Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 6

Exaktheit

Definition 6.1. Es sei X ein topologischer Raum, es seien $\mathcal{F}_n$ Garben von kommutativen Gruppen auf X und es seien $\varphi_n \colon \mathcal{F}_{n-1} \to \mathcal{F}_n$ Homomorphismen. Man sagt, dass ein *Garbenkomplex* vorliegt, wenn

$$\operatorname{bild} \varphi_n \subseteq \operatorname{kern} \varphi_{n+1}$$

gilt.

Definition 6.2. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\mathcal{F}_\bullet$ ein Komplex von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Man sagt, dass der Komplex *exakt* ist, wenn

$$\operatorname{bild} \varphi_n = \operatorname{kern} \varphi_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Lemma 6.3. *Es sei X ein topologischer Raum und es sei*

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

ein Komplex von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Dann ist der Komplex genau dann exakt, wenn für jeden Punkt $P \in X$ der Komplex

$$\mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P \longrightarrow \mathcal{H}_P$$

exakt ist.

Beweis. Wir benennen die Situation mit

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}\,.$$

Nach Korollar 4.11 liegt ein Garbenkomplex genau dann vor, wenn sämtliche Halmabbildungen Komplexe sind. Sei der Komplex exakt, also

$$\operatorname{bild} \alpha = \operatorname{kern} \beta.$$

Es sei $P \in X$ fixiert und sei $s \in \mathcal{G}_P$ mit $\beta_P(s) = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von P auf der s durch einen Schnitt s repräsentiert wird und eine kleinere offene Umgebung $V \subseteq U$, worauf $\beta_V(s|_V) = 0$ ist. Das Element (wir nennen die Einschränkung wieder s) $s \in \mathcal{G}(V)$ gehört also zum Kern von β_V und daher zum (Garben-)Bild von α. D.h. es gibt eine offene Umgebung $P \in W \subseteq V$, auf der s im Bild von

$$\alpha_W \colon \mathcal{F}(W) \longrightarrow \mathcal{G}(W)$$

liegt. Daher liegt auch der Keim s im Bild von α_P. $\square$

Definition 6.4. Ein exakter Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

von Garben von kommutativen Gruppen heißt *kurze exakte Sequenz*.

Hierbei ist insbesondere die vordere Abbildung injektiv und die hintere Abbildung (Garben)-surjektiv.

Lemma 6.5. *Es sei*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kommutativen topologischen Gruppen (mit stetigen Gruppenhomomorphismen). Es trage F die induzierte Topologie von G und die Surjektion $p\colon G \to H$ habe die Eigenschaft, dass es zu jedem Element $h \in H$ eine offene Umgebung $h \in W \subseteq H$ und einen stetigen Schnitt zu p gibt. Dann ist für jeden topologischen Raum X die zugehörige Sequenz der Garben der stetigen Abbildungen in diese Gruppen, also

$$0 \longrightarrow C^0(-,F) \longrightarrow C^0(-,G) \longrightarrow C^0(-,H) \longrightarrow 0\,,$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Es ist klar, dass ein Komplex von Garben von kommutativen Gruppen auf X vorliegt. Die Injektivität links ist ebenfalls klar. Zur Exaktheit in der Mitte: Wenn zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ eine stetige Abbildung $\varphi\colon U \to G$ die Eigenschaft besitzt, dass $p \circ \varphi$ die Nullabbildung ist, so liegt das Bild von φ in F. Da F die induzierte Topologie von G trägt, ist auch die Abbildung $\varphi\colon U \to F$ stetig. Zur Garbensurjektivität rechts: Es sei $P \in X$ ein Punkt und

$$\psi\colon V \longrightarrow H$$

eine auf einer offenen Umgebung von P definierte stetige Abbildung nach H. Es sei $\psi(P) = h$. Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung $h \in W \subseteq H$ und einen Schnitt $s\colon W \to G$ mit $p \circ s = \mathrm{Id}_W$. Wir betrachten

$$U := V \cap \psi^{-1}(W).$$

Dann ist $s \circ \psi$ (eingeschränkt auf U) ein stetiger Schnitt von G, der unter p auf ψ abgebildet wird. $\square$

Beispiel 6.6. Wir betrachten die kurze exakte *Exponentialsequenz*

$$0 \longrightarrow 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 0$$

von topologischen Gruppen. Die Exaktheit in der Mitte beruht auf Satz 21.5 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) (2), die Homomorphieeigenschaft beruht auf der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die komplexe Exponentialfunktion bildet nach Satz 21.6 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) surjektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab (sie ist eine Überlagerung). Da es lokal einen Logarithmus gibt, sind die Voraussetzungen von Lemma 6.5 erfüllt. Somit gibt es zu jedem topologischen Raum X eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-, \mathbb{Z}) \longrightarrow C^0(-, \mathbb{C}) \longrightarrow C^0(-, \mathbb{C}^\times) \longrightarrow 0\,,$$

die die (stetige komplexe) *Exponentialsequenz* heißt. Links steht die lokal konstante Garbe mit Werten in $\mathbb{Z}$, in der Mitte die Garbe der komplexwertigen stetigen Funktionen und rechts die Garbe der nullstellenfreien komplexwertigen stetigen Funktionen. Wenn man $X = \mathbb{C}^\times$ setzt, so ist die globale Auswertung der hinteren Abbildung nicht surjektiv, da die Identität nicht im Bild liegt.

Globale Auswertung

Lemma 6.7. *Es sei X ein topologischer Raum und sei*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{G} \xrightarrow{d'} \mathcal{H}$$

ein Komplex von Garbenhomomorphismen von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Dann ist auch

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

ein Komplex.

Beweis. Die Voraussetzung bedeutet einfach, dass $d' \circ d$ die Nullabbildung ist. Dann ist insbesondere die globale Auswertung die Nullabbildung. $\square$

Lemma 6.8. *Es sei X ein topologischer Raum. Es sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

ein exakter Komplex von Garbenhomomorphismen von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Dann ist auch der Komplex

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

exakt.

Beweis. Dass ein Komplex vorliegt ist klar nach Lemma 6.7. Die Exaktheit bedeutet, dass für jeden Punkt $P \in X$ der Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P \longrightarrow \mathcal{H}_P$$

der Halme exakt ist. Sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ und $d(s) = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{G})$. Dann ist $d(s)_P = 0$ in jedem Punkt und somit ist $s_P = 0$ für jeden Punkt. Also ist $s = 0$ und die linke Abbildung ist injektiv. Sei nun $t \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ mit $d'(t) = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{H})$. Die Exaktheit in den Halmen bedeutet, dass für jeden Punkt P der Keim t_P zu $\mathcal{F}_P$ gehört. Daraus folgt Aufgabe 5.5, dass t selbst zu $\mathcal{F}$ gehört. $\square$

Die vorstehende Aussage bedeutet, dass die globale Auswertung einer Garbe von abelschen Gruppen ein (kovarianter, additiver) linksexakter Funktor ist.

Rückzug und Vorschub

Bisher haben wir nur Garben und ihre Beziehungen untereinander auf einem gegebenen topologischen Raum behandelt. Wir betrachten nun den Fall, wo topologische Räume durch eine stetige Abbildung miteinander verbunden sind.

Definition 6.9. Zu einer stetigen Abbildung

$$\varphi\colon\, X \longrightarrow Y$$

und einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X nennt man die durch

$$(\varphi_*)\mathcal{F}(U) \,:=\, \mathcal{F}\big(\varphi^{-1}(U)\big)$$

gegebene Prägarbe auf Y die unter φ *vorgeschobene Prägarbe.*

Da zu offenen Mengen $V \subseteq W$ auch $\varphi^{-1}(V) \subseteq \varphi^{-1}(W)$ gilt, hat man natürliche Restriktionsabbildungen und erhält somit in der Tat eine Prägarbe.

Lemma 6.10. *Zu einer stetigen Abbildung*

$$\varphi\colon\, X \longrightarrow Y$$

und einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist die vorgeschobene Prägarbe $\varphi_*\mathcal{F}$ eine Garbe.

Beweis. Es sei

$$V \,=\, \bigcup_{i \in I} V_i$$

eine offene Überdeckung einer offenen Menge $V \subseteq Y$. Dann bilden die $\varphi^{-1}(V_i)$, $i \in I$, eine offene Überdeckung von $\varphi^{-1}(V)$. Seien $s,t \in \varphi_*\mathcal{F}(V)$ mit $s|_{V_i \cap V_j} = t|_{V_i \cap V_j}$ gegeben. Dies bedeutet unmittelbar $s,t \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(V))$ und

$$s|_{\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j)} \,=\, s|_{\varphi^{-1}(V_i \cap V_j)} \,=\, t|_{\varphi^{-1}(V_i \cap V_j)} \,=\, t|_{\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j)}.$$

Daher ist (nach der ersten Garbeneigenschaft von $\mathcal{F}$) $s = t$ in $\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V))$, also $s = t$ in $\varphi_*\mathcal{F}(V)$.

Seien nun $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ mit

$$s_i|_{V_i \cap V_j} \,=\, s_j|_{V_i \cap V_j}.$$

Dies bedeutet zurückübersetzt nach X unmittelbar, dass kompatible Schnitte in $\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V_i))$ vorliegen, denen ein Schnitt in $\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V)) = \varphi_*\mathcal{F}(V)$ entspricht. $\square$

Lemma 6.11. *Zu einer stetigen Abbildung*

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y,$$

einem Punkt $Q \in Y$ und einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X ist der Halm der vorgeschobenen Prägarbe $\varphi_* \mathcal{F}$ im Punkt Q gleich

$$\operatorname{colim}_{Q \in V} \mathcal{F}\big(\varphi^{-1}(V)\big) = \operatorname{colim}_{\{U \subseteq X \mid \text{ es gibt eine offene Umgebung } Q \in V \text{ mit } \varphi^{-1}(V) \subseteq U\}} \mathcal{F}(U).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 6.5. □

Der Halm der vorgeschobenen Prägarbe ist also der Halm der Ausgangsgarbe in einem Filter (nämlich dem Urbildfilter des Umgebungsfilters $U(Q)$), aber im Allgemeinen nicht in einem Punkt.

Definition 6.12. Zu einer stetigen Abbildung

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

und einer Prägarbe $\mathcal{G}$ auf Y nennt man auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ durch

$$\operatorname{colim}_{V \subseteq Y,\, U \subseteq \varphi^{-1}(V)} \mathcal{G}(V)$$

gegebene Prägarbe auf X die unter φ *zurückgezogene Prägarbe*.

Definition 6.13. Zu einer stetigen Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ und einer Garbe $\mathcal{G}$ auf Y nennt man die Vergarbung der zurückgezogenen Prägarbe die *zurückgezogene Garbe*.

Sie wird mit $\varphi^{-1}\mathcal{G}$ bezeichnet.

Lemma 6.14. *Zu einer stetigen Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ und einer Garbe $\mathcal{G}$ auf Y ist der Halm der zurückgezogenen Garbe in einem Punkt $P \in X$ gleich dem Halm von $\mathcal{G}$ in $\varphi(P)$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 6.6. □

Abbildungsverzeichnis