Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 17

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 17.1. Es sei M eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeige

$$\det\left(M^{-1}\right) = (\det M)^{-1}.$$

Übungsaufgaben

AUFGABE 17.2. Es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times k$-Matrix, wobei die Spalten von B linear abhängig seien. Zeige, dass die Spalten von $A \circ B$ ebenfalls linear abhängig sind.

AUFGABE 17.3. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 17.4.*

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V,\ v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor* a.

AUFGABE 17.5. Was ist die Determinante einer Streckung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V?

Aufgabe 17.6. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für zwei Streckungen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum.

Die beiden folgenden Aufgaben verwenden den Begriff des Gruppenhomomorphismus.

Es seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi \colon G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Aufgabe 17.7. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\ M \longmapsto \det M,$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 17.8. Es sei K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n \leq m$. Definiere injektive Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(K).$$

Aufgabe 17.9. Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 17.10. Es sei M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ und

$$\varphi_M \colon \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

der zugehörige Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ_M genau dann bijektiv ist, wenn die Determinante von M gleich 1 oder gleich -1 ist.

Aufgabe 17.11. Zeige, dass man die Determinante nach jeder Zeile und nach jeder Spalte entwickeln kann.

Aufgabe 17.12. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem man die Matrix nach allen Spalten und nach allen Zeilen entwickle.

Aufgabe 17.13. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $\varphi, \psi \colon V \to V$ lineare Abbildungen. Zeige $\det(\varphi \circ \psi) = \det \varphi \det \psi$.

Aufgabe 17.14.*

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 17.15. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = (1,0,2)^t$ mit Hilfe der Cramerschen Regel (man überlege sich natürlich vorher, ob man diese Regel überhaupt anwenden darf).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.16. ((12 (3+1+1+1+2+2+2) Punkte)

Die *Sarrusminante* einer $n \times n$-Matrix berechnet sich, indem man die ersten $n-1$ Spalten der Matrix in der gleichen Reihenfolge an die Matrix anfügt und dann die n Produkte der Hauptdiagonalen aufaddiert und die n Produkte der Nebendiagonalen davon subtrahiert. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 4$. Für eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ l & m & n & p \\ q & r & s & t \end{pmatrix}$$

betrachtet man also

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & a & b & c \\ e & f & g & h & e & f & g \\ l & m & n & p & l & m & n \\ q & r & s & t & q & r & s \end{pmatrix}$$

und die Sarrusminante ist

$$\operatorname{sar}(M) = afnt + bgpq + chlr + dems - qmgd - rnha - speb - tlfc.$$

(1) Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi\colon \operatorname{Mat}_4(K) \longrightarrow K,\ M \longmapsto \operatorname{sar}(M),$$

multilinear (in den Zeilen der Matrix) ist.

(2) Zeige, dass für 4×4-Matrizen, die eine Nullzeile enthalten, die Sarrusminante 0 ist.

(3) Zeige, dass für 4×4-Matrizen, die eine Nullspalte enthalten, die Sarrusminante 0 ist.

(4) Zeige, dass für eine obere Dreiecksmatrix die Sarrusminante das Produkt der Diagonalelemente ist.

(5) Zeige, dass die Sarrusminante nicht alternierend ist.

(6) Man gebe ein Beispiel für eine invertierbare Matrix, deren Sarrusminante gleich 0 ist.

(7) Man gebe ein Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix, deren Sarrusminante gleich 1 ist.

Aufgabe 17.17. (4 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.18. (3 Punkte)

Löse mit der Cramerschen Regel das inhomogene lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{Q}$)

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 3 \\ x + 5y + 7z &= 3 \\ 3x + 5y + 2z &= 4\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 17.19. (8 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Wir betrachten V auch als reellen Vektorraum der doppelten Dimension, worauf φ auch eine reell-lineare Abbildung ist, die wir zur Unterscheidung mit ψ bezeichnen. Zeige, dass zwischen der komplexen Determinante und der reellen Determinante die Beziehung

$$|\det \varphi|^2 = \det \psi$$

besteht.

Abbildungsverzeichnis