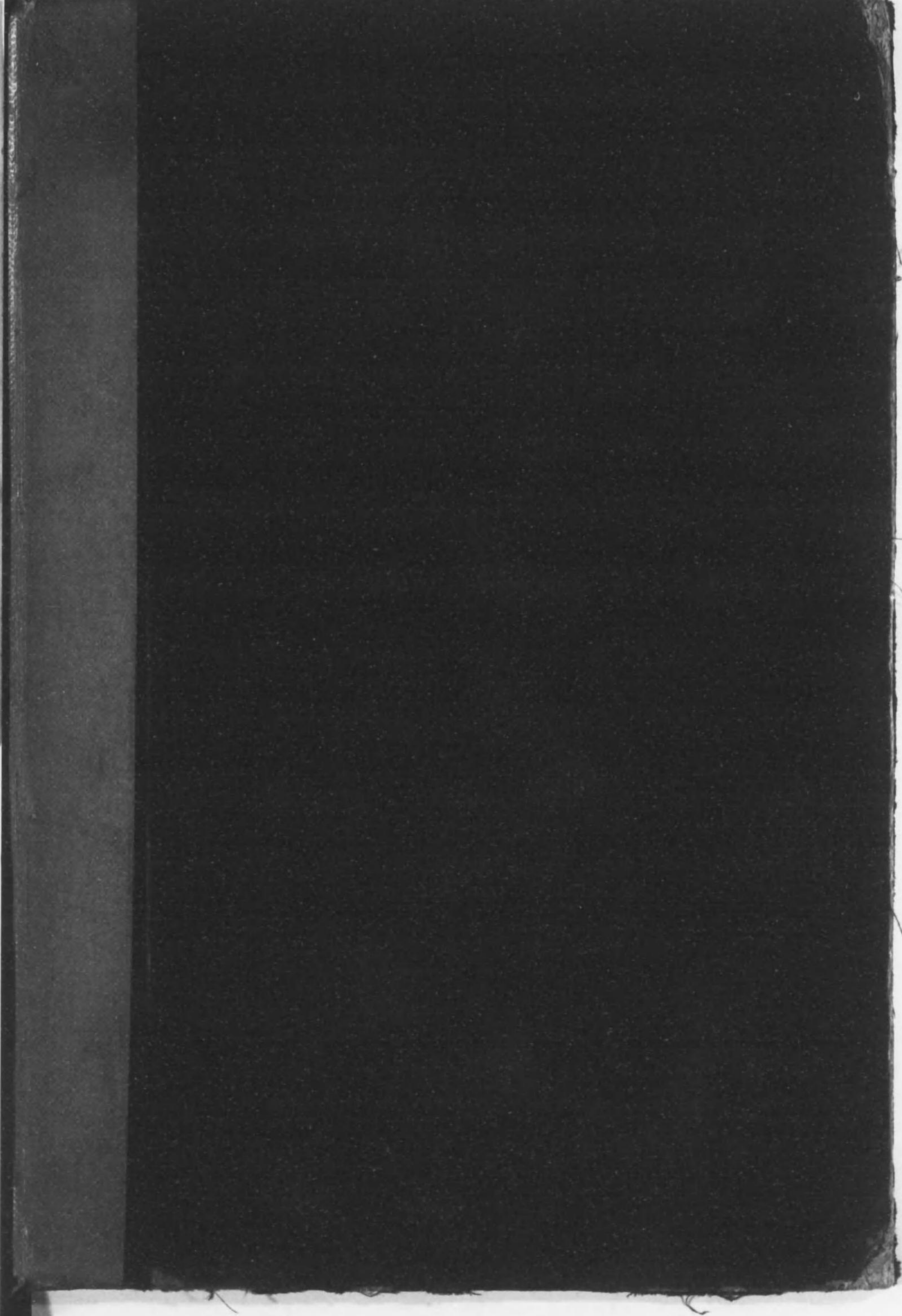




始



46
331

村上春太郎 著



物 理 學 原 論

«Tout se fait mécaniquement dans la nature, principe qu'on peut rendre certain par la seule raison et jamais par les expériences quelque nombre qu'on en fasse.» Leibnitz 1671.

«…… in vera philosophia, in qua omnium effectuum causae concipiuntur per rationes mechanicas; id quod meo iudicio fieri debet nisi velimus omnem spem abicere aliquid in physicis intelligendi.» Huyghens 1678.



吉田大正堂 出版
昭 和 三 年

物理學原論序

我國高等學校程度の物理學に適當の參考書なく又た洋書に於て稍や適當と認めらるゝものも比較的高價にして學生の負擔をも顧慮せざるへからざるは吾人の常に遺憾とせし所なり。村上教授は篤學の士にして本校物理學教授の經驗に徴し此の要求を充たさんか爲め其著す所の本書の出版を企て序を求めらる。書中載する所のものは其所論は素より其圖解等に至るまで全部独自の考案に成り物理學最近の進歩に鑑み高等學校程度の參考書として適當なるのみならず更に大學に進入せし後に於ても學生の參考となること疑を容れず。余は高等學校の學科の或者は教授の内容を綱領だけにては豫め印刷に附し學生の參考に供する様に留意せば教授の進度と學生の理解との上に多大の便益となるべきことを確信し教授諸君に對して成るべく其實施を希望しつゝあり。殊に物理學は其專攻を目的とする者は勿論各自然科學を通じ又た人文科學の或者に於ても是非共熱心に攻究し置かざるへからざる基礎學科の一なり。故に本書は學生の便益に資すること多大なるべきのみならず將た又た一般に物理學に志す者に利益すること多大なるへし。本書の出版は學界及び教育界の要求を充たすへき好個の美舉として推服するを憚らず。余は元來物理學に對しては全然門外漢なるも本書の出つるを喜び且つ同僚の誼を以て求めらるゝまゝに所感の一端を叙して序文に代ふことしかいふ。

昭和三年六月

於第七高等學校造士館 由比 質

物理學原論目次

第一編 總論力學及び物性論

總論.....	1-9	28 平面運動の角速度.....	23
1 自然界.....	1	29 回轉軸.....	24
2 物理學.....	1	30 自由の度.....	25
3 研究法.....	1	第二章 力の釣合	26-37
4 法則、體説、學理.....	2	31 力學.....	26
5 物理量.....	3	32 剛體.....	26
6 長さの單位.....	3	33 剛體の同一点に働く力の釣合.....	26
7 面積、容積の單位.....	3	34 力の能率.....	27
8 長さ、面積、容積を測定する器械.....	4	35 平行力.....	29
9 時の單位及び其の測定器械.....	5	36 重心.....	30
10 質量の單位及び其の測定器械.....	5	37 剛體の坐り.....	32
11 C. G. S.系.....	6	38 單一器械.....	32
12 デメンション.....	6	39 單一器械に於ける力及び路.....	37
13 角の單位.....	6	40 假の仕事の理.....	37
14 立體角.....	6	第三章 動力學	39-83
第一章 運動學	7-35	41 ニュートンの動力學の三法則.....	39
15 質點の運動.....	7	42 第一法則.....	39
16 エクトル.....	7	43 第二法則.....	39
17 等速運動.....	8	44 第三法則.....	40
18 等加速運動.....	10	45 ガリレオの實驗.....	40
19 運動を圓形にて示す法.....	11	46 絶對度量法.....	40
20 變加速運動.....	11	47 落体運動.....	41
21 曲線運動.....	12	48 斜面運動.....	42
22 弦運動.....	15	49 拋物運動.....	43
23 合成弦運動.....	17	50 位置のエネルギー及び運動のエネルギー.....	45
24 相對運動.....	19	51 遠心力.....	46
25 コリオリ加速度.....	19	52 圓錐振子.....	47
26 剛體.....	20	53 回轉液の放面.....	48
27 平面運動.....	21		

154 地球表面上 g の変化 48

155 往運動 49

156 振子運動 50

157 楕円振運動 52

158 ケプラーの三法則 53

159 運動量の能率 55

160 ケプラー則よりニュートンの重力則に移る法 57

161 宇宙重力の法則 58

162 地球の密度測定 62

163 地殻の引力 63

164 潮 汐 65

165 仕事及位置のエネルギー 68

166 仕事の単位 71

167 摩擦 力 73

168 回転する剛体の運動量の能率 75

169 回転する剛体の運動のエネルギー 77

170 剛体振子又は合成振子 77

171 フーコー実験 79

172 砲臺の回転法の運動 79

173 水平振子 82

第四章 液体力学 84-99

174 流 動 体 84

175 放 面 85

176 壓 力 88

177 浮力の仕事 90

178 浮 泛 體 90

179 連 接 則 93

180 トリチエリの實驗 93

181 運動の壓力 95

182 渦 輪 97

183 液体原動機 98

第五章 氣體力学 100-107

184 氣 體 100

185 弾 性 率 100

186 ボイル、マリオットの法則 101

187 トリチエリの實驗 102

188 氣 壓 102

189 壓 力 計 104

190 大 氣 105

191 航 空 術 106

192 運動する氣體の壓力 107

第六章 分子現象 108-142

193 分子力 108

194 フーク則 109

195 引張の彈力 109

196 撓みの彈力 111

197 捻れの彈力 113

198 弾性率と剛性率との關係 114

199 彈球の衝突 116

200 表面張力 120

201 附着性及び接角 123

202 毛管現象 125

203 粘 着 性 129

204 浸 透 132

205 滲 透 133

206 氣體の流出及び交流 134

207 氣體の粘性又は内部摩擦 136

208 氣體の吸収 136

209 氣體の吸蔵及び吸着 139

210 氣體の力学説 140

第二編 熱 學

第一章 膨脹及び熱量法 143-157

111 温 度 143

112 寒 暖 計 143

113 固体の膨脹 148

114 液体の膨脹 149

115 氣體の膨脹 152

116 氣體方程式 153

117 熱量と比熱 155

第二章 凝集状態の氣體 158-172

118 融 解 158

119 氣 化 162

120 眞空内に於ける氣化 165

121 水蒸氣の飽和張力 167

122 大氣中に於ける氣化作用 179

123 温 度 170

124 液体放面の形状と蒸氣張力の關係 173

125 過渡曲線 174

126 溶液の凝固点及び沸騰点 177

127 凝集状態の圖形 178

128 氣體の液化 179

129 グン、デル、プールの氣體方程式 182

第三章 熱の傳導 185-191

130 熱の傳導 185

131 熱の傳導 185

132 デブレの實驗 186

133 地殻の傳導 187

134 傳 導 率 190

第四章 熱の輻射 192-201

135 輻射熱の測定器 192

136 熱輻と光線 193

137 プレツストノ熱交換説 193

138 デウロン、ブチーの實驗とステファンの法則 194

139 ニュートンの冷却則 195

140 太陽及び太陽の温度 195

141 熱色と輻射との關係 196

142 キルヒホーフの法則 197

143 キーンの變位則 198

144 プランクの分光方程式 199

第五章 熱力学の第一原理 201-213

145 熱の仕事當量 201

146 ヘルムホルツの自然維持説 203

147 燃 燒 熱 205

148 氣體のエネルギー 206

149 ジウルの實驗 207

150 状態の變化によりて作す仕事 208

151 氣體膨脹によりて作す仕事 209

152 断熱變化 210

153 氣中温度の断熱的分配 212

154 兩比熱ノ比 213

第六章 熱力学の第二原理 214-223

155 カルノーの輪業 214

156 カルノーの輪業効率 215

157 エントロピー 217

158 ラクベイロンの方程式 221

159 温度-容積圖形 222

160 エントロピー-温度圖形 223

第三編 波動學

161 弦波動.....224	170 液体波動の數學的取扱法.....234
162 弦波動のエネルギー.....225	171 波動の干渉.....241
163 弦波動の進行速度.....226	172 波面及び射線.....242
164 緊張せる弦に生ずる波動.....228	173 ホイヘンスの原理.....242
165 弦に生ずる波のエネルギー.....229	174 波動の反射及び屈折.....243
166 液体波動.....229	175 入射、反射波動の干渉.....246
167 重力波の進行速度.....231	176 角筒内の液体の振動.....249
168 浅水に生ずる重力波の進行速度.....232	177 減衰振動.....250
169 表面張力の影響.....233	178 互に垂直なる弦運動の合成.....250

第四編 音響學

第一章 音の發生及び傳播253—264	
179 樂 音.....253	190 絃の振動.....271
180 音の三性質.....257	191 倍 音.....274
181 音波の進行速度.....258	192 棒の振動.....275
182 音の反射及び屈折.....259	193 音 叉.....278
183 音波の干渉.....260	194 板の振動.....280
184 ドップラー効果.....262	195 膜及び鐘の振動.....281
185 音波のエネルギー.....263	196 棒の縱振動及び捻振動.....283
186 フェヒナー則.....264	197 空氣柱の振動.....285
第二章 音 階265—270	
187 音 程.....265	198 唇 管.....288
188 全 音 階.....265	199 舌 管.....289
189 加減音階.....268	200 強制振動及び共鳴.....290
第三章 發音体の振動271—291	
第四章 音の感覺292—296	
	201 聽 覺.....292
	202 音 色.....293

第五編 光 學

第一章 音の發生及び傳播299—304		
203 光及び光學.....299	206 光の行差.....302	
204 直線進行.....300	207 ファゾーの實驗.....303	
205 光の傳播速度.....301	第二章 光度學305—322	
	208 光 度.....305	

209 ラムベートの法則.....306	235 露大レンズ.....356	
210 光度計.....308	236 視野の明るさ.....357	
第三章 平面に於ける反射及び屈折310—322		
211 反射及び屈折の歴史.....310	237 レンズの入口と出口.....357	
212 反射及び屈折の法則.....310	238 顯微鏡.....358	
213 絶對及び相對屈折率.....312	239 望遠鏡.....361	
214 反射面の回轉.....313	240 接眼子.....363	
215 全 反 射.....314	241 ガリレオ望遠鏡.....365	
216 屈折により生ずる像.....317	242 反射望遠鏡.....366	
217 プリズム.....320	第七章 分光學370—401	

第四章 球面に於ける反射及屈折

218 凹面鏡に於ける反射.....323	245 日光スペクトラ.....375
219 球面に於ける屈折.....325	246 紅外スペクトラ.....377
220 接近せる球面に於ける屈折.....328	247 紫外スペクトラ.....378
221 接近せざる球面に於ける屈折.....330	248 連続スペクトラ.....379
222 節 點.....332	249 輝線スペクトラ.....379
223 厚レンズ.....333	250 ベルマー公式.....383
224 間隔を有する二つの厚レンズ.....336	251 群線スペクトラ.....385

第五章 光の分色

225 ニュートンの實驗.....338	254 スペクトラ分析の應用及びドップラー効果.....389
226 フラウホーファー實驗.....338	255 物体の色.....390
227 各色の屈折率.....339	256 變則分色.....393
228 淺色レンズ.....341	257 太陽面に於ける變則分色.....396
229 虹.....344	258 低温發光.....397

第六章 光學器械論

230 球面収差.....347	259 螢 光.....398	
231 人 眼.....350	260 燐 光.....400	
232 視 覺.....352	261 光線の化學作用.....400	
233 眼の焦点.....353	第八章 光の干渉402—413	
234 兩眼視覺.....355	262 歴 史.....402	
	263 フレネルの實驗.....403	
	264 薄き空氣膜の色.....404	

265 ニュートンの色散.....405
 266 厚板の光線干渉.....406
 267 諸種の平行面板.....410
 268 光の定常波動.....412

第九章 光の廻折.....413-429
 269 光の直線進行.....413
 270 フレネルの積分.....414
 271 コルニウ螺線.....418
 272 フレネル廻折実験.....419
 273 フラオンホーファー廻折の実験.....421
 274 格子.....424

第十章 光の偏極.....430-443
 275 偏光.....430
 276 反射に因る偏光.....431
 277 ブリュスター則.....432

第六編 電氣磁氣學

第一章 靜電氣學.....450-483
 291 大意.....459
 292 發電氣.....464
 293 電位.....465
 294 ガウス定理.....469
 295 *アッソン方程式とラプラス方程式.....471
 296 ガウス定理の應用.....472
 297 力管.....473
 298 電氣容量.....474
 299 エネルギー及び導体面の張力.....477
 300 力線の屈折.....479
 301 氣中電氣.....480

第二章 磁氣學.....484-497
 302 磁石.....484
 303 ターロン則.....485

278 重屈折.....434
 279 方解石及び水晶のプリズム.....436
 280 單軸結晶内の波動面.....437
 281 二軸結晶の波動面.....441

第十二章 色の偏極.....444-451
 282 色の偏極.....444
 283 石膏薄片現象の説明.....445
 284 偏光燈及び偏光顯微鏡.....447
 285 ミラーの毛織.....448
 286 収斂光線による色の偏極.....448

第十三章 迴轉偏極.....452-458
 287 光學軸に垂直に鏡りたる水晶薄片.....452
 288 水晶薄片現象の説明.....453
 289 直線偏光、楕圓偏光、圓偏光.....455
 290 液体の旋光性.....457

304 磁場.....485
 305 ガウスの實驗.....486
 306 磁力線.....489
 307 磁力の屈折.....491
 308 殘留磁氣.....492
 309 地磁氣.....492

第三章 電磁氣學.....500-519
 310 接觸電氣.....500
 311 電池.....501
 312 エールステット實驗.....502
 313 ビョー、サグーム則.....503
 314 電池の單位.....506
 315 電流計.....507
 316 磁板.....509
 317 筒輪.....510

318 電流の動力作用.....510
 319 電磁線.....513
 320 從磁体及び反磁体.....514
 321 ファラデー效果.....515
 322 ゼーマン效果.....517

第四章 電流及び熱電氣.....520-535
 323 抵抗.....520
 324 導線接續法.....522
 325 分流.....524
 326 デュル則.....527
 327 デュル熱の應用.....528
 328 熱電氣.....531
 329 ベルチエ效果、トムソン效果.....534

第五章 電氣分解.....536-544
 330 イオン.....536
 331 ファラデー則.....537
 332 イオンの荷電.....539
 333 電流偏極及び蓄電池.....542

第六章 電磁感應.....545-554
 334 電磁感應.....545
 335 ファーコーの渦.....548
 336 自己感應.....549
 337 感應コイル.....551
 338 感應作用の他の應用.....553

第七章 電流發生機.....555-571
 339 交流.....555
 340 交流の工率.....559
 341 變壓器.....560
 342 電流發生機.....563
 343 直流發生機.....564
 344 交流發生機.....566
 345 四分相、交流機一名二相交流機.....567

346 三相交流機.....568
 347 電動機.....569

第八章 電氣振動.....572-586
 348 振動的放電.....572
 349 テスタ變壓器.....574
 350 電氣共鳴.....575
 351 ヘルツ振動.....577
 352 電波輻射.....579
 353 ヘルツ實驗.....580
 354 無線電信.....581
 355 無線電話.....583

第九章 氣體の電氣傳導.....587-621
 356 電離.....587
 357 火花放電、極燈放電.....588
 358 眞空放電.....590
 359 陰極線.....592
 360 陰極線の荷電.....549
 361 電子荷電.....597
 362 レーナード線.....599
 363 光電子.....600
 364 熱電子.....603
 365 電子の性質.....604
 366 陽極線.....605
 367 導體内の電子運動.....608
 368 X線.....611
 369 X線の性質.....613
 370 X線分光學.....614
 371 波長測定.....619
 372 二次又は原X線.....621

第十章 放射能.....622-641
 373 ベクレル線.....623
 374 放射線の崩壊.....624

375 α粒子.....627	379 楕圓軌道.....636
376 原子新説.....629	380 陽 核.....640
377 原子構造.....632	381 光の粒子説.....640
378 ボールの原子模型.....633	

第七編 エーテル及び相對説

382 エーテルの存在.....642	385 アインシュタインの特別相對説.....647
383 フキゾー實驗.....642	386 アインシュタインの一般相對説.....651
384 マイケルソン實驗.....644	

拾 遺

64 潮 汐.....653	116 氣體方程式.....654
----------------	-------------------



1 自然界 吾人の世界は内界外界の二つに分たる。外界は即ち自然界にして、自然界の事物は吾人の五官を刺戟し内界即ち心意に入來して、爰に種々の觀念を生ぜしむ。此外來觀念に依りて外界の存在を認識し、又外界の諸變化即ち現象 phenomenon を觀察することを得るなり。之に反し、内界の現象は他人之を窺知ることを得ず。即ち内界は別種の小世界 microcosmos を形成す。自然界諸現象の因果的關係 causal relations を研究するを自然科学 Natural Sciences と名く。

2 物理学 物理学 Physics は自然科学の一科にして、往昔は殆ど自然科学の全部に亘りしも、研究すべき事項増大したるため、天體の物理学は天文學に、地殼の物理学は地質學に、大氣の物理学は氣象學に、人體の物理学は生理學に、生物の物理学は生物學に譲り、物理学は自然界を一つ宛分離して之を物體と名け、其諸物體に共通なる性質、即ち物質に本來的なる諸性質を研究するを以て其目的となすに至れり。然れ共物質の構造及び其變化に關する部分は特に化學に分譲す。尙ほ近來地球物理学、天體物理学、精神物理学等の學科あり。

3 研究法 物理学の研究は經驗即ち自然界の觀察 observation に始まる。而して觀察したる現象に就き、其因果的關係を吟味せんがために、實驗室に於て小規模に自然界にて見たると同一現象を發生せしむ、之を實驗 experimentation と稱す。實驗を行なふに當り必須事項具備せざるときは期待の現象は發生すること無し。故に所期の現象を小規模に於て再現せしむるには、適當なる必須事項に探り當らざるべからず。斯くして、此結果を呈せしむるには彼の源因を所要とすること、

所謂因果の関係を判然たらしむることを得べし。

凡そ現象には性質上の差違と度量上の差違とあり、従て現象の観察、又は実験に於ては諸種の定性的及び定量的器械を使用し、以て五官の不足を補ひ手足の及ばざるところを助くるの必要あり。

4 法則、臆説、學理 観察、実験を行なふのみにては未だ研究を盡したるに非ず。即ち観察、実験に依りて得たる事實を簡易なる言語によりて概説することを要す、其概説したるものを法則 physical laws と名く。而して一旦諸種の法則を得たるときは、人心の請求として、何故に此法則ありやを探求せずんば已まざるなり、即ち人心は諸法則の説明 explanations を要求すべし。爰に於て臆説 hypotheses を立て、果して此臆説によりて此法則を説明し得るやを吟味するに至るなり。臆説は件の法則を充分説明し得るのみならず、尙ほ他の類似の諸法則を可成的多數に説明し得るの力あるを要す。即ち適用の範圍大なれば大なるほど、臆説としての信用を増すことゝなるなり。又第二要件としては、臆説は出来得るだけ簡單にして、然かも諸性質を廣く包容するところの種類のものなることを要す。凡そ臆説には二種ありて、一は因果律を満足せしむるに足る性質のもの、二は諸法則の相互関係を説明する性質のものなり。古來臆説中無効として放棄せられたるもの少なからず。例へば陰陽二液説、熱素説又は光の粉説等の如し。又現行の臆説中にも單に當座用臆説 working hypotheses として採用せられたるものあり。此等は早晚放棄せらるべき筈のものなれども、當分此以上のものを創案し得ざる場合にのみ用ゐらるゝなり。之を要するに、科學の傾向は、新らしく臆説を建てんとするよりも、寧ろ從來の臆説を可成放棄せんとするにある如し。此れ畢竟複雜を避けて簡單を欲する人心の要求に出づるものとす。若し臆説にして久しく其信用を保ち諸種の法則の説明に適用して過失なきときは之を學理又は定説 theory と稱するに至る。然れども學究の進歩に連れ今日は學理として遵奉せらるゝものも後日放棄せらるゝに至らずとは保證し難し。此意味に於ては凡ての臆説學理は當座用の性質のものなりと云ふを得べし。尙又た物理學に於ては通常臆説と稱せらるゝもの以外に エーテル、陽電子、陰電子、物質なる四個の作因 agents を假設するの必要あり。

前述の如く物理法則は定性的なるのみならず、亦定量的なるを以て數學式を使用して之を表言することの可能なる場合甚多し、従て此が説明たる臆説又は學理も多くは數學式によりて表出し得べき性質のものとなる。數理物理學又は純理物理學 Mathematical or Theoretical Physics と稱する學科に於ては、最初少數の簡單なる臆説を建て、數學的演繹法によりて諸種の法則に到着することを得べし。然るに従來の物理學は事實より歸納して法則を作り、法則より之を概括する臆説に上るを以て、一見純理物理學の逆法の如く視ゆれども、其實は然らず、古來物理學の發達史を案ずるに常に歸納 induction 演繹 deduction の兩法行はれて相互に補助し來りたるを見る。

5 物理量 物理學に於て使用する量を測定するには豫め此と同種の量の單位 units を定め置き、次に此量は其單位の幾倍を含有するかを定むるを要す。従て凡ての物理量 physical quantities はいづれも單位と其倍數との兩つによりて表出せらる。故に物理學にて使用する物理單位の種類數は物理量の種類數に等し。然れども此等多數の物理量は三個の基本物理量の組合せによりて表はすことを得。又凡ての物理單位も三個の基本單位 fundamental units に歸せしむることを得べく、従て他は悉く誘導單位 derived units となる。

三個の基本單位として通常長さの單位 unit of length 時間の單位 unit of time 質量の單位 unit of mass を撰用す。此場合に於ては地球上重力の異なるに拘らず誤差を生ずること無きを以て、上の基本單位を撰用することを絕對單位法と稱す。

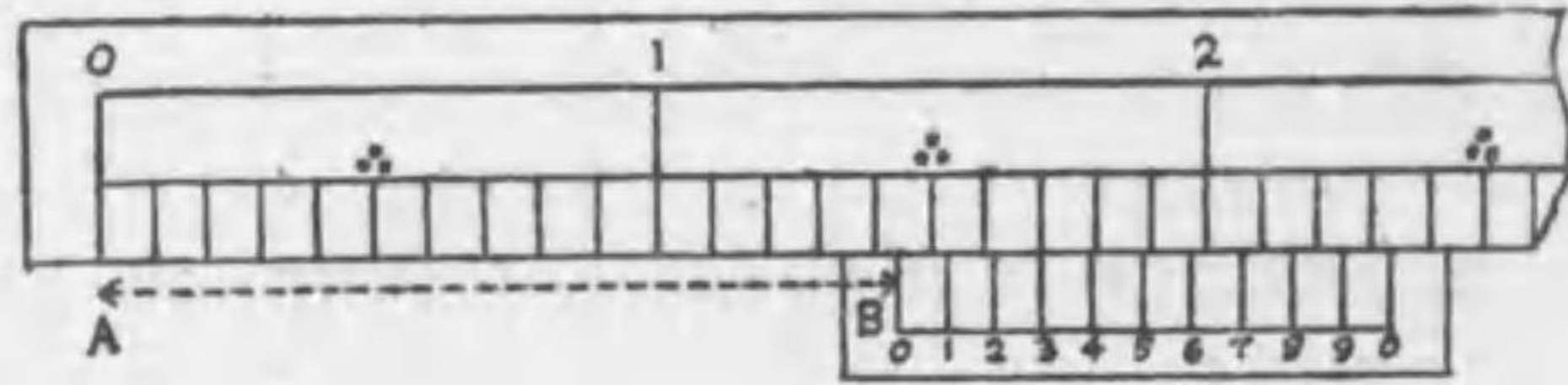
6 長さの單位 長さの單位としては一米 metre (m) 又は其百分の一なる一種 centimetre (cm) を用ゆるを便利とすれども、光の波長を表はすとき等には一米の千分の一即ち一耗 millimetre (mm) の其又千分の一即ち一ミクロン micron (μ) 若しくは其千分の一なる一ミリミクロン millimicron ($\mu\mu$) を使用するを便利とす。又星の距離を表はすには光線到着に要する年數を用ゆるを便利とす、此單位を一光年 light-year と稱す。近來流行し始めしパーセック parsec は 3.26 光年に相當する單位にして、地球軌道半徑の $180.60.60/\pi$ 倍、即ち 206265 倍の長さに等し。

7 面積、容積の單位 此は各々長さの單位の誘導單位にして、一米平方 square

metre (q.m) 或は其百萬分の一なる一平方厘 square centimetre (q.cm) を面積の單位として使用するも可なり。容積の單位も此と同様にして、或ひは一立方厘 cubic centimetre (c.cm) 或ひは其千倍なる、一立方分 (c.dm) (之を一リットル litre とも名く) を使用することあり。

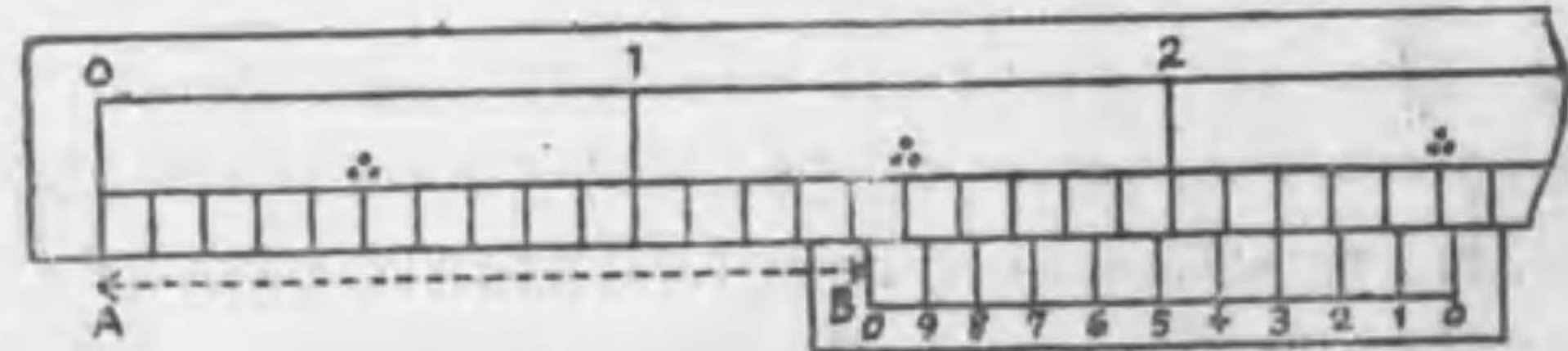
8 長さ、面積、容積を測定する器械 物指を以て長さを測定するに當り、目盛の不足を補ふため遊尺 Vernier を用ふることあり。遊尺は本尺の最小目盛りの尚ほ十分の一を讀むに適す。直讀み遊尺 direct-reading vernier (第一圖) に於ては本尺の目盛の九を遊尺の十に等しく作る。例へば

第一圖



AB の長さを測らんとせば、A を本尺の零に對せしめ、遊尺の零を B に對せしむ。然るときは遊尺の 3 は本尺の或目盛と合するを以て $AB = 1.43$ を讀み得るなり。逆讀み遊尺 retrograde-reading vernier に於ては本尺の十一を遊尺の十に等しくす(第二圖)。遊尺の目盛は逆行せるに注意すべし。遊尺の 3 は本尺の或目盛

第二圖



りと合致せるゆへ、其左方の(第二圖にては右方)本尺遊尺の目盛りを比較すれば、順次に $\frac{1}{10}$ 宛の差違あり、而して此差違は遊尺の零に至りて重なつて $\frac{3}{10}$ となるを見るべし。

銅線断面の如き小物体の厚さを測るには捻子 ミクロミーター screw micrometer を用ふ。平板の厚さ又は球の半徑を測るには球指 spherometer を用ふ。曲線の長

さは曲線 ミーター rotemeter を以て測るを便宜とす。鉛直線上の二点間の距離を測るにはカセットミーター cathetometer を用ふ。平面曲線によりて圍まれたる面積を測るにはプランミーター planimeter を使用す。曲面上の面積を測定する器械は未だ創案製出無し。

9 時の單位及び其測定器械 地球の自轉速度は平等なるを以て、之を利用して時の單位を定む。抑々地球の北極、南極及び觀測地の三点を通過する大圓を地理學の子午線と名く、此子午線を含む平面を無限に延長すれば天球と大圓に於て交はる之を天文子午線 astronomical meridian と稱す。地球の自轉に伴ふて此の二種の子午線も東方に移動する理なり。爰に於て相對運動を生じ恒星及太陽は一日一回宛に西方に子午線を横過する如く視ゆべし。之を子午線經過 meridian passage と稱す。同一恒星の二回の子午線經過の間を一恒星日 sidereal day と稱し、之を時分秒に分ちて使用するを恒星時と名づく。太陽日と稱するは太陽の子午線經過の間隔なれども、之は毎日少し宛差ありて一定ならざる故一年間の平均を取りて之を平太陽日 mean solar day と名づく。兩單位にて一年の長さを表はす時は次の式を得。

$$365.2422 \text{ 平太陽日} = 366.2422 \text{ 恒星日}$$

即ち地球の日動のため太陽は星間を東方に移動する如く見ゆるため太陽の子午線經過の時刻は星のに較ぶれば毎日少し宛々遅るゝ理なり。平太陽日を時分秒に分ちて使用するを平太陽時と名づく。又一恒星日を平太陽時にて表はせば

$$24^{\text{時}} \times \frac{365.2422}{366.2422} \text{ 即ち } 23^{\text{時}} 56^{\text{分}} 4^{\text{秒}}$$

を得べし。眞太陽日 true solar day の平等ならざる理由に二つあり。第一は地球が太陽を公轉する運動に遅速あるに由る。第二は地軸は地球軌道面即ち黃道面に垂直ならずし、傾きより $23^{\circ} 27'$ 傾けるため黃道上の太陽の視運動が赤道上の視運動と一異なるによる。

クロノミーター chronometer を以て時を測定す。クロノミーターは時計の精確なるものにして航海者も之を利用す。

10 質量の單位及び其の測定器械 溫度攝氏四度なる一立方分の水の質量を一キログラム kilogram と稱して質量の單位となす。或ひは其千分の一即ち一瓦 gram を單

位に用ふるも可なり。天秤を以て質量を測定す。

11 C.G.S.系 絶対単位法の一類にして理論的に便利なるは基本単位を 1 cm, 1 g, 1 s. に定むる法即ち C.G.S.系 system 是なり

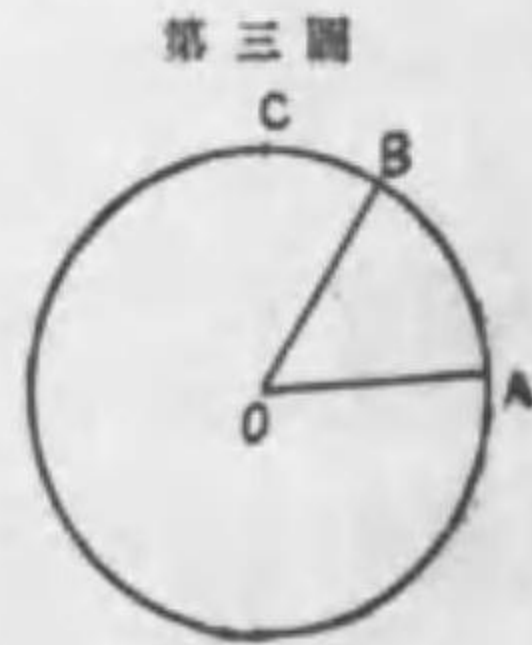
12 デメンション dimensions 誘導単位 (又は誘導量) 内に基本単位 (又は基本量即ち長さ、時、質量) が幾度含まれて有るかを示す数なり。例へば面積には長さが二次容積には長さが三次含まるゝに依り面積のデメンションは 2 にして容積のデメンションは 3 なりと稱す。長さ、時、質量の単位を夫々 L, M, T. にて示せば面積及容積の単位を示すに夫々 [L²] 及 [L³] を使用する。[] なる符號を…のデメンションと讀むべし。

[面積] = [L²], [容積] = [L³]

又 L を一糧と假定せば n 平方糧 = n [L²], m 立方糧 = m [L³] となるが如し。

13 角の單位 角の單位は四直角の 360 分の一なる一度を使用すれども、便利上一ラヂアン radian と稱する單位を使用するも可なり。

此は (第三圖) 任意の半徑 AB を以て書きたる圓周上に、弧 AB を半徑 AO に等しく取るときは、角 AOB は一ラヂアンに相當す、故に角 AOC の如きをラヂアンにて表はさんとするには、弧 AC を半徑 AO にて除すれば其商は求むるところのラヂアン數なり。



從て直角は π/2 ラヂアン、二直角は π ラヂアン、四直角は 2π ラヂアンとなる。又一ラヂアンは 360/2π 即 180/π 度、即ち 57.2958 に相當するを見る。之に反し、一度は π/180 即 0.01745 ラヂアンに相當す。

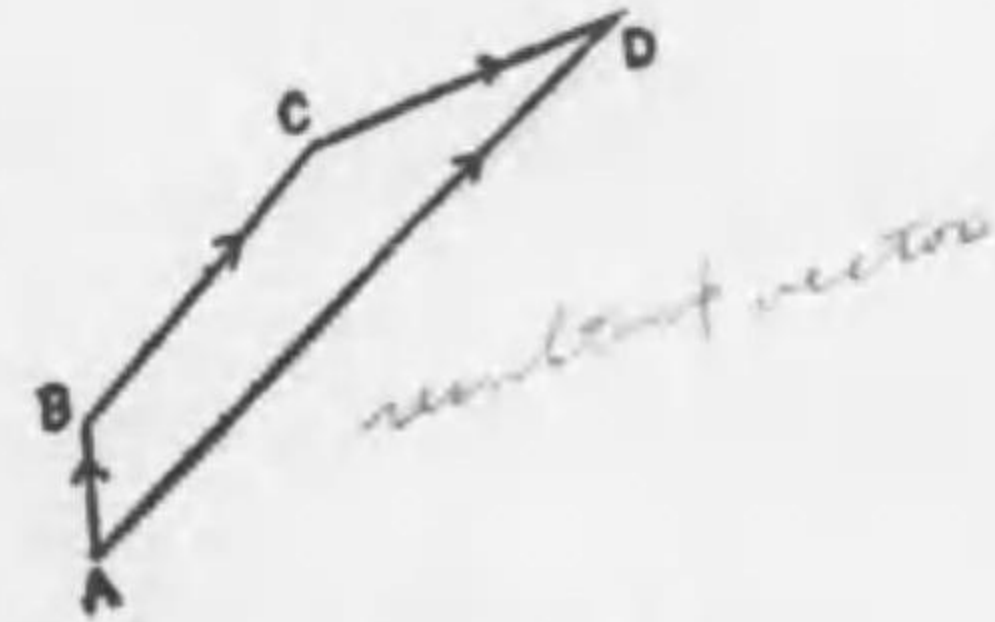
14 立體角 三個又は三個以上の平面が一点に於て會するときは、其會点に於て諸面は立體角 solid angle を作る。會点を中心とし單位長の半徑を以て球面を書くとときは、立體角が球面上に切取りたる面積を立體角と稱す。球の半徑 r にして切取りたる面積 S なるときは、立體角は S/r² に等しき理なり。從て半球の立體角は 2π 全球のは 4π 又八分球のは π/2 となるべし。

第一章 運動學 KINEMATICS

15 質點の運動 質量を有し大さを有せざる物体を便宜上假定し、之を質點 particle と名く。質點が (第四圖) A なる位置より直線 AB に沿ふて B なる位置に移るには多少の時間を要す、斯く移ることを質點の運動と稱す。即ち運動とは位置の變化にして、其の變化を生ずるには時間を要するのみならず、凡べての運動には必ず方向 direction と大さ magnitude とあり。



16 ゼクトル 總じて方向と大さとを有する量を ゼクトル vector と名く。ゼクトルは矢を附したる直線を以て示す (第四圖) ことを得。質點が (第五圖) AB, BC, CD の如き線を書きて運動するは、單に AD を書くに等しきものなることを次ぎの ゼクトル方程式にて示すことを得べし。



AB + BC + CD = AD

此は AB, BC, CD なる三ゼクトルの組合せ composition は AD なる合成ゼクトル resultant vector に等しきことを示す。今代數方程式の如く、此を變化して

AB + BC + CD - AD = 0

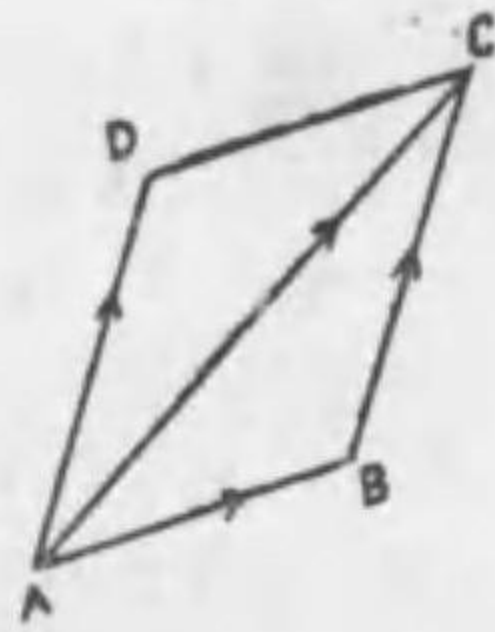
と書き、負數は逆行を示すゆへ、更に

AB + BC + CD + DA = 0

と書改むるときは、質點は起点を出て、再び起点に歸着することを知る。又逆にゼクトル AD は AB, BC, CD なる諸分立ゼクトル component vectors に分解し得べきものなるを知る。之をゼクトル分解 resolution と名く。

ゼクトルは方向と大さとを有すれども附着点を有せず、故に二つの平行にして

第六圖



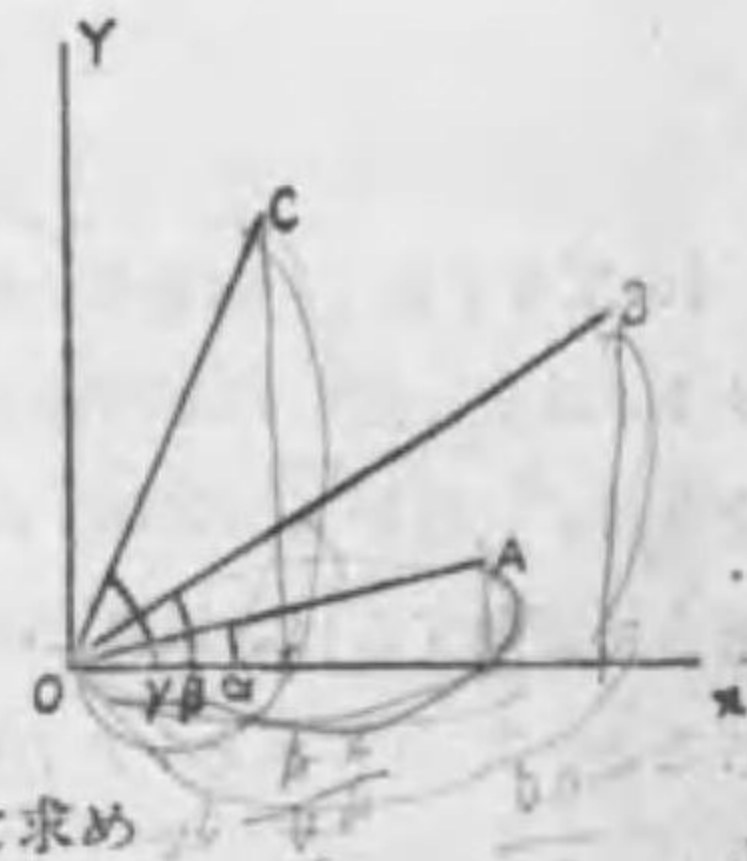
長さ等しきベクトルは互に相等しと稱す。例へば(第六圖) AB と BC の和は AC に等しきゆへ、AD を BC に等しく作るときは $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ なることを知る。即ち平行四邊形の相隣れる二邊のベクトルの和 vector sum は對角線に等し。

速度、加速度、角速度、力、力の能率等の如き物理量は方向を有するを以てベクトル解析に預ることを得るも、

エネルギー、温度、比重等の如きは方向を有せざるを以てベクトルに非ず、之をスケーラー量 scalar quantities と稱す。且つベクトル

解析は量の數値を求めんとするに當り殆ど便益なきものとす。例へば多數ベクトルの組合せの數値を知らんとするには、從來の解析幾何學に依り、與へられたるベクトルを起點 O に集め(第七圖) O を過りて互に直角なる OX, OY 二軸を任意に引き、ベクトルが X 軸となす角を夫々 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 等にて示すときは、各ベクトルは二軸に平行なる二つのベクトルに分解することを以て、各軸に就き其和を求め

第七圖



$$\left. \begin{aligned} X &= OA \cos \alpha + OB \cos \beta + OC \cos \gamma + \dots \\ Y &= OA \sin \alpha + OB \sin \beta + OC \sin \gamma + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

となしてのち、X と Y とを組合せて、合成ベクトル R を得べし。次式に依る、

$$R^2 = X^2 + Y^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + \dots + 2 OA \cdot OB \cos(\alpha - \beta) + 2 OA \cdot OC \cos(\alpha - \gamma) + 2 OB \cdot OC \cos(\beta - \gamma) + \dots$$

R が X 軸と作す角 δ は

$$\frac{Y}{X} = \tan \delta \dots \dots \dots (2)$$

によりて定まる。

17 等速運動 質点が等き時間に等き距離を書きつゝ運動するを等速運動 uniform motion と名け、單位時間に書く距離を速度 velocity と稱す。書きたる道

が直線なるを等速直線運動 uniform rectilinear motion 圓なるを等速圓運動 uniform circular motion 他の曲線なるを等速曲線運動 uniform curvilinear motion と名く。

第八圖



質点 P は(第八圖) v なる等速を以て直線 OP の上を運動す。O を起點と定め、A 点を過る時刻を $t=0$ 。OA の長さを x_0 と定む。P 点

にある時刻を t とし $OP=x$ とすれば

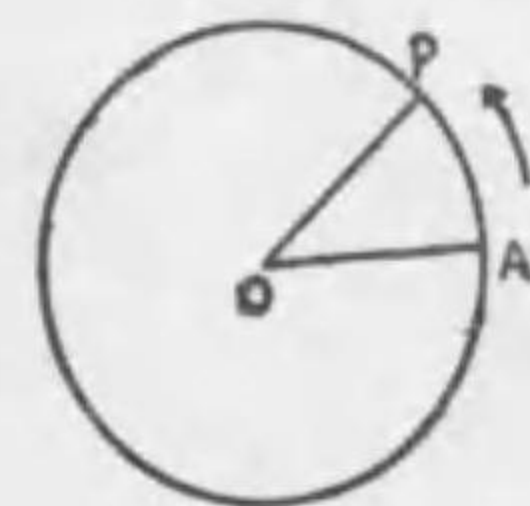
$$v = \frac{x-x_0}{t} \dots \dots \dots (3)$$

若しも、P が起點を過る時刻より時間を起算することによつて $x_0=0$ となり、(3)式は $x=vt$ の如き簡式となる。

速度は長さを時間にて除じたるものなれば、ジメンション式は $[LT^{-1}]$ となる。又速度はベクトルなれば、二つ又は二つ以上の速度を組合せて、其合成ベクトルを求むるには(第五圖)の如くすべし。即ち爰に AD は方向も大きさも異なる三個速度の合成速度 resultant velocity なり。逆に一つの與へられたる速度 AD を三つの分立速度 component velocities AB, BC, CD に分解するを得べし。

等速圓運動(第九圖)に於ては質点 P が $t=0$ の時 A を出發し、矢の方向に運動し、t の時 P に來るとすれば、 $\widehat{AP}=vt$ にして、v は圓弧上の速度なり。此と同時に半徑 OP は回轉して角 AOP を書く。單位時間に OA が書く角を角速度 angular velocity と名け、 ω を以て之を示す時は、 ω は一定にして、

第九圖



$$\angle AOP = \omega t$$

を得。然るに角をラヂアンにて測れば、 $\angle AOP = \widehat{AP}/OA$

$$\omega = \frac{v}{OA}$$

を得べし。質点が圓を一週する時間即ち週期 period を T とし、又半徑を a と定むれば

$$v = \frac{2\pi a}{T}$$

従て

等加速運動

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \dots\dots\dots (4)$$

を得べし。又単位時間に於て質点が圓を回轉する度數を n とすれば、

$$n = \frac{1}{T} \dots\dots\dots (5)$$

なるを以て

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 2n\pi \\ v &= 2n\pi a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

角速度のデメンション式は $[T^{-1}]$ なり、何となれば角のデメンションは $[L^0M^0T^0]$ ならばなり。

18 等加速運動 質点の運動が等き時間に等き距離を書かず、従て速度一定ならざる時は之を變速運動 variable motion と名く。速度が時と共に増すを加速運動 accelerated motion 減ずるを減速運動 retarded motion と名く。単位時間に於ける速度増加が一定なるときは、其運動を等加速運動 uniformly accelerated motion と稱し、単位時間の速度増加を加速度 acceleration と稱す。減速度運動に於ては、加速度は負數なり。 $t=0$ なる時の速度を v_0 とし、 $t=t$ なる時の速度を v とし、一定加速度を γ にて示す時は

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t}$$

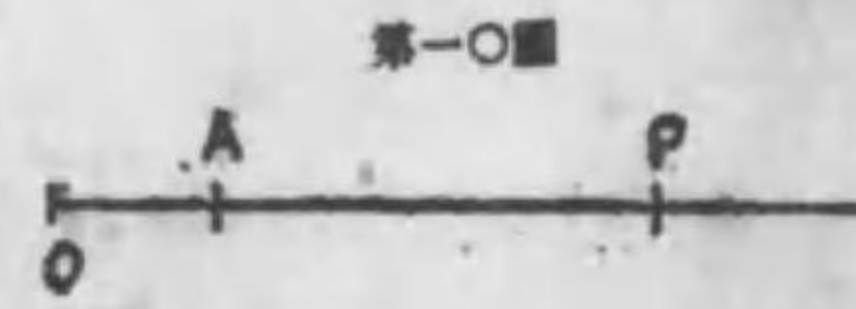
依て

$$v = v_0 + \gamma t \dots\dots\dots (7)$$

爰に v_0 を最初の速度 initial velocity と名く。最初の速度は v_0 にして、 t 時後の速度は v なるゆへ、平均速度は $\frac{1}{2}(v_0 + v)$ 即 $v_0 + \frac{1}{2}\gamma t$ となる。此平均速度を以て、 t 時間等速運動を營むときは、質点が書く距離は當に求むるところの距離 x なり。即ち

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 \dots\dots\dots (8)$$

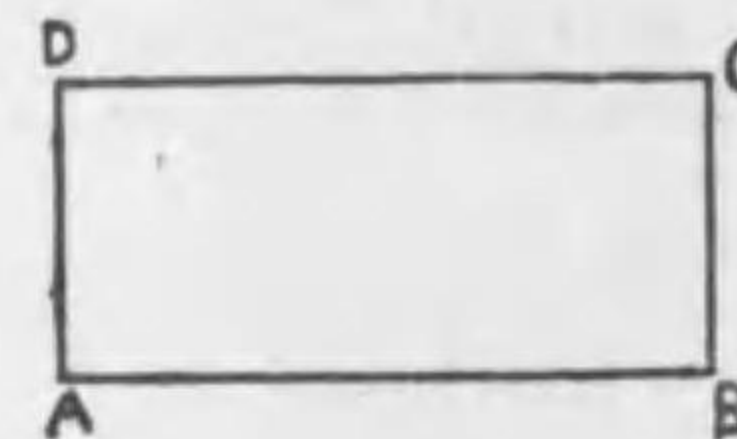
式中 x_0 は $t=0$ の時既に書き居たる距離を示すものとす。今質点 P は(第一〇圖)起点 O を出發し、右方に等加速運動を行なふに當り、 A を



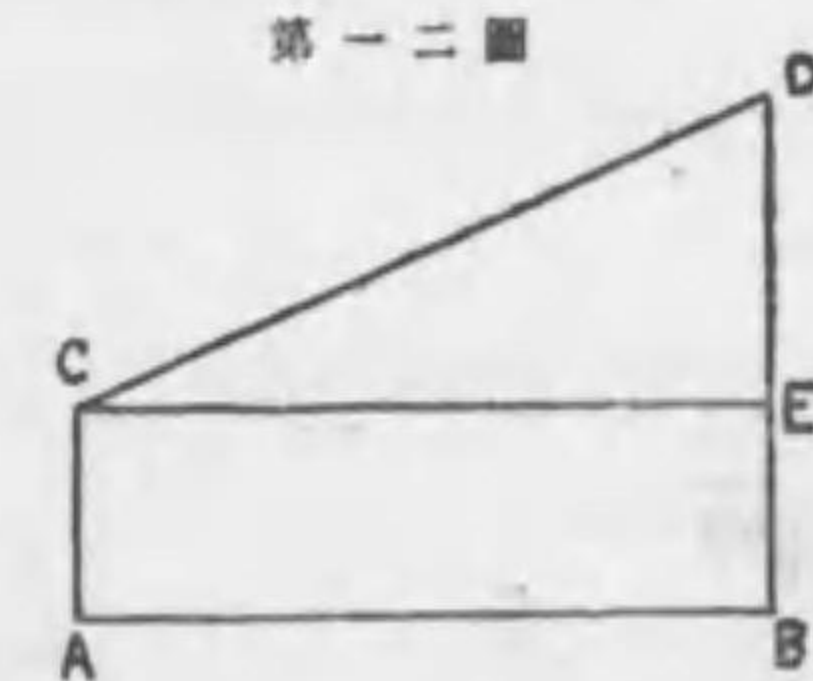
變加速運動

過る時刻は時間の起算初まるときにして、 P を過る時刻は t なりとす。然る時は $x_0 = OA$, $x = OP$ となる。若しも、 P が起点 O を過る時刻より時を起算するものとせば、 $x_0 = 0$ となり、上式は $x = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ に變ず。尙ほ、最初の速度も零なりとせば、式は單に $x = \frac{1}{2}\gamma t^2$ となる。凡そ、時間を起算 reckon する時刻を紀元 epoch と名け、距離を起算する点を起点 origin と稱す。諸種の運動に於ては、紀元は必ずしも起点と一致するものに非ずとす。上圖に於ては O は起点にして、質点が A を通過する時刻は紀元なり。従て P が A の左方に在る間は紀元前にして、 A の右に出づる時は紀元後なり。

19 運動を圖形にて示す法 時間 t を横線 AB にて示し、速度 v を縦線 AC にて示し、等速運動を $x = vt$ にて示すときは、



距離 x は矩形 AD の面積に相當すべし。此と同様に等加速運動を $x = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ にて示す場合には(第一二圖) $AB = t$, $AC = v_0$, $BD = BE + ED = AC + ED = v_0 + \gamma t = v$ とすれば、四邊形 $CABD$ の面積は距離 x に相當し、 $x = \frac{1}{2}(AC + BD) AB$ となりて、前式を満足するを見る。



加速度は速度を時間にて除じたるものなれば、其デメンション式は $[LT^{-2}]$ にて示すことを得。又加速度はゴクトルなるを以て、之を組合せて合成加速度を求め、或ひは分解して數多の分立加速度となすことを得べし。

20 變加速運動 加速度の値一定せざる場合を變加速運動 variably accelerated motion と名く。後節に説明せんとする弦運動の如きは其好例なり。質点が x 軸に沿ふて運動するとき、起点よりの距離を x_1 とし、時刻 t_1 とす。少し後の時刻 t_2 に於て、質点は x_2 の距離に来るものとすれば、 $t_1 - t_2$ 間の平均速度は $(x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$ にして、單位時間毎に $(x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$ の速さを以て動けば、 $t_2 - t_1$

時間に $x_2 - x_1$ の距離を畫くことを得べし。依て $t_2 - t_1$ を小さくすれば、するほど、即ち t_1 を t_2 に接近するに従ひ、 $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ なる平均速度は、時刻 t_1 に於ける眞の速度に接近すべし。此理論を追ひ、 $t_2 - t_1$ を微分小となし、従て $x_2 - x_1$ も微分小となり。此兩つの微分の比を求むれば、此れ即ち速度 v となる。此思想を次ぎの如き式にて示す

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt} \dots \dots \dots (9)$$

此と同様に t_1 及び t_2 に於ける速度を v_1 及び v_2 を以て示すときは、加速度 γ の値次ぎの如し

$$\gamma = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \dots \dots \dots (10)$$

即ち、 $t_2 - t_1$ が有限にして微分小ならざる間では $(v_2 - v_1)/(t_2 - t_1)$ は $t_2 - t_1$ 間の平均加速度を示すに過ぎざるなり。(10)式は γ が常數なる時に限り直ちに積分することを得べし。即ち兩側に dt を乘じて積分すれば

$$\frac{dx}{dt} = \gamma t + v_0$$

を得、 v_0 は所謂積分常數にして、速度の $t=0$ の時の値、即ち最初の速度を示す。再度兩側に dt を乘じて積分すれば

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + x_0$$

x_0 は積分常數にして、 $t=0$ の時既に畫き居たる距離なり。然れ共 γ が常數ならずして、 t の函數なるときは、其函數形を審にしたるのち、初て積分することを得るものとす。

速度は $v = dx/dt = \dot{x}$ を以て、加速度は $\gamma = d^2x/dt^2 = \ddot{x} = dv/dt = \dot{v}$ を以て示して可なり。

21 曲線運動 曲線運動に於ては、速度の方向は不斷變更す。速度の方向は曲線に引ける切線の方向と一致するを示さんがために

第一三圖



(第一三圖) O を起點とし、 OP_1 の長さを S_1 、 OP_2 の長さを S_2 とし、 P_1 に於ける時刻を t_1 、 P_2 に於ける時刻を t_2 と定むれば $t_2 - t_1$ 間の平均速度は先

きの如く $(s_2 - s_1)/(t_2 - t_1)$ にして、速度の平均方向は直線 $P_1 P_2$ にて示すことを得べし。而して t_1 に於ける速度を知らんと欲せば、 P_2 点を移して P_1 に接近せしむべし。然る時は $s_2 - s_1$ と $t_2 - t_1$ は次第に微小となり、其極限に於ては兩數の比は P_1 に於ける速度となり、 $P_1 P_2$ 線は P_1 に於ける切線となる、即ち

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \dots \dots \dots (11)$$

次ぎに (第一四圖) P 及 Q に於て夫々切線 PR、QT を引き其長さを速さに



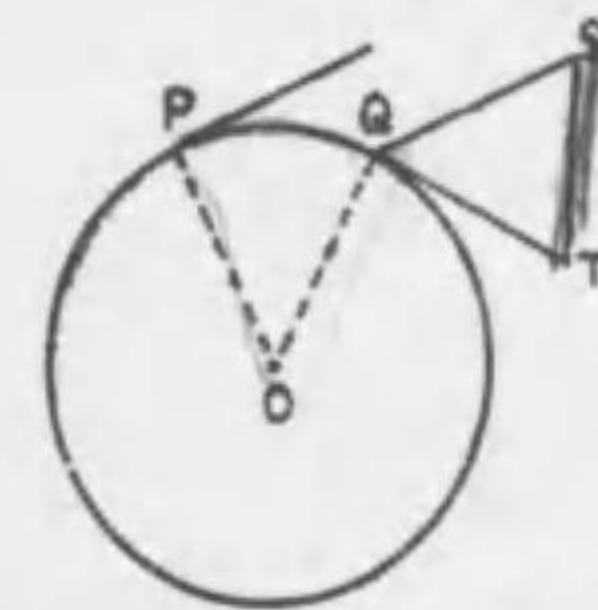
等々取り、Q を過り QS を PR に平行に且つ等々切るときは、QS、QT は夫々 t_1 、 t_2 に於ける速度ベクトルなる故へ、 $t_2 - t_1$ 間の速度變化は ST なるベクトルを以て示すことを得。依て平均加速度は $ST/(t_2 - t_1)$ となる。而して Q を移つて P に接近せしむれば極限に於ては加速度 γ に等し、即ち

$$\gamma = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{ST}{t_2 - t_1} \dots \dots \dots (12)$$

了解を助けんため此理を等速圓運動に應用せんとす。此場合 (第一五圖) に於ては、QS

=QT。又 Q を移して P に接近せしむれば其極限に於て ST は PO に平行となるべし。故に P 点に於ける加速度は圓心に向ふて作用することを悟る、之を圓運動の求心加速度 central acceleration と稱す。其大きさを算出するには (12) 式より

第一五圖



$$\gamma = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{ST}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{ST}{PQ} \cdot \frac{PQ}{t_2 - t_1}$$

を得、次ぎに兩三角形 OPQ と QST は極限に於て相似となり、 $ST/PQ = QS/PO$ なる比例式成立するを以て之を前式に代入して

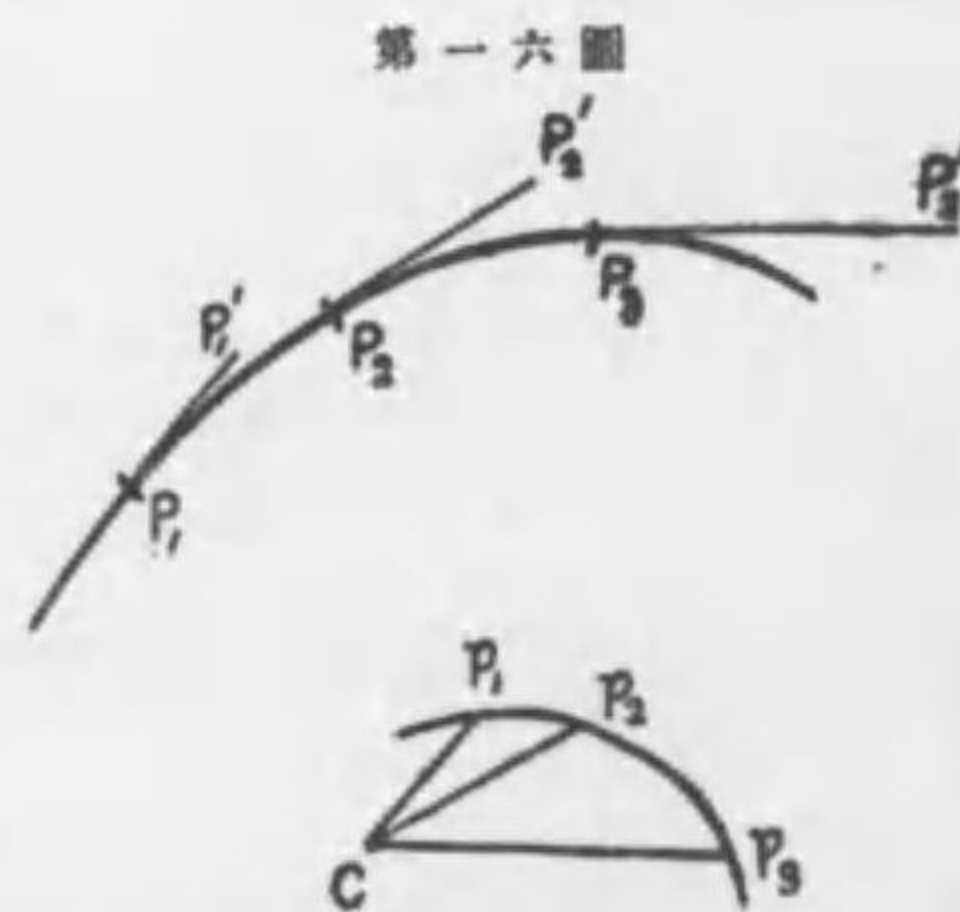
$$\gamma = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{QS}{PO} \cdot \frac{PQ}{t_2 - t_1}$$

と書き改む。爰に $QS = v$ 又 $PQ/(t_2 - t_1)$ の極限も v なるゆへ、 $PO = r$ と置き

次式を得

$$r = \frac{v^2}{a} \dots\dots\dots (13)$$

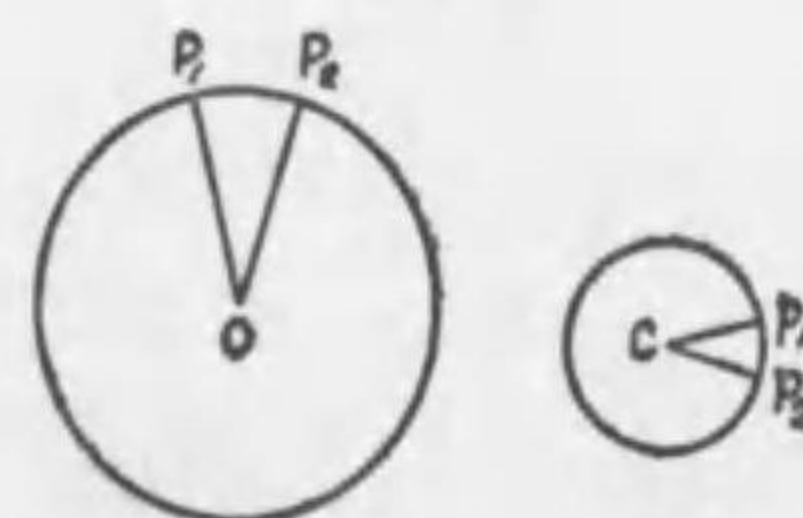
上述の理はホドグラフ hodograph (James Bradley; Sir William Rowan Hamilton, 1846) と稱する曲線を利用すれば一層明瞭となる。曲線上の $P_1P_2P_3 \dots$ 等の諸点を過り (第一六圖) 速度ベクトル $P_1P'_1, P_2P'_2, P_3P'_3 \dots$ を引き、圓形面上任意 C を過りて $cp_1, cp_2, cp_3 \dots$ を夫々速度ベクトルに平行に引きて、 $P_1P_2P_3 \dots$ 諸点を曲線にて連るときは其曲線をホドグラフと稱す。 $P_1P_2P_3 \dots$ は各一秒毎の質点の位置とすれば $cp_1, cp_2, cp_3 \dots$ は各秒の速度にして、前述の理により $P_1P_2, P_2P_3 \dots$ は一秒毎の速度の變化を示すベクトルに異近すべし、從て $P_1P_2P_3 \dots$ 点に引ける切線は加速度の方向を示し、 $P_1P_2, P_2P_3 \dots$ 等の大きさは加速度の數値に等しきものと見做すことを



第一六圖

得べし。故に質点 P が $P_1P_2P_3 \dots$ 線上に曲線運動をなすときは質点 P はホドグラフ上に運動して其速度は方向と大きさに於て原曲線上の加速度に等きこととなる。之を圓運動の場合に應用すれば、ホドグラフ (第一七圖) は半徑 v なる圓となり、 $P_1P_2/cp_1 = P_1P_2/OP_1$ なる比例式より直ちに $P_1P_2 = r = v^2/a$ なるを知る。

第一七圖



一般に曲線運動に於て (第一四圖) Q を移動して P に接近せしむれば、兩つのベクトル PR と QT とは殆ど相等しく從つてベクトル ST は速度の方向に垂直となる。今 (第一四圖) P と Q を過り速度に垂直なる線即ち法線 PO と QC とを引く時は PQ は曲線の弧なるを以て必ず一点 C に於て會すべし。 Q を移して P に合せしむるときは PC は P 点に於ける曲率半徑となり、 C は曲率中心となる。 r を以て曲率半徑を示すときは、此の瞬時に於て質点 P は C を中心とし r を半徑として等

速圓運動をなすものと見るも不可なし。依て求心加速度は v^2/r となること圓運動に於けるが如し。又 P の運動が變速運動なるときは切線の方に於ても所謂切線加速度 tangential acceleration なるものを有す。此れに上述の求心加速度を加ふれば、此兩者は即ち曲線運動の加速度を盡したるものなり。

求心加速度式の變形は次の如し。一般曲線運動の場合には

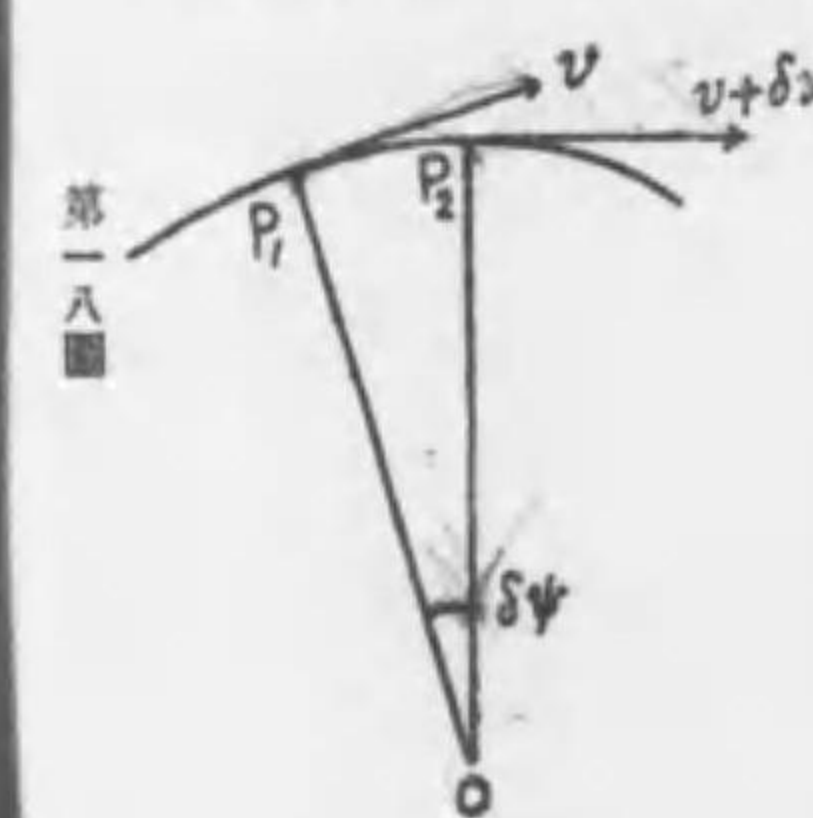
$$\frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

又等速圓運動の場合には

$$\frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \omega^2 r = (2\pi)^2 r \dots\dots\dots (14)$$

爰に ω は曲率半徑が單位時間毎に畫く角にして、角加速度は $d\omega/dt$ 又は $\dot{\omega}$ を以て之を示す。

曲線運動の兩つの加速度を解析にて誘導するは難事にあらず。今 (第一八圖)



第一八圖

接近したる二点 P_1 と P_2 は t と $t+\delta t$ に於ける位置とす、 P_1 と P_2 に夫々法線 P_1O と P_2O とを引き其夾角を $\delta\phi$ とし、 P_1 に於ける速度を v (又は s)、 P_2 に於ける速度を $v+\delta v$ とす、 δt なる時間に於て P_1 の切線速度 v は $v+\delta v$ に變ず、從て切線加速度は dv/dt 即 \dot{v} なり。次ぎに P_1 に於ては法線の方向には速度=0 けれども、 P_2 に來らば法線の方向に $v\delta\phi$ の速度生ずることは、

二つの切線の夾角が亦 $\delta\psi$ に等きを考ふれば明かなり。故に法線の方向に於ける求心加速度は $v\delta\phi/\delta t$ となるべし。依て切線加速度と求心加速度 (又は法線加速度 normal acceleration) とは夫々

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}, \quad v \frac{d\phi}{dt} = v \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{r} \dots\dots\dots (15)$$

となる。何となれば $d\phi/dt$ は切線の角速度に等く、曲率半徑 r と $d\phi$ なる微分角との積は ds なる微分弧に等きがゆへなり。

22 弦運動 等速圓運動を圓徑上に正射影したるものを弦運動 harmonic motion

と名く。此は變加速直線運動の好例なり。P 点は (第十九圖) $t=0$ の時 A 点を出發して矢の方向に等速圓運動を營み t の時 P に来る。圓徑 BB' を OA に垂直に引き、P より垂線 PM を下せば、垂脚 M は弦運動をなす。M は $t=0$ の時 O を出發し B に至りて引返へし O を過りて B' に至り、次で上方に歸る。 OB 又は OB' を振幅 amplitude と稱し a を以て之を示す。週期は圓運動の週期に等しく T を以て之を示す。圓運動の一定角速度を ω とすれば、 $\angle AOP = \omega t$ 。從て、 OM 即ち M 点の變位 displacement を y にて示せば、 $OM = OP \sin \angle POA$ より

$$y = a \sin \omega t = a \sin \frac{2\pi t}{T} \dots \dots \dots (16)$$

を得べし。斯く變位角は $2\pi t/T$ の正弦 (又は餘弦) を以て表はすことを得るが故に弦運動の名稱起れり。

M 点の速度は P の速度を圓徑に正射影したるものなり。速度 PQ を圓徑に平行なる RQ と垂直なる PR とに分解すれば、 RQ は正射影にして M 点の BB' 線上に於ける速度に相當す。然るに $\angle PQR = \angle POA$ にして圓周上の P の速度は $2\pi a/T$ なれば、弦運動の速度 v は

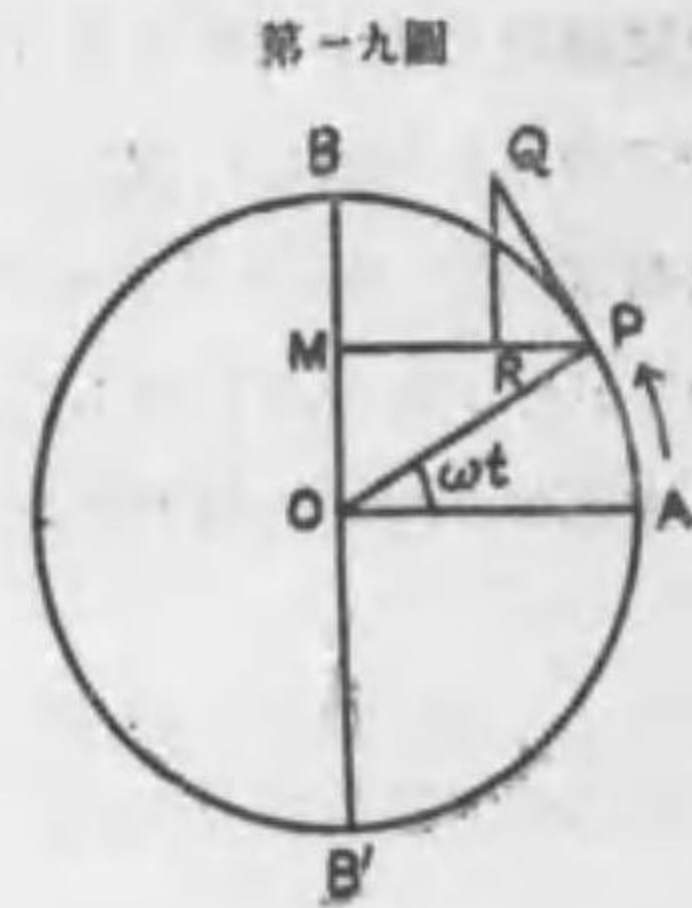
$$v = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \dots \dots \dots (17)$$

によりて與へらる。M 点の加速度を知るには圓運動の求心加速度 $(\frac{2\pi}{T})^2 a$ を BB' 上に正射影すれば可なり。假に PO 線を求心加速度の α とすれば、其分立 α トル PM, MO の内ち MO のみは弦運動の加速度に相當す、即ち

$$\gamma = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

なり、負號は M 点の加速度が起點 O に向へることを示す。上に得たる三式中第一第三より

$$\gamma = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y \dots \dots \dots (18)$$



第十九圖

なる關係式を得。故に弦運動の加速度は起點に向ひ (求心加速度)、且つ變位に正比例するものなり。逆に此二個條の性質を具備せる運動は直ちに弦運動と見做して可なりとす。

(17) (18) 兩式は (16) 式を t に就き微分することに依て得らる。

總じて、一定時間 T の後ち質点速度の大きさも方向も元の値に復歸する如き運動を週期運動 periodic motion と名く。等速圓運動又は弦運動の如きは週期運動なり。

23 合成弦運動 合成弦運動に二種あり、第一は同一直線上に生ずる二つ以上の弦運動の組合せなり。第二は二つの互ひに垂直なる (又は斜角なる) 弦運動の組合せとす。先づ第一より説かんに、此種の運動は其儘にては味ひ難きゆへ、振動の方向に垂直に等速運動をなさしむるを可とす。 OA (第二〇圖) を振幅として上下に弦運動す、之を横線 OT に沿ふて等速に移動せしめ、 $O, T/12, 2T/12, 3T/12$



第二〇圖

$\dots \dots$ を其位置と定め、其諸点を過りて OT に垂線を引き、 OA を半徑として補圓を書き、

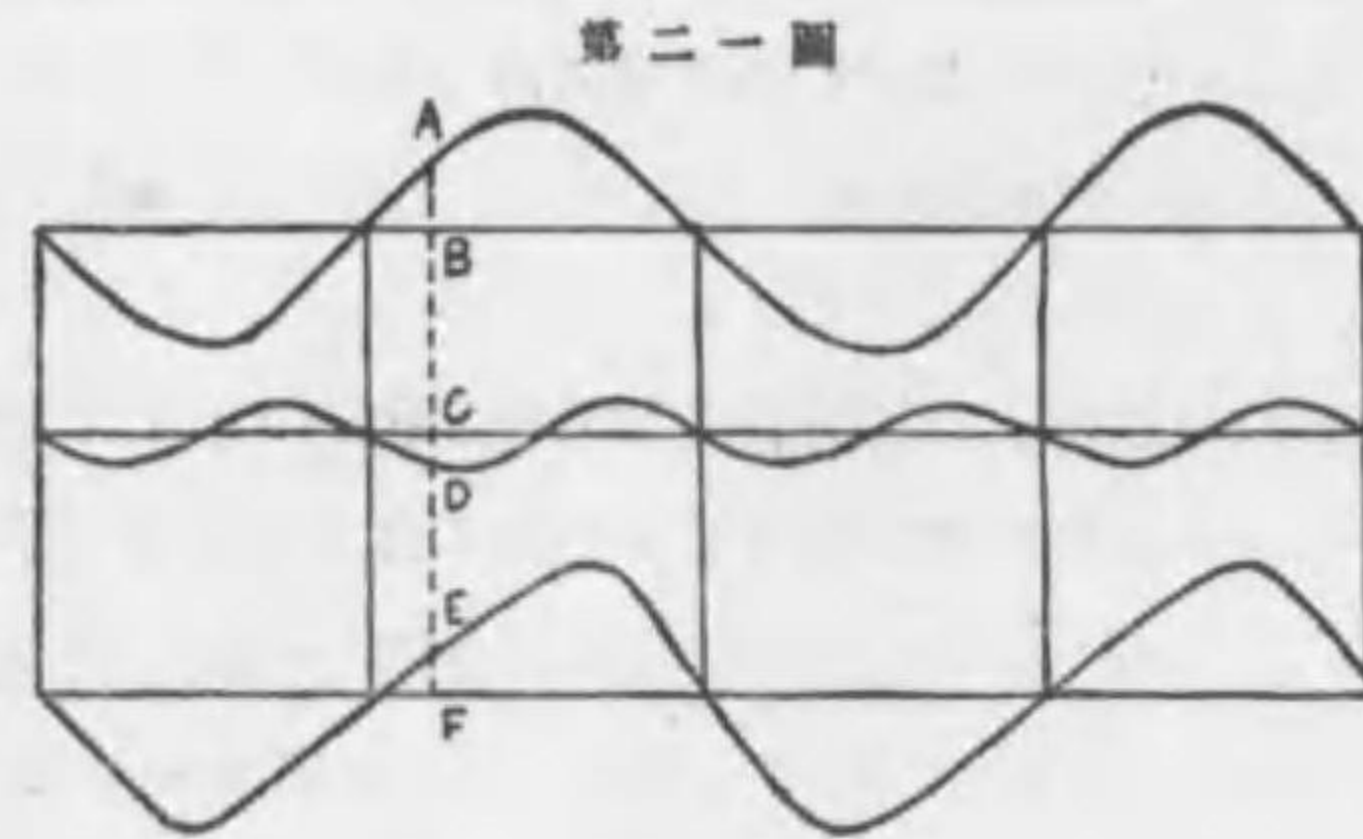
圓周を任意に等分し (此圖に於ては十二等分) 各等分点を過りて OT に平行線を引くべし。斯くて生じたる網目の對角を連ぬれば弦曲線 harmonic curve を得べし。此方法に基き二つの弦運動

$$y_1 = a \sin \omega t$$

$$y_2 = \frac{1}{2} a \sin 2\omega t$$

の合成 $y = y_1 + y_2$ を求むるには、各式に該當する弦曲線を引き、各時刻に就きて變位の代數的和を求むれば可なり、第二一圖の如し。例へば CD は負數なるゆへ $EF = AB - CD$ とするが如し。

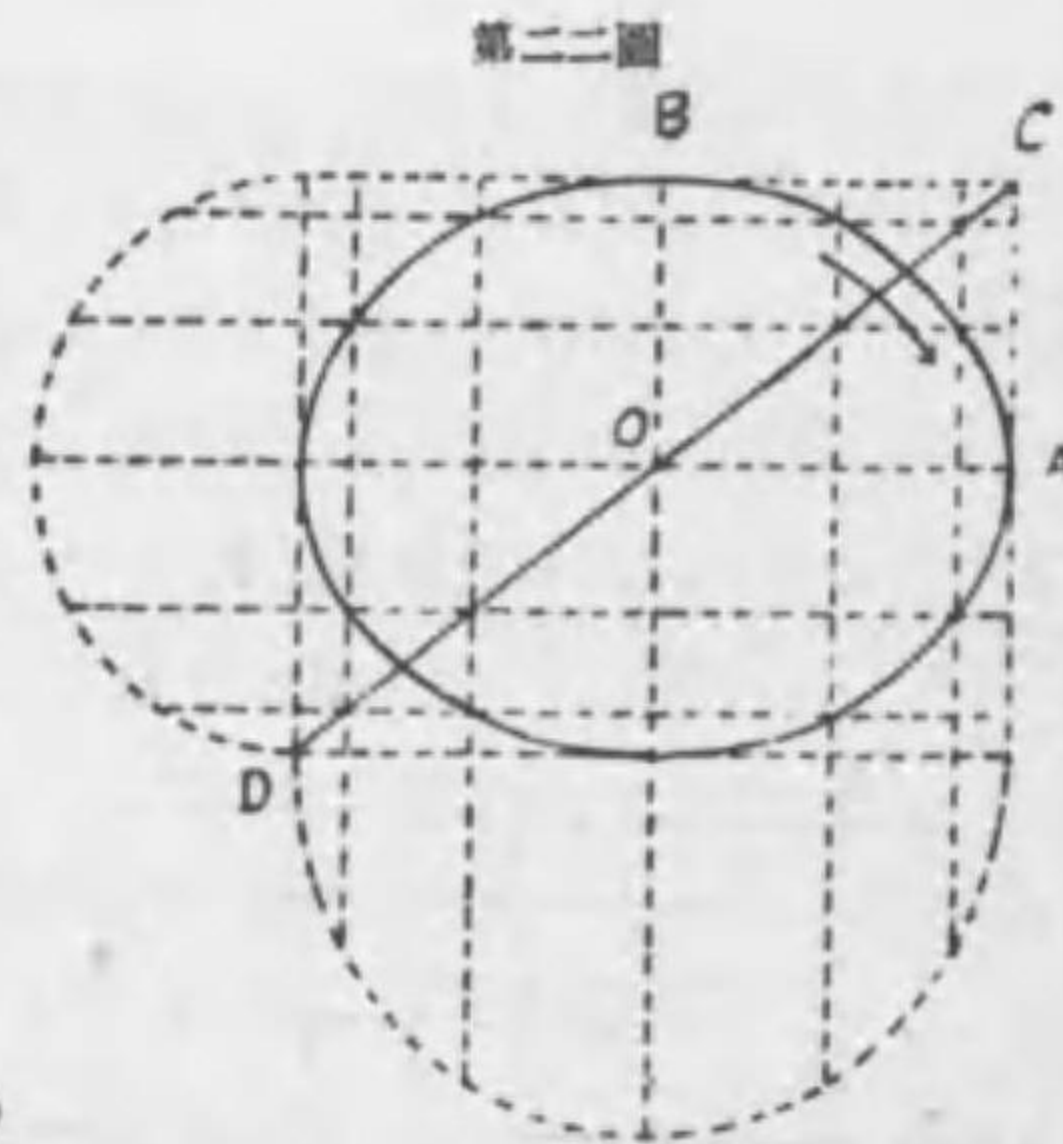
互ひに垂直なる二つの弦運動を組合すには (第二二圖) 振幅 AO, OB を半徑として補圓を書き、各圓周を任意に等分し、各等分点を過りて OA, OB に平行



$$y_1 = a \sin \omega t$$

$$y_2 = \frac{1}{4} a \sin 2\omega t$$

$$y = y_1 + y_2$$



線を引き、網目の対角線を連ねべし。今横線上の変位を x とし縦線上の変位を y とし兩運動同時に始まるものと假定せば、式は $x = a \sin \omega t$ 及 $y = b \sin \omega t$ となり、合成運動は CD 線上の弦運動となる。即ち兩式を平方して加れば

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \omega t$$

を得、 $\sqrt{x^2 + y^2}$ は變位にして $\sqrt{a^2 + b^2}$ は振幅なり。又道の方程式は兩式の商より

$$y = \frac{b}{a} x$$

なる直線を得べし。

横振動が $T/4$ 時間遅れて初まる場合には、式は

$$x = a \sin \frac{2\pi(t - \frac{T}{4})}{T} = -a \cos \frac{2\pi t}{T} \dots (19)$$

$$y = b \sin \frac{2\pi t}{T} \dots (20)$$

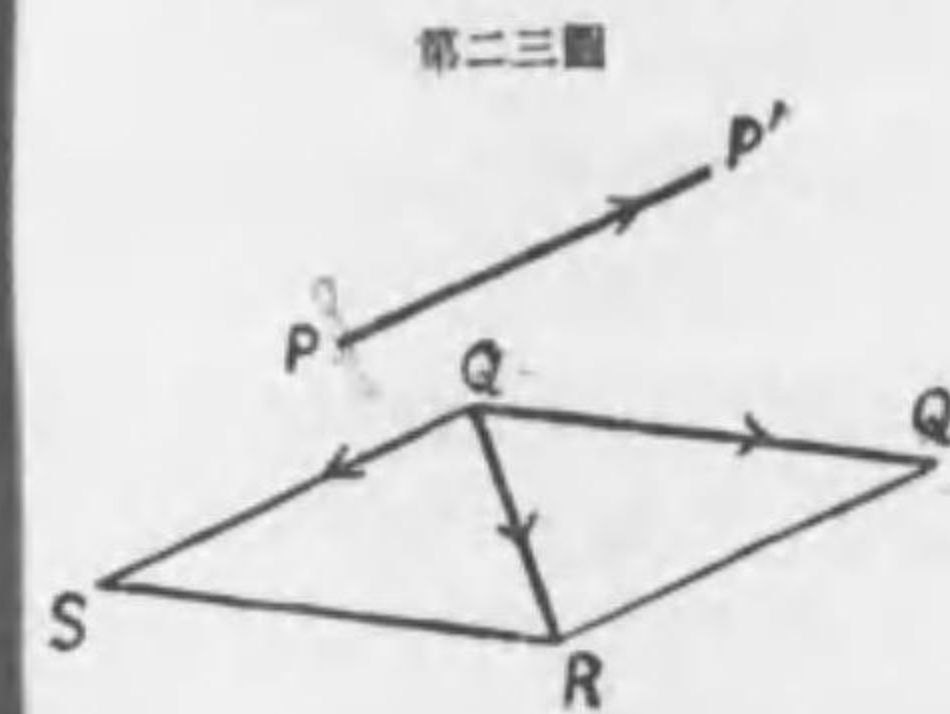
となるゆへ、矢の方向に回轉する楕圓を書く。之に反し縦振動が $T/4$ 遅るゝ場合には矢に反對なる方向に楕圓を書く。解析的には上二式の平方を加ふれば

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

なる楕圓方程式を得べし。依て此種の運動を楕圓弦運動 elliptic-harmonic motion

と稱す。最初 (16) 式に於て説きたる弦運動を合成弦運動に對して單一弦運動 simple harmonic motion と稱することあり。又 (19) (20) 式に於て角を位相 phase と稱す、位相は t と共に變ず (即ち t の函數なり)。

24 相對運動 全く静止せる空間を假想し、其空間内(第二三圖)に於て P は



PP' を動き Q は QQ' を動くときは PP' 及 QQ' は夫々 P, Q 兩点の絕對運動 absolute motion と稱せらる。今 Q は静止せるに、P のみ PP' を動くと假定すれば、P 点に立脚地を有する觀察者より觀れば Q は却て逆行して QS を書く如く見ゆべし。爰に SQ は PP' に等しく且つ平行なり。之

を P より視たる Q の相對運動 relative motion と稱す。次に P が PP' を書くと同時に Q も QQ' を書くと假定する場合には、前述の理に依り Q は既に QS を動く如く視ゆる筈なるを以て、之に QQ' なる運動加はりて、Q は兩ベクトル の和なる QR を書く如く視ゆ。故に P より視たる Q の相對運動は QR となる。一般に次ぎの如く考ふべし。

P に立脚地を有する Q の相對運動は Q の絕對運動と P の絕對運動の逆との合成運動なり。

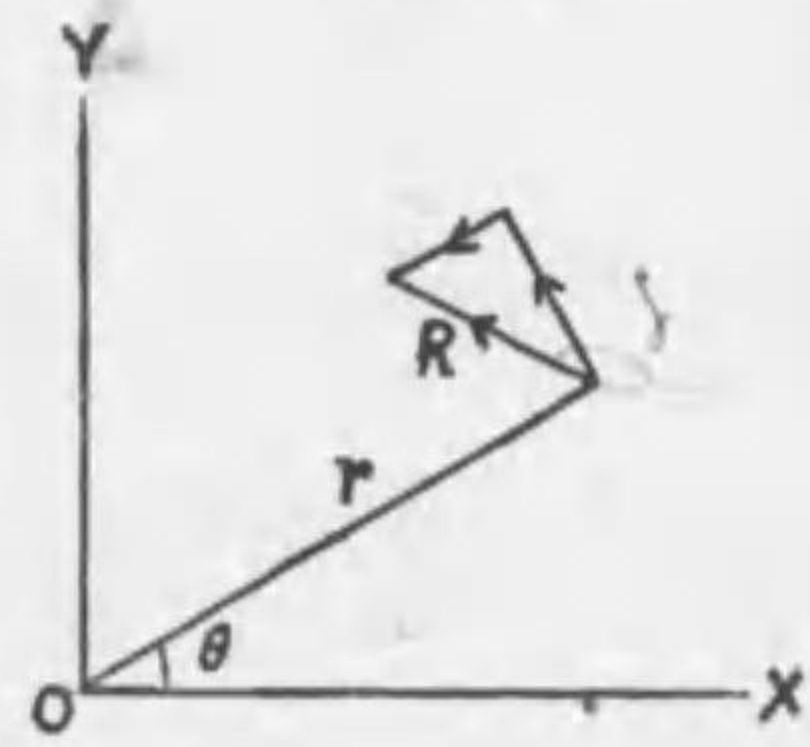
即ち兩点の運動に PP' の逆を加ふれば P は静止に歸し、Q は相對運動を營む。

上記の原理に基き絕對速度より相對速度を算出すること容易なり。即ち第二三圖を平面圖形と見れば、其平面内の任意の一点 O を起点として互ひに垂直なる OX, OY の二軸を引き、P の速度を二軸の方向に分解したるものを夫々 u_1, v_1 とし Q の速度の分解を夫々 u_2, v_2 とするときは P より見たるとき Q の相對速度の分解は夫々 $u_2 - u_1, v_2 - v_1$ となる理なり。

25 コリオリ加速度 一つの直線は其一端を固定しつゝ等速に回轉し、一つの質点は其線上に等速運動をなすときは、質点は直線に沿ふて求心加速度を有する

のみならず、亦直線に垂直なる方向に於ても一種の加速度を生ず、之を コリ

第二四圖



オリ 加速度と名く (Coriolis 1835)。今此を説かんがために (第二四圖) 固定点 O を起点として互に垂直なる二軸を引き、直線が X 軸となす角を θ とし、質点と起点との距離を r 質点の等速度を v 直線の等角速度を ω とするときは、先づ $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ より之を時間 t に就き微分して $\dot{x}=\dot{r} \cos \theta-r \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \dot{y}=\dot{r} \sin \theta+r \cos \theta \cdot \dot{\theta}$

なる分立速度を得、爰に $\dot{r}=v, \dot{\theta}=\omega$ は各々常數なり。此兩式を更に t に就き微分すれば

$$\ddot{x}=-2 \dot{r} \sin \theta \cdot \dot{\theta}-r \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 \quad \ddot{y}=2 \dot{r} \cos \theta \cdot \dot{\theta}-r \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2$$

なる分立加速度を得。今合成加速度を R とし、 R が X 軸となす角を δ とすれば

$$R \cos \delta=\ddot{x}=-2 v \sin \theta \cdot \omega-r \cos \theta \cdot \omega^2$$

$$R \sin \delta=\ddot{y}=2 v \cos \theta \cdot \omega-r \sin \theta \cdot \omega^2$$

又 R 及び δ を知らんと欲せば (1) (2) 兩式によりて求め得べし。今 R を分解して r 線に平行なるものと、垂直なるものとを得るには、次の如くすべし。 R が直線 r とす角は $\delta-\theta$ なるを以て、 r に平行なる分立加速度は $R \cos (\delta-\theta)$ 即ち $R \cos \delta \cos \theta+R \sin \delta \sin \theta$ を得。又 R に垂直なる分立加速度は $R \sin (\delta-\theta)$ 即ち $R \sin \delta \cos \theta-R \cos \delta \sin \theta$ を得、依て之に代入すれば r に平行なるものは

$$\ddot{x} \cos \theta+\ddot{y} \sin \theta=-r \omega^2 \dots \dots \dots (21)$$

なる求心加速度となり (14) 式の値と同一のものを得、而して r に垂直なるものは

$$\ddot{y} \cos \theta-\ddot{x} \sin \theta=2 v \omega \dots \dots \dots (22)$$

を得、此を コリオリ 加速度となす、即ち直線回転速度に直線上の速度を乗じたる積の二倍なり。

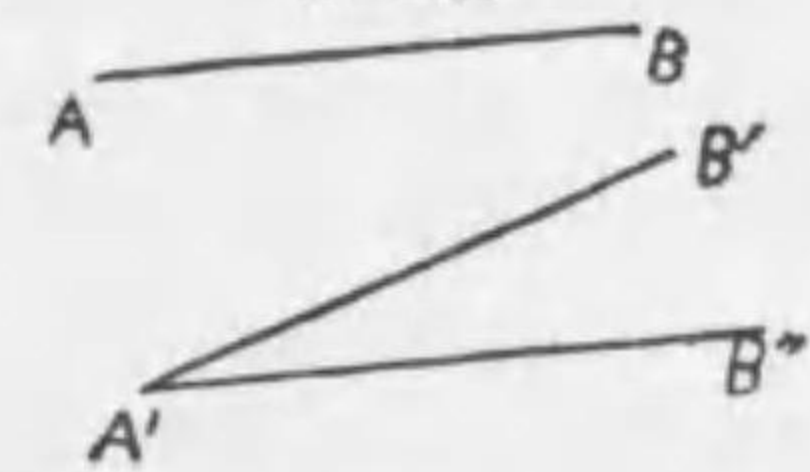
26 剛 體 相互距離及び相互の位置關係を決して變更せざる質点の集合体を

名けて剛体と稱す。剛体は如何なる場合に於ても膨脹、收縮、撓屈、振盪等の變形を呈すること無し、故に變形を來たすべき原因を追究するを須わらずして剛体運動の研究を簡易ならしむべし。

27 平面運動 剛体の運動が常に同一平面内に限らるゝ場合即ち平面運動 coplanar motions より説始めんとす。剛体は其形状不變なるを以て剛体内の二定

点を結び付くる直線は曲ることなく、其長さに於ても不變なり、従て此直線の運動を記述するのみにて剛体全部の運動を諒知するを得べし。今剛体變位の結果として直線 AB は $A'B'$ の位置に變位したりとせよ (第二五圖)、 A' を過り AB に平行に且つ等しく $A'B''$ を引くときは、 AB は舊位置に平行に動きながら $A'B'$ の位置に達し、然るのち角 $B''A'B'$ を回轉して、遂に $A'B'$ の位置に來るものと考ふるも不可なし。

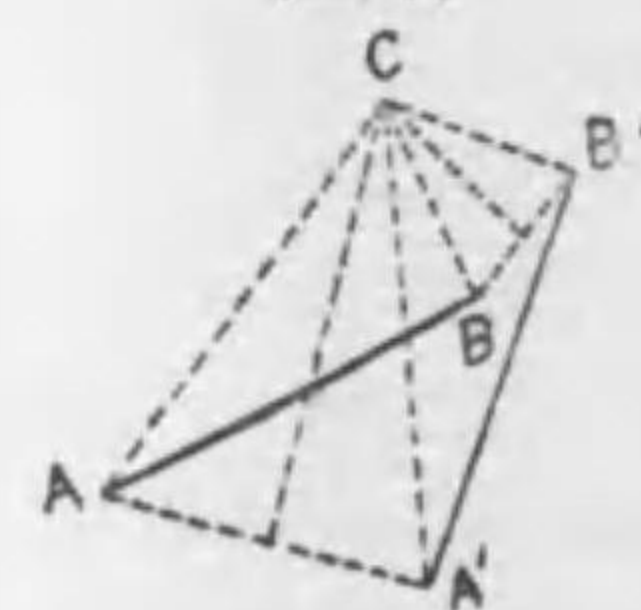
第二五圖



即ち AB は先づ $A'B''$ まで並動 translation し次に $\angle B''A'B'$ を回轉 rotation するものと、二種運動に分解して考ふるなり。或は回轉を先にし並動を後にするも不可なし。

變位を並動と回轉の二つに分解せずして、單に回轉のみによりて説明することを得べし。(第二六圖) AB が $A'B'$ に變位したる場合には AA', BB' を結び夫々之を二等分して、等分点より垂線を立つときは C にて會するとせよ、然ら

第二六圖

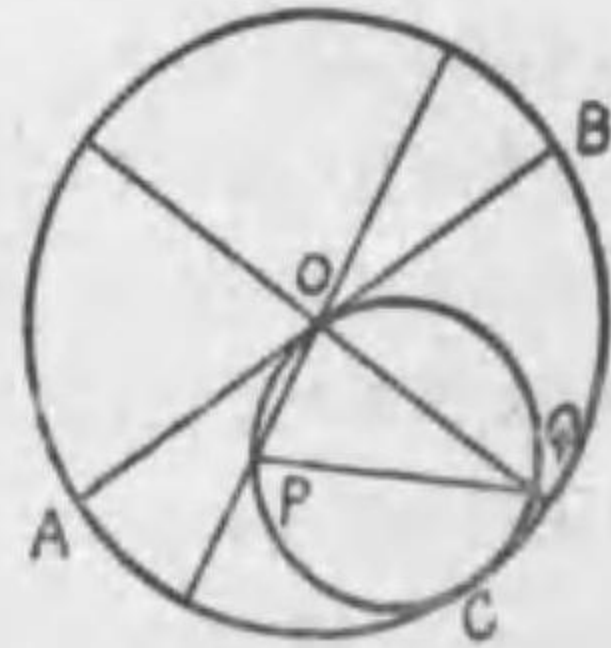


ば C を中心として剛体を回轉すれば AB は $A'B'$ に來ることを得べし。證明、 CA, CB, CA', CB' を結ぶときは $CA=CA', CB=CB'$ なる故三角形 ABC と $A'B'C$ は全く相等しく、 C を中心として $\angle ACA'$ を回轉せしむれば AB は $A'B'$ に來るべし

元位置 AB と新位置 $A'B'$ との距離が無限に小さき場合に於ても (即ち無限に小さき變位の場合にも) 尙ほ中心 C は AB より有限なる距離の處にあるべし。此場合には C を瞬時の中心 instantaneous centre と名く。 AB が無限に小さき變位を無限に多く積み重ねて遂に $A'B'$ に來りたる場合を考ふるに、各小變位を行ふ毎に中心 C は移行

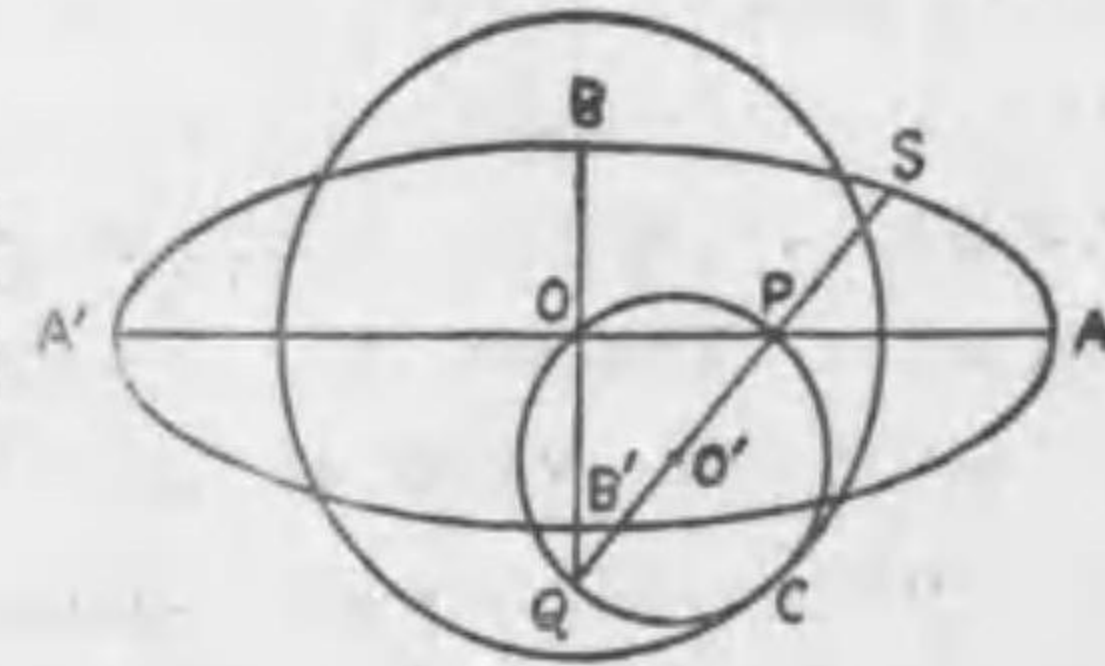
して軌跡を畫くべし、之を心跡 centroid と稱す。心跡に二種あり一は即ち剛体内に畫くものにして之を剛体心跡 body centroid と云ひ、二は空間内に畫くものにして之を空間心跡 space centroid と云ふ。空間心跡は空間に固定し（爰にては平面内に固定すと考ふ）剛体心跡は剛体内に固定して剛体と共に運動す。其運動の状は、剛体心跡は常に空間心跡に切し（一点を過り兩曲線に共通なる切線を引くことを得るときは兩曲線は互に切すと云ふ）つゝ固定不動の空間心跡に沿ふて切轉す（切轉 roll とは滑ることなくして、切点は常に兩曲線上に同長の弧を畫くを云ふ）。故に兩曲線相切する点は即ち瞬時中心なり。

第二七圖



例へば空間心跡は（第二七圖）OC を半徑とする圓にして剛体心跡は OC を直徑とする圓なる場合を考へん。小圓は大圓の内側を切轉する故へ OC に垂直に直徑 AOB を小圓に切線に引けば、剛体内の一点 O は空間に於て AOB を畫くべし、何となれば弧 AC は弧 OPC に等しければなり。小圓周上の一点 P の運動は如何にと云ふに、今 C を瞬時中心として切轉しつゝあるゆへ、P の運動の方向は PC に垂直にして大圓の中心 O に向ふなり。斯の如く P の軌跡は空間に於ては PO なる直徑となるべし。同理により小圓周上 Q 点の軌跡は OQ なる直徑となる、然るに OP, OQ 二線は空間内に固定し、PQ 線は剛体内に固定して其長さ不變なり、故に此運動は OP, OQ なる二定線上に兩端を有する棒の運動に等しきものなるを悟る。

第二八圖



圓周上にあらざる一点 S の軌跡を知らんとせば（第二八圖）小圓の中心 O' を過りて直線 SPQ を引き OP, OQ を結ぶときは $\angle POQ$ は直角なり、定長の棒 PQ は互に垂直なる二直線 OP, OQ 上に兩端を有しつゝ運動するものと考ふことを得。故に PQ が OP 線と合するときは S は A 又は A' に來り、OQ 線と合するときは B 又は B' に來りて、S の軌跡は半軸 OA, OB なる橢圓

となるを見る。SP=p とし QP=R とすれば離心率 e は

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{R+p}\right)^2}$$

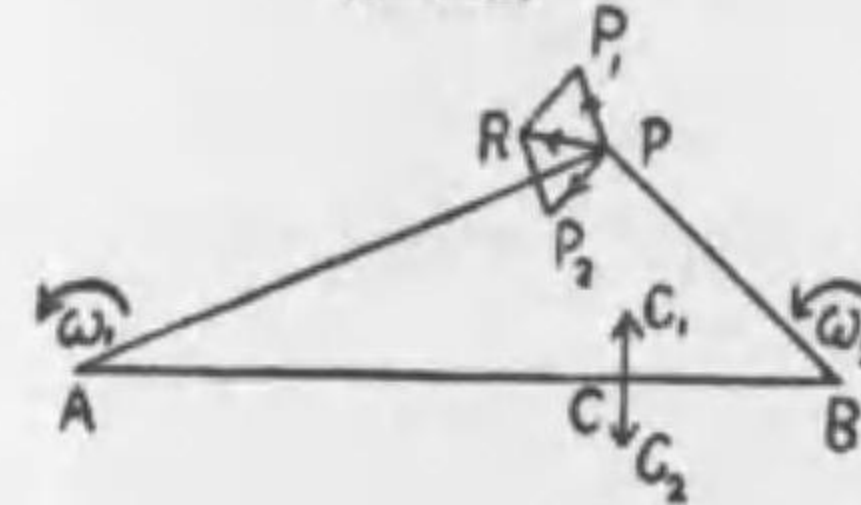
となるを見る。SP=p とし QP=R とすれば離心率 e は

によりて與へらる。此場合に於て C は S の瞬時中心なれども S 点に於ける橢圓の曲率中心は C にあらざることを注意すべし。

28. 平面運動の角速度 剛体が平面内に回轉するとき其中心を過り平面に垂直なる線（法線 normal）を立て其長さを回轉角速度の數値に等しからしむるときは、其線は角速度のベクトルなり。剛体若し反針回轉をなせばベクトルは圓形面より上方に向へども、從針回轉なるときは下方に向ふ。

平面運動にありては角速度のベクトルは悉く圓形面に垂直をなし、從て互に平行なり。二つ又は二つ以上の角速度の合成は各角速度の代數的和にして、合成中心の位置を定むる法は平行力の合力の作用の点を定むると同一なり。今（第二九圖）剛体が A, B を中心として夫々 ω_1, ω_2 の角速度を以て回轉するときは、

第二九圖

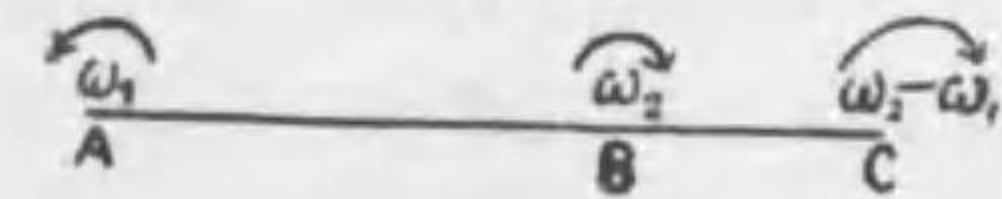


AB 上に在らざる一点 P は ω_1, ω_2 のために夫々 PP_1, PP_2 の變位をなすゆへ合成變位 PR となる、而して $\angle P_1PP_2$ は必ず二直角よりも小なるゆへ PR は零となる能はず。PR が消ゆる要件は P が AB 上にあるときに限る。例へば C 点は ω_1 と ω_2 のために

夫々 CC_1, CC_2 の變位をなすを以て $\omega_1 \cdot AC = \omega_2 \cdot BC$ なるときは C の速度は零となる、即ち C は回轉の合成中心にして合成角速度は $\omega_1 + \omega_2$ なり。故に中心の位置を求むる法は平行力の合力が作用する点を求むると一般なり。

上理により多くの角速度の合成は其代數的和に等しく、中心は合力の着力点の位置と同一なり。角速度の方向反對なる場合、例ば ω_1 は正にして ω_2 は負なるときは（第三〇圖）、合成中心は AB

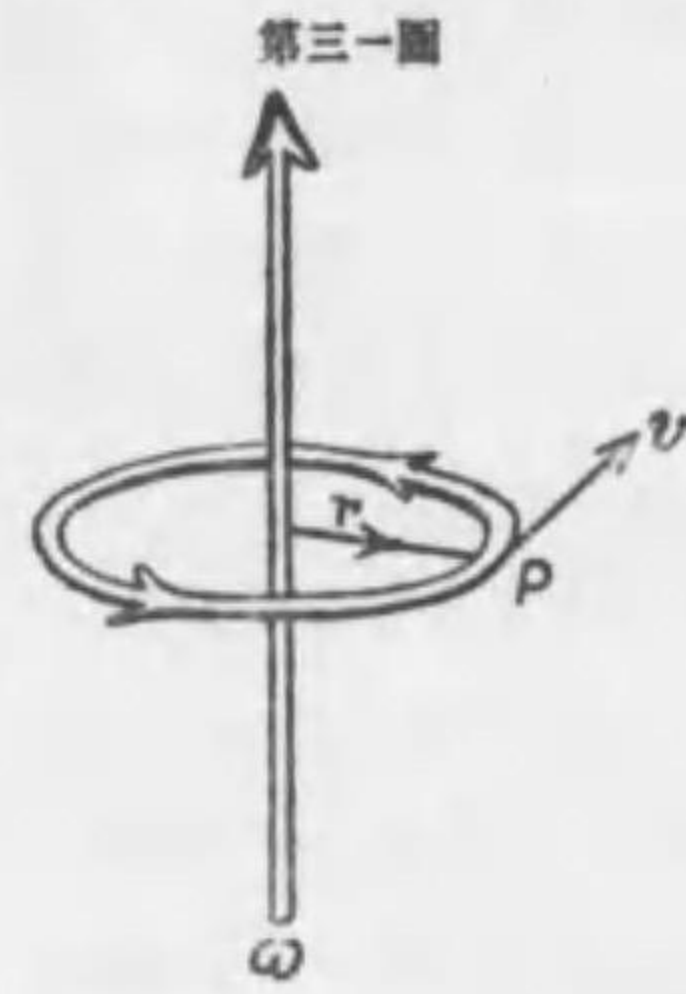
第三〇圖



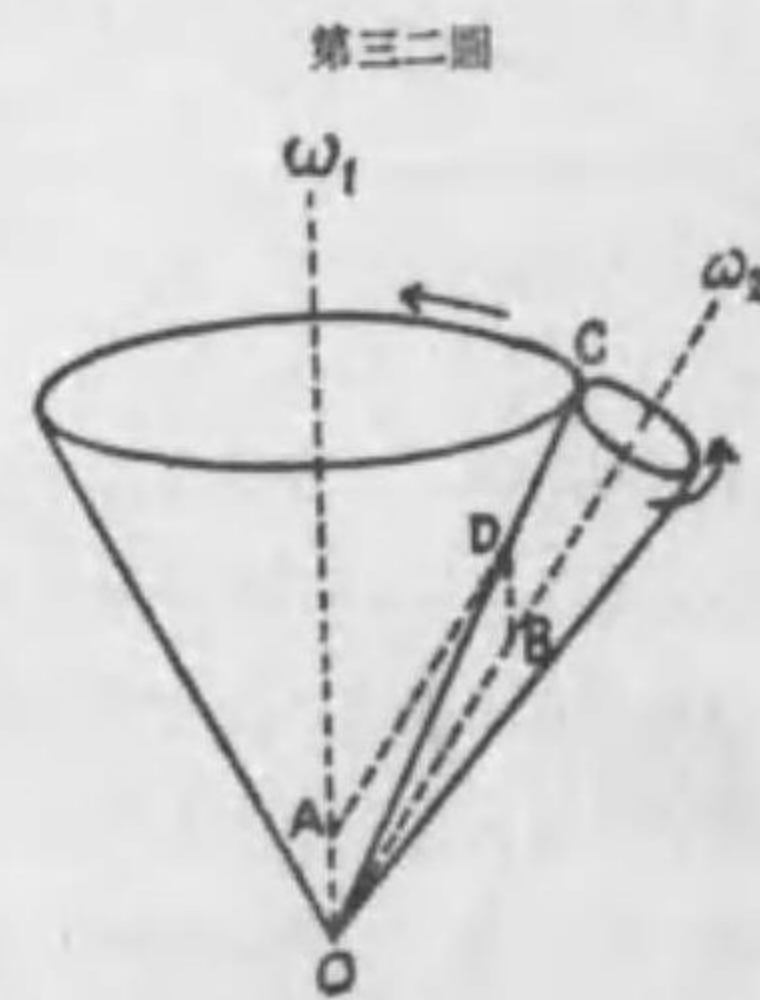
の延長上に在るべし、假に ω_2 の數値 ω_1 よりも大なるときは合成中心は C

にありて $\omega_1 \cdot AC = \omega_2 \cdot BC$ となり、角速度は $\omega_1 - \omega_2$ なるゆへ從針的に $\omega_2 - \omega_1$ の角速度にて回轉す

29 回 轉 軸 剛体が空間に於て回轉するときは剛体内の諸点中運動せざるものは回轉軸 axis of rotation と稱する一つの直線上に並列すべし、自餘の点は何れも圓運動をなす。今 P (第三一圖) を軸上に在らざる一点とし、軸に垂線 r を下だし、 ω を角速度とすれば、P 点の速度 v は ωr に等しく、 ω, r, v の三ゴクトルは右旋の順序を形成す。

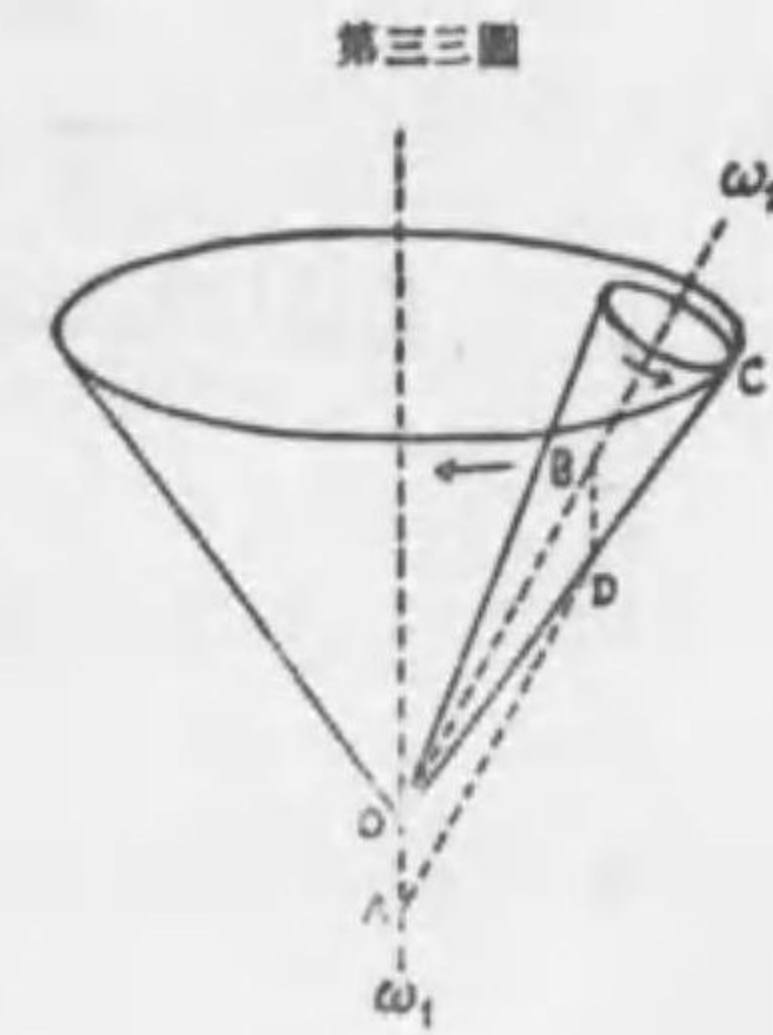


空間に於ける剛体の運動も平面運動の如く瞬時軸 instantaneous axis のグルリを回轉する運動と見做すことを得べく、従て瞬時軸の軌跡は剛体内には剛体軸跡を書き、空間内には空間軸跡を書くを以て、剛体の一般運動は空間に固定せる空間軸跡の上を剛体軸跡が切轉するものと考ふることを得べし。而して軸跡は何れも展開面 developable surfaces と稱する曲面の種類に屬し、二つの展開面は互に其母線 generating line に沿ふて相切するものとす。今軸跡の簡易なる例を取らんには獨樂の運動を熟考すべし。獨樂が反針自轉をなすときは、獨樂の軸も同じく反針的に回轉するは皆人の知るところなり。故に空間軸跡は軸を鉛直に保つところの直圓錐体 (第三二圖) となり、剛体軸跡は其外側に切轉する直圓錐体となり、小圓錐体は自轉しながら同方向に大圓錐体を周行すべし。其時の角速度は $OA = \omega_1, OB = \omega_2$ を隣邊となせる平行四邊形の對角線 OD によりて與へらる、今 $\angle AOD = \alpha, \angle DOB = \beta$ と置けば OD なる合成角速度の大きさは $\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \cos \beta$ なり。



地球軸の歳差運動 precessional motion に於ては自轉、回轉の方向相反するを以て軸跡は第三三圖の如く、剛体軸跡は母線 OC に沿ふて内側を旋轉す。 $OA = \omega_1, OB = \omega_2$ の合成は對角線 OD に等しく、其値は前式に依りて得らる、但し $\cos \alpha$ は負數なり。

30 自由の度 少しも拘束を受けざる質点は上下左右前後の三方向に動くことを得べし、其他の方向に動くことを得べきは明かなれども尙ほ前記の三方向に分解するを得るなり、故に拘束無き質点は三個の自由の度 degrees of freedom を有する稱せらる。質点若し一つの表面上に拘束せらるゝときは其面上に横はれる二つの互ひに垂直なる方向に動くを得るを以て、自由の度は二なり、又一つの線上に拘束せらるゝときは自由度は一に減ぜらる。剛体の場合には上記三様の變位の外かに尙ほ三つの互ひに垂直なる線を軸として回轉し得るが故に、併せて六個の自由度を有す。剛体の一点固定すれば並動は妨げらるゝゆへ、自由度は三となる。二点固定せらるれば此二点を過る線を軸として回轉するに止まる線を以て自由度は一なり。地球、獨樂の如きは全く拘束を受けざるも、一撰んで之を軸となし回轉するも軸は空間に固定せるにあらざ、故に之を放軸と名く。



第二章 力の釣合 EQUILIBRIUM OF FORCES

31 力學 前章に於ては質點の運動を研究したれども未だ運動の原因即ち力に論及せざりしなり。力 force が物体に作用して運動を起し、或ひは力が作用するに拘らず力は互に釣合を得て物体は静止する場合を研究する學科を力學 Dynamics と稱す。又た運動の力學を動力學 Kinetics 釣合の力學を静力學 Statics と名く。

英國に於ては力學は元と Mechanics と稱せしが Mechanism 即ち機械學と混同する恐あるを以て變名せり、然れども歐大陸諸國に於ては今尚ほ舊語を襲用す。

32 剛體 物体は外力によりて必ず多少變形する性を有す、之を彈性と稱す。然るに最初より彈性を加味して力の作用を研究するは煩雜を免れ難きを以て、外力に因りて變形すること無し物體を假想し此を剛體と名け、其剛體の力學より研究を開始するを便宜とす。

33 剛體の同一点に働く力の釣合 等しく且つ互に反對なる二つの力が剛体内の同一直線に沿ふて働くときは剛體は釣合を得べし。此は公理的にして論證し得らるゝものにあらず。唯二力互に等しき故へ右に動く理由無き如く左に動くべき理由も無きなり。又之は實驗的に立證し得べきものにもあらず、何となれば二力等しきが故へに釣合を得るか、果た釣合を得るが故に二力を等しと見做すか、明かならざるを以てなり。

力の附着点 (着力点) point of application

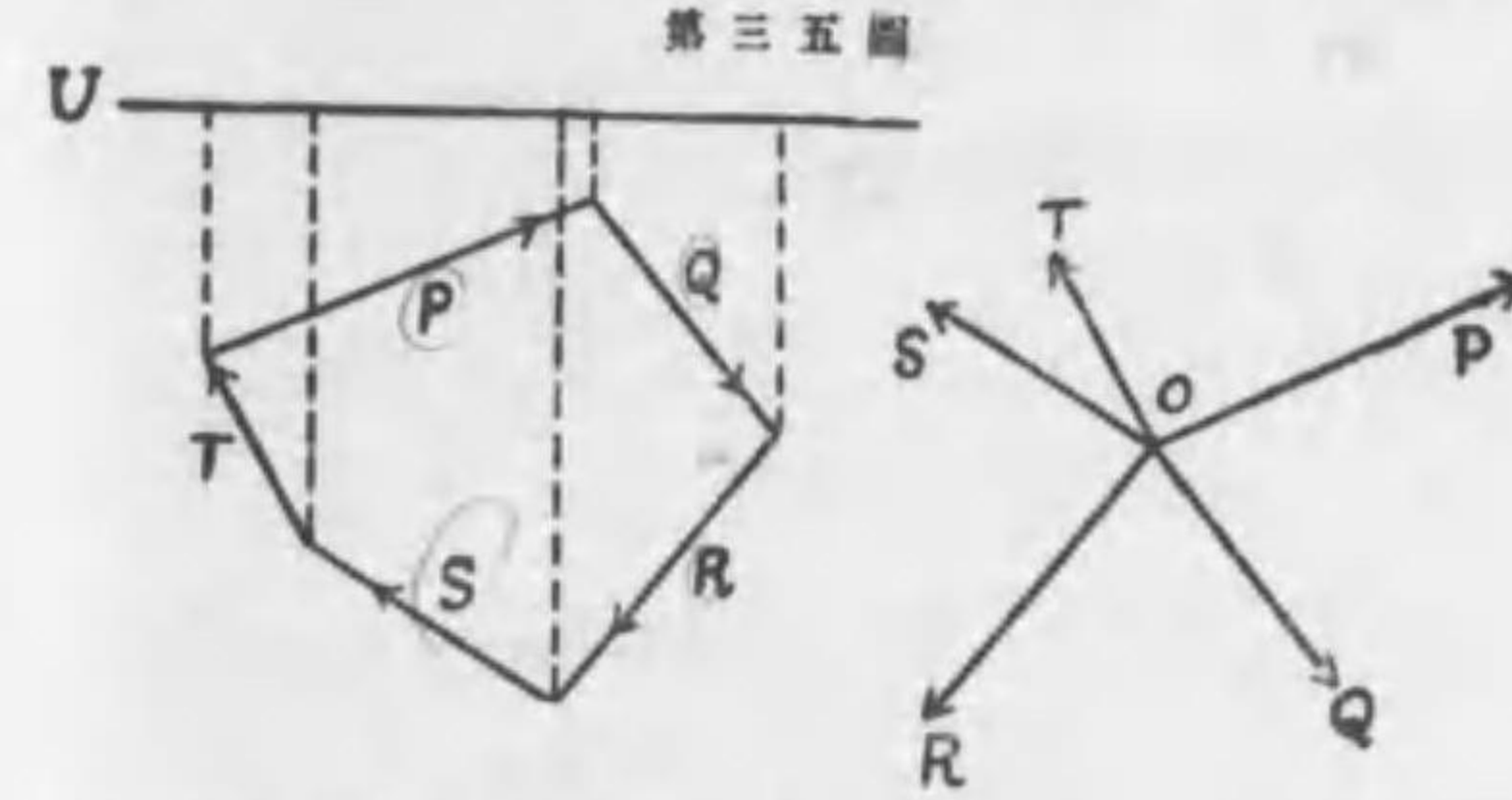
(第三四圖) はベクトルなる力を示す直線上若くは其延長上の任意の点に移すも可なり。何となれば常に同一の反對なる力と釣合を保つを得ればなり。

剛体内の一点に働く諸力が釣合を得る要件は、ベクトルなる諸力の和が零なるに在り。即ち諸力を示すベクトルを(第三五圖)順次相加ふれば其和は零と



第三四圖

なるべし、此を力の多邊形の理 principle of polygon of forces と云ふ。又四力



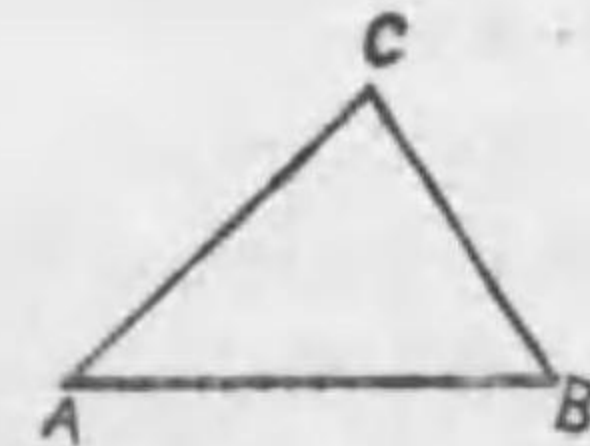
第三五圖

P, Q, R, S の合力 resultant は $-T$ に等し、何となれば合力に T を加ふるも $-T$ に T を加ふるも同しく零を得ればなり。逆に $-T$ なる力は

P, Q, R, S の諸力に分解し此等を分力 components と見做すことを得。ベクトルは圖形に於ては諸力連鎖をなすも、諸力は一点 O に働くものなることを忘るべからず。今力の多邊形を一つの直線 U に正射影して生ずる諸力の合力も亦た零となる、従て同一点 O に働く諸力を同一線 U に正射影して生ずる諸力の合力も亦零となるべし。此理により諸力釣合を得ずして一つの合力を有する時は、諸力を同一直線上に正射影して生ずる力の合力は先きの合力の正射影に等し。

三力釣合を得る場合には三力に等しく且つ平行なる三邊を有する三角形を畫くことを得。第六圖に於て \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} の三力は釣合に在り。又 \overline{AC} は \overline{AB} と \overline{BC} の合力と見ることを得べし。即ち合力は \overline{BC} に等しき \overline{AD} と \overline{AB} とを隣邊とする平行四邊形の對角線に等しく、其値は $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2 AB \cdot AD \cos \angle DAB$ によりて與へられる、之を力の平行四邊形の理 principle of parallelogram of forces (Newton 1687) と稱す。

34 力の能率 剛体内の任意の一点より其の剛体に作用する力(若くは其延長)の上に下だしたる垂線と及び其力との積を、其点に關する静力能率 static moment 或は單に、能率と稱す。力 AB の C 点に關する能率は三角形 CAB 面積の二倍にて示すことを得べし。力の方向反對にして \overline{BA} なる時も能率は同一の數値を有すれども、符號に於て反す。 \overline{AB} が C の周圍を時計に反して counter-clockwise (反針回轉) 回轉するを正と定むれば、 \overline{AB} が時計に従ふて clockwise (從針回轉) 回轉するを負



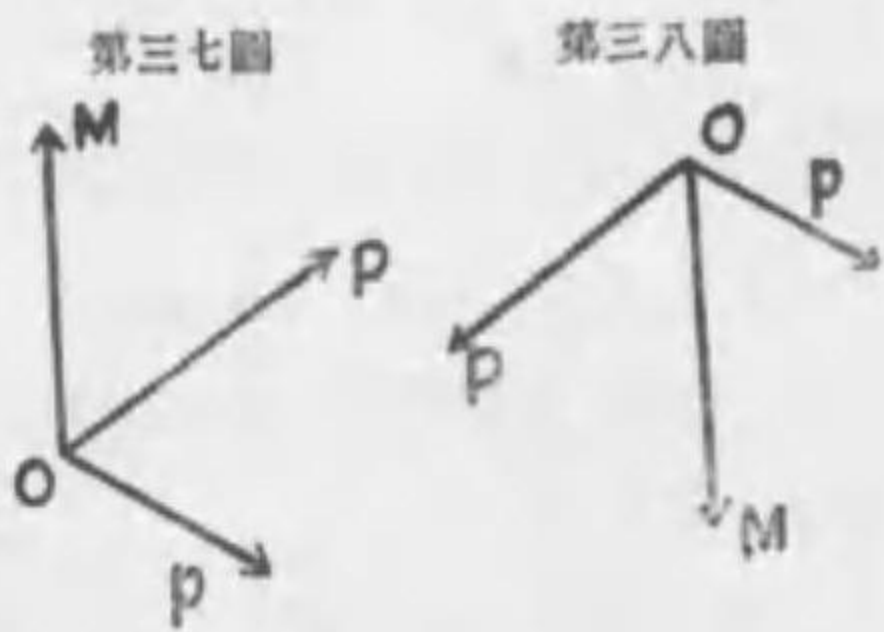
とせざるべからず。ABをPとし、Cより下したる垂線をpとすれば能率はPpなり。

二つのベクトル P, p を夫々 (第三六圖) 分立ベクトル P₁, P₂ 及び p₁, p₂ に分解するときは、

能率は行列式 $\begin{vmatrix} p_1 & -p_2 \\ P_1 & P_2 \end{vmatrix}$ 即ち

$p_1 P_2 + p_2 P_1$ によりて表はすことを得べし。

能率は一つのベクトルにして其方向は第三六圖の圖形に垂直なり。今 (第三七圖) 空間内の一点 O を通り夫々 p, P なるベクトルを互ひに垂直に引き、能率 M を兩ベクトル面に上方に垂直ならしむるときは、p, P, M の三ベクトルは右旋の順序 right-handed rotation に在りと稱せらる、P の方向反対なる時は (第三八圖) 右旋の順序を追へば OM 線は當さに垂直をなすべし。右の手の中点を O に置き



P, p を手の平面内に在らしめ、OM を常に手掌の方向に在らしむるときは、力は常に拇指より子指の方に向て作用するを見れども、上方より俯視すれば、第三七圖は反針回轉をなし (正)、第三八圖は從針回轉 (負) をなす。

剛体内の一点 O (第三九圖) に作用する二力 OA と OB の合力を OR とす。今此三力を直線 U に正射影するときは前記の理により

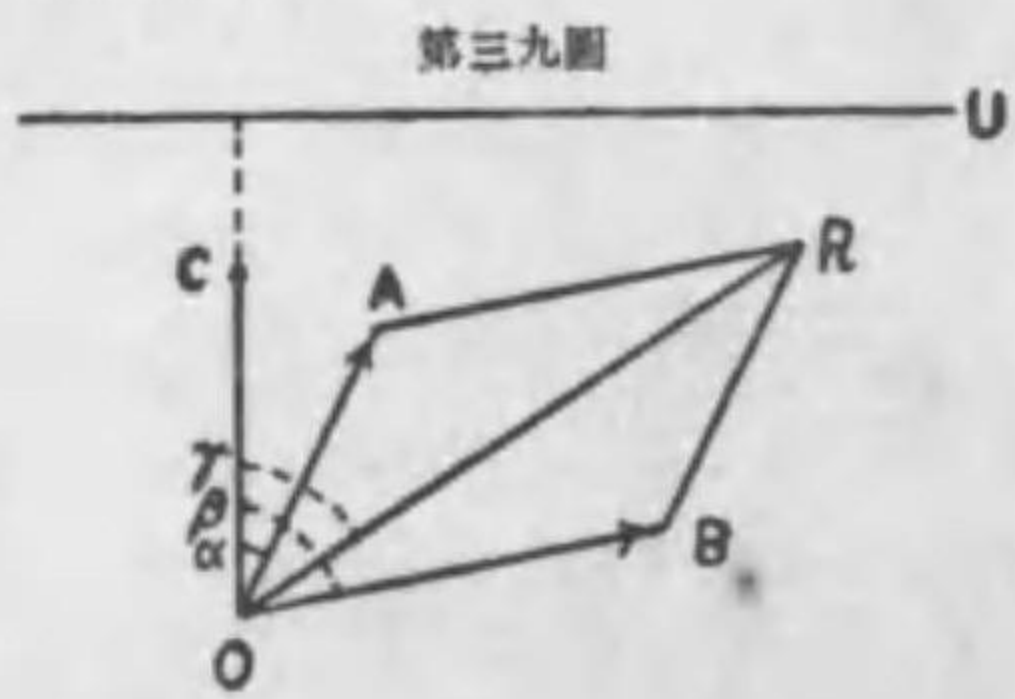
$$OA \sin \alpha + OB \sin \beta = OR \sin \gamma$$

を得、各項に OC を乗ずれば

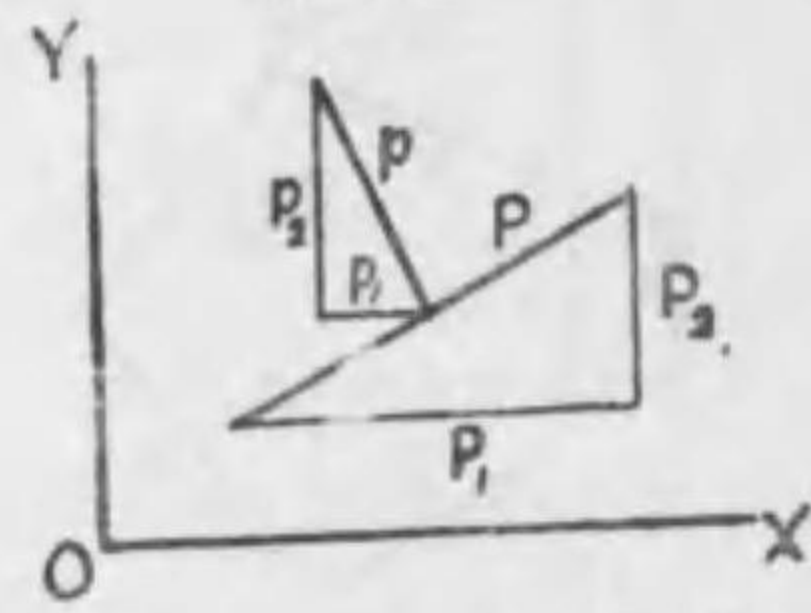
$$2\Delta COA + 2\Delta COB = 2\Delta COR \dots\dots\dots (1)$$

となる。然るに各三角形は夫々 C 点に関する分力或は合力の能率を示すと以て次ぎの定理を得

分力の能率の和は合力の能率に等し。



第三六圖



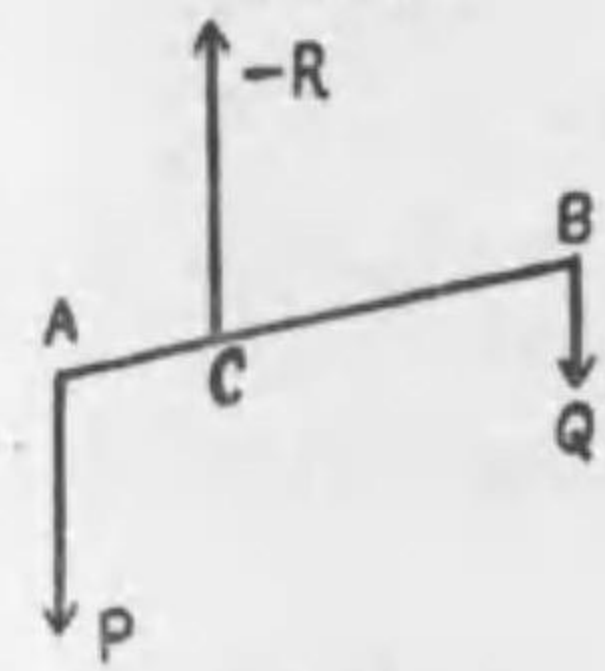
第三七圖

第三八圖

此定理は分力が二つ以上の場合に敷衍することを得べし。

35 平行力 二つの平行力 parallel forces P, Q の (第四〇圖) 合力は直ちに其代数的和 P+Q なるを知る、而して合力の附着点は平行力の中心 centre と稱せらる。中心 C を求むるには C に関する P, Q 二力の能率の和を零と置き、C を通り合力の逆を二つの與へられたる力に平行に作用せしめ、斯くして三力釣合に在る場合を假想すべし。今 C を通り AB を引き、AB, BQ 二線を以て夫々 P, Q 二力を示せば、能率は等しくして反対なるを以て、剛体は正又は負の方向に回轉することなく、又 R=P+Q なるを以て剛体は直線運動をなす能はず。且つ $\Delta APC = \Delta BCQ$ なるゆへ

第四〇圖

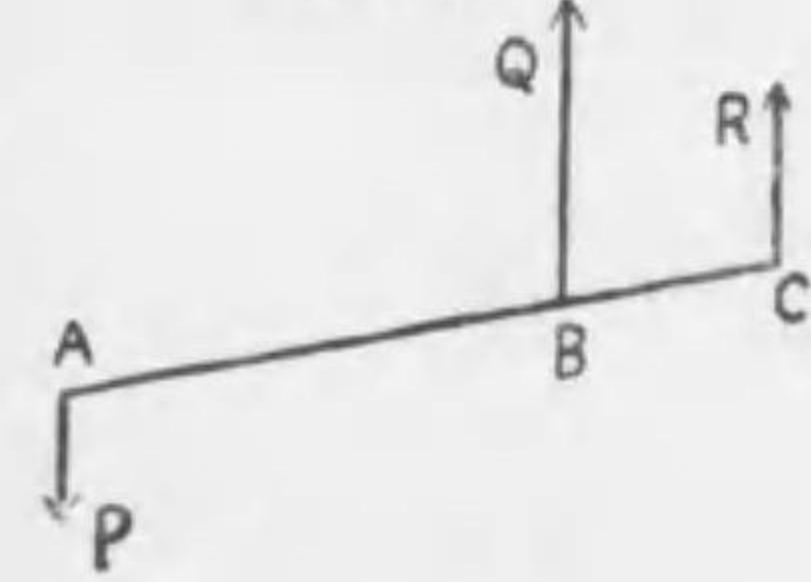


AC:CB=Q:P (2)

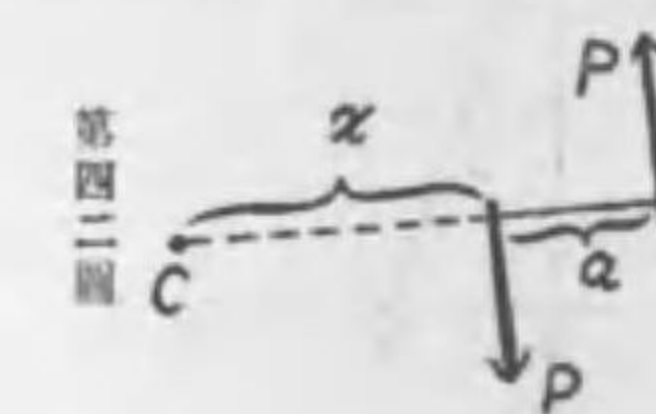
即ち力は距離に反比例す、之を手子の理 principle of lever (Archimedes, -220) と云ふ。P, Q 二力の垂線距離を a とし、P, R 間の垂線距離を x とすれば、Q, R 間の距離 a-x となり、次ぎの比例式を得べし。P:Q=a-x:x 依て $x = aQ/(P+Q)$ 。

二つの平行力が反向するときは (第四一圖) 合力は R=Q-P にして中心は力の外とに來り、前と同一の比例式成立す。此場合にも P と Q とは剛体を反針の方向に回轉せんとするゆへ、R の逆を C に働かしむれば、剛体は回轉する能はず、又 Q-P=R なるゆへ直線進行も止むべし。P, R 間の垂線距離は $x = aQ/(Q-P)$ なり。

第四一圖



P, Q が等しく且つ反向するときは此二力を偶力 couple と稱す。此場合に於て



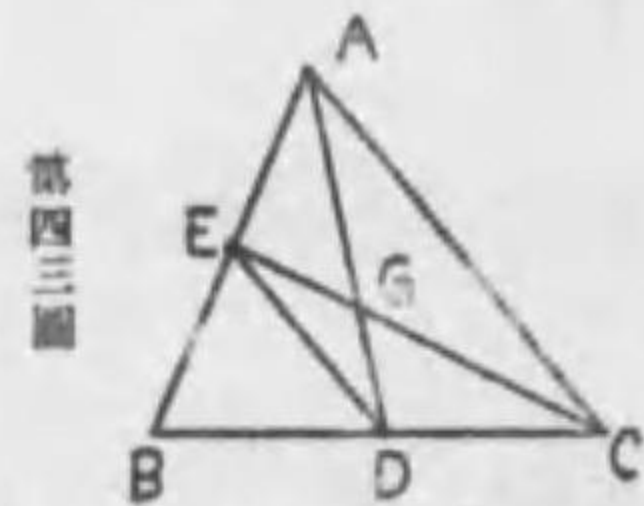
は $P-Q=0$ となり、 $x=\infty$ なる結果を得、二力の中心は存在せず。然るに任意点 C (第四二圖) に関する能率を求むれば $-Px + P(x+a) = Pa$ を得、偶力の能率は Pa となり、x に無關係となる。圖中矢

の方向を反対にすれば、剛体は從針的に回轉し能率は $-Pa$ となるべし。

36 重心 剛体を質点の集合体と考ふれば各質点に働く重力の方向は互に平行にして、其和は剛体の重さに等しく、其附着点を重心 centre of gravity と稱す。重心は平行力の合力の作用の点なれば、重心に関する諸平行力の能率の和は重さの能率に等し、然るに重さの Σ は重心を過るを以て、重心に関する平行力能率の和は零なり。

各部等質 homogeneous なる剛体に就き重心を求むる例を示さんとす。

第一、 棒の重心は其中点に在るゆへ、今三角形 ABC (第四三圖) の底邊に平行なる數多の線にて三角形を數多の棒に分つ時は、各棒の重心の軌跡は中線 AD なり。故に全三角形の重心は AD 上に在るべし。同様に他の中線 CE 上に在るべし。故に求むる重心は其交点 G なり。ED を結べば、 $\triangle EGD$ は $\triangle AGC$ に相似なるを以て $AC:ED=AG:GD$ 、即ち $AG=2GD$ 、從て $GD=\frac{1}{3}AD$ 。

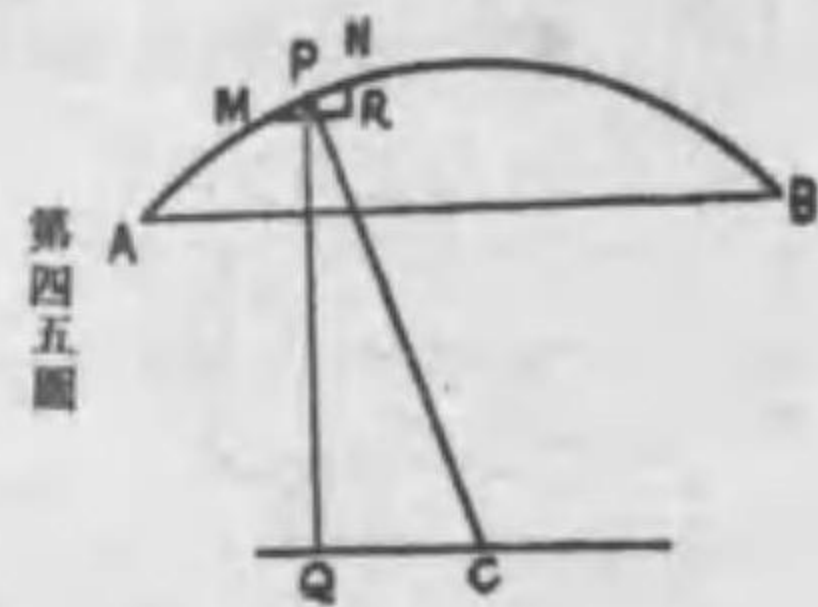


重さ無き針金 ABC の各角に前記三角形の重さの三分の一宛を置けば、三質点の重心は同一 G 点にあり。

第二、 四面体 ABCD (第四四圖) の底面 ABC に平行なる數多の平面を設くるときは、各三角板の重心の軌跡は底面の重心 g と D とを結ぶ直線なり。K を $\triangle BCD$ の重心とし AK を結ぶときは、其交点 G は求むる重心なり。然るに $\triangle KGG$ は $\triangle GDA$ に相似なるを以て $gG:GD=Kg:DA$ 、依て $gG=\frac{1}{3}DG=\frac{1}{4}Dg$ となる。重さなき針金にて同形の四面体を作り、各角に前記四面体の重さの四分の一宛を置く場合に於ても重心の位置同一なり。



第三、 圓弧形の針金 AB (第四五圖) の



重心Gを求むるには、圓心 C を過り直線を AB に平行に引き、圓弧上の小分 MN を取り、其中点を P とし、PQ を AB に垂直に引く。針金の重さを w とすれば、MN の重さは $w \frac{MN}{AB}$ なり、依て QC 線に関する能率は

$$w \frac{MN}{AB} \cdot PQ$$

となる、然るに AB を AB に平行に、NR を垂直に引くときは $\triangle MNR$ は $\triangle PQC$ に相似なりと考ふることを得、依て $MN:MR=PC:PQ$ 故に能率の値は $w \cdot MR \cdot PC / AB$ なり。而して合力 w は G に作用するゆへ、合力の能率 $w \cdot GC$ は上記分力の能率の和に等しく、從て

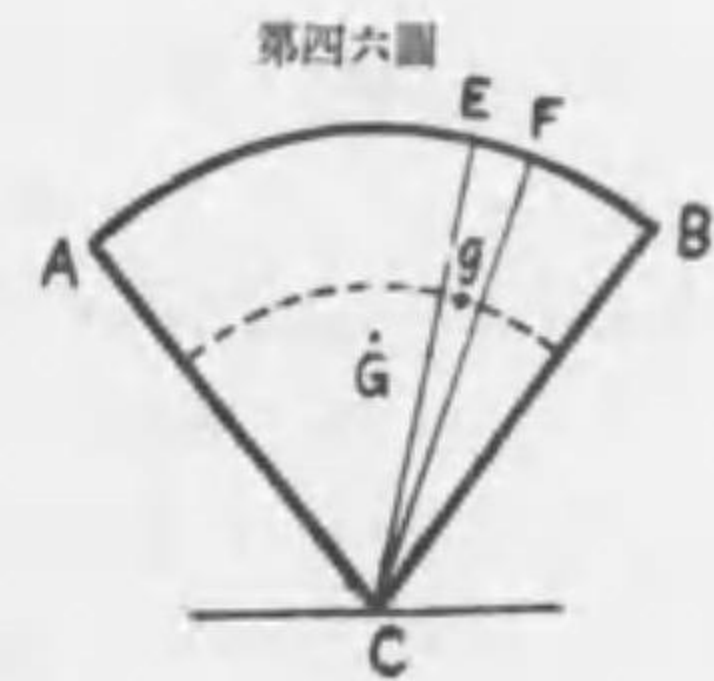
$$w \cdot GC = \Sigma w \cdot \frac{MR \cdot PC}{AB} = w \cdot \frac{PC}{AB} \cdot \Sigma MR = w \cdot \frac{PC}{AB} \cdot AB$$

となる (Σ は和算の畧號とす)。故に重心の距離 CG は半径の $\frac{AB}{AB}$ 倍の處にあり。 $CG=x$, $CP=r$ とせば

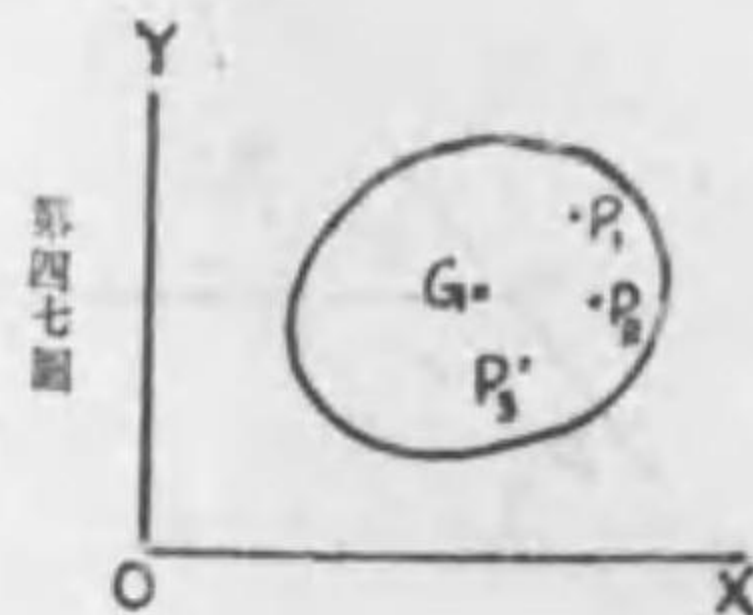
$$x = r \times \frac{\text{弦}}{\text{弧}} \dots \dots \dots (3)$$

なり。

第四、 分圓 ABC (第四六圖) の重心を求むるには、互ひに接近せる二つの半径 EC, FC を引くときは $\triangle EFC$ の重心は EC の三分の一なる g にあり、依て Cg を半径とし、圓弧を引けば、諸三角形重心の軌跡に相當するゆへ、問題は前記圓弧の場合に等しく、異なる点は其半径は $\frac{2}{3}r$ なるにあり。故に $x = CG = \frac{2}{3}r \frac{\text{弦}}{\text{弧}}$ を得。



例ば ABC が半圓なるときは 弦=2r, 弧= πr . 依て $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\pi} r$ 約 $x = \frac{4}{9\pi} r$ を得べし。



一般に剛体の重心を求むるには任意点 O を起点として相互垂直なる二軸 X, Y を引き (第四七圖) 求むる重心 G の座標を x_0, y_0 とし、質点 P_1, P_2, P_3, \dots の座標を $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$ 質点の重さの兩軸に平行なる分力を X_1, Y_1, \dots

X_1Y_1, X_2Y_2, \dots とすれば、横軸に平行なる分力の能率の和と縦軸に平行なる分力の能率の和とは、夫々剛体の重さ（重さは圓形面内に働く）と仮定す）の分力の能率に等しかるべし、即ち $X_0Y_0 = \sum X_1Y_1, Y_0X_0 = \sum Y_1X_1$ 但し X_0, Y_0 は剛体の重さの分力なり。此二式より求むる x_0, y_0 は算出せらるべきなれども、之を實行するには積分法を用ふ。

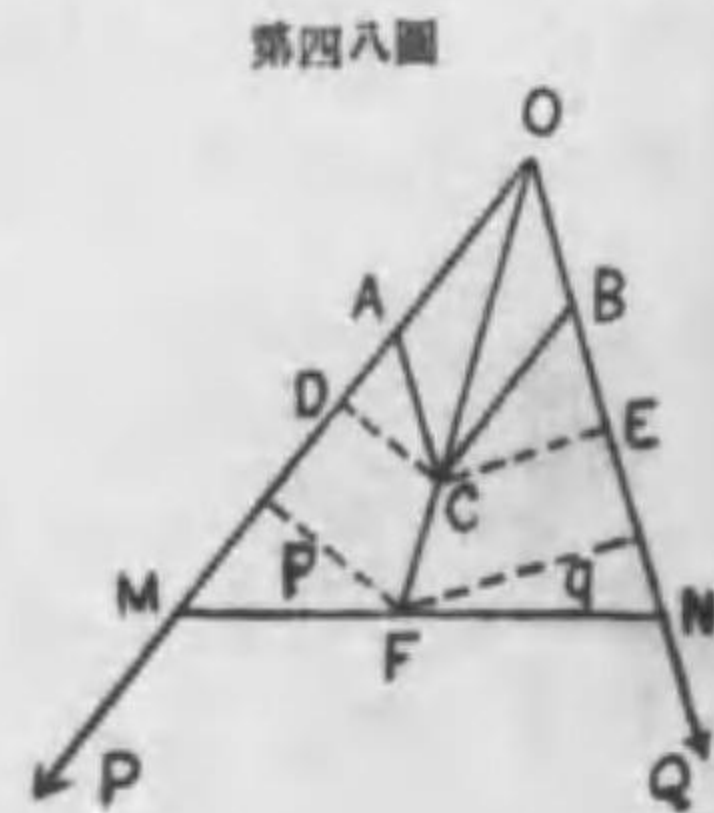
37 剛体の坐り 重心よりも上に位ひする一点によりて剛体を支ふるときは重さは下方に向ひ、支点に於ける抵抗力は上方に向ふて働くゆへ剛体は轉覆の患無く安定の釣合 stable equilibrium を得。之に反し重心よりも下方に位ひする点にて支ふときは譬へ釣合を得るも動もすれば轉覆せんとす、故に之を不安定なる釣合 unstable equilibrium と云ふ。然るに重心に支点を置くときは剛体は如何なる位置に在るも釣合を得べし、之を隨意的釣合 indifferent equilibrium と稱す。總じて物体の坐り stability は位置のエネルギー小なる程良好なりとす、尙ほ後節に審かなり。

38 單一器械 力の方向を變じ或は力の經濟を計る装置を單一器械 simple machines と稱す。如何に複雑なる器械も單一器械の組合せと見て可なり。

第一、手子 lever とは重さなき剛体の棒にして、固定せる点を支点 fulcrum と名け、重さは重点に、力は力点に働く。重さを Q 力を P にて示せば（第四八圖） MN なる棒が釣合を得べき要件は P と Q の合力が支点 F を過るにあり。然るときは F は固定点なるを以て手子は動くこと無し。兩力のゴクトルを延長して O に會せしめ $OA=P, OB=Q$ に取り其合力 OC を求む。又 C より兩力へ垂線 CD, CE を下すときは平行四邊形 $OACB$ の面積 $=OA \cdot CD = OB \cdot CE$ なるを以て $OA:OB = CE:CD$ を得。次ぎに F より兩力へ垂線 g, q を下すときは $CE:CD = q:p$

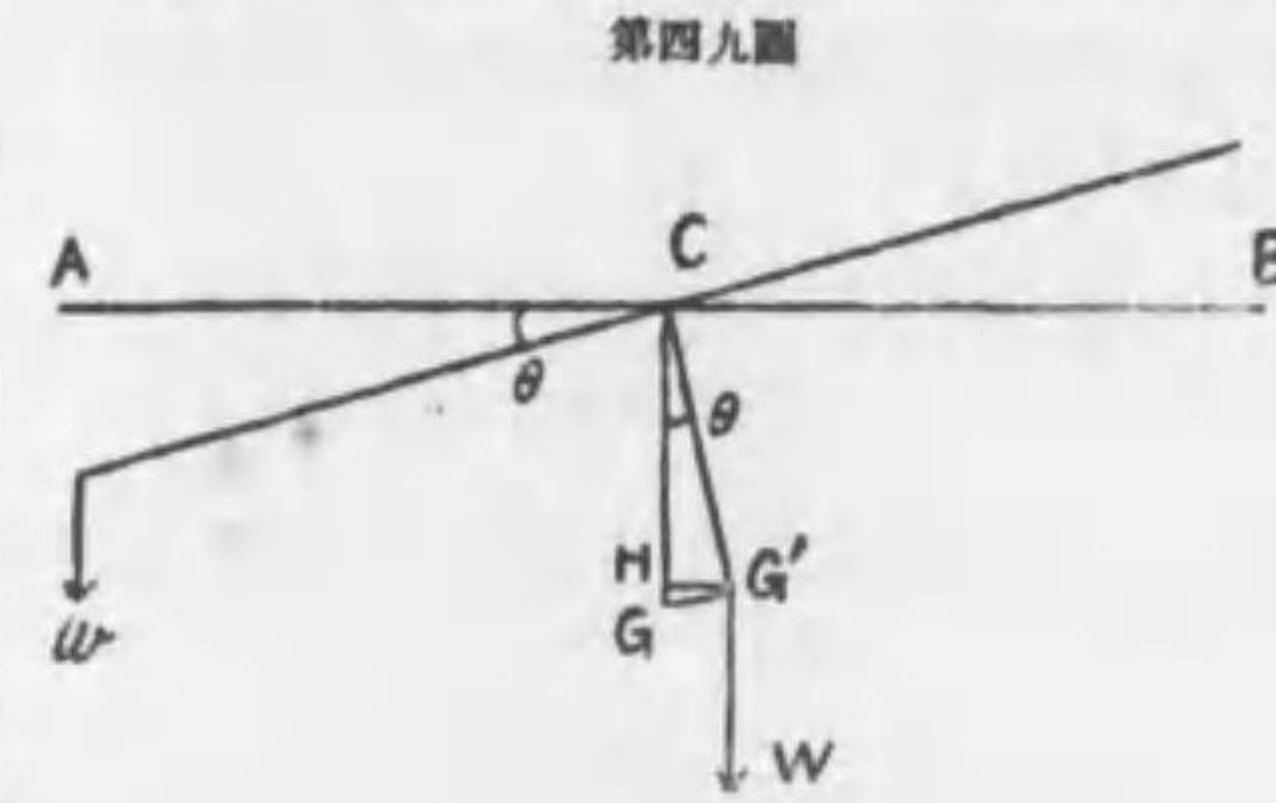
$\therefore OA:OB = q:p$ 即ち $OA \cdot p = OB \cdot q$
 又は $Pp = Qq \dots\dots\dots(4)$

即ち支点 F に關する兩力の能率は互ひに等しく、



反對となりて手子は釣合を得。

手子の一例として天秤 balance を説明すべし（第四九圖）。竿 beam の兩端より



等重の皿 scale を吊るし、各皿に等量の重物を載せ、竿の中心 C にて支ふるときは、竿の重心は其直下 G にありて天秤は安定なる釣合に在り。今 A 端に吊るしたる皿に更に w なる過量を添加するとき、 A は下がりて竿は

θ の角に於て傾くべし。之がために重心 G は G' に上る。 G' より垂線 $G'H$ を CG に下だすときは、竿の重さ W は G' に働くゆへ、其能率は $W \cdot HG'$ となる。今 $CG=h, AC=l$ と定むれば能率は $Wh \sin \theta$ にして w の能率 $wl \cos \theta$ と釣合ふべし。即ち $Wh \sin \theta = wl \cos \theta$ 。依て

$$\tan \theta = \frac{wl}{Wh} \dots\dots\dots(5)$$

を得、 θ は鋭敏角 angle of sensibility と稱せらる。鋭敏角を増すには w 又は l を大きくし、或は W 又は h を小さくせば可なる理なれども、 l を増せば天秤の形徒らに大なるに失するゆへ、寧ろ竿を軽くし從て W を減じ、又可成重心を支点に接近せしむるの他に途無きこととなるべし。然れ共 h 小なるに失すれば天秤振動の週期長くなりて使用上の不便を増すの恐あり。

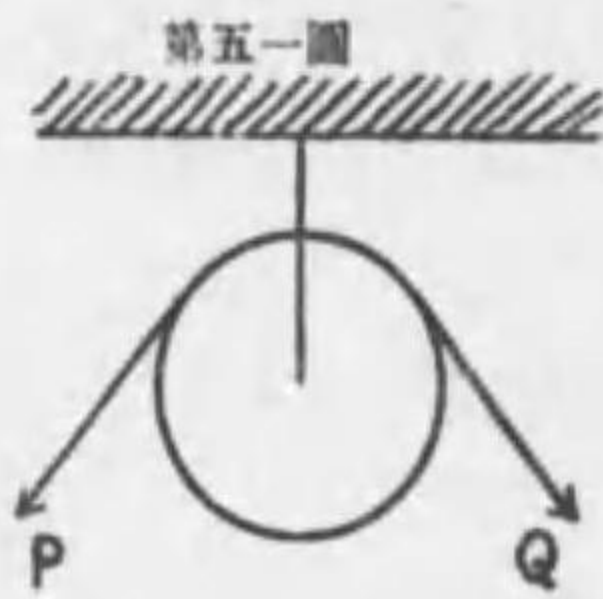
第二、軸車 wheel and axle (第五〇圖)、 r を軸の半徑、 R を車の半徑とすれば能率相等しきときに釣合を得、即ち $Qr = PR$ 。



小なる力 P を以て大なる重さ Q と釣合を得るゆへ Q/P 即 R/r を利率 advantage と名く。

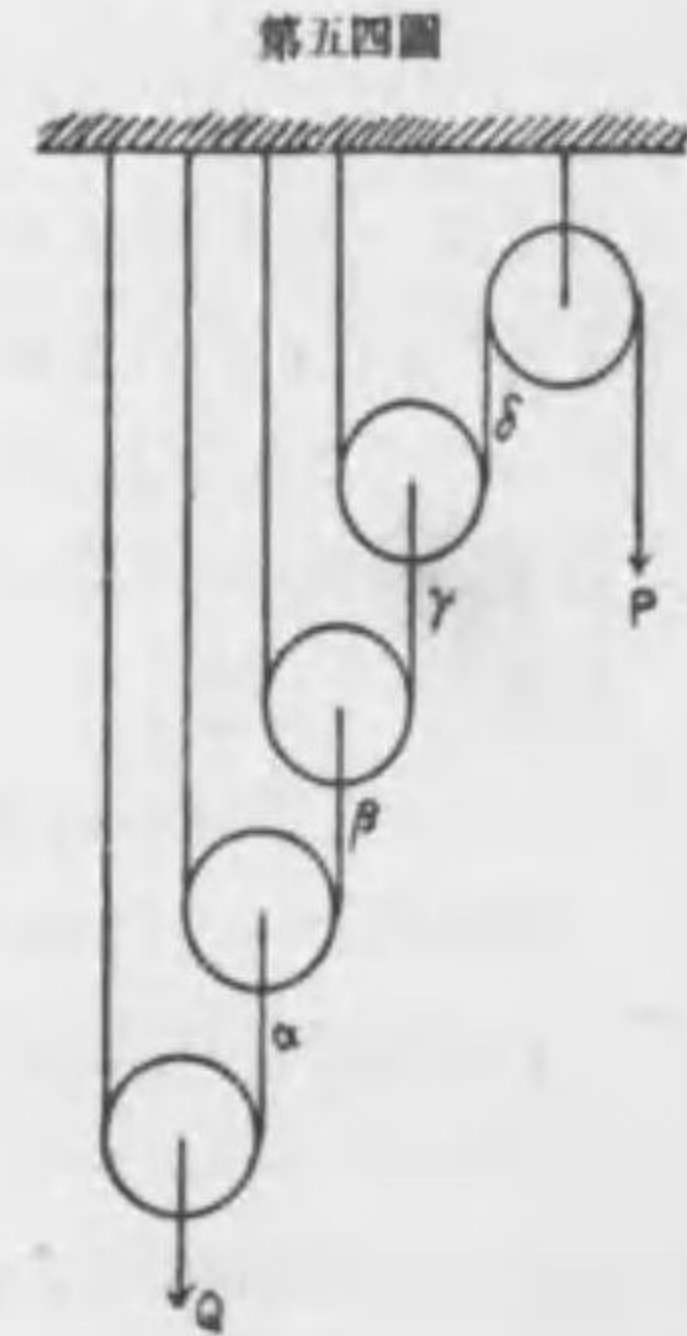
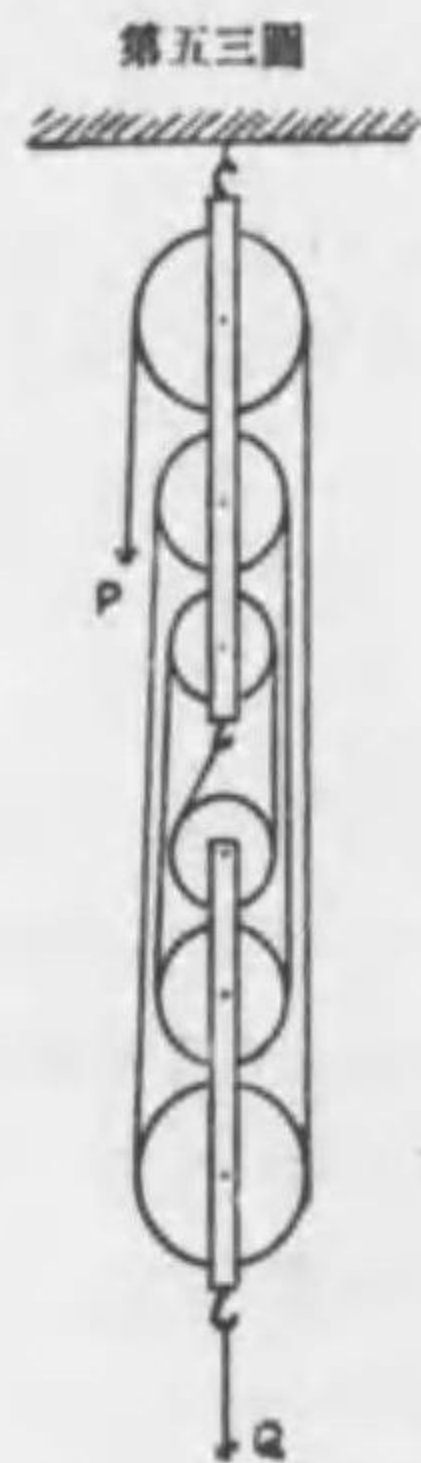
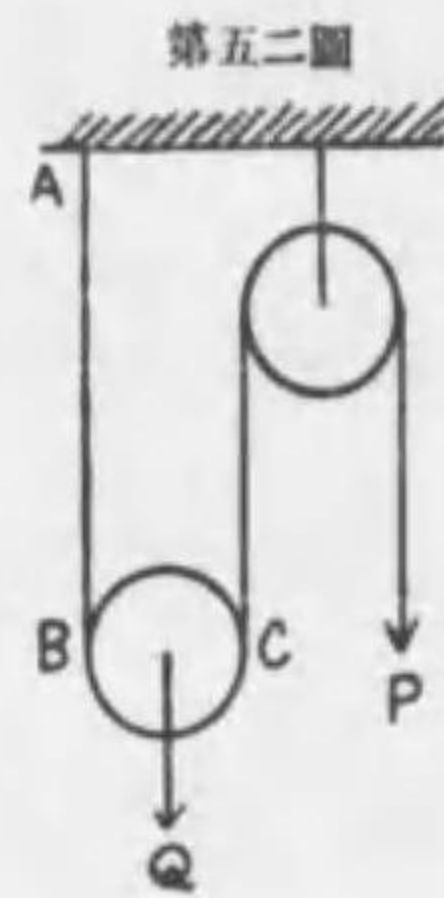
第三、蟬 (滑車) pulley (Archytas of Tarent, -400) に二種あり、動蟬 movable pulley 及び定蟬 fixed pulley 此なり。定蟬は力の方向を變ずるの用をなし、動蟬は方向を變

じ又た力の經濟を計るに用ふ。蟬(第五一圖)の半徑を r とすれば定蟬に纏へる



糸の兩端に働く力 P, Q の能率相等しきときは釣合を得、即ち $Pr = Qr$ 従て $P = Q$ 。即ち P は其の方向を變じて Q となりたるも利率は一なり。動蟬(第五二圖)に於ては元來糸の張力は糸に沿ふて同一なるを以て、 AB 部の張力は CD 部の張力に等しく、其は又 P なる力に等しきゆへ、 Q は P の二倍と

釣合ふ理なり、即ち $Q = 2P$ 。利率は 2 なり。



群蟬 system of pulleys には數種あり、第五三圖の場合には三個の動蟬と三個の定蟬とは各一群をなし、糸の各部は畧々平行し $6P = Q$ にして利率は 6 なり。去れど動蟬群の重さを w とすれば $6P = Q + w$ となり、利率は 6 よりも小なり第五四圖に於ては α なる糸は $\frac{1}{2}Q$ を擔當す。 β は其 $\frac{1}{2}$ 即 $\frac{1}{2}Q$ を擔當す、 γ は $\frac{1}{2}Q$ を、 δ は其又 $\frac{1}{2}$ なるゆへ、

$$\frac{1}{2^4} Q = P$$

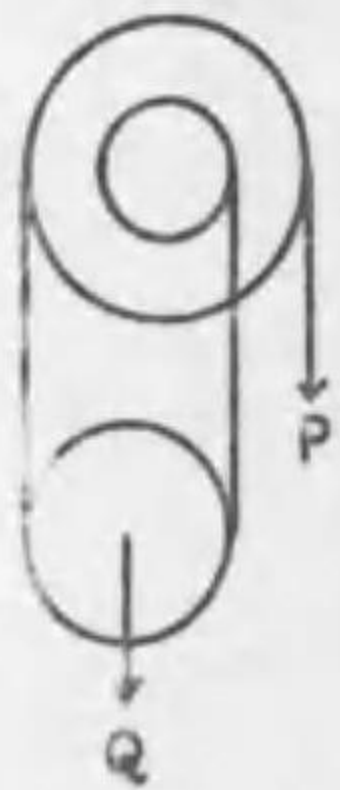
となり、利率 2^4 を生ずべし。此は動蟬に重さ無き場合なり。今重さ各 w と

假定すれば α の擔當は $\frac{1}{2}(Q+w)$ 、 β のは $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(Q+w)+w]$ 、 γ のは $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(Q+w)+w]+w]$ 、依て

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (Q+w) + w \right) + w \right) \\ &= \frac{Q+w+2w+2^2w+2^3w}{2^4} \\ &= \frac{Q+w(2^4-1)}{2^4} \end{aligned}$$

一般に動蟬の數を n とすれば $P = (Q+w(2^n-1))/2^n$ となり、利率は $Q/P = 2^n - w(2^n-1)/P$ 。従て w 大なるときは利率著しく減ず。

第五五圖

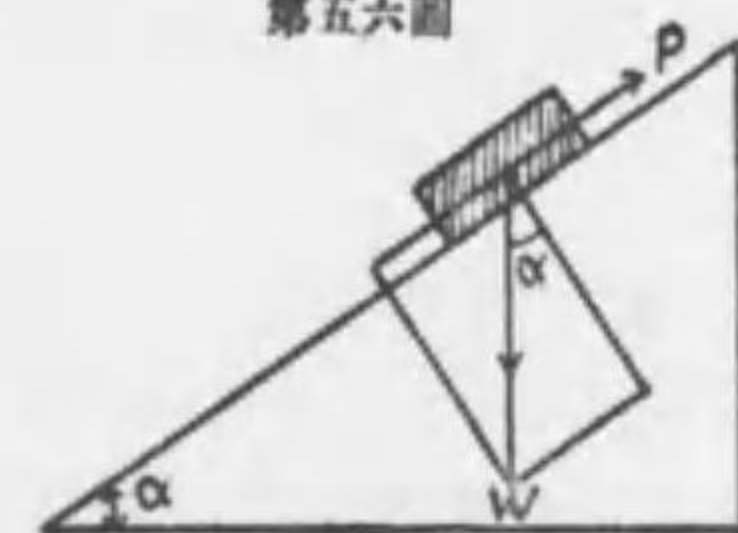


軸車と動蟬とを混用せるものを支那蟬 Chinese pulley (第五五圖)と稱す。軸の半徑を r 、車の半徑を R とす、 Q を支ふる二つの糸の張力は各々 $\frac{1}{2}Q$ なり。依て三力の能率を求むれば $\frac{1}{2}QR = \frac{1}{2}Qr + PR$ 。即ち利率は

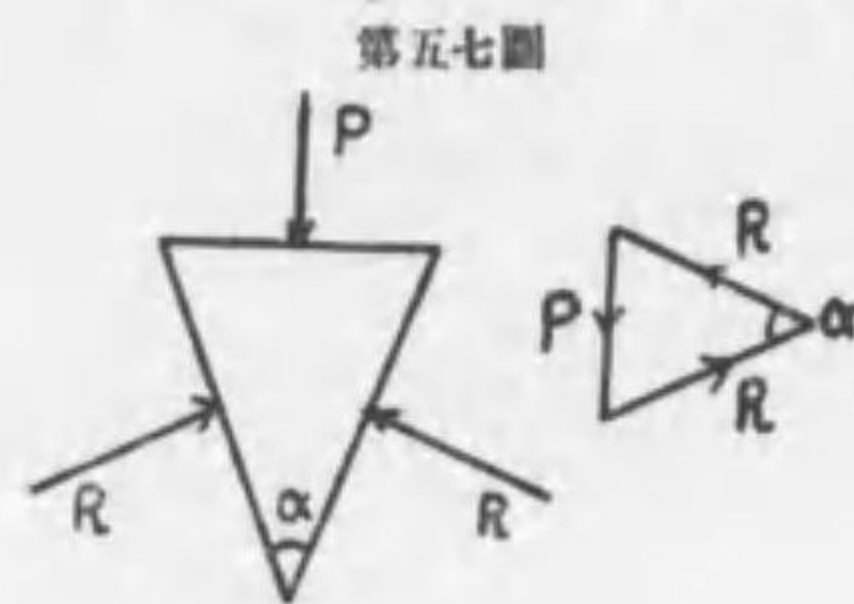
$$\frac{Q}{P} = \frac{2R}{R-r}$$

第四、斜面 inclined plane は埃及人ピラミッド建設の古へより使用し來りしものにて何人の創案に係るやを審にする能はず、手子の説明がアルキメデスによりて普及されしと同意味に於て、斜面の効力はガリレオによりて一層明瞭となりしなり。斜面上に W の重物を載せて釣合を得んため斜面上に平行なる力 P (第五六圖)を要すと假定す。今斜面角を α と名け W を斜面上に平行及び垂直なる力に分解すれば垂直分力 $W \cos \alpha$ は斜面の抵抗と釣合を得れども、平行分力 $W \sin \alpha$ は其反對の方向に働く外力 external force P に依りて初めて釣合ふこととなる、故に $P = W \sin \alpha$ にして、利率は $1/\sin \alpha$ なり。斜面の長さを l 、高さを h 、底の幅を b とすれば、 $P = Wh/l$ 又利率は l/h となる。斜面の抵抗力は Wb/l なり。 P が斜面上に平行ならずして斜面と β 角をなすときは $P \cos \beta = W \sin \alpha$ 。例へば P が上方に働くならば β は α の餘角となりて $P = W \tan \alpha$ を得。

第五六圖

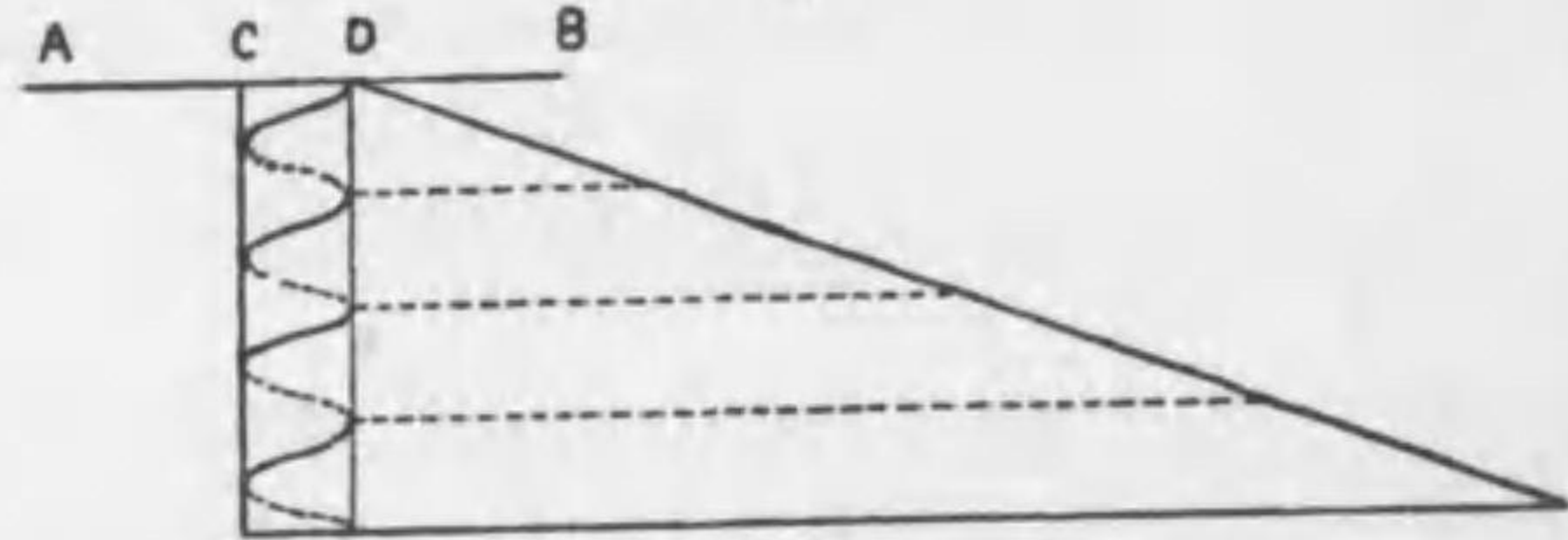


第五、楔 wedge は其兩側に垂直に作用する抵抗力 R (第五七圖) と釣合を得せしむるには第三邊に垂直に力 P が作用するを要すとせば、三力に平行なる邊を有する三角形を書くと其の三邊の長さは三力の大きさに比例すべきなり。依て圖により $P=2R \sin \frac{\alpha}{2}$ を得て、利率は $R/P=1/(2 \sin \frac{\alpha}{2})$ なるゆへ、 α が 60° よりも小ならざれば利率は一よりも大なること無し。

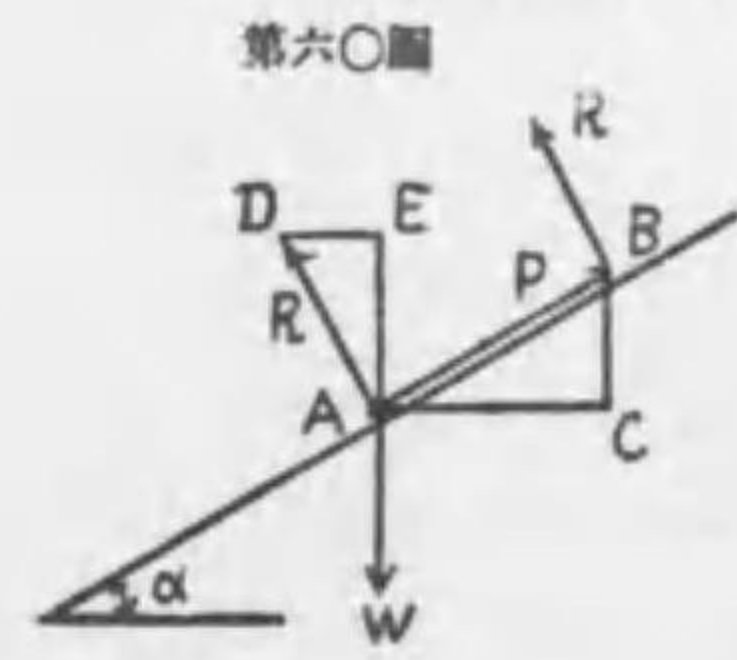


第六、螺(ネジ) screw には雄螺 male screw 雌螺 female screw の別あり、雄螺は雌螺中を旋轉して進む。螺は斜面を圓筒に捲附けたるものにして(第五八圖)斜面に相當する螺旋 helix を螺條 thread と名く。螺條間の距離を歩み pitch と稱す。圓筒の周邊と歩みとは夫々斜面の底邊と高さとに比例す。雄螺の推進に抵抗する力 W は斜面上に載せたる重量に相當するがゆへに、此と釣合ふべき斜面力 $W \sin \alpha$ は斜面に沿ふて働くべき力を表はせども、 α 角微小なときは圓筒に垂直に働くものと見て大差なし。螺軸に垂直に手子 AB を固着せしめ AB の長さを $2l$ とす。手子の兩端に各 F の力を手子並びに螺軸に垂直に働かしむるときは、其能率は $2Fl$ なり。圓筒の半径を r とすれば、圓筒に捲附けたる斜面上の斜面力 P の能率 Pr 即 $Wr \sin \alpha$ は $2Fl$ と釣合を保つべし、即ち $rW \sin \alpha = 2Fl$ 。然るに歩み s を高さとし圓筒の周邊 $2\pi r$ を底邊とせる斜面に於ては $\tan \alpha = \frac{s}{2\pi r}$ なれども α 角甚小なときは畧近に $\sin \alpha = \frac{s}{2\pi r}$ と見て可なるゆへ、前式より螺の公式は $Ws = 4\pi Fl$ となり、利率は $W/2F = \frac{2\pi l}{s}$ なり、故に歩み小なれば利率多し。

第五八圖



第六〇圖



39 単一器械に於ける力及び路 単一器械を用ふれば力の經濟を得て利率は一よりも大なることは前條説きし如くなれども、単一器械により P なる力を以て W なる重さを動かすに當り (P と W は器械の媒介により釣合の状態に在れども、 P が少し大となれば物体は徐々に動き始むべし) W の着力点が動く路は P の着力点が動く路に較べて却て小なることを認むべし。例へば手子の場合(第五九圖)に於て利率は $W/P=FB/AF$ なれども、着力点は夫々 $A'A$, $B'B$ の路を書き、其比 $A'A/B'B$ は利率の逆數となる。即ち利率大なれば P の路は遠し。從て $AA' \cdot W = BB' \cdot P$ を得。今力と力に平行なる路の部分との積を仕事 work と名くれば、兩力の仕事は相等しく、從て仕事に於て利益を生ずるものに非ることを悟る。群蟬(第五三圖)の場合を考ふれば、一本の糸が六部に分れ居るゆへ P を六米引下ぐるも Q は漸く一米上る理なり、從て P と Q の仕事相等し。又逆に仕事の理を應用して路を算出し得べし、例ば第五四圖の場合には Q を一米上げたために P を 2^6 米、即十六米下げざるべからず。第五六圖の斜面に於ても物体を斜面の全長 l に沿ふて引擧ぐる仕事は單に h の高さを引上げる仕事に等しきを見る。



40 假の仕事の理 諸力一点に作用して釣合にあるとき、其の点を假りに少しく變位せしむると想像す、之を假の變位 virtual displacement と稱す。此際諸力の着力点動きたるを以て各仕事を奏す、之を假の仕事 virtual work と名く。然るときは、諸力は元來釣合に在るゆへ、假の仕事の總和は零ならざるべからず。今一例を擧て之を説かんに、斜面上の一質点(第六〇圖) A に三力作用す、即ち重さ W 、抵抗 R 、斜面力 P 是なり。今質点が斜面に沿ふて AB なる假の變位をなすときは P の仕事は $P \cdot AB$ にして W は其反對の方向に CB の距離を引上げられたるを以て其仕事は $-W \cdot BC$ なり爰に、負號

を附したるは其力に反して動きたることを示す、而して R の着力点は力の方向に垂直に變位したるゆへ何等の仕事も奏すること無し。依て $P \cdot AB - W \cdot BC = 0$ 、即ち $P = W \sin \alpha$ 式に歸着す。質点の假の變位が R の方向に於て AD なりとせば $R \cdot AD - W \cdot AE = 0$ より $R = W \cos \alpha$ を得べし。第五九圖の手子に於ても假の仕事の式は $P \cdot BB' - W \cdot AA' = 0$ となりて前條説きたる手子の理に到着す。

第三章 動力學 KINETICS

41 ニュートンの動力學の三法則 物體運動の變化の原因を力と稱す、從て力と運動の變化とは因果的關係を有するものなり。兩者の關係を論ずる學科、即ち動力學の學習は物理發展の歴史を逐ひ ニュートン の三法則より出發するを最も便宜なる方法とす。

42 第一法則 凡そ物體は外力之に作用せざるときは、既に靜止せるものは靜止に安んじ、既に運動せるものは直線等速に其運動を持続す。物體の此性質を慣性 inertia と稱し、此法則を慣性の法則と名く。此法則は吾人日常の經驗に徴して明かなれども、其由來するところを案ずるに、元と人心の因果律の要求を充たさんがために外ならず。即ち一旦靜止せる物體が運動を始むるか、或は既に運動せるものが次第に靜止に歸するか、或は運動の方向が右又は左に變ずるか、或は運動の速度が次第に増加若くは減退するかの場合に於て人心は必ず其原因を尋ねて已まざるなり、其原因を假定して此を力と名けしものとす。又物體の自轉は直線運動には非るも、外部より能率加はらざる限りは其等角速運動は變更せざるなり、此も慣性の一つの場合と見做すことを得べし。例へば地球自轉速度が不變なる場合の如し。

運動せる物體の速度と其質量との積を運動量 momentum と稱し、 mv にて示す、デメンション式は $[LMT^{-1}]$ なり。第一法則によれば、外力作用せざるときは運動量變化する能はず、故に運動量の單位時間毎の變化によりて力の大きさは表はし得べき理なり、依て次ぎの法則に到着す。

43 第二法則 力は運動量の單位時間毎の變化に等しく其變化の方向は常に力の方向と合す。

運動量は ゴクトル なるを以て其變化に二種あり、即ち大きさの變化と方向の變化之れなり。方向變化する場合(例へば等速圓運動の如し)は之を後節に譲り。今

は大きさのみ変化する場合を考量せんに、質量 m は一定して速度 v は \dot{v} 即ち加速度に等しき変化を呈す。故に力は質量と加速度の積 $m\ddot{x}$ にて示すことを得べきを知るなり。力 F は $F = m\dot{v} = m\ddot{x}$ 等にて示す。又 F は運動量を時間にて割りたる商なれば $[F] = [LMT^{-2}]$ なりとす。

44 第三法則 原力 action は反力 reaction に等しく且つ反対なり。甲なる物体乙を引けば其と同一の力を以て乙は甲を引くなり、手を以て樹を壓せば樹も亦た吾手を壓すを覺ふべし。要するに天地間に孤立せる力は決して存在すること無く一つの力には必ず其反力伴隨するものなり、例ば地球と月、地球と太陽とが互に相引く場合の如し。吾手を以て吾帯を引上ぐるも天に昇る能はざるは反力作用の点適當を得ざるが故なり。又舟中に在りて櫓を壓すも其方向に舟を動かす能はざるも同理に因る。

45 ガリレオの實驗 Galileo 1590 往時 ガリレオ は ピザ (Pisa) の斜塔に登り塔上より種々重量異なる物体を落下せしめしに皆な同一加速度を生ずることを發見せり。時間の單位を一秒とせば、加速度は 9.8 米なり、之を通常 g を以て示す。従つて地球と物体間の引力、即ち重量は地上に在りては質量にのみ正比例するものなることを悟れり、故に重さを W を以て示せば

$$W = mg \dots\dots\dots (1)$$

を得、此式は $g = W/m$ とも書き得るゆへ、物体の輕重に拘らず皆な ピザ の斜塔より同一加速度を以て落下す。

46 絶対度量法 物理学に於ては主として長さ、時間、質量の三單位を基本となし、他は悉く此より誘導することは既に説けるが如し。此法に依れば力は何處に於ても誤差無き値にて表出さるゝことを得るがゆへに此を絶対度量法 absolute system of measurement と稱す。然るに之を日常生活に應用するに當りては不便甚だ尠からざるを以て、別に民間用度量法 practical system of measurement を定め常用に當つ、此法は長さ、時間、重さの基本單位を定めて他の單位を誘導す。地球面上の諸處に於ては重力の加速度は些少の差違を呈するのみなれば、民間度量法に依るとも決して大なる誤差を生ずること無きものとす。

今之を細説せんに、絶対法に於ては質量 m の單位は一瓦又は一疋と定まり居るゆへ、重さ W の單位は $W = mg$ なる公式によりて決定せらる。一般に力の單位は $F = m\ddot{x}$ によりて決定せらる。即ち力單位なるときは $F = 1$ 。故に $m = 1$ の場合に於ては $\ddot{x} = 1$ ならざるべからず。言ひ換ゆれば、單位力が單位質量の物体に働くときは、其物体の速度は同一單位時間毎に (速度を測りしときに用ひしと同一の時間單位) 單位の長さの増加を呈す、例へば質量の單位を疋とし、長さの單位を一米とし、時間の單位を一秒とすれば、一疋の物体に働きて其速度を一秒毎に一米増加せしむる力は即ち力の單位なり。又 $W = mg$ 式により質量 m なる物体の重さは地上に在りては mg となる。

民間度量法に於ては一瓦、若くは一疋は重量單位の名稱なるゆへ、 $W = mg$ 式により、質量の單位を誘導するには $m = 1$ と置き $W = g$ 、即ち重さ g 瓦又は g 疋なる物体の質量こそは此度量法に於ける質量單位となるなり。然るに後章説く如く、地球面上に於て g の値一定ならず、赤道に於て最小にして極地方に於て最大なり、従て一瓦若くは一疋の重さは一定せるものに非るなり、故に絶対的即ち恆定的價値を有せざるものとす。民間度量法に於ける質量單位には別に名稱存せず。

絶対度量法中の一種なる C.G.S. 單位法は理論上頗る重要視せらる。此法に依れば一瓦の質量を有する物体が毎秒毎秒一疋の加速度を生ずれば、此に働ける力は單位にして、此を一ダイン dyne と名く。従て一瓦の質量を有する物体の重さは緯度四十五度の海面上に於ては 980.6 ダイン となる。一千ダインを一キロダイン、一千キロダインを一メガダイン megadyne と稱し、一千分の一ダインを一ミリダイン millidyne 一千分の一ミリダインを一マイクロダイン microdyne と名く。

力は加速度に質量を乗じたるものなる故へ、 $[F] = [W] = [LMT^{-2}]$ を得、又能率に力は距離を乗じたるものなれば $[能率] = [LMT^{-2}]$ なり、同理に依り $[仕事] = [LMT^{-2}]$ なり。

47 落体運動 (Galileo 1590) ガリレオ の落体運動 motion of a falling body の實驗は極めて重要にして物理学及び力学の紀元を劃すと稱するも謬言に非るな

り。ガリレオは斜面運動の實驗より得たる結果を基礎として落体運動の公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots\dots (2)$$

を発見したるなり。上式に依り $t+r$ 秒間に畫く距離 $s+\sigma$ 米は $s+\sigma = \frac{1}{2}g(t+r)^2$ より算出せらるべし。然るに兩式の差は

$$\sigma = gtr + \frac{1}{2}gr^2 \text{ となる。今 } r \text{ が極て小なる時は } r \text{ に對し } r^2 \text{ は省略して可なるゆへ}$$

$$\frac{\sigma}{r} = gt \dots\dots\dots (3)$$

即ち速度は gt なることを知る。今速度を v とすれば上式に依り、

$$v/t = g \text{ 即ち一秒毎に速度は } g \text{ 米の加速をなすなり。}$$

48 斜面運動 斜面上の物体の重さの斜面に平行なる分力は $W \sin a$ 即 $mg \sin a$ なるを以て斜面運動の加速度は $g \sin a$ にして斜面の全長 l を畫く時間は

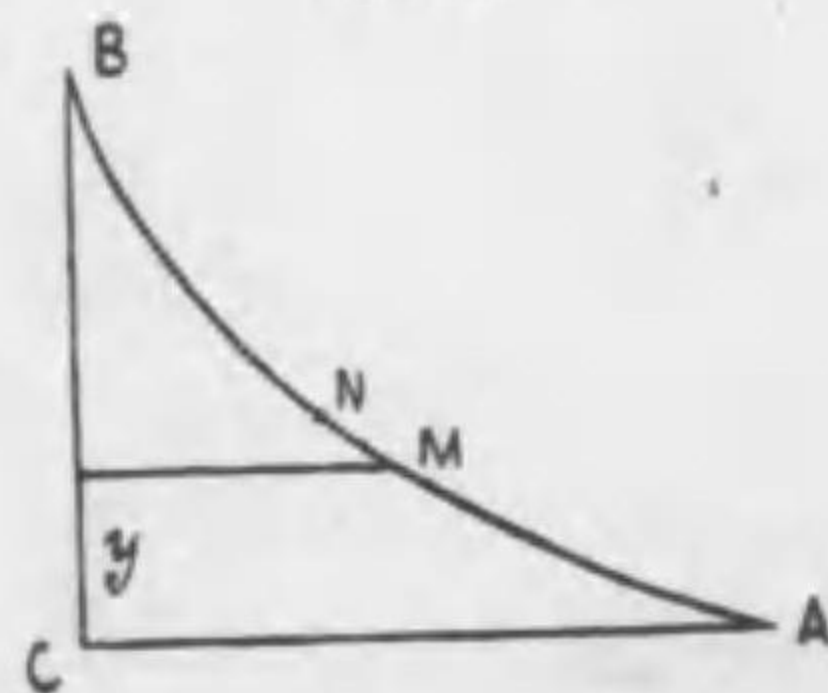
$$l = \frac{1}{2}g \sin a t^2 \dots\dots\dots (4)$$

によりて與へらる。故に l と t とを觀測すれば此公式に因りて g の値を算出し得べし。又全長 l を運動したる後の速度は $v = g \sin a \cdot t$ なり、前式に此式の t を代入すれば $v^2 = 2gl \sin a$ を得、然るに h を斜面の高さとすれば $h = l \sin a$ なるゆへ

$$v^2 = 2gh \dots\dots\dots (5)$$

即ち斜面を滑り落ちたる時の速度は斜面の高さ h を落下したる時の速度に等しくして斜面角 a の大小に關係なきことゝなる。曲線は(第六二圖)小きき斜面を多數に連ねたる如きものなれば B より A まで滑り落ちたる時の速度は高さ BC を落下したる時の速度に等しき理なり。

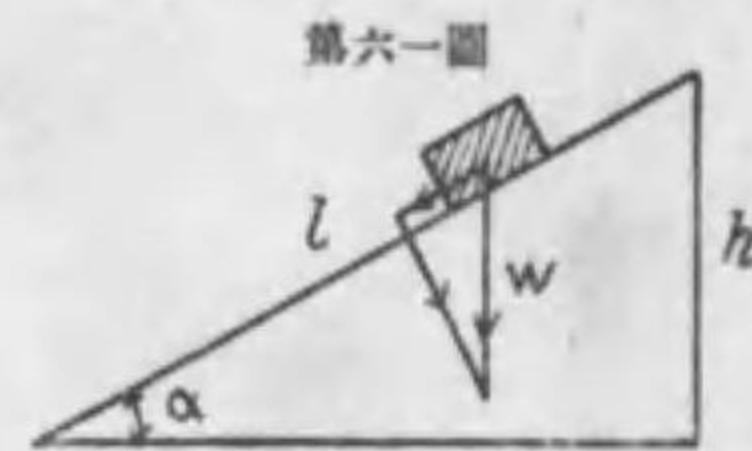
第六二圖



斜面運動をなす時間 t は (4)式より

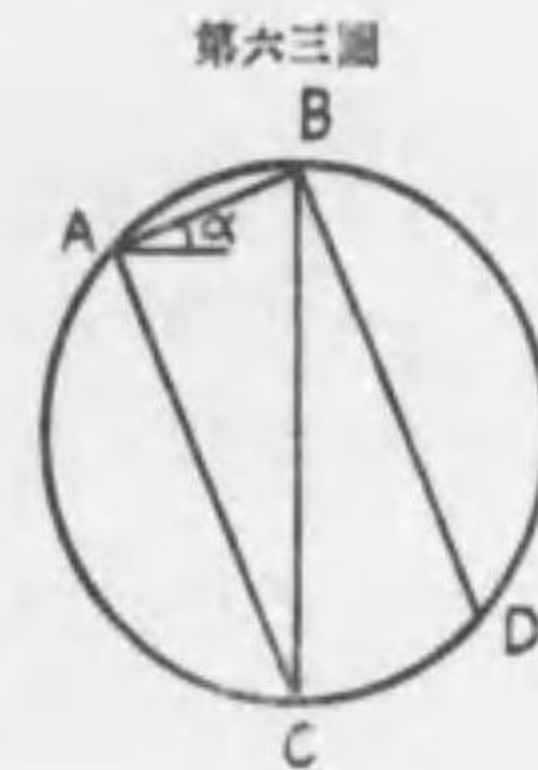
$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin a}} \dots\dots\dots (6)$$

を得。今(第六三圖) AB を斜面とすれば B

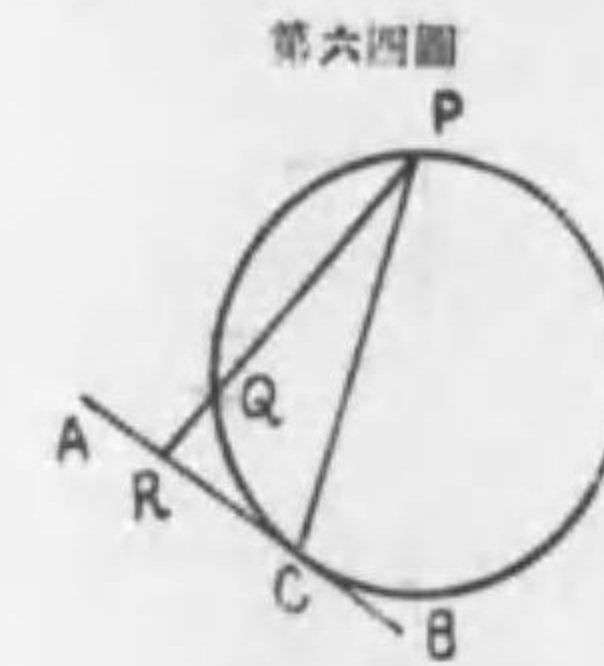


第六一圖

を頂点とし、 AB を弦とする圓 BAC を鉛直面内に畫き、鉛直なる直径 BC を引き、 AC を結ぶときは $\angle ACB$ は斜面角 a に等しく、又 $BC = l/\sin a$ の關係あり。故に (6)式より $t = \sqrt{2BC/g}$ 即 $BC = \frac{1}{2}gt^2$ を得、是れ BC を落下する時間は BA を滑り落ちる時間に等しきことを示す。又 B を過り弦 BD を AC に平行に引くときは BD は AC に等し、然るに BD を滑り落ちる時間は BC を落下する時間に等しきゆへ AB の時間と AC の時間とは互に相等しきを知るべし。



第六三圖

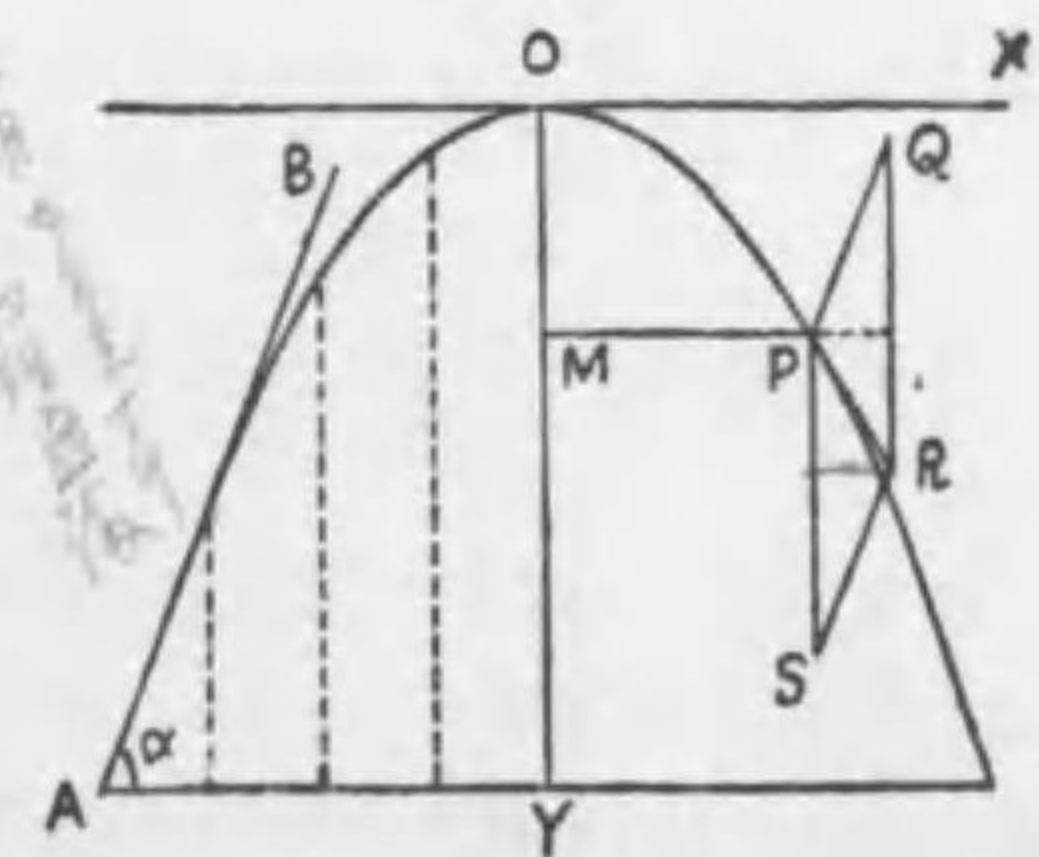


第六四圖

P より(第六四圖)最小時間に直線 AB に滑り落ちべき斜面を引くには、 P を頂点(空間に於ける最高点)とし AB に切する圓 PQC を畫き切点 C を P に結ぶときは PC は求むる斜面なり。何となれば他の斜面 PR を引くときは PQ の時間は PC の時間に等しきゆへ PR の時間は PC の時間よりも長くなるが故なり。

49 拋物運動 projectile motion 仰角 a に於て物体を u の速度にて射出すれば、水平分速度は $u \cos a$ にして鉛直分速度は $u \sin a$ なり。水平の方向には外力作用せざるゆへ(空氣の抵抗を省く)水平速度は等速なり、然して鉛直の方向には重力作用するため、 t 時後には鉛直速度 $u \sin a - gt$ となり、 $t = \frac{u \sin a}{g}$ の時に零となりて物体は彈道の頂点に達す、其時物体は全く水平に運動す。其後は下向速度の増加すること、頂点に達するまでに上向速度の減少したると同様なり、故に彈道の形は左右相稱となり(第六五圖)、射出速度 u と同一速度を以て水平面上に落下す、夫までの時間も亦た $\frac{u \sin a}{g}$ なり。故に飛行時間

第六五圖



鉛直速度は $u \sin a - gt$ となり、 $t = \frac{u \sin a}{g}$ の時に零となりて物体は彈道の頂点に達す、其時物体は全く水平に運動す。其後は下向速度の増加すること、頂点に達するまでに上向速度の減少したると同様なり、故に彈道の形は左右相稱となり(第六五圖)、射出速度 u と同一速度を以て水平面上に落下す、夫までの時間も亦た $\frac{u \sin a}{g}$ なり。故に飛行時間

time of flight は

$$T = \frac{2u \sin a}{g} \dots\dots\dots (7)$$

なり。次に弾着距離 range を R とすれば、物体は $u \cos a$ なる速度を以て水平の方向に T 時間等速運動をなしたるものと見て可なる故へ

$$R = Tu \cos a = \frac{2u^2 \sin a \cos a}{g} = \frac{u^2 \sin 2a}{g} \dots\dots\dots (8)$$

を得べし。又頂点 O の高さを h とすれば、h の距離を落下したる時の速度は鉛直分速度 $u \sin a$ に等しきゆへ (5)式により $2gh = u^2 \sin^2 a$ 即ち

$$h = \frac{u^2 \sin^2 a}{2g} \dots\dots\dots (9)$$

又 $h = \frac{1}{2}g(\frac{T}{2})^2$ によりても同一結果に達し得べし。

頂点 O を通り (第六五圖) 水平線 x 軸、鉛直線 y 軸を引くときは $x = MP$, $y = OM$ 、又物体が O を過る時刻は $\frac{1}{2}T$ なるゆへ

$$y = \frac{1}{2}g\left(t - \frac{T}{2}\right)^2, \quad x = u \cos a \left(t - \frac{T}{2}\right)$$

依て

$$x^2 = 2 \frac{u^2 \cos^2 a}{g} y$$

此即ち拋物線の方程式なり。

物体が P 点に於て (第六五圖) 有する速度 v は最初速度 u と t 時間後に得たる速度 gt との組合せなり。今 PQ を AB に平行に、u に等しく引き PS を重力の方向に gt に等しく引き、合成速度 PR を計算すれば、平行四邊形の理に依り

$$v^2 = u^2 + g^2 t^2 + 2ugt \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = u^2 + g^2 t^2 - 2ugt \sin a \dots\dots\dots (10)$$

$t = T$ の時刻に物体は地上に墜ち其速度は $v = u$ なり、此關係を上式に代入すれば (7) と同一の式に到着す。

仰角 a の代りに $\frac{\pi}{2} - a$ なるときは $R = u^2 \sin(\pi - 2a) / g = u^2 \sin 2a / g$ となる、故に仰角 a の時の値に等し (第六六圖)。又 $a = \frac{\pi}{4}$ のとき $\sin 2a$ 最大となり、従て R も最大にして其値 u^2/g なり、即ち鉛直に投上したる時の h の二倍に等し。

t 時に於ける物体の位置は發射点を起点とし (第六六圖) 横軸、縦軸を引くときは

$$x = ut \cos a, \quad y = ut \sin a - \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots\dots (11)$$

によりて與へらる。兩式より t を消去すれば

$$y = x \tan a - \frac{gx^2(1 + \tan^2 a)}{2u^2} \dots\dots\dots (12)$$

は $\tan a$ に於て二次方程式なるゆへ、a に二根あること前に説きたる如し。tan a が實數なるためには判別式は

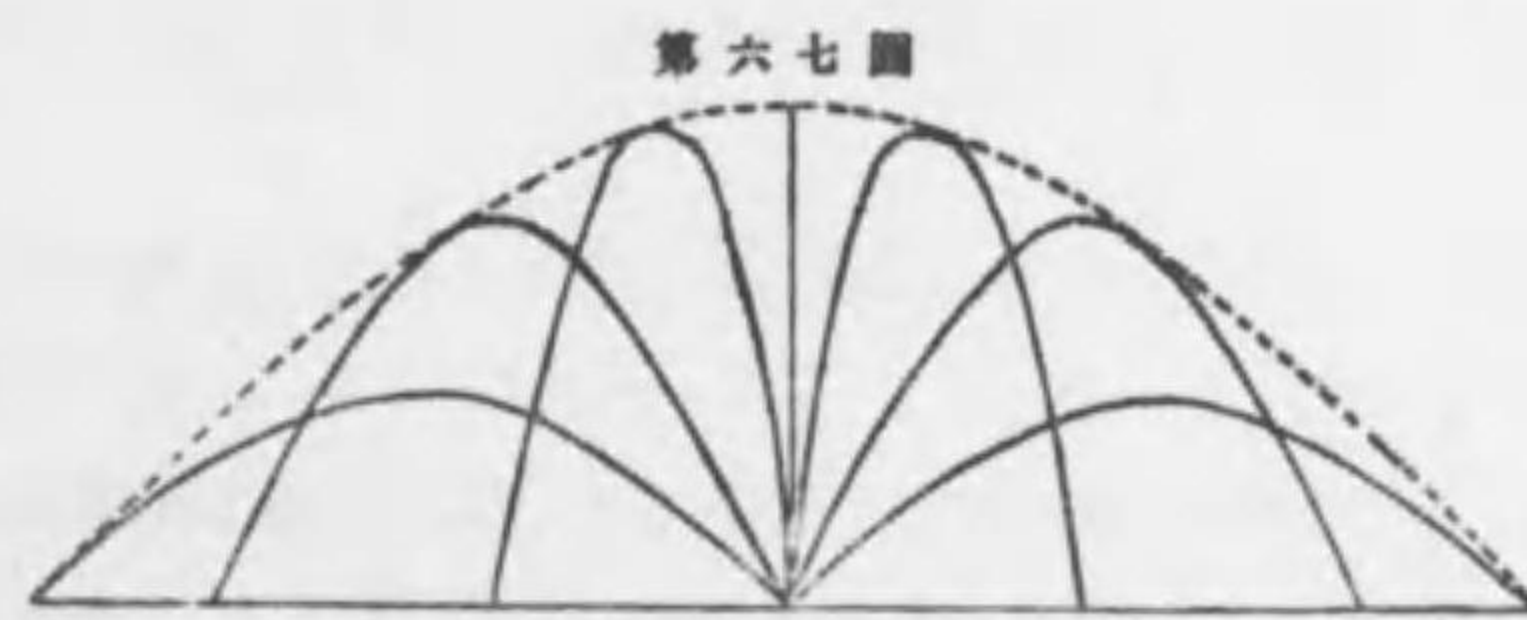
$$x^2 - \frac{2gx^2}{u^2} \left(y + \frac{gx^2}{2u^2}\right) > 0 \quad \text{即} \quad \frac{u^2}{2g} > y + \frac{gx^2}{2u^2}$$

故に u を常數とし、仰角を變數としたるときに生ずる諸拋物線は悉く

$$\frac{u^2}{2g} = y + \frac{gx^2}{2u^2} \dots\dots\dots (13)$$

なる曲線内にあり

(第六七圖)。此曲線は頂点を y 軸上 $\frac{u^2}{2g}$ の高さに有して下向する拋物線を示し (11) 式の包絡線なり。



故に立體的には拋物体 paraboloid となる。

50 位置のエネルギー及び運動のエネルギー 拋物運動の (11) 式を (10) 式に代入すれば

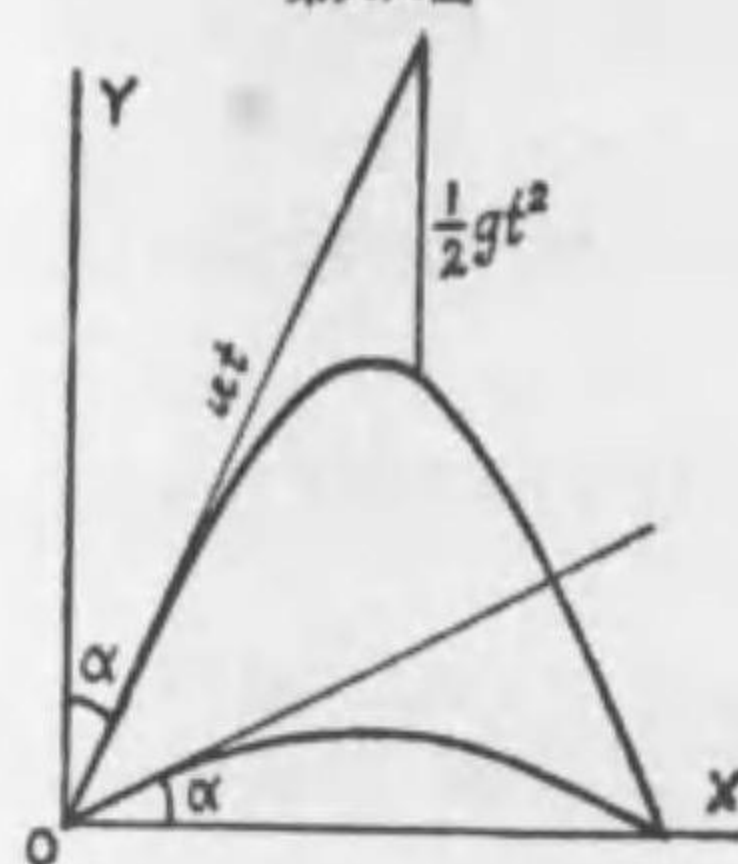
$$v^2 = u^2 - 2gy \dots\dots\dots (14)$$

を得。今拋射せられたる物体の質量を m とせば (14) 式の各項に $\frac{1}{2}m$ を乗じ

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 \dots\dots\dots (15)$$

を得べし、mgy は mg なる重さと y なる高さとの積にして、重力に打勝ち物体を高處に上ぐる仕事に等し、之を y の高さに於ける位置のエネルギー potential

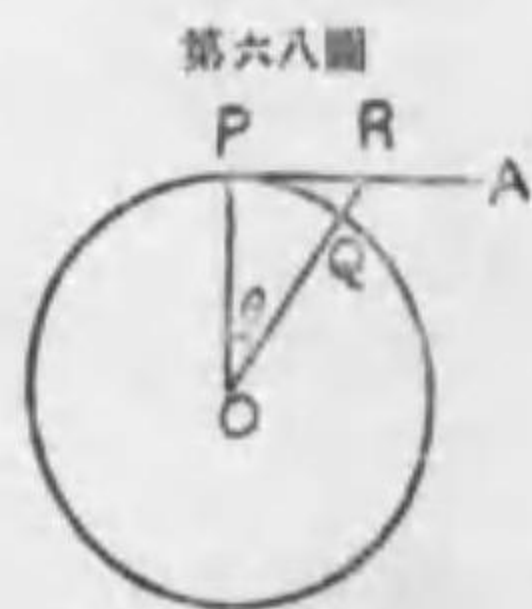
第六六圖



第六七圖

energy と稱す。又 $\frac{1}{2}mv^2$ 及 $\frac{1}{2}mu^2$ は夫々 P 点及び起点に於ける運動のエネルギーと稱せらる。故に (15) 式は P 点に於ける位置、運動兩エネルギーの和は最初高さ零なりしときのエネルギー、即ち其時の全エネルギーの量に等しきことを示せるなり。斯く、拋物運動に於ては始終全エネルギーの値に於て變化なし、此をエネルギー保存の理 principle of Conservation of Energy (Mayer 1842, Helmholtz 1847) と名く。次元的關係は $[mgy] = [\frac{1}{2}mv^2] = [L^2MT^{-2}]$ なり。

51 遠心力 centrifugal force (Huyghens 1673) 物体 P が (第六八圖) O を中心として等速圓運動をなすときは求心加速度 γ は第一章 (13) 式により v^2/r なるゆへ、求心力は ニュトン 第二則により mv^2/r なり。然れども求心力のみ物体に作用すれば物体は早晚中心 O に向て落体運動をなすべき筈なれども、OP の距離一定不變なるは求心力に等しく且つ反對なる遠心力の存在することを明示す。故に物体は圓運動をなしつゝあれども、運動に垂直なる方向に於ては求心、遠心二力釣合を得て、所謂動中の靜に在るものなることを悟るべし。遠心力存在の理由は遠心加速度の存在に因る、而して遠心加速度の存在するは物体の相對加速度に依りて容易に説明するを得べし。觀察者若し P と共に圓運動をなすと想像するときは其目撃するところの物体運動は相對運動となり、其加速度は相對加速度となる。



物体は PO の方向に於ては靜止の狀に在れども、求心力突然中止するときは ニュトン第一則に依り P は切線 PA 上に直線等速運動を営むべきにより、 t 時後に P 点は Q に來るべきものとせば、物体は R の位置に來り、恰も t 時間に QR の距離を畫くべきものと思ふべきなり、其時の加速度 γ は

$$QR = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

に依りて與へらる。從て ニュトン 第二則により QR の方向に力の作用したることを示す、其力を F とすれば上式より

$$F = m\gamma = m \frac{2QR}{t^2} \dots\dots\dots (16)$$

を得べし。然るに $QR = OR - OP = \sqrt{OP^2 + PR^2} - OP$ 。又 l を小さくすれば P,

Q 二点接近し、極限に於て $PR=PQ=cl$ 。依て

$$QR = \sqrt{r^2 + v^2 t^2} - r = r \left\{ \left(1 + \frac{v^2 t^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} = r \left\{ \left(1 + \frac{v^2 t^2}{2r^2} + \dots \right) - 1 \right\} \approx \frac{v^2 t^2}{2r}$$

之を (16) 式に代入すれば

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

となる、即ち遠心力は求心力に等し。又第一章 (14) 式に依り $F = m\omega^2 r$ と書くことを得。

糸端に物体を附着し他の端を中心として等速圓運動をなさしむれば糸の張力は求心力に等し。遠心力は相對運動の結果として發生し張力と釣合を保もつ。力は必ずしも物質より發射するものに非ることは此によりて明かなり。又運動のエネルギーは $\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ なるゆへ r 増加するに従ひ (ω は一定なり) 運動のエネルギー増加す、 r の増加とエネルギー増加との比は

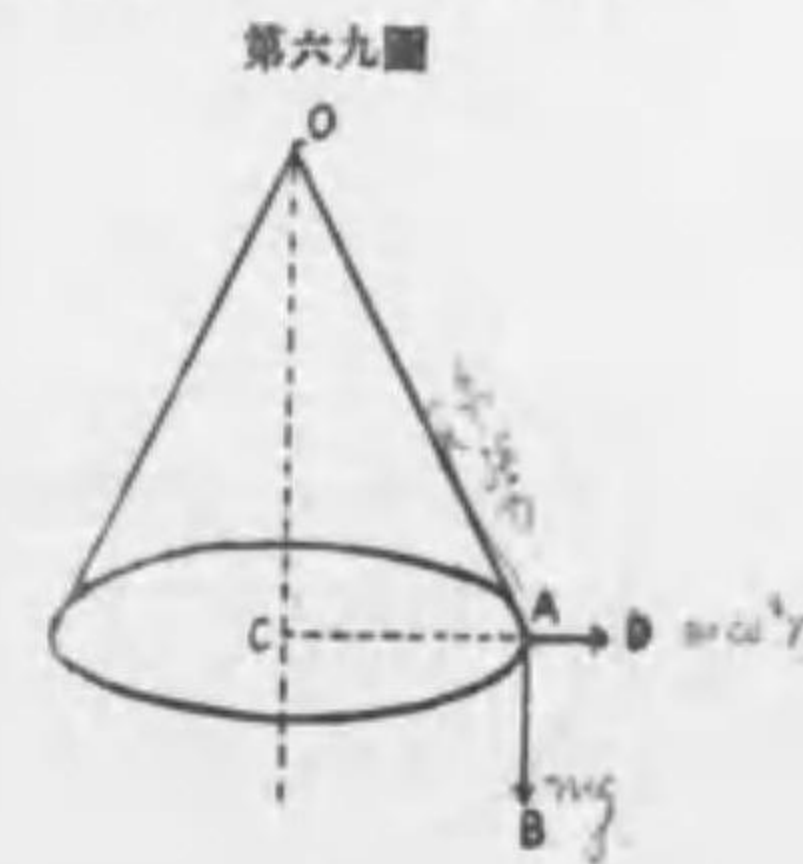
$$\frac{d(\frac{1}{2}m\omega^2 r^2)}{dr} = m\omega^2 r$$

によりて與へらる、然るに右側は遠心力 F に等し、依て兩側を積分すれば

$$\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \int F dr \dots\dots\dots (17)$$

右側は仕事となる (仕事は力と距離との積なり)、故に位置のエネルギーは運動のエネルギーに等しく、其和は $m\omega^2 r^2$ なり。

52 圓錐振子 伸びざる、重さなき糸の一端 A (第六九圖) に物体を附着し、他端 O を固定し OA, CA に垂直に、水平面内に於て適當なる運動量 mv を物体に與ふるときは A は等速圓運動をなすべし。OA は母線となりて直圓錐體を畫くがゆへに圓錐振子 conical pendulum の名あり。CA = r, OA = l, OC = h とすれば、物体の重さ mg は AB の方向に、遠心力 $m\omega^2 r$ は AD の方向に、糸の張力 T は AO の方向に働き、三力釣合の狀にありて、 $\triangle ACO$ の三邊は實に此の三力に平行なり、依て



$$\frac{OC}{mg} = \frac{CA}{m\omega^2 r} = \frac{AO}{\tau} \quad \text{即} \quad \frac{h}{mg} = \frac{r}{m\omega^2 r} = \frac{l}{\tau} \dots\dots\dots (18)$$

より

$$\tau = m \frac{gl}{h}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

を得。今圓運動の週期を T とすれば $\omega = 2\pi/T$ により

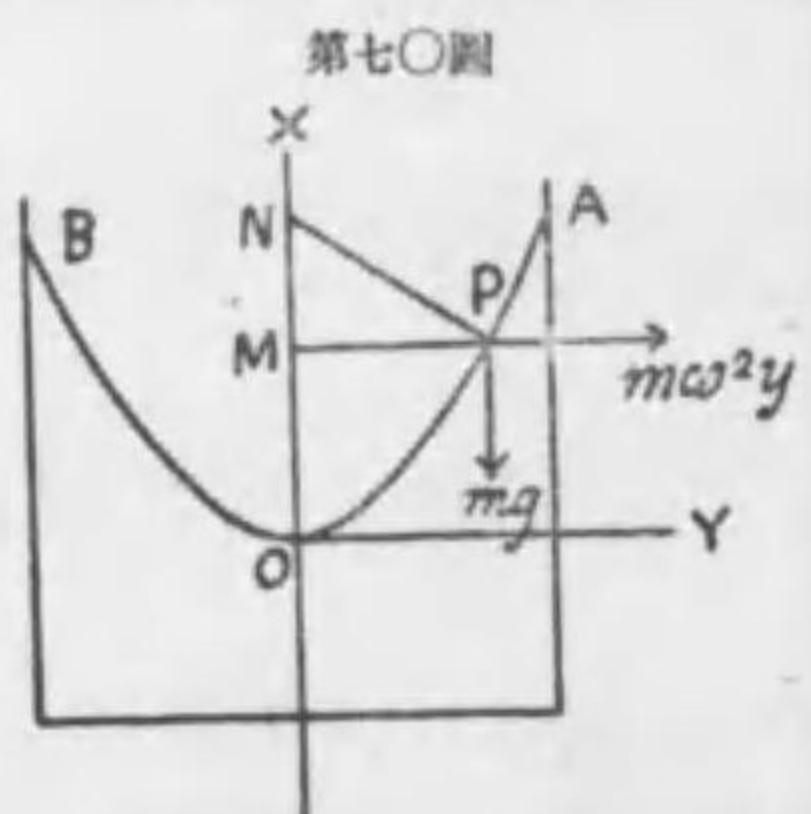
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \dots\dots\dots (19)$$

を得べし、最初與へたる運動量は不變にして $mv = m\omega r = m\tau \sqrt{\frac{g}{h}}$ に等し。

53 回轉液の放面 圓筒に水を盛り筒底の中心に垂直なる軸を設け(第七〇圖)

其軸上に回轉すれば水の放面 free surface

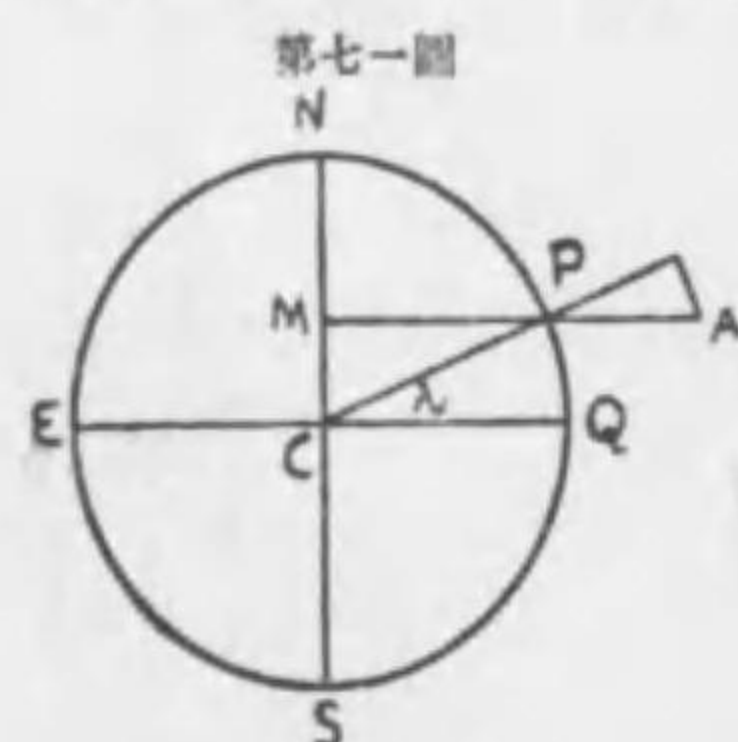
BOA は左右相稱の曲線となる。放面上の一点 P に作用する力は重さ mg、遠心力 $m\omega^2 y$ (MP=y)、及び放面に垂直なる抵抗力 p なり。△PMN の三邊は此三力に平行なるを以て



$$\frac{PN}{p} = \frac{NM}{mg} = \frac{MP}{m\omega^2 y}$$

依て $NM = g/\omega^2$ 即ち次法線 (subnormal) は常數なり、次法線は $y dy/dx$ なるゆへ $y dy/dx = g/\omega^2$ を積分すれば $y^2 = 2gx/\omega^2$ なる拋物線を得。放面の形は拋物面なり。又液面の抵抗 p は $m\sqrt{g^2 + \omega^4 y^2}$ にして諸處不同なり。

54 地球表面上 g の變化



NS を (第七一圖) を地軸とし、EQ を赤道とし、地球の半徑を R、P を北緯 λ の海面上の物体とす。地球自轉速度を ω とすれば、P の遠心力 PA は鉛直即ち CP の方向に $m\omega^2 MP \cos \lambda$ なる分力を有して重力 mg_0 に反向するを以て、P の重さ mg は $mg_0 - m\omega^2 MP \cos \lambda$ となるべし。但し g_0 は地球自轉せざるときの g の値なり、依て

$$g = g_0 - \omega^2 R \cos^2 \lambda \quad \text{或は} \quad g = \left(g_0 - \frac{\omega^2 R}{2} \right) - \frac{\omega^2 R}{2} \cos 2\lambda$$

此に數値を代入すれば

$$g = 9.806 - 0.026 \cos 2\lambda$$

を得。g は兩極に於て最大なり。尙ほ地球は南北軸は赤道軸よりも短かく、兩極は地心に近きゆへ、g は一層兩極に於て大となる。地球内部に降れば物体の重さは減ず。地上より高處に昇るも同様なり、従て兩極の海面を g の値極大の處とす。重力は距離の平方に反比例するゆへ、海面上 h の高さに於ける g は

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$$

即ち略近に $g = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R} \right)$ なり。今 h を米にて示せば $\frac{2}{R} = 0.3147 \cdot 10^{-6}$ なりとす。

55 弦運動 質点が O を中心として (第一九圖) BB' 上に弦運動をなすときは、求心力は第一章 (18) 式により

$$F = -m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y = -m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a \sin \frac{2\pi t}{T} \dots\dots\dots (20)$$

なり、此場合には質点は BB' 上に釣合を得ざるが故へ、遠心力存在する理なし。第一章(16)式の平方より

$$y^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \frac{2\pi t}{T}$$

を得、各項に $\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$ を乗ずれば、第一章 (17) 式と上(20)式とにより

$$\frac{1}{2} Fy = \frac{1}{2} ma^2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - \frac{1}{2} mv^2$$

即ち

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} ma^2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \dots\dots\dots (21)$$

となる。然るに求心力は中点 O に於ては零、變位 y に於ては $-m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y$ 。振幅の兩端 B 又は B' に於ては $-m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a$ にして、O 点と y 点とに於ける平均値は $-\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y$ 、依て此に等しく且つ反對なる力 $\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y$ を以て y の距離を動かせば、位置のエネルギー (即ち仕事) は $\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y^2$ となる、同様に振幅の端に於ては エネルギー は $\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a^2$ なり。然るに兩端に於ては $v=0$ にして運

動のエネルギー零なり、故に(21)式はy点に於ける兩エネルギーの和は常に一定にして一端に於けるエネルギーに等しきことを示す。

解析的に弦運動を説くには先づ求心力が變位yに正比例する式

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \dots\dots\dots (22)$$

より出發す、爰にkは單位距離に於ける求心力を示す。兩側にdyを乗じて積分すれば

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{2} ky^2 + c \dots\dots\dots (23)$$

を得、cは積分常數なり。y=0とすれば左側は中点に於ける運動エネルギー $\frac{1}{2} mu^2$ となるにより、 $c = \frac{1}{2} mu^2$ なるを知る。uは中点を過るときの速度を示す。従て上式は

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} mu^2$$

となり(21)式と同一なることを認むべし。又(23)式を變化すれば

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = u^2 - \frac{k}{m} y^2$$

依て

$$t = \int \frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{y}{u}\right)^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{y}{u}$$

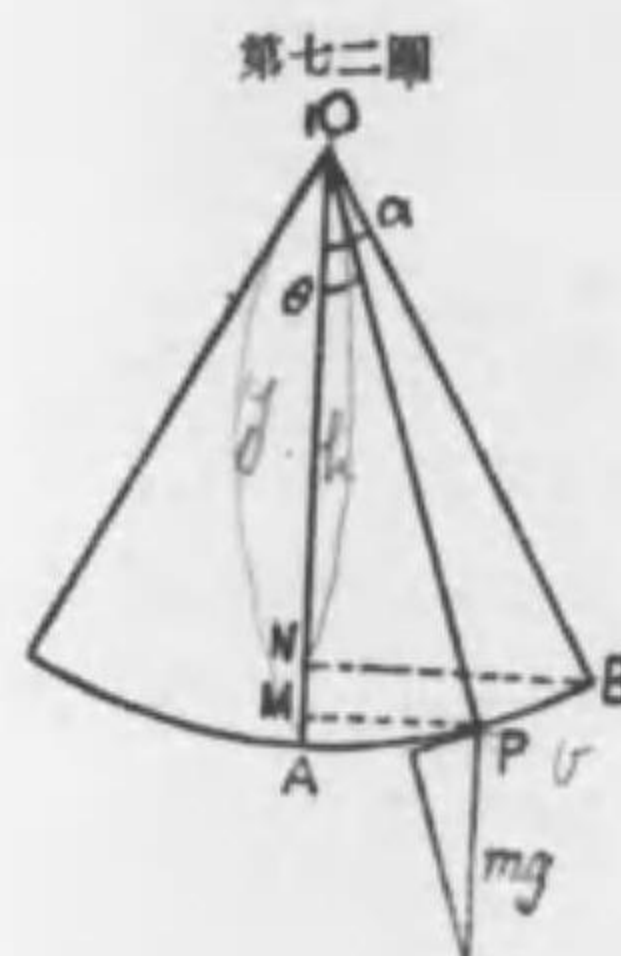
を得べし、但し積分常數を省く、之を變形すれば

$$y = u \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t$$

なる弦運動となる。

56 振子運動 (Hnyghens 1673) 圓錐振子と同一の装置を作り鉛直面に振動せしむるときは之を單一振子 simple pendulum と稱す。最初Bまで引上げて放てば(第七二圖)質点は圓弧に沿ふて降る故へP点に於ける速度vはエネルギー式

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg(h-y) \dots\dots\dots (24)$$



を満足す、hはBの高さにしてyはPの高さなり。此式を書替へて $\frac{1}{2} mv^2 + mgy = mgh$ とせば、左側はP点に於ける運動、位置の兩エネルギーの和を示し、右側は最高点Bに於ける全エネルギーを示す。Pに働く重さmgを糸OPの方向に分解すれば $mg \cos \theta$ を得、之は糸の張力と釣合を得。糸に垂直なる分力 $mg \sin \theta$ は即ち振子運動を生ずる力なり。OP=l, MP=xと置けば振子の力は $mg \cdot \frac{x}{l}$ となる。故にPMと圓弧PAとを同長と見做し得るほどtheta角が小なる場合には、力は中点Aよりの距離即ち變位に正比例すとなすも不可なきを以て、振子運動は弦運動となる。依て求心力の式(20)より

$$m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 x = mg \cdot \frac{x}{l}$$

を得。従て

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots\dots\dots (25)$$

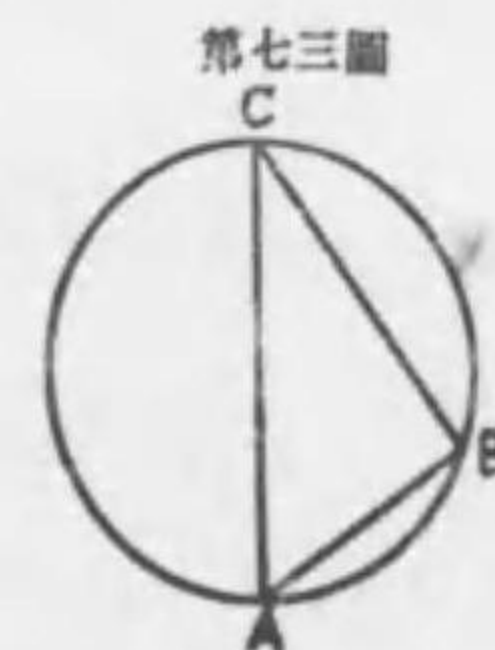
を得べし。此式によれば週期は最初の角AOBに無關係となり。lの長さ一定せる振子は等時性 isochronism (Galileo 1583) を有す。

週期の畧近値を得るには振子運動を斜面運動と見做し、斜面AB(第七三圖)を弦とし、振子の長さに等しき直徑ACを有する圓を畫き、其中心をAの直上にあらしむべし、然るときはABを滑り落る時間は第六三圖により $\sqrt{\frac{2l}{g}}$ となり、週期は其四倍なり、依て

$$T = 2.2\sqrt{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \dots\dots\dots (26)$$

然るに $2\sqrt{2} = 2.828$, $\pi = 3.142$ なるを以て(25)(26)兩式の値近きを認む (Galileo 1638)。週期の精確なる式を得るには第七二圖に於て $h = l(1 - \cos \alpha)$, $y = l(1 - \cos \theta)$, $v = l \cdot d\theta/dt$ と置き(24)式を

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2gl(\cos \theta - \cos \alpha) = 4gl \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$



と書替へ

$$T = 4 \int_0^a dt = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^a \frac{d\theta/2}{\sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

右側を無窮級数に展開し各項に就き積分すれば T の精確なる式を得べし。其結果、T は a の函数となる。次ぎの畧表を見るべし。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \{1 + f(a)\}$$

α	$f(\alpha)$
0°	0.0000
5°	0.0005
10°	0.002
20°	0.008
30°	0.017
90°	0.180

57 楕圓弦運動 elliptic harmonic motion 横軸、縦軸上に於ける弦運動 (第二二圖) 即ち $x = -a \cos \frac{2\pi t}{T}$ 及び $y = b \sin \frac{2\pi t}{T}$ の組合せは、楕圓運動なることは既に説きたり。質點の質量を m とすれば分力は夫々 $-m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$, $-m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y$ なるゆへ、合力 F は

$$F = -m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \dots\dots\dots (27)$$

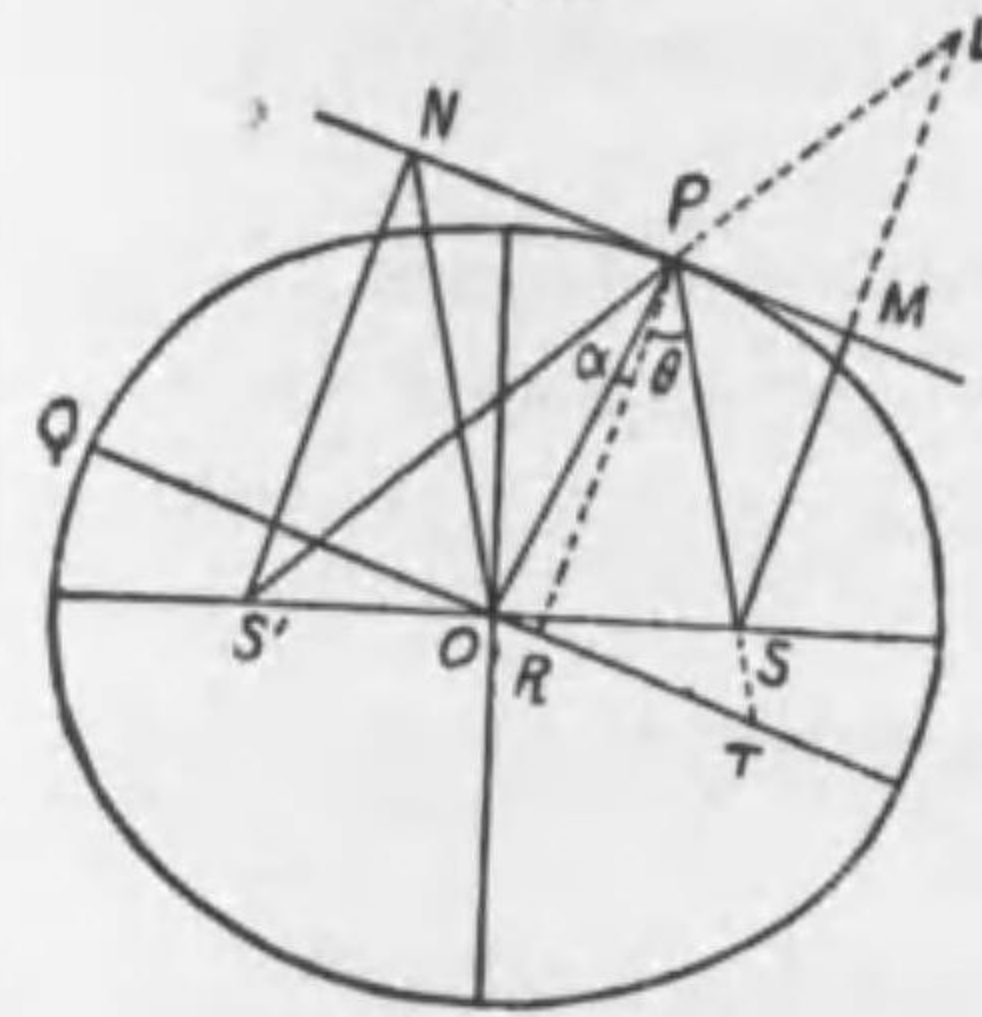
にて示すことを得可し。爰に r は變位 OP なり (第七四圖)。F は中点 O に於て零なり、故に OP 線上に於ける平均値は $\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ となり、此力に逆つて質點を O より P まで動かす仕事は當に $\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^2$ となるべし、此を P 点に於ける位置のエネルギーとなす。原式を微分すれば分立速度は夫々

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi a y}{T \cdot b}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi b}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} = -\frac{2\pi}{T} \frac{bx}{a}$$

となり、其平方の和は $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}\right)$ なり。故に今 OP の共軛半徑 OQ を r' と名くれば運動のエネルギーは

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r'^2$$

第七四圖



となり、運動位置兩 エネルギー の和 E は

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (r^2 + r'^2) \dots\dots\dots (28)$$

となる。然るに アポロニウス の定理に依り $r^2 + r'^2 = a^2 + b^2$ なるゆへ

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (a^2 + b^2) \dots\dots\dots (29)$$

故に全 エネルギー は常住なり。

又 P に切線を引き焦点 S, S' より垂線 SM, S'N を下だし、SM の延長と

SP の延長とが L に會すとせば、切線は外角 LPS を二等分する故へ M は SL の中点なり、然るに $\triangle LPS$ に於て OM は夫々二邊の中点なるを以て SP は OM に平行なり。同理により SP は ON に平行をなす、依て QO の延長と PS の延長とを T に於て會せしむれば $NO = PT$ なるを知る。又 O を中心とし楕圓に外切する圓を畫くときは M, N 二点は其圓周上に在るべし、故に $ON = a$ 、從て PT も a に等しく、P を通り法線 PR を引くときは圓に依り

$$PR = a \cos \theta = r \cos \alpha \dots\dots\dots (30)$$

なる關係あり。

P に於ける曲率半徑を ρ とすれば其方向は PR と一致し、P 点の法線加速度は v^2/ρ なり、此は r の方向に作用する求心加速度の分立なるを以て (27) に依り

$$\frac{mv^2}{\rho} = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \cdot \cos \alpha = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \cos \theta \dots\dots\dots (31)$$

なり。加之、楕圓の性質により $\frac{SM}{SP} = \frac{S'N}{S'P}$ 及び $SM \times S'N = b^2$ なるゆへ

$$SM^2 = \frac{PS}{PS'} \cdot b^2 \dots\dots\dots (32)$$

なり。

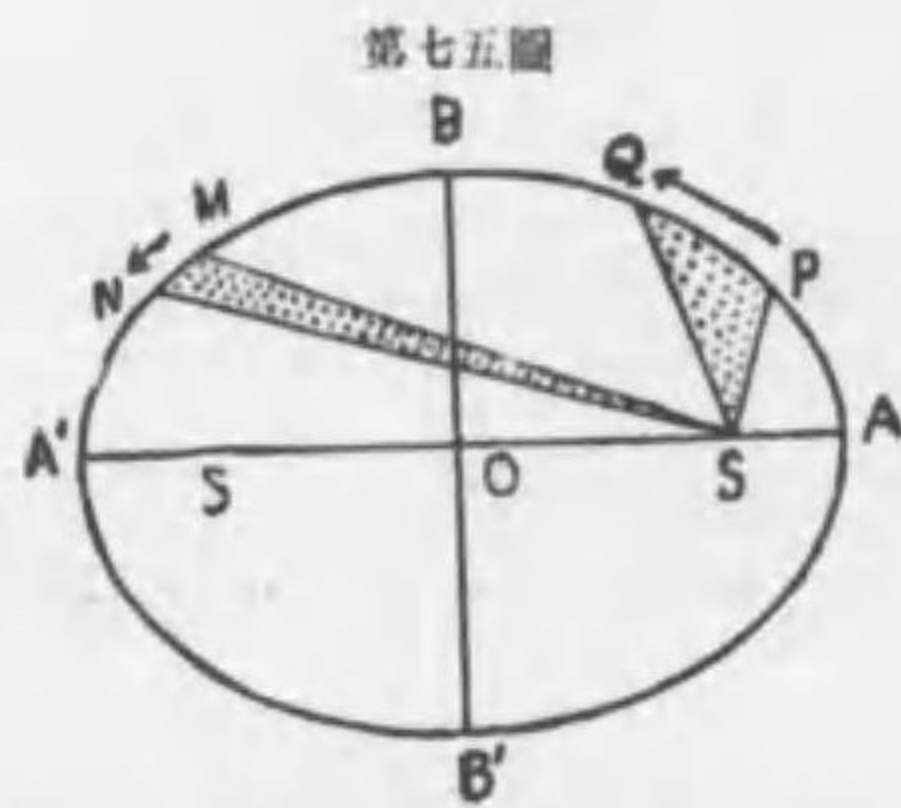
58 ケプラー三法則 トレミー の天動説 (Ptolemaios 130) は永く思想界を支配せしも、コパニクス (Kopernikus 1543) 出でて地動説を唱道し、太陽を中心位置、遊星は圓形の軌道を書きて之を公轉することを教示せり、其後 ケプラー

(Kepler) は其師 ブラヘー (Brahe) の火星観測記録に基づき遊星軌道に関する第一第二法則 (1609) を発見し、引續き軌道の大きさと公轉時の關係を示す第三法則 (1618) を発見せり。後年に至り ニュートン (Newton's Principia 1686) はケプラー、ガリレオ 兩學者の研究を基礎として宇宙重力の大法に到着し、天体力學 Celestial Mechanics の開祖となれり。ケプラーの三大法則は次ぎの如し。

第一則、遊星は楕圓の軌道を踏みて太陽を公轉し、太陽は其二つある焦点の一つを占有す。

第二則、遊星の導徑 radius vector (太陽と遊星を結ぶ直線) は等時間に等面積を書く。

第三則、遊星公轉時の平方は太陽よりの平均距離の立方に正比例す



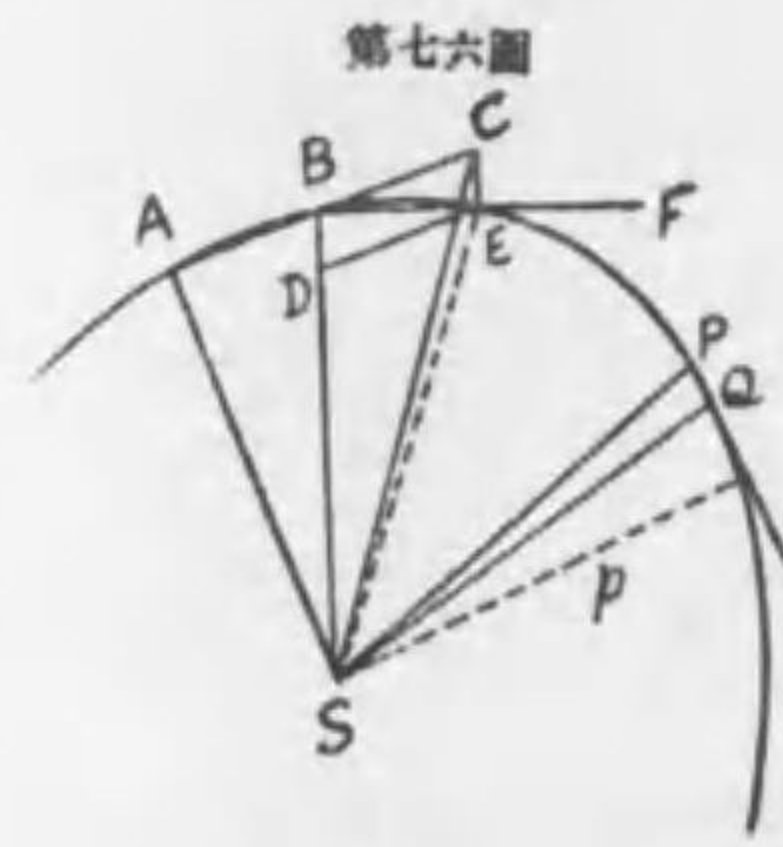
二つの焦点 S, S' を過りて (第七五圖) 引きたる直徑 AA' を長軸と稱し其長さを 2a とす、a は半長軸 semi-major axis の名あり。中心 O を過りて之に垂直なる直徑の長さを 2b とす、b は半短軸 semi-minor axis の名あり。又 OS/OA = e を離心率 eccentricity と稱す。各遊星は北極星より見れば矢の如く反針の方向に太陽 S を公轉す。導徑 SP が等しき時間、例へば一ヶ月間に書く面積 PSQ は遊星が M に來りしとき復た一ヶ月間に書く面積 MSN に等し。又 A に於て遊星は太陽に最も近く、之を近日點 perihelion と云ひ、A' に於て最も遠く、之を遠日點 aphelion と稱す。SA と SA' との平均は a に等しく、諸遊星の半長軸 a の立方は夫々公轉時の平方に比例す。例へば a₁, a₂, a₃ ... を半長軸とし T₁, T₂, T₃ ... を夫々公轉時とすれば

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{a_3^3}{T_3^2} = \dots = c \dots \dots \dots (33)$$

爰に c は或常數なり。一例を舉れば木星の公轉時は十二年なるゆへ $\sqrt{12^2} = 5.2$ 。即ち太陽を距ること地球の五倍餘なることを知るべし。

ケプラー第二則は ニュートン 運動第一則に依りて容易に説明するを得べし。然

れども其實 ニュートン はケプラー 第二則に基づき慣性の法則を誘導したるものなりとす。今 (第七六圖) 遊星は一秒間に AB を書きしものと假定すれば、慣性



により第二秒間には AB に等しき BC を書くべき筈なれども、S より出づる中心力のためには BD を書かざるべからず、故に遊星は BC, BD の合成運動をなして BE を書くこととなるべし。然るに $\triangle ABS = \triangle BCS = \triangle BES$ なるを以て、此二秒間に書きし面積は各々相等し。遊星は單位時間に PQ を書くものとせば、

PQ = v なり。PQ 線上に S より垂線 p を下だせば、 $\triangle PQS$ の面積は極限に於て $\frac{1}{2}pv$ なり。然るに楕圓の面積は πab にして單位時間には $\frac{\pi ab}{T}$ の面積を書くゆへに

$$\frac{1}{2}pv = \frac{\pi ab}{T} \dots \dots \dots (34)$$

を得。又 $SP = r$, $\angle PSQ = \omega$ と置けば $\triangle SPQ = \frac{1}{2}r^2\omega$ なり、依て

$$\frac{1}{2}r^2\omega = \frac{\pi ab}{T} \dots \dots \dots (35)$$

次に S を過り X, Y 兩軸を引き、P の坐標を x, y とし PQ なる速度の分解を $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ と置けば面積速度の二倍は

$$2 \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{2\pi ab}{T} \dots \dots \dots (36)$$

と書くことを得べし。(34)(35)(36) は各々 ケプラー 第二則を表示する式なり。

59 運動量の能率 moment of momentum 上記三式に各々 m を乗するときは運動量の能率が不變なることを示す式となるべし。即ち外部より力の作用 (従て能率の作用) すること無きときは、太陽系統諸遊星の運動量能率は常恒なることを教示するものなり。此を運動量能率の保存 conservation of moment of momentum と云ふ。

遊星の軌道を XY 平面内に制限せずして、之を空間に置き、S を過りて互ひに垂直なる三軸 XYZ を引き (36)式に類似の式

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=c_1, \quad m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=c_2, \quad m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=c_3 \dots\dots\dots (37)$$

を作るときは c_1, c_2, c_3 は行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ m\frac{dx}{dt} & m\frac{dy}{dt} & m\frac{dz}{dt} \end{vmatrix}$$

の小行列式に等しきを認むべし。今 (37) に夫々 x, y, z を乗じて相加ふるときは

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0 \dots\dots\dots (38)$$

を得べし、此は S を過る平面の方程式にして、即ち遊星軌道を含むところの平面の位置常恒なることを示す (Euler 1765)。此を公轉面の保存 conservation of the plane of rotation と稱す。

(37)式の c_1, c_2, c_3 は運動量能率 ベクトル の XYZ 三軸に平行なる分解値を示す。遊星の場合には外部より能率働くに非れば c_1, c_2, c_3 は各々常數にして、従て (38) の平面は空間内に固定すれども、外能率作用すると假定する場合には (37) を t に就き微分して次ぎの結果を得べし

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{dc_1}{dt}, \quad m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\frac{dc_2}{dt}, \quad m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{dc_3}{dt} \dots\dots\dots (39)$$

然るに $m\frac{d^2x}{dt^2}$ 等は力を示し、此式は力の能率を示す。故に曰く運動量能率の單位時間毎の増加は力の能率に等し (Euler 1748)。

吾人は第二章 ニュートン 運動則に於て運動量 mv の單位時間毎の増加は力に等しきことを學べり。(39)式が示す定理は恰も此に該當するものにして、此定理を一層精確に習得せしめんがために、ニュートン 則に習ひ、公轉体に關する次ぎの三法則を謹記すべし。

第一則、外力の能率作用せざるときは、一つの中心を公轉する物体の其中心に關して取りたる運動量能率は常住にして、公轉軌道面は空間に固定す。

第二則、公轉体に作用する力の能率を其中心に關して取りたるものは、運動量能率の單位時間毎の増加に等し。従て中心力の場合には其能率は消失す。

第三則、原力能率は反力能率に等しく且つ反對なり。

等速圓運動の場合に運動量の能率が保存せらるゝは容易に認め得べく、其値は

欠

=240000 × 5280 呎 なるゆへ

$$\frac{g}{60^2} = 0.00894, \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = 0.00899$$

となり、兩値妙合するを見て、ニウトンは自説の正鵠を得たることを悟りしなり、ニウトンは地上に於ける物体の重量の觀念を擴張して月の引力に及ぼしたるのみならず、尙ほ廣く宇宙全部の天體間の引力を重力によりて説明したるを以て、此を宇宙重力の法則 Law of Universal Gravitation と稱するに至れり。今二つの物体の質量を m, M とし、各重心間の距離を r とすれば、引力は質量の積に正比例し、距離の平方に反比例す、公式は

$$F = -k \frac{mM}{r^2} \dots\dots\dots (43)$$

なり。 k は常數にして重力常數 gravity constant と名けらる。

$\left[\frac{mM}{r^2}\right] = [L^{-2}M^2], [F] = [LMT^{-2}]$ なるゆへ $[k] = [L^3M^{-1}T^{-2}]$ 、即ちケプラーの常數 $c = a^3/T^2$ を質量にて除じたる商のヂメンションに等し。(42)式と(43)式とは同一の法則を表はすゆへ

$$kM = 4\pi^2 c \dots\dots\dots (44)$$

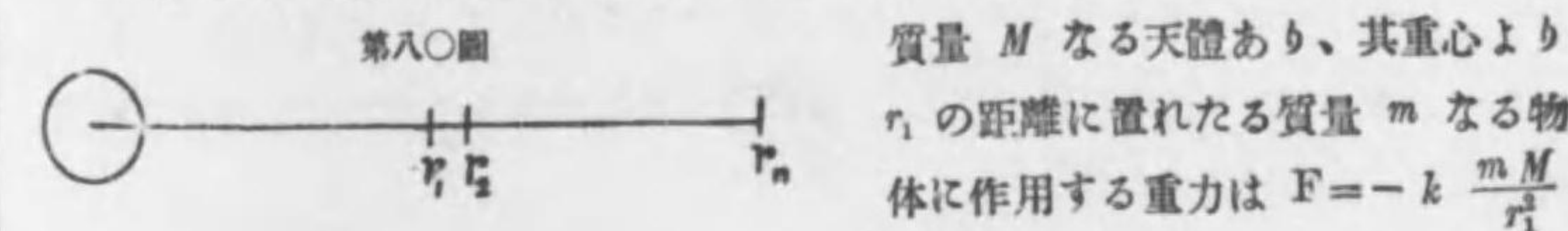
此に依り $[k] = [c/M] = [a^3/(T^2M)]$ の理を悟るべし。

k の物理的意義を知らんとせば(43)式中に $m=1, M=1, r=1$ と置くべし、然るときは $F=k$ となる。故に k は單位質量の物体兩つを單位距離に置きたる時の引力に該當す。即ち各々一瓦の物体を一徑の距離に置けば兩物体間の引力は k ダイナなりと云ふに等し。又た m 瓦の物体を半徑 R 哩なる地球の表面に置くときは其重さは mg ダイナなるを以て M に地球の質量を代入すれば(43)式より $mg = k \cdot mM/R^2$ 即ち

$$k = \frac{gR^2}{M} = \frac{6.6579}{10^8} \text{ c.g.s.} \dots\dots\dots (45)$$

なるべし。

外力が重力に逆つて物体を動かすときは外力は仕事を奏す。爰に(第八〇圖)



欠

なり。\$r_2\$ の距離に来らば減じて \$-k \frac{mM}{r_2^2}\$ となる。故に仕事を \$k \frac{mM}{r_1^2}(r_2-r_1)\$ とすれば大なるに過ぎ、\$k \frac{mM}{r_2^2}(r_2-r_1)\$ とせば小なるに失す、依て兩者の比例中項を取り

$$\frac{k m M}{r_1 r_2} (r_2 - r_1)$$

即ち

$$k m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

なる仕事を得べし。同様に \$r_2\$ より \$r_3\$ まで、次ぎは \$r_3\$ より \$r_4\$ まで動かし遂に \$r_n\$ に至る全仕事は

$$k m M \left\{ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right) \right\} = k m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n} \right) \dots (46)$$

斯く \$m\$ を \$M\$ より遠方に持ち行く程之に要する仕事は大なり。仕事は \$m\$ の位置のエネルギーを表はするものなれども決して其全量を表はすものにあらず、何となれば \$r_1\$ の時の値不決定なればなり。故に \$r\$ の距離に於ける位置のエネルギーを示すには單に \$C - \frac{k M m}{r}\$ と書いて満足すべし。

(46)式を導く一層精確なる方法は \$dr\$ 宛に進みて \$r_1\$ より \$r_n\$ に至る仕事の總和を計算するに在り、即ち

$$\int_{r_1}^{r_n} k \frac{mM}{r^2} dr = \left[-\frac{k m M}{r} \right]_{r_1}^{r_n} = k m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n} \right)$$

なり。單位質量の物体を \$r\$ より \$\infty\$ まで動かす仕事を得るには \$m=1, r_1=r, r_n=\infty\$ と置くべし。此値を位數 potential と稱す、即ち

$$\text{位數} = \text{potential} = \frac{k M}{r} \dots (47)$$

なり。今 \$r\$ の半徑を以て \$M\$ の重心を中心とし球面を書くときは、其球面上の諸点に於て位數は同一の値を有すべし。故に此球面は等位面 equipotential surface なり。位數は方向を有せず、従て エクトル にあらず。又 \$M\$ に近き点は位數大にして、\$M\$ に遠き点は位數少なり。故に力は位數増加する方に向て働くことを悟るべし。詳論は後章に譲る。

吾人は更に進んで遊星の運動のエネルギーを算出する法を學ばんとす。第七六圖に於て \$PQ\$ を速度 \$v\$ とし、太陽 \$S\$ より \$P\$ 点の切線に垂線 \$p\$ を下だすときはケプラー第二則により

$$\frac{1}{2} v p = \frac{\pi a b}{T}$$

なることは既に説明したり。\$p\$ の値は橢圓楕運動 (32)式により 第七四圖に於て \$SM=p, PS=r\$ と置きて

$$p^2 = \frac{r}{2a-r} \cdot b^2$$

より算出せらるべし。依て此を上式に代用すれば

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \cdot \frac{2a-r}{r}$$

を得、右側の分母に \$a\$ を乗ずれば \$a^2/T^2\$ はケプラー第三則により常數 \$c\$ に等しく、従て (44) により

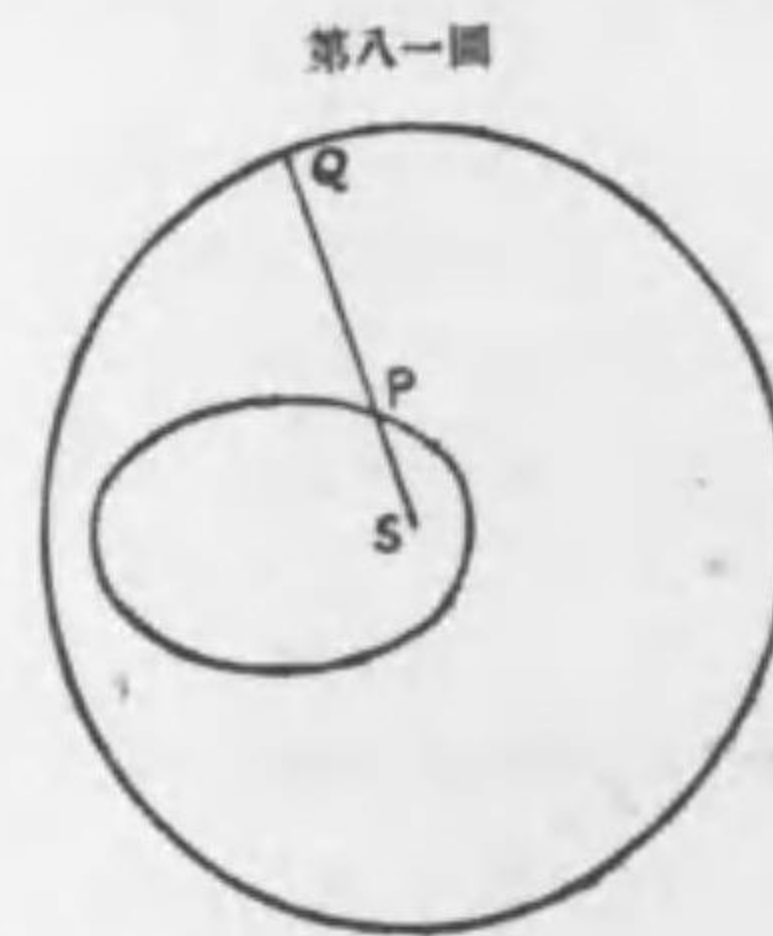
$$\frac{1}{2} m v^2 = 4 m \pi^2 c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) = k m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) \dots (48)$$

を得べし。然るに前理により位置のエネルギーは \$C - \frac{k m M}{r}\$ なるを以て、位置、運動兩エネルギーの和は

$$E = C - \frac{k m M}{2a} \dots (49)$$

即ち常恒なることを知る。

(48)式によれば \$r=2a\$ の時 \$v=0\$ なるを知る。依て \$S\$ を中心とし (第八一圖) 半徑 \$2a\$ なる圓を書くときは此圓周上に於ては速度零にして、\$r\$ の距離なる



\$P\$ に於ては (48)式が示す如く速度は \$v\$ なり。故に曰く、此圓周上の一点 \$Q\$ より \$QS\$ に沿ふて物体が落下運動を試むるときは、軌道上 \$P\$ に到着したる時の速度は遊星の速度 \$v\$ に等し。

(48)式に於て \$r\$ の距離に於ける速度を \$v'\$ と命ずるときは \$\frac{1}{2} m v'^2 = k m M (1/r' - 1/2a)\$ を得べし、依て兩式の差より

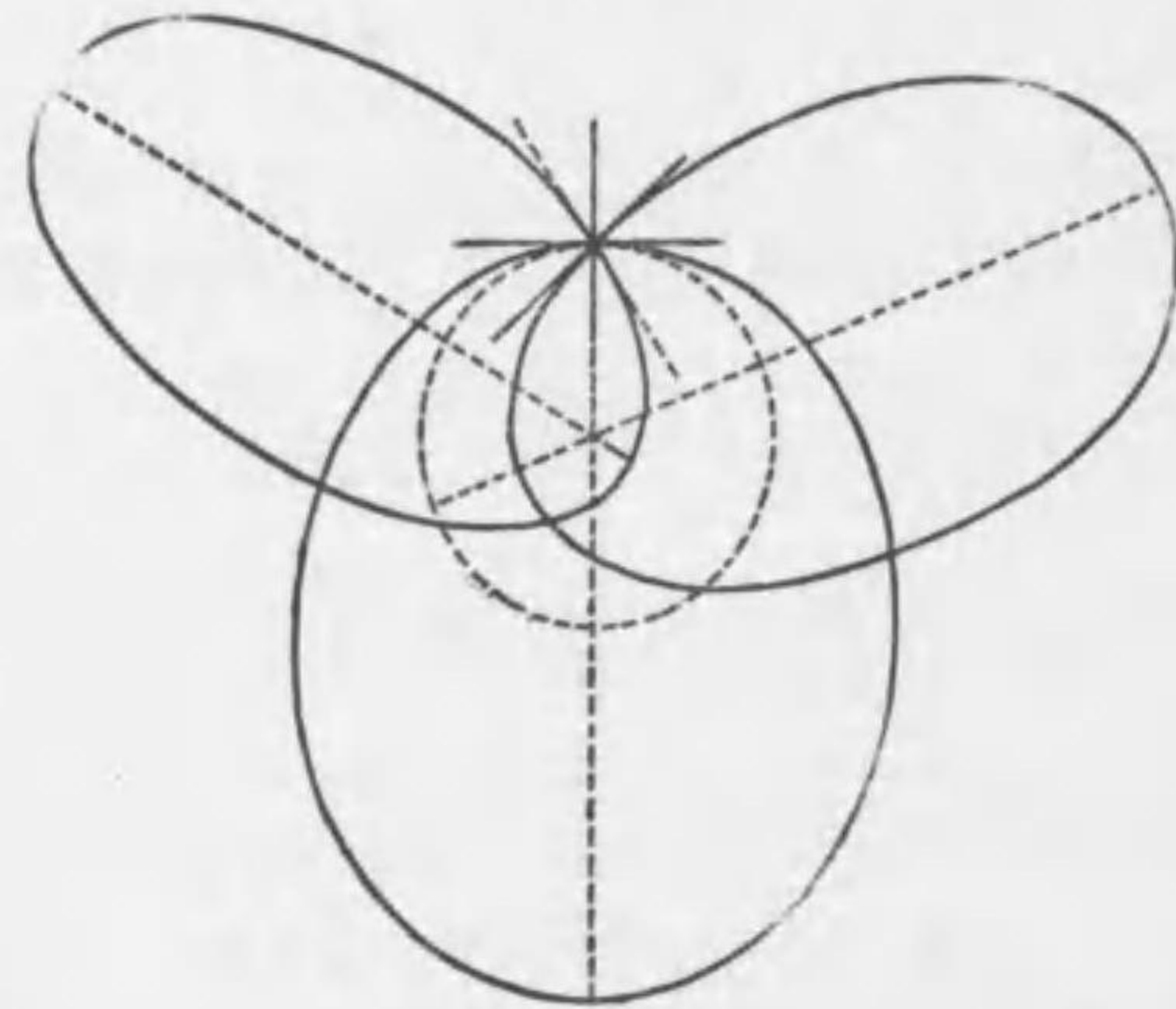
$$\frac{1}{2} (v^2 - v'^2) = k M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \dots (50)$$

となる。之を(41)に比較すれば該式は運動エネルギーの増加は位置エネルギーの減少に等しきことを示すものなるを知る。今 m なる質量を有する物体が太陽に引かれて無限の距離より徐々に太陽に接近し r の距離に來りて u なる速度を得るものと假定すれば $v=u, r'=\infty, v'=0$ を(50)に代入して $\frac{1}{2}u^2 = kM/r$ を得、又之を(48)に代入すれば

$$a = \frac{r}{2} \left(\frac{u^2}{u^2 - v^2} \right) \dots\dots\dots (51)$$

を得べし。此式に依れば v が u よりも小なるときは $a > 0$ となり、物体の軌道は楕圓なり、 $v > u$ のときは $a < 0$ となり軌道は雙曲線なり、 $v = u$ なるときは $a = \infty$ 即ち軌道は拋物線なり。故に u を拋物線速度 parabolic velocity と名く。例へば太陽より r の距離に於て一つの遊星が數多の小体に分裂したりと假定

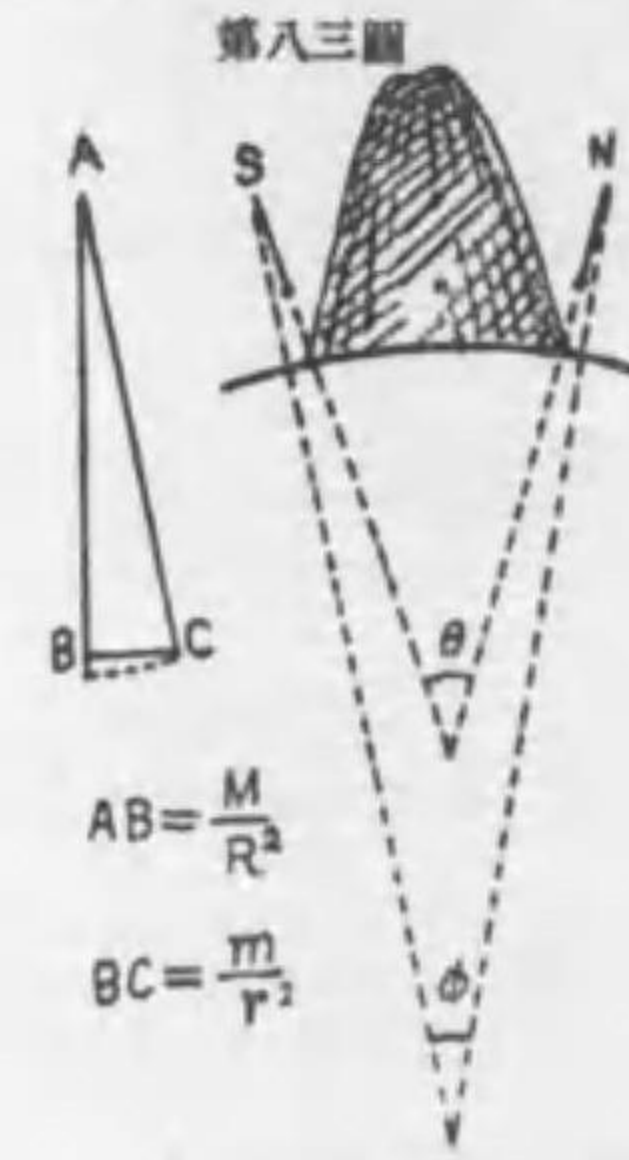
第八二圖



せば、各小体の速度が u よりも小なるか、大なるか、等しきかに従つて畫く軌道は或は楕圓、或は雙曲線、或は拋物線となるべし。若し何れも同速度なりしならんには、皆な同種類中種々の曲線を畫くに相違無きも各長軸 $2a$ は必ず同長なるべし。第八二圖に於て三個の楕圓は各々同一の速度を以て種々の方向に拋出せられたるもの、軌道を示す。点線を以て示したる圓は $v = \sqrt{2}u$ にして方向は r に垂直なり、此時は(51)により $a=r$ なり。

62 地球の密度測定 マスケリン (Maskelyne 1774) は地球の平均密度を測定せんとして蘇格蘭の小孤丘の兩北側に於て鉛線 plumb line を垂れ(第八三圖)、

山の引力のために鉛線の傾きたる角度を實査せしに N,S 兩地の鉛線が互ひに作る角 θ は測量の結果より得たる緯度の差 ϕ よりも大なることを發見せり、即ち $\frac{1}{2}(\theta - \phi) = \delta$ は N 又は S に於ける差にして $\delta = 11.66''$ に達せり。今 m は山の質量、 M は地球の質量、 r は山の重心と調査地との距離、 R は地球の半径とすれば



$\tan \delta = \frac{m/r^2}{M/R^2} = \frac{m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \dots\dots\dots (52)$

なり、可成的精確に m を測定することを得ば上式に依り地球の質量、従つて平均密度をも算出し得べきなり。マスケリンの得たる密度の値は 4.8 なり、其後の測定によれば 5.5 に近かし。

[カゼンデツシユの實驗 Cavendish 1798] 針金の上端を固定し下端に水平棒を附着し其兩端に各々等重の小さき鉛塊を固着したるものを振り天秤 torsion balance と名く。第八四圖の NN' は振り天秤を上方より見たるものなり。針金の弾力が釣合に在るとき他の二つの鉛塊 M',M' は中央に置かる。故に M',M' より M,M の位置に動かすときは M,N 相互の引力により水平棒は少しく回轉變位し針金内に惹起したる捻り弾力と釣合を保つに至るべし。M,N 間の距離を r とし質量を夫々 M,N とすれば重力 kMN/r^2 は既知數なる捻り弾力に等しく、之に依りて k の値を算出し得べし。又 M の重量と比較して地球の質量を推算することを得るものとす。



63 球殼 spherical shell の引力 半径 R 、厚さ d 、密度 σ なる球殼を想像せよ(第八五圖)、其質量は $4\pi R^2 d \sigma$ なり。空洞内の一点 P に m の物体ありとせば、球殼と m との引力を計算するには、P を頂点とし、P を過る直線を母線とせる錐体を作り、球層上に MM', NN' なる小部分を切取ると假定すべし、其質量は夫々 $MM', NN', d\sigma$ な

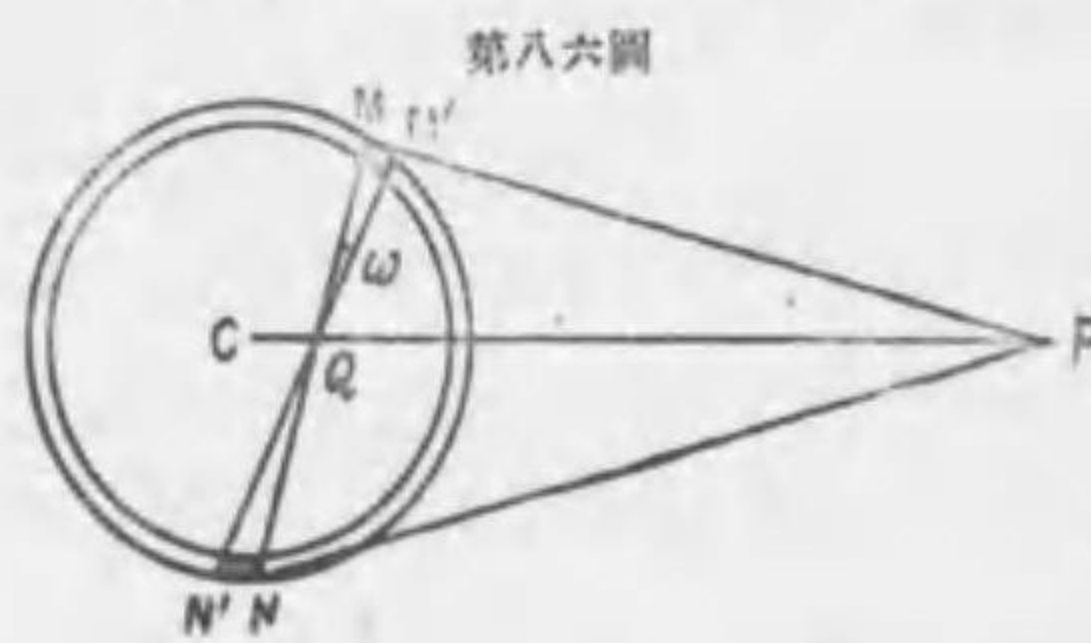


るゆへ (但し MM', NN' は錐体の底面に等しき面積なり)、P に與ふる引力は

$$f_1 = -k \frac{m \cdot MM' \cdot \omega d}{MP^2}, \quad f_2 = -k \frac{m \cdot NN' \cdot \omega d}{NP^2}$$

なり、然るに $\angle PMM' = \angle PNN'$ なるを以て兩三角形は相似をなし、面積 MM' : NN' は $MP^2 : NP^2$ に等し、故に $f_1 = f_2$ 。然らば P を過りて多くの直線を引き、之を母線となして多くの錐体の底面を切り取り、各々 P を引く力を比較すれば各自等しく且つ反對となり、つまり P の引力は零となる。

第八六圖の如く P が球殻の外部に在る場合に於ては CP 上に一点 Q を取り、



第八六圖

半徑 R を CQ, CP の比例中項たらしむ。然るときは $CQ : CM = CM : CP$ なるゆへ $\triangle CMQ$ は $\triangle CMP$ に相似なり。同様に $\triangle CNQ$ は $\triangle CNP$ に相似なり。然るに $\angle CMQ = \angle CNQ$ なるを以て、PC は P 角

を二等分す。前の如く、Q を過り共通なる母線を以て小き錐体を書き、頂点の立体角を ω とすれば MM' 及び NN' の質量は夫々 $MM' \cdot \omega d$, $NN' \cdot \omega d$ となり、P との引力は夫々

$$f_1 = -k \frac{m \cdot MM' \cdot \omega d}{MP^2}, \quad f_2 = -k \frac{m \cdot NN' \cdot \omega d}{NP^2} \dots \dots \dots (53)$$

なり。然るに前記の如く面積 $MM' : NN' = MQ^2 : NQ^2$ なるのみならず、PQ は三角形 MPN の頂角 P を二等分するに因り $MP : NP = MQ : NQ$ となり、従つて上式に於て $f_1 = f_2$ なり。

今 $\angle MPC = \angle NPC = \angle CMQ = \angle CNQ = \alpha$ と置けば f_1 と f_2 と合力は PC 上に生じ、其値は

$$f = f_1 \cos \alpha + f_2 \cos \alpha = 2f_1 \cos \alpha$$

となる。然るに面積 $MM' \cos \alpha = MQ^2 \cdot \omega$, 又 $CM : MQ = CP : MP$ より

$$MP^2 = \frac{MQ^2 \cdot CP^2}{CM^2}$$

なるを以て、此等を (53) に代入すれば

$$f = -2k \frac{m R^2 \cdot \omega d}{r^2} \dots \dots \dots (54)$$

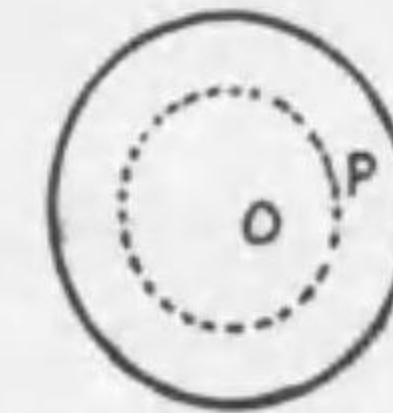
を得べし。全球殻の P に及ぼす引力を知るには立体角 ω を全球に亘りて加算するに在り。然れども $\angle MQM'$ と $\angle NQN'$ とは常に一對を成すを以て、全球に亘るには ω を 2π に擴ぐるを以て充分なりとす。依て

$$F = \Sigma f = -k m \frac{4\pi R^2 \cdot \omega d}{r^2} = -k \frac{m M}{r^2} \dots \dots \dots (55)$$

爰に M は球殻の質量なり。此に依て見れば球殻の引力は其全質量が重心 C に集中したる場合に 等し。第六編 § 294 の ガウス 定理を應用すれば簡易に同一結論に到着し得べし。

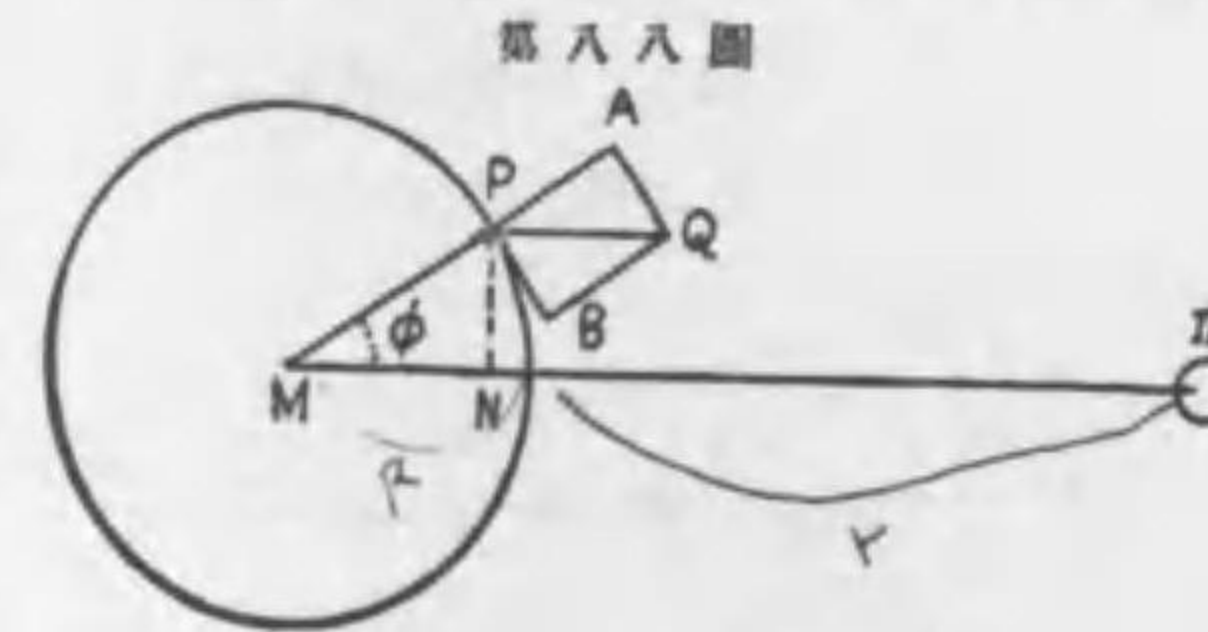
P 点が球殻上に来るときは $r = R$ となり、(55) より $F = -k m A \cdot \omega d$ を得、故に引力は R に無關係なり。

地球は半徑の種々異なる層の球殻の集合と見做し得べきゆへ、地球が地球外の一地点に在る物体に及ぼす引力も地球全質量が其重心に集中せる場合と同様なり。又物体が地球内部に在るときは(第八七圖)地球と物体との引力は(即ち重さ)は恰も P が OP の半徑を有する球に引かるゝと同一にして、外部地殻の引力は零となる。故に地球内に下降するに従つて物体の重さ減少し、中心 O に至りて零となるべし。OP を半徑とする球の体積は $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot OP^3$ 従て其引力は、密度を不変と假定する場合に限り、 $k \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot OP^3 \cdot \sigma / OP^2$ 即ち $k \cdot \pi \cdot \sigma \cdot OP$ となり、OP に正比例す。



第八七圖

64 潮汐 tides. (Newton 1687, Laplace 1790) 月又は太陽が洋水を引くために一日に二回宛干満 ebb and flow を生ず。潮汐を生ずる力、即ち生潮力は、地球を引く力と洋水を引く力との差、即ち相對引力に因るものとす。第八八圖 M



第八八圖

れば地球と月との距離は $60R$ 。地球太陽の距離は $23312R$ ならば生潮力が P を引く力の方向は M, m を結ぶ直線に平行と見做して可なり。P より垂線 PN を引き $\angle PMN = \phi$ と置け

ば、 $MN = R \cos \phi$ は \bar{P} が \bar{M} よりも生潮体に接近せる長さを示す。依て生潮加速度は

$$\gamma = k \frac{m}{(r - R \cos \phi)^2} - k \frac{m}{r^2}$$

即ち $km(2rR \cos \phi - R^2 \cos^2 \phi) / r^2(r - R \cos \phi)^2$ を得。分母を r^2 を以て除じ、 $(R/r)^2$ 以下を省略すれば畧的に

$$\gamma = 2km \frac{R \cos \phi}{r^3} \dots \dots \dots (56)$$

を得べし。故に生潮加速度は生潮体の距離の立方に反比例し、質量に正比例す。今 $R \cos \phi = x$ と置けば上式に依り

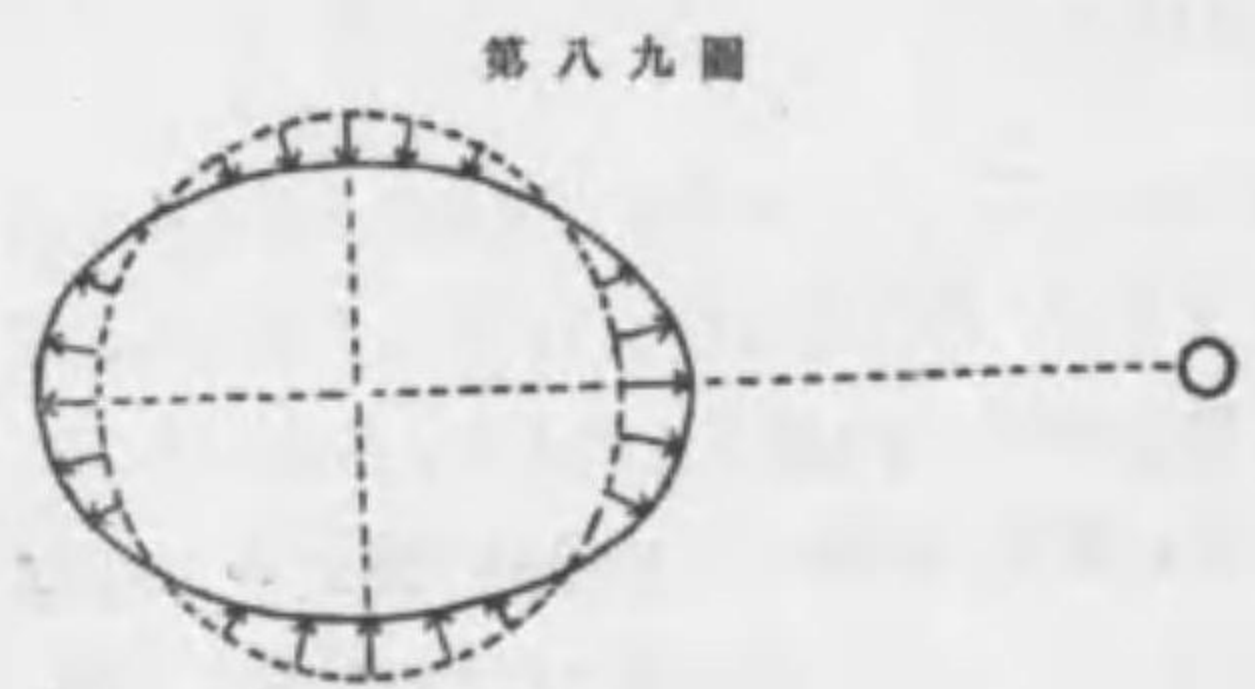
$$\gamma = -x \frac{d}{dr} \left(\frac{km}{r^2} \right)$$

なり。又上圖 PQ を γ とし、PQ を半徑の方と向切線の方とに分解すれば

$$\text{半徑加速度} = \frac{2kmR}{r^3} \cos^2 \phi = \frac{kmR}{r^3} (1 + \cos 2\phi)$$

$$\text{切線加速度} = \frac{2kmR}{r^3} \cos \phi \sin \phi = \frac{kmR}{r^3} \sin 2\phi$$

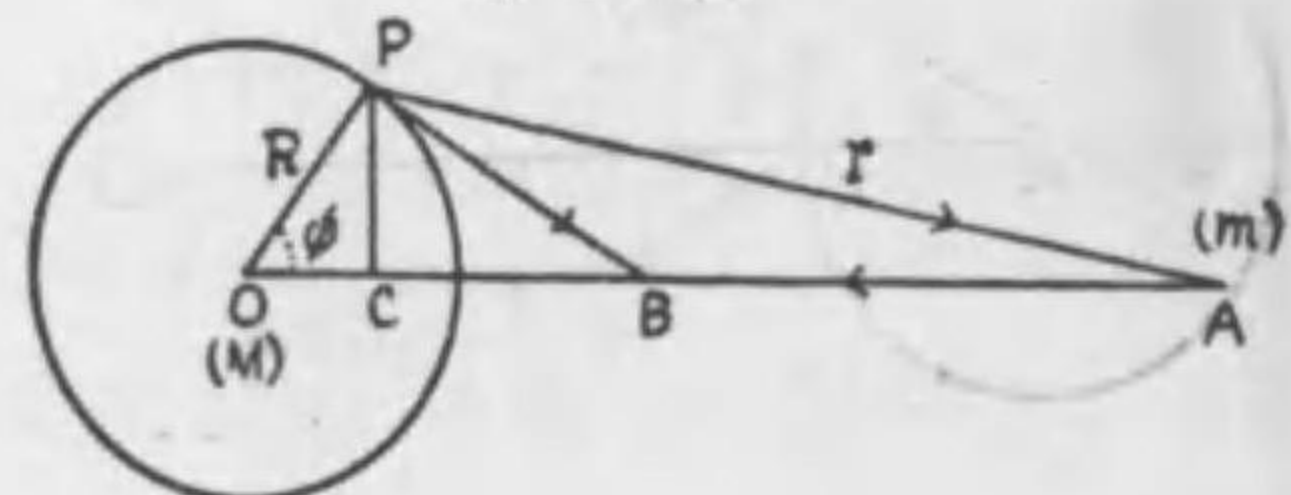
を得べし。 $\phi = 45^\circ$ の時に半徑加速度は零となり、 45° よりも大なる諸点に於ては負數となるにより、洋水面の形狀は第八九圖の如くなるべし。即ち m の反側も



第八九圖

同様に張起し洋水面は回轉楕圓体 prolate spheroid となり長軸は不斷生潮体を指しつゝ其運動を追ふて地球面上に干満の現象を呈す。

上記説明は餘り省略に過るを以て、今少し嚴密なる方法を講ぜんとす。第九〇圖に於て $OA = a$, $PA = r$ とすれば、PA に沿ふて作用する加速度は km/r^2 。OA に沿ふては km/a^2 なり、假



第九〇圖

を講ぜんとす。第九〇圖に於て $OA = a$, $PA = r$ とすれば、PA に沿ふて作用する加速度は km/r^2 。OA に沿ふては km/a^2 なり、假

りに此兩加速度を夫々 PA, BA にて示すときは相對加速度即ち生潮加速度は PB に依て示さるべし。此理は ㄟクトル 方程式 $\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AB}$ を一考すれば自ら明かなり。而して此生潮加速度 γ の數値は

$$\gamma = \frac{km}{r^2} \cdot \frac{PB}{PA} = km \frac{PB}{r^2} \dots \dots \dots (57)$$

なり。又加速度は距離の平方に反比例するゆへ $BA/PA = (r/a)^2$ 即ち

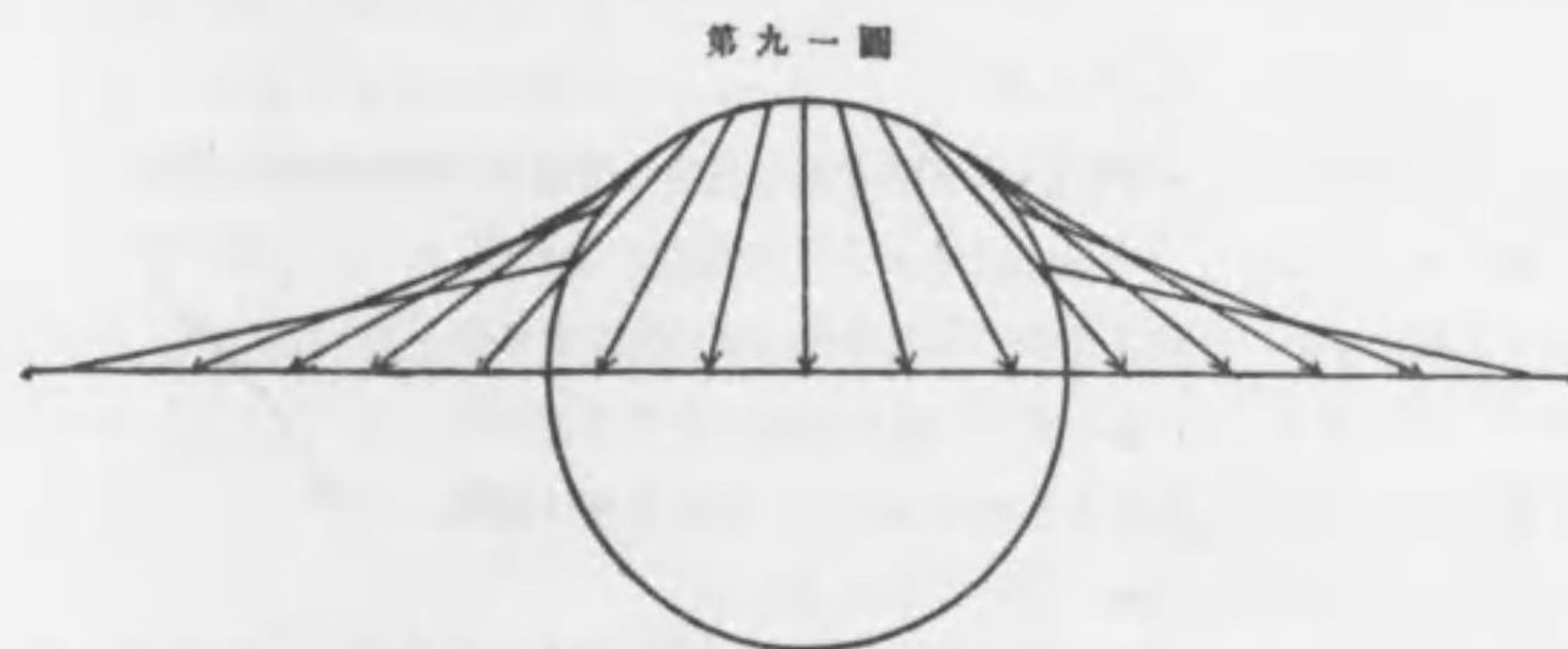
$$BA = \frac{r^2}{a^2}$$

従つて $OB = a - BA = a - r^2/a^2 = (a^2 - r^2)/a^2 = (a-r)(a^2 + ar + r^2)/a^2$ なり、然るに a と r とを殆んど同一と視れば $a^2 + ar + r^2 \approx 3a^2$ なるゆへ、 $OB = 3(a-r)$ 。

又 PA と CA とは殆んど相等しきゆへ $a - r \approx OC$ とするを得べく従て

$$OB = 3OC \dots \dots \dots (58)$$

となる。此結果に基づき地球上諸点に於ける r の方向及び比例的大さを 第九一圖の如く表示することを得べし。



第九一圖

PB を OA に平行と垂直なる (第九〇圖) ㄟクトル に分解すれば CB, PC を得べし、其値は夫々

$$CB = 2R \cos \phi, \quad PC = -R \sin \phi$$

にして半徑 OP は OA に平行及び垂直の方向に夫々 $R \cos \phi$, $R \sin \phi$ に分解するを得るがゆへに、PB を分解して OP の方向 (即ち鉛直)、OP に垂直の方向 (即ち水平) ㄟクトル に分解すれば

$$\text{鉛直ㄟクトル} = R(3 \cos^2 \phi - 1), \quad \text{水平ㄟクトル} = 3R \sin \phi \cos \phi$$

依て (57) により

$$\left. \begin{aligned} \text{鉛直加速度} &= \frac{3kmR(\cos^2\phi - \frac{1}{3})}{r^3} \\ \text{水平加速度} &= \frac{3kmR \sin\phi \cos\phi}{r^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

を得。此内 水平速度は畧法によりて得たるものと殆ど同一なり、鉛直加速度は $\cos\phi = 1/3$ の時消失す、 $\phi = 46^\circ 24'$ は先の 45° に甚近かし。

生潮加速度は生潮体の質量に正比例し其距離の立方に反比例するを以て、太陽と月の生潮力は次式に示す如くなるべし。

$$\begin{aligned} \frac{\text{太陽生潮力}}{\text{月の生潮力}} &= \frac{\text{太陽の質量}(\text{月と地球の距離})^3}{\text{月の質量}(\text{太陽と地球の距離})^3} \\ &= \frac{\text{地球の } 322800 \text{ 倍}(\text{地球半径の } 60 \text{ 倍})^3}{\text{地球の } 80 \text{ 分の } 1(\text{地球半径の } 23312 \text{ 倍})^3} \\ &= 322800 \times 80 \times \left(\frac{60}{23312}\right)^3 = \frac{1}{2.27} \end{aligned}$$

故へに太陽の生潮力は月の生潮力の二分の一よりも尙ほ小なり。

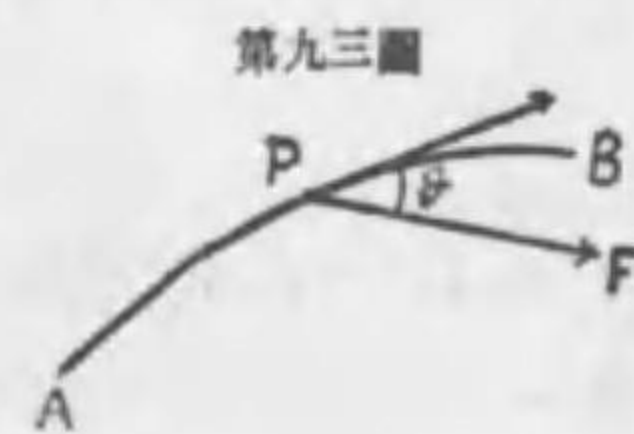
65 仕事及び位置のエネルギー 第一、力が物体に作用して物体を變位せしむるときは、力と變位と、及び兩者間の夾角の餘弦との積を仕事と稱す。

第九二圖に於て PA を力とし、PQ を變位とすれば、PA を變位に平行と垂直なる二分力即ち PN, NA とに分解し PN×PQ を仕事と稱す。從て夾角直角なるときは仕事は零となり、夾角直角よりも大なるときは仕事は負數となる。常に仕事 W は



$$W = PA \times PQ \times \cos \angle APQ \dots\dots\dots (60)$$

によりて示さる。一般的に云へば力 F と夾角 θ は變數なり、今 (第九三圖)



P は曲線に沿て A より B に變位するに當り、其途中に於て F が P に於ける切線と作す角 θ は不斷變化し F も亦た常恒ならず、故に ds を微分弧とすれば A より B までの仕事は

$$W = \int_A^B F \cos \theta \cdot ds$$

によりて表はさるべし。尙ほ委しく言へば、F を三軸に分解したる分力を X, Y, Z とし ds を三軸に分解したるものを dx, dy, dz とすれば F 及び ds の方向餘弦は夫々 X/F, Y/F, Z/F 及び dx/ds, dy/ds, dz/ds なるゆへ、立体幾何學に依り

$$\cos \theta = \frac{X}{F} \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{F} \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{F} \frac{dz}{ds}$$

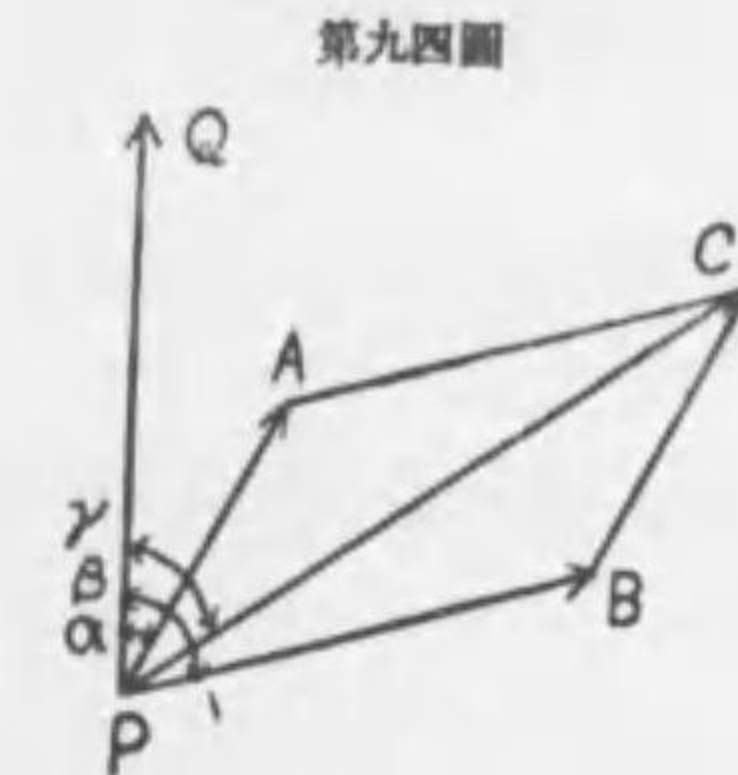
なり。依て

$$W = \int_A^B F \cos \theta \cdot ds = \int_A^B (X dx + Y dy + Z dz) \dots\dots\dots (61)$$

を得べし。

第二、分力の仕事の和は合力の仕事に等し。

此理を證明せんには第九四圖に於て分力 PA, PB を隣邊となす平行四邊形の對角線 PC は合力なり、PQ を變位とすれば、第二章、第三五圖に於て説明したる如く

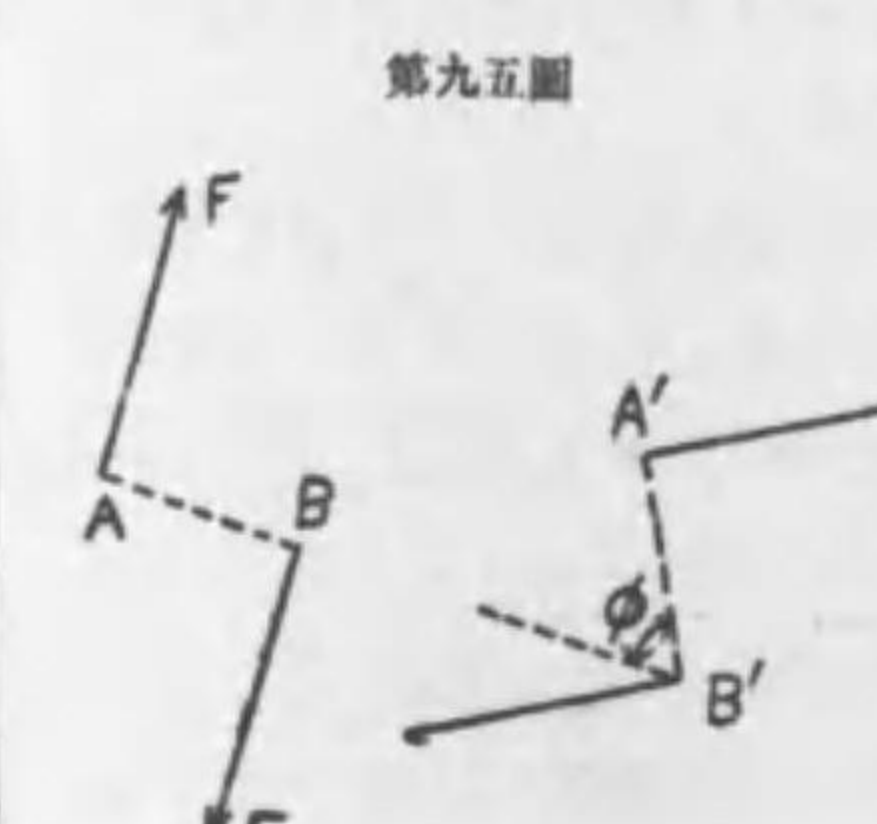


$$PA \cos \alpha + PB \cos \beta = PC \cos \gamma$$

なり、故に各項に變位 PQ を乗ずれば、二つの分力の仕事の和は其合力の仕事に等しきことを表はす式を得べし。分力二つ以上なる時も同法によりて容易に證明せらるべし。

第三、偶力の仕事は回轉變位角と偶力能率との積に等し。

此を證明するには二つの等しく且つ反對なる力を各々 F とし兩力の距離を a と



すれば能率は Fa なるを想起すべし。倍て剛体回轉のために (第九五圖) 着力点 A, B は夫々 A', B' に來りしものとすれば、B' を過り AB に等しく且つ平行に B'C を引けば B は固定して A 点のみ CA' なる圓弧を書きたるに等し、而して其長さは aφ なるを以て、之に力 F を乗ずれば

$$W = Fa\phi \dots\dots\dots (62)$$

を得。故へに能率 Fa に回轉角 ϕ を乗じたるものは求むる偶力の仕事に等し。

第四、力が物体を動かして仕事を遂ぐるときは此が爲めに其物体の位置のエネルギーは減じ運動のエネルギーは増加す、而して其變化の大きさは遂げたる仕事の大きさに等し。

此理を證明するには先づ位置のエネルギーの概念を明瞭にせざるべからず。抑：物体が運動する区域内に於ては或自然力が作用せるものと假定す、即ち其區域は其力の勢力範圍とも稱し得べき場なり、之を力の場 field of force と名く、例へば地球上は重力の場 gravitational field なるがゆへに、物体の位置のエネルギーを増すには外力來りて重力に反抗しつゝ之を高所に持行くの必要あり。一般的に云へば、「力の場」に作用せる力に反抗して物体を動かすに非れば位置のエネルギーを増すこと能はざるなり。逆に、力の欲するところに委せて物体を動かすむるときは其力は仕事を奏し位置のエネルギーは減ず、然れども全エネルギーの値不變なるを以て運動のエネルギーは却て増加することとなるべし。例へば物体が斜面の全長を滑べり落つときは(第六一圖) $F = mg$, $\cos \theta = h/l$ により重力の仕事は $F \cos \theta \cdot l = mgh$ となり位置のエネルギーの減少は mgh に等し、之に反し外力を用ひて斜面の全長 l に沿ふて物体を引上ぐるときは位置のエネルギーの増加は mgh に等し。故に滑べり落ちしため一方に於ては mgh の減少を生ずるも他方に於て運動のエネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ 發生することは運動力學に於て既に學びしところに合致す。

第五、中心力作用せる場に於ては物体が甲處より乙處に變位したるため力が奏する仕事は甲乙二個處より中心までの距離の値に関するのみにして甲より乙に變位する途中に畫きたる徑路の如何に關係すること無し。

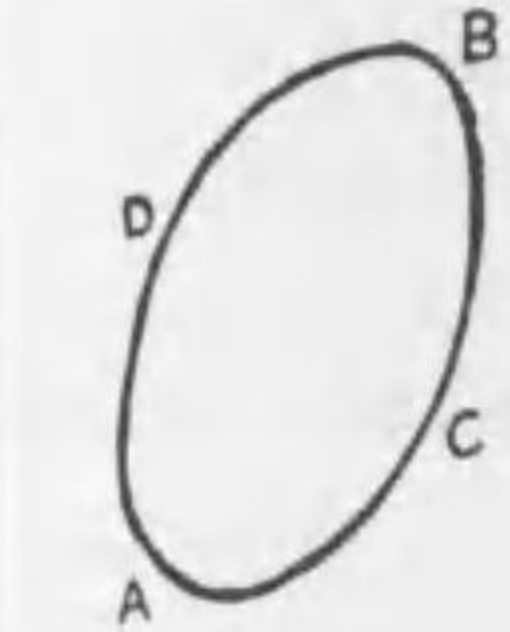
此理を了解するには先づ太陽の中心力によりて遊星が變位する場合を考ふべし。甲點に於ては太陽遊星間の距離 r_1 にして乙點に於ては r_2 なるときは甲より乙に變位したるため太陽の中心力が奏する仕事は(46)により

$$W = k m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \dots\dots\dots (63)$$

なるべし。爰に符號の反對なる理由は(46)式を導きしときには太陽の引力に反抗する外力の作用を假定せしが故なり。上式に於ては仕事を表はすに最初と最後

の距離を知ること必要なるのみにて其間だに通過せし徑路に拘はることなし。言ひ替ゆれば、中心力が奏する仕事は物体の「位置の函數」なり。例へば(第九五圖)物体が ACBDA の道を経て A より出で、A に歸るときは中心力の奏する

仕事は零なり、何となれば物体の位置は舊値に復歸したればなり。故に、 \int を仕事の畧號とすれば



$$0 = \int_{ACBDA} = \int_{ACB} + \int_{BDA} \dots\dots\dots (64)$$

を得、從て最初説きしと同じく

$$\int_{ACB} = \int_{ADB}$$

なり。此理を一般的に論ずるには(61)式に於て分力 X, Y, Z は中心力の分力なることを示す條件を採用すべし。

今起點と物体との距離を r とすれば $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 、從て $r dr = x dx + y dy + z dz$ なり。又前記の條件は

$$X = F \frac{x}{r}, \quad Y = F \frac{y}{r}, \quad Z = F \frac{z}{r}$$

なり。依て

$$\int F \cos \theta ds = \int (X dx + Y dy + Z dz) = \int F \frac{xdx + ydy + zdz}{r} = \int F dr$$

を得べし。故に仕事は物体と中心との距離 r に關係するのみにて、絶へて其徑路 s に拘はることなし。斯の如く中心力作用せる場所に於ては仕事の値は單に位置の函數にして、物体が舊位置に歸れば仕事も舊値に歸へるを見る、從て仕事の値は保存せらるゝなり、故に中心力を一名保存力 conservative force とも呼ぶなり。

仕事は力と長との積なるを以て力の能率、位置のエネルギー又は運動のエネルギーと同じく、其デメンション式は $[L^2MT^{-2}]$ によりて表はさるべし。

66 仕事の單位 物理學に於ては便宜上一斤の重物を鉛直に一米上ぐる仕事を仕事の單位として使用す、此單位を一呎米(kilogram-metre)と稱す。C.G.S法に於ては一ダインの力が物体を力の方向に一釐變位せしむる仕事を單位となし、之を一エルグ(erg)と名く。又た一百万エルグ(10^6 エルグ)を一メガエルグ(megaerg)と名く一瓦の重量は緯度 45° の海面に於ては 980.6 ダインなるゆへ、

一疔の重さは 980.6×10^3 ダイーン なり、故に此力が一米即ち 10^2 釐を動けば仕事は 980.6×10^3 エルグ 即ち 98.06 メガエルグ なり、逆に一メガエルグは $1/98.06$ 即ち 0.0102 疔米 なり。尙ほ他に一ジュール (joule) と稱する仕事単位は 10^7 エルグ 即ち 10 メガエルグ に相當す。

英國人が質量若くは力の単位として常用する一ポンド (pound) は 453.59 瓦に等し、絶對法に於ては此を質量の単位となし、一呎 (foot) を長さの単位となし、一秒を時間の単位となす。此三者を基本単位となして他の物理量を表はすに當り力の単位は一ポウンダル (poundal) と稱せらる。一ポウンダルが幾ダイーンに當るかを知らるには、デメーション方程式に依るべし、即ち x を求むる數とせば

$$1 [\text{foot, pound, second}^{-2}] = x [\text{cm, gr, sec}^{-2}]$$

故に

$$x = \frac{\text{foot}}{\text{cm}} \cdot \frac{\text{pound}}{\text{gr}} \cdot \frac{\text{sec}^{-2}}{\text{sec}^{-2}} = \frac{30.48}{1} \cdot \frac{453.59}{1} = 13825.5$$

即ち、一ポウンダルは 13825.5 ダイーン なり。

又英國人は仕事の単位として一ポウンダルの力が物体を一呎變位せしむる仕事を用ひ、之を一呎ポウンダル (foot-poundal) と名く。一呎ポウンダルが幾エルグなるかを知らるには、前きの如く

$$1 [\text{foot}^2, \text{pound, second}^{-2}] = x [\text{cm}^2, \text{gr, sec}^{-2}]$$

より

$$x = \left(\frac{30.48}{1}\right)^2 \cdot \frac{453.59}{1} = 4.214 \times 10^8$$

即ち、一呎ポウンダルは 4.214×10^8 エルグ なり。

又英國人は一ポンドの重さを力の単位と定め、長さ、力、時間の三単位を基本単位となす事あり。此場合に於ては g は 32 呎なるを以て之を絶對法に變ずれば一ポンドの重さは 32 ポウンダル となり、逆にポウンダルは $1/32$ ポンドの重さとなる。従て仕事の場合に於ても一呎ポンド (foot-pound) は 32 呎ポウンダル に等しきこととなるべし。

凡そ仕事の量は其仕事を奏する時間の速速に關すること無し。故に單位時間毎

に奏する仕事を表はさんとするには動力、又は工率 (power) と稱する量を用ふ。普通使用する一ワット (watt) と名けられたる工率單位は下表に示す如し。

$$\begin{aligned} \text{一ワット} &= \text{毎秒一ジュール} = \text{毎秒 } 10 \text{ メガエルグ} = \text{毎秒 } 10^7 \text{ エルグ} \\ &= \text{毎秒 } 0.102 \text{ 疔米} \end{aligned}$$

英人使用の一馬力 (horse-power) と稱する工率單位は下表の如し。

$$\text{一馬力} = \text{毎秒 } 550 \text{ 呎ポンド} = 746 \text{ ワット} = \text{毎秒 } 746 \text{ ジュール}$$

又、ワットの千倍をキロワット (kilowatt) と稱す。

工率は仕事を時間にて除じたるものなれば、デメーション式は $[L^2 MT^{-3}]$ なり。

67 摩擦 力 二個の固体を取りて互に相壓しながら接觸面に沿ふて相對運動を生ぜしめんとするときは忽ち之に抵抗する力の發生するを覺ふべし、之を摩擦 friction と稱す。此現象を研究したるクーロン (Coulomb 1781) は此に關する三法則を發見せり。

第一則、摩擦力は兩固体接觸面に垂直に壓し合ふ力に正比例す。

第二則、摩擦力は接觸面の面積に無關係なり。

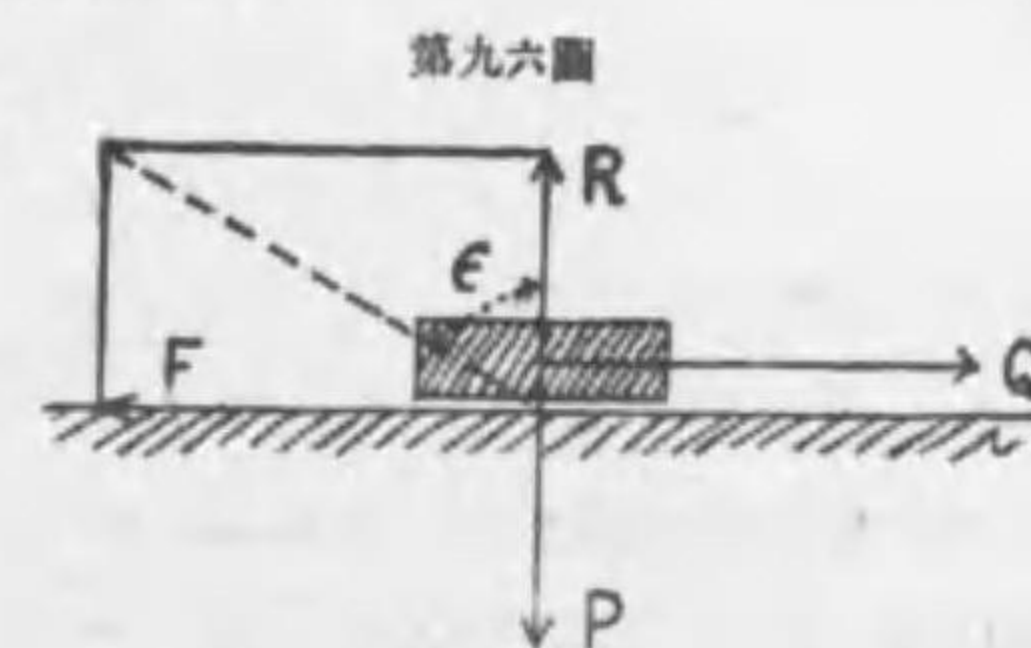
第三則、摩擦力は兩固体の相對運動の速度に無關係なり。

摩擦力を F とし、壓し合ふ力を P とすれば、兩者の比は

$$\frac{F}{P} = \mu \dots\dots\dots (65)$$

なり。 μ は接觸面積にも、相對速度にも無關係にして單に固体の性質にのみ關係す、 μ を摩擦係數 coefficient of friction と名づく。

今 (第九六圖) 重さ P の物体を水平臺上に載せるときは互ひに壓し合ふ力は P に等しく、 Q の力を以て右に動かさんとすれば忽ち F の摩擦力は接觸面に發生して Q に等しく反對に左方に物体を引き、此がため物体は未



だ運動を始むる能はず。次第に Q を増せば F も從て増し、 Q, F 釣合の有様は在れども、 Q 力或る極限に到着すれば物体は運動を始むるなるべし。其の時の F は最大摩擦力にして、通常此値を物体の摩擦と名く。此摩擦力は兩体が

相對運動をなしつゝある時の摩擦力よりも常に較々大にして

$$\frac{F}{P} = \mu \dots\dots\dots (66)$$

を釣合の摩擦係數 coefficient of static friction と稱し、先きの ν を運動の摩擦 kinetic friction 係數と稱して區別することあり。

釣合の場合に於て P の反力を R とすれば物体には總計四箇の力作用することとなるも R, F は夫々 P, Q の反力にして R, F の合力は P, Q の合力に反向す。而して R, F の合力が R と作す角を ϵ と名くるときは

$$\tan \epsilon = \frac{F}{R} = \frac{F}{P} = \mu \dots\dots\dots (76)$$

なる關係式を得べし。

甲乙二物体間の摩擦係數 μ を測るには、甲の物体を以て斜面を造り乙の物体を其上に載せ、斜面角を漸次に増大して物体が今や滑べり始めんとする時の角、即ち靜止角 angle of repose を求むべし。今第九七圖に於て斜面角 α は靜止角に等しきものとせば摩擦 F は斜面力 $P \sin \alpha$ と釣合の状態に在り。即ち $F = P \sin \alpha$ 。然るにクーロン第一則により $F = \mu R = \mu P \cos \alpha$ なるを以て兩式より

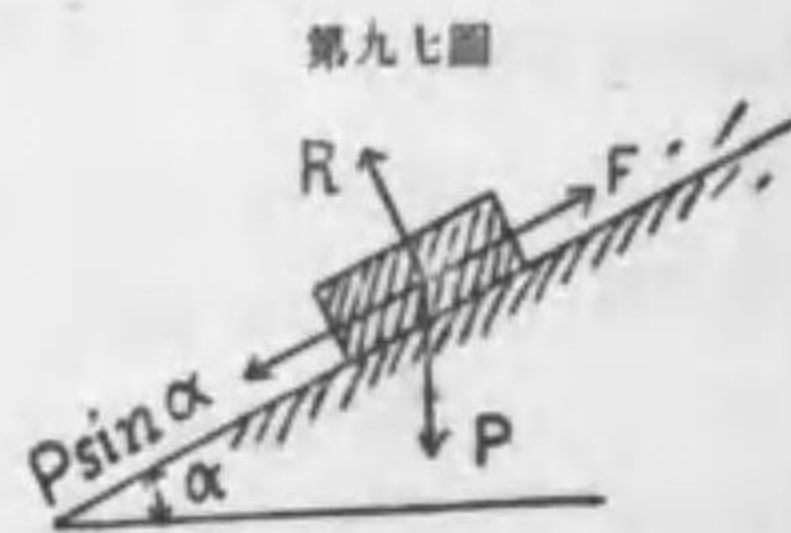
$$\mu = \tan \alpha \dots\dots\dots (68)$$

故に釣合の摩擦係數は靜止角の正切に等しくして $\mu = \tan \alpha$ なり。

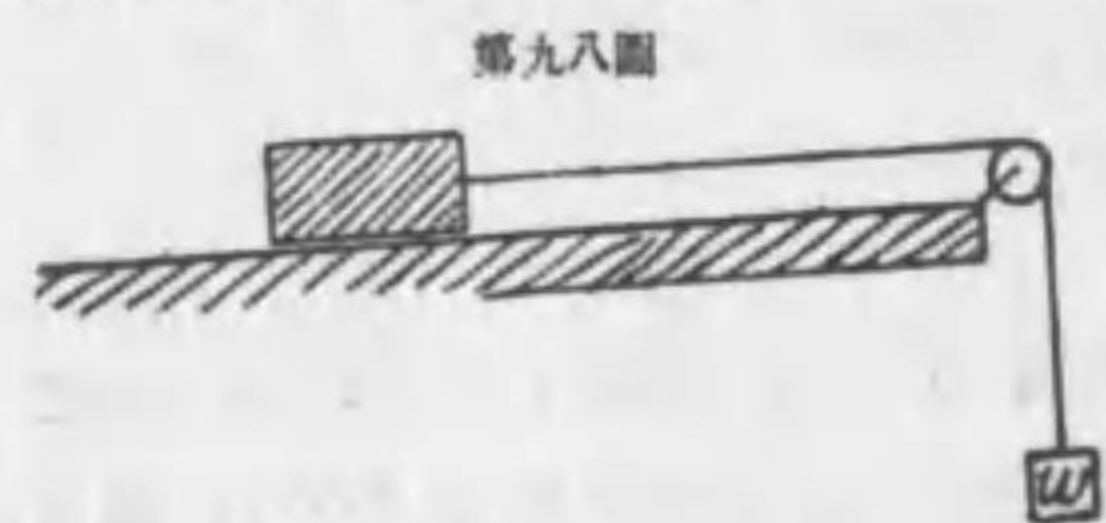
運動の摩擦係數を測るには甲物体を用ひて水平臺を造り（第九八圖）一端に彈（滑車）を設け w の重物を着けたる糸の他端を乙物体に附着して臺上を運動せしむ。乙の重さを P とし運動の加速度を γ とすれば $P+w$ なる物体は γ の加速度を以て運動するがゆへに之に必要な力 $(P+w)\gamma$ にして又其力は $w-F$ によりて供給せらる。故に

$$F - w = (P + w) \frac{\gamma}{g}$$

なり、此式により實驗の結果なる γ を代入すれば μ を算出すること容易なり、



第九七圖



第九八圖

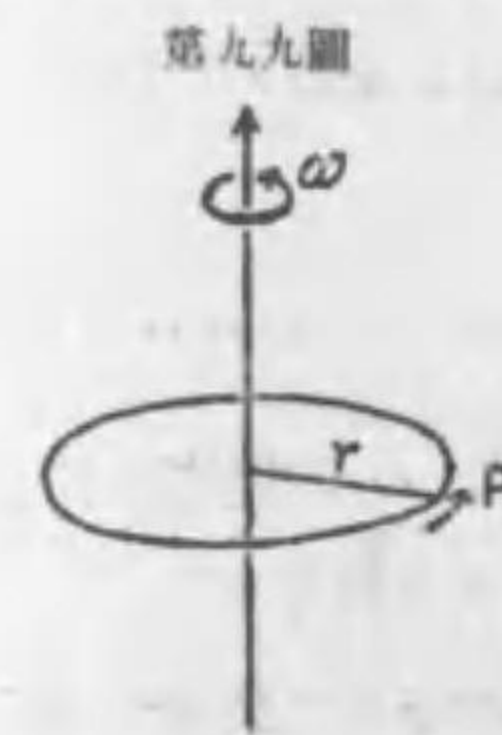
而して測定の結果として常に $\mu > \nu$ を得。

摩擦力の原因は接觸面に於ける兩物体表面に凹凸あるがため相對運動を妨ぐるに依るもの多しと云へども、又相互分子間の引力即ち粘着力の作用も看過すべからず、尙ほ兩面には微小なる突起物無數に存在して相對運動を起さんとすれば、突起物は一方に撓屈して彈力を惹起し相對運動に反抗するものと考えざるを得ざるなり。

圓柱体を水平面上に切轉 (roll) せしむるときに生ずる抵抗を便宜上、切轉の摩擦 rolling friction と稱すれども、此は本來摩擦には關係無き力にして、切轉の際水平面は圓柱の重さのために窪みを生じ恰も斜面に沿つて攀じ上げる時の困難を生ずるに依る。

總じて摩擦力は保存力に非ず、摩擦に反抗して物体を動かすときは仕事は熱に變じ位置のエネルギー増すことなし、又此の際摩擦體の接觸面は多少粉末となりて消耗するを免れず。然れども摩擦が地上生活に必須なるは説明を要せずして明かなり、何となれば摩擦無くば吾人は地上を歩行することさへ不可能となり、凡て建築物又は衣裳の如きも部分は互に滑べりて分離するに至るべし。而して有害なる摩擦は油差し lubrication によりて著しく減少せしむることを得るなり。

68 回轉する剛体の運動量の能率 剛体が一定線を軸として回轉するときは剛体を形成せる質点は各自、軸の周圍に圓運動を營むべし。今回轉角速度を ω と



第九九圖

し、質点 P (第九九圖) と軸との垂線距離を r とし、質点の質量を m とすれば速度は ωr 、運動量は $m\omega r$ なるを以て運動量の能率は $m\omega r^2$ となる。依て剛体全部の運動量の能率 c は

$$c = \omega \sum m r^2 \dots\dots\dots (69)$$

此式は前記 (37) 式に相當するものにして、外力作用すること無きときは各質点の回轉面は保存せらるゝのみならず能率の値に於ても増減無きものとす。故に外力無きときは回轉剛体の軸は空間内の一所に固定したると同様にして、回轉角速度も常住なるべし。

(69) 式中 $\sum mr^2$ の値は剛体内に於ける回転軸の位置定まると同時に定まるものにして其回転すると否とに關すること無く全然幾何學的意義を有する量なり、之を慣性能率 moment of inertia と名く。今 I を慣性能率とすれば

$$c = \omega I \dots\dots\dots (70)$$

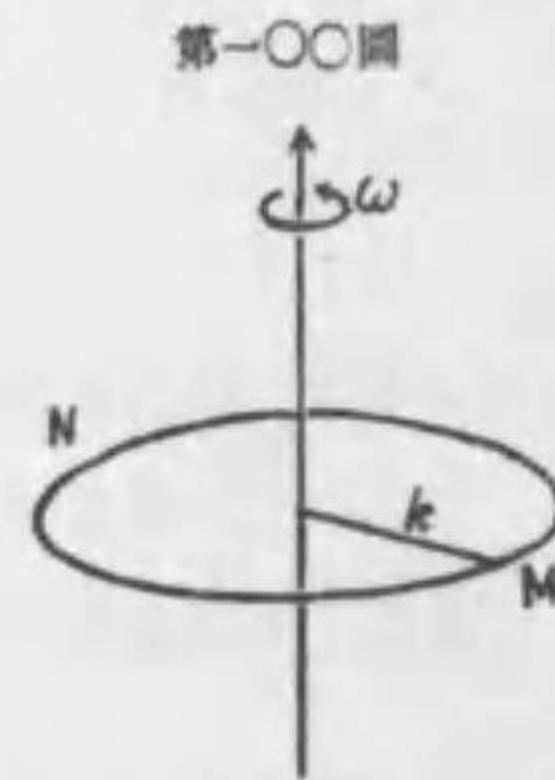
又た剛体の質量を M とすれば $M = \sum m$ なり、今

$$Mk^2 = I \dots\dots\dots (71)$$

と書くときは、 k を回転半径 radius of gyration と名く、故に (70) は

$$c = \omega Mk^2 \dots\dots\dots (72)$$

と書くことを得べし。 k の意義を知るには剛体の全質量 M に等しき質量を有する質点を、軸よりの垂線距離 k の点に置き (第一〇〇圖) ω の角速度にて軸を公轉するものと想像すべし、然るときは其運動量の能率は (72) と全く同一なるを視る。



剛体が並動 (translation) するときには其全質量は其重心に集中したるものと見做して不可なきも、剛体が回転 (rotation) するに當ては其全質量を重心に集中したるものと見做す能はずして、回転軸より垂線距離 k の處に集中せるものと考へざるべからず、然るに k を半径とし、軸を中心とし、圓 MN を書くときは此圓周は回転心の軌跡と見るも差支へ無く、従て全質量 M は此圓周上に平等に分布せるものと考ふるを至當なりとす。

外部より力の能率作用せざるときは (72) 式の値は不變なれども外因の作用あるときは (72) は變化す、即ち

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot Mk^2 \dots\dots\dots (73)$$

を得、爰に ω は回転軸と同方向を有するベクトルなるゆへ、 ω の變化には自ら二種類ある理なり、即ち ω の方向の變化と ω の數値の變化是れなり。

運動量の能率のデメンションは $[L^2MT^{-1}]$ なり。又慣性能率は時間に關係なく其デメンション式は $[L^2M]$ なり。

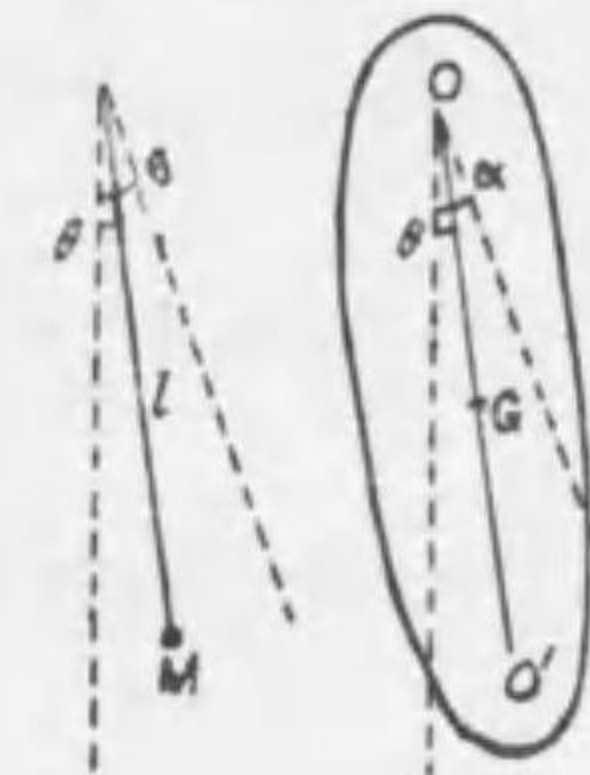
69 回転する剛体の運動のエネルギー 前節と同じく質点の速度は ωr にして運動のエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ なり。故に剛体の運動のエネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \sum mr^2 = \frac{1}{2}\omega^2 Mk^2 \dots\dots\dots (74)$$

を得べし。外部よりエネルギーを注入するに非れば此エネルギーは不易なり。

70 剛体振子又は合成振子 compound pendulum 剛体の重心に軸を設くるも振子として振動せしむること能はざるべし、故に重心 G より h の距離に軸 O を設けて振動せしむ (第一〇一圖) 之を合成振子と名

第一〇一圖



づけて彙に説きたる単一振子より區別す。最初 OG 線と鉛直線とが作る角を α とし、其角が θ となりしときの角速度を ω とし、又 O を軸とする場合に剛体の回転半径を k 、質量を M とすれば運動量の能率は (72) により ωMk^2 なり。而して重力の能率 $Mg \cdot h \sin \theta$ は (73) により $\dot{\omega} Mk^2$ に等し、即ち

$$Mg \cdot h \sin \theta = \dot{\omega} Mk^2$$

なり。今合成振子の傍に此と同一週期を有し、同一質量の球を吊るしたる長さ l の単一振子を同一状況の下に振動せしめ、鉛直と作る角が θ となりたるときの能率の式を書くときは

$$Mg l \sin \theta = \dot{\omega} M l^2$$

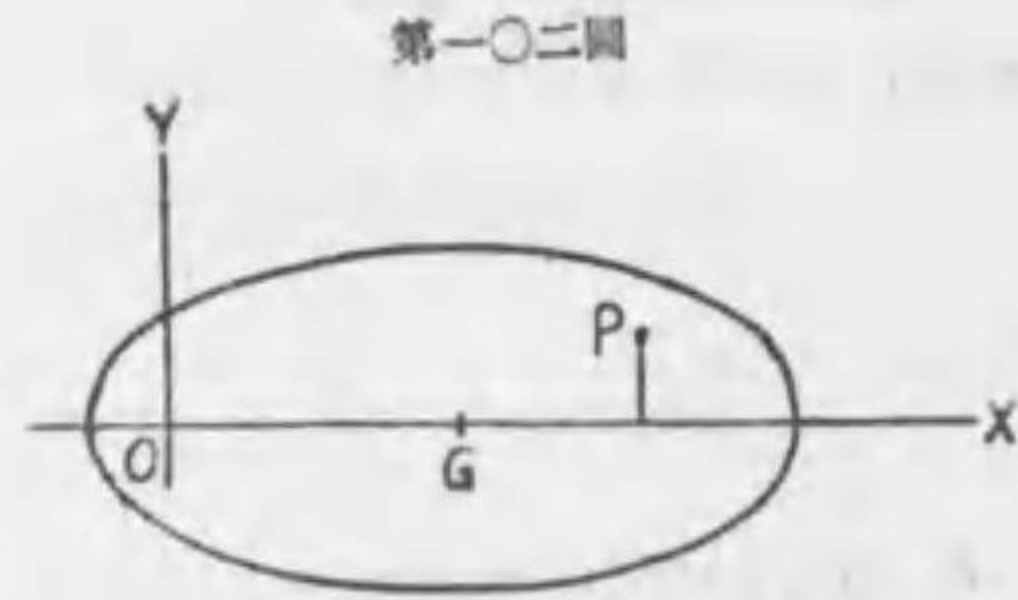
を得べし。依つて兩式より

$$l = \frac{k^2}{h} \dots\dots\dots (75)$$

なり、即ち回転半径は h と l との比例中項なり。今 OG を延長し O' に至らしめ $OO' = l$ に取るときは O' は振動の中心 centre of oscillation の名あり、又 OO' を相當振子の長さ reduced length と稱す、而して週期は単一振子のと等しきがゆゑに

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{hg}} \dots\dots\dots (76)$$

軸を O に設けずして重心 G に設けたりと假定し其の時の回轉半徑を k と命ず。O, G (第一〇二圖) を過りて X 軸を引き、O を起点とし其に垂直なる Y 軸を引き、質点 P の坐標を x, y 、其質量を m と置けば



$$Mk^2 = \sum m(x^2 + y^2) = \sum m\{(x-h)^2 + y^2\} = \sum m\{(x-h)^2 + y^2\} + 2h\sum m(x-h) + h^2\sum m$$

を得べし。然るに右側の初項は Mk^2 に等しく、第二項は G 点より算したる質点の横坐標に m を乗じたる積の総和なるを以て重心の性質により零となる、第三項は hM に等し、故に上式より M を約除すれば

$$k^2 = k^2 + h^2 \dots\dots\dots (77)$$

を得べし、之を (76) に代入すれば

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + h^2}{hg}} \dots\dots\dots (78)$$

なり、之を合成振子の週期となす。

(75) に (77) を代入すれば相當振子の長さ l は

$$l = \frac{k^2}{h} + h \dots\dots\dots (79)$$

なり、故に第一〇一圖の $O'G = k^2/h$ なるを知るべし。上式に於ては h の代りに k^2/h と書くも復た舊との式を得べし、即ち h と k^2/h とは互に入れ換へても不可なき量なり、言ひ換ゆれば第一〇一圖の O' を軸となして剛体を振動せしむれば振動の中心は O となり、週期は同一なるべし。依つて一個の合成振子を製出し O', O 二点を同一直線上任意の場處に自在に移動するを得せしめ、O を軸として振動せしめたる時の週期が O' を軸として振動せしめたる時の週期と同一になるまで實驗を反覆したるときは、其時の週期 T は OO' を l とする單一振子の週期に等しき理なるにより公式に基き g の値を算出するを得べし。此装置をケ

第一〇三圖

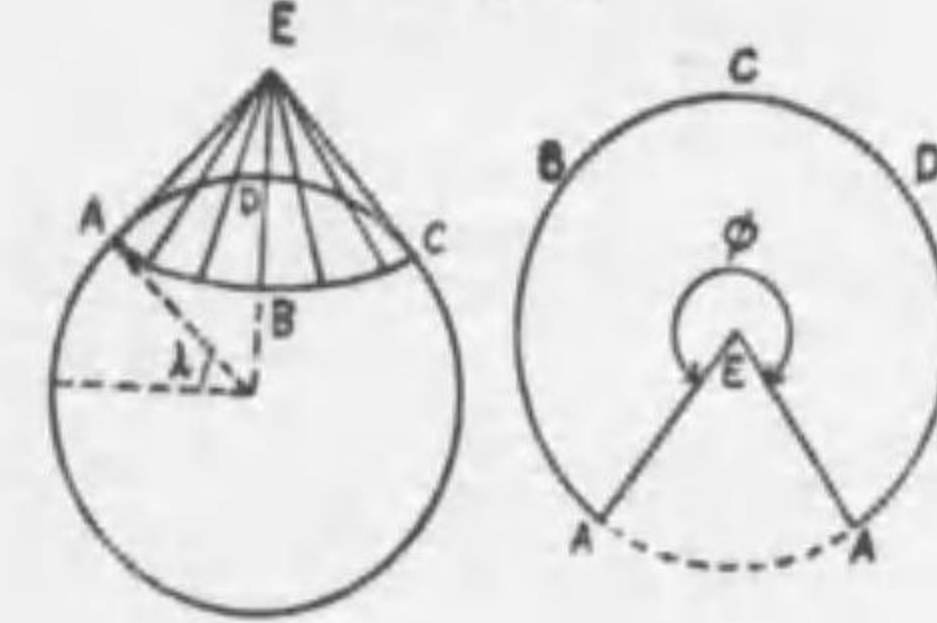


ーターの可逆振子 (Kater's reversible pendulum 1818) と稱す。其實物に於ては O, O' は固定し G を自在に移動せしめ得る装置を備ふ (第一〇三圖) 即ち L を移動して重心の位置を変更するを得べし。

71 フーコー實驗 フーコー (Foucault 1851) は長さ 200 尺の針金の一端を天井より吊るし下端に鐵球を附着し之を振子となして振動せしめしに、振子の振動面が徐々に從針の方向に回轉すること

を観察せり。其理由は地球自轉の結果として實驗處 (巴里) は反針方向に旋轉すれども回轉面保存の理により振子の振動面は空間内に不易の位置を保もつゆへ爰に相對運動を生じ振動面は却て從針方向に旋轉するが如き外觀を呈したるものなり。

第一〇四圖

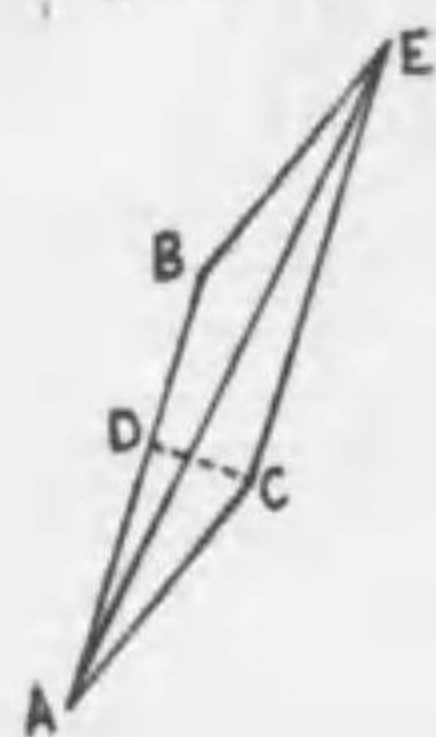


赤道地方に於ては絶へて此相對運動を生ずることなし、其他の地方に於ては、北半球に於ては巴里と同様に從針旋轉を爲せども南半球に於ては正に之に反す。其理を説明するは容易なり。第一〇四圖に於て A を實驗處とすれば A は地球自轉のために緯線 ABC 上を運動す、其各点に於て南北線を地上に引くと假定すれば南北線は各点に於て地球に切線をなすつゝ、ABCD-E の如き直圓錐體を書くことなるべし。今此圓錐體を母線 AE に沿ふて切り平面上に開展すれば角 AEA は南北線が二十四時間内に旋轉したる角 ϕ に等し。λ を A 点の緯度とし地球半徑を R とすれば ABCDA の長さは $2\pi R \cos \lambda$ に等しく、 $AE = R \cot \lambda$ 依て $\phi = (ABCD) / AE = 2\pi \sin \lambda$ 、從て一週の時間は $24 / \sin \lambda$ 時なり。フーコーは此實驗を地球自轉の證明に使用せり。

72 獨樂の回轉軸の運動 回轉せる剛體は既に運動量の能率を有す、此に外力の能率作用するときは運動量の能率は増加し、之がために或は其回轉速度を増し、或は回轉軸の方向を変更す。元來、力又は運動量の能率は一個のベクトルにして其方向は第三七、八圖に於て説明したる如く垂線距離 p と力 P とを含む平面に垂直にして、 ω 若くは ω の方向 (第三一圖見よ) と一致す。故に便宜上

回轉軸を適當なる長さに切り其長さによりて能率のベクトルを示すことを得べし。今(第一〇五圖) AB を或瞬時に於ける運動量能率のベクトルとし、AC を

第一〇五圖



を單位時毎に加はる外力能率ベクトルと假定すれば、AC を AB に平行と垂直なる AD, DC に分解すれば、両者は分業的に働らきて AD は AB の大きさを増し、DC は AB の方向を變化せしむべし。此理を説明するには BE を AC に平行に引き其長さを AC に等しからしめ A, E を結ぶときは AE は單位時間の後の運動量の能率にして、長さには AD に等しき増加を呈し方向に於ては $\angle BAE$ を書いて旋轉せり。

故に外力能率 AC が全く AB に平行なるときは單に角の加速度を發生するのみにして回轉軸の方向を變ずる力なし、之に反し AC が全く AB に垂直なるときは單に回轉軸を旋はすのみにして角速度は不變なりとす。

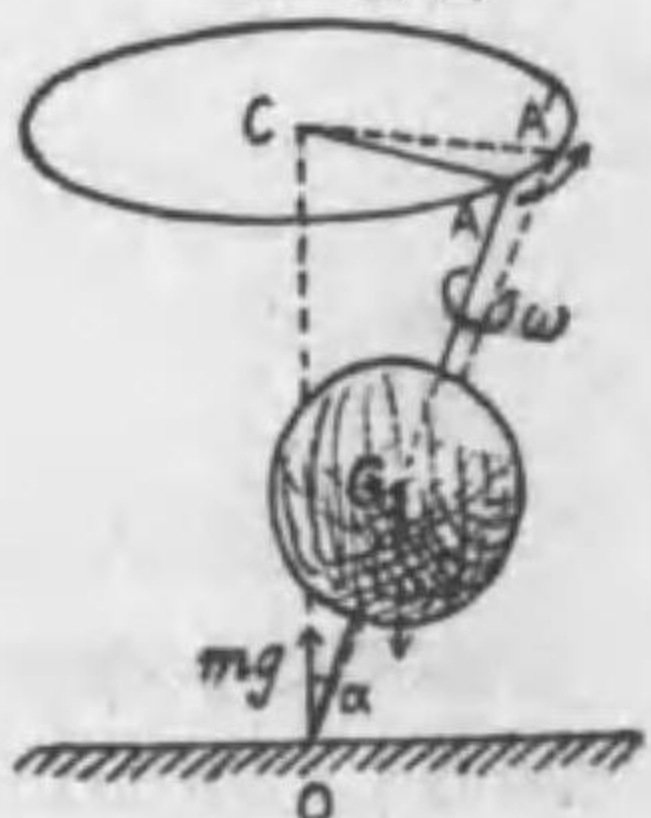
速に回轉しつゝある獨樂が徐々に其軸を回轉と同方向に旋はす現象、又は太陽及月が地球赤道の隆起部を引き之がために地軸は地球自轉と反對の方向に徐々に歳差運動を營む現象は外力能率のベクトルが獨樂若くは地球の回轉ベクトルに垂直なるに起因し、其結果として軸は鉛直線と常に同一角を保ち自轉速度も變化を受けずして管々自轉軸のみ旋轉して空間に圓形を書くを見る。

先づ獨樂の運動より説かんに、第一〇六圖に於て便宜上獨樂を球形と想像すべし、 k を回轉半径、 ω を角速度、 m を質量とすれば運動量の能率は ωk^2 にして其ベクトルは OA の方向に在り。又外力は重力にして、OG の長さを a にて示し獨樂の軸 OG が鉛直と作す角を α にて示せば重力の能率は $mg a \sin \alpha$ にして其ベクトルは AOC 面に垂直なり。依て (73) 式を參考し

$$\frac{d\omega}{dt} m k^2 = mg a \sin \alpha \dots\dots\dots (80)$$

を得。茲に $d\omega/dt$ はベクトル ω の變化を示し、其變化は別かれて二様となる。

第一〇六圖



ω の方向は OA と合す。依て ω に平行し長さ單位なる單位ベクトル (unit vector) を u とし ω の數値を w とすれば

$$\omega = u \cdot w$$

となる、之を t に就き微分すれば

$$\frac{d\omega}{dt} = w \frac{du}{dt} + u \frac{dw}{dt}$$

を得べし、右側の du/dt は單位ベクトルの變化なれば長さは變ぜずして其方向の變化を表はすところの角速度となる。又 dw/dt は角の加速度にして本題の如き場合に於ては既述の理により零なり、故に (80) は

$$\frac{du}{dt} = \frac{g a \sin \alpha}{\omega k^2}$$

に變式す。第一〇六圖に於て角速度 du/dt は $\angle AOA'$ に相當す、今 CA, CA' を結び $\angle ACA' = d\varphi/dt$ と定むるときは

$$CA \frac{d\varphi}{dt} = OA \frac{du}{dt} \text{ 即ち } \frac{du}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \sin \alpha$$

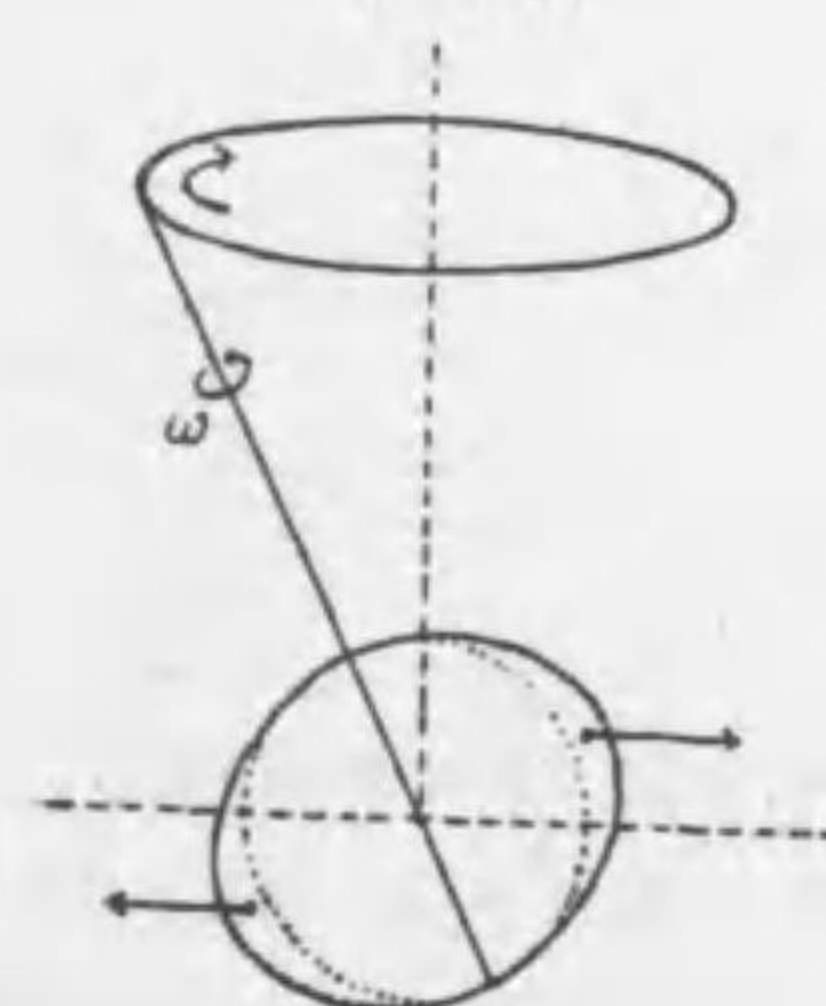
を得、之を前式に代入し $d\varphi/dt = ga/\omega k^2$ となる、故に回轉の週期 T は

$$T = 2\pi \frac{\omega k^2}{ga} \dots\dots\dots (81)$$

なり。 $d\varphi/dt$ は ACO 面が鉛直線 OC の周圍を旋はる角速度にして T は AOC 面が一周する時間なり。獨樂の自轉速度大なるに従て回轉軸が一周する時間愈々永し、而して軸の傾角 α には無關係なり。

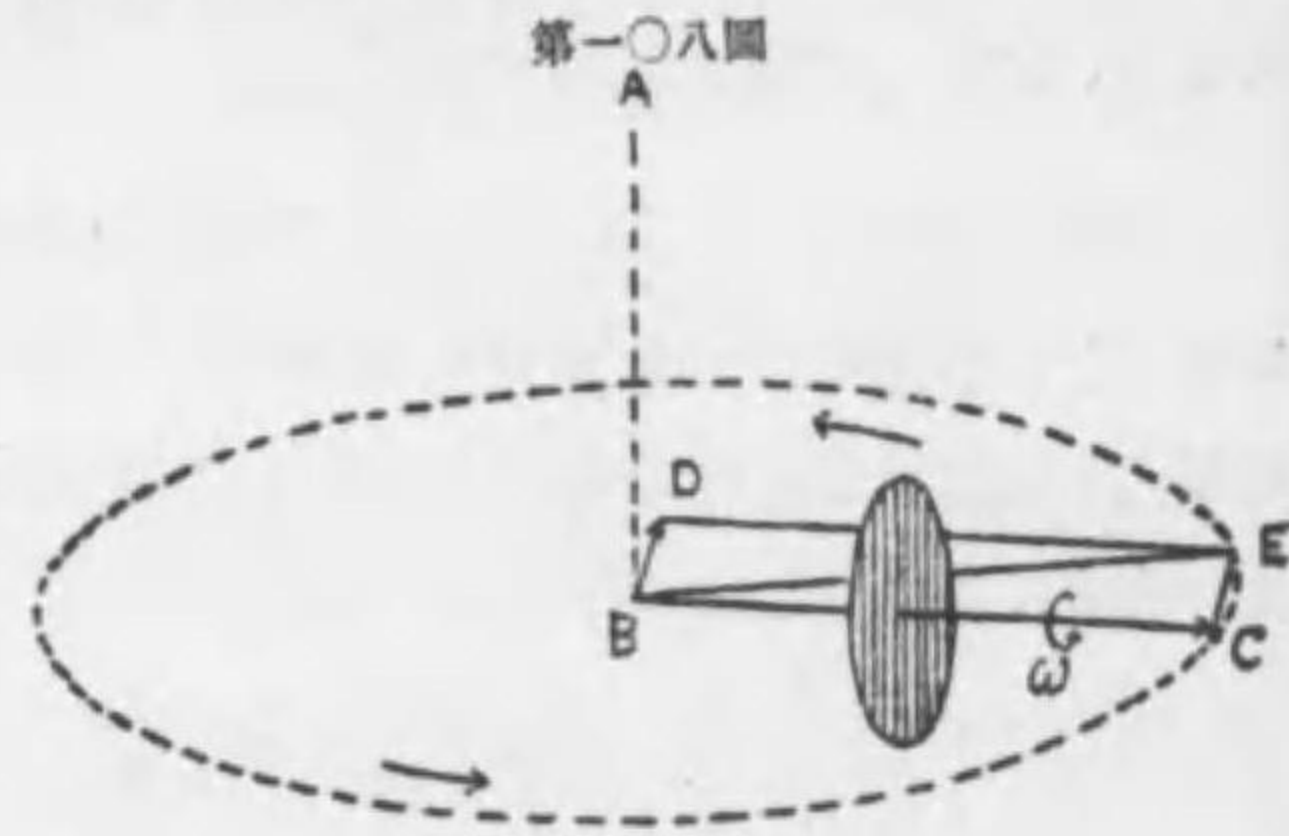
地球の歳差運動 precessional motion に於ては太陽又は月が赤道隆起部を第一〇七圖の如く引くこと恰も潮汐現象に於て洋水と左右に引離なす如く作用すると同様なり。其結果として外力の能率は獨樂の場合に較ぶれば其方向全く反對となり、歳差運動は地球自轉の反對の方向に生ず。一年を單位としたる $d\varphi/dt$ の値は月のために $35''$ 、太陽のために $15''$ (約 2.27:1 の比となす、潮汐の條下參着) にして併せて $50''$ なり、

第一〇七圖

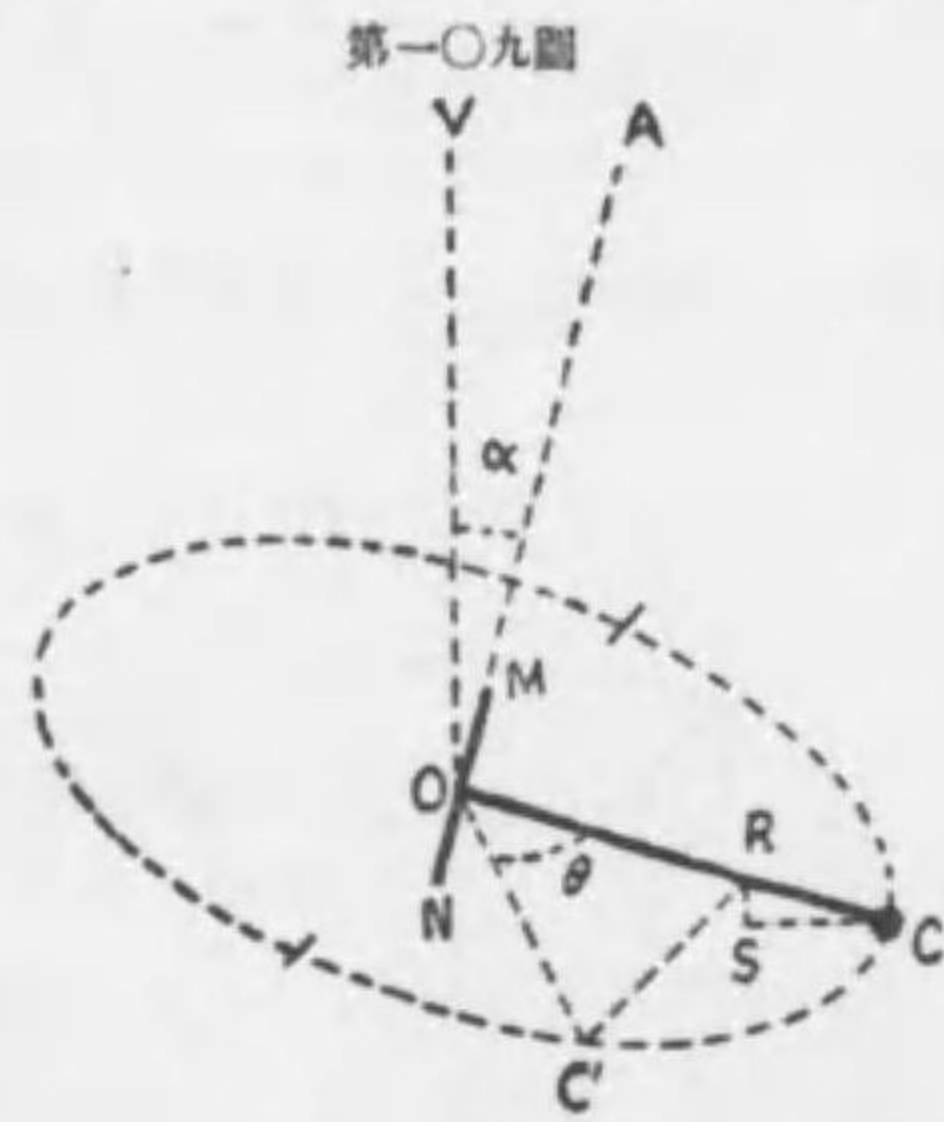


此数を以て 360° を除ずれば週期は約二萬六千年となるべし、運動學第三圖は獨樂の運動を表はし、第三三圖は歳差運動に相當す。

第一〇八圖の AB は糸にして A は固定す、BC は水平に軸を置たる獨樂にして BC の周圍を自轉す。此圖の位置に於ては重力の能率を表はす ズクトルは BD なり、故に軸 BC は BC, BD を分立 ズクトルとなす合成 ズクトル BE の方に旋轉す、斯くして水平面に圓運動を營むべし。



73 水平振子 第一〇九圖の OV を鉛直の方向とし其れと α の角を作して傾ける直線 OA を軸として自在に回轉し得る丁字形の剛体を水平振子 horizontal pendulum (Hengler 1832) と名づく。C を振動の中心とし、OC = l と置けば



C は常に最も低き位置を占有せんとす、今 MN を軸とし OC に θ 角の變位を與ふるときは C は C' に来る而して C' より CO に下だしたる垂線の脚 R は C' と同一の高さに在り、又 C を過りて設けられたる水平面へ R より垂線 RS を下だすときは RS は C' の高さとの高さとの差に等しかるべし、然るに RC = l(1 - cos θ)、又た ∠RCS = α なるを以て

$$RS = l(1 - \cos \theta) \sin \alpha \dots\dots\dots (82)$$

なり、故に C に θ₀ なる變位 (θ₀ > θ) を與ふる場合には高さは l(1 - cos θ₀) sin α となり、θ₀ と θ とに相當する高さの差は

$$l(\cos \theta - \cos \theta_0) \sin \alpha$$

なり。依て今 C を θ₀ まで引上げて之を放つときは C は斜面運動をなして C' に来りたる時の速度 v は v² = 2gh なる公式に照らして

$$v^2 = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0) \sin \alpha \dots\dots\dots (83)$$

なる關係を有すべし。此方程式の兩側を t に就き微分し、加速度を r と命じ、v = l.dθ/dt なることを記憶すれば (cos θ₀ = 常數)

$$r = -g \sin \theta \sin \alpha = -\frac{g}{l} \cdot l \sin \theta \sin \alpha \dots\dots\dots (84)$$

を得。茲に l sin θ = C'R にして θ 角小なるときは l sin θ ≅ C'C、故に r は變位 C'C に正比例すと云ふことを得べし、依て θ₀ が小なるときは水平振子の運動は弦運動をなし、運動學 (18) 式により、C'C = y と置きつゝ、

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l} \sin \alpha \text{ 即ち } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}} \dots\dots\dots (85)$$

なる週期式を得。若し軸が水平なる時の週期を T₀ とすれば T₀ = 2π√(l/g) なるゆへ

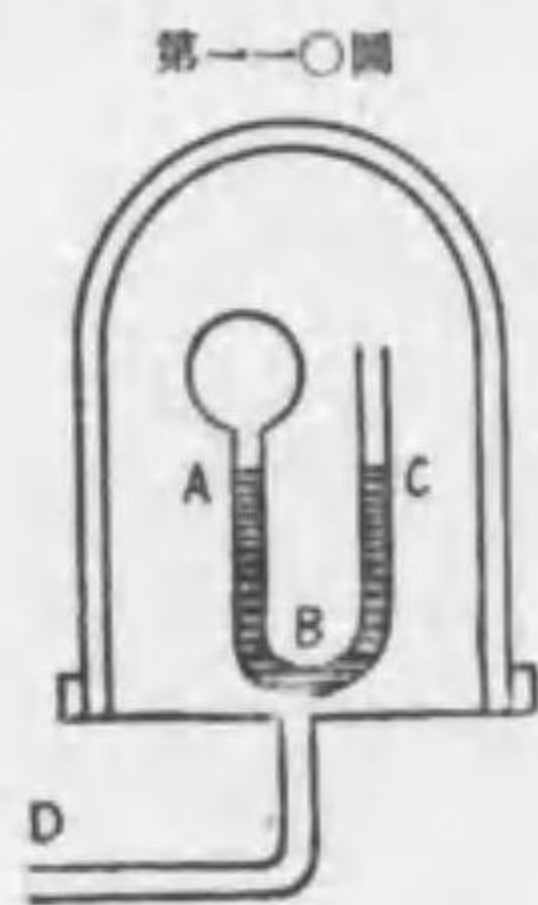
$$T = \frac{T_0}{\sqrt{\sin \alpha}}$$

を得べし。

第四章 液體力學 HYDRODYNAMICS

74 流動体 物体を構成せる分子が自在に運動し得るときは此物体を流動体 fluid と稱す。流動体に二種あり、殆ど被壓性を欠如せるものを不縮性流動体 incompressible fluid と名く、液体 liquid 是なり、被壓性を十分に有するものを可縮性流動体 compressible fluid と名く、氣體 gas 是なり。

液体の收縮は温度常恒なるときは極めて僅少にして其内にも最小なるは水銀なり、水銀は一気壓を増す毎に原容積の $3.92 \cdot 10^{-6}$ 收縮す、アルコールは $107 \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ にして、水は $47 \cdot 5 \cdot 10^{-6}$ なり、而して高壓に於ては收縮性は一層減少す。被壓性を測るには壓縮計 piezometer (Oersted 1822) を使用す。壓縮計は第一



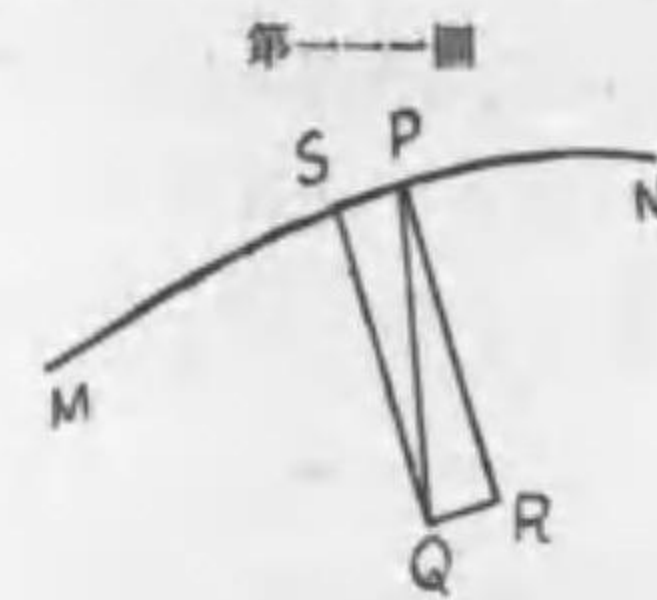
〇圖の如き構造を有し、堅牢なるガラス鐘の内部に水を満たし、中に U 字形のガラス管を容る、其管端の小球にも水を充たして其壓縮を觀測す、ABC は水銀にして其變位により球内の水の壓縮さるゝを認め得べし。D より ポンプにて水を注加し壓力は C より加はりて球内の水を壓縮せしむる装置なり。

固體力學に於て剛体なるものを假定したる如く、液體力學に於ても被壓性を全く欠如し又内部的摩擦を呈せざる理想液を假想し之を完全液体 perfect liquid と稱す。液體力學は主として完全液体を研究す、其釣合を論ずる學を液体靜力學 Hydrostatics と名け、力と運動の關係を論ずる學を液体動力學 Hydrokinetics と稱す。

比重 specific weight とは單位容積を有する物体の重さを云ふ、比重壺 pyknometer を用ひて直接に液体の比重を測定することを得べし、比重のデメンションは $[L^{-3}MT^{-2}]$ にして、絶對法にては比重は密度の ρ 倍となる。然れども比重の定義を換へ物体の重さを其れと同容積の、温度四度なる水の重さと比較したる

ものなりとすれば、重さと重さとの比なるゆへ デメンション は零となり、密度 density と同一の値を有す。密度は單位容積の物体の質量なるを以て、デメンションは $[L^{-3}M]$ なりとす。

75 放面 液体と真空若くは氣體との接觸面を放面 free surface と稱す。釣合を得たる液体の放面上の任意の点に於ては其表面の方向は液体に作用する力の方向に垂直ならざるべからず、之を證明するには第一一圖に於て MN を放面



とし、P を放面上の一点とし、PQ を力とするときは、之を切線及び法線の方向に夫々 PS, PR に分解すれば、PS は P なる液分子を PS の方向に動かすべし、然るに液体は釣合に在るを以て PS=0 ならざるべからず、次に PR は分子 P を液の内部に引き入れんとする力なり。此力

は他の先入の分子を排斥して竄入せんとする力なるゆへ他分子の抵抗と釣合を保つことゝなるも、PR が不斷作用しつゝあることは明白なり。故に放面に働く力は皆な法線の方向を有す。

放面に於ては力は悉く法線の方向に作用するがゆへに放面上の分子をして放面上に假りの變位を爲さしむるも何等の仕事を奏すること無く、従て位置のエネルギーは變位のために増減すること無し、故に放面は等ポテンシャル面をなす。今器に水を盛り之を安置すれば液体に働く外力は重力のみなり而して其方向鉛直の方向と一致するをもつて放面は鉛線に垂直、即ち水平、ならざるべからず、之を水準 level と稱す。

重力以外に他の外力作用するときは合力は液の放面に垂直をなすべし、例へば第七〇圖の回轉液に於ては放面は隨所、重力と遠心力との合力に垂直にして、實に合力は法線 NP の方向に作用するを見たり、地球の場合に於ても洋水の分子は重力と遠心力との作用を受くるがゆへに洋水の放面は回轉楕圓体をなし其短軸は軸と一致すべし。光理を解析に附せんがために、動力學章に立返へり仕事の式 (61)

$$W = \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

を再考せんとす、茲に X, Y, Z は分子に作用する外力の三軸の方向に於ける分力を示し、 dx, dy, dz は微分距離 ds を同三軸へ投影したるものなり。今 ds は放面上に横はるものと假定すれば、上式は放面上に ds の變位をなすことに因りて力が遂げたる仕事を表はすものなれば、 ds が放面の一部を形成すと云ふ條件は

$$0 = \int (Xdx + Ydy + Zdz) \dots\dots\dots (1)$$

によりて満足せらるべし。

此式を用ひて回轉液の放面を誘導するには重力を Z 軸の方向に作用せしめ、遠心力 $m\omega^2 r$ を xy 面上に働かしむれば、放面上の分子の質量を m と置きつゝ、

$$X = m\omega^2 x, \quad Y = m\omega^2 y, \quad Z = -mg$$

なり、依て

$$0 = \int \{ m\omega^2(xdx + ydy) - mg dz \}$$

より

$$\frac{1}{2} m\omega^2(x^2 + y^2) = mgz + C \dots\dots\dots (3)$$

を得、是れ g/ω^2 を通徑とし上方に開口せる回轉拋物体の式なり。

地球の洋水の放面に應用せんと欲せば洋水面上の分子の質量を m とし、又簡約のため地球半徑を常數 R と定むれば、三軸に作用する分力は

$$X = m\omega^2 x - mg \frac{x}{R}, \quad Y = m\omega^2 y - mg \frac{y}{R}, \quad Z = -mg \frac{z}{R}$$

なるを以て

$$0 = \int \left\{ m \left(\omega^2 - \frac{g}{R} \right) x dx + m \left(\omega^2 - \frac{g}{R} \right) y dy - m \frac{g}{R} z dz \right\}$$

より

$$\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \right) (x^2 + y^2) + \frac{g}{R} z^2 = C \dots\dots\dots (3)$$

を得。此は $a = b = \sqrt{\frac{C}{\frac{g}{R} - \omega^2}}$, $c = \sqrt{\frac{C}{\frac{g}{R}}}$ なる三軸を有する扁平楕圓体 (oblate spheroid) の方程式して、扁平度 (ellipticity) e は $(a-c)/a$ 即ち

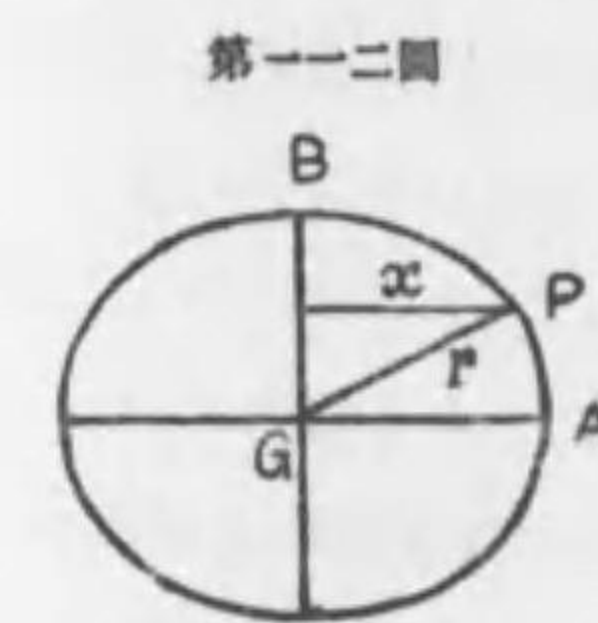
$$e = 1 - \frac{c}{a} = 1 - \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega^2 R}{2g} \dots\dots\dots (4)$$

なり、之に値を興ふれば (秒單位) $\omega = 2\pi/(24.60.60)$, $R = 6360000$ 米, $g = 9.8$ 米より

$$e = \frac{1}{558}$$

を得べし、然るに實測に依れば洋水面の扁平度は $1/297$ にして其差 $1/600$ 以上に達す。此れ地殻の形狀既に扁平なるに因る。

尙ほ他の方法を使用すれば、動力學 (17) 式により遠心力の仕事は $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ に



して、地球の重心 G (第一二圖) より出づる力の仕事は $k m M/r$ に或常數を加へたるものなり (六三式を見よ)、又 (45) により $k = gR^2/M$ とす。依て兩力に関する位置のエネルギー常恒なることを表はす式は

$$C = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{mgR^2}{r} \dots\dots\dots (5)$$

となるべし。茲に $x=0$ とすれば P は B に来る、故に

$$C = mg \frac{R^2}{BG}$$

を得、又 $x=r$ とすれば P は A に来る、故に

$$C = \frac{1}{2} m\omega^2 \cdot GA^2 + mg \frac{R^2}{GA}$$

を得、兩式より

$$\frac{1}{2} m\omega^2 \cdot GA^2 = mgR^2 \left(\frac{1}{BG} - \frac{1}{GA} \right)$$

なり、依て

$$\frac{GA - GB}{GA} = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{GA^2 \cdot AG}{gR^2} \approx \frac{\omega^2 R}{2g}$$

即ち (4) と同一の結果に到着す。

液体の放面に xy 面を置き、 y 軸を鉛直ならしめ、外力は重力のみなるときは $X=0, Y=-mg, Z=0$ により (1) は

$$mgy = C$$

即ち水平面は皆等ポテンシャル面にして水準は水平なり。

76 壓力 定義。液体静力学に於ては、單位面積を有する表面に垂直に作用する力を壓力 pressure と稱す。

壓力の大きさは力を面積にて除じたるものなれば其 デメンションは $[L^{-1}MT^{-2}]$ にして、單位容積が有する エネルギー の デメンション に等し。

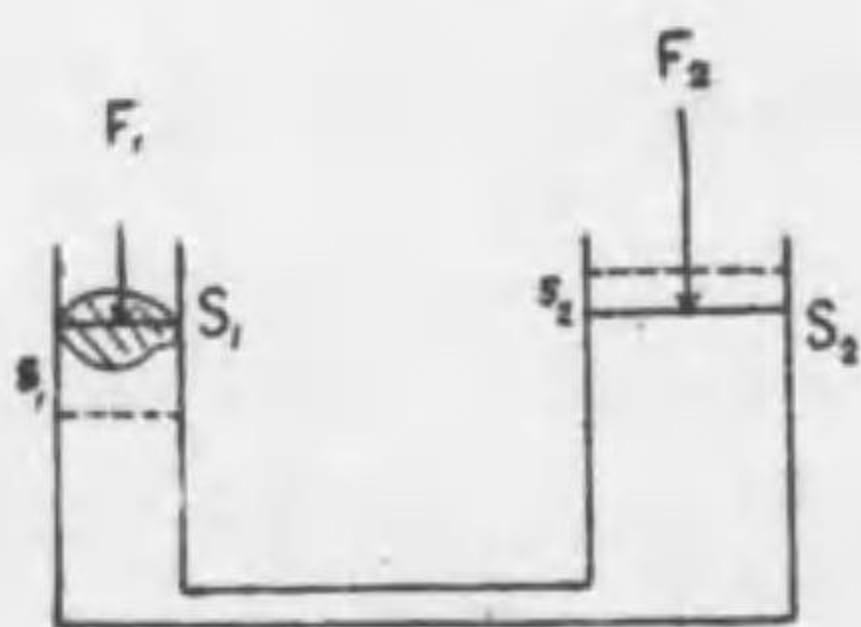
液体静力学は次の原則を以て其基礎となす。

第一原則、 液体の表面又は内部の点に施したる壓力は直に表面及び内部の凡べての部分に等量に傳達す。此を パスカルの法則 (Pascal 1650) と稱す。

第二原則、 静止せる液体の重さより生ずる壓力 (液壓又は釣合の壓力 hydrostatic pressure) は放面より計りたる深さと其液体の單位容積の重さとの積にして、壓力を受くると假定する表面の方向に關すること無し。

第一原則は連底器 communicating vessels (第一一三圖) によりて容易に説明す

第一一三圖



ることを得べし、管の斷面積を夫々 S_1, S_2 とし F_1 を垂直に S_1 に加ふれば壓力は F_1/S_1 に等しく、此壓力は直に等量に S_2 に傳達するゆへ、之に對抗する力を F_2 とすれば

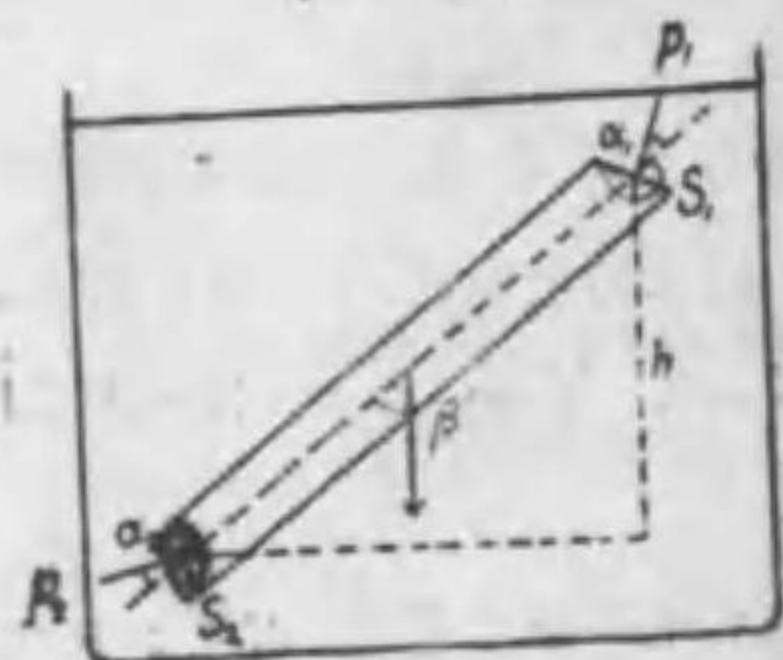
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \dots\dots\dots (6)$$

となるべし。此は假の仕事の理によりて

も説明することを得。今 F_1 の着力点は s_1 の距離を變位し F_2 は s_2 を變位したりと假定すれば、 F_1 と F_2 は釣合に在るを以て仕事の和は零なり即 $F_1 s_1 - F_2 s_2 = 0$ 、茲に F_2 は方向反對なるゆへ負數とす。然るに不縮性の理により $S_1 s_1 = S_2 s_2$ を得之を前式に代入すれば (6) と同一の式に達すべし。

第二原則を證明するには液体内に細長き圓柱の部分を想像し兩底面 S_1, S_2 に (第一一四圖) 働く壓力を夫々 p_1, p_2 とし其方向が圓柱軸と作す角を夫々 a_1, a_2 とすれば側面に作用する液壓は各所各自に釣合にあり、又圓

第一一四圖



柱の横斷面を S 、長さ l 、液の比重を σ とすれば圓柱の重さは $Sl\sigma g$ にして圓柱軸の方向に分解したる三力の和は零となるべし、即ち

$$p_1 S_1 \cos a_1 - p_2 S_2 \cos a_2 + Sl\sigma g \cos \beta = 0$$

然るに $S_1 \cos a_1 = S_2 \cos a_2 = S$ 又 $l \cos \beta = h$ なるを以て

$$p_2 - p_1 = \sigma gh$$

故に兩底面に於ける壓力の差は垂高を h とし斷面を單位とするところの直圓柱を充たす同液の重さに等し、從つて放面より計りたる深さを y とすれば y の深さに於ける壓力 p は (y 軸は下向し放面を起点とし下方を正數とす)

$$p = \sigma gy \dots\dots\dots (7)$$

によりて表はさるべし、此理により液体内に設けられたる凡べての水平面は皆な等壓面となる。

此壓力は側面にも同様に作用す。今放面と側面とが交はる水平線を軸として側面の能率を取れば $py = \sigma gy^2$ なり、底の深さを h とすれば全能率は

$$\sigma g \int_0^h y^2 dy = \frac{1}{3} \sigma gh^3$$

然るに σgy は單位面積に働く力にして、面積 dy に働く力は $\sigma gy dy$ となり、側面全部に働く合力は

$$\sigma g \int_0^h y dy = \frac{1}{2} \sigma gh^2$$

此合力の作用する点の深さを h_0 とすれば

$$\frac{1}{2} \sigma gh^2 \cdot h_0 = \frac{1}{3} \sigma gh^3$$

故に

$$h_0 = \frac{2}{3} h$$

を得、故に壓力の中心は三角形の重心と同じく $\frac{2}{3}h$ の處に在り。

比重 σ' 、底面 S 、長さ h なる直圓柱の形を備へたる固体を第一一五圖に示す如く鉛直に水中に突き入るときは上底面は y_1 、下底面は y_2 の深さに來り上底面に

第一一五圖



$-\sigma'gy, S$ 下底面に $\sigma gy, S$ の力作用し液壓の合力は $\sigma gS(y_2 - y_1)$ 即ち σgSh なり、此上向する力を浮力 bouyancy と稱す。故に浮力は此圓柱体と同容積を有する液体の重さに等し。然るに圓柱其自身の重さは下向するゆへ、此物体を液中に入ることによりて物体は其が排除したる液の重さだけ軽くなる理なり、此をアルキメデスの理 (principle of Archimedes, -220) と稱す。固体の形が直圓柱ならざる場合に於ても數多の小圓柱の集合と見做すことを得るがゆへに此理は如何なる形状の固体にも通用すべし。又固体の重さは $\sigma'gSh$ なるを以て固体の浮ぶと沈むとは $\sigma - \sigma'$ の正負によりて定まる。

77 浮力の仕事 單位容積を有して重さ零なる固体を液中に入るときは浮力は其固体が排除したる液の重さ σg に等し、依て此力に打勝ち y の深さまで押入るときは仕事は σgy にして、此仕事は位置のエネルギーとして其物体に住すべし。故に (7) 式により、 y の深さに於ける壓力は單位容積の重さ無き物体が有する位置のエネルギーに等し、従て p のデメンションは力を容積にて除じたるもの、デメンションと同一なり (前§ 76 参照)。

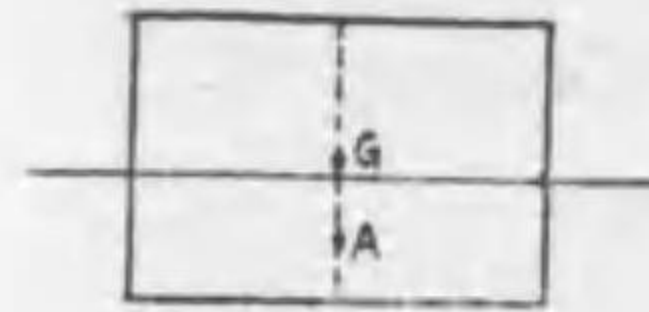
比重 σ' なる單位容積の固体を比重 σ なる液体の深さ y の点に入るときは其固体の重さは空氣中に於ては $\sigma'g$ なるを以て重力に關する位置のエネルギーは減少して $-\sigma'gy$ となり、浮力に關する位置のエネルギーは増して σgy となる、而して此固体は速度零なるを以て運動のエネルギーは零となり固体が有する全エネルギー H は $\sigma gy - \sigma'gy$ 即ち

$$H = p - \sigma'gy \dots\dots\dots (8)$$

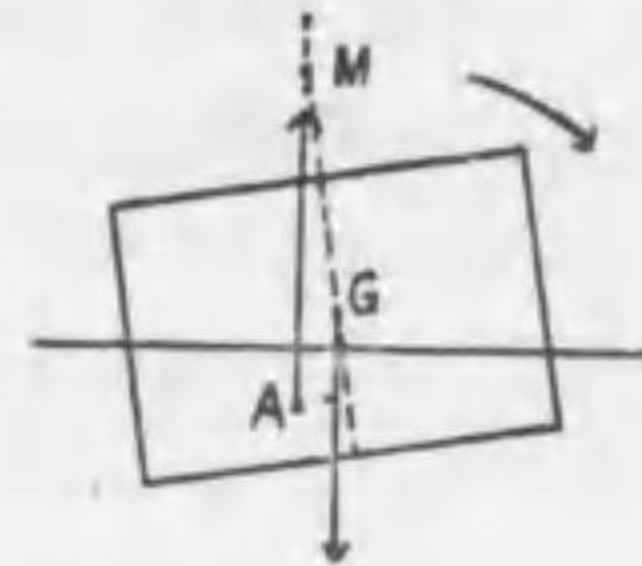
なり、容積 V なるときは全エネルギーは上式の V 倍となる。 $H/\sigma g$ を屢々落差 (head) と名くることあり。

78 浮體 固体の比重が液体の比重よりも小なるときは固体は液面にに浮泛す。浮力の着力点は常に固体が排除したる形体の重心なり。故に第一一六圖の如く浮體 floating body が釣合の有様に在るときは、固体の重量は重心 G に働き排除せられたる液の浮力は其形体の重心 A に働き、重さは浮力に等しく方向は互に相反するゆへ一見不安定の釣合の如く見ゆれども實は然らず、何となれば第一一七圖の如く少しく一方に傾くときは浮力の着力点 A は忽ち同方に偏し茲

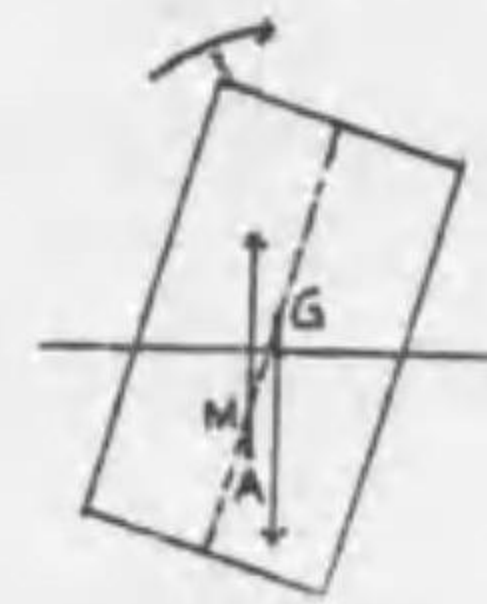
第一一六圖



第一一七圖



第一一八圖

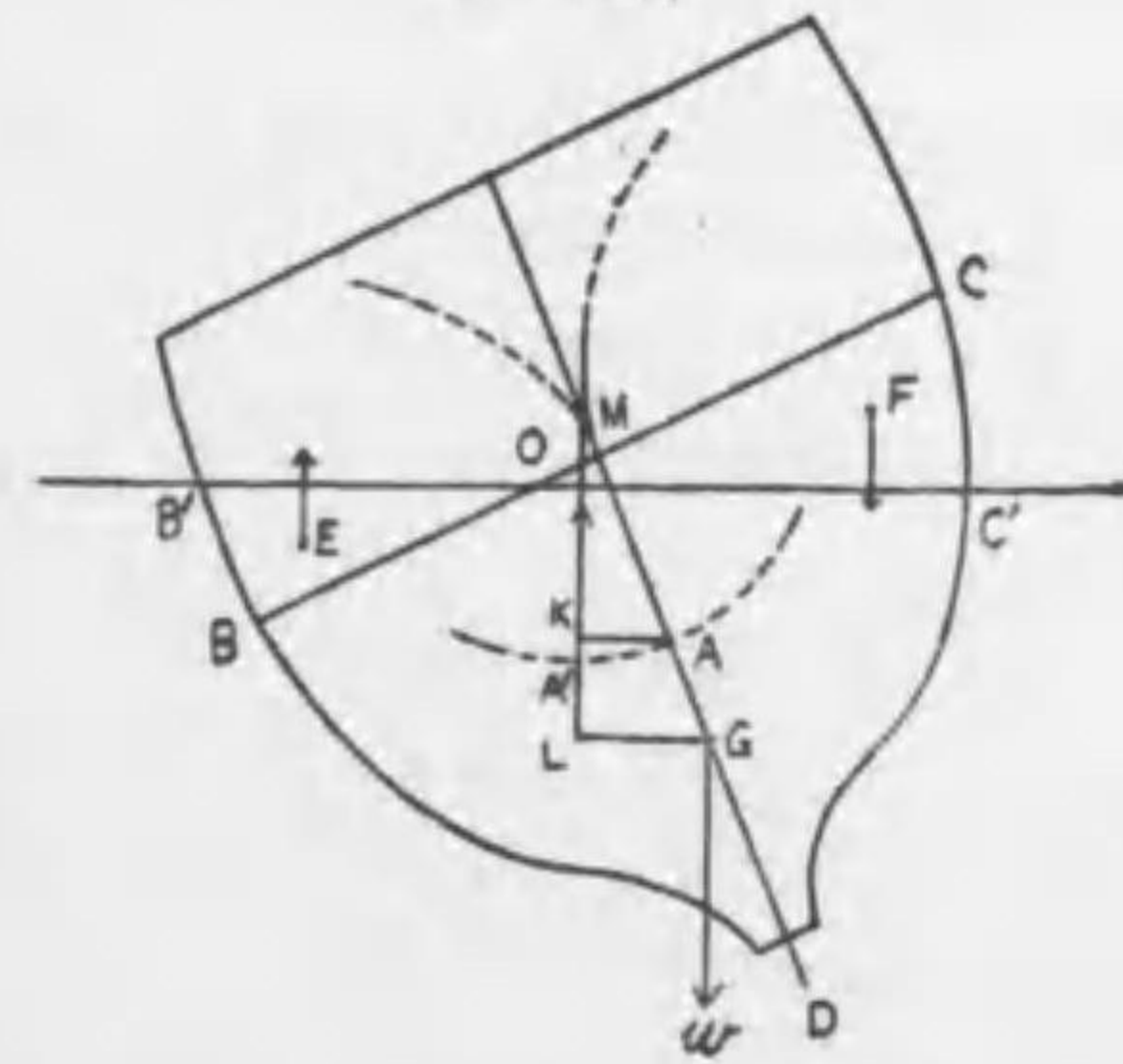


に偶力を生じて固体を舊位に復歸せしめんとす、GM を中央線とすれば浮力を示す線が中央線と交はる点 M が G よりも上方に在るときは偶力は常に固体を舊位に歸らしむるも、 M 点が G よりも下方に在るときは固体は轉覆すべし、第一一八圖の如し。第一一七圖の如き場合に於て傾斜角を次第に減少すれば其極限に於て M は一定点に來る、之を傾心 metacentre と名づく。而して舊位置に復歸せしめんとする偶力は、固体の重さを w とし $\angle GMA = \varphi$ と置けば

$$S = w \cdot GM \cdot \sin \varphi \dots\dots\dots (9)$$

なり、此偶力を復原力 stability と稱す。船は復原力小なるを以て動搖緩漫にして其週期長く、又 MG の距離は通例一米内外のものなりとす。船の左右の動搖 rolling には横面 transversal 復原力あり、前後の動搖 pitching には縦面 longitudinal 復原力あり、又傾斜角 10° 乃至 15° までは M の位置は殆ど傾心を離るゝこと無きものなり。復原力を概算するには第一一九圖に於て BC を直立せるときの水準線とし $B'C'$ を傾角 φ なるときの水準線とすれば $\triangle B'BO$ の面積 f は畧々 $\triangle COC'$ の面積に等しく、 $\triangle B'OB$ の浮力増して $\triangle COC'$ の浮力減じたる理なれば、偶力は各三角形の重心 E, F に作用する浮力 (f) に両力の距離を乗じたるものに等し、而して $E,$

第一一九圖



F は O を頂点とする兩三角形の高さの三分の二の處に在るを以て EF は BC 又は B'C' の三分の二に等し。又 BCD の面積を F とすれば BC が水準なりしときは F の浮力は A 点に働き、今は排水面 B'DC' は F に等しけれども浮力は A' 点に働くゆへ浮力の偶力の差は A より MA' に下したる垂線 AK と F との積に等し、而して此二つの偶力は同一の値を有す、即ち

$$\frac{2}{3}BC \times f = AK \times F.$$

又 G より MA' の延長に下したる垂線を GL とすれば

$$GL = GA \sin \varphi + AK$$

なり依て復原力 S は

$$S = w \times GL = w \left(GA \sin \varphi + \frac{2}{3}BC \times \frac{f}{F} \right)$$

φ 角極めて小なりと假定するを以て $f \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BC}{2} \right)^2 \varphi$ を得、ゆへに

$$S \approx w \varphi \left(GA + \frac{BC^2}{12F} \right) \dots \dots \dots (10)$$

なり、此式によれば復原力は船の重さと幅とを増すことによりて大きくすることを得べし、G が A の上に在らば GA は負数となる、圖中 A'A は浮力中心の軌跡にして M 附近の点線は其包絡線を示す。AA' は大概雙線に近似す。

ボーマの浮秤 Baumé's hydrometer は浮体の他の一例なり、之を比重 1 なる水中に投ずれば第一二〇圖の如く O 以下は浸水す、浸水したる部分の容積を V₀。立方體とし、重さを w 瓦とすれば V₀ は浮力の數値に等しく V₀ = w なり、今他の比重 1 よりも小なる液中に投ずれば P まで浸水す、OP なる管の断面を常數 S、OP を x、液の比重を σ とすれば

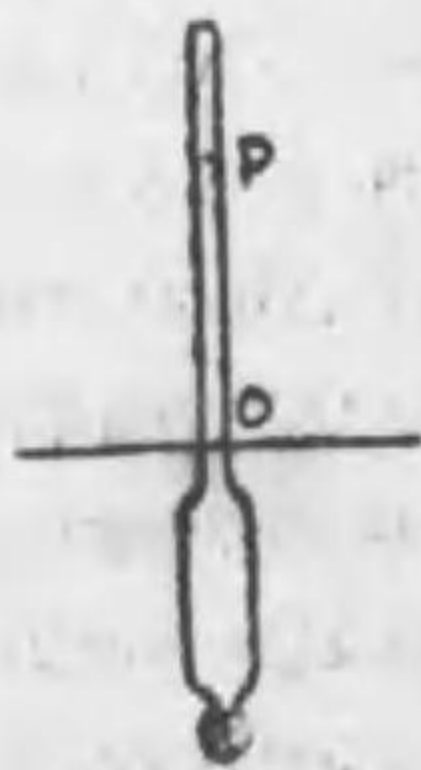
$$w = (V_0 + Sx)\sigma$$

依て V₀ = w を代入して得たる公式

$$x = \frac{V_0}{S} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right)$$

に従て目盛を施すことを得べし、 $\sigma > 1$ のときは x は負数となり目盛は O の

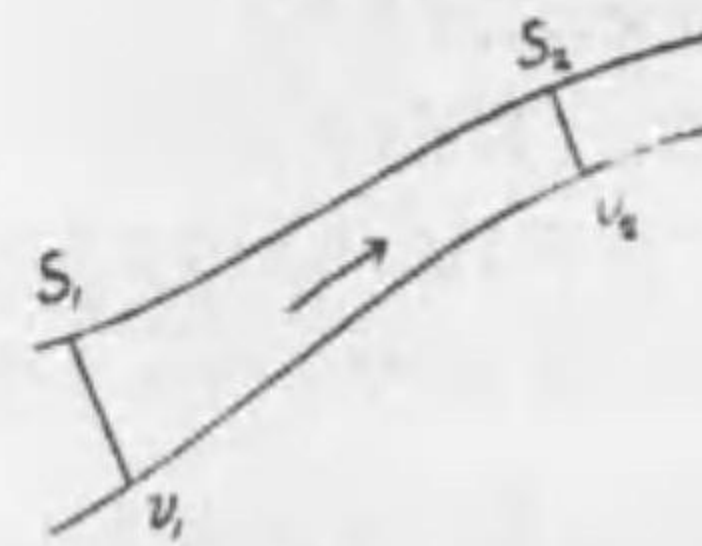
第一二〇圖



下方に来るゆへ秤の重量を増し O 点を上方に設けざるべからず。

79 連續則 完全液体が管内を充たしつゝ通過する際には液の不縮性に従ひ狭き部分は速度大にして廣き部分は速度小ならざるべからず。第一二一圖 S₁, S₂

第一二一圖



を二個處の横斷面積とし速度を夫々 v₁, v₂ とすれば S₁ と S₂ とにて限られたる空間内へ單位時間毎に流入する液量は v₁S₁ に比例し流出する液量は v₂S₂ に比例す、而して空間内の液は收縮、膨脹せざるを以て

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \dots \dots \dots (11)$$

を得、故に速度は横斷面に反比例するを見る、之を連續則 law of continuity と稱す。

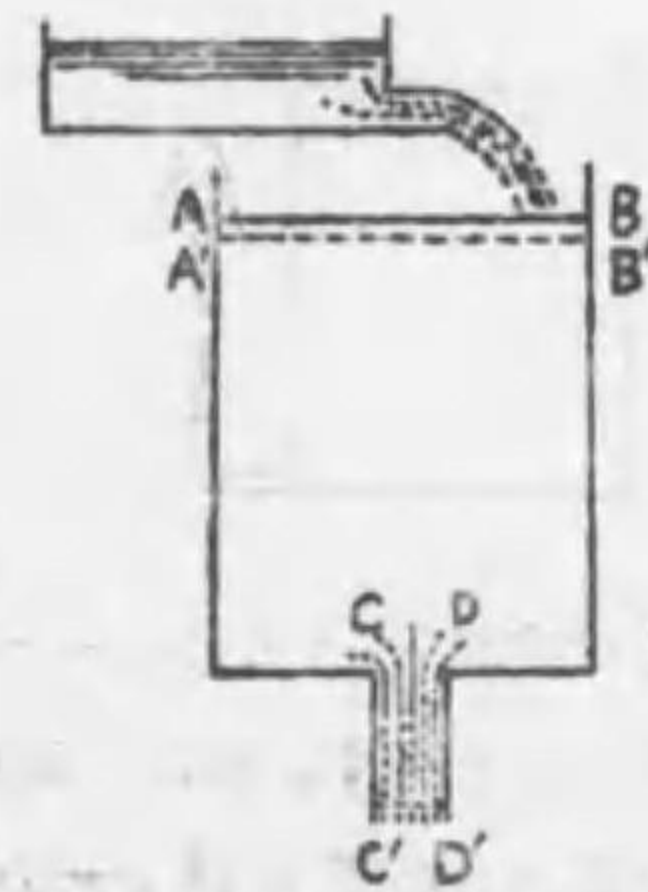
運動せる液内に任意の小なる閉曲線を書き、其曲線上に並べる分子の行衛を辿るときは一個の管を得べし、而して初め書きし曲線によりて包まれたる諸分子は常に此管内に在りて運動す。此管を流管 tube of flow と稱し、管の母線を流線 stream line と名く。此流管内に於ても連續則行なはるゝは明白なり。

80 トリチエリの實驗 (Torricelli 1644)、ガリレヨの高弟トリチエリが爲したる流出液の實驗は液体動力學起源を劃するものと稱するも不可なし。第一二二圖の如く器に液を盛り器底に開口して液を流出せしむるに當り水溜より液を供給することに依りて液高 h を不變ならしむれば流出の速度 (velocity of efflux) v は

$$v = \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (12)$$

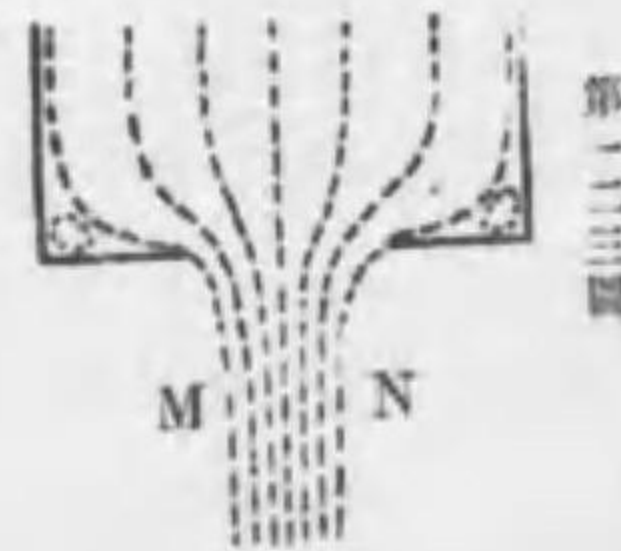
によりて與へらるべし。此關係を證明するにエネルギー則を使用すれば容易なり、或少時の後ち放面 AB に並び居りし分子は下降して A'B' に来り、同時に開口面 CD に並び居りし分子は C'D' に下降す。而して ABB'A' 液の質量 m は CDD'C' の質量に等しく、上部に在りし m の物体が突然 h の高さを落下して下部に来りしものと想像

第一二二圖



することを得べし、即ち mgh の位置のエネルギー 變じて $\frac{1}{2}mv^2$ の運動のエネルギー となりしゆへ $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ より直に $v^2 = 2gh$ を得べし。又液の比重を σ とすれば CD に於て壓力は σgh なり、然るに §77 に於て學びしところに依れば此は單位容積の液が CD に於て有する エネルギー の全部に等し、故に CD に於て $\frac{1}{2}\sigma v^2$ なる運動のエネルギー に變ずべし。又此現象に於て各分子は同一の点に來らば必ず同一速度及び方向を有し、分子自身は代謝すれども運動の形態は毫も變化せず、瀑布、噴水泉の如きも同様に於て個々の分子は盛に運動するも運動液体の形狀は常住なるを見るべし。此種の運動を常恒運動 steady motion と稱す。

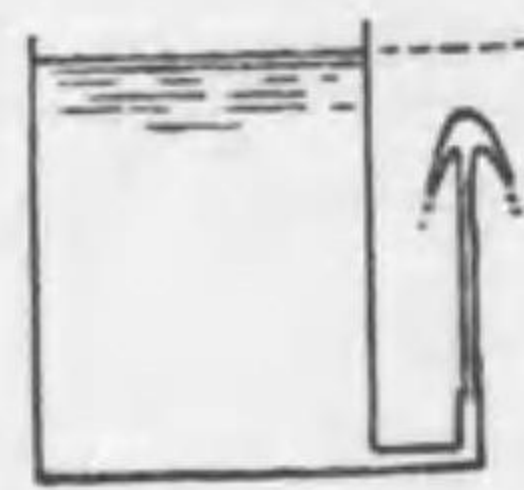
流線は底口の附近に於て多少其中心の方へ傾き從て分子の速度は水平速度を混じ之がために流管は MN (第一二三圖) の處に於て底口面積よりも狭き面積を持つに至る、之を縮脈 vena contracta と稱す、縮脈以下に於て流線が不連続となり大球小球の滴は交々並びつゝ各自振動するは口縁の振動に歸因す。



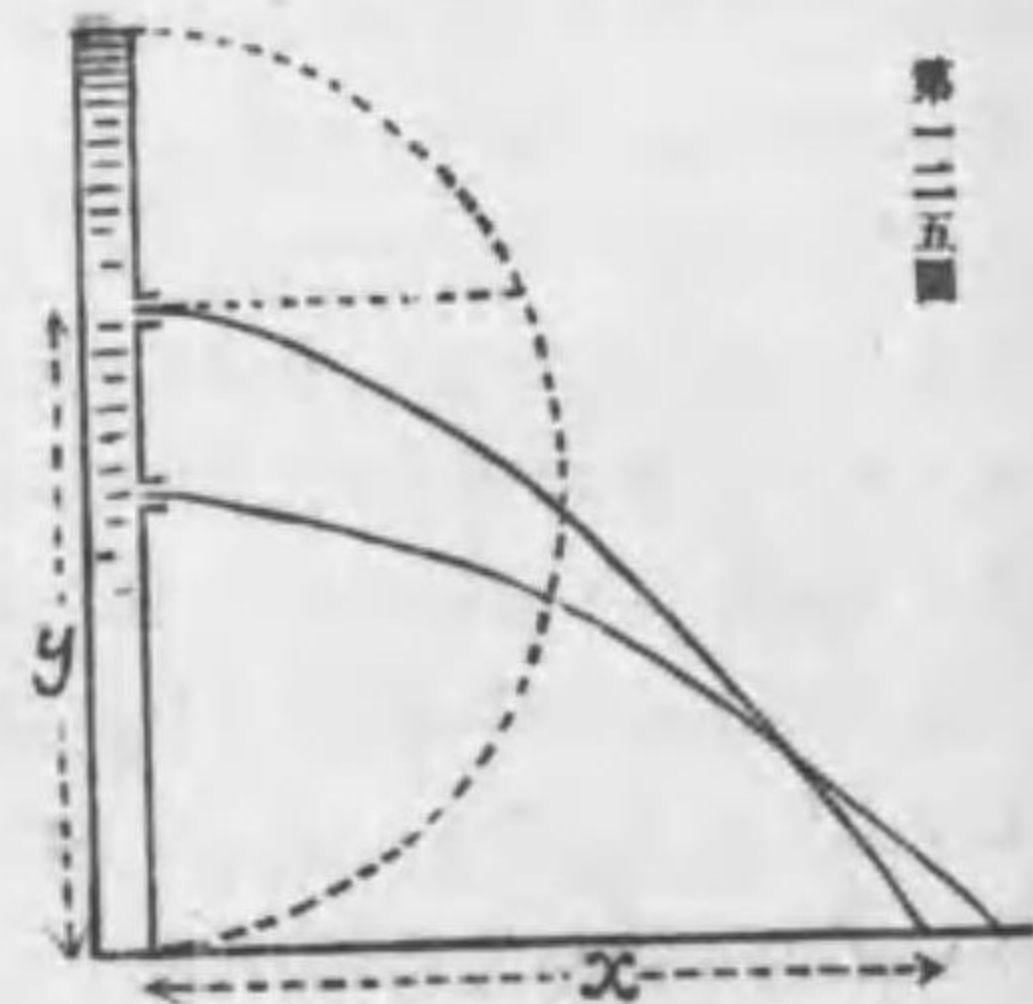
第一二三圖

縮脈の直徑は底口直徑の 0.8 にして面積は 0.64 となり單位時間の流出の量 quantity of efflux は、S を底口面積とすれば、 $S \times 0.64$ となる、又口縁の摩擦により流出の速度も $\sqrt{2gh}$ の 0.97 倍以下となる。故に第一二四圖の如く上方に開口せしむるときは流出液は液高の全部を騰ること能はずして $\sqrt{2gh'} =$

第一二四圖



0.97 $\sqrt{2gh}$ 即ち $H = h \times 0.94$ の高さ到達すべし。第一二五圖の如く高さ h の圓柱に水を充たし底より y の高さに設けたる孔より流出せしむるときは液高 $h-y$ なるゆへ $v = \sqrt{2g(h-y)}$ の速度を有す、故に t 時後に水平面上に落つる距離 x は $x = vt = t\sqrt{2g(h-y)}$ によりて與へられ、高さは $y = \frac{1}{2}gt^2$ によりて與へらる、兩式より t を省去すれば



第一二五圖

$$x^2 = 4y(h-y)$$

を得べし、故に h を直徑として圓を書き、孔を過り水平線を引くときは、圓周までの長さは $\sqrt{y(h-y)}$ なるを以て x は其長さの二倍となるべし、從て中央の孔より出づるもの最も遠方に到着す。

81 運動の壓力 運動せる液体内部に於ける壓力は釣合の時の壓力に等しからず、之を運動の壓力 hydrokinetic pressure と名づけ、釣合の壓力 hydrostatic pressure より區別す、釣合の壓力 p は深さ y の点に於ては σgy に等しく、浮力に關する位置の エネルギー に等し、而して此は釣合の場合に於ては浮力に關する全 エネルギー なり。然るに液分子が v の速度を以て運動する場合には運動の エネルギー $\frac{1}{2}\sigma v^2$ を生じ、之に運動の壓力 p_{kin} を加へて初めて浮力に關する全 エネルギー となるべし、故に

$$p = p_{kin} + \frac{1}{2}\sigma v^2 \dots\dots\dots (13)$$

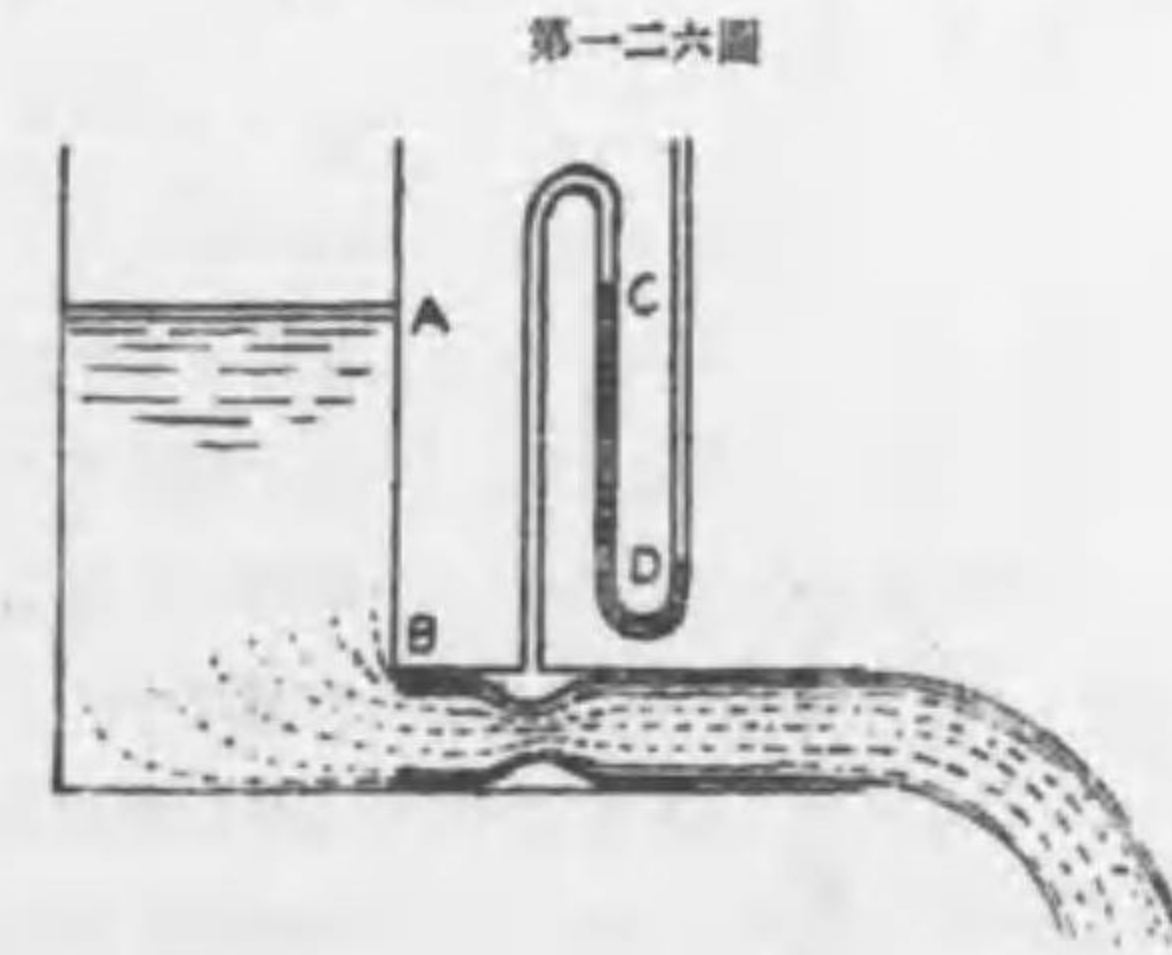
を得、之を落差の公式 (8) に代入し又物体の代りに液体分子を考ふるときは $\sigma' = \sigma$ となりて

$$H = p_{kin} + \frac{1}{2}\sigma v^2 - \sigma gy \dots\dots\dots (14)$$

を得べし、此を ベルヌーキの方程式 (Bernouilli 1738) と稱す、茲に y は下方を正數とすることは前既に注意したる如し。

(14) を トリチエリ の實驗に應用せんとするに當り放面及び底口に於ては運動の壓力 p_{kin} は氣壓に等しく從て同値なるを注意すべし。次に放面 AB に於ては $v=0, y=0$ なるを以て $H = p_{kin}$ なり、底口 CD に於ては $H = p_{kin} + \frac{1}{2}\sigma v^2 - \sigma gh$ なり、依て $\frac{1}{2}v^2 = gh$ を得べし。

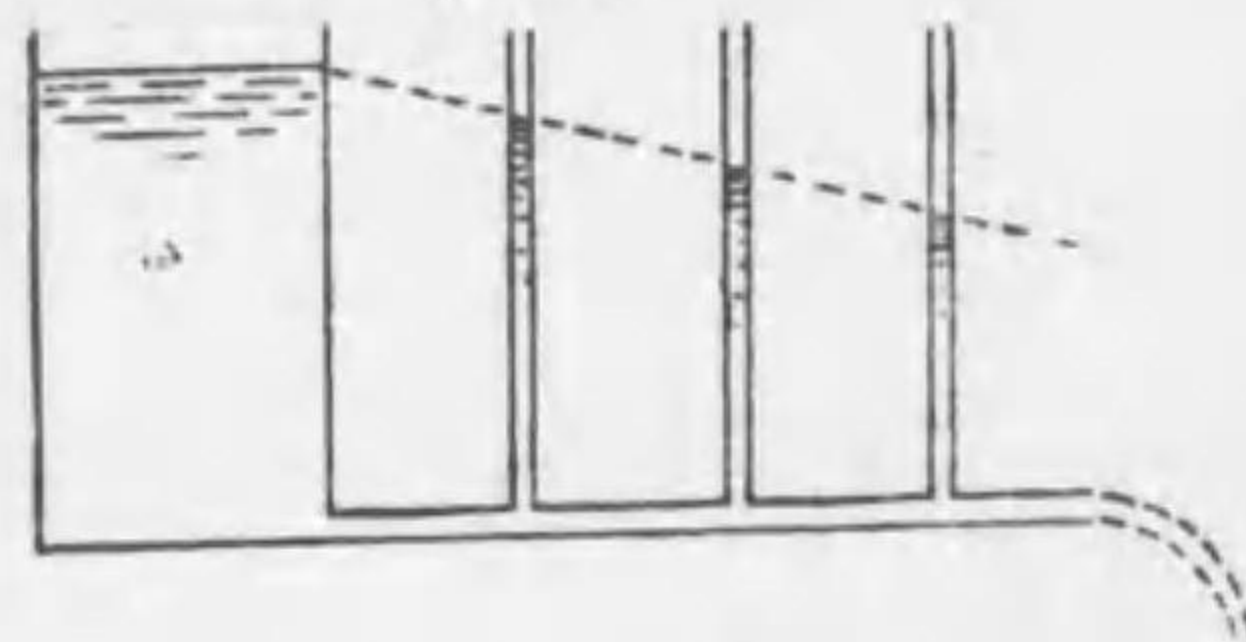
第一二六圖の如く較々太き流出管を使用すれば流管は器底に近き處に於て縮脈を生じ、速



第一二六圖

度は他の部分よりも遙かに大となり、之れがために p_{kin} は著しく減少し其處に設けたる壓力計の同一液は AB なる液高の四分の三に等しき壓力の不足に感じて CD の距離を逆騰するを見るべし。此種の現象を屢々負性壓力 negative pressure と稱す。

第一二七圖



第一二七圖も此に類似せる實驗なり、水平なる細管より流出せしめ諸處に壓力計を設くときは其液高は桶内の液高と同一ならずして開口に近づくに従ひ次第に弱りたる壓力を示すべし、此れ水平管内

の液は管壁の摩擦に遭ふて壓力の落差を減じ管壁に粘着して動き難く其結果として恰も管の断面は管端に近づくに従ひて狭小となり、之がために連續則の理により速度は益々大となる、然るに (13) により p は釣合の壓力、 σgh 、にして一

定なれども運動の壓力 p_{kin} は v 大となるに従ひて益々小となるが故なりとす。

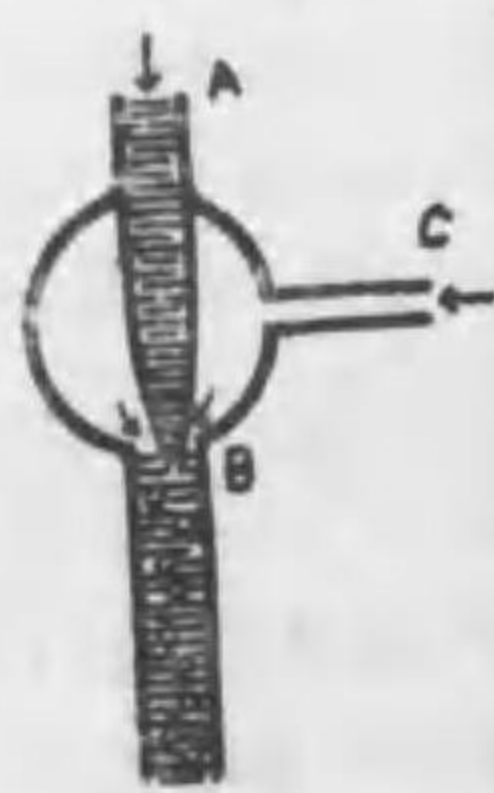
第一二九圖



排氣機に第一二八圖の如きものあり、A より水を注加するときは B 以下は C より吸入したる空氣を伴ひつゝ落下し C と連續せる器中の空氣を多少稀薄ならしむることを得べし。即ち運動せる水は壓力少なきことを證明する一例なり、此器械を使用し壓力を一氣壓の三分の一に減ずるは容易なり。

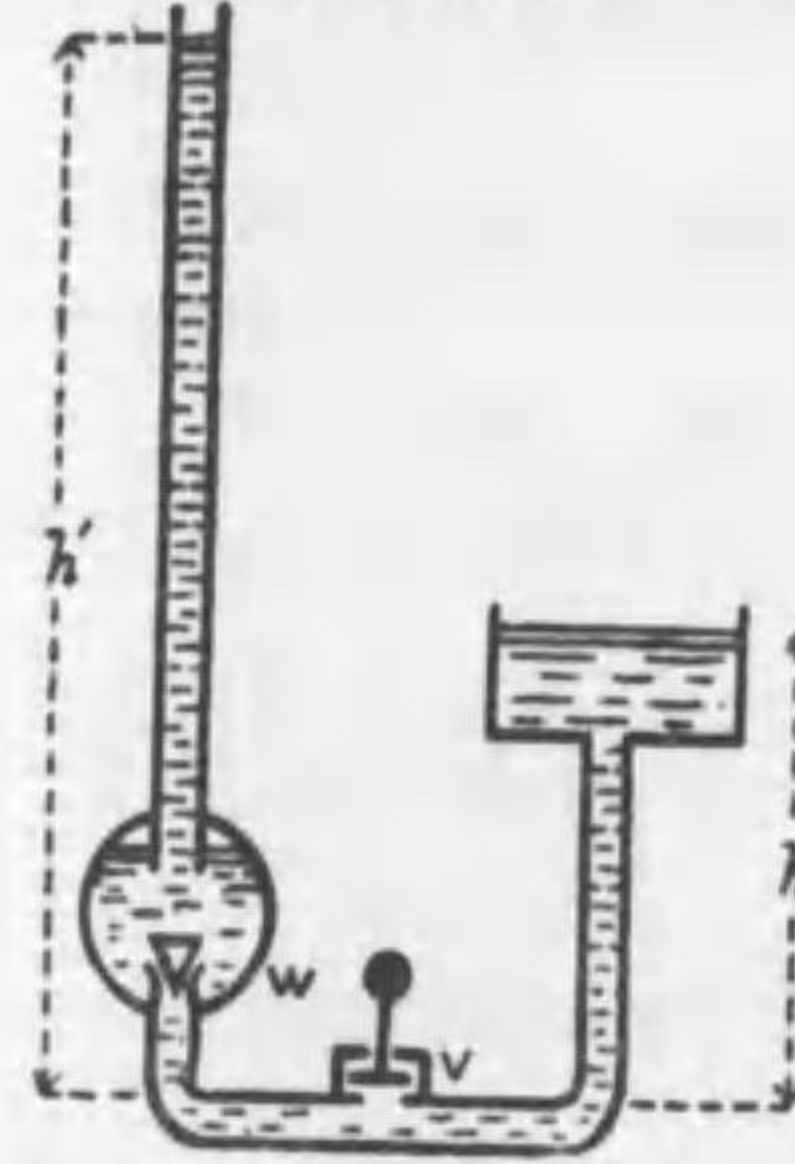
此に酷似せる スプレングル氏 ポンプ (第一二九圖) に於ては R 器中の空氣を稀薄にせんがた

第一二八圖



めに C 中の水銀を D より滴下せしむれば D 以下は壓力減じ R の空氣は D に來り水銀は滴狀を爲し滴間に空氣を挟みつゝ落下す。

第一三〇圖



揚水機 hydraulic ram (Montgolfier 1796)

(第一三〇圖) に於ては液高 h の桶より來る水は V の瓣より流出するに當り瓣の重さは液高 h より生ずる壓力よりも較々大なれども V に出づる孔の小なるがため (13) により上部の壓力は下部水平管内の壓力よりも小となりて V を上方に押し上げ外孔を塞ぎ水の漏出を妨ぐべし、此が爲に水平管内の速度は急に零となり内部の壓力は突然膨大し水は W の瓣を押し上げて球内に進入し h' の高さに上騰す。又一方に於ては水は活路を開きたる結果として前壓力

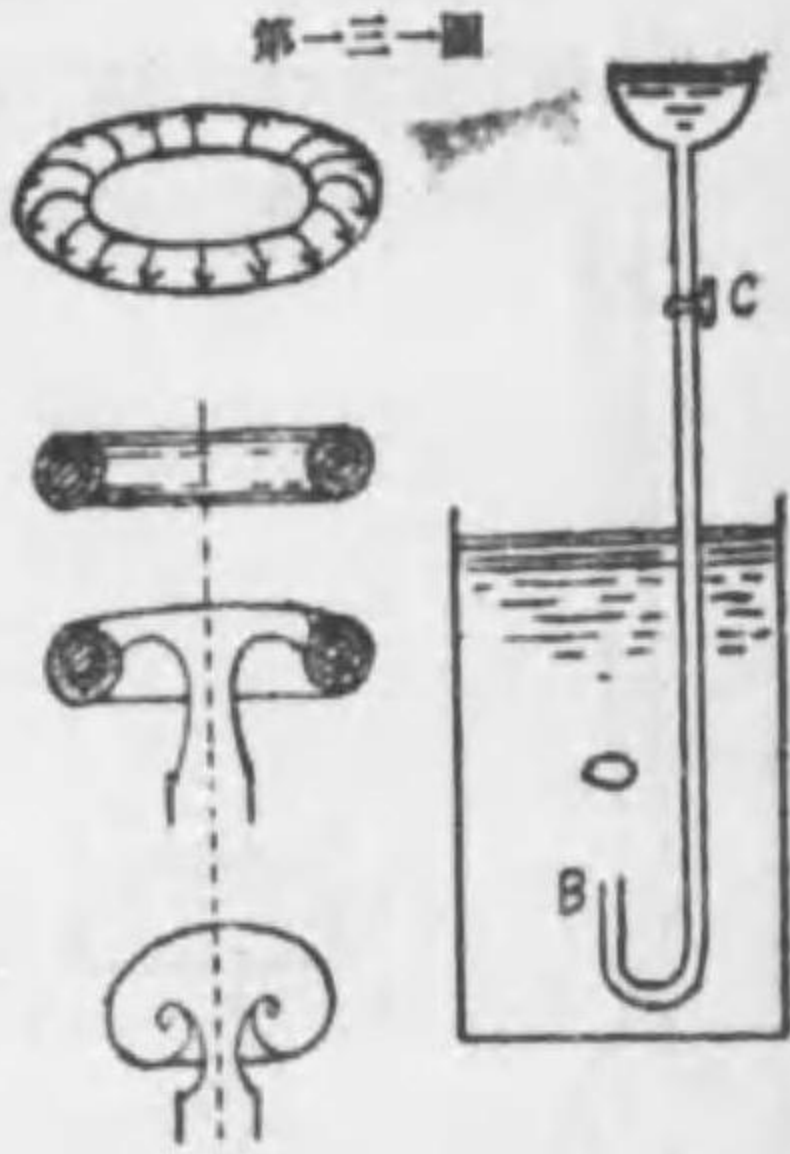
の値に復減し、V は開き W は閉づ。斯の如く V, W は交代に開閉し球内に閉ぢられたる少許の空氣の弾力により噴水は連續的に h' の高さを維持すべし、 h' は屢々 h の二十倍にも達することあり。然れども此實驗は決してエネルギーの創造を示すものに非ず、今一定時に h の高さを下降する水の質量を m とし同時に h' の高さを騰る水の質量を m' とすれば $mgh = m'gh'$ なるゆへ $m/m' = h'/h$ となる、從て

$$m - m' = \frac{h' - h}{h} m'$$

の水は V 孔より漏洩するものとす、即ち高さに於て利あるも質量に於て損あり。

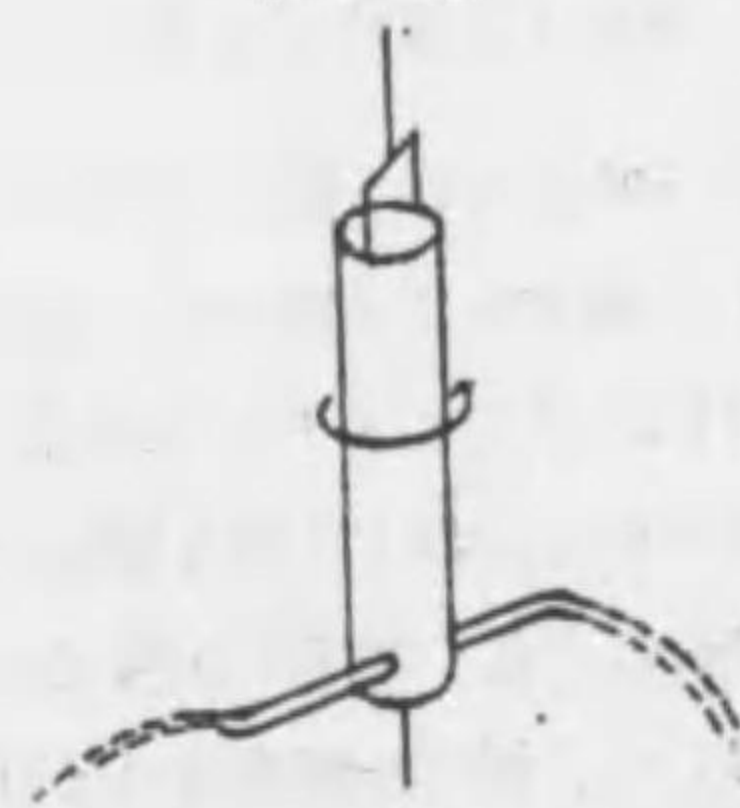
82 渦輪 液体又は氣體の渦輪は原子構造説に一時有力なる臆説を提供したるも今は全く用ひられず。液体の渦輪 vortex ring を製するには圖の如く桶に清水を盛り底口に曲管を附し染色したる液を以て充たしめ C のヒネリ栓を旋はして B より突然染液を噴出せしむれば噴出液の形狀は圖の如く上りながら變更す、完全液中に於ては渦輪の染色は決して外液と混交することなく圓形なる輪軸を回轉しながら上進す。氣體の渦輪も之に似たるものにして、煙管の雁首或は汽車の煙突より出づるを見ることあり、氣體にて實驗するには煙草の煙或は塩化ア

ムモニヤの煙を用ふれば可なり。渦輪の性質の最も著しきものを擧れば其の運動量の不變なること、又甲渦輪が乙渦輪を追跡するときは甲は開き乙は縮まりて乙は甲を貫通し貫通したる後は乙は開きて其速度を減じ甲は縮まりて其速度を増すゆへ乙は甲を貫くことなる斯の如く甲乙の動作は交代して已むこと無かるべし。若し甲乙相近づくときは両つながら擴張し、互に遠ざかるときは両つながら萎縮す。外力を以て渦輪を變形せしむれば弾力体の如く振動しながら舊形に復歸すべし。物体の慣性、弾性等を説明するに當り各原子を以て渦動と見做す時は極めて興味ある結果に達せざるにあらず。



83 液体原動機 hydraulic motors 高處より流下する水のエネルギー 或は潮汐の満干のエネルギーは原動機により仕事を奏せしむることを得べし、例へば水車、タービン、揚水機の如し。水の落差より計算したる仕事と實際原動機が作す仕事との比を有効率 efficiency と稱す、有効率は常に 1 よりも小なり。流水が水車の最下部に於て其の運動量により水車を回轉せしむるものを下射水車 lower shot water-wheel と名け、水量多きも流勢緩漫なる場合に之を使用す、下射水車に於ては有効率は僅に百分の二十五なり、若し輪葉を曲げて水の通過を防ぐときは百分の六十に昇らしむることを得べし。流勢強きも水量不足なるときは上射 upper shot 水車を用ふれば稀に百分の七十五の有効率を收むることあり。水車の一類なるタービン turbine (Founeyron 1834) の有効率は畧七十五乃至八十と見て可なり。流水は其輪葉の曲りたる表面に沿ふて動くために運動量は多

第一三二圖



少無効となるの恐あり。反働水車 reaction-wheel (132圖、Segner) はタービンの原型にして、水の高さを h とすれば底に近き側壓は gh なり故に未だ回轉せざるときは $\frac{1}{2}v^2$ の運動エネルギーに變すべき筈なれども ω の角速度にて回轉せば底に着けたる長さ r なる細管の端の速度は ωr なるゆへ管端に於て既に $\frac{1}{2}\omega^2 r^2$ のエネルギーを有す、依て

$$\frac{1}{2}v^2 = gh + \frac{1}{2}\omega^2 r^2$$

即ち

$$v = \sqrt{2gh + \omega^2 r^2} \dots\dots\dots (15)$$

なる速度を以て流出す、此速度は管端に對する値を表はし地面に對する絶對速度は $v - \omega r$ なりとす。

第五 章

氣 體 力 學

AERODYNAMICS

84 氣體 氣體の分子は液体の分子よりも一層動き易く又相互距離の變更も自由なるため著しき可縮性を有す、故に氣體を可縮流動体と稱す。同時に又擴張性を有し、之がため氣體は容器の全容積を占有す、然れども他の物体と同じく重量を具ふるを以て空氣は地球の重力に引かれて其表面に附離して大氣を形成し其上層は漸次に稀薄となり遂に不明瞭なる放面に於て終はる。空氣が重量を有することは アリストートル 既に之を唱へ、ガリレオ (1638) に至りて實驗的に證明せられたり、其法、球殻を秤量し、後ち球殻に壓搾したる空氣を吹込みて再び秤量するに在り、後 ゲーリック (Guericke 1672) は自ら發明したる排氣機により球殻内部の空氣を排除して秤量したるに重さの軽減するを見たり。

氣體の密度を水に比較して表はすは不便多きを以て通常空氣若くは水素を標準とす。與へられたる質量を有する氣體の容積は其可縮性のために壓力の多少に依りても變じ又温度によりても變するを以て氣體の密度は定壓、定温 (例へば一氣壓と温度零度) の時の値を示すを常法となす。

既述の如く氣體は重量を有するを以て液体の場合と同じく其重量のために釣合の壓力を生ず。故に他の物体を氣體中に置くときは浮力のために其物体の重さを減すべし、其減少は アルキメデス の理に従ひ其物体と同容積の氣體の重さに等し。

又氣體は分子の運動甚だ自由なるを以て氣體の表面若くは其内部の点に加へたる壓力は等量に表面若くは他の内部の諸点に傳達すれども完全液体の如く直ちに傳達せずして多少の時間を要す。

上述の二件は先きに §76 に於て液体の二原則として説明したる法則に該當す。§79 に於て説明したる連續則も氣體の密度が一つの流管内に於て平等なる場合に限りて直に之を適用することを得べし。又其と同じく §81 の運動の壓力の公式 (13) も同一制限の下に殆ど同様に行はるべし (詳説は後章に譲る)。

凡そ氣體は其壓力を増し温度を減すれば遂には液化する性質を有す、故に其未だ液化せざるも尙ほ液化状態に近き氣體に於ては其性質著しく通常の氣體と相違し所謂完全氣體 perfect gas の状態を距ること遠きものとす。本章に於ては専ら完全氣體を論ぜんとす。

85 弾性率 modulus of elasticity 氣體の容積は温度の變化に伴ふて變す、其詳細は之を熱學に譲り、茲には温度常住なるものと假定して氣體の諸性質を論ずべし。今壓力 P の下とに容積 V なる氣體あり、之に少許の壓力 p を附加すれば其容積は少許の收縮 v を來たすべし。即ち P は V に對し、 $P+p$ は $V-v$ に對す。然るときは分數 v/V は原容積の幾分が收縮したるかを示すなり此比を歪 (ヒヅミ) strain と名く、又歪は附加壓力 p によりて生じたるものにして p を歪力 (カイリヨク) stress と名く。而して歪力と歪との比を弾性率と稱す。即ち

$$\frac{\text{歪力}}{\text{歪}} = \frac{p}{v/V} \dots\dots\dots (16)$$

而して其逆數は可縮性 compressibility 或は可縮係數 coefficient of compressibility と稱せらる。

$[v/V]$ は純數にして デメンション は零なり、從て弾性率の デメンション は壓力のと同じにして $[L^{-1}MT^{-2}]$ なり、可縮性は $[LM^{-1}T^2]$ となるべし。

86 ボイル、マリオットの法則 ボイル (Boyle 1662) 及び マリオット (Mariotte 1676) が發見したる法則によれば温度一定の時に限り與へられたる質量を有する氣體の壓力と容積との積は常恒なり、即ち

$$PV=C \dots\dots\dots (17)$$

の式によりて示すことを得べし。氣體の中にも水素、酸素、窒素の如きは充分液化状態より離れ居るゆへボイル、マリオット法則に従ふも、他の氣體、殊に炭酸瓦斯の如きは平常の温度に於て既に液化状態に近く、從て完全に (17) の法則に遵ふて變化する能はざるものなり。

(17) は $P/1/V=C$ の如く書き改むるを得。今與へられたる質量を m とすれば $P/m/V=$ 常數と書くも不可なし。故に σ を比重とすれば前式は $P/\sigma=$ 常數

となり、壓力は比重に正比例するを見るべし。

87 **トリチェリの實驗** (Torricelli 1644) 長さ一米程の一端閉ぢたる管に水銀を充たし指頭にて之を塞ぎ倒せば管内の水銀は凡そ七十六釐の高さを保ち其上部には所謂 トリチェリの真空 Torribellian vacuum を残すべし。トリチェリは此實驗により盆中水銀面に相當する管内の水銀柱断面の處にて大氣の重さと水銀の重さとが釣合を保ちつゝあるものなることを悟れり。而して雙方の重さを断面積にて除じたるものは夫々大氣の壓力及び水銀柱の壓力に等しきゆへ氣壓 atmospheric pressure は高さ七十六釐内外の水銀柱の壓力に等しと云ふことを得べし。

トリチェリが此實驗を行なふに到りし動機はフロレンスの市人がボンプにて深さ 18 エレンの井水を吸ひ上ぐる能はざりし事實あるに因れり、水銀の比重は 13.59 なるを以て水銀の代りに水を用ふれば一氣壓に等しき水柱の高さは 76×13.59 釐即ち 10.33 米となるゆへ、其高さ以上に水を吸ひ上ぐる能はざるは明瞭なりとす。トリチェリよりも以前にデカルト (Descartes 1638) は既にフロレンス市人の當惑の理由は氣壓の力にては 18 エレンの水柱を支ふる能はざるに因ることを明言せり。後年 パスカル (Pascal 1646) は水銀柱の裝置を提へてピュイ、ド、ドウム山の頂上に登り水銀柱の次第に下降するを目撃し、ゲーリツケに至り (1660) 初て氣壓の變動と天氣の良否との間に關係存在するを確定す、而して此裝置はマリオット (1676) に及び氣壓計 barometer の名を受くるに至れり。

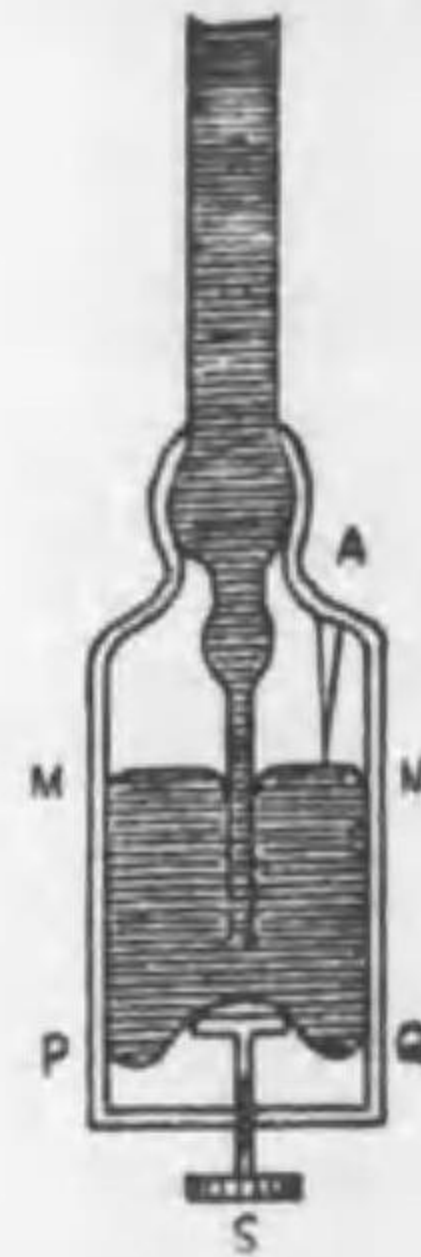
88 **氣壓** 氣壓は一地方に於て不斷變更す、又同時刻に諸處の氣壓相等しからざるも便宜上水銀液高 76 cm を以て常氣壓と定め此を一氣壓 one atmosphere と稱す、一氣壓は $76 \times 13.59 \times 980.6 = 1014.10^3$ 即ち一平方釐に 1014×10^3 ダインに當る、一氣壓を重さにて表はすには $76 \times 13.59 = 1033$ 瓦 = 1.033 斤、即ち一平方釐に凡そ一斤の重量なりとす。

地球表面は水陸交錯し又日熱を受くる程度も處々様ならず、其結果として氣壓に著しき變化を生じ常に 70 釐と 80 釐との間を往來す。

氣壓計 (第一三三圖) の盆内の水銀面 MN は氣壓の變動に伴ひ不斷上下するを以て尺度の起点を固定するため A に於て下向照規 gauge を固着し放面 MN

が其尖端に達する様に B の螺を捻りて PQ なる革底を上下する裝置を必要とす。

第一三三圖



金屬氣壓計一名無水氣壓計 aneroid barometer (Vidi 1844) は膜ある薄き金屬板を以て空盒を製し内部を真空となし外部氣壓の變化によりて膨脹收縮し易からしめたる裝置なり、此は水銀氣壓計よりも遙に鋭敏なれども氣壓の大なる變動を測るには不適當なり、此れ金屬板の彈性は迅速に外壓の變化に應ぜずして多少の時間を要するに因る。然れども水銀氣壓計は之を使用する地点の重力の大小に従て少許の誤差を生ずれども金屬氣壓計に於ては斷へて此事あるなし。此理に従ひ海上の如く振子觀測の不可能なる場合に於ては單に二種氣壓計を比較することによりて重力加速度の値を算出することを得べし。

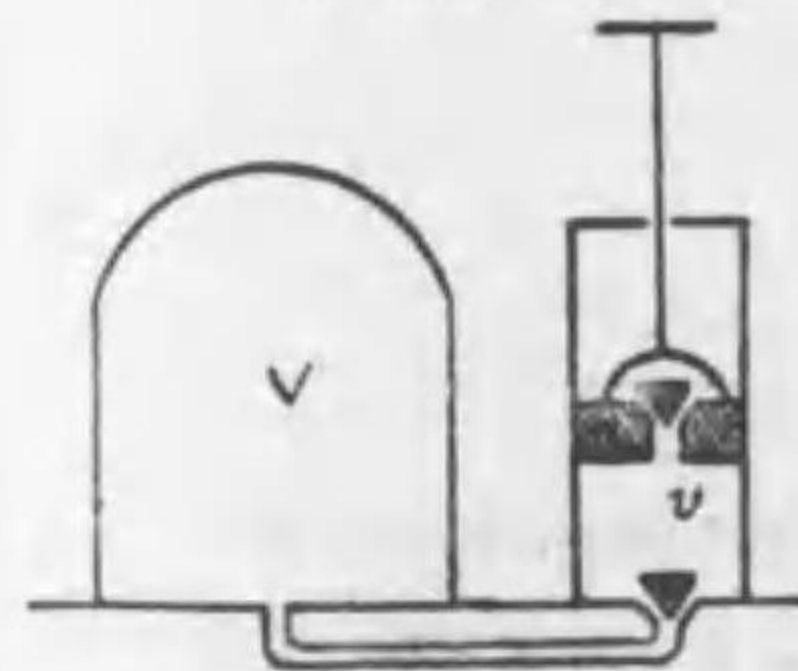
人類が久しく氣壓の存在を認識する能はざりし事は前既に述べたる如し、例へば コップ に水を盛り紙片を以て之を蓋ひ倒せしするも水の流出することなきは氣壓の作用に因るは極めて見易き理なれども吾人が茶碗より水を飲まんとするに當り單に口腔を開張することにより口内の氣體を少しく稀薄にし之がために茶碗内の水面に作用する氣壓の力は勝りて水を口内に押し入れつゝあることに氣附かざるなり、産れしまゝの嬰兒が母乳を吸飲するも之と同様に依れり。又 マリオット 壺 (第一三四圖) に於て MN 以上の水は前例の コップ 中の水と同理により落下の患ひなく從て MN 以

下の水に壓力を與ふること無く流水の速度は液高 h に支配せられ常恒の値 $\sqrt{2gh}$ を保持すべし。

第一三四圖



第一三五圖

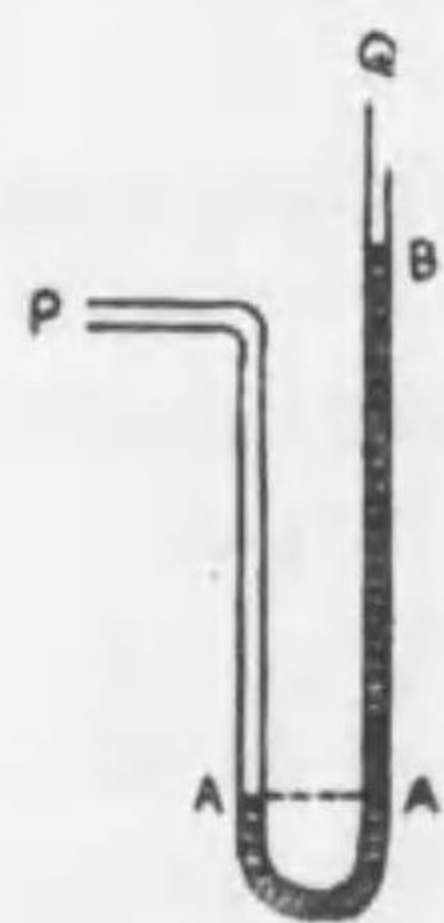


排氣機 air pump の最簡なる形狀は (第一三五圖) 排氣せんとする容積 V なる鐘室と活栓を有

する容積 v なる圓筒とより成立す、活栓を一上一下すれば鐘内の空氣の壓力は $V/(V+v)$ となり、 n 度上下すれば $(V/(V+v))^n$ となるべき理なれども外部の氣壓のため活栓の瓣は固く閉ちて開く能はざる狀況に陥るを以て或る稀薄程度を越ゆる能はず。

89 壓力計 manometer 少量の壓力を計るには第一三六圖の如き管に水銀を

第一三六圖

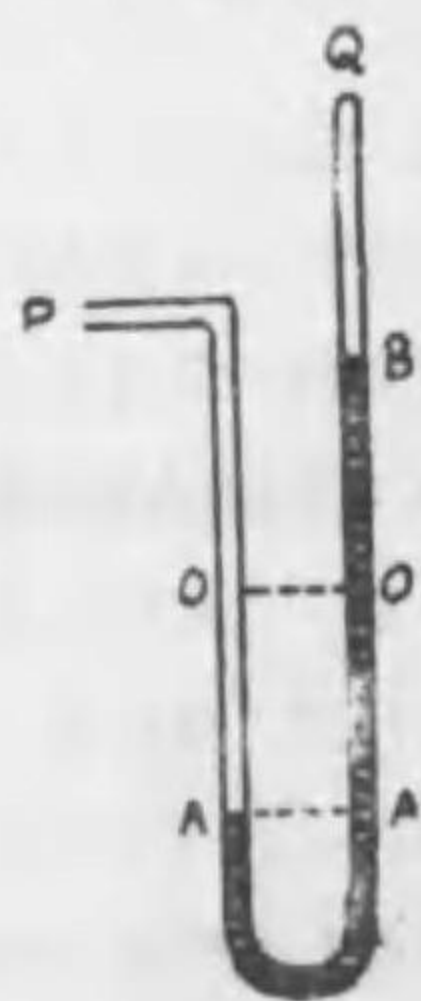


容れ一端 Q を開放し他端 P を計らんとする氣體の容器と接続すべし、AB は水準の差にして其長さを l 厘とし又其時の氣壓を p_0 とすれば測定せんとする壓力 p は (厘にて示せば)

$$p = p_0 + l \dots\dots\dots (18)$$

なり。大量の壓力を測るには一端 (Q) 閉ちたる管 (第一三七圖) を使用すべし、最初水準は OO にして其時 OQ 内に閉ちられたる空氣の壓力は氣壓 p_0 に等し、今 P 端を氣體の容器と接続すれば水準の差 AB となるものと假定せば

第一三七圖



ボイル、マリョット 則 (17) により BQ 内の空氣の壓力 (p') は

$$p' \times BQ = p_0 \times OQ$$

より p' の値を得べし、然るに容器内の氣體の壓力は此 p' に加ふるに AB なる水銀柱の壓力あるを以て求むる壓力 p は

$$p = p' + AB = p_0 \frac{OQ}{BQ} + 2OB$$

を得べし、今 $OQ = l$, $BQ = x$ と置けば上式より

$$p = p_0 \frac{l}{x} + 2(l-x) \dots\dots\dots (19)$$

なり、依て目盛りを OQ 上に附するには上式より $2x^2 + x(p-2l) - p_0 l = 0$ を得て p の種々の値を代入し x を目盛りとして附記すべし。此壓力計の欠点は壓力

大となるに従ひ測定不精確となるにあり。

90 大氣 實驗によれば地上を 1050 厘上昇する毎に氣壓計の水銀柱は 0.1 厘の高さを下降する割合なり、之に依り高さ 1050 厘の空氣柱の重さは長さ 0.1 厘の水銀柱の重さと同一なることを知り得べし、故に之に水銀の比重 13.59 を乗じ 1050 にて除ずれば空氣の密度を得、即ち

$$\frac{13.59 \times 0.1}{1050} = 0.00129 = \frac{1}{777}$$

斯の如く大氣最下層の密度は水の 777 分の一に等し、大氣は上層に上るに従ひ次第に稀薄となれども假りに最高点まで地上と同一密度を有するものとせば斯く假定したる大氣の高さは § 88 により

$$1033 \times 777 = 800780 \text{ 厘} = 8007.8 \text{ 米}$$

即ち凡 二里となる、今地上よりの高さ x の点に於ける氣壓を b 厘、比重を σ とすれば § 86 により $76 : 0.00129 = b : \sigma$

故に

$$\sigma = \frac{b \cdot 0.00129}{76}$$

なり、而して高さ δx を上げば $\sigma \delta x$ の空氣の負擔を減ずる理なるにより氣壓は $-\delta b$ を沈降し従て $-13.59 \cdot \delta b$ の水銀沈降すべし

故に

$$-13.59 \cdot \delta b = \frac{b \cdot 0.00129}{76} \delta x$$

を得、之を變形して積分すれば

$$\int \frac{db}{b} = -\frac{0.00129}{76 \cdot 13.59} x + C.$$

此式を高さの測定に使用するには低處 x_0 に於ける氣壓 b_0 と高處 x に於ける氣壓 b とを觀測して上式に代入すれば

$$x - x_0 = \frac{1}{n} \log \frac{b_0}{b} \dots\dots\dots (20)$$

を得べし、茲に $n = 0.00129 / (76 \cdot 13.59)$ なり、 $x - x_0$ は即ち兩處の高さの差に等し。又逆に x を與へて b を知るには直ちに上式より

$$b = b_0 e^{-n(x-x_0)} \dots\dots\dots (21)$$

を得、茲に e は ネピヤール 對數の基数にして 2.71828 に等し。

91 航空術 aerial navigation 輕氣球 balloon (Montgolfier 1783) は空氣の浮力を利用す。今球の容積を V とし、中を充填せる瓦斯の比重を σ' とすれば浮力は $V\sigma$ なり、但し σ は周圍の空氣の比重とす、又附屬物の全重量を w にて示すときは上向力は

$$g(\sigma - \sigma')V - w$$

となる、此値零となるまでは輕氣球は上昇加速度を有すべし、次ぎに全質量を m とすれば $mg = V\sigma'g + w$ なるゆへ、上向力は

$$V\sigma g - mg$$

と書くも不可なし、依て x の高さに於ける速度を u とすれば運動のエネルギーは $\frac{1}{2}mu^2$ となり其變化 $d(\frac{1}{2}mu^2)$ は上向力 $(V\sigma g - mg)$ が作す仕事に等し、即ち

$$d(\frac{1}{2}mu^2) = (V\sigma - m)g \cdot dx$$

を得、次に地面に於ける空氣比重を σ_0 とすれば x の高さに於ては (§ 86 と § 90 とに依り) $\sigma = \sigma_0 e^{-nx}$ なるゆへ上式は

$$d(\frac{1}{2}mu^2) = (V\sigma_0 e^{-nx} - m)g \cdot dx$$

なり、空氣の抵抗を度外視するときは本式は容易に積分せられて次に示す グレーシャー (Glaisher) の式となる

$$u = \sqrt{u_0^2 + \frac{2g}{m} \left\{ \frac{V\sigma_0}{n} (1 - e^{-nx}) - mx \right\}} \dots\dots\dots (22)$$

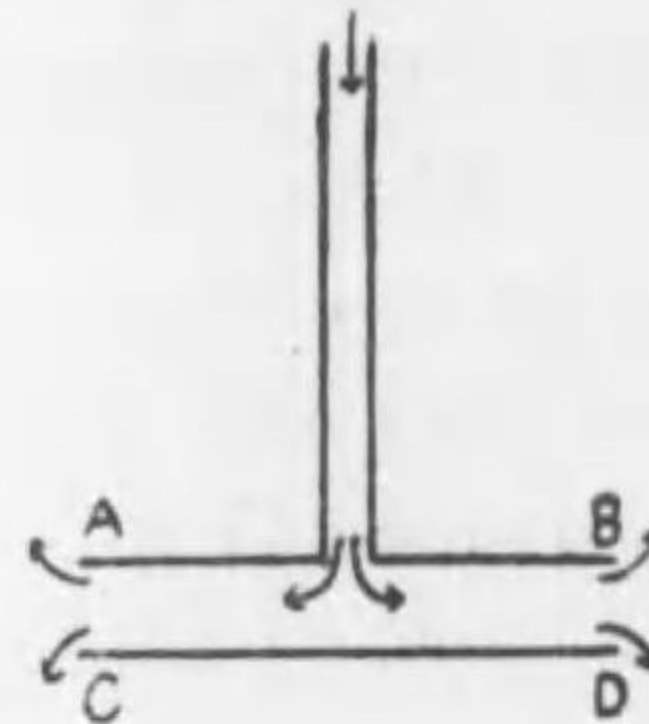
茲に u_0 は最初の速度にして $x=0, u=u_0$ の關係を有す。高さは一萬八百米に昇りしを以て最高となす (Berson 及 Suring 兩氏)。

飛行機 airplane は レオナルド (Leonardo da Vinci) 及び スエデンボルグ (Swedenborg) の夢想を實現したるものにして主として ラングレー (Langley) の研究に基づくも飛行中の釣合不安定なると地面を離れ或は地面に歸る時の困難を除去したるは リリエンタール (Lilienthal) 及び ライト (Wright) の功に歸せ

ざるを得す。飛行機の原理は全く風の原理と同一にして糸の緊張力の代りに推進機を使用するにあり。

92 運動する氣體の壓力 運動の壓力が釣合の壓力よりも小なることは液体に就きて論ぜしと畧々同一の理に依れり、例へば霧吹と稱する道具に於ては吹込まれたる空氣は管を出づる後も其慣性によりて畧々同一の速度を持続し、之がために管外は壓力減じて壺中の水は上昇するなり。此に似たる實驗は第一三八圖の如

第一三八圖



く圓板 AB の中心に孔を穿ちて管を挿入し空氣を吹込めば他の圓板 CD は吸上せらるべし、是れ AB と CD 間に於ては管を流下せし空氣は速に廣き空間に廣がり稀薄となりて壓力を減ずると、並に運動の壓力は常に釣合の壓力即ち外境の氣壓よりも小なるとに因る。

第六章 分子現象 MOLECULAR PHENOMENA

93 分子力 ニュートンの重力の法則は遠距離の物体にも有効なれども、極めて近き距離に於てのみ作用する力ありて重力の外に存在す之を分子力と云ふ。一つの分子を中心として球を書き其分子の力は球内に含まるゝ諸分子には作用すれども球外の分子には作用せずと假定すれば此球を作用の球 sphere of action と名づく、故に此球は中心に在る分子の勢力區域を示すものと見るべし。種々の實驗に徴し作用球の半径は $1 \mu\mu$ 内外のものならんと想像せらる、今比較を示すために微小なる距離の例を挙げば シヤボン 球の將に破れんとするときの厚さは $50 \mu\mu$ 、金箔の厚さは $82 \mu\mu$ 、又光學に用ふる干渉格子の平行線間の距離は $250 \mu\mu$ のもの珍しからず、其他 $50 \mu\mu$ の断面半径を有する白金線、 0.3μ の水晶線等を製出することを得たり。

各分子間の距離が作用球の半径附近の値を有する間は分子力は引力なれども分子相互に一層接近するときは茲に斥力 repulsion を生じて分子の甚しき接近を拒むの性質あり。物体は平常の有様に於ては分子間の引力斥力相等しくて分子は各自釣合の状態に在れども、分子間距離を少しにても増すときは忽ち引力を生じて分子は元の距離に歸らんとす、之に反し分子間の距離を少しにても減ずるときは忽ち斥力を生じ分子は元の距離に歸らんと務む。凡そ物体は外力を用ひて之を變形し或は容積を變ずれば直に分子間の距離に變化を生ずるにより茲に分子力及び分子力の能率を喚起し各分子は舊位置に歸らんと努力す、斯く喚起されたる分子力又は其能率の和は弾力 elasticity となりて外力に抵抗し、外力と弾力とは互に釣合の有様を呈すべし。固体は克く其變形に抵抗する變形弾力 deformation elasticity と容積の變化に抵抗する容積弾力 volume elasticity を惹起すれども、完全液体及び完全氣體に於ては變形弾力は皆無にして唯容積弾力を具ふるのみなり。

故に外因無ければ物体には斷へて弾力の存在する理由なし、外因一度ひ働けば其形狀を變化し或は其容積を變化することに依りて茲に初て弾力發生して外因に

抵抗す、是れ平常は内部の分子力は釣合の状態に在ることを證明するものなり。

94 フーク則 (Hooke 1678. *Ut tensio sic vis*) 物体の變形又は變積が或限界を超えざる間度は茲に喚起せられたる弾力は變形又は變積に正比例するものなり、之をフークの法則と名づく。然れども變形又は變積が限界を超ゆるか或は長時に亘りて持續せらるゝときは此法則行はれ難し、此限界を弾性の限界 limit of elasticity と稱す、此限界を超れば外因已むも物体は舊形又は舊積に復する能はず、此限界遠くして變積の區域廣きものを弾性体と稱し、之に反して限界近きときは其物体を粘土性 plastic なりと稱す、ゴムと鉛の如きは夫々好例なり。外因強きに失するときは物体は全然破壊 (rupture) す、破壊され易き物体を脆し (brittle) と云ふ、然らざるものを可延性を有す (ductile) と稱す。

フーク則は §85 の用語を用ひ次の式にて示すことを得

$$\text{歪力/歪} = E \dots\dots\dots (1)$$

E は常數にして之を弾性率 modulus of elasticity と稱す。歪力及び歪は夫々弦運動の中心力と質点の變位とに相當するものなり、故に弾力体の微振動は弦運動をなし、音響、光、電磁波の如き皆フーク則の行なはるゝ範圍内に於ける弾力体の微振動なり。

固体の弾力を大別して三種となす、引張の弾力、撓 (タワミ) の弾力、捻 (ネジレ) の弾力之れ也。

95 引張の弾力 elasticity of traction 長さ l 断面 q なる棒を取り上端を固定し下端に P の重さを吊るして引張るときは棒は l' に延び此がために分子間の距離は平常よりも遠くなりて分子引力を惹起し P の重さと釣合を保つべし。歪 strain は $(l' - l) / l$ にして之を延張 elongation と稱し、歪力 stress は P / q に等しく之を引張力 traction と名づく、兩者の比 E を特にヤングの弾性率 Young's modulus と稱し常數にして各物体に固有の値を有す、即ち

$$\frac{P}{q} \cdot \frac{l}{l' - l} = E \dots\dots\dots (2)$$

にして延長は引張力に正比例す。棒を引張る代りに壓縮すれば長さは少許收縮すべし。此收縮は延長と其方向を異にするのみにして性質に於ては同一種なるゆへ (2) と同一の法則に支配せらるゝなり。

支

方向に依りて其組織を異にする物体例へば木材の如きに於ては柁の方向と柁に垂直なる方向とに於て夫々 E の値を異にす、又結晶に於ても其軸の方向と他の方向に於て自ら異なり。凡そ物体内の各点に於て同一の組織構造を有するを同質体 homogeneous bodies と稱す、之に反し組織不正なるものを異質体 heterogeneous bodies と名づく、又各点同一の構造を有するも一点を過る任意直線の方に於て等質ならざる場合あり、若し何れの方にも等質ならば等質 isotropic 物体と名づけ、若し方向に従て等質ならざる時は異方質 anisotropic 物体と稱せらる。

歪は長さとの比なるを以て其 デメンション は零なり、歪力は単位断面に作用する力なるを以て力と面積との商に等しき デメンション を有す、従てヤング 弾性率の デメンション も其と同一なり、即ち

$$[E] = [L^{-1}MT^{-2}]$$

引張力を用ひて物体を延ばすときは断面は之がために収縮すれども容積は豫期に反し却て膨脹するを見る。棒の長さ l 、断面は q なるを以て容積は lq なり、今引張力作用の結果として長さは $l(1+\alpha)$ となり断面は $q(1-\beta)^2$ になりたるものと假定すれば前後容積の差は

$$l(1+\alpha)q(1-\beta)^2 - lq = lq(\alpha - 2\beta)$$

なり、茲に $\alpha\beta$ なる積は省略したり、上式に因れば β/α なる比が $\frac{1}{2}$ よりも小なるとき棒は引張のため容積を増すこととなるべし。此比

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$$

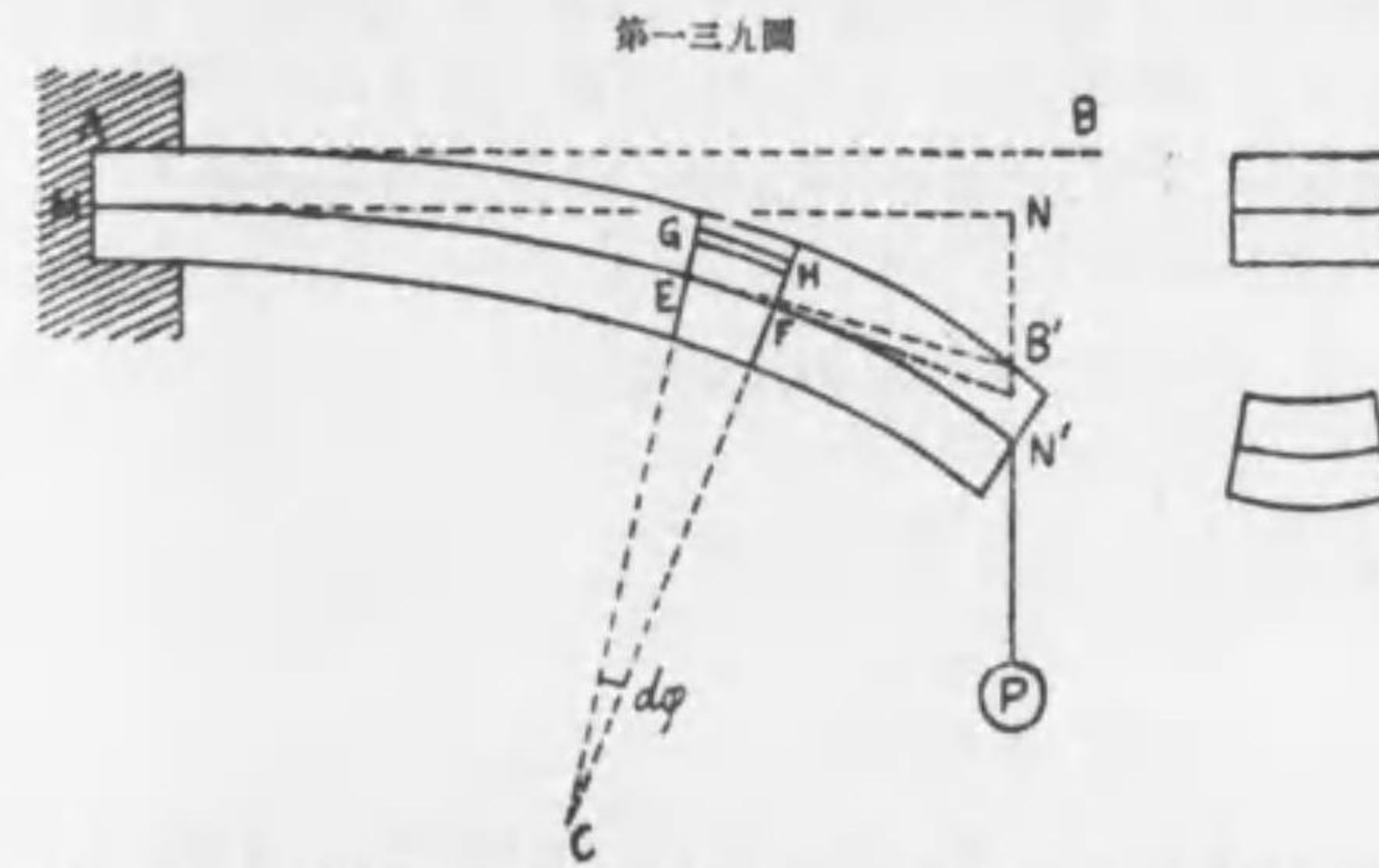
をポアッソン 比 Poisson's ratio と名づく、ポアッソン は研究上 $\sigma = \frac{1}{2}$ と定めたるが其後諸家の實驗に依るも σ は常に $\frac{1}{2}$ 附近のものなることを確定せり、例へば鋼鐵は $\sigma = 0.268$ なり、此に因り物体は引張のために常に膨脹するものなることを知るべし。

引張せられたる棒は外力が之を引張するために作したる仕事を位置の エネルギー として保存す。其量を算出するには (2) に於て $l' - l = \lambda$ と置けば

$$\int P d\lambda = \frac{Eq}{l} \int \lambda d\lambda = \frac{Eq\lambda^2}{2l} \dots\dots\dots (3)$$

は即ち求れる位置の エネルギー なり。

96 撓みの弾力 elasticity of flexure 棒を其一端によりて水平の位置に固定し他端に P の重さを吊り撓屈せしむるときは (第一三九圖) 棒の下側の分子は常



よりも接近し上側の分子は常よりも遠かるに至るを以て茲に水平の方向に引張の弾力を発生すべし、中頃には分

子間の距離變化せず従て弾力を発生せざる部分ありて中層 (neutral layer) MN を形成す、MN は MN' に来り MN' よりも上部は分子間の距離増し、MN' よりも下部は分子間の距離減す、延びたるは縮まらんことを欲し、縮りたるは延びんと欲するゆへ棒は AB なる舊位置に復歸せんとして弾力の能率を生じ以て外力の能率 $P \times MN$ に釣合を保もつべし。

中層 MN 上に二点 E, F を取り EF の曲率中心を C とし夾角を $d\phi$ とし、 $EF = dx$, $EG = FH = y$ と置き棒の断面の幅を b 、厚さを t 、断面の形を矩形なりと假定すれば長さ EF なるものを引張して GH とならしむる力 P は (2) により

$$E \frac{GH - EF}{EF} b dy \quad \text{即} \quad Eb \frac{y d\phi}{dx} \cdot dy$$

なり。此力に EG 即 y を乗ずれば能率を得、依て此能率を $-\frac{t}{2}$ より $\frac{t}{2}$ まで加算すれば

$$Eb \frac{d\phi}{dx} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} y^2 dy = \frac{Eb}{12} \cdot \frac{d\phi}{dx} \cdot t^3$$

今 $MN' = l$, $ME = x$ と定むれば $EN' = l - x$ にして上得たる能率は外力 P の

能力と釣合を保もつにより

$$\frac{Eb}{12} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot l^3 = P(l-x)$$

となる。然るに E, F 兩点を過り MN' 線に切線を引くときは二切線の夾角は明に $d\varphi$ に等しく、 $NN'=f$ と置けば $df=(l-x)d\varphi$ なること明なり、依て $d\varphi=df/(l-x)$ を前式に代入すれば

$$\frac{Ebl^3}{12} df = P(l-x)^2 dx$$

を得、此式を $x=0$ より $x=l$ まで積分すれば df は $f=NN'$ 即ち下り depression となる、即ち

$$f = \frac{4Pl^3}{Ebt^3} \dots\dots\dots (4)$$

を得、撓屈中の断面は矩形にあらずして圖に示す如く扇形となる、又撓みたる棒の位置のエネルギーは

$$\int Pdf = \frac{Ebl^3 f^2}{8l^3} \dots\dots\dots (5)$$

なり。第一四〇圖の如く棒の兩端を支ふときは恰も長さの $\frac{1}{2}$ となり重さの負擔も $\frac{1}{2}$ となりたるに等し、然るに f は長さの立方に正比例するゆへ $\frac{1}{2}$ となり之に重さの $\frac{1}{2}$ を乗じて $\frac{1}{8}$ となるべし、即ち



$$f = \frac{1}{8} \frac{Pl^3}{Ebt^3} \dots\dots\dots (6)$$

然れども第一四一圖の如く兩端を固定したる場合には

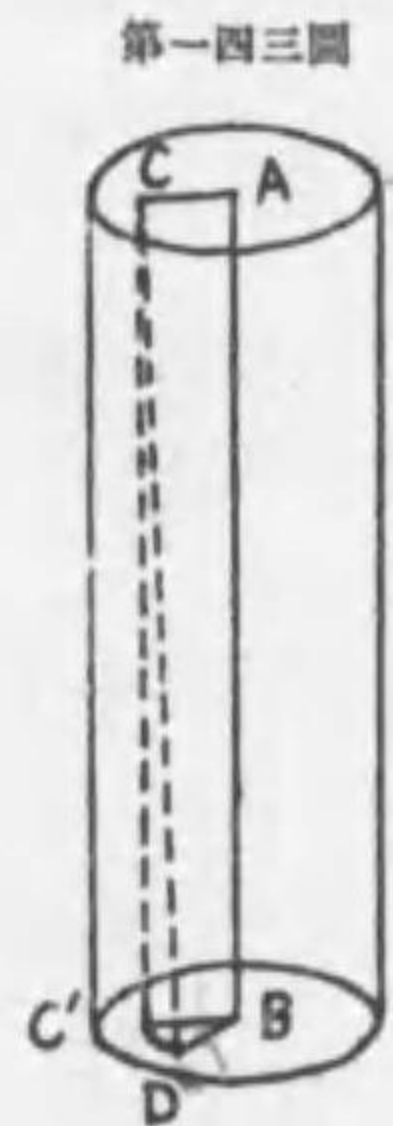
$$f = \frac{1}{8} \frac{Pl^3}{Ebt^3} \dots\dots\dots (7)$$

を得べし。

97 捻れの弾力 torsional elasticity (Saint-Venant 1855) 圖の如く長さ l 半



徑 R なる圓柱の上端を固定し下端に $2Pa$ の偶力を作用せしむるときは圓柱は捻ぢれて各断面は其直ぐ上方に位置する断面に対して少し宛固轉變位し最初軸に平行に引きたる線は今や一定角 φ に傾くべし、此角を捻速 twist と稱す、依て直線 CC' (第一四三圖) は今や螺旋 CD と變じ圓柱の最下端に於ては最初の位置に較べて捻角 θ を回轉變位したることとなるべし、今 $BD=BC'=r$ と置けば $C'D=r\theta=l\varphi$ なるを以て捻速 φ は



$$\varphi = \frac{r\theta}{l} \dots\dots\dots (8)$$

なり、又 B を中心とし BD を半徑として幅 dr の帯形を畫くときは帯形上の各点は弾力により舊位置に歸らんと欲す、其力は帯形の面積 $2\pi r dr$ と捻速 φ との積に正比例す、 n を其比例常數とすれば弾力は $n\varphi \cdot 2\pi r dr$ に等しく其能率は $n\varphi \cdot 2\pi r^2 dr$ となり、此能率を $r=0$ より $r=R$ まで加算して得たる和は外力の能率 $2aP$ に抵抗す、即ち (8) 式により

$$2aP = \int_0^R n\varphi \cdot 2\pi r^2 dr = \frac{n\theta}{l} \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{n\theta\pi R^4}{2l} \dots\dots\dots (9)$$

を得べし。茲に用ひたる比例常數 n は剛性率 rigidity と稱せらる、捻速 φ は或は捻り角 shear angle と名づけらる、故に φ なる捻り角は單位表面の切線の方に $n\varphi$ なる弾力を喚起す。此弾力を捻り垂力 shearing stress と稱す。

捻られたる針金の位置のエネルギーは §65 (62)式に依り

$$\int 2aPd\theta = \frac{n\theta^2\pi R^4}{4l} \dots\dots\dots (10)$$

なり。又針金の下端に重物を吊りし水平面内に振動せしむるときは其振動の模様は弦運動と同一種のものなるべきことは前述の理に依りて明なり。捻弾力は捻角

に正比例するを以て角加速度 $\ddot{\theta}$ は $-\lambda\theta$ に等しく (茲に λ は比例常数なり) 従て §22 (18) により

$$-\lambda\theta = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \theta$$

即ち振動の週期は

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \dots\dots\dots (11)$$

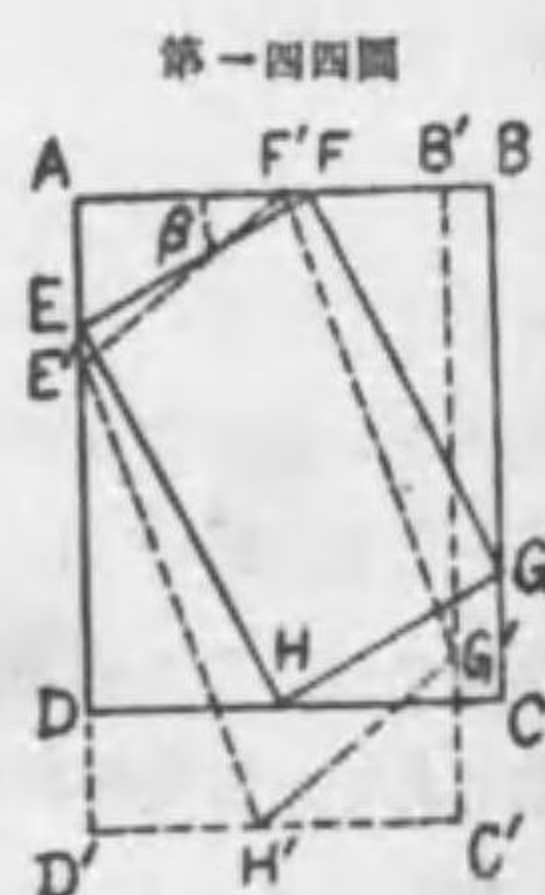
となる。

98 弾性率と剛性率との関係 弾力体に作用する歪力に二種の區別あり、引張弾力及び圧り歪力は是れなり、引張弾力とは單位面積を有する表面に垂直に作用する力を云ふ、圧り歪力とは單位面積を有する表面に切線の方向に作用する力を云ふ、故に又夫々法線歪力 normal stress 切線歪力 tangential stress の名稱と與ふることあり。引張弾力に於ては引張の歪力を設き尙ほ此を撓みの弾力の場合に應用したり、又撓れの弾力に於ては棒の各断面は其隣の断面に對して順次に撓角を増すことによりて圧り歪力を發生するものなることを學びたり、而して引張弾力は延長に比例し延長の E 倍に等しく、圧り歪力は撓り角 (即ち撓速) に比例して撓り角の n 倍に等し。依て本節に於ては E と n との間に成立せる關係を説かんとするなり。

第一四四圖に於て ABCD は直六面体の一面を示す、其對面 AB 及び CD に p なる引張力が各單位面に作用すれば變形して AB'C'D' となり豫め ABCD 内に書き置きたる矩形 EFGH は平行四邊形 E'F'G'H' となる、角 AFE を β と命名すれば AB 面上の各單位面に働く引張力 p は EF 上には $p \cos \beta$ の割合となる。然かも其方向は AE に平行なるゆへ EF に平行なる分力を求むれば EF の各單位面毎に

$$T = p \cos \beta \sin \beta \dots\dots\dots (12)$$

なる切線歪力 (撓り歪力) となりて現はるべきなり。又角 BFG は β の餘角な



るを以て FG 面の各單位面に働く切線歪力も此と同一の値を有す。而して變形のために $\angle AFE$ は $AF'E' = \beta + d\beta$ に變じ従て次の關係を生ず

$$\tan(\beta + d\beta) = AE(1 + \lambda) / AF(1 - \lambda') = \tan \beta \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda'}$$

茲に λ 及び λ' は夫々 AE 及び AF の方向に於ける延長を示す、然るに (1) に依り歪力と歪の比は弾性率 E に等しきを以て (ポアソン比 σ を記憶しつゝ) $\lambda = p/E$, $\lambda' = \sigma p/E$ となり、従て

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda'} \approx 1 + \lambda + \lambda' = 1 + \frac{(1 + \sigma)p}{E}$$

を得、之を前式に代入すれば

$$\tan(\beta + d\beta) = \left\{ 1 + \frac{(1 + \sigma)p}{E} \right\} \tan \beta$$

なり。然るに元來

$$\tan(\beta + d\beta) = \tan \beta + \frac{d\beta}{\cos^2 \beta}$$

なるを以て

$$d\beta = \cos^2 \beta \cdot \tan(\beta + d\beta) - \sin \beta \cos \beta = \frac{(1 + \sigma)p}{E} \sin \beta \cos \beta$$

故に (12) に因り

$$d\beta = \frac{(1 + \sigma)T}{E}$$

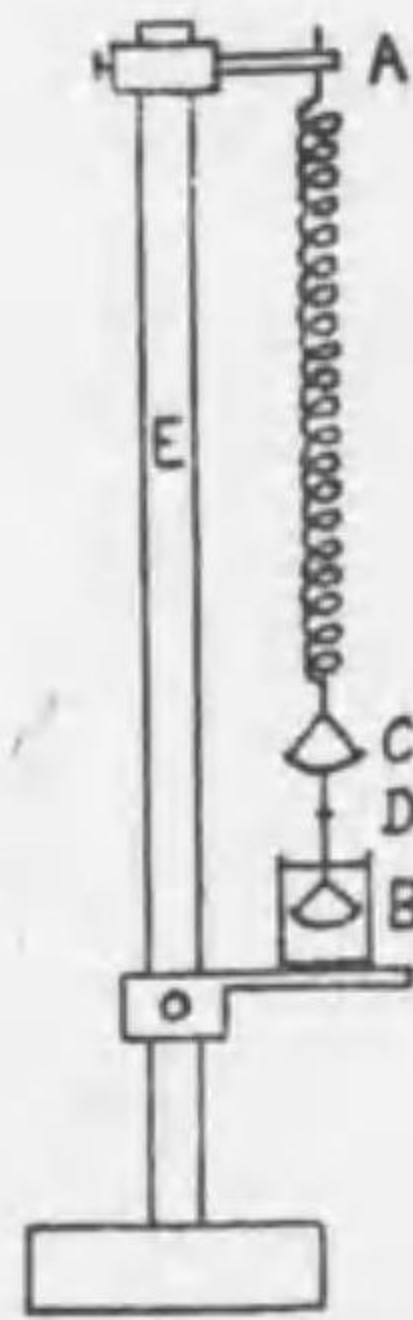
を得べし、此式によれば β 角の變化は切線歪力 T に正比例す。前述の如く EF, FG 両面には同一の切線歪力作用し之がために $\angle AFE$ は $d\beta$ を減じ $\angle BFG$ も亦 $d\beta$ を減ず、故に HG, FG 両面に同一の切線歪力作用したる結果として両面の夾角 FGH は $2d\beta$ を増加したるものと考ふることを得べし、依て上式を二倍したるものは切線歪力によりて生じたる撓り角 (即ち撓速) を表はし §97 に論じたる φ 角と同一のものとなる、故に $T/2d\beta = n$ の關係を有し従て剛性率は

$$n = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \dots\dots\dots (13)$$

となることを知るべし。

斯の如く引張弾力、撓みの弾力、捻れの弾力は各自 ヤング率 E に歸因せしむることを得るものなり。而して物体の變形には種々あれども悉く上記の三變形を組合せたものと見て可なり。例へば ジョーリ秤或は握力計に於ては螺旋の各部に撓み、捻れ、引張りの三弾力を發生することを知らべし、又懐中時計の天府と稱する振動輪 (balance-wheel) に附着せる鬚 (ひげ hair spring) の運動も此と同様なり、鬚は一日に四十三萬二千回の呼吸的伸縮をなすも弾力衰ふることなく、フーク則に従ひ畧々等時性を維持して時計の針をして等速運動を営む

第一四五圖



ことを得せしむ。

ジョーリ秤 (第一四五圖) は定量せんと欲する物体を C の皿に載せ目標 D は物体の重さに正比例して下降するを以て E 柱に盛りたる目盛りを照らして求むる重さを算出することを得るなり。B なるコップには水を盛り水中に懸垂せる皿の上に物体を置けばアルキメデスの理を應用して比重測定を行なふことを得べし。

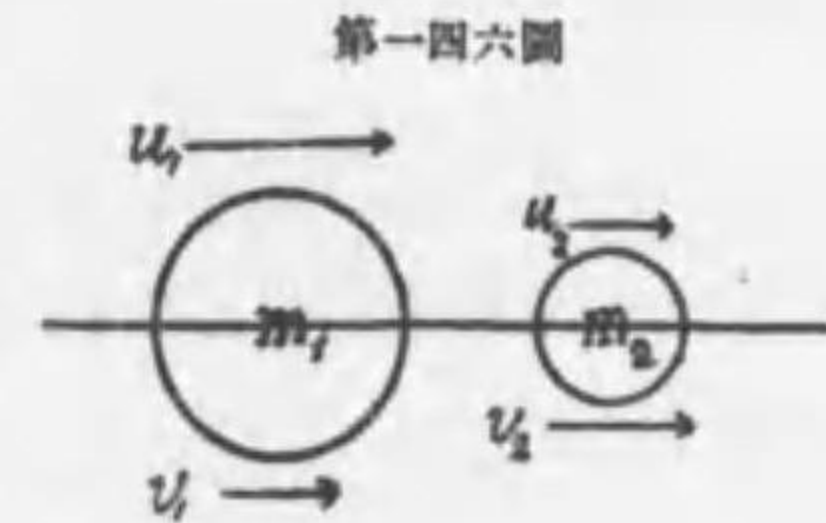
總じて外力を以て物体を變形すれば其仕事は物体内に住す而して物体が完全弾性体なるか或は弾性の区域内に於て (限界を超ゆること無くして) 變形を受くる時は物体内に住する仕事は全然位置のエネルギーの姿をなし、外力の已むを待つて運動のエネルギーに變じ物体を舊形に復歸せしむ。弾性不完なる場合に於ては外力已むも物体は全く舊形に復する能はずして多少負傷し、エネルギーの一部は熱となれるなり。

99 弾球の衝突 impact of elastic balls (Wallis 1669) m_1, m_2 なる質量を有する二球が夫々 u_1, u_2 の速度を以て其重心を連ぬる直線上に等速運動をなすときは $u_1 > u_2$ の場合に限り早晩兩球は衝突し、衝突後は速度夫々 v_1, v_2 となり、 $v_1 < v_2$ となる。衝突前後の運動量の和は同一なるべきにより

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \dots\dots\dots (14)$$

又衝突前後の兩球の相對速度を考ふるに衝突前に於ては兩球は $u_1 - u_2$ の速度

を以て接近し衝突後は $v_2 - v_1$ の速度を以て分離す、接近速度と分離速度との比は常數 e にして、 e は弾性完全なる球に於ては 1 に等しく、全く粘土性なる球に於ては零に等しく他は其中間の値を有す、之をニュートンの法則と稱す、即ち



$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \dots\dots\dots (15)$$

なり、 e は復舊係數 coefficient of restitution と稱せられ象牙球に於ては 1 に近く、粘土、鉛の球に於ては殆ど零なり、零の場合には $v_2 = v_1$ となり衝突後兩球分離することなく結合したるまゝ運動す、其時の共通速度 v は (14) により

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \dots\dots\dots (16)$$

を得。 $e=1$ の場合には兩球は接近したるときと同一の速度を以て分離す。一般に (14) (15) 式より v_2, v_1 消去することによりて次の二式を得

$$v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 - e m_2 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \dots\dots\dots (17)$$

$$v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + e m_1 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \dots\dots\dots (18)$$

衝突の現象を熟考するに衝突は先づ兩球面の接觸 (first contact) によりて始まる、其より互に壓合ひ (compression) 接觸点の附近は畧々圓形に押付けられ兩球は共通なる平面を生ずべし、斯く壓合ひ極まりしとき兩球は共通速度 v を得べし、其後は復舊時代 (period of restitution) と稱すべきものにして押潰されたる部分は舊形に歸らんがために努力し殆ど球形となり最後の接觸 (last contact) をなして互に分離す。壓縮時代に m_1 が m_2 に讓與したる運動量 $m_1(u_1 - v)$ は m_2 が m_1 より受取りし運動量 $m_2(v - u_2)$ に等し、此を各々 I_1 を以て示す、即ち

$$I_1 = m_1(u_1 - v) = m_2(v - u_2) \dots\dots\dots (19)$$

同様に復舊時代に於て m_1 及び m_2 間の運動量授受は

$$I_2 = m_1(v - v_1) = m_2(v_2 - v) \dots\dots\dots (20)$$

なり、両式より

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{v-v_1}{u_1-v} = \frac{v_2-v}{v-u_2} = \frac{v_2-v_1}{u_1-u_2} = e \dots\dots\dots (21)$$

依て m_1 が m_2 に譲與したる全運動量を I と定むれば

$$I = I_1 + I_2 = I_1(1+e) = (1+e) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2) \dots\dots\dots (22)$$

を得べし、上式最後の項は (16) を (19) に代入して得たる値なり。

衝突のために全体の運動量には増減なきことは前條既に説きたる如くなれども運動のエネルギーに於ては多少の損耗を免れ難し、是れ衝突の際各球多少の負傷ありてエネルギーは熱に變じたるによる。弾性完全なる場合 ($e=1$) に於ても壓縮時代には温度上昇し、復舊時代に温度下降す、故に衝突の時間極めて短きときは温度は衝突前と値に歸るべし。半径 1.3 厘の鋼鐵の球が相對速度 $u_1 - u_2 = 29.5$ 厘にて衝突するときは前後接觸間の時間は十萬分の十四秒に過ぎざるを以て温度は舊値に歸るものと見て不可無し。然れども地球大の兩鋼球が $u_1 - u_2 = 1$ 厘にて衝突するときは前後接觸間の時間は二十七時間に達すと云ふ (Hertz)

衝突前後のエネルギーの差を L とすれば

$$L = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)(u_1 + v_1) + \frac{1}{2} m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2)$$

然るに (19) (20) 兩式を相加ふれば

$$I = m_1 (u_1 - v_1) = m_2 (v_2 - u_2) \dots\dots\dots (23)$$

なるを以て

$$L = \frac{1}{2} I \{ u_2 + v_1 - (u_2 + v_2) \}$$

故に (15) により

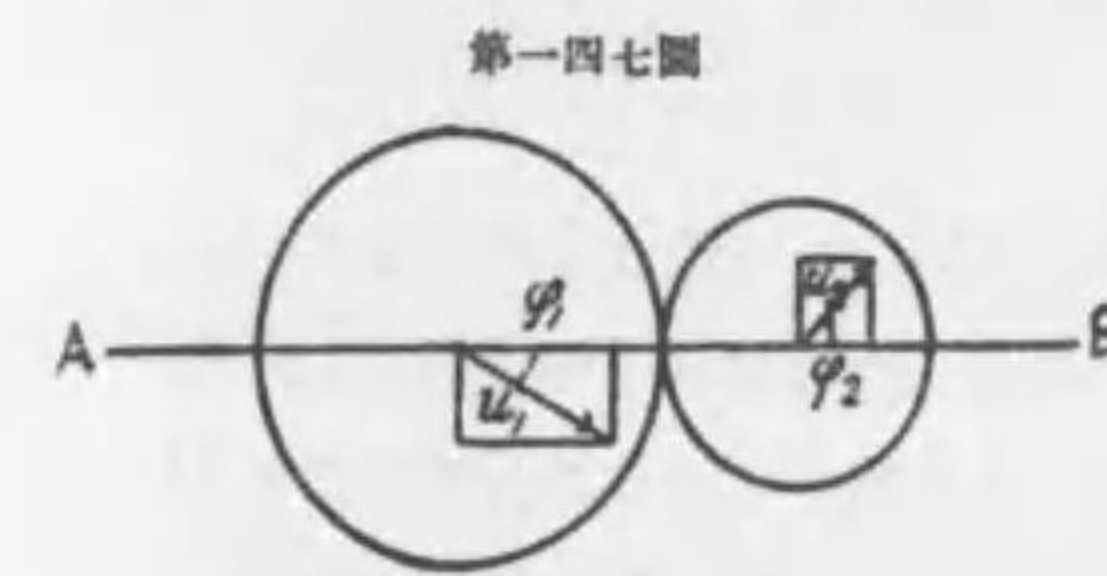
$$L = \frac{1}{2} I (u_1 - u_2) (1 - e)$$

(22) を此に代入すれば

$$L = \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2 \dots\dots\dots (24)$$

従て $e=1$ の時に限りエネルギーに損耗なきを見る、粘土球に於ては $e=0$ にして損耗 L は極大値 $\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2$ に達す。

兩球衝突前の運動量を示すベクトルが夫々他球の重心を過らざる場合を斜衝突 oblique impact と名づく。圖の如く兩球の重心を連ぬる直線が速度 u_1, u_2



第一四七圖

と夫々 ϕ_1, ϕ_2 の角を作るときは衝突に有效なる分速度は $u_1 \cos \phi_1, u_2 \cos \phi_2$ なるを以て (17) (18) 兩式の u_1 と u_2 の代りに之を代入すれば直線 AB 上に於ける衝突後の速度を得べし。分速度 $u_1 \sin \phi_1,$

$u_2 \sin \phi_2$ は各々何等の變化を受けざるを以て衝突後の合成速度は夫々

$$\sqrt{v_1^2 + u_1^2 \sin^2 \phi_1} \quad \text{及び} \quad \sqrt{v_2^2 + u_2^2 \sin^2 \phi_2}$$

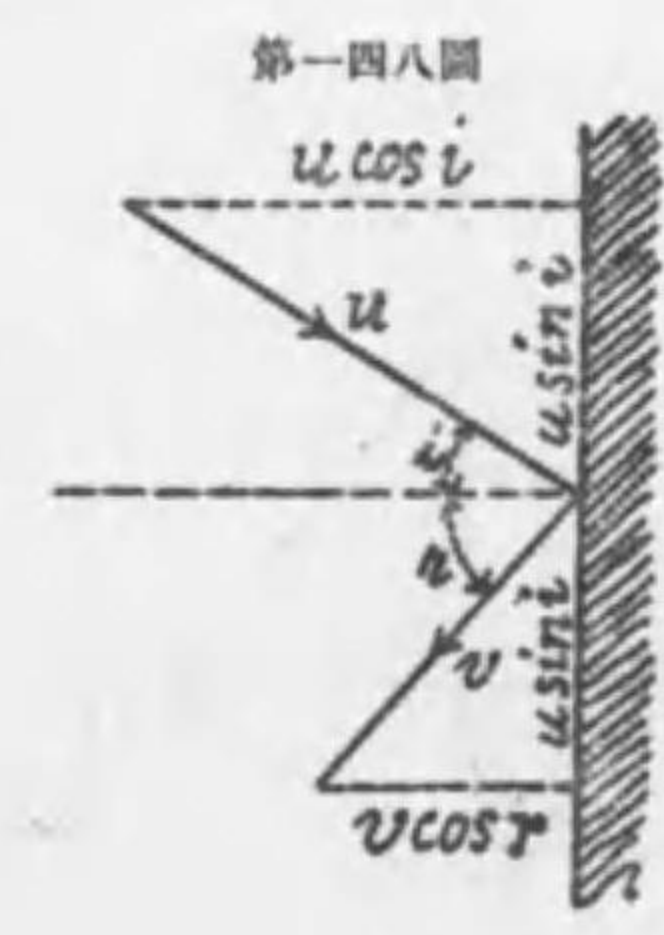
となるべし。例へば $m_1 = m_2, u_2 = 0, e=1$ の如き簡單なる場合に於ては AB 線の方角には夫々 0, $u_1 \cos \phi_1$ にして AB 線に垂直なる方向には夫々 $u_1 \sin \phi_1, 0$ なり、即ち兩球互に垂直なる方角に進行す。弾球の表面に摩擦あり、且つ弾球が回転し得る場合、或は最初接觸する面が兩球重心を結ぶ直線に垂直ならざる場合を説くは甚だ困難なりとす。

壁に衝突する場合に於ては壁の質量 $m_2 = \infty$ 、速度 $u_2 = 0, v_2 = 0$ として計算す、(17) 式の分子子を m_2 にて除すれば

$$v_1 = \left(\frac{\frac{m_1}{m_2} u_1 - e u_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \right)_{m_2 = \infty} = -e u_1$$

を得、故に弾球は e 倍の速度を以て反躍す。斜衝突なるときは第一四八圖の如く u を壁に垂直なる速度と平行なる速度とに分解し、之を夫々 $u \cos i$ 及び $u \sin i$ とすれば衝突後には垂直分速度は前式により $-e$ 倍となり、平行分速度は何等の變化を受ることなく従て

$$v \cos r = -e u \cos i, \quad v \sin r = u \sin i;$$



第一四八圖

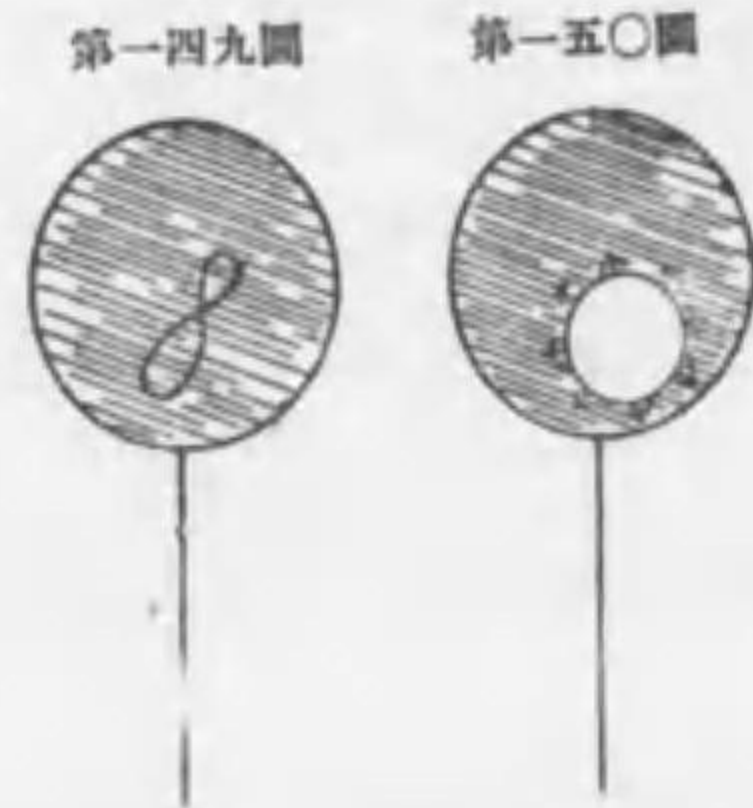
$$v = u \sqrt{e^2 \cos^2 i + \sin^2 i}$$

又方向は

$$\tan r = -\frac{\tan i}{e} \dots\dots\dots (25)$$

によりて定めらる、即ち $e=1$ の時に限り $i=r$ となり入射角は反射角に等し、
其他の場合には $e < 1$ なるを以て $r > i$ なるを通則となす。

100 表面張力 surface tension (Young 1805) 液體分子間の分子引力は現れて液体の合著性 cohesion となる。固体の粉末等とは大に趣を異にし、液体の分子は互に膠着するは人の知るところなり、此合著性は液体の放面に於て表面張力なる現象を呈し、表面に平行なる力作用して恰もゴム膜を周囲より引張りたる如き結果を生ず、此を實驗するには、シャボン水とグリセリンの混合液の如き合著性に富める液を作りて其中に針金にて作りたる枠を浸して取出せば 第一四九圖の如く薄膜の張るを見るべし。今無端糸を濡して其上に置き針尖にて内膜を破るときは 第一五〇圖の如く無端糸は開きて圓形となり表面張力は糸條に垂直に、各点に等力に作用することを認むるなり。



第一四九圖の如く薄膜の張るを見るべし。今無端糸を濡して其上に置き針尖にて内膜を破るときは 第一五〇圖の如く無端糸は開きて圓形となり表面張力は糸條に垂直に、各点に等力に作用することを認むるなり。

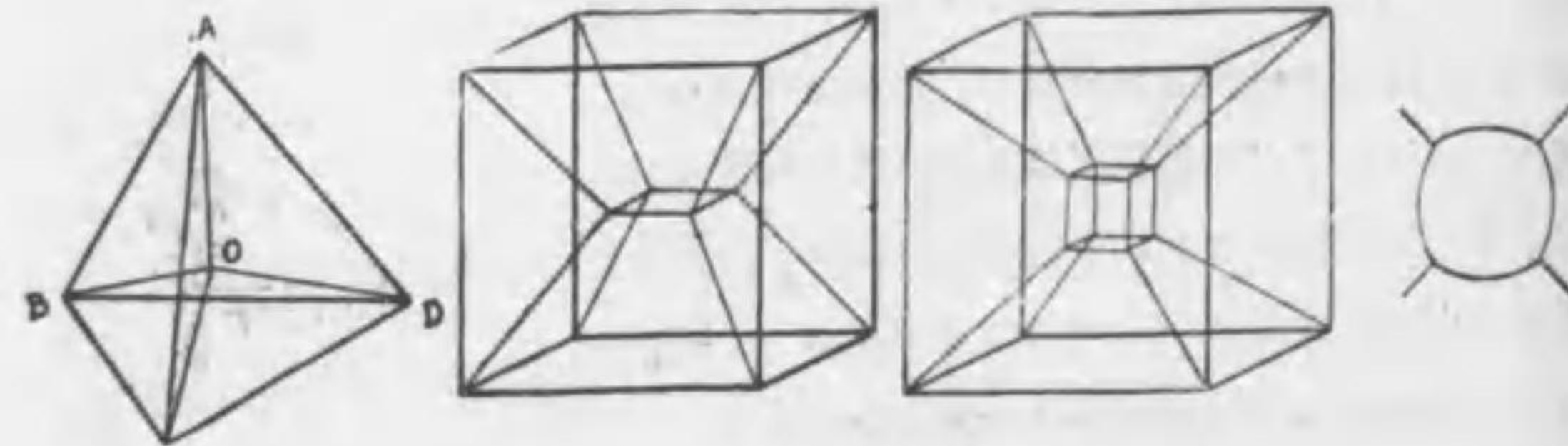
糸の單位長毎に糸に垂直に働く表面張力を γ を以て示せば 第一五〇圖の如き場合に於ては γ の方向は各点に於て圓の中心を過るがゆへ

に γ の合力は零となり、従て糸を移動する力は無きものなり。 γ は糸に作用するのみならず亦實に枠縁に垂直に作用して克く液膜を枠上に緊張せしむるなり。

第一五一圖

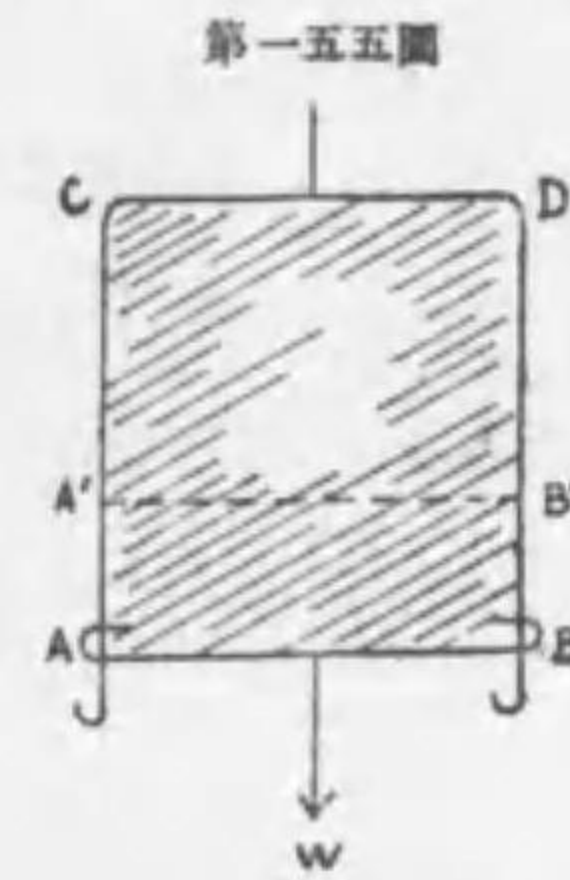
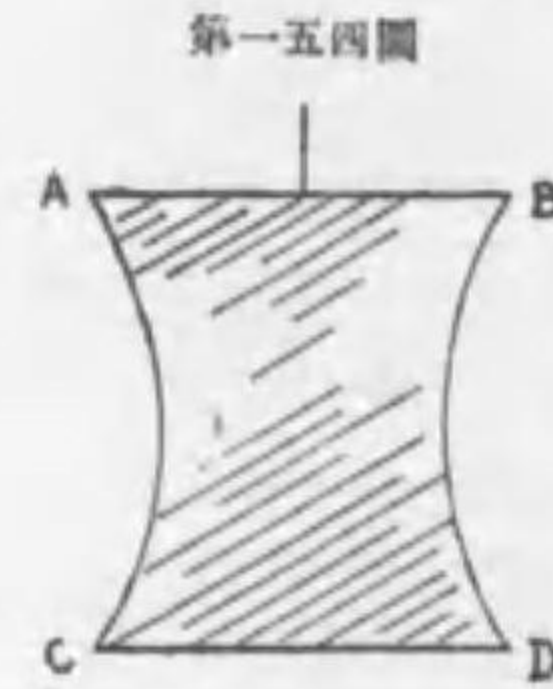
第一五二圖

第一五三圖



第一五一、一五二、一五三圖の如き枠を造りて薄膜を張り三平面が同一直線に於て交る場合を見るに、三平面は必ず相互に等角をなして傾き従て各二面角は 120° なり、例へば 第一五一圖 AO 線にて交る三面 AOB, AOC, AOD は互に 120° をなすを要す、何となれば各方面に於て AO に垂直に働く表面張力は同一の値を有すればなり、故に又 第一五二圖の如き場合に於ても任意線に交る三面は必ず互に 120° を作すべきものとす。然れども 第一五三圖に於ては三つの角の一は一直角の如き外観を呈す、實は然らずして内部に造られたる小立方体の各面は皆外方に彎出して鉛直断面は傍に書きたる如き形状を呈し、従て 120° の規定に従ふなり。

第一五四圖の如く AB, CD なる棒の両端を同長の糸を以て結び液膜を張るときは張力のために糸は彎曲するを見る。張力の作用を一層明瞭に見るには 第一五五圖の如き枠を造り AB は自由に AC, BD の上を滑り易からしめ、偕て ABCD に液膜を張るときは表面張力のために ABCD の面積縮小せんとするにより W の重物を吊るして釣合を保つことを得べし。今 $AB=l$ とし AB の各單位の長さに垂直に作用する力を γ とすれば AB を上方に引く力は液膜に両面あるを以て $2\gamma l$ となる、依て



$$2\gamma l = W \dots\dots\dots (26)$$

AB を A'B' まで變位せしむれば仕事は $2\gamma l \times AA'$ なり、然るに $2l \times AA'$ は膜の両面に於ける面積の變化に等しく従て仕事は面積の變化に γ を乗じたるものなり。換言すれば位置エネルギーの變化は γ と面積變化との積なり、之に依り γ は單位面積に宿れるエネルギーに相當することを知るべし。

γ は單位の長さに作用する力なるを以て

$$[\gamma] = [\text{力}/\text{長}] = [LMT^{-2} + L] = [MT^{-2}]$$

なり、然るに γ は亦單位面積の エネルギー なるを以て

$$[\gamma] = [\text{エネルギー}/\text{面積}] = [L^2MT^{-2} + L^2] = [MT^{-2}]$$

斯の如く二途同一の デメンション 式に導くことを知るべし。 γ を dyne/cm にて表はすときは下の如し

シャボン水	$\gamma = 30$
水	73.5
水 銀	539
アルコール	22.4
エーテル	17.6

上表は空氣中に於ける表面張力の値を示す。對峙する物質異なるに從て表面張力の値を異にす、下表の如し

水銀-水	$\gamma = 37.2$
水銀-アルコール	34.4
水銀-橄欖油	30.4
水-橄欖油	1.77
水-テレピン油	1.23

液膜の表面が エネルギー の宿處なることは シャボン 球の壓力によりても説くことを得べし。總べて自然界の諸現象を通覽するに物体の變化は エネルギー の減じ行く方向に向て進行す、シャボン 球の場合に於ても エネルギー を減ぜんがために球は收縮す、故に球の釣合を得せしむるには 第一五六圖 の如く外部より壓力を加ふることを要す、其壓力を p とすれば是亦同時に表面張力より生ずる壓力の値に等し、球の表面積を S とすれば内外二面に於ける エネルギー は $2S\gamma$ なり、球の半徑 R を dR



第一五六圖

だけ増加すれば各單位面積は pdR の仕事を作すゆへ全体の仕事は $SpdR$ となる、此と同時に エネルギー は $2\gamma dS$ だけ増加すべし、依て

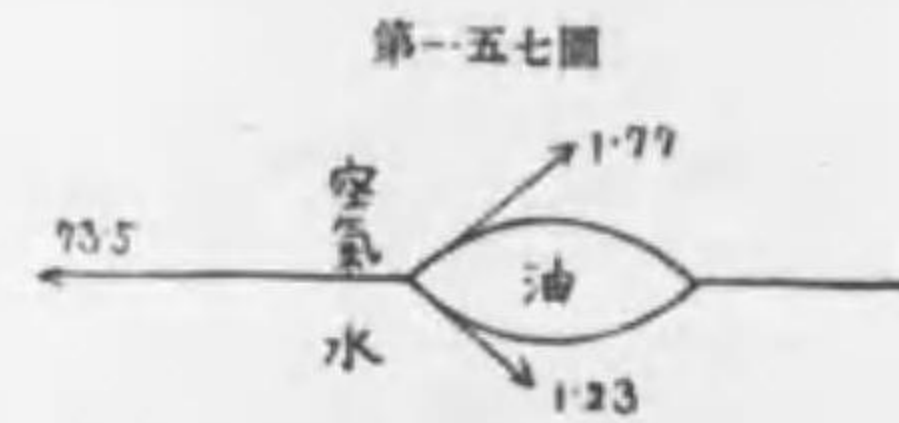
$$2\gamma dS = SpdR$$

を得、爰に球の面積は $S = 4\pi R^2$ 從て $dS = 8\pi R dR$ なり、之を上式に代入すれば

$$p = \frac{4\gamma}{R} \dots\dots\dots (27)$$

を得べし、 R 小なるに從て p は大なり、海波の白沫破裂するときの響は此壓力に閉込められたる濃厚空氣の忽然爆發するに歸因するものなり。

温度昇るときは γ は減ずるを通則とす。又水は張力比較的大なれども不純物を混ざれば γ は著しく減少す、故に樟腦の小片を水面に浮ばすときは其小片の周邊に於て水を溶解する程度一樣ならざるを以て四方に張力を異にし小片は水面上を快走するを見るべし、今此理を明白にせんとするには一滴の油を水面に浮ばすときは(第一五七圖)最初 レンズ 状を呈すべし、從て周邊上の一点に於ては



第一五七圖

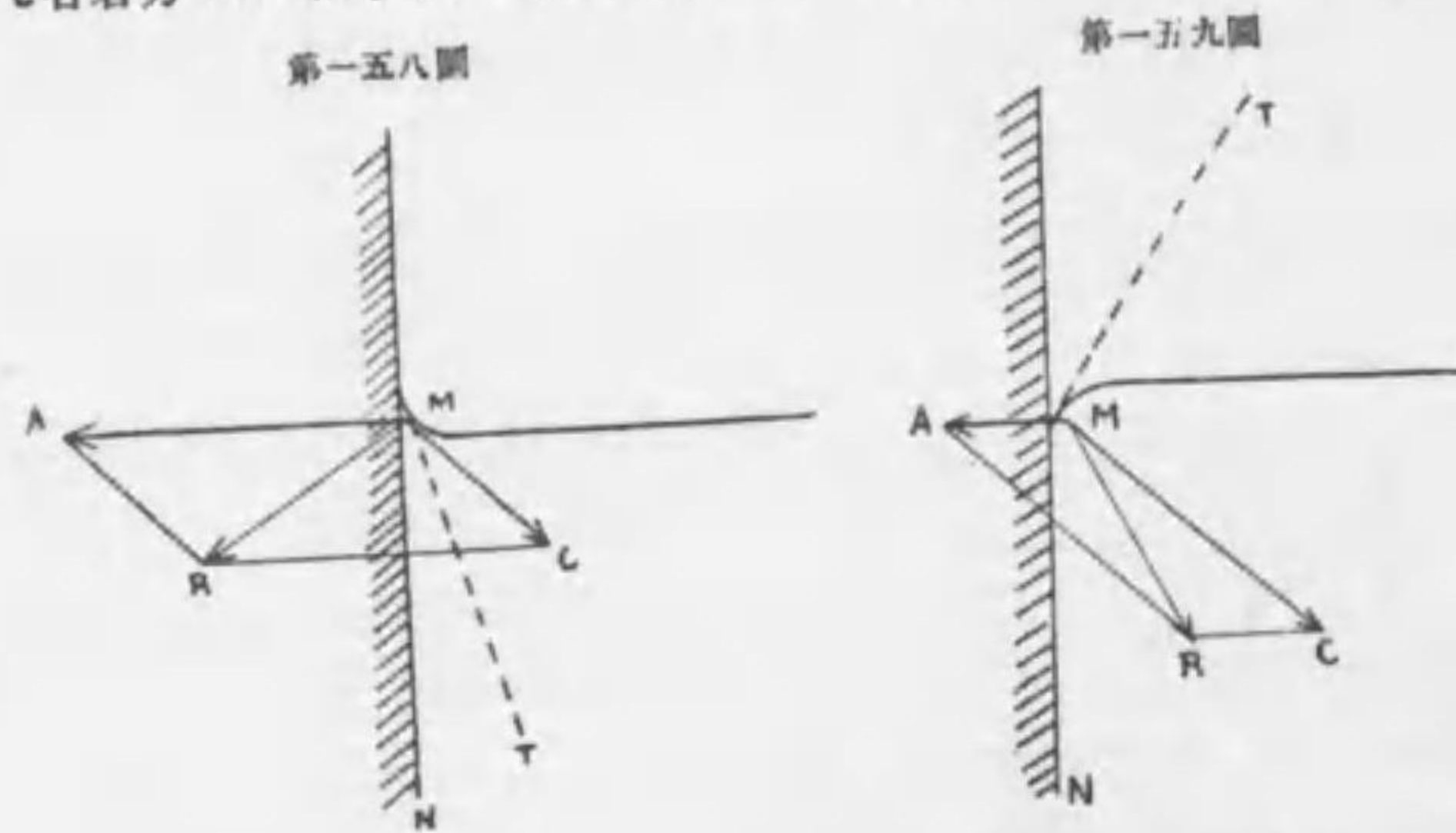
水、空氣、油の三物質會合し空氣-水間の張力は 73.5 空氣-油 間は 1.77 油-水 間は 1.23 の張力を有す、而て 1.77 と 1.23 の合力は到底 73.5 に匹敵する能はざるを以て會合点は 73.5

の方向に引張せられ油は次第に水面に廣布すべし。樟腦の一片を水面に浮ばすときも此と同様にして樟腦が最も盛に溶解しつゝある側面に於て張力最弱となり其反對の側の方に引かれ行くものなることを知るべし、取紙を エーテル に浸して水の放面に接近するときは エーテル 蒸氣は水に吸收せられて其附近の水は著しく張力を減じ、從て強く周圍の水に引かれて紙片直下の水面は窪むを見るなり。

101 附着性 adhesion 及び接角 angle of contact 液体の分子間に働く分子力を合着性 cohesion と稱したりしが固体分子と液体分子間にも分子力作用し、顯れて附着性となる。一枚の ガラス 板を取り水中に浸し板を水平に保ちつゝ引上げんとすれば水と ガラス 板との間に働く附着性は之に抵抗を試みるべし、

同様に ガラス 板を水銀面より引上げんとする際にも抵抗あれども其力は水の場合に較れば遙に小にして、引上げたる ガラス 板には水銀の残滴を認むることなきに反し水の場合には水滴は容易に ガラス 板より離ることなし、即ち水は克く ガラス 板を濡らすも水銀は ガラス 板を潤す能はず、故に水銀に於ては合著力は附着力よりも遙に大なることを知るべし、之に反し水に於ては附着力の方却て合著力よりも大なることを證するなり。

液中に棒又は板を樹つれば合著力と附着力との優劣に従て水準に狂ひを生じ、克く潤す液体（ガラス を水中に、臘板を水銀中に樹つる如き）に於ては 第一五八圖 の如く放面は上方に彎曲す、M なる分子に作用する附着力 MA は大にして合著力 MC は小なるを以て合力 MR は固体の方に偏し放面は合力に垂直とな



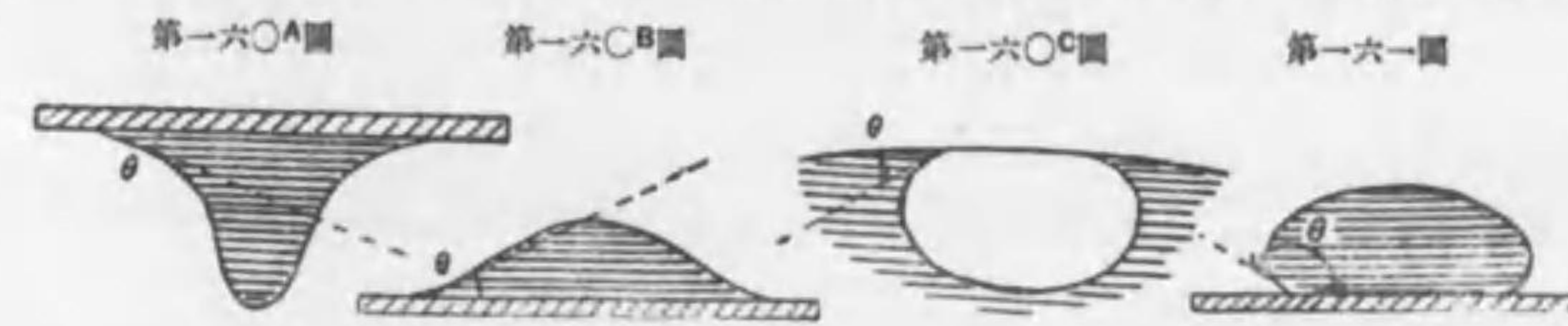
りて上方に彎曲す。切線 MT を放面に引けば固体面 M N と切線とが

作す角は同一材料に於ては常に一定して之を θ にて示し接角と名く。第一五九圖の如く液体は固体を潤さざる場合（臘を水中に或は ガラス 板を水銀中に立つるときの如き）には放面は下方に彎曲す、附着力 MA は小にして合著力 MC は大なるゆへ合力 MR は液体の方に偏在す、M 点に於て放面に切線を引けば接角 θ は TMN にして（ θ は常に液内にて計る）直角よりも大なり、而して先きの場合には θ は直角よりも小なりとす。總じて潤すときは θ は直角よりも小さく潤さざる時は（弾く） θ は直角よりも大なり。

接角 θ は γ と同じ温度の高下に従ひ多少の變化を呈す、又材料異なれば θ は自ら異ならざるを得ず。

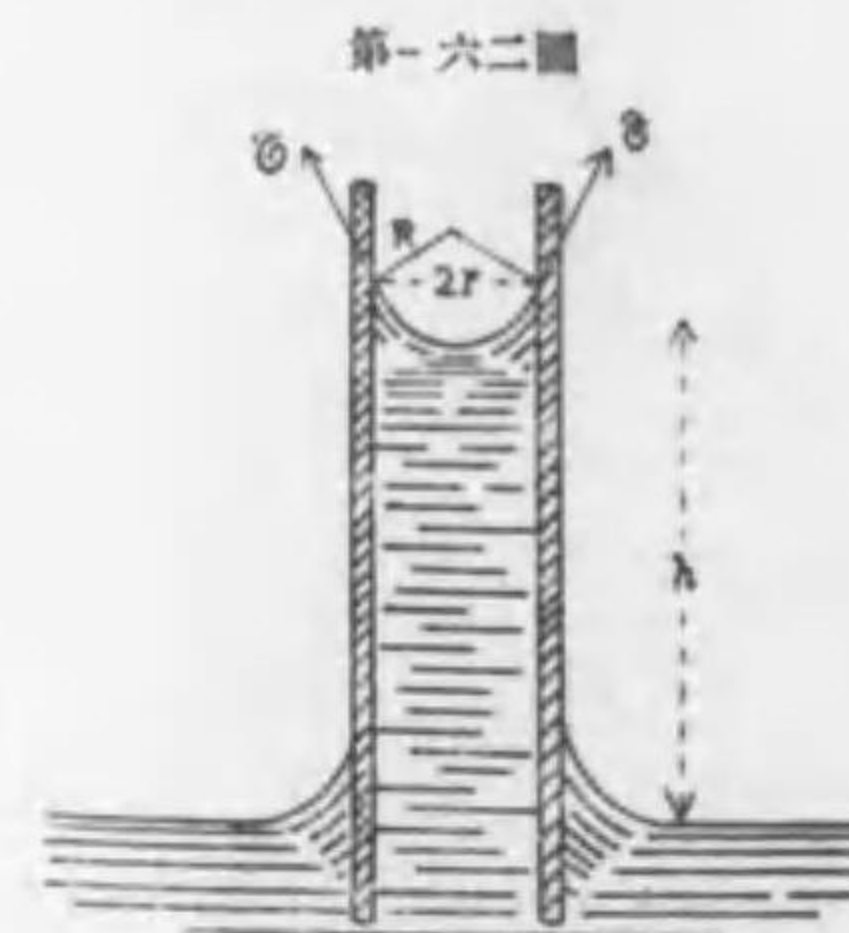
ガラス — 水	$\theta = 25^{\circ} 30'$
ガラス — アルコホル	$25^{\circ} 12'$
ガラス — 水銀	129°

同一材料を用ひ實驗するとき、例へば水と ガラス を用ふるときは状況の如何に拘らず θ は同一なり、ガラス 板の下面より滴下せんとする水（第一六〇A圖）或は



ガラス 板上に鈎合を得たる水滴（第一六〇B圖）、或は ガラス 板の下部の水中に閉ぢられたる気泡（第一六〇C圖）等種々の状況に於て接角は常に一定にして一直角よりも小なり、又水銀滴を ガラス 板上に載せたる時（第一六一圖）と ガラス 板を水銀中に樹てたる時（一五九圖）と同一の接角を有す。臘板上或は蓮の葉上の水滴も 第一六一圖 の如き外觀を呈し接角は一直角よりも大なりとす。

102 毛管現象 capillary phenomena （第一六二圖）内徑一徑よりも小なる管を毛管と名づく、之を液中に樹つれば管内外の水準の高さの差は毛細管小なる程



いよいよ大なり。液が管を潤す場合には管内の高さは管外の水準よりも高く、液が管を潤さざる場合には之に反す。管の内徑の二分の一即ち半徑を r とすれば断面積は πr^2 なり。之に液の比重 σ と高さ h とを乗ずれば $\pi r^2 \sigma h$ は管内に上りたる液体の重さなり。此重量を支ふる力は管内の液の放面に於て管壁と θ の接角を作しつゝ上方に引上ぐる表面張力 γ の合力なり。第

第一六三圖

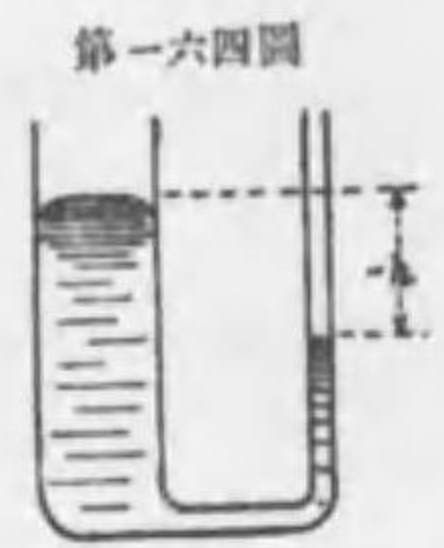


一六三圖を放面の形とすれば周縁は $2\pi r$ の長さを有す其單位長毎に垂直に $\gamma \cos \theta$ なる分力作用するを以て上方に引上げる力は $\gamma \cos \theta \cdot 2\pi r$ となり此合力は先に得たる重量に等しく互に釣合を保つゆへ $\gamma \cos \theta \cdot 2\pi r = \pi r^2 \rho g h$ より

$$\rho h g = \frac{2\gamma \cos \theta}{r} \dots\dots\dots (28)$$

故に液柱の高さは管の口徑に反比例す、之をジウラン則 (Jurin 1718) と稱す。

液が管を潤さざる場合、例へばガラス管を水銀中に樹てたる時の如きは $\theta > \pi/2$ にして $\cos \theta < 0$ なり。従て h は (28) により負數となり、管内の液高は却て管外の水準よりも低くなる理なり (第一六四圖)、此場合には放面は凸面を呈し、表面張力の合力は下向すること 第一六五圖 示すが如し。



放面の形は大畧半径 R なる球面をなし放面全部は球面の一部を形成す、其關係は 第一六二圖に依り

$$R \cos \theta = r$$

によりて示すことを得べきがゆへ (28) は

$$\rho h g = \frac{2\gamma}{R}$$

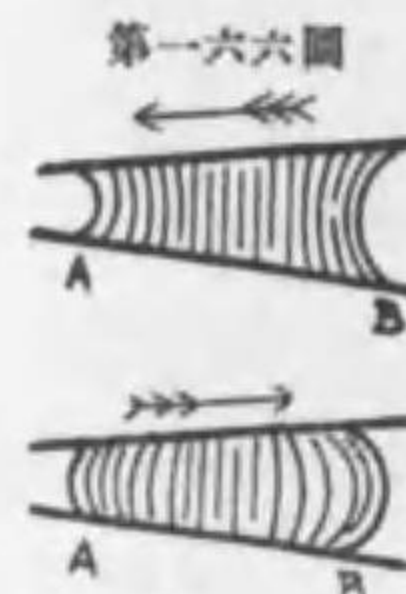
と書くことを得、此式の左側は管内に上昇したる液体の液壓 p を示すものなるがゆへに又

$$p = \frac{2\gamma}{R} \dots\dots\dots (29)$$

と書くを便利とす。

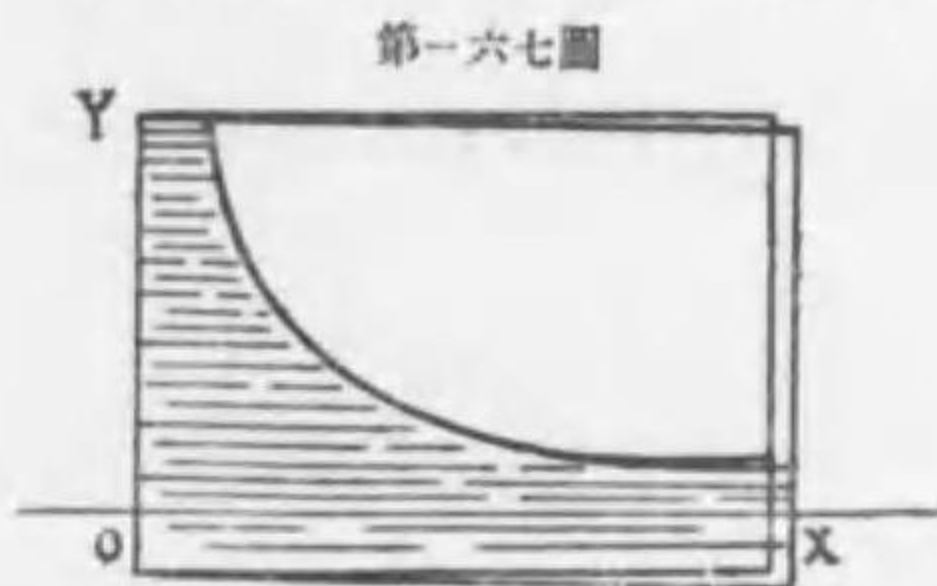
半径 R なるシャボン球に在りては表面は内外二面ありて其各單位面に γ

のエネルギー宿るがゆへに (29) をシャボン球に應用するには其値を 2 倍せざるべからず、斯くて (27) と同一結果 $p = 4\gamma/R$ に到着するを見るべし。(29) によれば壓力は彎曲面の曲率半径 R に反比例す、故に 第一六六圖の如き断面



不同の管内に液を容るれば液は釣合を失ひ、夫々 A に於ける壓力は B に於ける壓力よりも大なるを以て矢の方向に動くなり。此等の圖に於て張力の合力は常に曲率中心の方向に働くものなることを記憶すべし。

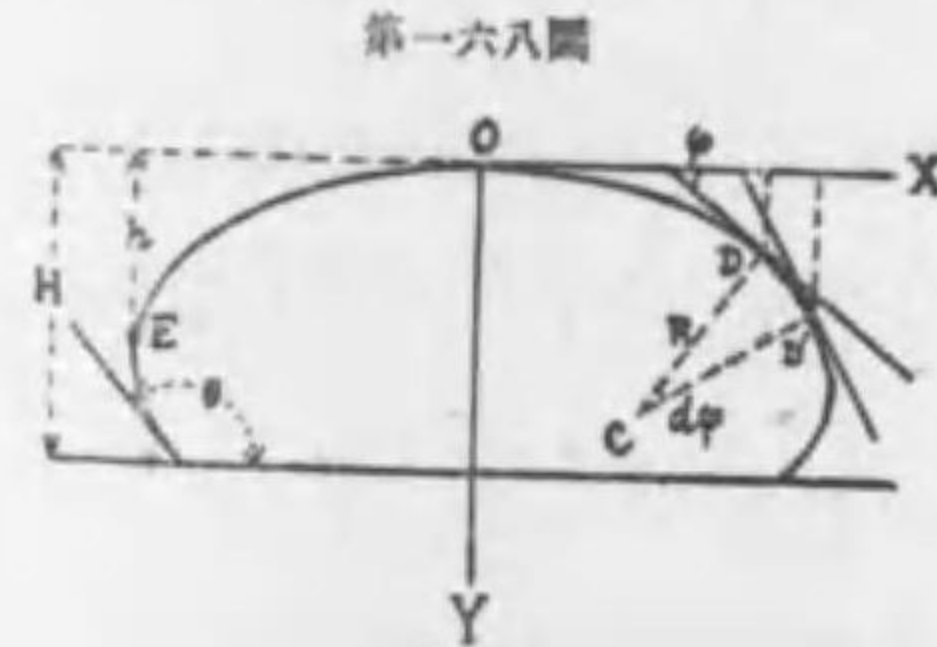
二枚の矩形のガラス板を取り一邊に於て相接觸し互に極小なる角 α を作さしめ之を液中に樹つるときは板の間に夾まりたる液の高さは外部の水準よりも高く、接觸線 OY (第一六七圖) に近き程高さ大なり。今二平面の交線を y 軸とし外部水準を x 軸とし二平面の夾角を α とすれば二平面間の距離は畧々 $x\alpha$ なるゆへ半径 $\frac{1}{2}x\alpha$ の毛管が羅列するものと考ふることを得べし、然るに液体放面の形状は



xy 面に垂直なる断面に於ては $R \cos \theta = r = \frac{1}{2}x\alpha$ なる關係を満足しつゝ彎曲すれども、 xy 面に於ては放面断面の曲率は極めて微小なり、従て液の上昇する高さは (28) が與ふる h の $\frac{1}{2}$ となるべし、依て $y = h/2$, $r = \frac{1}{2}x\alpha$ と置きつゝ (28) より

$$xy = \frac{\gamma \cos \theta}{2 \rho g \alpha} \dots\dots\dots (30)$$

を得、即ち放面の形状は直角雙曲線 $xy = const.$ をなし x, y 兩軸は其漸近線なり。



水平なるガラス板上に水銀滴が釣合を得る場合 (第一六八圖) を考ふるには頂点 O に起点を定め水平線と鉛直線とを夫々 x 軸 y 軸と稱す、表面上の任意点 D を過る法線 DC を含み圓形面に垂直なる平面内にて測りたる

曲率は殆んど零なり、従て D 点に於ける壓力は (29) 式が與ふる壓力の $\frac{1}{2}$ に等しかるべし。今 D 点の縦座標を y とすれば D 点に於ける壓力は高さ y の液柱の重さに由來す、依て $p = \sigma gy$ と置きつゝ (29) より

$$y = \frac{\sigma}{\sigma g R} \dots\dots\dots (31)$$

を得。D 点及び其隣点 D' を過り切線を引き、次に法線 DC, D'C を引けば両法線の夾角は兩切線間の夾角に等しく各々 $d\varphi$ なり、D より D' に移れば座標は dx, dy の變化を呈す、 $DD' = ds$ と置けば $\sin \varphi = dy/ds$ 、然るに $\sin \varphi = -d(\cos \varphi)/d\varphi$ 。又作圖により $ds = R d\varphi$ なるを以て

$$\frac{1}{R} = -\frac{d(\cos \varphi)}{dy}$$

を得、之を (31) に代入すれば

$$y dy = -\frac{\sigma}{\sigma g} d \cos \varphi$$

なり、此微分方程式を水銀滴の全表面に亘りて積分するときは

$$\int_0^y y dy = -\frac{\sigma}{\sigma g} \int_0^\varphi d \cos \varphi$$

即

$$y^2 = \frac{2\sigma}{\sigma g} (1 - \cos \varphi) \dots\dots\dots (32)$$

を得べし。水銀滴の全高を H とし接角を θ とすれば、 $y = H$ のとき $\varphi = \theta$ となるべき理なるにより

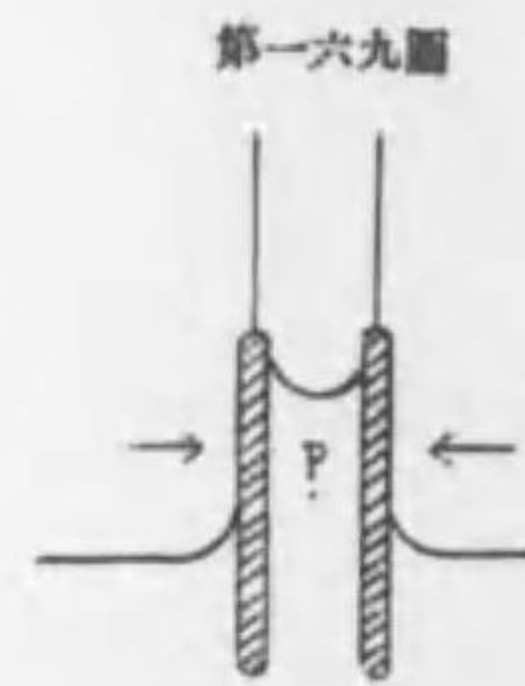
$$H^2 = \frac{2\sigma}{\sigma g} (1 - \cos \theta) \dots\dots\dots (33)$$

なる公式を得べし。滴の水平に膨れ出でたる所 E に於ては $\varphi = \frac{\pi}{2}$ なるゆへ (32) より $h^2 = 2\sigma/\sigma g$ を得、但し h は膨れ出でたる点と X 軸との垂線距離とす、之を (33) に代入すれば

$$H^2 = h^2 (1 - \cos \theta)$$

茲に $\theta > \frac{\pi}{2}$ 従て $-\cos \theta$ は正數なるを記憶すべし。

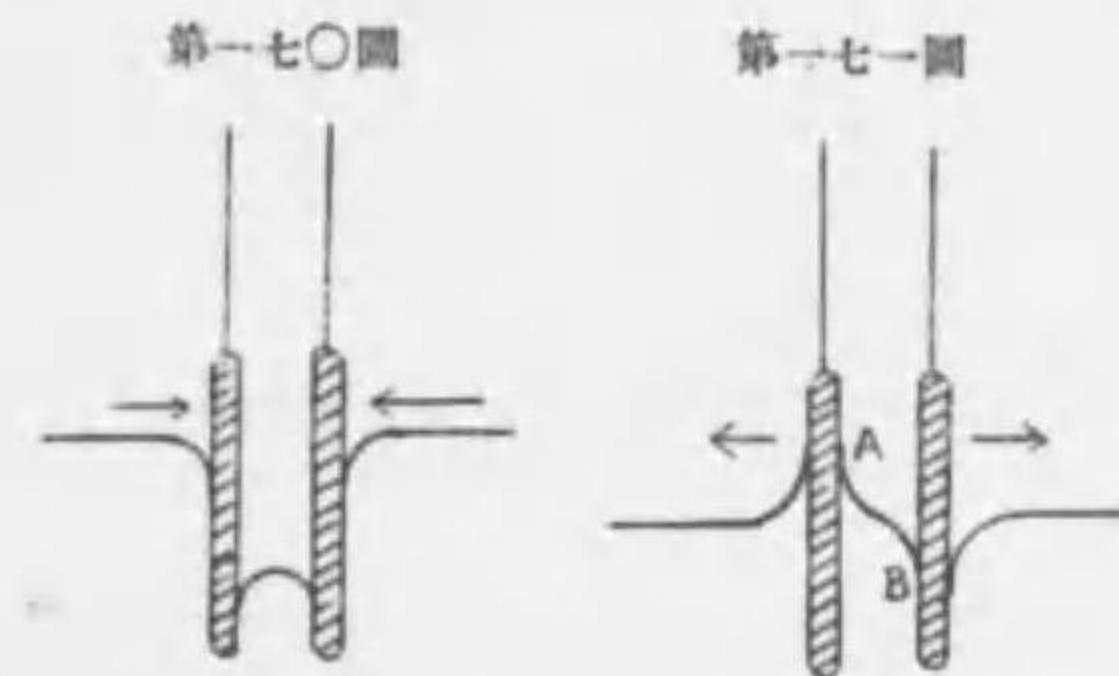
液によりて潤さるゝ二つの板を液中に糸にて吊るすときは兩者の間隔小なる時に引力を生ず、是れ兩板の外には一氣壓作用すれども内面には一氣壓と上昇したる液体の液壓の差とが作用するゆへなり、A を一氣壓とし P 点 (第一六九圖)



の高さを y とし液の全高を h とすれば P 点に於ける壓力は $A - \sigma gy$ 。従て内外壓力の差は σgy なり、故に P 点の高さに於ては外部より σgy の過剩壓力を以て板は接近せんとするなり、今過剩壓力を加算すれば

$$\sigma g \int_0^h y dy = \frac{1}{2} \sigma g h^2 \dots\dots\dots (34)$$

を得べし。兩液共に液体のために潤さざるときも同様にして (第一七〇圖) 此場合に於ては内部壓力の不足は一見して明かなり。二つの板の一つは潤され一つは潤されざる場合には第一七一圖の如く兩板近きがために互に妨害する結果として A は相當に高く昇る能はず B は相當に卑く降る能はず、



故に兩板は遠ざかりて各々相當の高さと卑さを保たんとするなり。

103 粘著性 viscosity 液体分子間には合著性存分する結果として液体が運動するときに分子の運動は多少妨害せられ恰も分子は其表面を互に摩擦して固体の接觸面摩擦に似たる結果を呈す。水、酒精、エーテルの如き液体には少量に發生すれども、グリセリン、舍利別 (syrup)、瀝青 (pitch, チヤン) 等に於ては顯著なり、之を液体の粘著性と稱す。

液体の一部が v_1 の速度にて水平に等速運動をなせりと假定せば其周囲の部分も粘著性により多少運動せざるを得ざるべし。 v_1 の速度を以て進行せる水平平面の下方 d の距離にある他の平面の速度を v_2 とし、兩平面の面積を各 S とすれば上平面が下平面に及ぼす力は弾力論にて學びたる切線歪力に相當し、其値は

$$R = \eta \frac{S}{d} (v_1 - v_2) \dots\dots\dots (35)$$

によりて與へらる、茲に η は粘著性係數 coefficient of viscosity 又は内部摩擦係數 coeff. of internal friction と稱せらる。上式より

$$\eta = \frac{Rd}{S(v_1 - v_2)}$$

を得。R は力にして $[R] = [LMT^{-2}]$ なるゆへ $[\eta] = [L^{-1}MT^{-1}]$ なり、即ち運動量を面積にて除じたるものに等し。 η の倒数 $1/\eta$ を流動性 fluidity と稱することあり。 η は温度昇るに従て減ず。又溶液に於ては濃度に正比例して増加す。 η を c.g.s. 系にて表はしたるものを下に示す

水	温度 = 0°... $\eta = 0.01778$
水 10°... 0.01303
水 20°... 0.01002
水銀 0°.. 0.01668
グリセリン 15°... 2.34
瀝青(チャン) 2.2×10^9

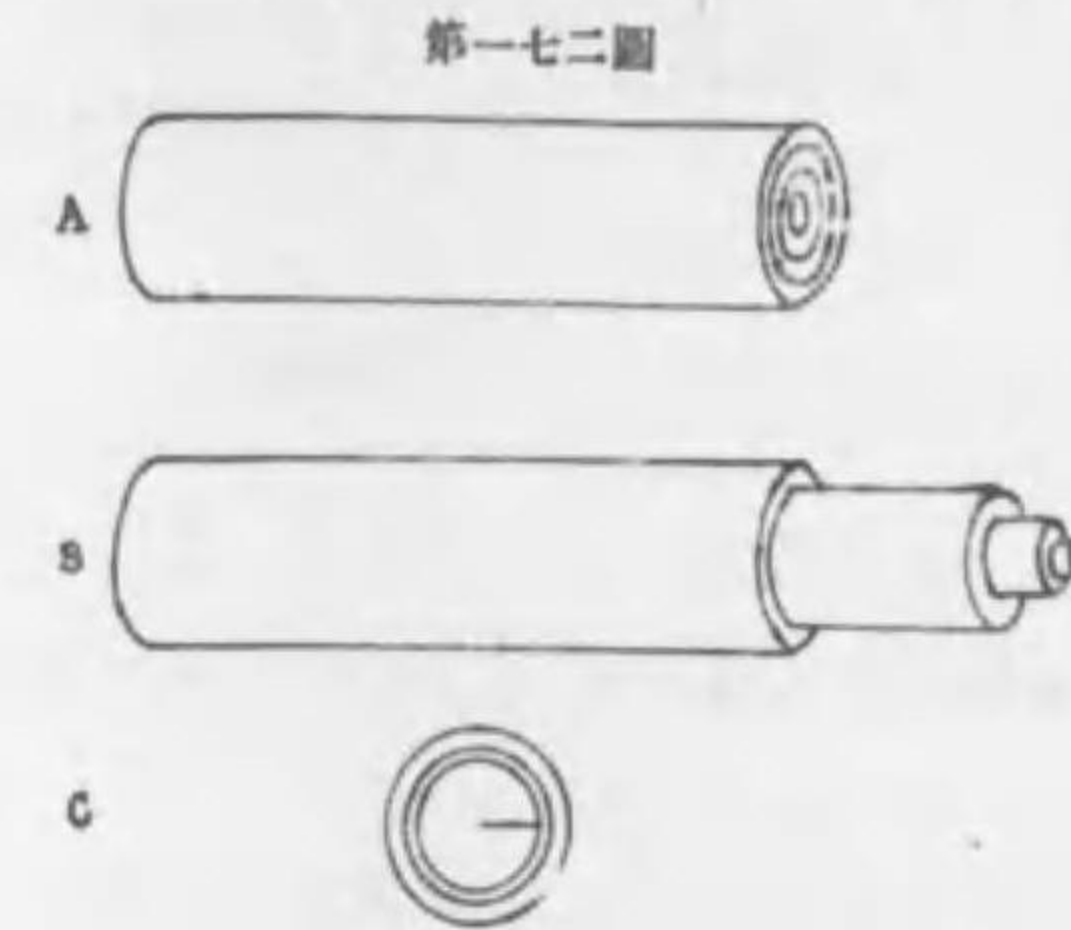
固体が液体内を運動するときにも固体液体分子間の附着性と液体分子間の合著性との合併によりて上記に類似の現象を呈す。固体の速度を v とし其表面積を S とすれば其運動に抵抗する切線垂力 R' は

$$R' = \epsilon S v \dots\dots\dots (36)$$

なり、 ϵ を外部摩擦係數 coeff. of external friction と稱す、上式により $[\epsilon] = [L^{-1}MT^{-1}]$ 即ち運動量を容積にて除じたるもの、デメンションに等し。

氣體と液体との間に作用する外部摩擦即ち粘著性も上と同様に取扱ふことを得べし。河水は河の放面上に在る空気のために其運動を妨げられ、之がために河水の内層の方却て速度大となり、又其反作用として空気は運動する河水と同一方向に曳行かゝることとなり、従て河流の表面の空気は常に運動して所謂河風となるなり。

液体が管内を流るゝ際管壁が液体に與ふる抵抗はポアズイユ (Poiseuille 1842)



之を研究す。第一七二圖 A は長さ l 、内半径 R なる管内の液を最初多數の圓柱層に區劃したる一部分を示す。B 圖は或時間の後に各圓柱層が流出したるを示す。中央即ち管軸は抵抗を受くること最小なるを以て流出速度最大なり、之に反し管壁に直接せる層は附着性のために流出する能はざるなり、今

半径 r なる圓柱の側面を想像すべし (第一七二圖C) 此側面の裏面に働く力は (35) により

$$\eta \frac{2\pi r l dv}{dr}$$

なり、茲に dv/dr は單位距離毎に速度の増加する率を示す、又側面の外面に働く力は

$$\eta \frac{2\pi r l dv}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\eta \frac{2\pi r l dv}{dr} \right) dr$$

なり、然るに裏面に働く力は運動を助け外面に働く力は運動を妨ぐるにより此兩力の合力は其差に等しく、又此差を生ずる原因は圓柱層の兩端に作用する壓力の差に歸因す。依て p を壓力の差とすれば圓柱層を動力す力は斷面 $2\pi r dr$ と p との積に等し、即ち

$$-\frac{d}{dr} \left(\eta \frac{2\pi r l dv}{dr} \right) dr = 2\pi p r dr$$

なり、依て積分の結果は

$$-\eta \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} p r$$

なり、之を再び $r=r$ より $r=R$ まで積分すれば

$$v = \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \dots\dots\dots (37)$$

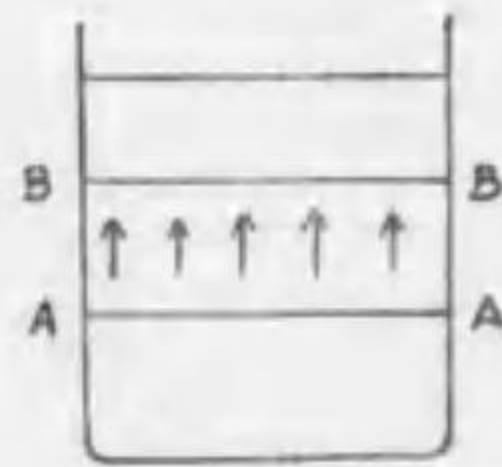
を得、茲に v は r の函数にして管軸 ($r=0$) に於ては v は最大なり (v は拋物線的に分配せらるゝを見るべし)。單位時間の流出量は

$$Q = \int_0^R 2\pi r v dr = \frac{\pi p}{8\eta l} R^4 \dots\dots\dots (38)$$

なり、此を ポアズイユ の式となす。

104 交流 diffusion (Graham 1850) 比重異なる二つの液体を、比重大なるものを下に比重小なるものを上にして、同一の容器に盛るときは最初は両液の境界面明瞭なれども時を経るに従ひ次第に不明となり両液の互に交流したることを示す、長時の後両液全く混和し全液同質となるを認むべし。此現象は両液混和する能はざる性質の場合には行はるることなし、下液は硫酸銅溶液の如く著色したるものにして上液は水なる時は久しからずして両液の境界面不明となることを認め易し。交流の現象の始まりて暫く後第一七三圖面に於ける濃度 concentration (溶媒例へば水の單位容積内に含む溶解物即溶質の質量を濃度と稱す) を夫々 c_1 、 c_2 として兩平面間の距離を l とし各平面の面積を S とすれば單位時間毎に AA 面より BB 面に移動する溶質 solute の質量 q は二平面間の濃度の勾配

第一七三圖



gradient 即ち $(c_1 - c_2)/l$ 及び面積 S に正比例すべし。即ち

$$q = D \frac{c_1 - c_2}{l} S \dots\dots\dots (39)$$

D を交流係數 coefficient of diffusion と稱す。 q は質量を時間にて除じたる商なるを以て $[q] = [MT^{-1}]$ 又

$[c_1] = [ML^{-3}]$ 故に

$$[D] = \left[\frac{q l}{(c_1 - c_2) S} \right] = \left[\frac{LMT^{-1}}{L^2 ML^{-3}} \right] = [L^2 T^{-1}]$$

なり。距離の單位を 1 釐、質量の單位を 1 瓦、時間の單位を 24 時間とすれば

塩酸	D=2.4
食塩	1.03
砂糖	0.31

なり。

105 滲透 osmosis 二種の混和し得べき溶液を第一七四圖の如く素焼板 MN

にて隔離し、放置すれば暫時の後両液は素焼板を通して交流したることを發見すべし、之がために内外水準の高さに差を生ずるを常とす。素焼板の代りに動物性膜或は羊皮紙 (洋紙を硫酸にて處理したるもの) を用ふるも同様の結果を得べし此種の現象を滲透性と名づく、豌豆を水に浸し置けば膨脹し又蕪根に穿孔し砂糖を詰め置けば暫して糖水を生ずるも滲透作用に外ならず。

第一七四圖



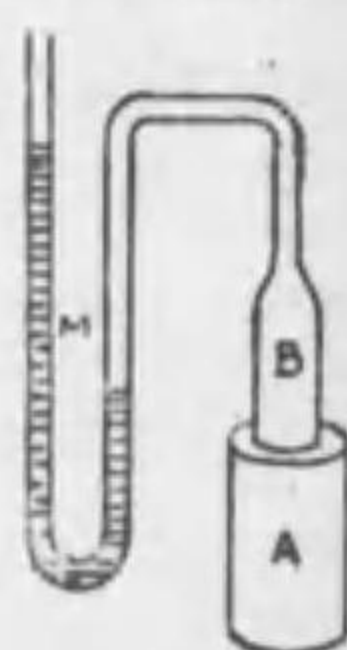
交流速度 (滲透的交流) の大なるものは酸類、金屬の塩類、砂糖、尿素の如きものにして、交流速度の小なるは硅酸、水酸化鐵、蛋白、糊精 (dextrin)、可溶性ゴム、膠の如きものなり、此内膠は殆ど交流する力なし依て之を交流性少なるものの代表者と見做し此部類に屬する物質を一般に膠質体 colloid と名づけ (Graham 1861) 之に反して交流性多きものを晶質体 crystalloid と稱するに至れり、晶質体は必ずしも結晶を形成するものにあらざると云へども膠質体は斷じて結晶すること能はず。膠質体は固体と溶液との中間物にして分子は極めて微細となり媒質内に懸垂す、今電流を用ひ金屬を水中にて酸化して後冷却すれば蒸氣は其儘に冷却して固化するを以て凝集する機會を失ひ微粒となりて水中に懸るべし、此は溶液とは別物なれども尙ほ溶液に共通なる諸性質を有す、微粒の直徑は通常 10 乃至 100 $\mu\mu$ なれども稀に金の膠質微粒 2 乃至 3 $\mu\mu$ のものを製出したることあり、而して微粒間距離は 1 $\mu\mu$ より 1000 $\mu\mu$ 間に横はり。氣體の分子間平均距離 3 $\mu\mu$ なること、氣體分子の直徑 10 $\mu\mu$ なることに比較して極めて興味多し。是を以て考ふれば膠質体に於ては微粒が單に水中に懸垂せる態にあるよりも尙一層溶液状態に近きものなることを覺るべし。

膠質体と晶質体との滲透性の著しき差違を利用すれば両体の混合物を膠質、晶質の二体に分析すること困難にあらず、此には一般に羊皮紙の隔壁を使用す。

諸種の隔壁中最も興味ある結果を呈するは半透膜 semipermeable membrane と稱するものなり、其特性は溶媒 solvent の通過を許すも溶質 solute の通過を許さざるにあり。半透膜を最初製出せしは Traube (1867) なれども此を使用し

て植物學上の研究に資せしは Pfeffer (1877) なりとす、之を製作するには青酸鐵加里の百分の二溶液を素焼の容器に盛り、百分の二硫酸銅溶液中に浮ばしむるにあり、兩液は素焼の細孔を通して化合し不可溶性の鐵青酸銅の沈澱を生じ素焼の細孔を塞ぎて所謂半透膜を形成すべし。第一七五圖 A は其底部に此半透膜を著けたる素焼の管なり、此にガラス管 B を接続し AB に晶質体の溶液を充たして M なる壓力計に通じ然るのち A を清水を盛りたる器中に沈むるときは清水は半透膜を通じて AB 内に滲入し壓力計の水銀を押し上げ壓力の次第に増加することを示す、壓力は一定時の後最高に達す此を滲透壓 osmotic pressure と稱す。

第一七五圖



滲透壓の由來するところを案ずるに溶液は其性質全く氣體と同一にして氣體は膨脹性を有し不斷其容積を増加せんと努力する如く溶液も同一の膨脹性、擴散性を有すれども溶媒無くしては溶質は其容積を増大すること能はざるが故に晶質体は水を吸入して膨脹を試みるものなることを知るべし。然して溶液の膨脹性は其窮極するところを知らざれども此實驗に於ては一方に於ては水銀壓の次第に増加するありて遂に M 中水銀の壓力と滲透壓とが等しくなるを待て運動は停止するものなること明なり (Van't Hoff 1887)。

然らば溶液も氣體と同じく其容積は壓力に反比例し、水を吸入して容積を増せば壓力は次第に減少す、換言すれば壓力は密度に正比例すること氣體の場合と同一なり、然れども比例常數は晶質体の性質異なるに從て自ら異なり、若し二物同一の比例常數を有するときは同一温度と同一壓力の下には二物の溶液は同一の容積を有すべし、然るときは此二物は等滲壓 isotonic なりと稱せらる、此場合にはアブガドロ則 (§ 109 を看よ) により兩溶液の同容積内に含有せらるる晶質体分子の數は互に等しき (equimolecular) なり。

p を滲透壓、 v を容積、 T を絕對温度とすれば氣體の場合と同じく

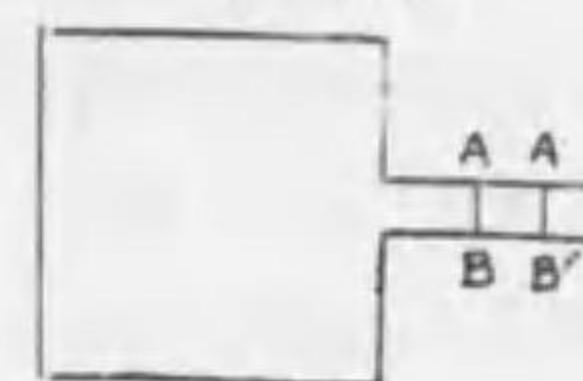
$$pv = mRT \dots\dots\dots (40)$$

なる法則成立す、茲に m は溶質の質量なり、之を **ヴントホッフ 則** と稱す。

106 氣體の流出及び交流 effusion and diffusion of gases (Graham 1834)

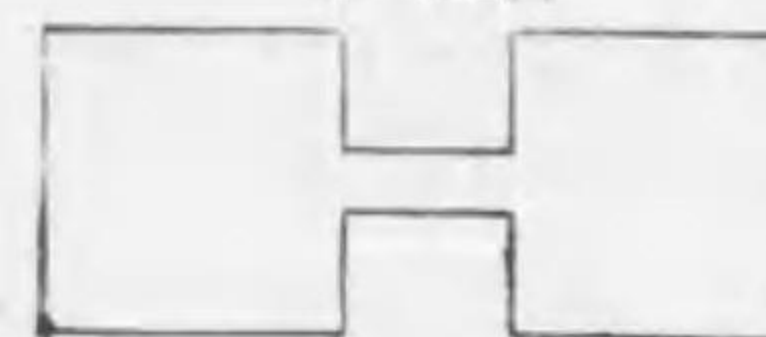
壓力 p 密度 σ なる氣體を以て容器を充たし (第一七六圖) 斷面積 q なる管にて真空内に流出せしむるときは或時刻に AB

第一七六圖



面上に並び居たる分子は或時間後に A'B' に並ぶべし、今 AA' を流出の速度 v とすれば ABB'A' 内に含まるゝ氣體の質量は σqv 、其運動のエネルギーは $\frac{1}{2}\sigma qv^2$ なり、然るに内部より押し力は pq にして其力が一秒毎に作す仕事は pqv なり、此仕事は先の運動のエネルギーを生ぜしなり、故に

第一七七圖



$$\frac{1}{2}\sigma qv^2 = pqv$$

即

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\sigma}} \dots\dots\dots (41)$$

を得。流出徐々たるときは温度の變化を生ぜず從て **ボイル、マリョット則** (§ 86) により p/σ は與へられたる氣體に取ては常數なるを以て流出速度は壓力に無關係となるなり、例へば温度零度、一氣壓なる空氣を取り真空内に流出せしむるときは速度は終始一定にして

$$v = \sqrt{\frac{1013590 \times 2}{0.001293}} \quad \text{概} = 396 \text{ 米}$$

なり、茲に 1013590 は一氣壓を **ダイン** にて示したるもの、0.001293 は温度零度、一氣壓なる空氣の密度なりとす。又空氣の比重を 1 とし他の氣體の比重を σ とすれば其流出速度は

$$v = \frac{396}{\sqrt{\sigma}} \text{ 米}$$

なること明なり。

器中の氣體の壓力 p にして外界の壓力 p' なるときは流出速度の式は

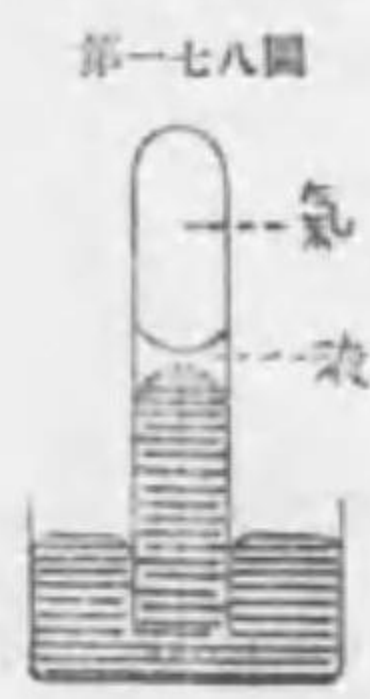
$$v = \sqrt{\frac{2(p-p')}{\sigma}} \dots\dots\dots (42)$$

となるべし。

二種類の気体を以て別々に二個の容器を充たし（第一七七圖）共通の管を以て両器を連結すれば気体は交流すること溶液の時の如し、交流速度は両者の壓力の差に關するのみならず亦両者の比重の平方根に反比例すべし。若し共通管の中央に素燒の隔壁を設け置かば交流速度は減ずるも兩者交流速度の比は比重の平方根に反比例すること前の場合と同一なり。

107 気体の粘性又は内部摩擦 気体に於ても液体の如く内部の相對運動に對し少量の抵抗を興ふ、之を内部摩擦と名くれども氣體分子は相互に比較的遠距離に在るを以て分子力は殆ど作用することなく従て分子は摩擦の源因となる能はず。氣體の運動力學によれば氣體分子は不斷種々の方向に直線等速運動を營み分子互に衝突すれば彈球の衝突の如く互に運動量を授受す、故に氣體の一部が他の部分よりも速に運動しつゝあるときは速度大なる部分の分子が速度小なる部分の分子に與ふる運動量の方向は現在運動せる方向に於ては大にして其反對の方向には小なる理なり、従て速度小なる部分の速度を増加せんとする傾向を有す、之に反し速度小なる部分の分子が速度大なる部分の分子に與ふる運動量の方向は主として囊の方向に反對となり、従て速度大なる部分の運動を障害せんとするなるべし。大体に於て氣體の場合にも液体内部の摩擦を示す公式と同様なる公式を使用することを得るなり。

108 気体の吸収 absorption of gases 氣體は液体のために吸収せられて其内に溶解す、而して其程度は各物質により又温度に従て異なり、之を實驗するには水銀盆に液体と氣體とを容れたる管を倒まに立て（第一七八圖）暫くして氣體が



第一七八圖

次第に液内に吸収せらるゝため水銀は管内に上昇するを觀察すべし。與へられたる温度に於て單位容積の液体が吸収する氣體の質量は液の上部に尙ほ残留せる氣體の壓力 p に正比例するものなり、此をヘンリーの法則となす (Henry 1803)、即ち m を吸収せられたる氣體の質量とし u を液体の容積とすれば

$$\frac{m}{u} = kp \dots\dots\dots (43)$$

茲に k は比例常數にして氣體、液体の性質に關し又温度にも關す、然るに他方面より考ふれば凡そ氣體の質量は或與へられたる温度に於ては、容積一定なるときは壓力に正比例し、壓力一定なるときは容積に正比例す、依て液内に溶けたる氣體は p の壓力の下には v の容積を持つべきものと定むれば

$$m = cvp \dots\dots\dots (44)$$

なる關係を有すべし、茲に c は比例常數なり、此二式より m を省去し $k/c = a$ と置けば

$$a = \frac{v}{u} \dots\dots\dots (45)$$

となる、故に液体の容積と溶解したる氣體の容積との比は與へられたる温度に於ては常數なり、但し氣體の容積 v は尙ほ液外に残留せる氣體が有する壓力の下に在るものとして表出せられたるものなり。此比 a を吸収係數 coefficient of absorption と名づく、(45)式によりて表はされたるヘンリー則は v が餘り大ならざるときに成立し、 v が大なるに従て精確の度を減す。下表に於て數種の氣體に就き a の値を示す

	温度	水素	窒素	酸素	炭酸瓦斯	亞硫酸瓦斯	アモニヤ瓦斯
水	0°	0.01	0.02	0.04	1.79	79.79	1049.6
	20°	0.02	0.01	0.03	0.90	39.37	654.0
酒精	0°	0.07	0.13	0.28	4.33	328.62	—
	20°	0.07	0.12	0.28	2.95	114.48	—

前述の如く液内に吸収せられたる氣體の容積は若し其が受けつゝある壓力を p に等しきものとすれば v となるなり、又液の容積 u を充たすものと假定して其時の壓力を p' とすればボイル、マリオット則により

$$p'u = pv$$

なり、故に (45) に依り

$$a = \frac{p'}{p} \dots\dots\dots (46)$$

なり、即ち與へられたる温度に於ては液内に溶けたる気体の壓力は未だ溶けずして外部に残留せる気体の壓力に正比例す、而して其比は吸収係數に等し。

液体が氣體を溶解すると同時に液体の容積増加するを常とす、而して液体の密度は却て増加する場合と減少する場合とあり。水中に一氣壓を受けつゝある酸素、水素、炭酸ガス、アムモニヤを吸収せしむれば之がために水の容積の増加は夫々一萬分の 10、15、13、7 の割合なり。又屢々吸収に伴ふに發熱を以てすることあり、從て吸收的溶解は一種の化學作用ならんと推測を生じ易きことなれども吸収作用は液体氣體の量の比一定なることを要せずして如何なる割合に於ても溶解することを得べきが故に吸収は決して化學反應には非るべしと信ぜらる。

諸種の混合氣體を吸収せしむる場合には各自他の氣體の不在なる場合と同様の結果を呈すべし。例へば大氣一立毎に窒素 787 立方厘米、酸素 213 立方厘米を含む、然るに大氣の壓力は 76 厘米なる故、之を按分すれば壓力は夫々 59.81 及 16.19 となるべし、然るに前出の表によれば α は夫々 20 及 40 なるを以て、一氣壓の下に吸収せらるゝ容積は窒素は $\frac{59.81}{76} \times 20 = 16.01$ 立方厘米、酸素は $\frac{16.19}{76} \times 40 = 8.76$ 立方厘米となる理なり。

液体内に吸収せられ従て溶解の有様にある氣體を再び外部に放出することあるは次の場合に依る

第一、 残留せる氣體の壓力が減るときは液体は其内容氣體を放逐すれども其量はヘンリー則の値よりも小にして従て液体は過度飽和の状態に在り、然れども其殘部は徐々に放出し果はるものとす。

第二、 温度を上ぐれば氣體は放出せらる、凡そ液体を煮れば最初氣泡の騰るは之がためなり。

第三、 液を氷結せしむれば其内容の氣體は放出せらる、故に銅、銀の如き一旦熔くれば酸素を吸入し突然冷却して凝結せしむれば氣體は一時に放逐せらるゝと同時に金屬液を噴出するを見るべし (rochage)。

第四、 空氣を其表面に吸着せる (次節を看よ) 固体を取り液中に入るときは液内に含有せる氣體は固体表面の空氣を中心として凝集し氣泡となりて外部に出るを見る、例へば泡を放逐し果はりたる曹達水又はビール中に砂糖の少量或

は砂を投ずれば再び發泡し始むることあるも此理に依れり。

109 気体の吸蔵 occlusion 及び吸着 adsorption 此二現象は固体と氣體との間に行なはるゝものなり。吸蔵とは氣體が固体の内部に吸収せられて其成分となるを云ふ、従て此現象は液体の吸収に甚だ似たるものなり。此とは異なり、吸着と稱する現象は氣體が固体の表面に引かれて表面に附着し著しく其密度を増し恰も大氣が地球を包被して其附屬物となれる如く、吸着したる氣體は固体を圍繞して其大氣を形成するものなり。故に之を除去するには小刀を以て之を削るの必要を生ずることあり。

氣體の吸蔵 (Sausure 1814) を實驗せんがために黄楊 (つげ) の炭を取り一旦之を熱して氣體を驅逐し 12° に冷して後ち諸種の氣體を吸蔵せしむれば下に示す如き結果を呈す、表中の數は炭の容積の倍數なり

アムモニヤ	鹽酸	亞硫酸	炭酸ガス	酸素	窒素	水素
90	85	65	35	9.2	7.5	1.75

吸蔵の場合にはヘンリー則は其儘に行はれざるも壓力増すに従て吸蔵量増加す、例へば胡桃 (くるみ) 製の炭にアムモニヤを吸蔵せしむる場合に於て一氣壓なれば 171 なるも三氣壓の下に 200 に達するを見る、然れども温度増せば吸蔵は頓かに減退す、之に反し甚だ低き温度に於ては吸蔵は却て盛んなり、例へば液化空氣の温度 (-185°) に於て炭の一立方厘米が吸蔵する容積は下表に示す立方厘米によりて知らるべし (便利のため 0° の時の値と並べ記す) 又最下段に記入せるは

	水素	窒素	酸素	アルゴン	ヘリウム	炭酸ガス
-185°	135	155	230	175	15	190
0°	4	15	18	12	2	21
吸蔵熱	9.3	25.5	34	25	2	27.5

吸蔵のために發生する熱量を小 カロリー にて示したるものなり。吸蔵作用大なるものは此を真空管製造に利用し或は混合氣體を分析するに用ふることあり。

總じて炭は有孔性なるを以て其内部にも表面を有する理なり、從て炭の吸蔵は其大部は吸着作用なりと察せらる。前述の如く固体の表面には氣體凝結し其密度は通常の場合に於ける密度よりも遙に大なり、而して密度は固体の表面に接近するに従ひ増大し表面其自身に於ては殆ど固体の密度と同一となれり(Quinke)、故に今 ガラス 球の内部を直空にしたるのち密閉し二十四時間放置して後ち定量すれば球内の壓力著るしく増加したるを發見すべし、是れ管壁に吸着したりし空氣の今や分離したるものなり、一平方米の ガラス 板上には 0.35 立方厘米の空氣吸着せりと云ふ (Chappuis)、其他水蒸氣、炭酸ガス等を吸着せること疑ふべからず。

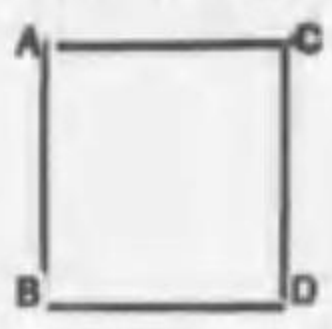
金属の如く外見有孔性にあらざる物体も克く多量の氣體を吸蔵する力を有す、例へば パラヂウム 製の針金は其容積の 1000 倍の (一氣壓の下にある) 水素を吸蔵する力あり、之がために針金は其の長さは百分の 1.6 の増長を遂げ容積は百分の十を増加す、計算に據れば吸蔵せられたる水素の密度は 1.7 となり從て其壓力は莫大なり。隕石 (天降石) も常に自体容積の三倍の氣體を吸蔵す、其内水素 5/6 を占め他に窒素及び炭酸ガスを吸蔵す。一般に吸蔵したる氣體の量一定せざるを以て固体の比重測定に誤差を生じ易し。

110 氣體の力學說 kinetic theory of gases (Krönig 1856, Clausius 1857)

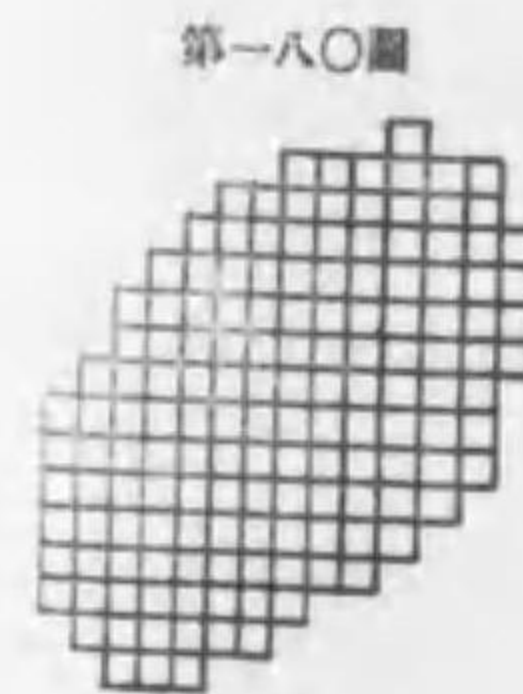
凡そ物体の分子は悉く微動の有様にあり、固体液体の分子は他の分子の束縛を受け其微動自在ならざるも氣體に於ては分子の距離互に遠くして自由運動の餘地甚だ廣し、故に分子は直線等速運動を營み器壁若くは他の分子と衝突すれば恰も彈球の衝突の時の如く反射して等速運動を持続す。固、液、氣體の分子運動は絶對零度に於ては絶無なり、溫度上れば運動の速度増加す。適當なる溫度まで熱せらるれば固体分子は分子間の束縛を脱して液化すれども尙ほ残留せる分子引力の作用のために粘性を呈す、溫度更に上れば分子は全く分離して氣體の状態に入るなり。

V 立方體なる容積を有する器の中に含まれたる分子の總數を N とし、互に垂直なる三種の平面によりて之を分割し各種平面の距離は相互に 1 厘米の間隔を有せしむれば茲に V 個の單位立方體 (各邊一厘米なる立方體) を得べし、而して單位立方體内に含まるゝ分子の數を n とすれば

$$n = \frac{N}{V}$$

なり、今計算を簡潔にせんがため n を三等分し各 n/3 は相互に垂直なる各邊に平行し v なる同一速度を以て運動し又各分子の質量は m なりと假定せよ。第一七九圖の ABDC を單位立方體とし (AB=AC=1cm)、n/3 は AC 第一七九圖

 の方向に、n/3 は AB の方向に、残り n/3 は圖面に垂直に運動し器壁に衝突すれば同一速度 v を以て反跳するものと考ふるときは、AC の方向に運動する分子の運動量は mv なり、而して一秒間に器壁と衝突する度數は v なれども AC=1 なるゆへ AB, CD 兩壁の内 CD のみに衝突する度數は v/2 なり、其都度分子が壁に與ふる運動量は mv、又壁より反射するとき壁を押す運動量は mv なるゆへ各分子は 2mv の運動量を壁に與ふることとなる、而して一秒間に v/2 回の衝突あるを以て一秒間の運動量讓與は mv² なり、然るに同一方向に運動する分子の數は n/3 なるを以て總員が讓與する量は 1/3 mnv² となるを知る、氣體力學說主唱者の説に依れば是れ即ち氣體の壓力 p に相當するものなり、故に

$$p = \frac{1}{3} mnv^2 \dots\dots\dots (47)$$



容器は第一八〇圖の如く V 個の立方體の集合にして各立方體の壁は p の壓力を受け其隣の立方體の壁も同一壓力を反側より受くることとなるを以て p に等しき運動量の總和は互に打消し霞々容器の壁に於てのみ p なる壓力は残留して作用することとなるべし。上式に於て m は各分子の質量なるゆへ mn は單位容積内の質量即ち密度 (σ) となる、故に

$$p = \frac{1}{3} \sigma v^2 \dots\dots\dots (48)$$

なり、今全質量を M とすれば σ=M/V なり、故に上式より

$$pV = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} Mv^2 \dots\dots\dots (44)$$

を得べし、右側中 1/2 Mv² 即ち 1/2 Nmv² は運動の エネルギー の總和に等しく、

氣體力學説に依れば氣體が有する熱量は氣體分子の運動のエネルギーの和に等しきゆへ氣體の温度不変なりとせば上式の右側は常數となり従て ボイル、マリオット式 (§ 86 (17) 式) と同一の方程式を得べし。

次に質量 M_1, M_2 なる二つの異なる氣體を取り之を二つの等容積の器に容れ、各氣體の壓力を夫々 p_1, p_2 、各分子の速度を夫々 v_1, v_2 とすれば

$$p_1 V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} M_1 v_1^2, \quad p_2 V = \frac{2}{3} \cdot M_2 v_2^2$$

を得、今兩氣體を第一器内に合併し其其時の壓力を p とすれば

$$pV = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 \right)$$

ならざるべからず、故に前式により

$$p = p_1 + p_2$$

なり。兩氣體を合併したるとき化學作用惹起せざるものと假定すれば上式に示すが如く各氣體は合併前と同じく合併後も易らざる壓力の影響を示すものなることを知るべし、之を **ダルトン則** (Dalton 1802) と名づく。

又茲に二つの異なる氣體ありて温度も壓力も容積も等しきときは直に (47) により夫々

$$p_1 = \frac{1}{3} m_1 n_1 v_1^2, \quad p_2 = \frac{1}{3} m_2 n_2 v_2^2$$

に於て $p_1 = p_2$, $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ なるを以て亦た

$$n_1 = n_2$$

ならざるべからざることを知る、即ち同一温度、同一容積、同一壓力の下にある二つの異なる氣體の分子の数は相等し、此法則は化學の分子式研究の基礎を成せり、之を **アボガドロ則** と稱す (Avogadro 1811)

(48) を變形すれば

$$v = \sqrt{\frac{3p}{\sigma}}$$

を得、然るに温度零度、一氣壓の下に海面上に於て $g = 980$ 厘とすれば p は各平方厘に 1013600 **ダイン** となり、水素の密度は水に比して 0.00008958 なり、

此値を p と σ とに代入して

$$v = 1838 \text{ 米/秒}$$

を得、即ち温度零度の水素分子の飛行速度は一秒毎に殆ど半里に達せんとす、素より氣體分子は相互の衝突頻繁なるを以て運動の道は折線をなすものとす。又 § 86 に於て説きたる如く氣體の温度一定なるときは p/σ は常數なるを以て分子の飛行速度は壓力にも密度にも關係すること無きものとす。下に温度零度に於ける諸氣體の分子速度を示す

水	素	1838 米/秒
窒	素	492
酸	素	461
炭	酸 瓦 斯	392

上説くが如く繪べて氣體分子は活動して止むことなきを以て吾地球を包圍せる大氣も其上層に於ては容易に地球引力の區域外に脱して空間内に通逸することを得べし。地球に限らず他の天体も同一の状況の下に其氣圍氣を漸次に消失しつゝあること疑ふべからず、月の如きも最初所有せし氣圍氣を今は全く紛失せり、是れ自体全く乾固し氣體を供給する途斷へたるによる。

第二編

熱學

第一章

膨張及び熱量法

EXPANSION AND CALORIMETRY

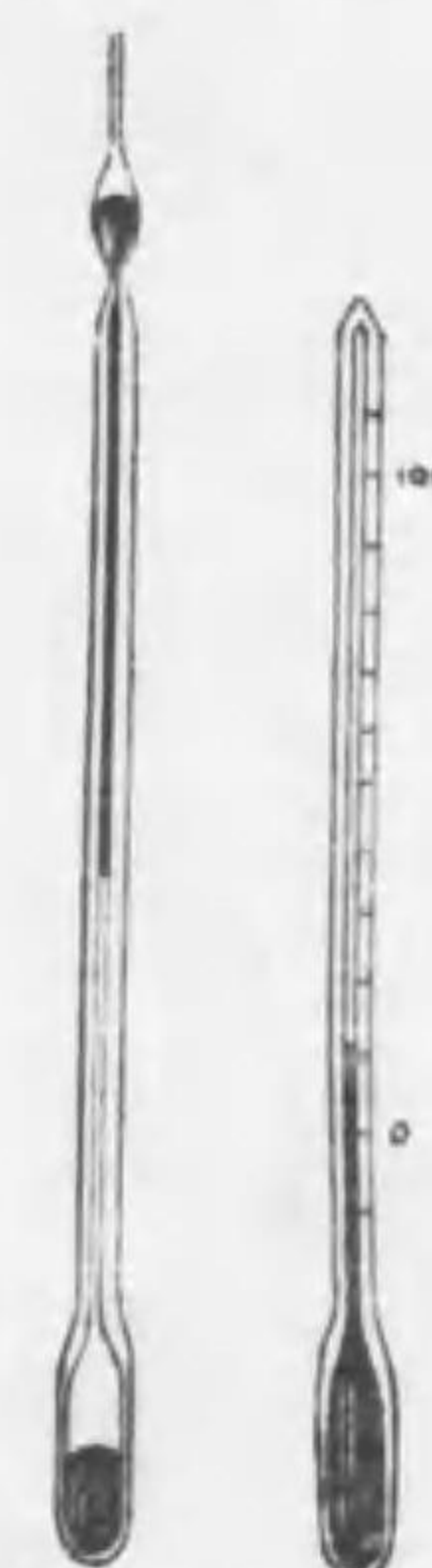
111 温度 temperature 熱及び温度の概念は元吾人の皮膚の感覚に起源す、皮膚の表面には寒點 cold spots 暑點 heat spots と稱せられたる小點無數に散在し暑點は常に毛根附近に集まり、諸點最近距離は寒點は互に近く暑點は互に遠く(例へば胸部に於ては寒點の距離 2 耗、暑點の距離 5 耗なり) 其結果として皮膚は暑さよりも寒さに対して鋭敏なり、皮膚の温度降るときは寒點刺激せられ、昇るときは暑點刺激せられ、各自別種の感覺神經を有す。

熱は物体分子の振動の エネルギー にして熱は高温なる場處より低温なる場處の方に移動すること恰も流水の卑きを慕ふが如きものなり、故に温度は流れの高さに相當し又電流の電位に相當す、從て熱量は水量又は電氣量に該當するものとす、流水も電氣量も運動せるゆへ各々運動の エネルギー を有す熱量も亦斯の如きものなり。

112 寒暖計 thermometer 熱量物体内に入れれば一般に其温度を増し又同時に物体をして膨脹せしむ。固体、液体、氣體は順次に分子間の束縛少きを以て同一の熱量を受けて膨脹する度は固体最少にして氣體最大なり。空氣が熱によりて膨脹することを利用して創めて寒暖計なるものを製作したるはガリレオなり(1600)、蘭人 ドレッベル(Drebbel)も殆ど同時に同種の寒暖計を作りたり、此種の寒暖計は空氣を使用するゆへ氣壓變化の影響を受くることを免れ難し。1631年

に及び漸く水の寒暖計を創作し氣象學生物學に應用せしことあり。水銀寒暖計は十七世紀の半ば頃 フロレンス 市に創まる、然れども今日使用する如き完全なる水銀寒暖計はファレンハイト(Fahrenheit 1713)の製作したるものなり。

水銀寒暖計を造るには最初第一八一圖の如く上部膨れて水銀溜めを有する ガラス 管を使用するを便利とす。初め管底を少し熱して上端を水銀中に容れ、管底を冷せば水銀は管中に入る、此法を幾回も繰返へし水銀を以て管を充たしめ尙ほ沸騰水中に入れて管内残留の空氣を悉く除去すべし。備て此寒暖計は最高は 100° 附近までを測定するの用に當てんとする目的なるときは凡そ 110° の液に入れて熱し水銀の進出止むを待つて上端を封ずべし。醫用寒暖計の場合には 43° 位ひの液の中に容れ置き同様に取扱ふべきなり。目盛を附記するには融解中の氷片中に入れて氷点 freezing point 0° を定め、次ぎに一氣壓の下に沸騰しつゝある水の放面附近に管端を置き沸騰點 boiling point 100° を定む。氣壓 76 釐に非るときは之れに應じて糾正法 correction を施すべし。寒暖計の細管に於ける水銀面より上部は真空と見做すも不可なし。



第一八一圖 第一八二圖

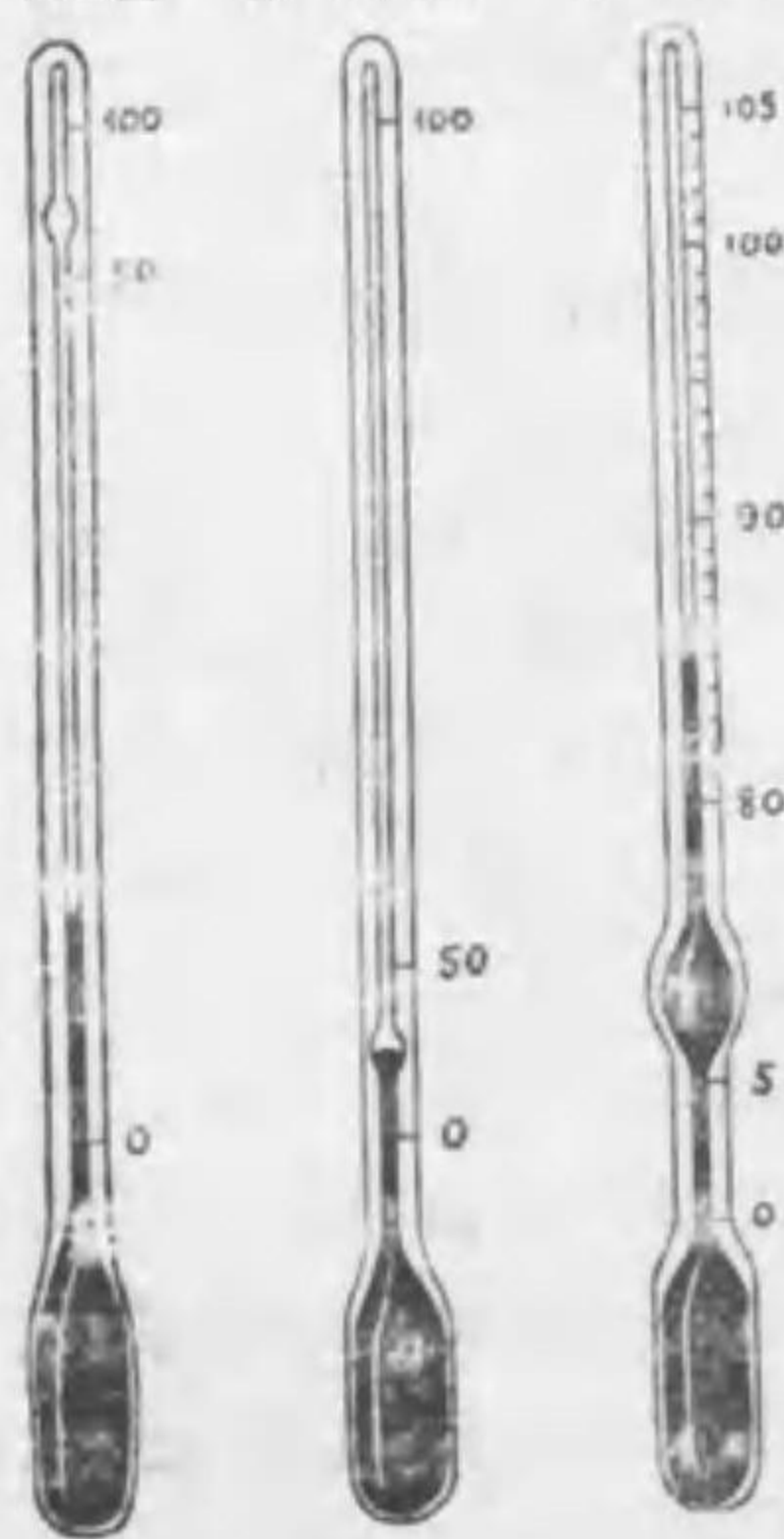
上記目盛法は攝氏 (Celsius) 寒暖計と稱し物理學に使用する目盛なり。此は攝氏の名を附せども實は列氏(Réaumur 1730)より始まる(列氏は酒精を用ひたり、又攝氏は 1736 年沸騰點を零度とし氷点を百度と定めしなり)。又寒暖計に用ふる ガラス は高温に於て其膨脹のために誤差を生じ易きを以て一般にエナ、ガラス(Jena glass)と稱する精良品を使用す。水銀は -39° に於て氷結し寒暖計の用をなさざるを以て低温を測るには酒精寒暖計を用ふるを當とすれども酒精は管壁に附着して誤差を生ずるを以て トリウイン油(toluine C₇H₈)を使用すれば -70° まで無難に測定することを得べし、又此油は膨脹係數殆ど一定にして温度に無關係なる長所を有し甚だ便利なり。故に水銀寒暖計は高温を計るには好都合なれども 357° に於て沸騰するゆへ水銀の上部(所謂真空部)に極

少量の窒素を管内に封入し置くときは窒素の壓力により水銀の沸騰を妨げ 550° まで測定することを得るなり。尙ほ其よりも高温を測るには氣體寒暖計を用ふるの外なし、又氣體寒暖計は氣體の規則的なる膨脹のために他の諸種の寒暖計の標準となるものなり。其他電流に關係ある寒暖計は後篇に於て詳説すべし。

目盛 (graduation) を附するに當り氷点と沸騰点を定め其間を直ちに百等分するは不可なり、何となれば寒 暖 計毛管の断面は必ずしも一定ならざるを以てなり、故に目盛の精確を期するには豫め毛管内に少許の水銀を入れ之を毛管の諸点に移動せしめて水銀絲が同長なるや否やを測定せざるべからず、其同長ならざるは毛管の断面積に大小あるを以てなり、断面 小なれば絲は長く断面大なれば短し、故に絲の長短を測定せば断面積を推算すること容易なり然るのち適當に目盛を施すことを得べし、此術を口径測定 calibration と稱す。又 ガラス は一旦高温或は低温に處したるのちも徐々に膨脹又は收縮を繼續する性質あるを以て氷点、沸騰点測定後可成的長時を経て目盛を施すを上策とす。

零度と五十度間或は五十度と百度間を詳細に計る目的を有する寒 暖 計は夫々

第一八三圖 第一八四圖 第一八五圖



第一八三圖及び第一八四圖に示す如く毛管の途中に水銀の溜り處を設くるなり。測高術 (hypsometry) に使用する寒 暖 計 第一八五圖 も此と同理にして主として 80° と 105° 間の温度を詳細に測定し得せしむ、之を用ひて水の沸騰点を測れば氣壓表を併用して實驗地の高さを算出することを得るなり。ベックマン (Beckmann) の寒 暖 計は温度の差を測るを目的とし五百分の一度 (時としては千分の一度) を讀むことを得せしむ、其構造は上端 S 字形に屈がり (第一八六圖) 不用なる水銀を溜め置くに用ふ、此寒 暖 計の使用法を畧説せんに例へば 30° と 35° との間の或温度を測る場合に於ては先づ

微動を與へて不用の水銀を上端なる S 字形の中央の膨れたる場處に追ひ遣り管内の水銀の上端として 30° の時に 0 点に來らしめ然るのち測定せんとする物体に觸れしむべし、此時水銀端は 35.6 に到着したりとすれば求むる温度は 33.56° よりも少しく小にして糾算法により 33.56 - 0.017 即ち 33.545° なるを知る、次に乙物体に觸れしめ同法を以て其温度を測定すれば甲乙温度の差を知ることを得るなり。最高寒 暖 計は水銀を用ひ

第一八七圖



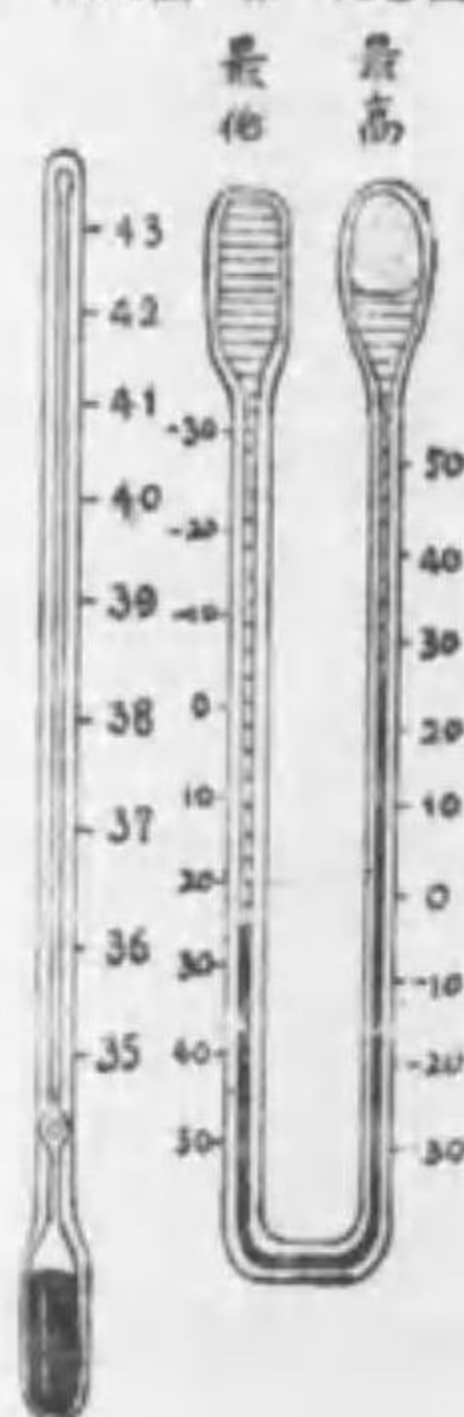
第一八八圖



第一八七圖の如く標針を最高點まで押し遣り温度降るときは標針を其儘放置して水銀のみ退却するなり。最低寒 暖 計は酒精を用ひ (第一八八圖) 表面張力にて標

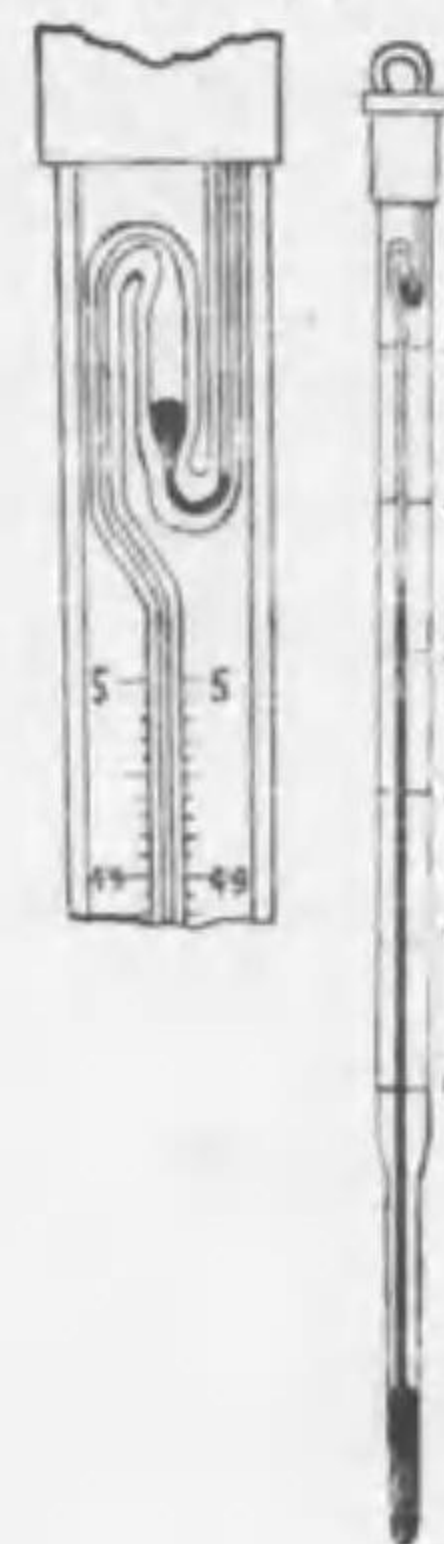
針を最低點まで曳き行き温度昇るときは其儘放置して進むなり (Rutherford 1794)。

第一八九圖 第一九〇圖



に登れて狭き場處を設く (第一八九圖)、温度上るときは液体の不縮性のために水銀は溢處を通過して上昇すれども温度下降する時は溢處より上方に在る水銀絲は其儘残留するなり故に最高温度を讀むことを得べし、水銀を再び管底に返へすには遠心力を利用す。シックス寒 暖 計 (Six 1782) は最高最低寒 暖 計にして (第一九〇圖) 水銀絲は U 字形を作し其上に酒精又は煙脂 (croosote) を入る、最低を示す方 (左方) には液を全く充たし最高を示す方 (右方) には半ば液を入る、温度上るときは液体と共に右側の上端なる蒸氣も亦膨脹せんとす、然るに液体は不縮性を有するゆへ左方の液は讓歩することなくして膨脹し右方の蒸氣は張力を増したるに拘らず收縮すべし、従て水銀絲は左方に降り右

第一八六圖



方に登りて水銀放面は其上にある標針を押上ぐるなり、之に反して温度下降すれば液体は収縮し蒸氣は却て膨脹し左方の水銀放面は其上なる標針を最低温度の處まで押上ぐるなり。

113 固体の膨脹 同質 (homogeneous) にして等方質 (isotropic) なる固体を取り固体内に任意の二点 A, B を定め直線を以て之を連結し其長さ温度 0° の時 l_0 なりと假定せよ、温度 t ° の時 AB の長さ l となり温度 t' ° に熱すれば長さ l' なりとせば

$$\frac{l' - l}{l_0(l' - l)} = \lambda \dots\dots\dots (1)$$

は温度 1° 毎の膨脹を温度 0° の時の長さに比較したるものにして此を線膨脹係數 coefficient of linear expansion と名づく、 λ は常數にあらずして温度の高下に從て多少の變化あるを免れざるを以て上式は畧近的公式なり、又上式を變化すれば

$$l' = l + l_0 \lambda (l' - l)$$

を得べし。然るに温度 0° の時の長さを l_0 にて示すときは l_0 の時の長さは一般に

$$l = l_0(1 + at + bt^2 + ct^3 + \dots)$$

を以て表はすことを得べし、茲に a, b, c, \dots は常數にして實驗によりて測定すべきものとす、物体を t' ° に熱したるときの長さを l' とすれば

$$l' = l_0(1 + at' + bt'^2 + ct'^3 + \dots)$$

なり、從て (1) により

$$\lambda = \frac{l' - l}{l_0(l' - l)} = a + b(t + t') + c(t^2 + t'^2 + t'^3) + \dots$$

を得、若し t' が t に甚近きときは上式は單に

$$\lambda = a + 2bt + 3ct^2 + \dots\dots\dots (2)$$

と書くことを得べし、一般に (1) により

$$\lambda = \frac{1}{l_0} \cdot \frac{dl}{dt} \dots\dots\dots (3)$$

從て

$$l = l_0(1 + \int_0^t \lambda dt) \dots\dots\dots (4)$$

なり。 λ は即ち t ° に於ける線膨脹係數にして b, c 等は通常微小なるを以て畧近的には λ は常數なり、例へば亞鉛に於ては $a = 3 \times 10^{-5}$, $b = 2 \times 10^{-8}$ なり。

固体の内部に温度 0° の時 l_0 を一邊とする立方体を書きたりと想像し温度を 0° より t ° まで昂れば其容積は V_0 より V に膨脹す即ち

$$V = l^3 = l_0^3(1 + \lambda t)^3$$

故に λ^2 以下を畧すれば

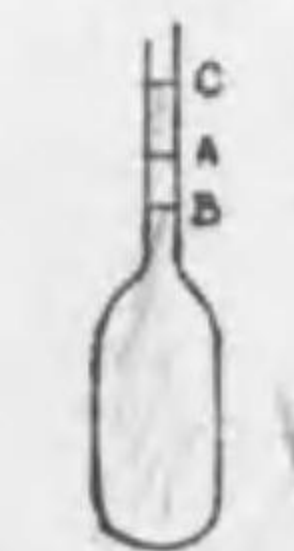
$$V = V_0(1 + 3\lambda t) = V_0(1 + \beta t) \dots\dots\dots (5)$$

となる、 $3\lambda = \beta$ は容積膨脹係數 coefficient of volume expansion と稱せらる、 β は線膨脹係數 λ の三倍なり。ガラス瓶の如く内部空虚なるものも温度上れば内部空間の容積増加すること恰も實質を以て充たしたるときと同一なり。

結晶体の如く異方質 (anisotrope) なる物体が熱のために膨脹する場合には方向に從て線膨脹係數異なることを算入せざるべからず、例へば木材に於ては係數は柱に垂直なる方向に於ては柱に平行なる方向の 5 倍乃至 24 倍なり。合金の場合には各成分の係數の中間の値を有するものあり、例へば真鍮 (銅 2 亞鉛 1 の合金) 及び青銅 (銅 8 錫 1 の合金) の如し、之に反して鋼鐵とニッケルの合金の係數は各部分の係數よりも小にして、係數はニッケル 36 鐵 64 の時最小となり $\lambda = 10^{-6}$ に過ぎず (即ち鋼鐵の λ の十分の一なり)、此合金を不易鐵 invar と名づけ測量尺及び時計製造に利用す。尙ほ之よりも小なる係數を有するものは水晶を一旦融解して固めたるものなり、此れ恐くは固体中最小の膨脹係數ならん。

114 液体の膨脹 液体は定形無きを以て容積膨脹を測定するを以て足れりとす。今 第一九一圖の如く頸部を有するガラス瓶を取り 0° に於て水銀を A まで充たし然るのち之を 1° に熱すればガラス瓶先づ膨脹する結果として水銀の上端は B 点に降るも暫くにして水銀も 1° まで熱せられ膨脹して C 点に昇る、此際ガラス瓶も水銀も共に膨脹したるものなれども水銀の膨脹の方大なるがた

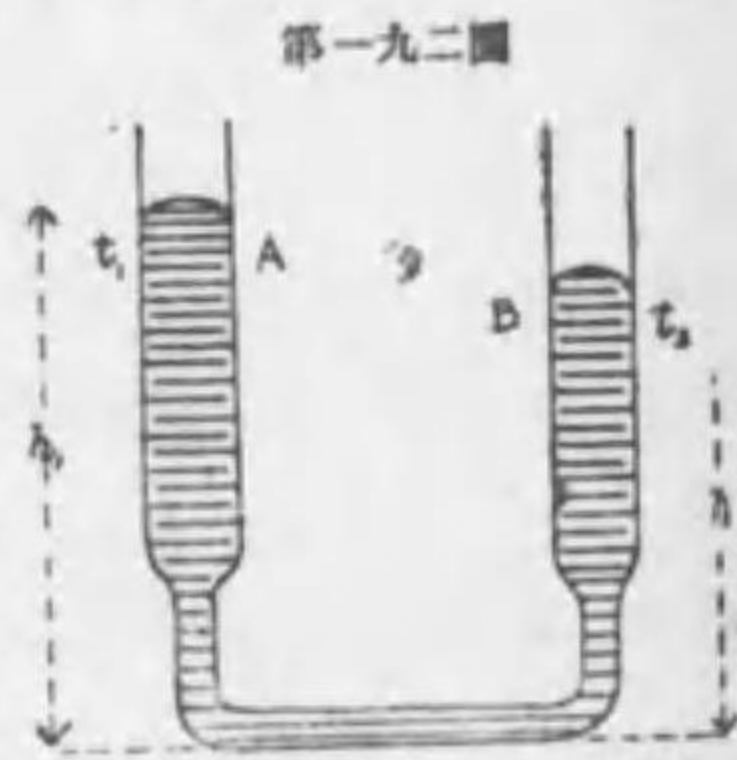
第一九一圖



$l = l_0(1 + \lambda t)$
 $l' = l_0(1 + \lambda t')$
 $S = S_0(1 + \beta t)$

めに 0° の時は A に在りしもの 1° の時は C に來りしなり、之を見掛けの膨脹 apparent expansion と稱す、見掛けの膨脹は容器の膨脹と液体の膨脹との差なり。ガラス瓶の膨脹係数を β とし水銀のを γ とし零度の時 A 点までの容積を V_0 とすれば水銀が B まで降りしときには瓶は膨脹して $V_0(1+\beta)$ となり。水銀が C 点まで昇りしときは水銀は膨脹して $V_0(1+\gamma)$ となれり、故に水銀の見掛けの膨脹は $V_0(\gamma-\beta)$ にして見掛けの膨脹係数は $\gamma-\beta$ なり。爰に使用したるガラス瓶を容積膨脹計 volume dilatometer と名づく。

上理に依り液体の眞膨脹係数を知るには先づ膨脹計の係数を知り、續いて其液体の見掛けの膨脹を測らざるべからず、然るに膨脹計の係数を知るには少くとも一つの液体(例へば水銀)の眞膨脹係数を豫測し置くの必要あり、此目的を達するには第一九二圖の如き連底管に水銀を容れ



兩管 A, B を異なる温度 t_1, t_2 に熱したるときの水銀柱の高さ h_1, h_2 を測定すべし、其時の比重を夫々 σ_1, σ_2 とすれば液壓釣合の條件は

$$\sigma_1 h_1 = \sigma_2 h_2$$

なり、然るに比重は容積に反比例するを以て $\sigma_1(1+\gamma t_1) = \sigma_2(1+\gamma t_2)$ を得、從て $h_1/(1+\gamma t_1) = h_2/(1+\gamma t_2)$ 、依て

$$\gamma = \frac{h_2 - h_1}{h_1 t_2 - h_2 t_1} = \frac{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}{\frac{t_2}{h_2} - \frac{t_1}{h_1}} \dots\dots\dots (6)$$

を得。0° より 100° までの水銀の平均係数は $\gamma = 0.000181$ にして温度増すに従て少量の増加あり

t	γ	σ
0°	0.000179	13.596
20°	0.000180	13.564
100°	0.000184	13.352
200°	0.000189	13.115

一例として氣壓計の水銀柱の高さを零度の値に糾算する法を示さん、1° に於て測定したる氣壓の高さは b にして、之より 0° の時の高さ b_0 を算出するには、水銀及び氣壓計附屬測尺の膨脹係数を夫々 λ 及び α とすれば

$$b = b_0 \frac{1+\lambda t}{1+\alpha t}$$

なり、故に求むる b_0 は

$$b_0 = b \frac{1+\alpha t}{1+\lambda t} \approx b \{ 1 + (\alpha - \lambda)t \}$$

より算出することを得べし、測尺の材料は大抵眞鍮なるゆへ $\alpha = 0.000018$ 又 $\lambda = 0.000181$ 、故に

$$b_0 = b(1 - 0.000163 t) \dots\dots\dots (7)$$

なり。

水銀の眞膨脹係数一度び定まるときは膨脹計を用ひて他の液体の眞膨脹係数を測定することを得べし其法次ぎの如し。先づ膨脹計の頸部の断面一定なるものを取り頸部の最下に起点(第一九三圖)を定め、任意の單位を以て頸上に目盛りを施

第一九三圖



し、器底より起点までの 0° に於ける容積 V_0 を測定することを要す、膨脹計空虛なる時の重さを、起点まで 0° の水銀を充たしたる時の重より減ずれば V_0 を得べし (σ_0 は既知数なるゆへ)、次ぎに若干の水銀を注加し 0° の時目盛を讀みしに V なりしとせよ、而して更に定量すれば注加したる水銀の重さ p を知ることを得べく、從て V_0 より V までの容積を最初定量せし重さを V_0 にて表はしたると同一單位にて表はすことを得べし、從て目盛の單位に相當する容積 v_0 を算出し得べし、即ち

$$v_0 = \frac{p}{\sigma_0(V - V_0)}$$

なり。偕て全水銀を驅逐して其替りに測定せんと欲する液体を膨脹計に容れ温度 0° と 1° に於て目盛を讀みしに夫々 U_0 と U なりしとせよ、然るときは液体の容積は夫々 $V_0 + U_0$ 及び $(V_0 + U_0)(1+\beta t)$ なり、茲に β は器の膨脹係数なりとす、故に液体の眞膨脹係数 γ は

$$(V_0 + Uv_0)(1 + \beta t) = (V_0 + U_0v_0)(1 + \gamma t)$$

より算出することを得べし。

重量膨脹計 weight dilatometer の使用法も稍々此に似たるものなり (第一九四圖)、最初空虛の時其重さを測り、のち之を熱し、曲りたる口を水銀盆中に容るれば器は冷へながら水銀を吸入す、此法を數回繰り返へし器を氷点以下の水銀にて充たし融けつゝある氷にて圍繞すれば水銀は驅逐せられ尙ほ残留せる水銀の重さを p_0 とせよ、然るときは 0° に於ける水銀の容積は

$$V_0 = \frac{p_0}{\sigma_0}$$

なり、偕て器を t° に熱して水銀を驅逐し残れる水銀を定量し p を得たりとせよ、然るときは器の容積は今や $V = V_0(1 + \beta t)$ なり、水銀の比重は $\sigma = \sigma_0 / (1 + \gamma t)$ なり、故に

$$p = V\sigma = \frac{\sigma_0 V_0 (1 + \beta t)}{1 + \gamma t} = p_0 \frac{1 + \beta t}{1 + \gamma t} \dots\dots\dots (8)$$

此式より γ を與へて容器の膨脹係數 β を算出し得べし。 β 一度決定されば他の液体の眞膨脹係數を測定し得べし。

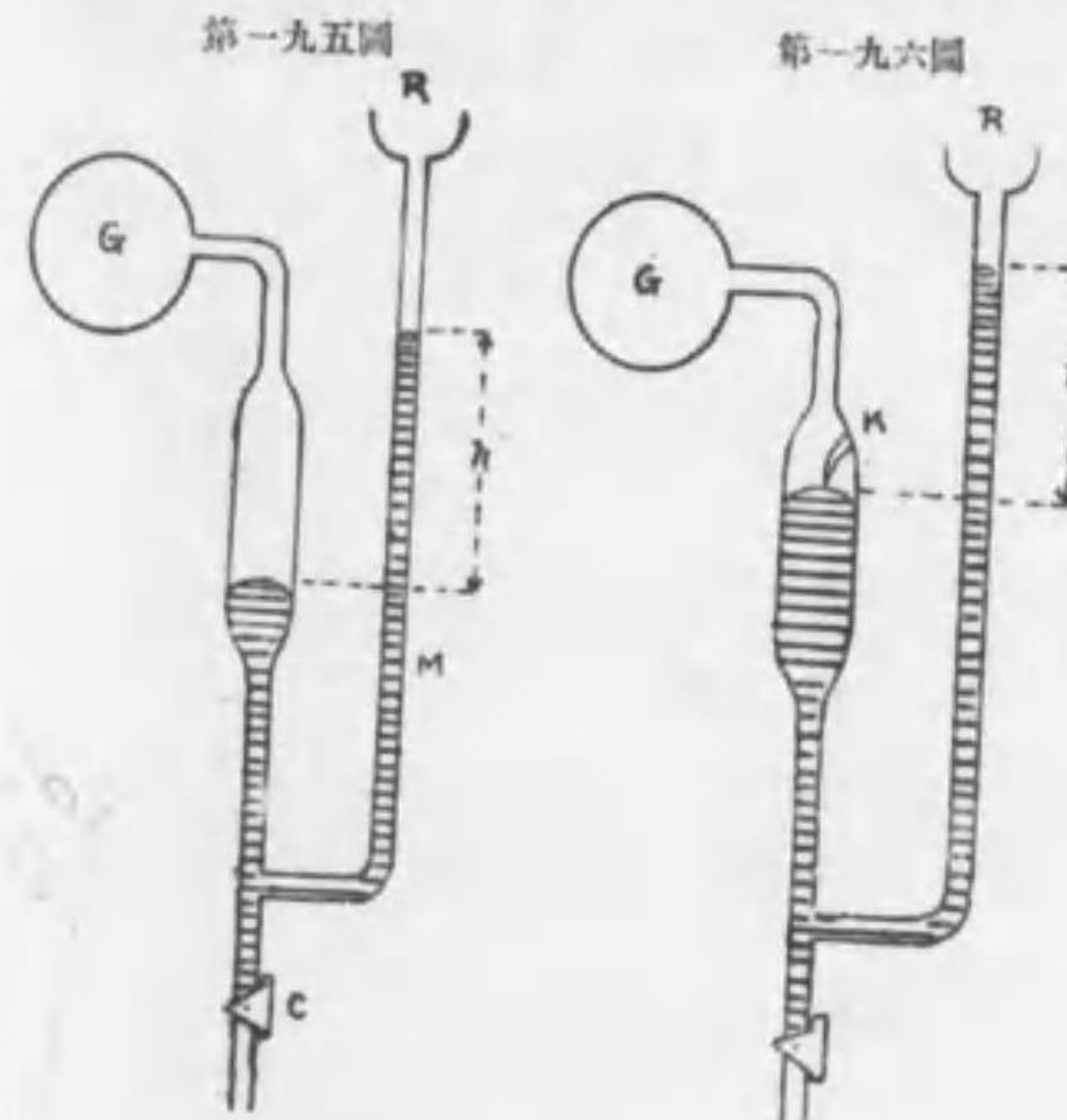
水の膨脹は甚だ奇なり、零度の水を熱すれば膨脹せずして却て收縮を繼續し 4° 附近に於て中止し其より後は膨脹するを見る (Accademia del Cimento 1670)、從て水の比重は 4° 附近に於て最大となる其時の比重を單位と定むるなり、又 0° の時と 11° の時との比重は同一なり。壓力増すに従ひ最大比重に對する温度下降す、即ち 42 氣壓の時は 3.3° 、93 氣壓の時は 2° 、145 氣壓の時は 0.6° なり (Amagat 1893)。水中に鹽類溶解するときも同様に最大比重の温度下降す。例へば海水に於ては -3.5° 附近なり。

115 氣體の膨脹 氣體の容積は温度と壓力との函數なり、温度を一定にし壓力のみを變化するときは氣體の容積は壓力に反比例することは既に §86 に於て學びしところにして此を ボイル、マリョットの法則と稱す。今壓力を一定にし温度を増すときは氣體は此がために膨脹すべし、之を實驗するには第一九五圖の



如く壓力計 M と氣體の容器 G とを連結し不足なる水銀は R より注加し剩餘は C の廻栓にて漏出せしめ水銀柱の高さの差を不斷 h ならしむべし、此と同時に氣體 G を種々異なる温度に處し其容積を測るときは固体液体の膨脹に類似したる結果を得べし、壓力は一定にして之を p^0 と稱し 0° の氣體容積を V_0 とし t° の容積を V' とすれば

$V' = V_0(1 + \alpha t) \dots (9)$
なり、之を **グイリウサックの法則** と稱す (Lambert 1779, Gay-lussac 1802)、 α は膨脹係數にして完全氣體に於ては常數なるのみならず α は他の總べ



ての完全氣體に共通なる値を有す、即ち

$$\alpha = 0.00366 = \frac{1}{273}$$

に等し。液化し易き氣體例へば炭酸瓦斯は 0.00371、亞硫酸瓦斯は 0.00391 なり。

容積を一定ならしめ温度を増すときは壓力は從て増加す、此を實驗するには第一九六圖の如く氣體の容器内に目標 K を設け容積を一定ならしめ水銀を加減して氣體の温度に相當する壓力を測定するなり、 0° の時壓力を p_0 とし t° の時のを p とすれば

$$p = p_0(1 + \alpha t) \dots\dots\dots (10)$$

なり、茲に α は完全氣體に於ては膨脹係數と同一の値を有すれども液化し易き氣體に於ては少量の差あり。(10) 式によりて表示せられたる法則を **シャルル (Charles) の法則** と名づく、此原理に基づき空氣寒暖計 air thermometer を製出

することを得べし。

116 氣體方程式 壓力を p_0 に定め 温度を 0° より t° に至らしむれば容積は V_0 より V' に變ずることは (9) 式示すが如し、今温度を t° に一定し壓力を p_0 より p に變ずるときは容積は V' より V に變ずるものとすれば ボイル、マリオット 則により

$$pV = p_0 V' \dots\dots\dots (11)$$

を得、故に (9) (11) より V' を消去すれば

$$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha t) \dots\dots\dots (12)$$

を得べし、此を氣體方程式 (gas-equation) と稱す。

單位質量を有する氣體の容積を比積 specific volume と名づく、今 0° の時の比積を ω_0 を以て示すときは質量 m なる氣體の 0° に於ける容積 V_0 は

$$V_0 = m\omega_0$$

なり (故に比積は密度の倒數なること知るべし)、之を氣體方程式に代入すれば

$$pV = mp_0\omega_0(1 + \alpha t) = \frac{mp_0\omega_0}{273}(273 + t)$$

を得、此式に依れば $t = -273^\circ$ なるときは $pV = 0$ なり、依て -273° を絕對零度 absolute zero point と名づけ $273^\circ + t = T$ を絕對温度 absolute temperature と稱す、從て上式は

$$pV = m \frac{p_0\omega_0}{273} T$$

と書くことを得べし。今 $p_0\omega_0/273 = R$ と置けば氣體方程式は

$$pV = mRT \dots\dots\dots (13)$$

の形狀となる。

R は壓力と比積との積の デメンション を有するを以て

$$[R] = \left[\frac{LMT^{-1}}{L^3} \cdot \frac{L^3}{M} \right] = [L^1 T^{-1}]$$

即ち速度の平方の デメンション に等し、故に單位質量の運動の エネルギーの デメンション を有するものと考ふことを得べし。 R の數値を算出するには

p_0 を一氣壓と定め ω_0 を一氣壓、零度の氣體の比積とすべし、即ち一平方呎毎に $p_0 = 1033.26$ 瓦の重量、又 ω_0 は比重の倒數にして空氣の比重は $\sigma_0 = 0.001293$ なるを以て、空氣の R は

$$R = \frac{p_0\omega_0}{273} = \frac{1033.26}{273 \cdot 0.001293} = 2932$$

なり。之を絕對法に改算するには $p_0 = 1033.26 \times 980$ ダイン なるゆへ

$$R = 2876000$$

を得べし。又氣體力學説 (§ 110) に於て學びし如く壓力と容積の積は運動 エネルギーの $2/3$ なり (49式を看よ) 即

$$pV = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} Mv^2$$

なり、之を (13) と連結すれば ($M = m$ なるゆへ)

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{3}{2} RT$$

從て $v = \sqrt{3RT}$ なり、此式を使用して分子進行速度を計算し得べし。

117 熱量と比熱 温度異なる二個の物体を接觸すれば熱量 quantity of heat は高温より低温の方へ移動すること恰も水の高所より低所に向て流るゝ如く兩者の温度等しくなるまでは熱の移動は已まざるべし、之を譬ふれば温度は地盤の高低の如く熱量は水量の如く、温度と熱量とは別物なれども十八世紀の中頃に至り英人 ブラック (Black 1728-1799) 出でゝ之を唱道するまでは物理學者は熱と温度との區別に氣附かざりしなり。

熱量の單位として使用せらるゝものに二種あり、一呎の清水の温度を 14.5° より 15.5° に (時としては 17° より 18° に) 上らしむる熱量を單位とし之を呎カロリ (kilogram-calorie) 又は大カロリ と稱す、一呎の代りに一瓦を用ふる單位を瓦カロリ (gram-calorie) 又は小カロリ と稱す。

單位質量の物体の温度を一度上らしむるに要する熱量を比熱 specific heat と稱す、水の比熱は温度上るに從て減少す、下表に示すが如し

$$0^\circ \quad \text{比熱} = 1.0065$$

5°	1.0048
10°	1.0019
15°	1.0000
25°	0.9972
30°	0.9968
35°	0.9975

比熱を測定するに最も有力なる方法は高温度 t_1 の固体と低温度 t_2 の液体とを混合し温度平均して全部 t となるを測るに在り、固体液体の質量を夫々 m_1, m_2 、比熱を夫々 c_1, c_2 とすれば固体が失ひし熱量 $m_1 c_1 (t_1 - t)$ は液体が受けたる熱量 $m_2 c_2 (t - t_2)$ に等しかるべし即ち

$$m_1 c_1 (t_1 - t) = m_2 c_2 (t - t_2) \dots\dots\dots (14)$$

なり、 $m_1 c_1$ 又は $m_2 c_2$ は與へられたる物体の温度を一度上ぐるに要する熱量にして之を熱容量 heat capacity と名づく。上述の理に基づき比熱を測定するには熱量計 calorimeter と稱して薄き金属板にて製したる圓柱の器を使用す、之に定量したる水を容れ其中に寒暖計を挿入し、豫め沸騰しつつある水若くは他の既知沸騰点の液体を沸騰せしめて其蒸氣中に入れ置き熱したる固体を取り之を熱量計に投じて攪拌器を以て内容物を動かし熱の移動を助長す、此際熱量計も固体より熱を受けて其温度は t_2 より t に上るを以て、熱量計常數 E を (14) 式の右側に加へざるべからず、即ち

$$m_1 c_1 (t_1 - t) = (m_2 c_2 + E) (t - t_2)$$

より固体の比熱 c_1 を算出し得べし。熱は實驗中に熱量計より外部に逸する恐あるを以て、之を防ぐには熱量計を コルク の如き熱の不導體を以て圍繞するを常とす。氷熱量計 ice-calorimeter を使用して氷塊を融解する熱量を測定して比熱を計算することを得べし。又固体の比熱の既知なるものを用ひ前法により液体の比熱を測定し得べし。

液体の比熱を概測するには アンドリウ (Andrews) の比熱計 (calorifer 又は thermophore) を使用すれば便利多し、此比熱計は第一九七圖の如く細管の中央に擴張したる部分を有する一種の寒暖計にして中に凡そ 100 瓦の水銀を容れ其上部は真空にして M, N なる上下二個の目標を具ふ、今此を熱して水銀面 N に

第一九七圖



達したるときより冷却の結果として水銀面が M まで降るまでの間に失ひし熱量は幾回實驗するとも常に同一なるべき筈なり、依て先づ比熱計を熱して其水銀面 N に達するとき急に質量 m 温度 t_1 なる水中に挿入して冷却せしめ水銀面が M を通過する瞬間に於ける水の温度を t_2 なりしとせよ、然らば水の比熱を 1 とすれば今失ひし熱量は $m(t_1 - t_2)$ なり、次に他の質量 m' なる液体に就き同一の試験を行ひ水銀面が N, M を通過する時の液体の温度を夫々 t'_1, t'_2 なりとし又液体の比熱を c とすれば此度此液に附與したる熱量は $m'c(t'_1 - t'_2)$ なるを以て

$$m(t_1 - t_2) = m'c(t'_1 - t'_2)$$

を得、之より c を算出することを得べし。

比熱を測定する他の方法は高温なる物体を低温なる空間内に置き冷却せしめ其放射したる熱量と冷却の速度とを測り其より比熱を算出するに在り、此れ輻射熱の題目の下に説くべき事項に屬するを以て後節 (§ 139) に譲る。

金属の比熱と原子量との積は一定にして 6.4 に等しく此を原子熱 atomic heat と名づけ、此法則を デュロン、プチー 則と稱す (Dulong, Petit 1819)。此法則に因れば金属の一原子の温度を一度上ぐるに要する熱量は諸金属を通じて一定なること明なり、然ども非金属に於ては此法則行なはるゝことなし。化合物に於ては分子量と比熱との積即ち分子熱 molecular heat も化合物の部類に従て一定なり (例へば酸化物、塩化物、硝酸塩類、硫酸塩類等の如き部類を云ふ)。

液体の比熱は常に固体の比熱よりも大にして温度と共に比熱増加するを通則とす、従て固体を融解して液体となすときは比熱は突然増加すべし。

氣體の比熱には二種の區別あり、定積比熱と定壓比熱是なり、定壓比熱は常に定積比熱の 1.4 倍なり、是に就きては後節に細説するところあらんとす (§ 150) 氣體の原子熱及び分子熱も部類に従て常數に等しき傾向を有す、氣體に於ては常に定積比熱に原子量又は分子量を乗じたるものを夫々原子熱又は分子熱と名づく。是れ定積比熱の一部は氣體膨脹のために使用せらるれども定積比熱は全部氣體の温度を増すために使用せらるゝを以てなり。

第二章 凝集状態の變化 CHANGE OF STATE OF AGGREGATION

118 融解 固体を取り之に熱を加ふれば温度は次第に増し或一定の温度に達すれば固体は軟くなりて液化し始む、之を融解 fusion 或は液化 liquification と稱す、液化始まりて全部液化し終るまでは温度は液化点即ち融解点 fusing point に常住す、故に液化の際吸収したる熱量は悉く分子凝集の状態を変更するために使用せられたるものにして、各一瓦の固体を悉く液化するに要する熱量を液化潜熱 latent heat of fusion と名づく。融解点の二三の例を擧げば

	融解点
イリヂウム	2200° 以上
白金	1764°
鐵	1520°
金	1062°
ガラス	1000° —1400°
銀	960°
臘	62°
水銀	-38.8°
炭酸ガス	-57°

炭素は未だ液化したることなきも液化点は 3500° 以上なるべしと云ふ。液体を冷却して凝固 (solidification) するときの温度即ち凝固点又は固化点 freezing point は一般に液化点と同一なり、又一互固化作用始まるときは尙ほ熱を奪ふとも其温度は變化せずして先に吸収したる液化潜熱は今や放出せらるべし、水の液化潜熱は甚だ大にして 79.8 カロリ なれども他は下表に示す如く少量なり

	液化潜熱
水	79.8

アルミニウム	77
鐵	30
白金	27
銀	21
水銀	2.8

其他有機化合物は一般に金属よりも大なりとす、然れども無機化合物中にも アムモニヤ 液 108 の如き大なるものあり。

液化の際吸収する潜熱は其物質が固化する時放出するものと全く相等しけれども液化点と固化点とは必しも同一なる能はず、又液化始まるまでは温度のみ變化するを常とすれども粘土性のもの例へば臘又は ガラス の如きは之に熱を加れば未だ液化点に到着せざるに既に体質柔軟となりて液化の準備を爲すを見る。甚しきは液化及び凝固のために温度暫くも常住すること無くして一見液化点と凝固点を決定し難き場合あり、斯る物体に於ては温度變化の最小なる時を以て液化点又は凝固点と見做すの外なし、此見地より固体を通覽するに晶質体のみは液化固化の現象當然として如何にも固体たるの資格を有すれども非晶質 (amorphous) の固体は多少粘土性を帯び液体に類似の点を有し眞の固体とは言ひ難く或意味に於ては過冷状態の液体と同種に分類すべきものなり (Tammann)。

一般に t_0 を液化点とし L を液化潜熱とすれば m なる固体 (質量 = m 瓦) を t なる液体に變するに要する熱量 Q は

$$Q = mc(t_0 - t) + mL + m c'(t - t_0) \dots\dots\dots (1)$$

なり、茲に c, c' は夫々固体液体としての比熱なり。

液体が徐々に冷却するときは温度は凝固点以下に降るも凝固する能はざることあり、此現象を過冷 (undercooling 又は superfusion) と稱す、例へば水は靜なる場處にて冷やせば -3° 乃至 -4° に到るも結氷することなし、水滴を其と同比重なる他の液体中 (クロロフォーム と 巴西香油の混液) に懸垂せしめて外來の微動を防止するときは -20° まで過冷せしむることを得べし (Dufour)、又硫黃の液化点は 119° なれども鹽化亞鉛の溶液中に置くときは 50° に冷ゆるも尙ほ液狀を保つと云ふ。過冷状態に在る液体は之に微動を與へるか或は同種物体の

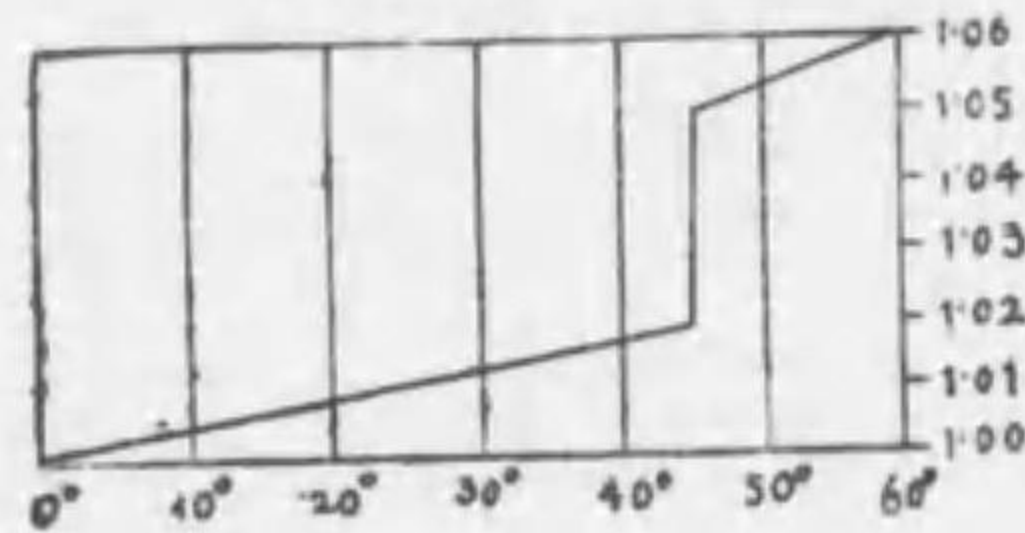
固体の一片を投入れば突然凝固して潜熱を放出し温度は凝固点に昇るを常とす、然れ共過冷の時間長きに過るときは凝固点まで昇る能はざる場合多しとす。

氷、蒼鉛 (bismuth)、 アンチモニー 其他或合金は液化すると共に其容積減少す、然れども此は寧ろ除外例にして大多数の物体は皆液化と共に其容積を増大するを以て通則となす、下表に容積変化を示す

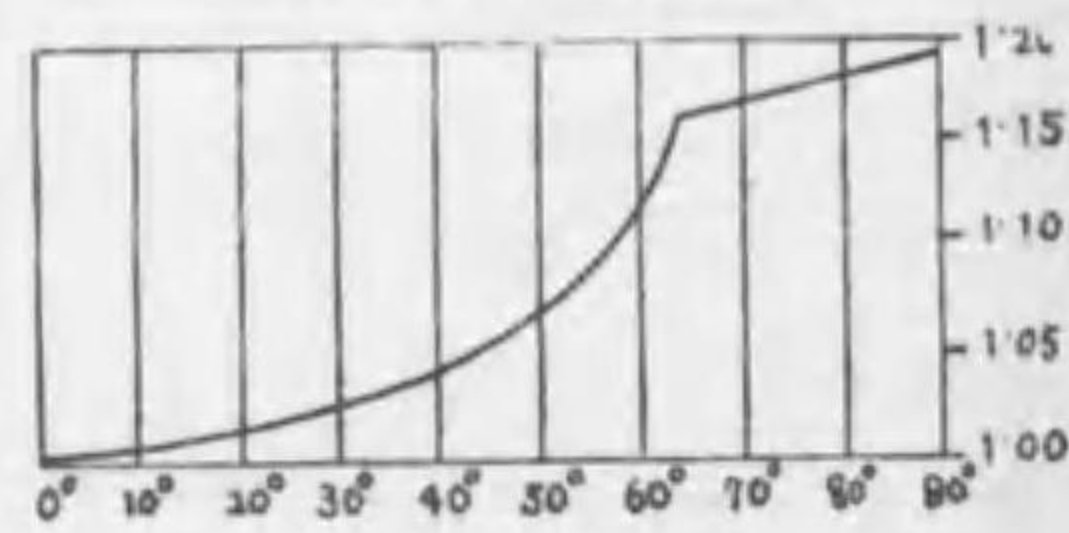
収縮する物体		膨脹する物体	
氷	9.1 %	鉛	3.4 %
蒼鉛	9.3 %	水銀	3.7 %
		鉛酸	12.6 %

又多数の物体に於ては膨脹は温度に正比例するを通則とすれども粘土性のもの例へば臘は融解するまでは容積は加速度を以て増加し悉く液化してのち温度に正比例す、第一九八圖は燐の液化前後の膨脹を示す、横軸は温度にして縦軸は容

第一九八圖 — 燐の膨脹



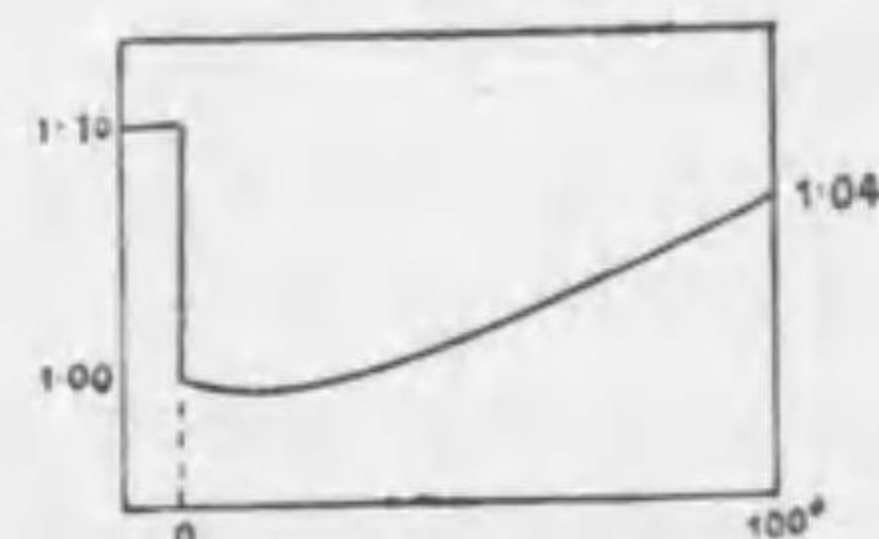
第一九九圖 — 臘の膨脹



積、又液化点は 44° なり。第一九九圖は臘の膨脹圖にして液化点は 64° とす。

水は常則に反し液化の際収縮するを以て、逆に水を結氷 (congelation) せしむるときは膨脹して其容積は 100 より 109 に躍進す、又零度以下の氷塊を取り之を徐々に熱すれば 第二〇〇圖の如く 0° に於て収縮し 4° 以後は次第に膨脹す

第二〇〇圖



れども 100° に熱するも其容積は氷たりしときの容積に及ばず、故に氷片は沸騰しつゝある水の放面に浮ぶ理なり。

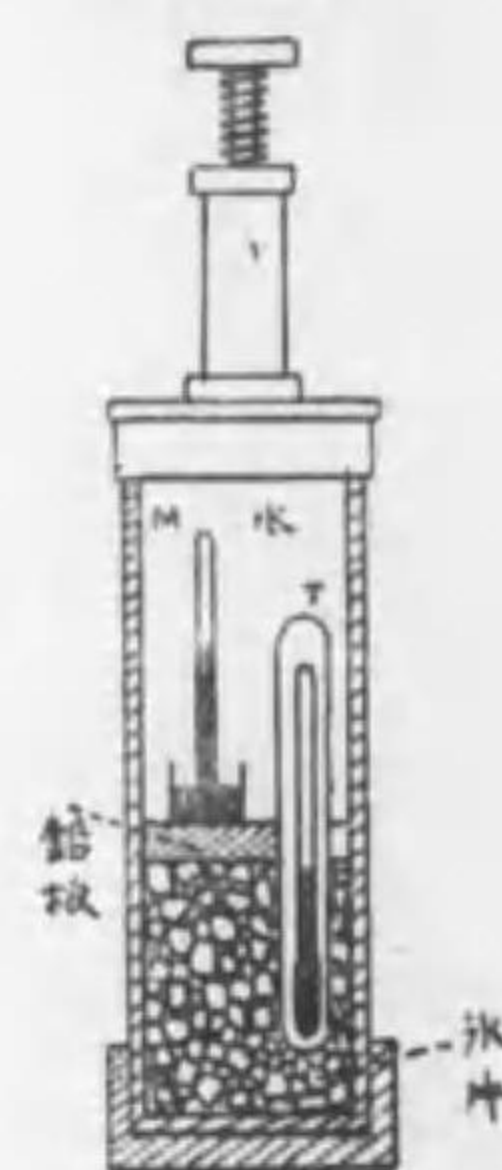
物体の融解点是不變のものに非ずして氣壓の大小によりて多少の變動あるを免れず、液化して収縮する性質の物体は

(例へば氷) 其物体が受けつゝある壓力を増加することに依て収縮を助長する傾向あるが故に其融解点は壓力の増加に伴ふて下降すべき理なり、又此に反對なる性質の物体に於ては融解点は上昇すべし (J.Thomson 1849, Clausius 1850)。氷の如きは一氣壓の代りに二氣壓の下にて實驗するときは其融解点即ち氷点は 0° より -0.00753° に降るなり、今壓力を p とし融解点を t₀ とすれば一氣壓毎に 0.00753° 下降する事實を次ぎの式にて示すことを得べし

$$-\frac{dt_0}{dp} = 0.00753^\circ \dots\dots\dots (2)$$

此を實驗せんと欲せば § 74 に説明したる ビュヅメーター (壓縮計第一〇圖) と同一の装置を作り (第二〇一圖) M なる壓力計の外に尙ほ寒暖計 T と氷片

第二〇一圖



とを容れ然るのち外部より壓力を加ふるときは氷片が液化するときの温度と壓力とを測り得べし、茲に使用する寒暖計は水銀の代りに エーテル を用ひ一度の 100 分の 1 以下を読み得るものならざるべからず、又寒暖計は壓力によりて エーテル 液の容積を變ずる恐れあるを以て之を防ぐために密閉したる ガラス 管中に藏むべし。此装置により ケルビン (Kelvin 1850) は次の結果を得たり。

氣壓	實測したる氷点	計したる氷点
1	0°	0°
8.1	-0.059	-0.061
16.8	-0.129	-0.126

此に關する理論は クレベイロンの方程式を (§ 157) 參考すべし。

二つの氷塊を取り互に壓合へば氷点降るがゆへに氷塊間の表面は液化して其間隙を充たし、力を除去すれば其氷は凍りて二塊を連結するに至るべし此現象を復氷 regelation と名づく、雪球又は雪達磨を製するには復氷の理を使用す、氷河の氷塊は流水の如く流るゝも (其速度は甚遅くして一日に 35 哩よりも速なるは稀なり) 畢竟氷塊が互に合離して復氷作用を遂ふし氷塊間に合著力生ずるに依るものなり、又雹の發生も高空中に密集せる雪片の風に揉まれて復氷するに由るも

のならん乎。又加奈太人は復氷を利用し、セント、ラウレンス河の結氷を組合せて家屋を作り冬期の娛樂に供すと云ふ。

液化の際膨脹する性質を有する物体に就き壓力と液化点との關係を測定せんと欲せば プンゼン (Bunsen 1857) に従ひ 第二〇二圖 の如き一端 U 字形に曲りたる堅牢なる ガラス 管の D には吟味せんとする 固体を容れ、CB に水銀を充たし上端 A に空氣を容れて全部を 密閉したるものを用ふべし、A の空氣は壓力計の役を務むるもの ならば AB には精密なる目盛を附し置き、俯て管の下部と D に 藏めある固体の液化点よりも高き温度の熱湯中に挿入すれば固体 は液化し同時に水銀は膨脹して壓力増加す、其後は熱湯の冷却す るに任かすときは D は固化し始む、其時の温度と AB の壓力と を測るなり、BC を熱湯中に容るゝ深さの大小により種々異な りたる壓力に對する融解点を觀察し得べし。

第二〇二圖



119 氣化 vaporization 液体又は固体の表面の分子の氣体に變ずるを蒸發 evaporation と云ひ發生したる氣体を蒸氣 vapour と名づく (蒸發し易きものを揮發性 volatile なりと云ふ)。今開口を有する器に液体を盛り器底より熱を加ふるときは最初器壁に附着したる氣体は膨脹して液中を騰り又液の放面より蒸氣蒸騰するを見る、放面附近は飽和せるを以て蒸氣は直ちに雲霧狀の泡沫に變ずるも更に上れば泡沫は消へて完全なる蒸氣となるなり。器底にて熱せられたる液は流動して上向すれば其空處を充たさんがために温度低き液は下向して茲に對流 convection current を生ず斯して全部或温度に接近すれば器底に於ては蒸氣は液の内部に發生し其浮力によりて液中を上昇しながら其容積を減じ未だ放面に到着する能はずして消失す、此現象は暫時繼續せられ其間熱湯は好音を發することは人の克く知るところなり、其上昇しながら消失するところの泡狀蒸氣は自ら消失することに依て其氣化熱を途すがら接觸する液体に讓與するものなり、故に今や對流に依らずして液体全部に熱量を分配することを得べし。斯の如く上部も下部と同様の温度に熱せられたるときは上昇する泡狀蒸氣は其容積を縮少することなく却て液壓減少のために其容積を増大し放面に於て破裂するに到るべし、此現象

を沸騰 (ebullition 又は boiling) と稱し、其時の温度は一定にして之を沸騰点 boiling point と名づく。

液体の内部に於て蒸氣が發生するには器壁に多少の空氣其他の氣体が吸着して存ずることを必要條件となす、若し吸着氣体を豫め悉く拭ひ去るときは沸騰点以上に過熱するも液体は沸騰を始むること能はず、恰も先に學びたる如く過冷液体が凝固の機會を失ひたると一般なり、此際吸着氣体を有する固体の一片を液内に投入するときは突然沸騰は開始せられ、其と同時に温度は沸騰点に降下す。

蒸氣が器底に近かり液内に發生するには少くとも其張力 tension (蒸氣が有する壓力を張力と云ふ) は一氣壓と液壓との和に耐へざるべからず、即ち沸騰しつゝある液体の放面に於て破裂する氣泡の張力は少くとも一氣壓に等しきことを要するなり。従て氣壓の増減により沸騰点も少量宛上下す、尙其外に使用せる器の形狀及び蓋の重さ等によりて少許の差あり。下に示すは一氣壓の下に測りたる沸騰点なり

	沸騰点
硫黄	444.7°
水銀	357.25
水	100
エーテル	34.6
炭酸ガス	-78.2

壓力と沸騰点との關係を示す簡易なる實驗法は 第二〇三圖 に示す如き管内に

第二〇三圖



(沸騰管 pulse glass) 水と水蒸氣とを封じたるものを使用す、A 球を握れば体温にて熱せられ水の全部は B 球に追はれ球内に於て沸騰すべし、是れ内部壓力甚だ少きを以て沸騰点低きがゆへなり。又 3736 米なる

富士山の頂にては氣壓少きため水は 83° にて沸騰し其以上に熱する能はず、蓋の重きものを用ふれば其以上に熱し得べし。他の例は蒸汽機關の發展史に關係ある パパン の釜 (Papin 1681) なり、之は密閉したる鐵器にして温度百度以上に熱するも水の沸騰を防壓し得る裝置なり、釜は密閉しあるを以て内部壓力は數

氣壓に上げらしむることを得べし、ババン は此に安全弁 safety valve なるものを附加して壓力を調節せり。一般に山の高さを測定するには § 112、第一八五圖に示す沸騰点寒暖計 boiling-point thermometer, hypsometer を以て水の沸騰点を定め氣壓表を参照して其沸騰点に對する壓力を知れば直ちに § 90 に於て説明したる方法（第二十の方程式）により山の高さを算出することを得るなり、瑞典國の地理旅行家 スゼン、エヂン も一本の沸騰点寒暖計を携へて タクヤマカン 高地 トランスヒマフヤ山嶺諸点の測高を仕達げたるも全く此法に據れり。

液体沸騰中は温度は沸騰点に常住す、是れ液体が吸入する熱量は悉く状態變化のために使用さるゝが故なり、一瓦の液体を氣化するに要する熱量を氣化潜熱 latent heat of vaporization と稱す、液体は如何なる温度に於ても其表面より蒸氣を發生し、其蒸氣は其温度に相當する張力を持つべき管なるを以て液体が蒸氣に變ずるまでには自体を擴張せざるべからず、液化潜熱は畢竟此仕事を奏するに使用せらるる熱量なり。固体が液化するに當りては分子は單に分子間の束縛を脱する丈の仕事を選ぐるのみにて充分なれども、液体が氣體に移るには液体分子間の合著力 (cohesion) に抵抗するのみならず尙ほ外部より働ける壓力に抵抗するの必要あること上説の如くなるを以て氣化潜熱の量は液化潜熱よりも遙に大なるべき理なり。

氣化潜熱を知るには通常蒸氣を液化する際放出せらるゝ熱量を測定するなり、此際氣化潜熱と等量なる熱量を放出すべし、今 t_1 を質量 m なる蒸氣の温度とし、氣化点を t_0 とし、 t_2 を液化後の温度とすればは

$$cm(t_1 - t_0) + mL + cm(t_1 - t_2) = Q \dots\dots\dots (3)$$

は上述の變化を選ぐるために放出したる全熱量 Q にして、 L は氣化潜熱なり、又 c は液体及び蒸氣としての平均比熱なりとす。水の氣化潜熱は レニヨウ (Regnault) に従へば

$$L = 606.5 - 0.695t \dots\dots\dots (4)$$

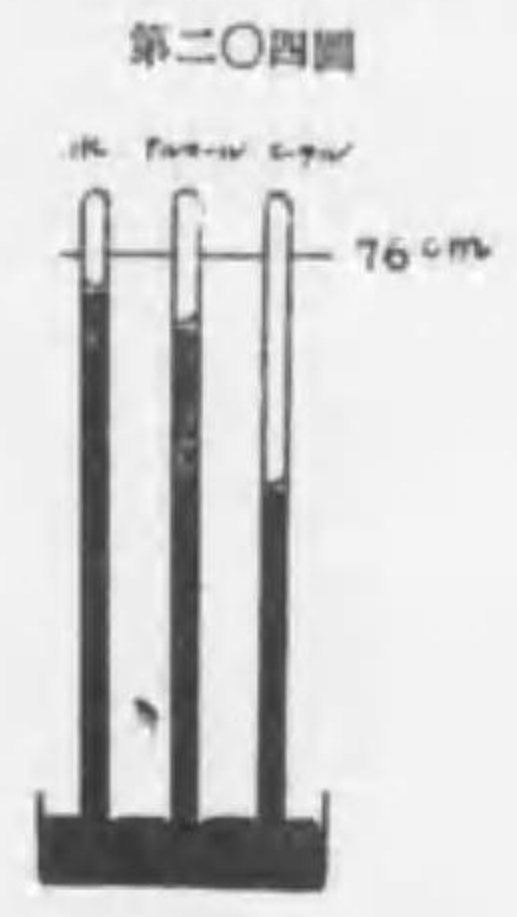
によりて與へらる、故に沸騰の場合には $t = 100^\circ$ と置き

$$L_{100} = 536.5 \text{ カロリ}$$

を得べし。各自沸騰点に於ける氣化潜熱の二三を擧れば下の如し

水銀	L=67.8
硫黄	362
酸素	51
窒素	47.7

120 真空内に於ける氣化 vaporization in vacuum 一端閉ぢたる三本のガラス管を取り氣壓計の如く水銀を入れて倒せば水銀盆中に樹つれば何れも水銀柱の高さは 76 糎附近なるべし、今管内に水銀を入れるゝに當り夫々水 アルコール、エーテルの少許を附加して倒せば建つときは トリフエリ 真空は夫々此等の蒸氣を以て充たされ水銀柱の高さに不同を生じ 第二〇四圖 に示すが如く 76 糎の高さに上らずして夫々 1.75 糎、4.45 糎、43.33 糎の不足を示すべし、但し此時の温度は 20° にして各管水銀面上には各液の未だ蒸發せざる殘餘を存するものと假定す。此等高さの不足は畢竟各蒸氣の張力を水銀柱の重



第二〇五圖



さにて表はしたるものに相當し、一氣壓を 76 糎とせば 20° の時に水蒸氣、アルコール、エーテルは夫々 1.74 糎、4.45 糎、43.33 糎の張力を有することを示すものなり。又柱頭に液体の殘餘を載けるは真空内に於て 20° の時に此以上の蒸氣を保持すること能はざるを證するものなり、即ち真空は此温度に於て此張力の蒸氣を以て飽和 saturate せられたるものにして、其蒸氣を飽和蒸氣 saturated vapour と稱し、其張力を飽和張力又は最大張力と名づく。

次に 第二〇五圖 の如く飽和蒸氣を入れたる管を長形の水銀槽中に挿入し A の位置より B の位置に管を突き入るゝときは蒸氣の一部は液化 (沈澱 precipitate) し、再び A の位置に引出せば従て氣化し毫も水銀柱の高さに差違を生ずることなし、即ち飽和蒸氣の張力は容積の大小に對し無關係にし

てボイル、マリオットの法則に従はざるなり。然れども A の位置より更に管を引出し液体の残餘を一滴も剩さざるに至らば其後は飽和の状態を離れ蒸氣の張力は畧々容積に反比例して變化し従てボイル、マリオットの法則に遵ふことゝなるべし、斯の如き蒸氣を過熱蒸氣 superheated vapour と稱す。再び管を突入れ蒸氣を飽和せしめて後外部より少量の熱を與ふときは水銀柱は忽ち下降す、此れ飽和蒸氣の張力は温度と共に増加することを示すものなり。依て飽和蒸氣に関する次の法則を得

第一、飽和蒸氣の張力は其空間が抱擁し得る最大張力にして、容積の大小に關係すること無く温度上るに従て増加す。

第二、過熱蒸氣の張力は氣體の法則に遵ふ。

是に依て考ふれば通常氣體と稱するものは即ち過熱蒸氣に外ならざることを悟るべし、又飽和蒸氣の張力は温度と共に増すを以て第二〇五圖の蒸氣を熱すれば残れる液は次第に蒸發して遂に残滿無きに到り其後は過熱の状態に入るべし、過熱なる名稱の起源此に依て明かなり。而して氣體は $pV = mRT$ の法則に従て變化するゆへ V を一定に保もつときは氣體の壓力は絶對温度に正比例して變化すれども、飽和蒸氣に於ては V を一定に保つと假定すれば温度増すと共に各分子の運動増加するのみならず一定の容積内に含有する分子の數も蒸發によりて増加するを以て張力の増加は氣體の場合よりも遙に大ならざるべからず。此理に因り逆に過熱蒸氣を冷却し又は其容積を減ずれば蒸氣は遂に飽和状態に達すべし。

未だ飽和せざる真空内に液体を置くときは如何なる温度に於ても直に蒸發を開始し空間が飽和に達するまでは蒸發作用已まざるなり、第二〇六圖に示す氷結器 cryophorus は其内部に水と水蒸氣とを容れて密閉したるものなり、今 A に水を集め B を冷却するときは飽和蒸氣は B 内に沈澱し A に残れる蒸氣は過熱となるを以て直に水の表面より蒸發を始む。此理により A 球の水は漸次に B に導かれ遂には一滴も残らざるに到るか、但しは温度變化の如何によりては氣化熱を奪はるゝために A 内の水は結氷すべし。

第二〇六圖



121 水蒸氣の飽和張力 水蒸氣の最大張力は氣象學に關係あるを以て多くの學者によりて研究せられたり、下表は各温度に對する飽和水蒸氣の張力を夫々水銀柱の高さと一氣壓の單位とにて示したるものなり、此を圖形にて表はせば第二〇七圖の飽和曲線 curve of saturation を得。此曲線は液体の區域と過熱蒸氣の

-30°	0.0280 厘	1/2714 氣壓
-20°	0.0770	1/998
-10°	0.1947	1/390
0°	0.4579	1/166
20°	1.7539	1/43
40°	5.534	1/14
60°	14.95	1/5
80°	35.55	1/2
100°	76.0	1
120°	148.9	1.96
140°	270.9	3.56
160°	463.3	6.1
180°	751.4	9.9
200°	1165.0	15.3
360°	13950.0	183.6

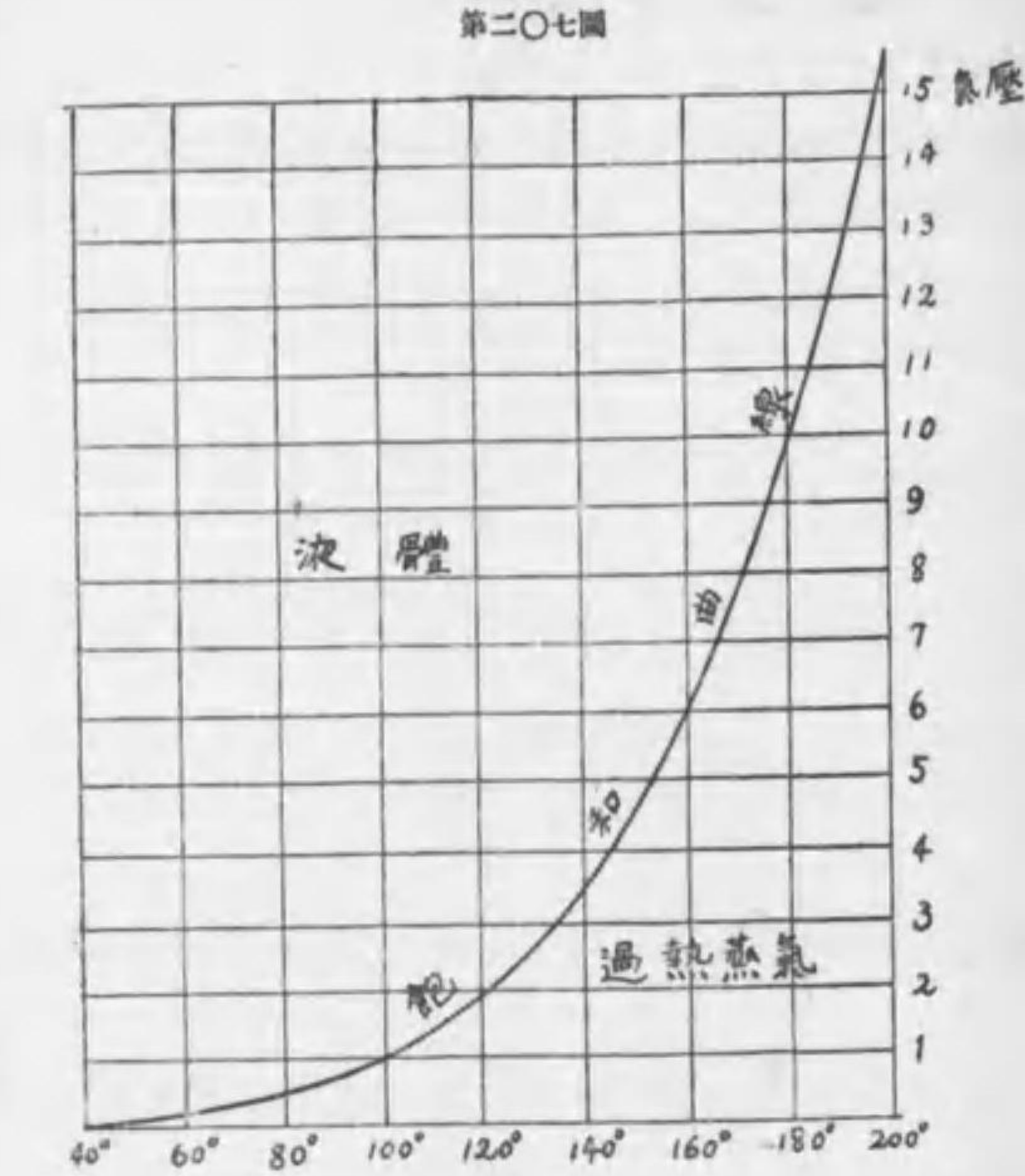
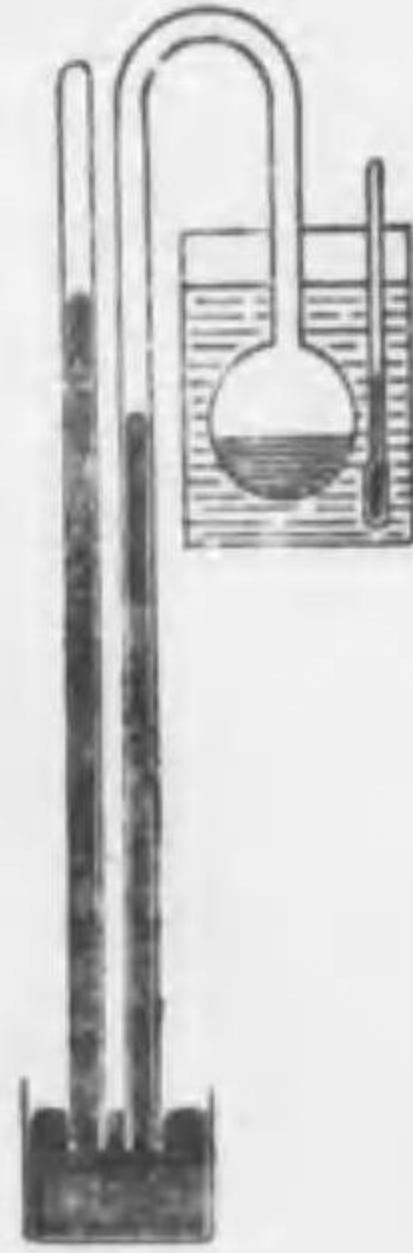
區域の境界を示すがゆへに亦之を液体、蒸氣間の過渡曲線 curve of transition と稱す。

飽和壓力を温度の函數として表示するところの所謂經驗公式 empirical formula は種々案出せられたれども兩者の物理學的關係を教示する方程式は未だ發見せられざるなり。實驗によれば他の物質の蒸氣も總じて第二〇七圖に類似せる飽和曲線を有し一方に於ては液体、他方に於ては過熱蒸氣の區域を分界す。ダルトンは數種の有機化合物に就き次の法則あるを發見せり、曰く各物体の沸騰点より等距離なる温度に於ける飽和張力は相等し、然れども此法則は決して一般的のものに非るを以て其價値甚だ僅少なりとす。

高温度に於ける飽和蒸氣張力を測定する方法は前節に述べたる如くトルフェリ

真空部を所要の温度を有する熱湯を以て包圍して其時の水銀柱の高さを測るに在り。低温度に於ける最大張力を測るには第二〇八圖の如く蒸

第二〇八圖
B A

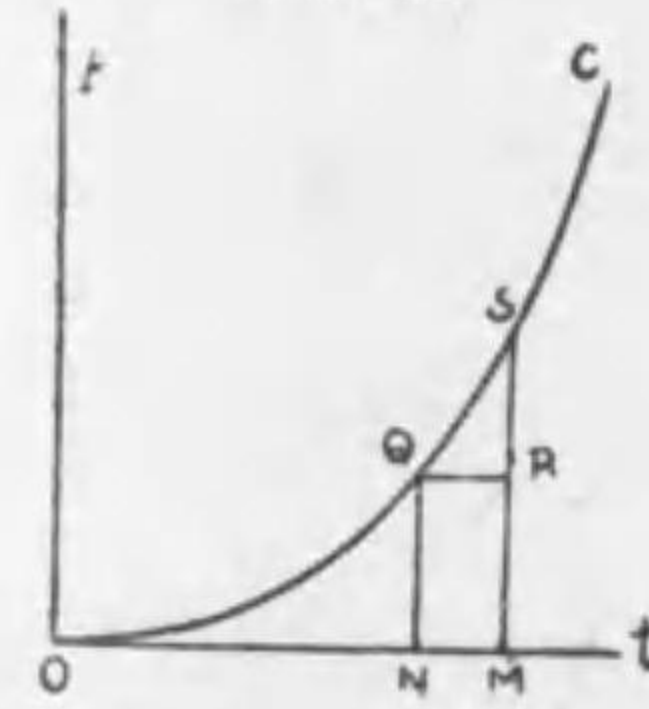


氣を入れたる氣壓計 A の頭部は曲りて其端の腹れて球形になりたる部分を寒劑を以て冷却し其温度を計り、又外部の温度と水銀柱の高さを計るべし、今球内の低温を t とし、水銀柱頭の蒸氣の温度を T とすれば球内蒸氣の飽和張力 p は水銀柱頭の蒸氣の飽和張力 P よりも小なる理なり、従て蒸氣は水銀柱頭上より球内に流れ來りて沈澱すれば柱頭に尙残れる液体よりは蒸發して新しく蒸氣を作り之を球内に送るべし、此運動は柱頭上の液体悉く蒸發し去るまで繼續すべし、其後は球内の蒸氣は飽和状態に在れども柱頭に於ては過熱状態を呈するなり、之にも拘らず球内及び水銀柱頭の隨所に於て t に対する最大張力 p を維持せることは疑ふべからず、而て求むる p は A の水銀柱の高さと他の氣壓計 B の水銀柱の高さの差に等し (各水銀柱の高さは零度の時の値に糾算するを要す)。

122 大氣中に於ける氣化作用 空氣中に於ける氣化作用は真空中に於ける氣化作用と全く同一なる法則に従て行はる、故に如何なる温度に於ても、又凡ての表面より水蒸氣上騰す。唯一つの異なる点は真空中に於ては蒸發は直に行はれ空間は直に飽和さるるも、空氣中に於ては蒸發は徐々に行はれ従て長時間を経て飽和に達す。又沸騰なる現象は液の内部より蒸發する作用なるを以て其蒸氣は飽和し其張力は外部氣壓と内部液壓との和に等しきものなることを要す。故に壓力と沸騰点との關係は最大張力と温度との關係と同一なるを悟るなり。

大氣は水蒸氣活動の大舞臺なれば蒸發作用の氣象學に資するところ甚大なり。空氣は通常過熱状態に在れども、空間内の一点が熱の急劇なる輻射をなす等の理由により遽に温度下降することある時は其附近は飽和状態に入り、蒸氣は沈澱して結露 (dewing) すべし、此時此点の温度を露点 dew-point と稱す、第二〇九圖

第二〇九圖



の OC を飽和曲線とすれば、過熱空間の温度は OM にして蒸氣張力は MR なり、即ち空間の状態は R 点の位置によりて決定せらる、今 R 点の温度急に降りたるものと假定すれば R 点は軸を平行に左方に移動するゆへ早晩 Q 点に於て飽和曲線と交り茲に蒸氣は凝結して沈澱し始む、ON は此時の温度にして即ち露点なり、故に露点が 0° 以下なるときは霜を生ず。

空氣清淨にして塵埃を交へざる時は露点以下に冷却するも結露する能はずして暫く過冷即ち過度飽和 supersaturation の状態を維持することあり、煙其他微細なる塵埃は各々核となりて蒸氣は其周邊に凝結す、故に氣中塵埃の存在は沈澱作用の必須條件を成せり。エートケン (Aitken) は此理を使用し空中塵埃の數を測算する器械 (dust-counter) を製出せり、其主要部は伸縮自在なる小さき箱にして、一端にレンズを備へ箱内を廓大して視るを得せしめ、他の端に緻密に縦横線を刻みたるガラス板附着し其上に蒸氣を沈澱せしめ、各平方内の平均の滴數を算ぶるときは水滴の數は亦同時に塵埃の數に等し、此器械を使用するには先づ内部を淨め次に吟味せんとする空氣を入れて密閉し俄に箱を引伸ばして内部の空氣を稀薄ならしむれば空氣之がために冷却して飽和点に達し蒸氣は各塵埃を

核として結露し滴状を呈するに至るなり。通常透明なりと稱せらるゝ空氣も各立方呎に 500 個の塵埃を含む、遠山霞みて見ゆる程の空氣は 2000 を含有す、大都市の空氣は 200000 のもの稀ならず、都市の街道に於て地上五尺の點に塵埃の數極大なりと云ふ。

123 濕度 humidity 空氣中の水分を濕氣 moisture と稱す。又一立方呎の空氣中に含まるゝ水分の質量を絶對濕度 absolute humidity と名づく、故に絶對濕度は水蒸氣の密度と同一の値を有す。今容積 V 中に質量 m の水分存在するときは絶對濕度は m/V なり、若し此空氣が同溫度に於て飽和に達する程の水分 M を含みたりと假定すれば濕度は M/V に達し得べし、然らば兩者の比即ち m/M を相對濕度 relative humidity と名づく、而して空氣中に現存する水蒸氣の張力を p とし空氣の絶對溫度を T とすれば氣體方程式 § 116 (13) により水蒸氣の式は

$$pV = mRT$$

なり、又飽和に達するまでの途中に於ては氣體方程式に従て變化するものと見做し得べき故、最大張力を P、又其に對する水分の質量を前述の如く M とすれば

$$PV = MRT$$

と書くも大なる誤差なし、依て兩式より

$$\frac{p}{P} = \frac{m}{M} \dots\dots\dots (5)$$

を得、此式素より精確なりと云ひ難し。上式によれば相對濕度 m/M は現存せる蒸氣の張力 p を其溫度に該當する飽和張力 P を以て除じたるものに等しく、又第二〇九圖に依れば MR/MS 即ち NQ/MS に相當す。

p と m との關係を算するには § 116 (12)

$$pV = p_0 V_0 (1 + at)$$

に於て常溫常壓 (0° 及び一氣壓を便宜上常溫常壓と云ふ) の水蒸氣の容積を V₀ とし其質量を m₀、密度を σ₀ とすれば m = σ₀ V₀ なるゆへ絶對濕度 f は

$$f = \frac{m}{V} = \frac{p\sigma_0}{p_0(1+at)}$$

によりて與へらる、茲に p₀ は一氣壓即ち p₀ = 76 厘なるゆへ張力 p も水銀柱の高さにて表出すべし、又 m は瓦にて表はすゆへ σ₀ も亦た水を單位とせざるべからず、常溫常壓の σ₀ は空氣を單位とすれば 0.622 なり而て空氣は水に比して 0.001293 なるゆへ、水を單位とすれば σ₀ = 0.622 × 0.001293 を得、依て前式は

$$f = \frac{p}{1+at} \cdot \frac{0.001293 \cdot 0.622}{76} = \frac{0.00001058 \cdot p}{1+at} = \frac{1.058 \cdot 10^{-4} \cdot p}{1+at} \dots\dots\dots (6)$$

なり。若し p と p₀ を耗にて示し V を立方メートルにて出すときは、上式は

$$f = \frac{1.058 \cdot p}{1+at}$$

に變ず。本式により、p₀ に於ける水蒸氣の張力が水銀柱の高さ p 耗に等しきときは一立方メートルの水蒸氣の質量は f 瓦なり。

相對濕度は常に 1 よりも小なる數にして取扱上不便なるを以て氣象學に於ては此百倍即ち p/P × 100 を單に濕度と稱す、濕度は通常夏は大にして冬は小なり、吾邦にては大なるは一ヶ月平均 90 に近く、小なるは 55 内外なれども極小は北海道に於て零に達したることあり。

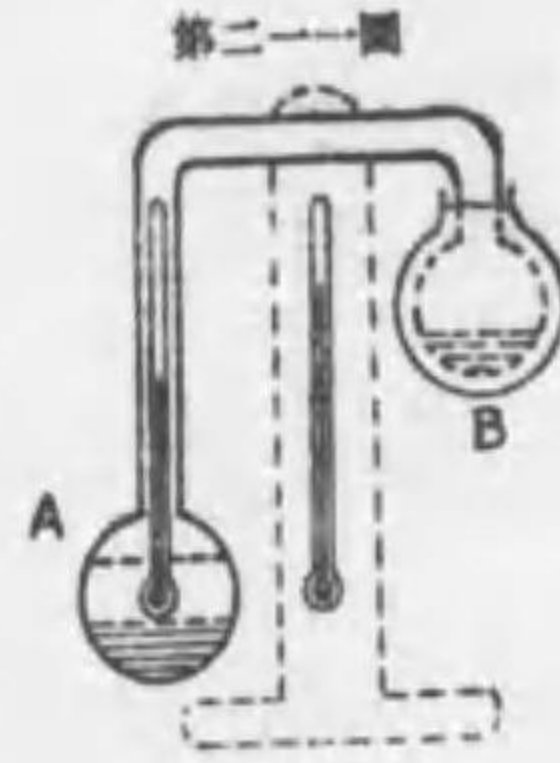
絶對濕度を測るには 第二一〇圖 の如く U 字管に無水鹽化カルキ (CaCl₂)



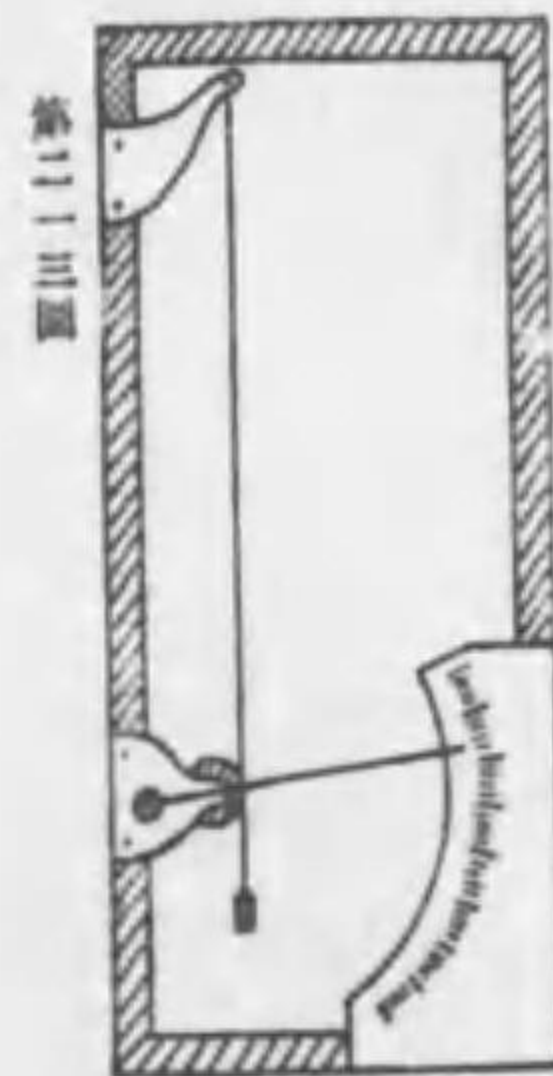
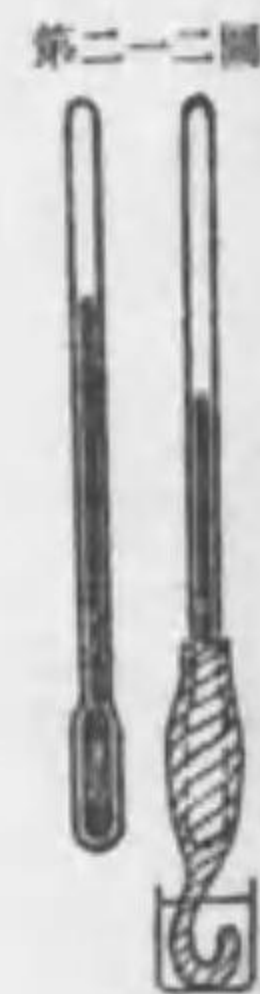
を入れたるものを連ね一端を吸入器 A に連絡せしめ A 中の水量流出するに従て U 字管の他端の口より空氣を吸入す。實驗前後の U 字管の重量の差は吸収したる水分

の質量 m にして流出したる水の量は吸入したる空氣の容積 V に等し故に其商 m/V は求むるところの絶對濕度なり。

氣象學上興味あるは相對濕度なり、之を測るには ダニエル 濕度計 (Daniell's hygrometer 1827) に於ては (第二一一圖) ABC 管は エーテル 及び其蒸氣を以て充たさる、今 B 球を包む布片に エーテル 液を滴下すれば球内の蒸氣は沈殿し球内の エーテル 液の蒸發を促し、其蒸發熱を要するために A 球冷却し球外



附近の空気露点に達し球の外面に結露す、其時の温度を t とし C の寒暖計が示す温度を T とすれば第二〇九圖により $t=ON$, $T=OM$ に相當し、A 球附近の空気は R 点より Q 点に移行したるものなり、依て第二〇七圖に示したる最大張力の圖形により T と t に対する張力 P と p とを知り p/P を算出し得べし (第二〇九圖に於て $P=SM$, $p=QN=RM$ なり)。レニヨーの凝結湿度計 (Regnault's condensation hygrometer) も同理にしてエーテル液中に空気の流れを送りて液を攪拌し以て其蒸發を促し、蒸發熱を要するため其附近の空気が冷却してエーテルの容器面に結露する時の温度を計るなり。第二一二圖 オーグスト湿度計 (August's psychrometer 1825) は全く同一なる二個の寒暖計の一を布片を以て包み布端を水中に浸して調すなり、布片が吸収したる水分は蒸發熱を要求するため其寒暖計の温度は布片を着けざる寒暖計の温度よりも低し、兩温度の差は空氣乾燥の時最甚しく、飽和の時は零なり。温度を夫々 t , t' とすれば $t-t'$ は布片の面積に正比例し、現在の水蒸氣の張力 p と飽和張力 P との差 $P-p$ を常氣壓に糾算したるものにも正比例す、 b を氣壓とし C を常數とすれば



$$t-t' = C(P-p) \frac{76}{b}$$

従て湿度は

$$\frac{p}{P} = 1 - \frac{76}{C} \cdot \frac{b}{P} (t-t') \dots \dots \dots (7)$$

より計算し得べし、 b は氣壓計にて計り P は飽和張力表 (第二〇七圖) より求め又 C は他の湿度計と比較して豫め定め置くべき常數なり、此湿度計は氣象學者、園藝家、製造家等の間に廣く使用せらるゝに拘らず其理論に到りては甚だ漠然として今尙ほ適當に説明

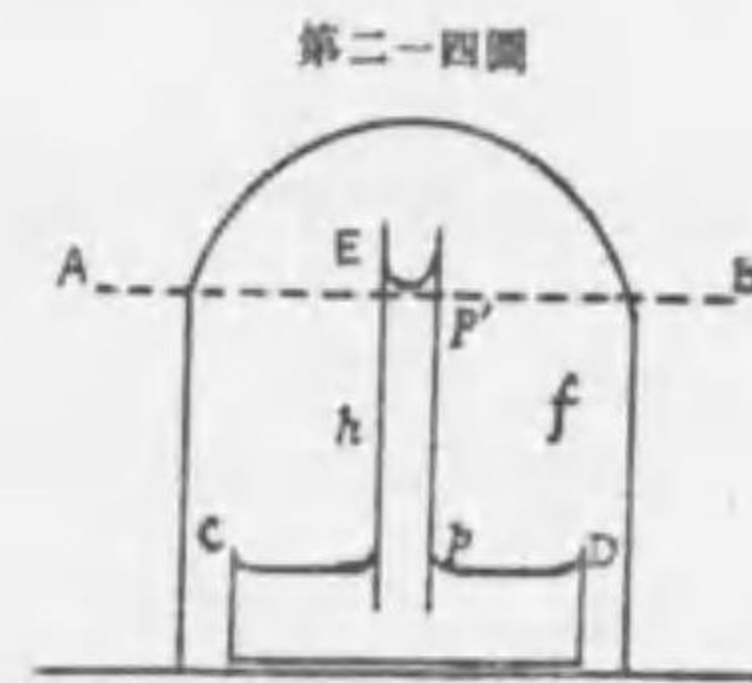
し難し。第二一三圖に示す毛髮湿度計 (Saussure's hair-hygrometer. Sanctorins 十1636) はシャボン水にて久く養て其脂を取りたる毛髮の湿度によりて延長する性質を利用したるものなり、之を飽和蒸氣中に入れば全長の $3/128$ 延長す、日記湿度計は総て毛髮を使用す。目盛を附記するには他の精確なる湿度計と比較するの外なし、又一の毛髮湿度計の目盛は必ずしも他の毛髮湿度計に其儘適用する能はず、試みに一例を掲れば下記の如し

眞湿度	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95	100
毛髮湿度	0	19.6	34.6	47.1	57.7	66.8	75.0	82.2	88.6	94.6	97.4	100

124 液体放面の形状と蒸氣張力との關係

真空内 (二一四圖) に液を盛たる盆 CD を入れ盆内に E なる毛細管を穿つときは液は表面張力のために h の高さになるものと假定せよ、又真空内は液より蒸發せる蒸氣のために密度 f の蒸氣により充たされ、其蒸氣の重量により CD 面に於ける壓力 p は AB 線上の壓力 p' よりも大にして其關係は

真空内 (二一四圖) に液を盛たる



$$p = p' + hf$$

なり、然るに液体の表面張力 σ は毛管内の液を引上げ上向する壓力 $2\sigma/R$ を生ずることは § 102 (29) 式にて學びしところなり、茲に R は E に於ける放面の曲率半徑とす、 σ を液の密度とせば毛管内の液は其重量によりて下向する壓力 $h\sigma$ を生ず、故に管内壓力の合力は $2\sigma/R - h\sigma$ となり釣合の要件は

$$p - p' = -\left(\frac{2\sigma}{R} - h\sigma\right)$$

なり、兩式より

$$h = \frac{2\sigma}{(\sigma - f)R}$$

を得て之を前式に代入すれば

$$p' = p - \frac{2\sigma}{R} \cdot \frac{f}{\sigma - f} \dots\dots\dots (8)$$

茲に p 及び p' は液の放面が夫々平面と曲面を成せる場合に於て其附近の蒸気張力を示すものなり、即ち 第二〇九圖 の如く毛管中の液面凹面なるときは其附近の蒸気張力は CD の如き平かなる放面の附近の蒸気張力よりも小なることを教示す。今此結果を半径 R なる水の球面に應用せんとす、此場合に於ては放面は凸面なるを以て R の符号は負となり又 f は σ に較べて小なるゆへ (8) 式は

$$p' = p + \frac{2\sigma f}{\sigma R}$$

と書くも不可なし、§ 100 の表にある如く水に取りては $\sigma = 73.5$ にして重力單位に換算すれば $73.5/980$ 即 0.075 瓦となり又 $\sigma = 1$ なり、 f は水蒸気の密度にして先に絶対湿度と名づけたるものと同一の値を有し (6) 式によりて算出することを得べし、溫度を 20° と假定すれば § 121 の最大張力の表により $p = 1.7539$ 厘なり之を § 123 (6) に代入すれば

$$f = \frac{1.0582 \cdot 10^{-4} \cdot 1.7539}{1 + \frac{20}{237}} = 0.0000173$$

故に前式は

$$p' - p = \frac{0.0000026}{R}$$

今 R を雲霧の細滴の半径とすれば $R = 0.001$ 厘なるべし、之に代入すれば壓力の差は

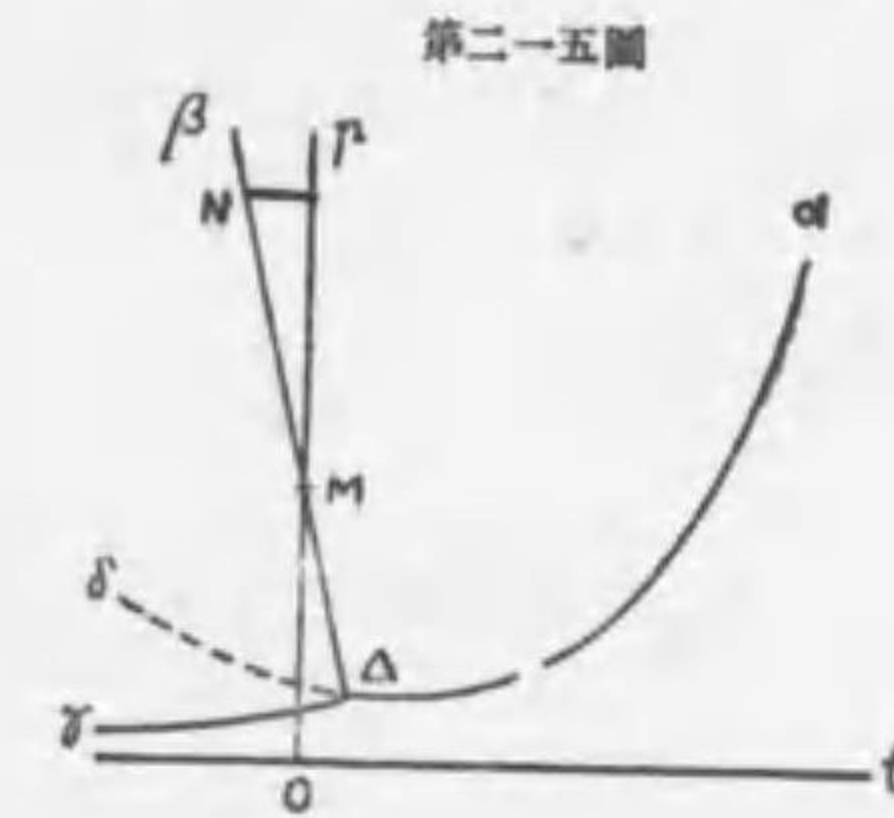
$$p' - p = 0.0026 \text{ 厘の水柱} = 0.0001915 \text{ 厘の水銀柱}$$

となる、更に雲霧の水滴の大きさは光波の長さ程のものとするも $p' - p = 0.1$ 厘なるに過ぎず。之を要するに放面の形状が蒸気張力に與ふる影響は微々たるものにして從來信ぜられし程の効力無きものと評せざるを得ず。

125 過渡曲線 Gibbs 1876 水の飽和曲線は液体と過熱蒸気との境界を形成し直接に甲より乙に又は乙より甲に移るには必ず飽和状態を通過せざるを得ざるを

以て之を過渡曲線と名づけたり (§ 121)。液体より固体に移るにも此と同様に液固兩状態を界する境界線を通ることを要す、此境界線を定むるに一氣壓の下に液化するときは液化点は零度なり。二氣壓の下に液化するには液化点は -0.00753° なり、此二件を材料とし 第二一五圖

の如く溫度を横軸とし壓力を縦軸とする平面上に $t = 0^\circ, p = 1$ (M点)、及び $t = -0.00753^\circ, p = 2$ (N点)の二點を取り兩點を連結すべし、是れ求むるところの過渡曲線にして、之を液化曲線 curve of fusion と稱す、今 Δa 線を以て 第二〇七圖 の飽和曲線を示せば



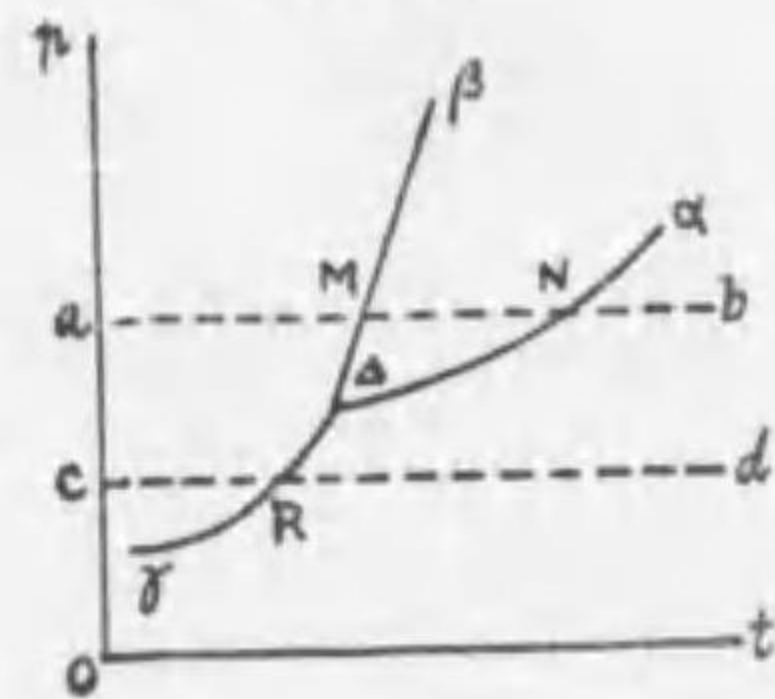
其終点 a は臨界点 critical point なり、液化曲線 $\Delta\beta$ は Δ に於て飽和曲線と交はる、又 § 121 の表に基き零度以下の溫度に對する飽和張力を追寫すれば $\Delta\gamma$ の曲線を得べし、此曲線は一方に於ては過熱蒸氣、他方に固体の兩區域の境界を示すものにして、名づけて昇華曲線 curve of sublimation 又 hear-frost curve と云ふ、三曲線の合点 Δ は三角点 triple point と稱せられ其座標は $t = 0.00753^\circ, p = 0.4579$ 厘 (§ 121 の表、 0° に對する張力 $= 0.4579$)。又昇華とは固体が一頁液体とならずして固体より直に氣化し又氣體より直に固化するを云ふ。水は斯く同時に三個の相 phase を呈し然かも全系統 system は外界と沒交渉の場合には其儘平衡 equilibrium の有様に在ることを得るなり。水、氷、蒸氣の各區域は各一個の相を示し、三本の過渡線は各二個の相を示し、三角点は三個の相を示す。

上圖の $\Delta\delta$ は飽和線の延長にして 0° 以下に於ける蒸氣と液体間の不安定なる平衡に相當する過渡曲線を示し $\Delta\delta$ と $0t$ 軸間の蒸氣は過冷の有様であり (§ 122 を見よ)。又 $\Delta\delta$ が $\Delta\gamma$ よりも上方に在るは過冷蒸氣の張力は氷の表面に生ずる蒸氣の張力よりも大なることを教ゆるものなり。

水以外の物体にして固、液、氣の三状態に存在し得るものは皆前述の曲線に似たる三個の過渡曲線を有し又三曲線は一点 Δ にて會合す。然れども曲線の形は必しも水の場合と同一なる能はずして、液化するときに膨脹する性質を有する物体

に在りては液化点は壓力に伴ふて高くなるを以て $\angle a\Delta\beta$ は水の如く鈍角を作さずして鋭角を作すこと 第二一六圖 に示す如し。次に Δ 点の高低によりて状態變化の趣を異にすることを得べし、例へば

第二一六圖

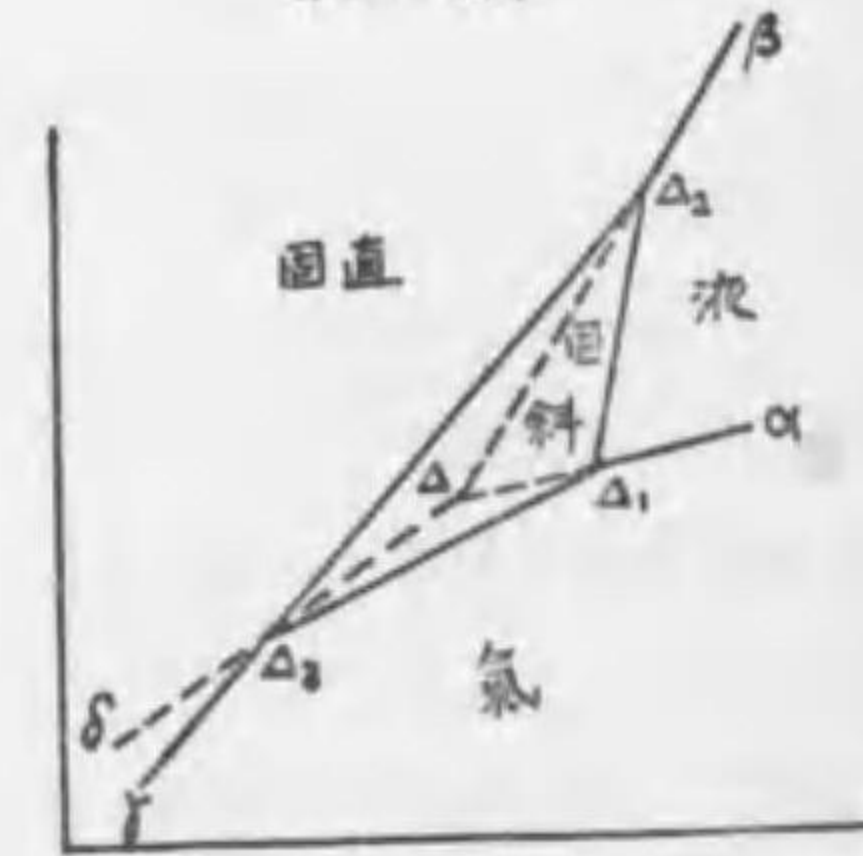


水の場合には Δ に相當する壓力は一氣壓よりも低し、故に壓力を變化せずして温度のみを増すときは ab 線に沿ふて移行し、氷は液化点 M に於て液化し水は氣化点 N に於て蒸氣となる。然るに他の物質例へば炭酸瓦斯の如きは Δ に相當する壓力は 5 氣壓にして温度は -79° なるゆへ一氣壓の空間に於て

實驗するときは cd 線に沿ふて移行し、先づ固体炭酸ガスより始まり温度上るに從て昇華線上の氣化点 R を渡過するゆへ固体より突然揮發し (volatilization) 其中間の液体状態を経ることなし。

硫黄は氣體、液体の外に直菱角系 (orthorhombic or octahedric) 及び斜菱角系 (clinorhombic or prismatic) に屬する二種の結晶として存在することを獲得がゆへに四個の相を有し得るものなり、第二一七圖の連線は各二相より成立する安定なる系統を示し、点線は不安定なる系統を示す、 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ は各三角点にして此裡 Δ_4 は不安定なる平衡に在り。二種結晶間の過渡線は $\Delta_1\Delta_2$ なるゆへ甲より乙に又乙より甲に移るには温度高ければ壓力も大にせざるべからず。

第二一七圖



第二一八圖



昇華作用には常に昇華潜熱を伴ふ、固体より直に氣體に移るには昇華潜熱を吸収し逆に氣體より直に固体に移るには此と同量の熱を放出す、水は其三角点附近に於て昇華するときは其昇華潜熱は一瓦の水を揮發せしむるに要する熱量即ち液化潜熱と氣化潜熱

との和に等しく $79+538=617$ カロリなり、一氣壓に於ける炭酸ガスの昇華潜熱は僅に 142.4 カロリなり、一般に昇華潜熱は温度の函數なり (§ 119 を看よ)。昇華現象を目撃するには 第二一八圖の如き水銀と水と水蒸氣との封入せる壺を用ふ、最初倒置に寒劑中に入れ内部の水を針金の枠の周圍に氷着せしめ置き然るのち圖に示す位置にて底部の水蒸氣を再び寒劑中に冷やして凝結せしむるときは内部の水蒸氣は過熱状態となり蒸氣は氷塊の表面より揮發し氷塊の次第に収縮するを見るべし。

126 溶液の凝固点及び沸騰点 溶液の凝固点は溶媒 solvent の凝固点よりも低し、或場合を除くの外は凝固せる部分は常に溶媒のみより成立するゆへ、凝固点とは凝固したる溶媒が溶液と平衡を得る温度の事を云ふなり。溶液の濃度が飽和量よりも大なるときは凝固始まらざるに溶質 solute の一部は既に溶媒より分離して固化するを見る、之に反し濃度が此限界よりも小なるときは溶媒は溶質が分離するよりも早く凝固すべし、又冷却するに從て溶液は飽和に接近し之がため溶媒と溶質とが同時に固化して含氷塩 (cryosalt 又 cryohydrate) を發生することあり。含氷塩を顯微鏡にて見れば單に氷と鹽の混合に過ぎざるなり。

溶液の濃度大なるに從て凝固点の降る事實は最初 ブラグデン (Blagden 1788) の氣附きしところなり、ラウール (Raoult 1842) に到りて此の種の現象に一般の法則ありて溶媒は單に水に限らず又中性有機物の水溶液にも其法則を使用し得るものなることを確定せり。今 100 瓦の溶媒に一瓦分子 gram-molecule の溶質を溶解したるとき液化点の降下を分子降下 molecular lowering と名づくるときはラウールは次の二法則を定めたり。

第一、同一溶媒を用ふれば總べての有機物及び濃度を變更し得べからざる又化學的分解を爲さざる總べての物質に於て分子降下は常數なり。

第二、溶媒の分子降下を其溶媒の分子重にて除じたるものは水を除くの外は常數なり。

飽和蒸氣の張力も亦溶液の濃度に從て降下す。此に關するラウールの法則は次の如し。

第一、溶媒の飽和張力を P 溶液の飽和張力を P' とすれば同一溶液に於て

第二、

p は常に p' よりも大にして $(p-p')/p$ の値は畧々温度に無関係なり (然れども實驗に徴すれば此分數は温度増すと共に聊か増加す)。

第二、同一溶媒と同一溶質を用ふれば $p-p'$ は濃度に正比例す。

第三、同一溶媒中に種々異なる物質を溶解する場合には瓦分子毎の降下は物質の性質に無関係なり。

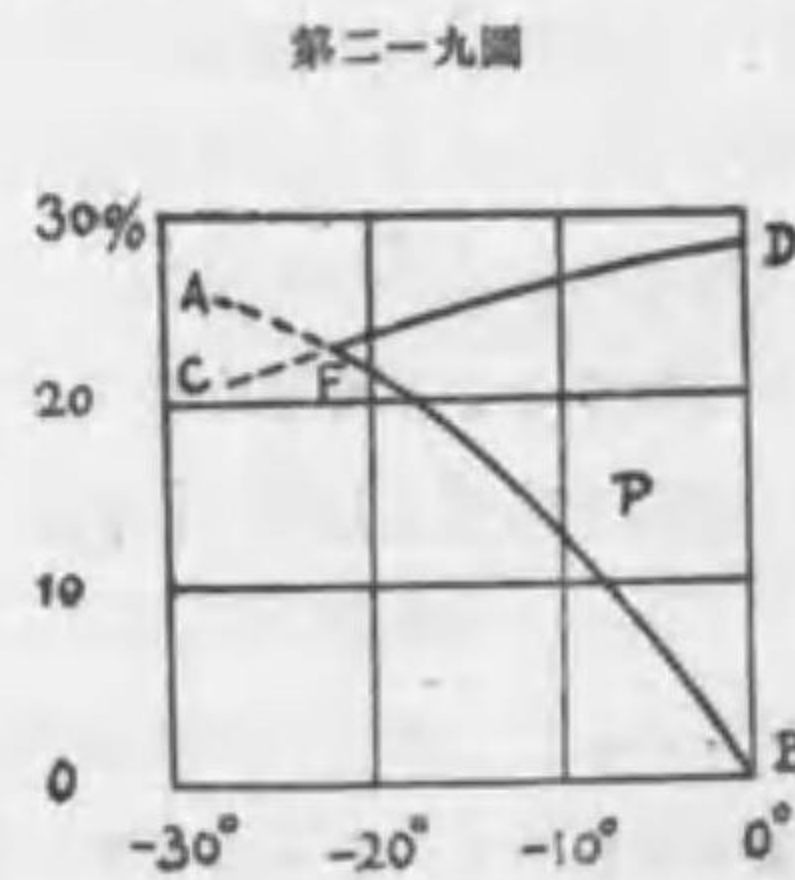
第四、分子降下は大約溶質の分子量に正比例す。

飽和張力減ずれば沸騰点上るべし、故に上記法則は其儘々沸騰点の上昇することに通用す。又 ラウール の法則は液化点又は飽和点の降下を實驗測定して其物質の分子量を算出するに應用せらるゝことあり。

溶液は其濃度増すに従て凝固点降下する理由によりて寒剤の現象を説明し得べし、第二一九圖に於て横軸は温度縦軸は食鹽溶液の濃度を示すときは凝固点の軌跡は濃度増すに従て左方即ち低温に傾くなり。

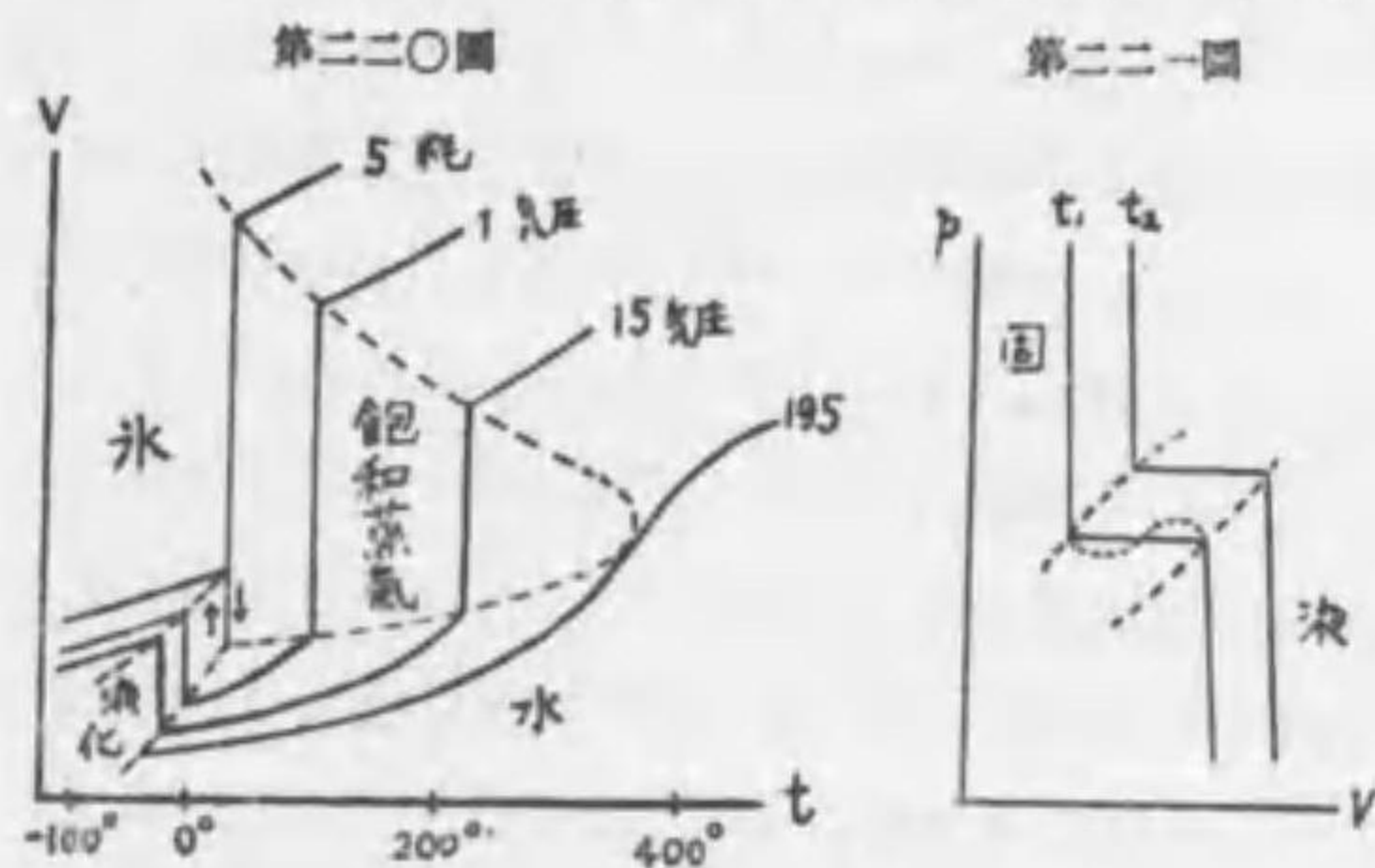
又各温度に對する飽和点軌跡を追寫すれば飽和量は温度下るに従て少し宛減ずるを以て DC の如き線によりて表はさるべし。氷片の表面には液体附着し居るを以て食鹽の一部を溶かし飽和溶液を生ず、其凝固点は 0° よりも低きゆへ 0° の氷片と平衡を保つ

能はずして其一部を液化し同時に温度降る、此がため再び飽和に達せんと欲して溶液は食鹽を溶すべし、斯く最初 B 点に在りし含水食鹽 P は次第に溶液となりて圖面を左方に移行するも BA 線よりも左に行く能はず (固体の區域なるがゆへ) 又 DC 線よりも上に行く能はず (過度飽和なるゆへ) 故に P 点は角 BFD 内に在りつゝ左方に移行して遂に F 点に到着すれば温度は -22° にして濃度は 23.8% なり、濃度を 24 と見れば食鹽 24 と氷 76 の割合に混合して -22° の寒剤を生じ得べし。



127 凝集状態の圖形 凝集状態は温度、壓力、容積に關係するを以て此等三個の量を相互に垂直なる直線上に計るときは茲に生ずる表面は凝集状態を表はすと

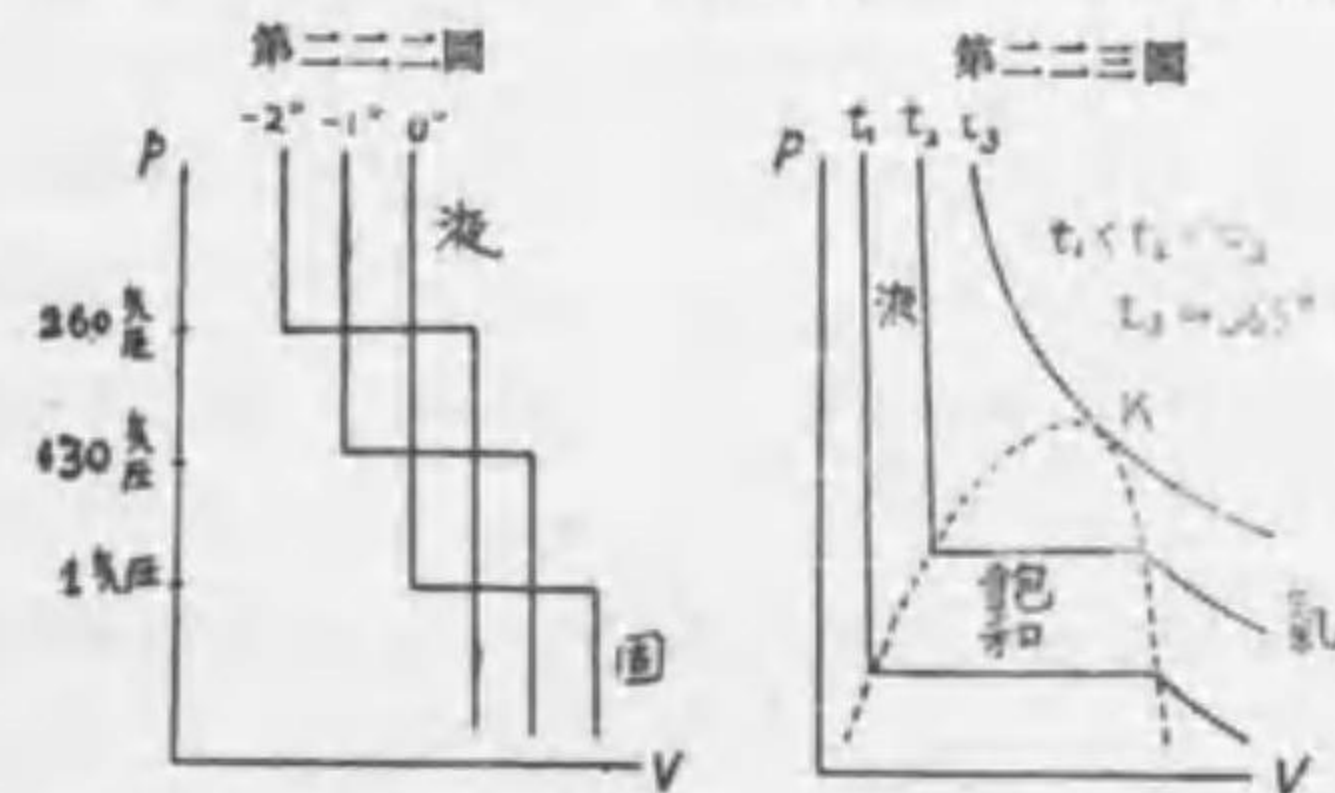
ころのものとなるも表面は空間的なるを以て之を圖面に表はし或は想像するは困難ならず、故に各軸に垂直なる平面を以て之を截斷し其斷面に就て研究するを最も便利なる方法とす、例へば壓力軸に垂直なる平面にて截るときは壓力は常數となり容積と温度との關係を示す圖形を得べし、之を容積圖形 V-t diagram と稱し其得たる曲線は状態表面と平面との交りに相當す此を等壓曲線 isobar と名づく、§ 118 に書きたる三圖は皆等壓線にして一氣壓に對するものなり、第二〇圖は四個の異なる壓力に對する水の等壓線を示す。同様に容積面に垂直なる



平面にて状態面を截斷せば等積線 isometric を得べし、之は壓温圖形なり p-T diagram、又温度軸に垂直なる平面にて截れば壓積圖形 p-V diagram となりて等温線 isotherm

を得。第二二圖は臘の等温線にして ($t_1 < t_2$) 第二二二圖は水の等温線なり、兩圖共融解中は V 軸に平行なれども固体と液体の位置轉倒せり、之れ甲は液化して容積増せども乙は之に反するを以てなり。

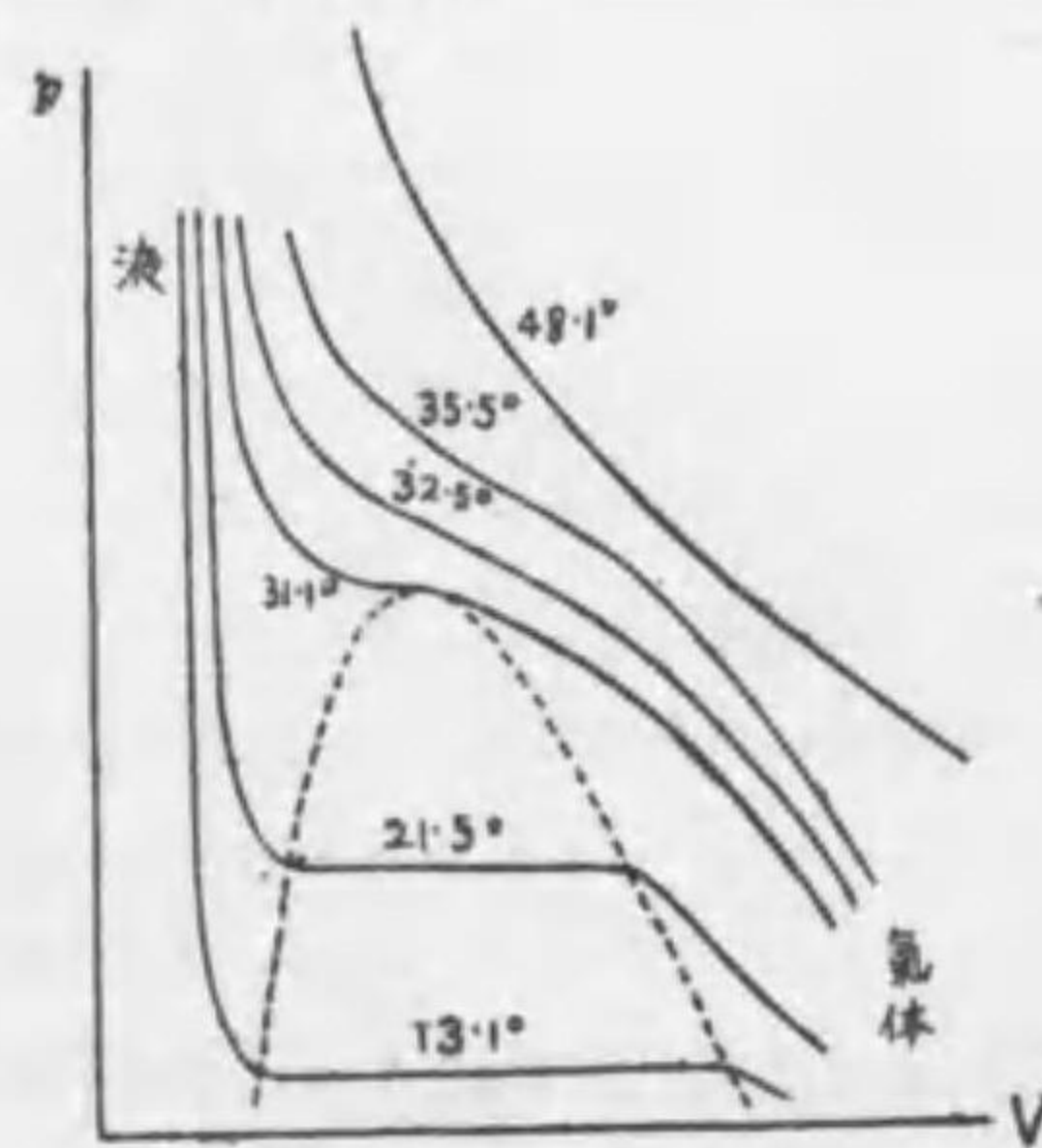
第二二三圖は蒸氣及び液体としての水の等温線にして点線は飽和區域を示す、 365° 以上に於ては飽和に達することなく従て水蒸氣は液化する能はず。



128 氣体の液化 完全氣體の等温變化は ボイル、マリオットの 法則に従ひ $pV = \text{常數}$ なるを以て等温線は雙曲線となるべき筈なれども水蒸氣の如く通常の

温度に於て液化し易きものは 365° 以上に至りて漸く雙曲線に類似すれ共其以下に於ては之を壓縮すれば直に飽和し、飽和中は壓力變更することなく、更に壓縮すれば遂に液化す（第二三圖を見よ）、是れ既に §120 に於てトリチエリ真空内の蒸気の液化によりて學びたる所なり。然らば通常氣體と稱するものは常溫常壓に於ては殆ど完全氣體と稱し得べきなれども冷却と高壓を加へなば遂には飽和して液化するに至るべしとの思想は 1822 年の昔時 カニヤール、ド、ラ、ツール (Cagniard de la Tour) が炭酸瓦斯を液化し其翌年 フアラデー (Faraday) が塩素ガスを液化したる實驗に胚胎せり、其後 ナツテラー (Natterer 1850 年以來) は水素、酸素、空氣を 2790 氣壓の如き高壓に處したるに著しく完全氣體の性質に違反することを確めたり、アマガ (Amagat) も 1873 年以來 3000 氣壓を種々の氣體に使用して同一の事實を教示せり、アンドリウス (Thomas Andrews 1869) に到り炭酸ガスは之を壓縮すれば次第に液化する性質を有すれども所謂臨界溫度 critical temperature (又は際時溫度) 以上の溫度に於ては如何に壓縮するも液化せしむる能はざるものなる事を發見せり、炭酸ガスの臨界溫度は 30.92° なり。カイユテ (Cailletet 1870) は總ての氣體には臨界溫度存在すること又其溫度以上の氣體には一定の壓力の下に可縮性は同一の極大値に達し得ることを唱道せり。而して此壓力以上に於ては殆ど完全氣體たるの性質を發揮するものとす。

第二四圖



第二四圖は アンドリウス が書きたる炭酸ガスの等溫線なり、先づ 13.1° の等溫線を見るに 45 氣壓のとき容積は $14.2/1000$ なり、49 氣壓に上れば容積は $12.2/1000$ に收縮し是より液化を始め液化中は張力變ぜず悉く液化し果らば突然壓力は上昇すべき筈なれども此圖形に於て曲線の婉曲なるは アンドリウスの炭酸ガスは少許の空氣を混ぜしためなりと云ふ。 21.5° の等溫線も殆ど同一

の徑路を取るも飽和の期間やゝ短し。 31.1° に到て其形狀前者と異り壓力を加ふるに從て容積萎縮するは前者の如くなれども 73 氣壓の邊に於て容積は $6/1000$ となり其後は容積 $3/1000$ となりたる頃より前記の等溫線と殆ど同一の變化を遂ぐ、然れ共會て飽和を呈することなく從て液化の痕跡なし、 32.5° 及 35.5° の等溫線も此に類似し漸く 48.1° に及びて通常氣體と稱せらるゝものゝ特性を發揮するなり。アンドリウスの研究によれば 30.92° の溫度は臨界溫度にして此以上に熱せられたる炭酸ガスは如何に壓力を加ふるも液化し能はざるものとす。圖中點線は飽和區域を示し 31.1° の等溫線は臨界點 critical point に於て飽和曲線と切す、臨界點を定むる壓力と容積を夫々臨界壓力 (p_c) 臨界容積 (V_c) と稱す、但し臨界容積は 0° 及一氣壓の時の容積にて臨界時の容積を除じたるものを用ふ。

其後 (1877) カイユテ及ピクテ (Pictet) は 100 立方寸の酸素を取り之を 200 氣壓を以て壓縮し同時に -29° に冷却し突然壓力を減ずることにより酸素を膨脹し膨脹のために更に冷却して管内に泡沫の浮動するを見て之を酸素の液化せるものとなせり、之に引續き他の實驗家は類似の現象を他の氣體に就て目撃したるも現象は須臾にして消失し其果して氣體の液化なるや否やを判定する能はず、漸く 1883 年に及びクラカオ市の Wroblewski 及 Olozewski は酸素、窒素、炭酸ガスの液體を製造し又貯蓄することを得るに至れり、1885 年に空氣も液化せられ九年後英國にて固體空氣を得たり。1895 年以來 リンデ及ハムプソン (Linde, Hampson) は所謂永久ガスを容易に液化し得る方法を發見したり、其原理とするところは凡そ真空に於て膨脹する氣體は氣體分子間の引力に抗して分子間距離を増すゆへ仕事を奏するものなれば、其仕事をなすに必要な熱を自給するがために自體は少しく冷却すべし (之を Joule-Thomson 効果と云ふ) 其少量の冷却を反覆して液化法を完成せしものなり (§149 を參照)。デウワー (Dewar 1892) は真空の間隙を有する二重壁の金屬壺を製して液化氣體を貯藏する法を案出し液化氣體の取扱に便宜を興ふるに到れり。液化氣體を利用して絕對溫度 3° の如き低温を生ずることを得たるのみならず低温に於ける物質の性状は普通溫度に於て目撃するものと大に異なるものあることを發見せり。下表に諸氣體の臨界溫度等を示す ω は臨界點に於ける比積なり。

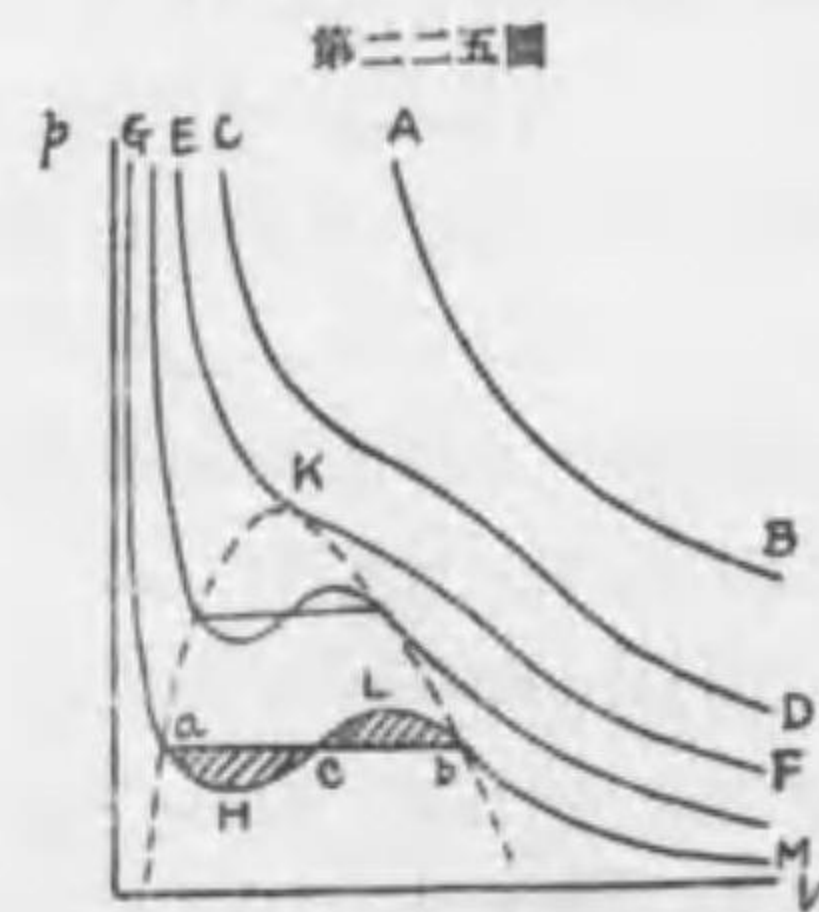
	t_c	p_c	ω
炭酸瓦斯	+ 31°	73 気壓	2.2
酸素	-119°	51	1.5
アルゴン	-121°	51	—
空気	-140°	39	—
窒素	-146°	35	2.2
ネオン	-228°	27	—
水素	-241°	13-15	—
水蒸氣	+356°	195	—
ヘリウム	-267°	2-3	6.7

129 ヴン、デル、グールスの氣體方程式 Van dan Waals' gas-equation アンド

リウスの研究に依れば炭酸瓦斯は高温に於ては其等温線は直角雙曲線 (rectangular hyperbola) に近似すれども (第二二五圖 AB線) 温度低くなるに従ひ等温線は臨界点 K に近き部分に歪を生じ始め

臨界温度以下の等温線 Mb a G は飽和状態を通過するとき b より a までは V 軸に平行に移行し a に到りて全部液化す。トムソン (James Thomson 1871) は アンドリウの研究以前に炭酸ガスは Mb の變化を遂げたるのちは連続的に (即ち同質の状態を維持しつつ) 變化して bLeHa の途を書きて液化し得るものなることを理論的に證明せり、此場合に於ては bLeb 面積は當に eHac の面積に等しかるべし。今 OV 軸に平行なる直線を引くときは AB, CD, EF の如き諸線と各々一回交るのみなれども臨界温度以下の等温線 GHLM の如きは直線の位置次第にては三点に於て交ることを得べし、従て液化状態附近の等温線は V に於て三次の方程式を有する理なり。ヴン、デル、グールス が案出したる有名なる式は

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = mRT \dots\dots\dots (9)$$



第二二五圖

なり、茲に a 及び b は極めて小さき常數なるを以て完全氣體の方程式

$$pV = mRT \dots\dots\dots (10)$$

はグールス式の畧近と見做すことを得べし。氣體が完全なる (理想的なる) 状態より遠ざかりて液化に近づくときは分子は相互に接近し分子引力の影響を蒙り此がため恰も外部壓力を増加したると同一の結果を呈すべし、而して分子引力は分子間距離の六乗に反比例するものとすれば容積の二乗に反比例すと見るも不可なく (容積は長さの三乗に正比例するゆへ) 壓力 p に此分子力 a/V^2 を加へたるものは即ち氣體の擴散性に抵抗する力なり、茲に a は比例常數なり、又 V を考ふるに此は氣體分子運動の區域に該當するものなれど液化に瀕するときは分子稠密し分子自身の總容積嵩りて運動區域は聊か狹隘となる理なり、依て分子の總容積を b とすれば運動區域は $V-b$ となるゆへ、V の代りに $V-b$ と書き、p の代りに $p+a/V^2$ と書くときは (10) は變じて所求の方程式を得べし。

分母を拂へば (9) は V の三次方程式なるゆへ二個の虚根と一個の實根を有するか、或は三個の實根を有つかの二つの場合あり、OV 軸に平行なる線が第二二五圖の GHLM 線と交る点は直線が臨界点 K よりも上方に在れば唯一つなれども下方に在れば三つなり、故に OV に平行なる直線を次第に上方に移動せしむれば三個の交点は相互に接近し、K 点を過るとき三交点は合して一点となる。此点に於ては p は臨界壓力 p_c に等しく V は臨界容積 V_c に等し、即ち V_c は (9) 式の三つの實根が互に等しくなりたる時の値なり。

上述の理に従ひ (6) 式の分母を拂ひ

$$pV^3 - (pb + mRT)V^2 + aV - ab = 0$$

の形となし、三根を V_1, V_2, V_3 とするときは上式と $(V-V_1)(V-V_2)(V-V_3) = 0$ とを比較し

$$V_1 + V_2 + V_3 = 3V_c = \frac{pb + mRT_c}{p_c} \dots\dots\dots (11)$$

$$V_1V_2 + V_2V_3 + V_3V_1 = 3V_c^2 = \frac{a}{p_c} \dots\dots\dots (12)$$

$$V_1V_2V_3 = V_c^3 = \frac{ab}{p_c} \dots\dots\dots (13)$$