試用秒及百分爲

單位計算真實時間，及極大的與平均的差數度。

22. 讀記攝氏溫度計時，實驗誤差如爲 $\pm 0.05°$，則在冰中與在水蒸汽中讀出數之較，其極大差及平均差爲何？

23. 若 $\lambda = a\sin\theta$，試由下開數據，計算 λ 的近似值及差數度：

$a = 0.00017592$ 厘米，誤差可以不計。

$\theta = 45° \pm 10''$。

計算時當用幾位對數？

24. 若 $y = \pi \sin\theta$　而 $\theta = 60°$（近似值），則如 θ 的不定值爲 $\pm 0.1°$，試求 y 的差數。計算時 π 應當保留幾位有效數字？

25. 某 10 歐姆的線圈，是在15°C.時定標準的，如溫度測量到 $\pm 0.1°$，試計算此線圈在 30°C.時之電阻及其精密度。如每一溫度的測量，其不定到 $\pm 0.1°$，則用何種精密度始能算出 30°C.與60°C.間電阻的增加？

$$R_t = R_{15}[1 + 0.0041(t - 15)]。$$

26. 一塊地的兩邊 a，b 及其所夾的角 θ 測，得

如下：

$$a = 101.81\text{ 英尺} \pm 0.21\text{ 英尺},$$

$$b = 200.42\text{ 英尺} \pm 0.52\text{ 英尺},$$

$$\theta = 45^\circ \pm 0.5^\circ。$$

試計算第三邊 C 的近似值，及其數字差及百分差。

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta\ 。$$

27. 複擺的長度，由下式求得，

$$l = h + r + \frac{2}{5}\frac{r^2}{h+r},$$

式內 r = 球的半直徑 $= \frac{d}{2}$，而 h = 自刀口到球頂的距離。

假設 $h = 100.03$ 厘米 $\pm 0.03\%$。

$d = 6.252$ 厘米 $\pm 0.028\%$。

試計算 l 及其合成平均差。公式中各項，俱須用正確有效數字位。

28. 據阿基米得原理測定物體比重，得下記結果：

物質在空氣中的重量 = 10.2431克 ± 0.0004克。

物質在20°C.蒸餾水中的重量 =9.0422克±0.0010克。

水在20°C.時的密度 =0.99825克/立方厘米

試計算此物體的比重及其精密度。演算當中,完全須用確當的有效位數。在此問題,空氣中秤得的物質重量,是否要化作在真空中秤得者?這一步修正是否可省?何故?

29. 測定一種輕於水的物質之比重,得下記數據:

物質在空氣中的重量 =20.425克。

物質及重錘浸於 20.0°C. 水中的重量 = 9.721克。

重錘浸於20.0°C.水中的重量 =11.034克。

如在空氣中的秤量,可靠到±0.001克,在水中的,皆可靠到±0.03%,試計算20°C.時該物質的比重,並求其數字差及百分差。

30. 某種合金,含銅2.0136克,銀0.8241克,此種分析各可靠到±0.0010克。試計算此合金的百分成分及其精密度。

31. 略去溫度計管莖之露出部(Stem Exposure)及其球部膨脹的修正,一個定容空氣溫度計(Constant Volume Air Thermometer)的溫度,從下式求得,

$$t = \frac{p_t - p_0}{a p_0}。$$

設由量度得知:

$p_0 = 750.31$ 毫米 ± 0.12 毫米

$p_t = 795.47$ 毫米 ± 0.17 毫米

$a = 0.003670$,誤差可以不計。

試計算 t 及其差數度。

32. 設光度計的紙盤,與光源距離的平均值為

$a = 200.1$ 厘米 ± 1.2 厘米。

假定所用的標準燭,依正常速度燃燒,試求此光源的燭光,並以燭光及百分數計算結果的差數。

$$\frac{L}{L(\text{燭})} = \frac{a^2}{(300-a)^2}。$$

33. 離光源 100 厘米 ± 0 厘米($=p$)處,置一透鏡(Lens),光源的像映在屏上,屏和透鏡的距離($=p'$)測得為 150.5 厘米。 如量度的不定數為

±1.5%，試求透鏡的焦距(Focal Length)及其差數度。

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$$

34. 已知

$$L=\frac{I\cos^3\theta}{r^2},$$

$$r=5\text{ 英尺 }\pm 0.50\%$$

$$\theta=45^\circ\pm 1.0^\circ$$

$$I=100=\text{ 常數。}$$

試求 L 及其合成差數。

35. 稜鏡的折射率，依下式求出：

$$n=\frac{\sin\dfrac{D+a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}。$$

若 $D=30^\circ$，而 $a=60^\circ$(近似値)，且各量測定到±1′，試計算 n 的近似値及其平均差。

36. 正切電流計 (Tangent Galvanometer) 的公式爲

$$I=K\tan\theta,$$

此處 $K=1.963\pm 0.002$，爲一常數。 若於讀偏轉

θ 時發生差數 $\pm 0.1^\circ$，試求 $\theta=45^\circ$ 及 $\theta=60^\circ$ 時 I 的值及其差數度。

37. 若 $I=k\sin\theta$，試計算偏轉 $\theta=45^\circ\pm 0.1^\circ$ 時電流 I 的值，並求其合成差。 該電流計的常數爲

$$K=4.107\pm 0.008。$$

38. 已知兩線圈的電阻近似值爲 $R_1=10$ 歐姆及 $R_2=15$ 歐姆。 如每一線圈的電阻，量到 ± 0.01 歐姆，試求兩線圈串聯及並聯時合成電阻的不定數。

$$串聯時合成電阻\ R=R_1+R_2$$

$$並聯時合成電阻\ R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

39. 球形容電器 (Spherical Condenser) 的電容量(Capacity)依下式求之

$$C=\frac{Kr_1r_2}{r_2-r_1}。$$

如 $r_1=10.0010$ 厘米 ± 0.0019 厘米

$r_2=15.0000$ 厘米 ± 0.0044 厘米

$K=2.0130\pm 0.0012$，

試求 C 及其合成差數度；C之分子的百分差爲何？以厘米表示 C 的分母之差數度，其値爲何？

40. 兩電阻 A 及 B 各量到 $\frac{1}{20}\%$。A約等於 2 歐姆，B 約等於 1 歐姆。如將 A, B 置於滑線電橋則 $l_A=660$ 厘米，$l_B=340$ 厘米，此二數値，俱測定到 ±0.2 厘米，試計算 n 的差數度，而

$$n=\frac{l_A B-l_B A}{A-B}。$$

b. 相等效應

41. 如用一10歐姆的線圈作標準電阻，欲電阻 R_t 的數量可靠到 0.02%，則溫度應量度到如何精密？又可靠到 0.01 歐姆，則溫度應量度到如何精密？

$$R_t=R_{15}[1+0.0041(t^\circ-15^\circ)]。$$

42. 欲測定鋁片的比重到千分之一，則在空中及在水中秤他時，當秤到一克的幾分之幾？惟已知此鋁片在空氣中約重 25 克，比重約爲 2.7。

43. 一物質在空氣中之重量，約爲 20 克，沒入

水中，重約5克，如比重須計算到0.1%，則此二秤量，當測定到如何精密？

44. 水銀溫度計管莖露出部的改正式，為

$C=0.000156\,n(t-t_s)$，

式內 t = 觀察所得溫度 $=100°$(近似值)。

t_s = 露出部溫度 $=20°$(近似值)。

n = 露出度數 $=80°$ (近似值)。

如欲此改正數極近0.1，則 t, t_s 及 n 應量度到如何精密？

45. 一鐵棒的線膨脹為 $\beta=0.0000121$，棒長約10英尺。如在15°C.與100°C.之間，欲其膨脹可以計算到 ±0.001 英寸，則溫度當量到如何精密？以計算到1%，當量到如何精密？

46. 三角形地的 bc 邊，可由下列數據算出，

cab 角 $=30°$(約數)

cba 角 $=45°$(約數)

ab 邊 $=280$ 英尺(約數)

若 bc 要可靠到 ±0.12 英尺，則各角及 ab 邊，當測定到如何精密？

47. 某距離 AB，不能直接求得，但在 AB 爲底的三角形之頂點 C 來作觀察，得下列數據

$$a = AC = 150 \text{ 英尺(約數)}$$

$$b = BC = 200 \text{ 英尺(約數)}$$

$$\theta = \angle ACB = 45^\circ \text{(約數)}。$$

若 AB 要測定到 ± 0.1 英尺，則 a, b 及 θ 當量度到如何精密？

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta。$$

48. 已知一三角形地的三邊爲 a, b 及 c，並知 a 約等於 120 英尺，b 約等於 180 英尺，ab 間的角 θ 約爲 45°。現欲求三角形面積到 0.12%，則 a, b 及 θ 當測定到如何精密？

$$\text{面積} = \frac{1}{2}ab\sin\theta。$$

49. 一物質的折射率爲

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}。$$

若 $i = 45^\circ$，$r = 30^\circ$，而 n 的值，須計算到千分之一，則此兩角當量度到如何精密？

50. 已知兩線圈的電阻約數爲 $R_1 = 1$ 歐姆，

$R_2=100$ 歐姆。 如欲其合併電阻可靠到 $\pm 0.1\%$，則當串聯及並聯時，R_1 與 R_2 各須量度到如何精密？

51. 一電池的電動勢由下式求得

$$E=0.0577\log\frac{C_1}{C_2}\text{ 伏特。}$$

如 E 的計算值須可靠到 ± 0.001 伏特，則 C_1 及 C_2 必須測定到如何精密？

$$C_1=100,\qquad C_2=1$$

52. 一約等於 64 燭光之燈，與一 16 燭光的標準白熾燈相比較，後者在 0.2% 以內，得視爲正確。此兩燈各居光度計的一端，相距爲 100 英寸。 如此燈的燭光係由放置四次本生盤（Bunsen Disk）的平均數求出，而可靠到 1%，則許可之平均差當爲若干？ 又盤的放置如僅一次，許可的差數，應爲若干？

(4)　百分法問題

a. 合成效應

53. 若 $M = m_1(m_2^2 - a)$ 一式,是表示 M 的合成差數不能用 m_1, m_2 的百分差來表明,則是否不論在何種情况下,皆一定如此?　原因何在?

54. 某種鋼的彈性係數(Modulus of Elasticity)爲每平方毫米 20.140 仟克,再加減每平方毫米 80 仟克,試以每平方英寸若干磅表示之,並以此等單位及百分數計算其差數。已知

1 仟克 = 2.2046 磅,　1 英寸 = 25.400 毫米。

55. 計算圓的面積 $A = \frac{\pi d^2}{4}$ 時,假定 $\pi = \frac{22}{7}$,則 A 中引入分數誤差爲若干?　此種誤差是可測定的,還是不可測定的?

56. 球的直徑約爲 6 英寸,若平均直徑之變遷爲 $\pm 0.7\%$,則體積將發生何種變遷(以立方英寸計)?　若直徑的變遷爲 ± 0.0020 英寸,則體積發生的變遷數爲若干?

57. 假定π的值爲$\frac{22}{7}$，試計算直徑約10厘米之球的體積，並求終結的差數，分數差，及百分差。若球的平均直徑本身也有一不定數爲 ±0.10 厘米，則體積中所生差數爲若干？ 在此等情況之下，π的數字位數，應保留若干位？

58. 量度一正圓柱體，得知

長 = 12.183 厘米 ±0.024 厘米

直徑 = 8.242 厘米 ±0.016 厘米

試求此圓柱的體積及差數度，指出計算時每一步驟中所應留的有效數字位數。

59. 一正圓柱形的銅塊，其厚爲h，直徑爲d，經多次測定後，得下列量度：

h（以厘米計）	d（以厘米計）
1.0472	3.9903
1.0399	3.9967
1.0445	3.9892
1.0429	3.9970
1.0483	3.9803
1.0435	3.9931

1.0491	3.9928
1.0467	3.9981
1.0412	3.9981

根據此等數據中可靠的有效數字，在計算圓柱體積時,應用的h, d,及π之正當數值爲何？　並求所計體積的分數差及百分差。

60. 某鐘的秒擺，每1°C.膨脹0.05%，如溫度高出此擺真正報秒時的溫度，已有5°C.,則此鐘每日慢若干？

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

61. 如半秒擺之振盪時間,測定到0.20%,長度測定到0.10毫米,試求g的計算值之精密？

62. 一自由墜體在空間經過距離爲10米。此距離量到±0.5厘米,而所知的g值精密到±0.03%,如空氣之阻力不計,試以秒爲單位,求下落的時間,及其精密度。

$$h = \frac{1}{2}gt^2。$$

63. 設50盞16枝燭光的白熾燈，每日平均用2小時，共用四星期。　各燈皆在110伏特的電壓

下通過電流 0.5 安培。 試以焦耳計算所耗能的全量。 如用安培計及伏特計量度平均電流及電壓，以測此種消耗能時，每計皆讀高了 2%，而電能的價是每仟瓦小時(Kilowatt Hour)取銀 10 分，則電燈公司必多索價若干?

如平均電壓及平均電流,不定數到 ±7.7 伏特及 ±0.0050 安培，則在所消耗的全電能中，不定數爲若干? 如電能的價値以元及分計，又應爲若干?

64. 欲裝一電爐以備 24 小時之用，如平均電阻爲 200 歐姆 ± 2 歐姆，平均電流爲 10 安培 ±0.10 安培，電能是每仟瓦小時價銀 5 分，試計算所需電能的價値。 並因上述電流及電阻之不定，在計算的價値中發生的最大的及平均的不定値是多少?

65. 金屬棒的電阻，向由量度棒之兩端間的電壓降落及通過其間的電流來決定。設由實驗得下列之平均量度:

$$I = 77.431 \text{ 安培 } \pm 0.022 \text{ 安培}$$

$$E = 0.5073 \text{ 伏特 } \pm 0.0010 \text{ 伏特}$$

試以歐姆計算棒的電阻及其差數。

66. 某導線在 15°C. 時的電阻為

$$R_{15}=10.000 \text{ 歐姆},$$

其在 $t°$ 時的電阻,依下式計算:

$$R_t=R_{15}[1+0.000511(t-15)]。$$

如把此線放在 45°C. 的溫箱中,通以 10 安培電流歷 1 小時之久,試求其所發生的熱量 H。

$$H=I^2Rt。$$

若溫度 t 量到 ±2.0°C.,時間量到 ±1 秒,而電流量到 ± 0.01 安培,試計算 H 的差數。

b. 相等效應

67. 一長方形板,各邊長度的約數為 $a=1$ 英尺,$b=2$ 英尺,$c=6$ 英寸。 如欲計算所得之體積到 ±0.005 立方英尺,則各量度的精密,當至如何程度? 若此板的重量,須測定到 1%,則其密度及體積,當測定到如何精密?

密度=4(約數)。

68. 一球的直徑及一正圓柱的直徑及長,約為

10 厘米，如球與圓柱體積之計算，欲到 $\frac{1}{10}$ %，則上三者的量度，以厘米計之，當精密到如何程度？

69. 某圓的面積，約爲 10(厘米)^2 要想把他算到 10,000 分之 5，則直徑的精密當測定到如何程度？ 計算時 π 應保留若干位數字？

70. 設某天平臂長之比，如下式所示：

$$r=\frac{\text{右臂之長}}{\text{左臂之長}}=\frac{\sqrt{W_l}}{\sqrt{W_r}},$$

式內 W_l 及 W_r，爲將一物體秤於左盤復秤於右盤後所得的觀察值。 如此質量約重 20 克，而欲比率 r 可靠到 0.01%，則 W_l 及 W_r 二量度，當測定到如何精密？

71. 如 $R=\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}$，現欲測定 R 到 0.5%，試以毫米計求 h 及 r 所應具有的精密。 約略量度，如 $h=5$ 毫米，$r=50$ 毫米。

72. 一平凸透鏡(Plane Convex Lens)的焦距，依下式求得：

$$\frac{1}{F}=(n-1)\frac{1}{R},$$

如 F 的計算值可靠到 ±1%，則 n 及 R 當測定

到如何精密? $n=1.5$ (約數), $R=10$ 厘米 (約數)。

73. 一棒長 l, 寬 b, 厚 d, 支其兩端而載重物 W 於其中央,其彈性係數爲

$$E=\frac{Wl^3}{4\,abd^3},$$

式內 a 爲棒之中央部分的彎曲。 現欲量度 E 到 1%,而重物 W 的誤差可以不計,試求 a, b 及 l 所許有的差數。

如 $l=m_2-m_1=100$ 厘米 (約數),則 m_1 及 m_2 二量度,當觀察到如何精確?

74. 上題中如棒的量度之約數爲長 $=1$ 米,寬 $=4$ 毫米,厚 $=10$ 毫米;棒之中部當載重若干,才能使中央起 0.5 厘米的彎曲? 又欲結果 E 可靠到 ±100 仟克/毫米^2,則所有數據,當測定到如何精密?

$E=20,000$ 仟克/毫米^2(約數)。

75. 茲用長約 550 英尺的擺,求 g 的值,設 g 的精密需至 0.5 英寸/(秒)^2,則擺長及擺動時間(各以英寸及秒計),當量度到如何精密?

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}};\quad g = 32\text{英尺}/(\text{秒})^2\ (\text{約數})。$$

76. 某鐘擺擺動的周期,時約半秒,如欲計算所得的相等單擺長度,可靠到 0.1 毫米,則時間量度的精密當到如何程度?

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2} = 980.40 \pm 0.05\ \text{厘米}/(\text{秒})^2。$$

77. 如 $R = R_1\frac{M}{N}$,

茲欲 R 的合成差數,不超過 0.05%,那末電阻 M 及 N 當可靠到若何精密,又電阻 R_1 應調節到如何精密?

$M = 100$歐姆; $N = 1$ 歐姆;

$R_1 = 5{,}000$ 歐姆(約數)。

78. 用一金屬導體與安培計串聯,約得 10 安培的電流;導體二端的電壓,由伏特計測得,值約 1 伏特。 現欲測定此導體的電阻到 0.0001 歐姆,則安培計及伏特計當校準到一安培及一伏特之幾分之幾? 如不求電阻而求導體中電流之熱效應,並假設在半小時內,約費去 20 焦耳之能,則 I, E,及 t 的量度,當測定到如何精密。

79. 一電燈在 110 伏特之電壓下，用電流約 1 安培，如要他的電阻在此情况下，値爲 0.5 歐姆，則電流及電壓當量度到如何精密？

80. 引擎(Engine)的指示馬力(Indicated Horse Power)係用下式計算，

$$I.\ H.\ P. = \frac{P \times L \times A \times N}{33,000}。$$

現有一引擎，由實驗得數據如下：

$P = 50$ 磅/(英寸)^2 = 平均有效壓力

$L = 2$ 英尺 = 動程(Stroke)之長

A = 活塞之面積，其直徑 D 爲 16 英寸

$N = 100$ = 每分鐘撞動之次數。

問 P, L, D 及 N 四量度當測定到如何精密，始能令引擎之馬力，可靠到 1%？　又如可靠到 $\frac{1}{4}$ 馬力，需如何精密？

(5) 雜題

看問題的情形,決定解題的方法。

81. 四物質的重量平均值及其精密度,已知爲:

$m_1=3147.226$ 克　A. D. $=\pm 0.312$ 克。

$m_2=100.4211$ 克　可靠到 $\pm 0.015\%$。

$m_3=1.0246$ 克　或然誤差 P. E. $=\pm 0.0017$ 克。

$m_4=404.279$ 克　可靠到 $\pm 5{,}000$ 分之1。

(a)假定各量度各不相關,試指出過多數字。比較此等量度,那個是最精密,那個是最不精密?

(b)求各量度的總和,及其精密度,計算時應留適當的有效位數。

$$M=m_1+m_2+m_3+m_4。$$

(c)求乘積

$$M=m_1\times m_2\times m_3\times m_4。$$

的百分精密,並指出在計算時各因子當留的有效數字。

(d)設將上四量用下式連合,

$$M = m_1 \times m_2 - m_3 \times m_4,$$

求 M 的精密度，並指出計算 M 時，$m_1\ m_2\ m_3\ m_4$ 四量當保留幾個有效數字。

(e) 如問題(b)中的 M，須求到 $\pm 0.010\%$，則各量度當測定到如何精密?

(f)設 $M = \frac{m_1 \times m_3^2 \times \sqrt{m_4}}{m_2}$，如欲計算 M 到 ± 1.2 單位，則各成分當測定到如何精密?

(g)如問題(d)中之 M 須求到10,000分之 ± 1，則各成分當測定到如何精密?

82.設某種液體對於空氣間的全反射角(Angle of Total Reflection) θ 卽臨界角(Critical Angle)約爲45°，茲欲令此液體折射率 n 可靠到 $\pm 0.5\%$，則此角當量度到如何精密?

$$\sin \theta = \frac{1}{n}.$$

83. 試以球徑計(Spherometer)量一平凸鏡的焦距。已知 $n = 1.5$(約數)

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right);$$

$$R=\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}。$$

(a)如 F 須求至 0.1%，則 n 及 R 當測定到如何精確?

(b)如由預測得 $r=40$ 毫米，$h=4$ 毫米(皆約數)，則此二量度當測定到如何精密，始能滿足情形(a)。

84. 用布夫立折射計(Pulfrich Refractometer)測定某物質的折射率，其關係如下：

$$n=\sqrt{N^2-\sin^2\theta},$$

此處 N 為儀器上的常數，θ 為所量的角。 如 $N=1.62100\pm0.00005$，$\theta=45$（約數)，茲欲 n 可靠到 0.01%，則 θ 當測定到如何精密?

85. 一透鏡置於離光源 50 厘米 $\pm$0.10 厘米之處；造像於屏，屏離光源為 110.82 厘米 $\pm$0.22 厘米。 試計算此透鏡的焦距，及其數字差及百分差?

86. 觀察由固定稜鏡的兩邊反射而成的裂縫之像，再用光學的量角圓盤(Optical Circle)來測定稜鏡的角。 假設副尺（Vernier)從位置 1 向位置

2 移動,經過 360°,得下列記錄:

位置 1:副尺 A, 280°10′20″; 副尺 B, 100°9′40″。

位置 2:副尺 A, 40°20′10″; 副尺 B, 220°21′30″。

如副尺讀出數之不定為 ±20″,試計算稜鏡的角及其平均差及百分差。何故此儀器須備有兩個副尺以供精密實驗之用?

87. 一物質的折射率 n,由 $n=\tan\theta$ 一式計算而得。如偏極角(Polarizing Angle)約為 $\theta=57°$,則當 n 的計算值要可靠到千分之一時,θ 須量度到如何精密?

88. 用繞射栅(Diffracting Grating)的第二級光譜,計算波長的公式為 $\lambda=\frac{1}{2n}\sin\theta$。若該栅一英寸中劃有 17,296 根線,由預測又得 $\theta=53°$(約數)。茲令 λ 可靠到 10,000 分之一,則 θ 應當測定到如何精密,光學的量角圓盤又當如何分度?

89. 校準某滴管(Burette)的分度時,每流出 10 立方厘米之水,必須傾入瓶中秤定一次,如欲此校準,可靠到 0.01 立方厘米,則秤量時當操作到如何精密? 又如用水銀行校準時,則秤量當到一克的

幾分之幾？ 在此等校準手續中，是否當注意水的溫度？

90. 校準一量瓶，瓶之溫度，爲 20°C.，容積爲 1,000 立方厘米。 如此校準須可靠到 0.5 立方厘米，問當加若干砝碼（用銅砝碼，比重 = 8.5）於載空瓶之天秤盤上，使與瓶所能容之水相等？ 又所作秤量，當至如何精密？ 在此問題，是否要注意到氣壓？ 爲什麼？

91. 如一物質，在空氣中的重量爲

$$W = 49.7631 \pm 0.0012 \text{ 克}$$

現欲計算他在真空中的重量 W，則此物質的密度 d，天平砝碼的密度 Δ，及天平箱中空氣的密度 σ，當測量到如何精密，方可使 w 的改正數值，計算到 0.0005 克？

已知 $d = 0.8$，$\Delta = 8.4$ 及 $\sigma = 0.0012$（約數）

$$W = w\left[1 + \sigma\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\Delta}\right)\right]。$$

92. 測量某種輕於水的物質之比重，得實驗數據如次：

此物質在空氣中的重量 = 10.1321 克 ± 0.0002 克，

此物質連同重錘沒入 20.0°C. 水中，測得重量 =8.4418 克 ±0.0020 克。

重錘在 20.0°C. 水中的重量 =10.4522 克 ± 0.0010 克。

試計算此物質對於 20.0°C. 之水的比重，並求其數字差及百分差。 如當溫度自 4°C. 變到 20°C. 時，水的密度減少了 0.18%，試求此物對於 4°C. 水的比重。 若想這個求得的減少數值，可靠到 0.05 %，則 20°C. 水的溫度，要測定到如何精密?

93. 一含銀之物重 1.3421 克，茲將所含銀沈澱爲氯化銀而秤定之，得下記數據:

空的白金坩堝(Crucible)之重量 = 15.1343 克。

白金坩堝加氯化銀的重量 = 15.6394 克。

如各秤量可靠到 ±0.001 克，而銀及氯原子量的誤差，可以不計。 試求此物中銀的百分數，及其差數度。 此中秤量，有無超過所要求的精密者? 如有，其原因爲何?

Ag 的原子量 = 107.88。

Cl 的原子量 = 35.46。

94. 氯化鈉 ($NaCl$) 樣品的分析，係加以硝酸銀 ($AgNo_3$) 使銀沈澱爲氯化銀 ($AgCl$)，再行秤定的。 現在：

$NaCl$ 樣品的重量 $=0.5017$ 克 ± 0.0005 克。

$AgCl$ 的重量 $=1.1817$ 克 ± 0.0012 克。

假定鈉及氯的原子量已測到 $\pm 0.1\%$，而銀則到 $\pm 0.03\%$，試計算樣品中所存在之氯的百分數，並求結果之可靠的精密。

原子量：$Na=23.00$, $Cl=35.46$, $Ag=107.88$。

95. 用混合法，測一物質的比熱，係用下面公式計算的：

$$S=\frac{w(t_2-t_1)}{W(t_3-t_2)}\text{。}$$

設式中各量的近似值爲：

$w=$ 水當量之總值 $=500$ 克 ± 1 克。

$W=$ 物質的重量 $=400$ 克 ± 1 克。

$t_1=20^\circ\pm 0.05^\circ$。

$t_2=25^\circ\pm 0.05^\circ$。

$t_3=100^\circ\pm 0.1^\circ$。

試求 S 的近似值及其差數。

96. 計算蒸發潛熱(Latent Heat)的公式爲

$$r=\frac{(W_0+k)(t_2-t_1)-W(t_3-t_2)}{w}。$$

若溫度的上升爲 $t_2-t_1=25^\circ-15^\circ=10^\circ$，凝成後的水蒸汽其溫度之下降爲 $t_3-t_2=100^\circ-25^\circ=75^\circ$；其重量 W 爲 20 克；水當量 W_0+k 約爲 1,200 克。如 r 須精密到 0.5%，問四因子各須測定到如何精密。（假定水蒸汽之 $r=540$ 卡）。

97. 用惠斯登橋(Wheatstone Bridge)測定電阻 X，係用公式

$$X=\frac{M}{N}P-L,$$

求得的。

此處 $M=10^{\omega}\pm0.005^{\omega}$,

$N=10{,}000^{\omega}\pm0.1\%$,

$P=1{,}820^{\omega}\pm0.9^{\omega}$,

$L=0.027^{\omega}$ 測定到 5%。

試求 X 及其差數度。

98. 銅樣品之電阻係數，是在 t°C. 時測定者，現求在 0°C. 時之值。已知：長 $=6$ 米，量到 6 毫米；

直徑 $=1.3051$ 毫米，$A.D.=0.0026$ 毫米；在 $t°C.$ 時的電阻爲 0.08051 歐姆 ± 0.00020 歐姆；$t°=20°C.$ $\pm 0.1°C.$；溫度係數爲 0.0042，準確到 0.25%。求電阻係數計算值的或然精密。

99. 用電壓降落法（Drop Method）量一電阻 X，是將伏特計接在電阻的兩端，而把安培計與之串聯以量電路中的電流。現知電壓爲 110 伏特。

(a)如欲測 X 到 0.3%，則儀器的分度，當讀到如何精密？

(b)儀器的電阻，又當知道到如何精密？

X 約爲 150 歐姆，

伏特計的電阻約爲 15,000 歐姆。

安培計的電阻約爲 0.1 歐姆。

100. 用惠斯登橋法測定線圈 A 與 B 的電阻，得下列數據：

A 線圈：$M=100$ 歐姆，可靠到 $\frac{1}{20}\%$，

$N=1{,}000$ 歐姆，可靠到 $\frac{1}{20}\%$，

$P=1{,}009$ 歐姆，可靠到 0.5 歐姆。

B 線圈：$M=$ 10 歐姆，可靠到 $\frac{1}{20}$ %，

$N=10{,}000$ 歐姆，可靠到 $\frac{2}{10}$ %，

$P=$ 1,373 歐姆，可靠到 2 歐姆。

試計算 A 及 B 串聯時的電阻，並以百分數計算其差數度。 試計算 A 及 B 並聯時的電阻，並以歐姆計算其差數度。

101. 一交流電路中的落後角 (Lag Angle) θ ，如下式所示：

$$\cos\theta=\frac{\text{電路中的瓦數}}{\text{伏特}\times\text{安培}}。$$

如此電路中各量的近似值爲：

瓦數 = 264，

伏特數 = 110，

安培數 = 4.00。

如欲 θ 可靠到 1%，則各量，當量度到如何精密？

102. 用銅屑沈積法(Copper Deposition Method)校準一安培計，得下數據：

沈積的銅質量 = 1.9786 克，秤量到 ±0.2毫克；

電路關閉的時間 = 1,200 秒 ±1 秒；

實驗時安培計平均的讀數 $= 5.113$ 安 ± 0.011 安；

銅的電化當量 $= 0.0003286$，可靠到 $\frac{1}{20}\%$，

試求電路中之電流，並以百分計算其差數度。求此儀器的改正數，並以安培求其差數度。

103. 用一個無誘導的電阻，及具有誘導而電阻可以不計的線圈共同造成一個60週(Cycle)的電路。 茲以伏特計連接電阻的兩端，讀得 65.95 伏特。 試以伏特計算電路兩端的電壓，及其差數度。

104. 一平臺的高度 (Elevation) 由測定此臺與數里外高度已知之標竿所成的豎立角，及測定標竿的距離而得。 如此角為 $2°$，測定到 $20''$，距離是每英里測定到 1 英尺。 則二者高度差的精密為何？ $\tan 2° = \sin 2° = 0.035$。

105. 用鏈(Chain)及羅盤(Compass)測量一四邊形的地 $ABCD$，但 AD 一邊不能直接求得。 如 $AB = 3$ 鏈，$BC = 10$ 鏈，$CD = 3$ 鏈，A 角 $= 86°30'$，B 角 $= 94°20'$，C 角 $= 87°0'$，各角俱精密到 $5'$；問鏈的測定當到如何精密，始能與角的測定

相一致？ 又 AD 邊及面積的精密如何？

106. 某山頂上有煙囱，其高度由下記數據記算：由山脚下的某點到煙囱底的仰角爲 $30°$，到煙囱頂爲 $45°$，二量度各可靠到 $\pm 20''$。 由此點到煙囱脚的距離爲 300.0 英尺 ± 0.2 英尺。 試計算此煙囱的高度及其不定數。

107. 圓柱形線一條，長 l，横斷面 q，載重 w 時伸長 a；其彈性係數由

$$E=\frac{lw}{aq}。$$

求得。 式内 $a=m_1-m_0=$，此處 m_1 及 m_0 爲當線載重 w 仟克及無重物時由測微器 (Micrometer) 測得的平均數；$q=\frac{1}{4}\pi d^2$，d 係線的平均直徑。

現得下記之數據：

$l=200.11$ 厘米 ± 0.05 厘米

$w=10$ 仟克 ± 1 克

$m_1=9.4255$ 毫米 ± 0.0024 毫米

$m_0=8.2233$ 毫米 ± 0.0012 毫米

$d=1.002$ 毫米正確到 $\pm 0.2\%$。

(a)試計算 q 的平均差及百分差。

(b)試計算 a 的差數。

(c)試用適當有效數字位數計算 E。

(d)試計算 E 的合成百分誤差。

(e)上列數據，有無超過所要求的精密者？ 試言理由。

108. 如欲測定上問題中的 E 到 0.5%，假定 l 及 w 的差數可以不計，則 d, m_0 及 m_1 三量當測定到若何精密？

(6) 圖解法問題

109. 用圖解法求直線方程式的常數，是根據什麽來決定其精密的？ 試以一邊長 10 英寸，每英寸分二十等分的作圖紙，說明可以達到的精密之最大限度。

110. 什麽是剩餘作圖？ 有何用途？ 試詳細說明之。

111. 在方程式

$$y = a + bx + cx^2$$

中，如何由 x_1, y_1；x_2, y_2 等各組數值用圖解法決定常數 a, b, 及 c 之値？

112. 什麽是對數作圖？ 何種問題當用此法？試先用直交坐標紙，繼用對數作圖紙，舉例說明對數作圖的功用。

113. 在一定時間内，一線圈中所發生的熱 H，隨電流 I 的平方而變化，今有一組 H 及 I 的測定値，試用圖解法確定兩者的關係。

114. 載重於一橫桿的中央，而支其兩端，則桿

的中部之彎曲與桿長的立方成比例。試以圖解法考究此定律。

115. 由量度擺的振盪時間及相應的長度，如何可用圖解法處理數據，以求 g 的平均值？但已知

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

116. 令不同值的電壓依次經過一電阻 R，測其相應的電流值量。試述如何用圖解法處理數據以求 R 的平均值。

117. 電路中通過電流的多寡，得用正切電流計測得之，所用公式為 $I = K\tan\theta$。茲由一組不同值的電流，測得相應的各 θ 值，試述如何用圖解法以求 K。

118. 求透鏡焦距的公式為

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'}。$$

試說明如何由若干個 P 及 P' 的量度，用圖解法以求 f。

119. 某液體的比容(Specific Volume)依溫度

的增高而加大,但加大的程度,比較僅屬一次式的關係要快些。由可繪數據,吾人得一暗示,知 V 與 t 可有下記之關係:

$$V = V_0 + at + bt^2_{\circ}$$

由六組 V 及 t 的觀察,如何可求常數 V_0, a, 及 b 之值? 試述其法。

120. 在一張對數作圖紙上繪一組曲線,以便讀出與三位有效數字對應的數值之平方,立方,面積及體積。

121. 水在 10 英寸的管中流出,每分鐘流出的水量以立方英尺計算,管的傾斜度,以百分數表示,得下列數據

S = 傾斜度 (以百分計)	Q = 每分鐘流出之水量 (以立方英尺計)
2.00%	146
3.00%	170
4.00%	191
5.00%	209
10.00%	278

試用對數作圖法推定一實驗公式 $Q=f(S)$ 以連系 Q 與 S。

先用通常直交作圖紙繪圖，繼用對數作圖紙繪圖。

設 10 英寸的管係(1)15% 的傾斜,(2)1% 的傾斜,試由求得公式,計算(1),(2) 兩情况下每分鐘流出的水量。 並直接從對數作圖紙上,決定此等數值。

附　　錄

1. 數學常數表

量	數　　值	備　　註	常用對數
ϵ	2.71828	納白爾，自然，或雙曲線對數的底數。	0.434295
$\log_{10}\epsilon$	0.434295	改變納氏對數成常用對數的因子	9.637784
$\frac{1}{\log_{10}\epsilon}$	2.30259	改變常用對數爲納氏對數的因子。	0.362216
π	3.14159	圓周與直徑之比。	0.467150
$1/\pi$	0.318310	π 的倒數。	9.502850
π^2	9.86960	π 的平方。	0.994300
$\sqrt{\pi}$	1.77245	π 的平方根。	0.248575
1 弧度	57°17′45″	57°.2958＝206265″ ＝與半徑相等之弧。	
1 度	$\frac{\pi}{180}=0.0174533$ 弧度		

2. 近似值公式表

在計算時,常遇有$(1\pm a)^n$形式的因子參雜其中,這裏n是一個常數,而a的數值,比1要小。此時可以展開式的前兩項之約數(近似值),代此因子,這在結果上,並不會發生怎樣的誤差;而計算的手續,卻簡省了好多。如因子的形狀是$(m\pm a')^n$,而a'比m小,則此式可以寫成 $m^n\left(1\pm\frac{a'}{m}\right)^n=m^n(1\pm a)^n$,此又變成前一種形狀了。

當n具有各值時,$(1\pm a)^n$一因子的近似式,和用近似式所起的誤差,列如下表:

因子	近似式	結果的誤差	計算的誤差 設$a=0.01$.
$(1\pm a)^n$	$1\pm na$	$\frac{n(n-1)}{2}a^2$	
$(1\pm a)^2$	$1\pm 2a$	a^2	0.0001
$(1\pm a)^3$	$1\pm 3a$	$3a^2$	0.0003
$(1\pm a)^4$	$1\pm 4a$	$6a^2$	0.0006
$(1\pm a)^{\frac{1}{2}}$	$1\pm\frac{1}{2}a$	$-\frac{1}{8}a^2$	−0.00001
$(1\pm a)^{\frac{1}{3}}$	$1\pm\frac{1}{3}a$	$-\frac{1}{9}a^2$	−0.00001
$(1\pm a)^{-1}$	$1\mp a$	a^2	0.0001
$(1\pm a)^{-2}$	$1\mp 2a$	$3a^2$	0.0003
$(1\pm a)^{-\frac{1}{2}}$	$1\mp\frac{1}{2}a$	$\frac{3}{8}a^2$	0.00004
$(1\pm a)^{-\frac{1}{3}}$	$1\mp\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{9}a^2$	0.00002

又遇$(1\pm a)(1\pm b)(1\pm c)$時，用$(1\pm a\pm b\pm c)$。

遇$\frac{(1\pm a)(1\pm b)}{(1\pm c)(1\pm d)}\cdots$時，用$(1\pm a\pm b\mp c\mp d\cdots)$。

遇$\sqrt{m_1 m_2}$時，用$\frac{m_1+m_2}{2}$，如m_1和m_2是幾乎相等的。

3. 平方,立方,倒數表。

數目	平方	立方	倒數	數目	平方	立方	倒數
1.0	1.00	1.00	1.00	5.5	30.3	166.	.182
1.1	1.21	1.33	0.909	5.6	31.4	176.	.179
1.2	1.44	1.73	833	5.7	32.5	185.	.175
1.3	1.69	2.20	769	5.8	33.6	195.	.172
1.4	1.96	2.74	714	5.9	34.8	205.	.169
1.5	2.25	3.38	667	6.0	36.0	216.	167
1.6	2.56	4.10	625	6.1	37.2	227.	164
1.7	2.89	4.91	588	6.2	38.4	238.	.161
1.8	3.24	5.83	556	6.3	39.7	250.	.159
1.9	3.61	6.86	526	6.4	41.0	262.	156
2.0	4.00	8.00	500	6.5	42.3	275.	154
2.1	4.41	9.26	476	6.6	43.6	287.	.152
2.2	4.84	10.6	.455	6.7	44.9	301.	149
2.3	5.29	12.2	435	6.8	46.2	314.	147
2.4	5.76	13.8	417	6.9	47.6	329.	145
2.5	6.25	15.6	400	7.0	49.0	343.	.143
2.6	6.76	17.6	.385	7.1	50.4	358.	.141
2.7	7.29	19.7	.370	7.2	51.8	373.	.139
2.8	7.84	22.0	.357	7.3	53.3	389.	.137
2.9	8.41	24.4	345	7.4	54.8	405.	135
3.0	9.00	27.0	333	7.5	56.3	422.	.133
3.1	9.61	29.8	.323	7.6	57.8	439.	.132
3.2	10.2	32.8	.313	7.7	59.3	457.	.130
3.3	10.9	35.9	303	7.8	60.8	475	.128
3.4	11.6	39.3	.294	7.9	62.4	493.	.127
3.5	12.3	42.9	286	8.0	64.0	512.	.125
3.6	13.0	46.7	.278	8.1	65.6	531	.123
3.7	13.7	50.7	270	8.2	67.2	551.	.122
3.8	14.4	54.9	263	8.3	68.9	572.	.120
3.9	15.2	59.3	256	8.4	70.6	593.	119
4.0	16.0	64.0	250	8.5	72.3	614	.118
4.1	16.8	68.9	244	8.6	74.0	636.	.116
4.2	17.6	74.1	.238	8.7	75.7	659.	.115
4.3	18.5	79.5	233	8.8	77.4	681.	.114
4.4	19.4	85.2	.227	8.9	79.2	705.	.112
4.5	20.3	91.1	.222	9.0	81.0	729.	.111
4.6	21.2	97.3	.217	9.1	82.8	754.	.110
4.7	22.1	104.	.213	9.2	84.6	779.	.109
4.8	23.0	111.	.208	9.3	86.5	804.	.108
4.9	24.0	118.	204	9.4	88.4	831.	.106
5.0	25.0	125.	200	9.5	90.3	857.	.105
5.1	26.0	133.	196	9.6	92.2	885.	.104
5.2	27.0	141.	.192	9.7	94.1	913.	.103
5.3	28.1	149.	189	9.8	96.0	941.	.102
5.4	29.2	157.	185	9.9	98.0	970.	.101

4. 四位對數表

眞數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	13
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

四位對數表

真數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	2	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9026	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

5. 正弦，餘弦，正切表。

	自然的			對數的		
	正弦	餘弦	正切	正弦	餘弦	正切
0.0	0.0000	1.0000	0.0000	—∞	0.0000	—∞
0.5	0.0087	1.0000	0.0087	7.9408	0.0000	7.9409
1.	0.0175	0.9998	0.0175	8.2419	9.9999	8.2419
1.5	0.0262	0.9997	0.0262	8.4179	9.9999	8.4181
2.	0.0349	0.9994	0.0349	8.5428	9.9997	8.5431
2.5	0.0436	0.9990	0.0437	8.6397	9.9996	8.6401
3.	0.0523	0.9986	0.0524	8.7188	9.9994	8.7194
4.	0.0698	0.9976	0.0699	8.8436	9.9989	8.8446
5.	0.0872	0.9962	0.0875	8.9403	9.9983	8.9420
10.	0.1736	0.9848	0.1763	9.2397	9.9934	9.2463
15.	0.2588	0.9659	0.2679	9.4130	9.9849	9.4281
20.	0.3420	0.9397	0.3640	9.5341	9.9730	9.5611
25.	0.4226	0.9063	0.4663	9.6259	9.9573	9.6687
30.	0.5000	0.8660	0.5774	9.6990	9.9375	9.7614
35.	0.5736	0.8192	0.7002	9.7586	9.9134	9.8452
40.	0.6428	0.7660	0.8391	9.8081	9.8843	9.9238
45.	0.7071	0.7071	1.0000	9.8495	9.8495	0.0000
50.	0.7660	0.6428	1.1918	9.8843	9.8081	0.0762
55.	0.8192	0.5736	1.4281	9.9134	9.7586	0.1548
60.	0.8660	0.5000	1.7321	9.9375	9.6990	0.2386
65.	0.9063	0.4226	2.1445	9.9573	9.6259	0.3313
70.	0.9397	0.3420	2.7475	9.9730	9.5341	0.4389
75.	0.9659	0.2588	3.7321	9.9849	9.4130	0.5719
80.	0.9848	0.1736	5.6713	9.9934	9.2397	0.7537
85.	0.9962	0.0872	11.43	9.9983	8.9403	1.0580
90.	1.0000	0.0000	∞	0.0000	—∞	∞