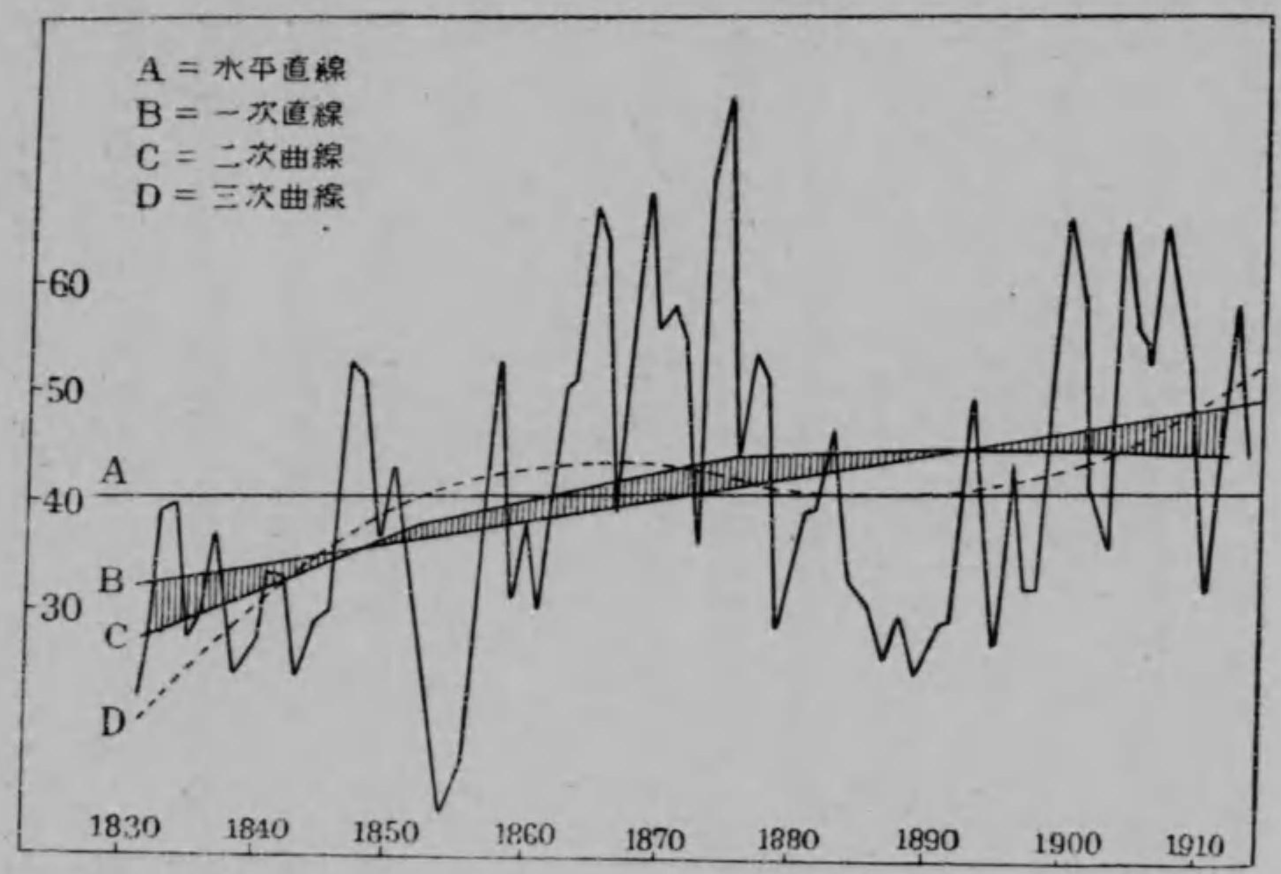
の差」は恆常的と認めてよい事になる。

然るに一系列の長期傾向そのものを求めんとする場合には、その及ぶ期間は當然遙かに長い筈である。從つて假令一般的にすら、傾向線は直線なりと假定する事は許されない。蓋し當嵌められる曲線の形態如何は、直ちに結論に重大なる影響を與へるからである。例へば一國人口增加を示す系列に直線が當嵌められた場合には、當然の結論として年々の增加は原則的には絕對數に於て相等しい、換言すれば年々の增加率は遞減するといふ事になる。併し、若しこの場合、同じ材料について複利線が當嵌められたとすれば、大體年々の增加率は相等しい、換言すれば增加の絕對數は年々增大するといふ異つた結論に到達する。同一材料について斯く異つた曲線を當嵌める事は、數學的には全く自由であるが、併しそれより生ずる結論は全く別個のものである。前例に於て、二つの傾向線に立脚する二つの將來人口の大さは、極めて近い將來に就ては大差はないが、比較的遠い將來に就ては全く別趣の數字を示すであらう。この意味に於て、時系列に於ける傾向線の算出は、傾向そのものを對象とする場合に最も困難な問題となる理である。併し斯く困難に多少の程度はあつても困難の種類に於ては毫も異るところはないのである。即ち問題は第一には當嵌むべき曲線の形態を如何に選ぶべきかであり、第二には更に進んで、各種の曲線當嵌の基礎たる最小自乘法そのもの丶論理的安當性如何を檢討する事である。

第一に、純粹なる統計的傾向線の當嵌は一定の理論的前提によつて行はれるものではなく、全く經驗的方法に據るものであるから、資料のグラフそのもの丶形態が傾向線の形態を暗示せねばならぬ。故に若しグラフに不規則的及び

圖 1



循環的運動少く、且つ全體的に直線を以て進んでゐる場合には、直線傾向線を當嵌める外に方法はない。然るにグラフが不規則な運動形態を示す場合には、直線を當嵌むべきか曲線を當嵌むべきか、又曲線を當嵌むべしとしても如何なる形態の曲線を採るべきかの問題が起つて來る。嚴密に言へばこの選擇に於ては一定の原則的標準は存在しないのである。

上の圖1は一八三〇年より一九一〇年に至るまでの八十年間の佛國葡萄產額に就て直線、二次及び三次の傾向線を示したものであるが、その何れが最もよく長期傾向を代表してゐるかは容易に決定し得ないであらう。言ふ迄もなく斯かる不規則なグラフに就ては、高次の曲線ほどグラフに近似する。換言すれば偏差は小となる。併し高次傾向線が果して適當な傾向値と認められるか否かは甚だ疑問なのである。第一に運動の一般的方向は直線乃至直線に近い線によつて示されるほど明瞭であるから、複雜な曲線ほど不適當だと言ふ事になる。

第二に「長期波動」なる數十年に亘る景氣循環の認められる以上、これと非直線的傾向線とを區別する事が困難になる。長期波動の發見が[註3]一方に於て未知の分野を開拓した效果は認めねばならぬが、他方に於て從來吾人の有する長期傾向の概念を困惑せしめた事も亦疑へないのである。ガーターの如きは「高次曲線を傾向線と認めるか又は長期波動と認めるかは各人の趣味だ」と極言してゐる。[註4]

（註3）　長期波動説は一九一三年丁抹の J. van Gelderen に創り、S. de Wolff を經て Kondratieff によつて完成したと認められる。彼は一七八九年より一九二〇年に至る約百三十年間の英國卸賣物價指數につき、一七八九年—一八一四年上昇、一八四九年まで下降、一八七三年まで上昇、一八九六年まで下降、一九二〇年まで上昇の波動を發見した。彼はこれと類似の波動を幾多の系列に發見し（佛國の棉花消費高、米國の羊毛及び砂糖生產高等に就ては發見し得ず）、西半球に於ては十八世紀末以降二ヶ年半の、卽ち平均五十年乃至六十年に至る長期波動の存在を證明したのである。その發生原因に關しては未だ充分な說明はないが、大體に於て金供給量の變動と一致する事は認められるやうである。Kondratieff—Die langen Wellen der Konjunktur (Archiv f. Sozialw. u. Soziℓp. 1926.). Woytinsky—Das Rätsel der langen Wellen. (Schmollers Jb. 1931). Mitchell—Business Cycles, Chap. III. Sec. III.

（註4）　Gater—ibid. S. 32.

斯くて極めて複雜な曲線、例へばサイン曲線、コサイン曲線乃至フーリエ曲線の如きは、事實時系列の解析に適用されても、その目的は少くとも長期傾向の算出ではない。ヘンリー・ムーア (H. Moore) はフーリエ曲線の當嵌によつて景氣循環の平均的周期を求めんとしてゐるのである。彼の名著 Generating Economic Cycles, 1923 は畢竟この方法によつて各種經濟現象の循環運動の同一性を確認せんとするものである。[註5]

（註5）　彼は經濟現象及び氣象現象に關する各系列の循環運動にフーリエ曲線を適用した結果、兩者の循環周期は八ケ年なるを發見し、同樣八ケ年の運動周期を有する金星の運行に景氣變動の窮極原因を見出したと信じたのである。Generating Econ. Cycles. p. 33. 猶ほ斯かる曲線の詳細に就ては W. Hahn—Die statistische Analyse der Konjunkturschwingungen, 1929. S.S. 169—174 參照

グラフに當嵌めらるゝ數學的曲線の形態に一定の正確な標準の存在しない事は、同一のグラフに同時に數ケの曲線が當嵌められる事を意味する。この場合、その何れも數學的には合理的なるを得るのである。これは恰も同一數列について各種の平均が求められるのと類似してゐる。そして傾向線選擇の標準は、畢竟各人の主觀的判斷に外ならない。數學的曲線はその構成は確かに正確嚴密ではあるが、その論理的妥當性は出發點たる主觀的判斷の當否によつて決定されると言はねばならぬ。

然らばこの主觀的判斷の基礎は何處に求められるか。既にグラフの形態そのものが之を決定し得ないといふ事は、經驗的方法以外に之を求むべき事を暗示するものである。換言すれば斯かる判斷の基礎は、當該系列の運動に關する理論に外ならぬといふ結論に導かれざるを得ない。[註6] 理論なき統計的研究の無效なること、否その不可能なことは、今日遍く認めらるゝところであるが、この事は單に傾向線算出だけからも容易に認められるのである。

（註6）　H. Peter—Grenzen der Statistik in der Konjunkturforschung, 1930.

E. Altschul—Die moderne Konjunkturforschung in ihrer Beziehung zur theoretischen Nationalökonomie (Schr. d. V. f. Sozialpolitik)

然し經濟的運動に關する理論は今猶ほ極めて素朴な階段に在る。社會現象のうち人口の運動形態は最も古くから研究され、從つてその發展樣態に關する理論は精致を極めてゐるけれど、而も絕對に信賴しうる人口發展の傾向線は求め難い。從來發展せしめられた最も合理的と思はれる前揭 logistic curve 就中 Pearl-Reed curve に就て之を證明しよう。

人口增加に一定の極限のあるべきこと、卽ち人口は一定の飽和點を有するであらうことは容易に想像されるところである。吾國に於ても德川時代に既に人口は二千七八百萬人の附近に於て停滯狀態を續けた事は人の知るところである。森田優三氏は崇峻二年より嘉永五年に至る千二百六十一年間の人口につき logistic curve を適用し、計算人口と實際人口との非常な近似を示してゐる。(註7) 然るにこの方法は明治以後の人口に就ては全く當嵌らない。蓋し吾國は明治維新を期として新たなる發展階段に進んだからである。右の方法が合理的に適用される爲には、「人口は初め底軸(時間)に沿つて徐々に增加し、次第に增加速度を增して遂に變曲點に達し、爾後は次第に速度を減じて終に飽和點に漸近する」事が前提である。然るに最近人口增加率が減少し來つたと認むべき充分の理由はない。故に如上の曲線を當嵌めて將來到達すべき飽和點を算出する爲には、今後の增加率の漸減を假定せねばならぬ。上田貞次郞氏は「本邦の婦人の出產力は減退し……人口は八千萬程度で停止するであらう」と言ひ、その時期は今後二十年前後と見てゐる。(註8) その當否は別として、少くとも此種の假定なくしては、本邦人口に對し近い將來に飽和點に到達する曲線を當嵌める事は不可能である。

(註7)　森田優三、「人口增加に關する Logistic Law の概要」(日本人口問題研究、第二輯)

(註8)　上田貞次郞、「日本人口の將來」(同前)

〔註〕 Kuznets は米、獨、英、白、佛の諸國の約五十の經濟系列(平均約六十年に亙る各種產業の發展的系列)に就き logistic curve 又は Gompertz curve の當嵌められる事を發見してゐる。この場合、人口の場合と同じく「一國內の各經濟部門は一定の限界に向つて進むもので、速かれ遲かれその增加は緩慢となる」との理論的前提があるのである。Wesen und Bedeutung des Trends, S. 27—29.

第二の命題たる、最小自乘法の統計的時系列解析に於ける限界の問題は畢竟數理統計學の本質そのものに關する哲學的考案に外ならない。蓋し最小自乘法は蓋然理論に立脚するものであり、同時に數理統計そのものも亦同じ理論を基礎とするからであるが、蓋然理論は單なる數學的問題に非ずして一ヶの哲學的問題である。(註9) 故に最小自乘法の基本問題は概略的に記述する事甚だ困難である。併し本章の主題に關する限りに於ては Anderson の批判を要約せる豐崎稔氏の次の一節を以て略〻充分と思はれる。これはハーヴァード研究所の方法に對する批判としてゞあるが、勿論經濟現象の時系列解析に於ける凡ての場合に妥當するものである。「ハーヴァード研究所は景氣指數の算出に際し、先づ長期傾向値を算出してゐるが、これは確率論の應用に關する最小自乘法を適用してゐるのである。然るに最小自乘法は誤差の確率法則從つて又その適用せられる對象の構成が確率定理の前提卽ちその對象が at random に選ばれ、

それぞれ獨立事象である事を必要とする。而して……認識の客觀性の問題を考へず、技術的正確性について見るも、若し上の假定が充されざれば到底正確なる長期傾向値は算出されない事になるのである。所が景氣現象は歴史的被制限現象であり、從つて at random に選ばれた現象でなく、その現象相互間に獨立の關係のない事から、到底最小自乘法を適用しても、それは正確なる長期傾向値を示し得ない事になると考へられるのである」[註10]。氏は更に認識の客觀性の問題に言及し、與へられた統計的對象（系列値）がその對象の一般の Sample なるや否やは決定されないから、假令技術的正確性は得たところで、認識論的客觀性は得られざるを論じてゐる[註11]。

（註9） Anderson—Zur Problematik S. 24 ff.
　〃 —Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung S. 47 ff.
Peter—Grenzen der Statistik, S. 25 ff.
Kühne—Exakte Nationalökonomie, 1934, S. 182 ff.
Marbe—Grundfragen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung und Theoretischen Statistik, 1934.
Czuber—Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1923.
R. v. Mises—Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, 1928.
（註10） 豐崎稔、「景氣豫測法研究」、一三二頁
（註11） 同、一三七頁以下

第四節　景氣研究に於ける特殊の傾向線

傾向線を決定する爲には、如上の如何なる方法によるも、相當長期に亙る材料を必要とする。然るに極めて短期間の材料しか具はつて居らぬ場合に、猶ほ傾向線の算出を必要とする場合が起り得る。例へばハーヴァード研究所が大戰直後統計的豫測を行はんとした際の如き、戰爭によつて惹起された巨大な經濟的變動は、戰前及び戰時の計數を戰後の狀態と殆ど比較するを許さゞる程度であつたから、從つて戰爭終了後の極めて僅少な時期について統計的解析を行ふ外になかつた。換言すれば戰前の傾向線を戰後にそのまゝ延長する事が出來なくなつたのである。斯かる事情の下に於て、合理的な傾向線を算出し、よつて循環運動を求めんとするのは素より困難たるを免かれぬが、パーソンズは二三の非常手段を考案してこの困難を克服せんと試みたのである。一は關係系列の方法(related statistical series)の方法であり、他の一は水平線の方法である。

(1) 關係系列の方法

一九二三年のハーヴァード指標の商況線（B線）の一系列は景氣に敏感な十種商品價格指數である。然るに同じ經濟現象に關する系列に一般物價指數、即ちブラドストリート社指數がある。この兩者は當然類似の運動を示す筈であり、異るのは單に前後は後者より運動强度が大きいといふ點だけである。パーソンズはこの事實に着目し、前者の後者からの偏差を以て循環運動を示すもの、換言すれば後者を以て前者の正常値と考へたのである。同じ指標の金融線

（C線）を構成する二系列、即ち六〇—九〇日手形利率と四—六月手形利率に就ても同様に、十種鐵道社債利率を示す系列が正常値と認められてゐる。(註1) 併しこれは素より本來の傾向値と認むるべきものではない。パーソンズ自らこれを基線と呼び、傾向線とは言つて居らぬ。

（註1）　關係系列はそのまゝでは基線とならぬ。蓋し兩系列の高さが異るからである。是を修正する爲に、「ブ社物價指數」は一六・五四倍され、「十種鐵道利廻」はそれ〴〵〇・五%及び〇・七五%だけ高められた。

A系列の正常値としてB系列を採用する方法には次の如き假定が必要である。即ちB系列によつて示される變動要因は、A系列の連續的（即ち循環運動に妨げられざる）基本運動を決定するといふ事之である。この假定は價格現象に於ては可成り廣く認められるやうである。カッセル（Cassel）が物價水準の傾向値として相對的金供給量を適用したるが如きはこの適例である。(註2)

（註2）　Kuznets—ibid. S. 11.

右例に於て、金供給量と物價との間に密接な關係のあることは、必ずしも貨幣數量說を全幅的に承認せずとも理論的に認め得るところであらう。關係系列法適用の第一要件は斯かる理論的關係の認識である。單に二系列間の循環運動の周期が同一だといふ理由だけで、一方（强度の弱きもの）を他方（强度の强きもの）の基準と爲すが如きは、全然形式的算法で、實質的な合理性は全く缺如するものである。既に述べたハーヴァード研究所の實例に於ても、この原則は明かに認められる。

併し假令この關係が認められても、若し正常値と爲すべきB系列にも大なる循環運動の含まれてゐる場合にはこの方法は不適當となる。換言すればこの方法が許容される爲には、B系列に對して傾向値算出の必要を認めない程度にその循環運動が微少なるを條件とする。然らざる限りは、A系列の正常値即ちB系列そのもの丶中に猶ほ可成りの循環運動が包含される理で、斯かる不純物を他系列の傾向値と認むることの不合理なるは言ふ迄もないのである。この點から見れば、ハーヴァード研究所の實例は必ずしも適當とは言ひ難い。例へば一般物價指數を以て「景氣に敏感な十種商品價格指數」の傾向値と爲す場合、前者が後者よりも微弱な循環運動を示す事は認められても、この事は必ずしも前者の循環運動が微弱だといふ證據にはならぬ。一般物價指數が、それ自身の傾向値を算出する必要ある程度の循環運動を含むことは、何人と雖も否定し難い。少くともハーヴァード指標に關する限り、この方法は極めて粗雜な結果しか齎らし得ない事を認めざるを得ない。併し若し如上の缺陷が合理的に克服されたとすれば、この方法には意外な長所のある事を忘れてはならぬ。即ち數學的曲線當嵌は、假令曲線の種類は同一なりとしても、計算期間の多少によつて甚だ異る曲線形態を結果するものであるが、この方法に於ては、二系列の循環周期の一致が繼續する限りは、期間の長短によつて妨害される恐れがないのである。併し循環周期が一致せざるに至れば、換言すれば兩者の間に時差（lag）を生ずるに至れば、この方法の基本原理が失はれた理である。

(2) 水平線の方法

この方法も亦前者と同じく嚴格な數學的傾向線を求むるに充分の期間のない場合の便法であつて、且つ前記の方法

を用ふるに充分適當なる關係系列のない時に利用されたのである。前記指標の投機線（A線）を構成する二系列、紐育市內手形振出高及び Dow Jones 工業株價指數について見るに、具はる材料は前者に於ては一九一九年以降一九二三年三月迄、後者に於ては一九一九年以降一九二二年迄しかない。パーソンズはこの二系列につき各々算術平均を求め、その高さの水平線を以て各々の系列の正常値と認めたのである。この場合にも前の場合と同じく、彼は單に基線と呼び、傾向線とは呼んでゐない。(註3)

（註3）一九二七年の修正指標に於てはA線の Barron 產業株價指數につき一九二〇―二六年の複利曲線が基線とされてゐる。即ちこの方法は常に必ずしも水平線に非ざる事は注意を要する。

一切の時系列が必ずしも上昇的又は下降的の發展傾向を示すものでない事は特に言ふ迄もない。自然現象に於ける長期傾向なる概念は多くの場合、極めて悠久な時期についてしか云々し得ない事は始めに述べたが、これは畢竟自然現象には社會現象に於けるが如き意味に於ける發展傾向の存在しない事を意味する。例へば地球は漸次冷却しつゝあると言つても、それは數萬年或ひは數億年に亙る長年月に就てのことで、この傾向を數十年乃至數百年の短時期から認識する事は不可能であらう。東京の年平均溫度は今日と德川時代との間に多少とも認識しうる程度の相違ありと認むべき理由は毫もない。斯かる自然現象は要するに常に一定の原因の作用によつて生ずるもので、この原因は長期に亙つて變化せざるものと假定される。斯かる場合の發展傾向は上昇的でも下降的でもなく、絕えず同一の高さを保つもの即ち時の經過を示す橫軸に平行に進むものと言つてよい。

然るに社會現象に關しては斯かる嚴密な意味に於ける平行的傾向はあり得ない。蓋し社會現象決定要因は多大の程度に人爲的歷史的であり、自然現象に於けるが如き恆常性は認め得ないからである。併し若しその恆常性に關する解釋を緩かにするならば、社會現象に就ても亦平行的傾向を假定する事が必ずしも不合理でなくなつて來る。第一に、一定の强固な統制力下にある現象に於ては、該統制力に變動なき限り、如何なる變動をも示さないか、或ひは少くとも傾向値の變化を示さない。例へば專賣法によつて決定された煙草小賣價格は、少くもその規定の存續する限りは、長期的にも季節的にも何等の變化がない。又二國間の爲替相場は、絕えず變動しつゝあるとはいへ、兩國に完全なる本位制の行はれる限りは、現送點を超えて變動することはない。現送點の上下の限界は極めて狹小であるから、斯かる現象に就ては、長期的變動は無いと言ふのが正しいであらう。斯かる例に於ては、傾向線は上昇又は下降の方向をもたぬもの、換言すれば水平的なものと認めて差支へないのである。

之に反し大部分の經濟系列については斯かる束縛はないから、何れも上方又は下方に發展し、從つて水平的傾向線は認められないのが普通である。然るに假りに極めて短期の期間を採つて見れば、事實に於ては水平ならざる發展傾向の存在する筈であるが、而もその兩端に於ける差は極めて僅かであるから、之を水平線と假定しても必ずしも不合理ではない。この方法が他の方法と共にハーヴァード指標に適用されたのは、數學的傾向線を求めるには期間が不充分だつたからであるが、この期間の不充分な事が、この方法を是認する唯一の理由なのである。であるから、他の如何なる方法による傾向線も素よりその將來への妥當性には一定の限度があるが、この方法によると水平線の妥當限界

は特に狭小である。水平線は傾向線といふよりは、寧ろ傾向線の暫定的代替物と見るのが正しい。事實それが利用されるのは、特定事情の下に於ける景氣豫測の場合を措ては無いのである。

(3) 二次傾向線 (Secondary Trend)

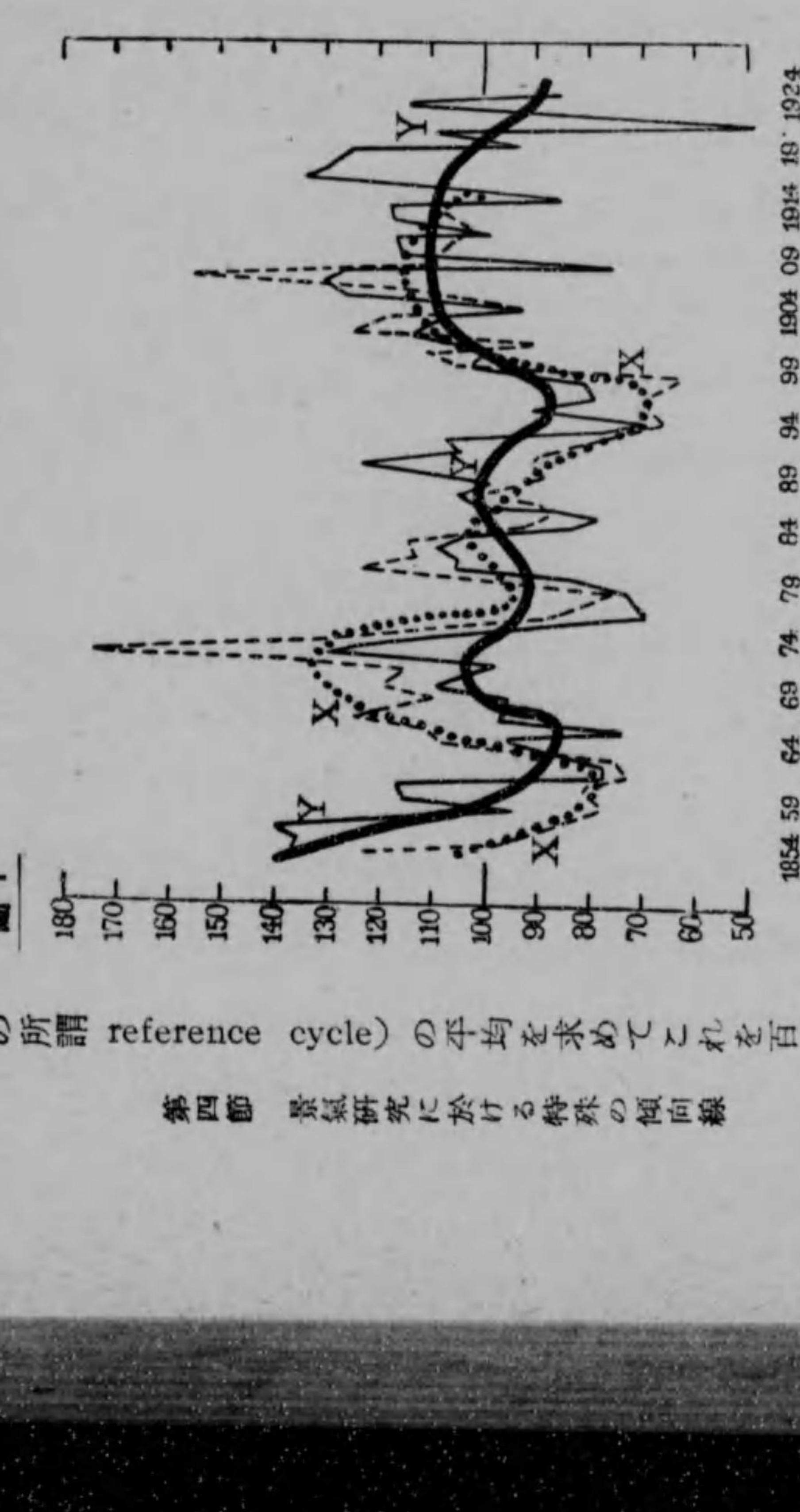
長期に亙る時系列に發展的曲線を當嵌め、この傾向線を基準として循環運動を求めれば、一ヶ乃至數ヶの循環運動が時には全然傾向線の上に或ひは全然下に現はれる事がある。この場合には、傾向線は少くも如上の循環運動に就ては基準たる使命を果してゐない理である。して見れば右の發展曲線の外に更に一ヶの要素が該長期運動の中に存在しなければならぬ。Kuznets はこれを二次傾向線と呼び、一次傾向線 (Primary Trend) 即ち基準的發展曲線と對比せしめてゐる。二次傾向線を求めるには、一次傾向線からの原數値の偏差（循環運動）につき、循環の周期に等しい年數の移動平均を行へばよい。彼は銑鐵生産噸數及びその卸賣價格の二系列につき、前者には Harmonic logistic curve を、後者には二次拋物線を當嵌め、それによつて得られた二ヶの循環運動に各々二次傾向線を求めこれを同一グラフに示してゐるが（圖1参照）、兩者の間には著しい一致が認められる。(註4) 價格の上昇と生産額との間に高度の相關々係の存すべきことは、理論上から當然期待し得るところである。(註5) 併し彼の二次傾向線は Mitchell の指摘する通り、一次傾向線と循環運動との中間物で、或ひは特殊な循環運動形態とも認められるのである。(註6)

（註4） 圖に於ける點線は價格、連續線は生産額を示す（太細は共にその二次傾向線なり）

（註5） Kuznets—ibid. pp. 29—33.

（註6） Mitchell—ibid. pp. 226—227.

圖 1



(4) Mitchell の階段傾向線

今迄述べた傾向線は何れも與へられた全期間に就て妥當するやう求められたものである。これがため、二次傾向線を說明する場合に指摘した通り、時には一ヶ乃至數ヶの循環運動が全く傾向線の上又は下に位する不便が起るのである。これは循環運動の本質から見て甚だ不合理である。蓋し循環運動とは正常値を中心として或ひは上に或ひは下に變動する運動に外ならないから、中心たるべき正常値は當然該循環運動の中央になければならぬ筈である。この不便を除く爲には各循環運動毎に正常値を算出する外はない。斯くて Mitchell はその大著 "Business Cycles,, の最後に特殊の傾向線を提唱するに至つたのである。(註7) 彼に從へば、各循環運動を單位とし、階段的傾向線を求むべきであり、この場合、一循環運動（彼の所謂 reference cycle）の平均を求めてこれを百と置き、各項の原數値を何れも百分比に換算するのである。この

方法を各々の循環運動に就て行へば、連續的傾向線の代りに階段形の傾向線が得られるであらう。若し發展傾向は連續的でなければならぬとすれば、右は確かに眞の傾向線とは認む可らざるものである。併し近代的景氣循環論に於て、連續性を否定する有力な論者の存在する事實を顧れば[註8]、斯かる特異な傾向線は、少くとも統計的景氣研究の範圍内では、意外な效果があるかも知れない[註9]。

（註7）Mitchell—ibid. pp. 469 ff.

（註8）A. B. Adams—Economics of Business Cycles, 1925,「It is a mistake to think that cyclical movements are continuous.……Each business cycle is, in a large measure, separate and distinct from the one preceding it and the other succeeding it.」p. 213.

（註9）Kuznets—ibid. S. 19「Soweit die Resultate schon jetzt, im Beginn der Arbeit, sichtbar werden, scheint das neue Verfahren viel zu versprechen」

第五節　ランゲの平衡破壞係數

統計的傾向線が全く形式的數學的範疇に屬する事は既に繰返へし說明した。併しこれが傾向線一般の有すべき唯一の性質でない事も亦說明した筈である。今假りに統計的數學的見地を棄てゝ傾向値なるものを觀察するならば、それが現象の正常狀態、即ち理論的平衡狀態に外ならぬ事が判るであらう。惟ふに傾向値なるものゝ眞の意義は、單なる統計的平均値に非ずして、事實は斯かる平衡狀態の精確な表現に存するのである。統計的傾向値は表面的なるものであり、平衡狀態を反映する傾向値こそ內容的實質的なものと認められる。このことは既に統計的平均値の理論を述べるに當つて觸れたところである。

然るに靜態の下に於ける平衡と、動態の下に於けるそれとは內容的に異る[註1]。後者は平衡點の前進（Gleichgewichts-verschiebung）、即ち經濟發展を意味する。從つて理論的意味に於ける傾向線とは、かゝる平衡前進を示す諸點の連續でなければならぬ。ムーアが經驗的統計的景氣研究に於ける傾向線を經濟理論に於ける moving equilibrium と同一視せんとしたのは之が爲であるが[註2]、併しこの見解には論理の飛躍が含まれてゐる。蓋し統計的傾向線は各系列につき個別的遊離的に求められたものであり、反之經濟的平衡は各種要素の綜合に就て始めて觀念しうるものであるからである。換言すれば、合理的な平衡前進は經濟的諸要素間に於ける相關的數量關係の組織的研究によつてのみ求めらるゝ性質のものなのである。經濟的平衡が統計的研究の對象とさるべき理由は此處にある。然るにこれに關する研究は未だ極めて乏しく、僅かにオスカー・ランゲ（Oskar Lange）がその「經濟的平衡破壞の統計的測定用具としての價格散布」Die Preisdispersion als Mittel zur statistischen Messung der wirtschaftlichen Gleichgewichtsstörungen, 1932 に於て、この問題の中心に觸れてゐるのみである。以下の記述は彼の所說の大要である。

（註1）Siegfried Budge は靜態と動態との差を、平衡狀態と、斯かる狀態を齎らさんとする經濟諸力との差に求めてゐる。Grundzüge der theoretischen Nationalökonomie, 1925, S. 8 ff.

（註2）H. Moore—Synthetic Economics, p. 93 ff.

從來、價格變動の研究對象は殆ど常に一般物價水準の動きであつた。この物價水準を數字的に反映する物價指數は個々の價格の平均値であり、從つて一ヶの抽象に過ぎない。故に抽象的な貨幣價値の研究に於ては不可缺としても、これによつて經濟生活の內部的經過を知る事は不可能である。この目的の爲には、個々の價格の變動を知る必要がある。蓋し個々の價格變動が相互に相違するのが價格現象の本質であつて、若しこれなくんば、一般價格水準と個々の價格の動きは常に一致し、從つて特に物價指數を測定する必要はない筈である。事實に於ては各商品に對する需給關係は何れも一率に變化しないから、各價格は平行に動かず、從つてその平均値たる物價水準と多少の差を示すのである。

一般に平均値とは一系列の代表値を指す。卽ち平均値の正確度は、それが幾何の程度まで該系列を代表してゐるかの程度によつて決定される。3, 4, 5 及び 1, 2, 9 なる二つの數列の算術平均は何れも四であるが、その正確度に相違ある事は一見して明かであらう。この正確度は平均と各項との開き（偏差 d）の大小卽ち散布度によつて決定されるのであり、數學的には普通、標準偏差$\left(\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}\right)$平均偏差$\left(S=\frac{\Sigma d}{N}\right)$等によつて現はされる（Nは項數）。物價水準は上述の如く各種價格の平均であり、從つてその正常値或ひは傾向値と認めらるべきものであるから、一定時點に於けるその正確度はその時の散布度によつて測定される理である。（散布度の小さいほど平均の正確度は大きい）。

今 n 年間に亙る m ヶ商品の價格が與へられたとし、これを次の記號にて現はす

第一商品價格　${}_1p_1$　${}_1p_2$ ………… ${}_1p_n$

第二　〃　${}_2p_1$　${}_2p_2$ ………… ${}_2p_n$

第 m　〃　${}_mp_1$　${}_mp_2$ ………… ${}_mp_n$

∴　一般に　${}_jp_i$ ($i=1, 2, \cdots\cdots n$,　$j=1, 2, \cdots\cdots m$)

各價格につき對前年の連環比率（link relative）を求めれば

第一商品につきては　$\frac{{}_1p_2}{{}_1p_1}$, $\frac{{}_1p_3}{{}_1p_2}$ ………… $\frac{{}_1p_n}{{}_1p_{n-1}}$

第 m　〃　$\frac{{}_mp_2}{{}_mp_1}$, $\frac{{}_mp_3}{{}_mp_2}$ ………… $\frac{{}_mp_n}{{}_mp_{n-1}}$

∴　一般に　$\frac{{}_jp_i}{{}_jp_{i-1}}$　（之を簡單に ${}_jr_i$ とす）

物價水準をMとすれば、その散布の程度は次の標準偏差によつて示される

$$\sigma_i=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}({}_jr_i-M_i)^2}$$

〔註〕散布度は、前述の如く、標準偏差によつてばかりでなく、平均偏差によつても、又はそれ以外の各種の方法によつても測定される。こゝでは單に標準偏差のみを取扱つた。

然るに右式に於ては、算術平均からの偏差の絕對的大さが同一ならば常に同一の重要さを持つものとして取扱はれ

る。併し偏差の同一の大さも、それが正なる負なるかによつてその重要さは大に違つて來るのである。故に如上の算術的方法に代ふるに「幾何平均からの連環比率の相對的偏差」を基礎とせねばならぬ。卽ちi年目の連環比率を

$${}_1r_i,\ {}_2r_i,\ \cdots\cdots {}_mr_i$$

とすれば、その幾何平均は $G_i = \sqrt[m]{{}_1r_i\ {}_2r_i \cdots\cdots {}_mr_i}$ であり、その對數は

$$\log G_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\log {}_jr_i$$

である。これより

$$\log \sigma'_i = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\log {}_jr_i - \log G_i)^2}$$

かゝる對數的標準偏差が、價格變動散布度の表現として最も適當なことはフィシャー(Fisher)、クラム (Crum)、ミルス(Mills) 等の代表的統計學者の裏書きするところで、ランゲはこれによつて物價水準が果して經濟的平衡を示すか否かを推さんとするのである。從來、價格變動に於ける散布度の問題は主として一般物價水準卽ち物價指數の正確度測定の問題、從つて最も理想的な平均の選擇の問題と關聯せしめられ、それ自身の問題としては殆ど研究されるところがなかつた。然るに靜態の下に於ては、相互關係に變化なきが故に價格散布は考へられず、反之、動態の下に於て相互關係の變化に基き、多かれ少かれ散布の現象が起つて來る。然らば價格變動の散布の大小は經濟に於ける動態過程の強度の尺度であり、靜的平衡狀態からの隔りの尺度である事が判る。散布度の小なる事は、各數量が相互に略ゝ同一の割合を以て變動せること、換言すれば單に平衡點の前進せる事を意味し、反之散布度の大なる事は、平衡の破壞された事を意味する。

如上の理論的推論はミルス及びマルシュの統計的研究によつて實證的にも證明されてゐる。併し今問題となるのは、散布の大小によつて平衡の前進と破壞とが區別されるとしても、その大小の限界を何處に求むべきかといふ事である。換言すれば、平衡前進に對應する散布の理想的尺度は如何にして求められるか。この要求に應ぜんが爲にランゲは各價格の傾向線より平衡前進指數(Gleichgewichtsverschiebungsindices)なるものを算出しようとする。その方法は前記の散布度測定方法と類似せるものであるが、第一に實際の各價格の傾向線を算出せねばならぬ。この場合、各價格變動の強度は各々異るから、假りに傾向線を直線とすれば、出發點を中心として扇形の放射線が得られるであらう。故に m ケ商品につき、各時點の傾向値は

第一商品　${}_1y_1\ \ {}_1y_2 \cdots\cdots\cdots {}_1y_n$

第二商品　${}_2y_1\ \ {}_2y_2 \cdots\cdots\cdots {}_2y_n$

……

第 m 商品　${}_my_1\ \ {}_my_2 \cdots\cdots\cdots {}_my_n$

これら傾向値の連環比率は

第一商品　$\dfrac{{}_1y_2}{{}_1y_1},\ \dfrac{{}_1y_3}{{}_1y_2} \cdots\cdots\cdots \dfrac{{}_1y_n}{{}_1y_{n-1}}$

第二商品　$\frac{{}_2y_2}{{}_2y_1},\ \frac{{}_2y_3}{{}_2y_2}\cdots\cdots\cdots\frac{{}_2y_n}{{}_2y_{n-1}}$

……

第 m 商品　$\frac{{}_my_2}{{}_my_1},\ \frac{{}_my_3}{{}_my_2}\cdots\cdots\cdots\frac{{}_my_n}{{}_my_{n-1}}$

一般に　$\frac{{}_jy_i}{{}_my_{i-1}}\ (i=1,\ 2,\cdots\cdots n,\ j=1,\ 2,\cdots\cdots m)$

各傾向線は相互に平行に非ざるが故に當然散布を示す、その測定は以前の場合と同じく

$$\frac{{}_jy_i}{{}_jy_{i-1}}={}_j\bar{r}_i$$

その算術平均は

$$M_i=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}{}_j\bar{r}_i$$

故に

$$\bar{\sigma}_i=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}({}_j\bar{r}_i-\bar{M}_i)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然るに斯かる場合、算術平均よりも幾何平均のより安當な事は既に述べた通りであるから、右の式よりは寧ろ次の式によるを可とする。

$$\log\ \bar{G}_i=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\log\ {}_j\bar{r}_i$$

これより

$$\log\bar{\sigma}_i=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\log\ {}_j\bar{r}_i-\log\ \bar{G}_i)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

各價格の傾向値比の散布を示すこの（一）又は（二）の式は經濟的數量關係の緩慢且つ連續的變化を反映するもので、從つてこれを平衡前進の表現、即ち平衡前進指數と認められるのである。この指數は、その算出の基礎たる傾向線の本質から、單なる一ヶの假想物に過ぎぬ事は言ふ迄もないが、平衡前進なる概念そのものが同じく一ヶの假想物たる以上、その表現として充分の經濟的意義を有するものである。

然るに資本制經濟の發展は、事實に於ては平衡破壞によつて行はれる。前述の如く、平衡破壞の概念なくしては景氣變動の實在を認識するを得ないのである。然らばこの平衡破壞は如何にして測定されるか。ランゲ曰く「經濟的平衡破壞は、實際の價格變動の散布と、それに對應する傾向値比の散布との比較によつて測定される」と。何となれば彼は價格傾向値比の散布の中に經濟的平衡前進指數を求め、同時にその中に、實際の價格變動の「與へられた散布」が平衡前進の徴候か又は平衡破壞の徴候かを判斷する標準を求めたからである。故に實際の價格運動の散布が同じ價格の傾向値比の散布に等しければ、これは財貨の交換關係の變化が、且つ他の一切の經濟的數量關係の變化が、緩慢に行はれる事、即ち經濟的平衡前進を意味し、反之、實際の價格變動の散布がそれに對應する傾向値比の散布よりも大なれば、それは經濟的平衡破壞を意味するのである。

これを記號にて表はせば（σ_i は實際の價格變動の散布、$\bar{\sigma}_i$ はそれに對應する傾向値比の散布）

$$Q_i = \frac{\sigma'_i}{\bar{\sigma}'_i}$$

ランゲはこれを平衡破壊係數（Gleichgewichtsstörungskoeffizient）と名づく。然るに

$$\log Q_i = \log \sigma'_i - \log \bar{\sigma}'_i$$

$$\therefore \quad \log Q_i = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\log {}_jr_i - \log G_i)^2} - \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\log {}_j\bar{r}_i - \log \bar{G})^2}$$

實際の計算の結果、右の係數が（1%とすれば100×Q）又は一よりも小なるときは、平衡破壊の存在せざるを意味し、一よりも大ならば大なるだけより多くの平衡破壊の存在するを意味する。併し、平衡前進は單なる理論的假想物で事實上存在しないとすれば、實際には右係數は必ず一よりも大となつて現はれる筈である。

ランゲは以上の如く、單に價格現象のみから經濟的平衡、卽ち經濟的正常値の問題を取扱つてゐる。併し經濟現象が價格現象よりも遙かに廣汎なる事實を顧れば、右の試みは未だ以て完全とは認め難い。彼自身も、同樣の方法を他の幾多の經濟現象、例へば年々の財貨生產量、賃銀、利潤率等に就て施し、これらの綜合によつて始めて全經濟組織に適用さるゝ係數を求めうるであらうと述べてゐる。併し今日の貧弱な經濟統計の下に於ては、これは素より不可能であり、且つ又價格現象の優越性を顧れば、彼の案出した係數は大體に於てその目的を達しうるものと認めてよいであらう。斯かる係數の實際的效果は有效な景氣政策の基礎を決定せんとする場合に現はれる。蓋し景氣政策の目的は景氣の急激な上昇又は下降を防止するに在る、換言すれば平衡破壊を伴はざる經濟發展を實現するに在るからである。

×　　×　　×　　×

私は以上に於て傾向値測定に關する基本問題を概述した。卽ち統計的傾向線を論ずるに當つては、その窮極の決定は精細なる理論に俟つべきを明かにし、最後に經濟的平衡を論ずるに當つては、斯かる理論の完成が統計的方法の援助を通じて行はるべきを語つたつもりである。そしてこの事は素より單に傾向値なる特殊問題に就てのみ妥當するのではない。程度に多少の差はあつても、凡ゆる社會現象の研究に於て、否、自然現象の研究に於てさへも、事實と理論の相互的扶助の必要な事は特に言ふ迄もないのである。唯だ最近、實證的研究の旺盛となるに伴つて恰も經濟的統計的研究法を以て唯一無二の方法と見做すが如き風潮がないでもない。その一部の責が理論の無力にある事は否めないとしても、同時に斯かる人々の認識の根本に重大な缺陷ある事も亦否めないのである。蓋し無力な理論を有力化せしむるのが實證的研究の重大な任務であると同時に、斯かる有力な理論なくしては實證的研究そのものゝ方法論的基礎も確立されないからである。

第七章　時系列の解析 (2)

第一節　季節變動の本質と原因

「限りなく循環するものは、あの天候なのだ」――ムーアはその初期の著「經濟的循環、その法則と原因」第三章の冒頭にウヰリアム・チェームスの右の言葉を掲げてゐる。凡ゆる一切の運動を通じて最も規則的に繰返へされるものは、恐らく天候なる文字の中に綜括される自然現象であらう。溫度とか降雨量とか、卽ち所謂天候なるものは、大體に於てその土地の自然的狀態によつて決定されるもので、現在の人力を以てしては殆ど左右されざるものである。春夏秋冬の循環、雨期と乾燥期の循環は必然每年規則正しく繰返へされる。そして是等こそ、農業漁業の如き自然的產業を根本的に決定する條件なのである。內地に於て米の收穫が年二回行はれるが如き事は不可能である。近年の著しい米穀の增收は單に耕地の擴大と農業技術の進步の結果でしかない。

每年繰返へされる斯かる自然的現象を季節 Season といふ。そして吾人の生活が絕えず自然の制約下にある以上、季節そのものが吾人の經濟生活に或る一定のリズムを發生せしめる事は言ふ迄もないのであらう。

如上の自然的原因から發生する季節に對して、社會組織の上から發生する所謂人爲的季節なるものがある。時なる概念は元來無始無終の連續物であるから、生活の便宜上吾人はこれを各種の單位に分たねばならぬ。年、月、週、日、時、分、秒の如き概念は、自然的に規制されたものもあるし――例へば年、日、――全く人爲的なものもある――月、週、等。更に大祭祝日の如きものは國により又は所によつて永久的又は半永久的に規定されたものであるが、これらは何れも每年循環するものであるから、これ亦季節と呼んで差支へないのである。

時の斯かる分類は必然吾人の日常生活に一定の習慣を來さしめる。月末に於てその月の取引の決濟が行はれるとか、日曜日、祭日等に勞働を休むとか之である。斯かる習慣は、上記の自然的原因と同樣に、吾人の社會生活に著しい影響を與へざるを得ない。

この自然的及び人爲的の二原因は相合して季節變動を發生せしめる。吾人が一般に季節變動といふ場合には、この綜合的結果を指すのであつて、從つて從來統計學の課題は、この綜合的季節變動を他の運動形態、卽ち長期傾向、景氣變動及び不規則變動から如何にして遊離しうるかといふ事であつた。次に述べる各種の測定法は何れも右の意味に於ける季節變動、卽ち自然的人爲的の兩原因に基く季節變動を一體として測定せんとするものである。併し解析の窮極目的は、一ヶの綜合物をその不可分的分子にまで分析するに在るのであるから、季節變動は最後にはその原因に從つて自然的季節變動と人爲的季節變動とに分析されねばならぬ。現在の統計的解析法を以て果してこれを爲しうるや否やは、本章の最後の部分に於て言及したい。

〔註〕季節變動とは普通は一年を以て循環する運動を指すが、より短期の、例へば一ヶ月內、一週間內又は一日內に繰返へされ

る循環運動を指すこともある。これに關する Grünbaum の研究 (Die Umsatzschwankung des Einzelhandels als Problem der Betriebspolitik) は Wagemann—Konjunkturlehre. SS. 53—4 (邦譯、七五—八頁) に紹介されてゐる。

第二節　季節變動の測定

季節變動を多少とも正確に測定するには、素より統計的解析に據らざるを得ない。これは他の變動の場合と全く同樣である。然るに時系列の變動を構成する各種運動形態は、系列によつて著しく組合せを異にする。上記の四形態の各々が大なる程度に存在する系列もあり、又その内の或る形態は殆ど或ひは全く存在しないものもある。自然現象の如きに於ては、長期傾向と認むべき運動の存しない事は前章に述べた。溫度や降雨量の如きこの例であるが、これらに於て數年を周期とする循環運動が存在するや否やは可成り問題のあるところである。Jevons 又は Moore の如きは、斯かる運動の存在を主張し、景氣變動の窮極的原因をこれに歸せしめてゐる。併しこれに對しては疑問的見解を抱く者甚だ多く、事實この實の循環運動は假令存在したところで、その程度は必ずしも大でないのである。反之、かかる自然現象に於ける季節變動は最も規則的且つ顯著で、當然その可及的正確な測定が必要であり、且つ可能なのである。

右の如き自然的現象に關する系列に於ては、その變動を齎らす要因は主として季節そのもので、他の運動要因は殆ど或ひは全く認められないとすれば、斯かる系列に於て季節變動を測定することは當然容易となる筈である。次に述べる月別平均法なる測定法は、斯かる系列に就ては安んじて適用出來るものといへる。然るに大部分の經濟系列に於ては、特殊の事例を除けば、上記四運動形態は必ず同時に存在してゐる。例外的事例とは、例へば專賣法によつて規定された商品價格の如きもので、これらは規定の存續する限り常に同一を保ち、一切の變動から免かれてゐるのである。併し素より斯かる經濟系列は異例に屬し、從つて大部分の經濟系列に於ては各種運動形態の解析が必要とされる。そしてその變動が幾多の要因の綜合的結果である以上、季節變動測定の方法も自然的系列に於けるのとは當然異つて來なければならない、斯くて季節指數（季節變動の數字的表現）算出の方法は可成り多數に考案され、寧ろその何れの方法を選ぶべきかに躊躇するほどである。以下に順次說明する各種の方法は、今日一般に利用されつゝあるものゝ代表的なるものに過ぎない。

（a）月別平均法

溫度とか降雨量とかの自然現象に就ては、上述の如く發展傾向は認めちれず、且つ循環運動も必ずしも明瞭ではないから、斯かる現象を示す系列に於ける變動は主として季節によつて惹起されたものと見てよい。併し當然溫度の高かるべき月に比較的涼しい日の續く事があり、降雨量の多かるべき月に比較的少い事もあつて、年々の溫度や降雨量の狀態が必ずしも等しくない事は言ふ迄もない。これらは所謂不規則變動と認めらるべきものであるから、若し可成り多くの年を取つて各月を平均すれば、その影響は大部分は除去される筈である。この方法を月別平均法と稱し、季節指數算出法としては最も簡單なものである。次表1は紐育の月別平均溫度から、右の方法によつて季節指數を算出

したものである。

表 1

紐育市の温度表

Year	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	June.	July.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Annual
1917	32	28	39	47	53	68	74	75	63	52	41	25	50
1918	22	30	41	50	64	66	73	75	63	59	46	39	52
1919	35	35	42	49	61	70	74	70	66	58	44	30	52
1920	24	29	41	48	58	68	72	73	67	60	44	38	52
1921	34	35	48	55	60	70	76	71	71	56	45	34	55
1922	29	34	41	51	64	71	73	71	67	58	45	34	53
1923	31	27	37	49	59	72	72	71	67	56	45	42	52
平均	30	31	41	50	60	69	73	72	66	57	44	35	52
中位數	31	30	41	49	60	70	73	71	67	58	45	34	52
指數	58	62	78	95	114	132	139	137	126	109	84	66	100

右表に於て各年の一月平均三〇度、二月平均三一度……十二月平均三五度は算術平均であるが、年數が多ければ中位數を採つても差支へない。この各月平均を總平均五二度で割れば各月の百分率温度が得られる。換言すれば一年の平均が百とされ、それに對して各月の温度の割合が示されるのであつて、これが季節指數の一般的表はし方である。

原數の代りにその百分比を用ふる方法 (Method of monthly percent of annual) もある。上例に於て一九一七年の各月の温度をその年の平均五〇にて除し、一九一八年の各月のそれをその年の平均五二にて除し、以下最後の年まで同様の計算を行ふ。斯くすれば例へば一月については 6.40, 4.23, 6.71, 4.61, 6.18, 5.47, 6.00 の百分比にて示された數字が得られる。これを平均すれば一月について 5.65 が得られるから、これを十二倍する事によつて指數に換算すれば五九となり、前記の方法によつて得た五八と略ゝ同一の數字が得られる。この方法を各月について施せばよいのである。斯かる計算法によれば各年毎に合計が百となり、この點に於て、原數をそのまゝ使用する方法よりも理論上優れてゐるといへよう。

(b) 修正的月別平均法

發展傾向が顯著な系列に於ては、上記の單純な月別平均法をそのまゝ使用する事は出來ない。併し適當な修正を施して傾向値を除去するならば、大體に於て安當な季節指數を算出する事も不可能ではない。次に掲ぐる表2は一九〇四年より一九一三年に至る十年間のフランクフルト市月別燈火用電力使用量である（會計年度は四月に始まる)。

表 2

Frankfurt 市燈火用電力消費量

年次	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	一月	二月	三月	合計(S)	平均(m)
1904	165.5	122.2	101.7	80.1	121.2	180.9	287.7	424.2	542.0	436.7	368.3	279.8	3.110.2	259.2
1905	221.1	132.2	118.3	95.7	139.5	240.1	380.3	523.7	665.8	588.2	449.1	311.9	3.865.8	322.2
1906	280.5	209.1	162.8	157.8	216.7	339.0	435.6	590.1	754.5	640.5	524.1	397.6	4.708.3	392.4
1907	300.4	238.9	210.2	203.1	236.1	340.3	455.7	621.4	806.2	719.2	587.2	399.0	5.117.7	426.5
1908	348.4	267.5	221.7	214.1	261.0	390.4	531.4	691.3	915.3	760.3	649.8	480.7	5.731.8	477.7

1909	370.0	272.1	230.6	273.3	330.3	471.6	612.2	741.4	921.1	829.6	670.0	463.7	6.185.8	515.5
1910	390.9	307.0	264.3	245.7	295.5	453.0	583.9	845.0	1038.8	891.7	718.1	536.6	6.570.4	547.5
1911	458.1	324.1	266.2	248.4	331.3	484.4	702.2	917.0	1107.2	998.4	802.6	604.0	7.243.9	603.7
1912	464.8	379.0	301.6	369.9	404.7	559.6	785.9	1017.7	1188.2	1129.7	720.1	635.1	7.956.3	663.0
1913	573.1	368.8	338.0	312.5	418.1	581.1	842.6	1113.4	1255.9	1099.3	1106.3	633.6	8.642.7	720.2
S	3572.8	2620.9	2215.4	2200.6	2754.4	4040.4	5617.5	7485.2	9195.0	8093.6	6595.6	4742.0	59132.9	$\underbrace{4927.9}_{A}$
m	357.3	262.1	221.5	220.1	275.4	404.0	561.8	748.5	919.5	809.4	659.6	474.2	$\underbrace{492.8}_{a}$	
$\frac{m}{a}100$	72.4	53.1	44.9	44.6	55.8	81.8	114.0	151.8	186.4	164.0	133.8	96.0		
季節指數	72	53	45	45	56	82	114	152	186	164	134	96		

右表は前述の單純月別平均法によつたものであるが、この十年間の發展傾向は極めて顯著であるから（一九〇四年の平均二五九・二は爾後毎年增加して一九一三年には七二〇・二に昇つてゐる）、會計年首、即ち四月の値から會計年末即ち三月の値までの間に右の發展傾向は矢張り殘存してゐる筈である。換言すれば四月五月附近の値は實際よりも著しく低く、二月三月附近のそれは著しく高く現はれてゐるのである。故にそれを修正する爲には發展傾向値を算出し、季節指數の一部にはこれを加へ、一部からはこれを控除する必要がある。今、最小自乘法によつて直線的傾向線を當嵌めれば、十年間を通じて毎年の增加分は四八・四となる。(註1) これを年平均 492.8 にて除せば 0.0984 となり、從つて一ヶ月の增加分はその十二分一即ち 0.0082 である。前表に於ける季節指數は四月より九月までの分は實際よりも低く、十月より三月までの分は高いから、この 0.0082 なる增加分を以て修正せねばならぬ。即ち中央の二ヶ月（九月と十月）に就ては、九月の修正分は $1-\frac{0.0082}{2}=0.9959$ 十月分のそれは $1+\frac{0.0082}{2}=1.0041$ となり、八月及び十一月のそれは $0.9959-0.0082=0.9877$ 及び $1.0041+0.0082=1.0123$ となり、この計算を全部について行へば次の表3が得られる。この表に於ける修正された月平均は第一欄の月平均を修正分を以て除したものである。この修正された月平均をその總平均（四八八）を以て除せば最後の欄の季節指數が得られる。この季節指數に於ては、トレンドは除去されてゐるのである。

表 3

	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	一月	二月	三月	平均
月平均	357	262	222	220	275	404	562	749	920	809	660	474	
修正分	0.955	0.963	0.971	0.979	0.988	0.996	1.004	1.012	1.021	1.029	1.037	1.045	
修正サレタ月平均	374	272	228	225	278	406	560	739	900	786	636	454	488
Trend ヲ除去セル季節指數	77	56	47	46	57	83	115	152	185	161	130	93	

（註1）　幾分の不正確を覺悟すれば、最小自乘法によらずとも大體の增加分は算出される。即ち第一年目（一九〇四年）の平均（二五九・二）と最後の年（一九一三年）の平均（七二〇・二）との差を「年の數から一を引いたもの」即ち此處では九で割ればよい $\left(\frac{720.2-259.2}{9}=51.\right)$。年の數で割らずにそれよりも一だけ少い數で割る理由は、最初の年は全體の基準とされるからである。この五一と最小自乘法による四八・八との差は極めて僅かであるから、この例に於ては斯かる省略法を用ひて毫も差支へがないのである。

（c）十二ヶ月移動平均法

季節變動は一年内に循環する運動であるから、若し與へられた材料が一年の合計又は平均によつて示されてゐる場合には、季節變動は該系列の中には存在しない筈である。例へば或る商店の昨年度の賣上合計が五萬圓と發表されたとすれば、この五萬圓は十二ヶ月の賣上合計であり、從つてそのうちには季節的に賣上の増加する時期も、その反對の時期も共に包含されてゐるのであつて、從つてこの單一な數字から季節變動を分析する事は出來ない理である。この事は與へられた數字が年平均である場合も全く同樣である。例へば昨年度東京市場金利の統計に於て商業手形の全年平均一・三二（錢）と發表されてゐれば、この數字の中には金利の高い年首も低い夏期も平均されてゐるのであるから、季節の影響は相殺されてゐる事になる。故に若し月別數字の與へられた場合でも、十二ヶ月分を合計するか又は十二ヶ月の平均を求めれば季節變動は當然排去される事になるのである。そして季節變動が排除されゝば、これと原數との差又は比から季節變動そのものを求める事が出來る。十二ヶ月移動平均による對移動平均比率（Ratio to 12 Months Moving Average Method）は斯かる根據の上に作られたものである。

その方法は（一）相次ぐ各月の十二ヶ月の平均を順次に求める。即ち一月から始まる數字であれば、先づ一月から十二月までの平均を求め、次に二月から十三月（卽ち次年の一月）までの平均を求め、次には三月から次年の二月までの平均を求め、以下同樣にして最後の月までこの計算を行ふ。（二）この一月から十二月までの平均を七月に置き、二月から次の一月まで平均を八月に置き、以下同樣にする。併し正確を期すならば、斯くて求めた移動平均に更に二ヶ月移動平均を行はねばならぬ。何となれば一月から十二月までの平均は六月と七月との中間に置かるべきであるから、これを七月に置けば明かに半ヶ月の誤差が生ずるが故に、この誤差を修正する爲には斯く七月に置いた値と八月に置いた値とを平均し、これを七月に置かねばならないのである。八月以下に就ても同樣であるから、要するに一度十二ヶ月移動平均によつて求めた値を更に二ヶ月移動平均によつて訂正するのである。併し半ヶ月の誤差は概して僅少なるを常とするから、普通の場合には斯かる修正は必ずしも必要では無いやうである。（三）移動平均が求められたならば、順次に原數をその該當する移動平均値で割つて、原數の平均に對する比を求める。例へば七月の原數をその月に置かれた平均値で割り、八月の原數をその月の平均値で割り、以下最後までこの計算を行ふのである。（四）十二ヶ月移動平均はその性質上、最初の六ヶ月と最後の六ヶ月とに置かるべき値は得られないから、例へば與へられた原數が十年間に亙るものであつても、得られる平均値は前後の六ヶ月宛を除く九年間のものでしかない。斯くて十年間の材料については九ヶの一月の値、九ヶの二月の値……九ヶの十二月の値が得られ、從つて原數の移動平均に對する比も各月につき九ヶ宛である。今、一月の九ヶの比率からその代表的比率を定め、同樣に二月以下十二月まで各月につき代表的比率を求める。この代表的比率は勿論その九ヶの比率の平均によつて求められるが、この場合の平均は算術平均でも中位數でも又は中央數項の算術平均でもよい。（五）斯くて得られた十二ヶの代表的比率は各月の季節指數と認められるが、併し便宜上この十二ヶの比率をその平均で割つて、合計が千二百となるやう換算する。これが求むる季節指數である。この手續は言ふは易く、行ふは甚だ煩雜であるから、以下 Mills—Statistical Methods, p.

315 以下に揭げられた資料を借用してこれを實際に說明して見よう。

此處に揭げられた資料表4は一九一〇年より一九二一年に至る十二年間の米國に於ける鷄卵卸賣價格（一ダース、仙）である。

表4　　鷄卵價格

	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921
一月	30.5	30.4	29.5	26.8	30.7	31.6	30.6	37.7	46.3	57.2	64.8	61.1
二月	23.9	22.1	29.1	22.8	28.4	29.2	26.8	35.8	49.4	48.3	56.9	49.6
三月	22.9	16.5	24.5	19.4	24.2	21.3	21.2	33.8	40.4	33.1	46.6	29.2
四月	18.6	14.9	17.8	16.4	17.6	16.6	17.9	25.9	31.2	34.3	38.8	20.4
五月	18.6	14.7	17.1	16.1	16.8	17.1	18.1	30.0	31.0	36.8	37.4	20.2
六月	18.3	14.5	16.7	16.9	17.3	16.6	19.0	31.1	29.8	38.6	37.0	19.4
七月	18.2	14.2	16.7	17.0	17.6	16.8	19.7	28.3	30.7	36.8	36.7	22.0
八月	17.6	15.5	17.4	17.2	18.2	17.0	20.7	29.8	34.4	39.3	40.0	26.6
九月	19.4	17.4	19.1	19.5	21.0	18.7	23.3	32.2	36.4	41.0	44.2	30.4
十月	22.4	20.0	22.0	23.4	23.5	22.3	28.1	37.4	41.6	44.7	50.1	34.2
十一月	25.3	23.5	25.9	27.4	25.3	26.3	32.2	39.4	47.2	54.0	56.9	44.2
十二月	29.0	28.7	29.7	23.0	29.7	30.6	38.1	43.3	55.0	61.9	65.0	51.1
平均	22.5	19.4	22.1	21.3	22.5	22.0	24.6	33.8	39.5	43.8	47.9	34.0

右の材料に就て上記（一）及び（二）の手續によつて十二ヶ月移動平均を求めれば次表5となる。

表5　　十二ヶ月移動平均

	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921
一月	—	20.25	21.26	20.78	22.74	22.29	22.24	30.06	36.72	41.39	46.60	40.47
二月	—	19.99	21.45	20.79	22.80	22.20	22.51	30.80	37.01	41.86	46.63	39.30
三月	—	19.82	21.60	20.79	22.91	22.06	22.86	31.59	37.33	42.25	46.80	38.16
四月	—	19.64	21.75	20.87	22.97	21.91	23.29	32.39	37.64	42.57	47.15	36.93
五月	—	19.46	21.94	20.99	22.89	21.90	23.77	33.08	38.14	42.98	47.50	35.74
六月	—	19.38	22.08	21.19	22.66	21.98	24.33	33.59	38.96	43.56	47.75	34.63
七月	22.47	19.33	22.00	21.49	22.57	21.98	24.94	34.17	39.90	44.17	47.72	—
八月	22.18	19.58	21.63	21.88	22.64	21.84	25.60	35.10	40.31	44.84	47.26	—
九月	21.63	20.20	21.16	22.32	22.55	21.74	26.51	35.93	39.96	45.76	46.24	—
十月	21.21	20.66	20.89	22.57	22.39	21.78	27.36	36.43	39.79	46.50	44.74	—
十一月	20.89	20.88	20.79	22.65	22.36	21.88	28.20	36.69	40.17	46.71	43.26	—
十二月	20.57	21.07	20.76	22.69	22.35	22.02	29.20	36.68	40.77	46.67	41.81	—

この移動平均値は季節變動の排除された値であるから、若し原數からこの移動平均値を差引けば右九年間の實際の季節變動が求められる。故に敢へてこの計算を行へば次の表6が得られる。

併しこの表によつて示されるものは各年の實際の季節變動であつて、從つて綜合的季節變動卽ち季節指數ではない。

表 6

季節變動除去

	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921
一月	—	+10.1	+ 3.8	+ 6.0	+ 8.0	+ 9.3	+ 8.4	+ 7.6	+ 9.6	+ 5.8	+10.2	+20.6
二月	—	+ 2.1	+ 7.5	+ 2.0	+ 5.6	+ 7.0	+ 4.3	+ 5.0	+12.3	+ 6.4	+10.3	+10.3
三月	—	− 2.3	+ 2.9	− 1.4	+ 1.3	− 0.8	− 1.7	+ 2.2	+ 3.0	− 9.2	− 0.2	− 9.0
四月	—	− 3.6	− 4.0	− 4.5	− 4.4	− 5.3	− 5.3	− 6.5	− 6.4	− 8.3	− 8.4	−16.5
五月	—	− 3.8	− 4.8	− 4.9	− 6.1	− 4.8	− 5.7	− 3.1	− 8.1	− 6.2	−10.1	−15.5
六月	—	− 3.9	− 5.4	− 4.3	− 5.4	− 5.4	− 4.4	− 2.5	− 9.2	− 5.0	−10.8	−15.2
七月	−4.3	− 5.1	− 5.3	− 4.5	− 5.0	− 5.2	− 5.2	− 4.9	− 9.2	− 7.4	−11.0	—
八月	−4.6	− 4.1	− 4.2	− 4.7	− 4.4	− 4.8	− 4.9	− 5.3	− 5.9	− 4.5	− 7.3	—
九月	−2.2	− 2.8	− 2.1	− 2.8	− 1.6	− 3.0	− 3.2	− 2.7	− 2.6	− 5.8	− 4.0	—
十月	+1.2	+ 0.7	− 0.9	+ 0.8	+ 1.1	+ 0.5	+ 0.7	+ 1.0	+ 1.8	− 1.8	+ 5.4	—
十一月	+4.4	+ 2.7	+ 5.1	+ 4.7	+ 2.9	+ 4.4	+ 4.0	+ 2.7	+ 7.2	+ 7.3	+13.6	—
十二月	+9.6	+ 7.6	+ 8.9	+10.3	+ 7.3	+ 8.5	+ 8.9	+ 6.6	+14.2	+15.2	+23.2	—

後者を求めるが爲には、右の實際の季節變動を平均したものでなくてはならぬ。然るにこれを平均するに當つて單に右の絶對數を採つたのでは、絶對數の大なる項の影響が過度に強く現はれ、適當な平均を求め難い。斯くて（三）の手續により原數とその月の移動平均値との比を求める必要が起つて來るのである。次の表7はこれを一表に纏めたもので、例へば一九一〇年七月の八一・〇は原數の一八・二をその月の移動平均値二二・四七で割り、それを百倍して百分比としたものである。

表 7

	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921
一月	—	150.1	138.8	129.0	135.0	141.8	137.6	125.4	126.1	138.2	139.1	151.0
二月	—	110.6	135.7	109.7	124.6	131.5	119.1	116.2	133.5	115.4	122.0	126.2
三月	—	83.2	113.4	93.3	105.6	96.6	92.7	107.0	108.2	78.3	99.6	76.5
四月	—	75.9	81.8	78.6	76.6	75.8	76.9	80.0	82.9	80.6	82.3	55.2
五月	—	75.5	77.9	76.7	73.4	78.1	76.1	90.7	81.3	85.6	78.7	56.5
六月	—	74.8	75.6	79.8	76.3	75.5	78.1	92.6	76.5	88.6	77.5	56.0
七月	81.0	73.5	75.9	79.1	78.0	76.4	79.0	82.8	76.9	83.3	76.9	—
八月	79.4	79.2	80.4	78.6	80.4	77.8	80.9	84.9	85.3	87.6	84.6	—
九月	89.7	86.1	90.3	87.4	93.1	86.0	87.9	92.4	91.1	89.6	95.6	—
十月	105.6	96.8	105.3	103.7	105.0	102.4	102.7	102.7	104.5	96.1	112.0	—
十一月	121.1	112.5	124.6	121.0	113.1	120.2	114.2	107.4	117.5	115.6	131.5	—
十二月	141.0	136.2	143.1	145.4	132.9	139.0	130.5	118.1	134.9	132.6	155.5	—

この百分比の表から（五）の手續きによつて各月の代表値を求めるのであるが、この場合多くは中位數を採るやうである。即ち一月の十一ヶの百分比を大さの順序に配列すれば、中央の項は一三八・二となりこれを一月の代表値と

する。二月以下も同様の方法によつて求めればよい。最後に（六）の手續によつてこの十二ヶ月の中位數の平均九九・六を以て各月の中位數を割れば一ヶ月平均一〇〇の指數に換算されるから、これを求むる季節指數とするのである。この（五）及び（六）の結果を一表に纏めれば上の通りである。

表 8

月	中位數	季節指數
一月	138.2	138.7
二月	122.0	122.5
三月	96.6	97.0
四月	78.6	78.9
五月	77.9	78.2
六月	76.5	76.8
七月	78.0	78.3
八月	80.4	80.7
九月	89.7	90.1
十月	103.7	104.1
十一月	117.5	118.0
十二月	136.2	136.7
	平均 99.6	100.0

（d）連環比率法

季節變動は元來月から月への變動と見られるから、與へられた月別材料をそのまゝ使用する代りに、全期間に亙つて對前月比率に換算し、これに基いて季節指數を算出する方が正しいと言ふ說がある。季節指數算出に於て今日最も廣く行はれつゝある連環比率法（Link-relative method）はパーソンズ教授が右の主旨に基いて作成したもので、今日經濟系列の解析に於て最も重要な地位を占めてゐる。

或る時系列があつて、yを以てその月別數字を示すものとする、（一）最初の月を除き、各月に連環比率を算出する。連環比率とはある月の値y_iその前月の値y_{i-1}にて除したものである。これによつて各一月の値はその前月たる十二月の値の百分比として示され、同様に二月の値は一月のそれの百分比として示され……十二月の値は十一月のそれの百分比として示される。（二）是等の連環比率を月別度數表に記し、（三）各月の中位數を求め（四）これより連鎖比率を求める。連鎖比率（Chain-relative）とは連環比率の總ての中位數を一月を基準とした百分比に換算する事で、即ち一月の中位數を、一〇〇と置き、この一〇〇に二月の中位數（百にて除したもの）を乘じた商が二月の連鎖比率となり、この二月の連鎖比率に三月の中位數を乘じたものが三月の連鎖比率となる。以下同じ。併し十二月の連鎖比率を求めた後、更にこれに一月の中位數を乘ずる。最後に求めた一月の比率は、多くの場合、最初に求めた一月の比率と一致しない。季節變動は當然一ヶ年にして一順すべきものであるから、この二つの一月の比率は元來共に一〇〇となるべきであるが、與へられた系列の中に發展傾向の殘存する場合には、その影響によつて最後の一月の値は必ず一〇〇よりも多くなるか又は少くなるのである。即ち發展傾向が上昇的なる場合には概して一〇〇以上となり、その下降的なる場合には概して一〇〇以下となるのである。故に正しき季節指數を求める爲には、この兩者の差を零ならしめるやう修正を施さねばならぬ。（五）かくてこの差を或ひは算術的に、或ひは幾何的に（即ち複利的）に各月の連鎖比率に配分せねばならぬ。（六）最後にこの修正された連鎖比率の合計が一二〇〇となるやう、換言すれば月平均が一〇〇となるやうに書改める。この爲にはこの修正された各月の連鎖比率をその平均で除せばよい。

この實際の計算は可成り煩雜であるから、次に實例を以て示さう。その數字（表9）はベルリン取引所市場割引率を示し、期間は一九〇〇年より一九一四年一月迄の十四年間である。

左の材料に前記の方法を適用すれば、（一）一九〇〇年二月の 4.21 を一月の 4.42 で割つた 0.95 が一九〇〇年二月の連環比率となり、同年三月の 5.21 を二月の 4.21 で割つた 1.24 が三月の比率となる。同様の計算を一九一四年一月までの各月に就て行ふ。これを表示すれば次の表10となる。

表 9　Berlin 取引所市場割引率

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
1900	4.42	4.21	5.21	4.43	4.56	4.86	4.06	4.03	4.41	4.03	4.16	4.49
1901	3.57	3.22	3.79	3.37	3.19	3.20	2.81	2.26	2.68	2.83	2.84	2.96
1902	2.11	1.85	1.79	1.65	1.98	2.17	1.59	1.73	2.14	2.73	3.11	3.38
1903	2.26	1.90	2.69	2.61	3.09	3.29	2.96	3.30	3.68	3.32	3.46	3.54
1904	2.58	2.77	3.44	2.83	3.10	2.98	2.60	2.62	3.09	3.69	3.99	3.94
1905	2.56	1.93	2.22	1.91	2.30	2.34	2.12	2.23	2.99	4.00	4.62	4.99
1906	3.81	3.35	4.02	3.44	3.39	3.68	3.49	3.43	4.23	4.83	5.27	5.58
1907	4.90	4.68	5.40	4.65	4.44	4.66	4.44	4.62	5.08	4.91	6.61	7.07
1908	4.98	4.48	4.49	4.11	3.91	3.33	2.76	2.82	3.14	2.79	2.54	2.92
1909	2.24	2.17	2.66	1.98	2.32	2.91	2.28	2.13	3.06	3.83	4.47	4.34
1910	3.09	2.94	3.52	3.14	3.19	3.23	3.03	3.33	3.85	4.15	4.50	4.53
1911	3.50	3.07	3.34	2.96	2.84	3.38	2.46	3.03	4.16	4.32	4.51	4.86
1912	3.33	3.79	4.72	3.75	3.91	4.14	3.36	3.93	4.38	4.19	5.23	5.94
1913	4.68	5.15	5.90	4.56	5.31	5.53	4.65	4.88	5.35	4.71	4.45	4.57
1914	3.11											

(二) 各月について各十四の連環比率が得られたから、次にそれから各月の代表値を求めねばならぬ。代表値とは

表 10　連環比率

	一月/十二月	二月/一月	三月/二月	四月/三月	五月/四月	六月/五月	七月/六月	八月/七月	九月/八月	十月/九月	十一月/十月	十二月/十一月
1900		0.95	1.24	0.85	1.03	1.07	0.84	0.99	1.09	0.91	1.03	1.08
1901	0.80	0.90	1.18	0.89	0.95	1.00	0.88	0.80	1.19	1.06	1.00	1.04
1902	0.71	0.88	0.97	0.92	1.20	1.10	0.73	1.09	1.24	1.28	1.14	1.09
1903	0.67	0.84	1.42	0.97	1.18	1.06	0.90	1.11	1.12	0.90	1.04	1.02
1904	0.73	1.07	1.24	0.82	1.10	0.96	0.87	1.01	1.18	1.19	1.08	0.99
1905	0.65	0.75	1.15	0.86	1.20	1.02	0.91	1.05	1.34	1.34	1.16	1.08
1906	0.76	0.88	1.20	0.86	0.99	1.09	0.95	0.98	1.23	1.14	1.09	1.06
1907	0.88	0.96	1.15	0.86	0.95	1.05	0.95	1.04	1.10	0.97	1.35	1.07
1908	0.70	0.90	1.00	0.92	0.95	0.85	0.83	1.02	1.11	0.89	0.91	1.15
1909	0.77	0.97	1.23	0.74	1.17	1.25	0.78	0.93	1.44	1.25	1.17	0.97
1910	0.71	0.95	1.20	0.89	1.02	1.01	0.94	1.10	1.16	1.08	1.08	1.01
1911	0.77	0.88	1.09	0.89	0.96	1.19	0.73	1.23	1.37	1.04	1.04	1.08
1912	0.69	1.14	1.25	0.79	1.04	1.06	0.81	1.17	1.11	0.96	1.25	1.14
1913	0.79	1.10	11.5	0.77	1.16	1.04	0.84	1.05	1.10	0.88	0.94	1.03
1914	0.68											

勿論平均値に外ならないが、この場合算術平均よりも寧ろ中位數或ひは中央數項の算術平均が採用される。これは極端な値の影響を除く爲であつて、項數の多いとき、即ち與へられた材料が多くの年月に亙るときには中位數で差支へなく、そうでない場合には中央の數項の算術平均がよい。

表11

月別度數

連環比率	一月/十二月	二月/一月	三月/二月	四月/三月	五月/四月	六月/五月	七月/六月	八月/七月	九月/八月	十月/九月	十一月/十月	十二月/十一月
1.42									/			
1.40			/									
1.38												
1.36									/			
1.34											/	
1.32									/	/		
1.30												
1.28												
1.26										/		
1.24			/			/				/	/	
1.22			///					/	//			
1.20												
1.18			//		//	/			/	/		
1.16			/		//			/	/		/	
1.14			///		/				/		/	/
1.12		/								/	/	/
1.10								/	///			
1.08		/	/		/	//		//	///		/	/
1.06		/				/				/	//	////
1.04						///		//		/		/
1.02					//	/		/		/	///	//
1.00					/	//		//				//
0.98			/		/	/		/			/	/
0.96		/	/	/				/		/		/
0.94		///			////	/	//			/		
0.92							/	/			/	
0.90				//			/			/	/	
0.88		//		///			/			//		
0.86	/	///					//			/		
0.84				////		/						
0.82		/					///					
0.80				/			/					
0.78	//			/								
0.76	//			/			/	/				
0.74	/	/										
0.72	/			/			//					
0.70	//											
0.68	//											
0.66	//											
0.64	/											
0.62												

これを求める爲にパーソンズは上の表11の如き月別度數表 (Multiple frequency table) なる特殊の表を使用する。この表は月から月への變動の規則性の程度を判斷するに便利で、各月の各値が或る値に集中すればするほど季節變動の規則性が明示されるのである。

（三）右の月別度數表から中位數と中央八項平均とを求めれば次表12の如くなる。本例の如くこの両者の極めて類似してゐる場合には何れを用ふるも差支へない。

表12

	一月/十二月	二月/一月	三月/二月	四月/三月	五月/四月	六月/五月	七月/六月	八月/七月	九月/八月	十月/九月	十一月/十月	十二月/十一月
中位數	0.72	0.92	1.19	0.86	1.04	1.05	0.85	1.04	1.17	1.05	1.08	1.06
中央八項の平均	0.73	0.92	1.19	0.85	1.06	1.05	0.86	1.04	1.17	1.04	1.08	1.06

勿論單に中位數を見出す爲には斯かる月別度數表は必ずしも必要ではない。單に大さの順に配列して中央項を採ればよいのであつて、例へば一月に就て言へば 0.86 0.78 0.78 0.76 0.76 0.74 0.72 0.70 0.70 0.68 0.68 0.66 0.66 0.64 と配列すれば中位數が 0.72 なる事は明かである（この場合項數は十四であるから、中位數は第七項と第八項の平均である。然るに第七項の 0.72 は0.72-074 を、第八項の 0.70 は 0.70-0.72 を意味するから、その平均は當然 0.72 となる）。併し月別度數表によれば、求めた中位數が適當の平均値なるか否かゞ容易に判斷されるのである。

（四）今中位數の代りに中央八項の算術平均を採つたとして、その連鎖比率を求めれば表13の通りである（一月の連鎖比率は〇・七三を直ちに一〇〇と置いたに過ぎぬ。二月の比率九二は一月の一〇〇に二月の〇・九二を乗じたものである。以下同樣。最後の一月の比率九五は十二月の比率一三〇に一月の平均〇・七三を乗じたものである）。

（五）斯くて得られた連鎖比率は一〇〇に始まつて九五に終つてゐるが、元來は一〇〇に終るべき性質のものであ

表13

	中央八項の平均	連鎖比率
一　月	0.73	100
二　月	0.92	92
三　月	1.19	109
四　月	8.6	94
五　月	1.06	100
六　月	1.05	105
七　月	0.86	90
八　月	1.04	93
九　月	1.17	109
十　月	1.04	114
十一月	1.08	123
十二月	1.06	130
一　月		95

るから、その差の五は二月から最後の一月までの間に於て順次修正さるべき分である。これが最も簡單な修正方法はこの差を十二分し、得たる〇・四一六を二月の九二に加へ、その二倍の〇・八三二を三月の一〇九に加へ……その十二倍の五を最後の九五に加へればよい。斯くすれば一〇〇に始まつたものが一〇〇に終るわけで、これによつて季節變動の本質に合致した連鎖比率が得られる。最後にこの修正された連鎖比率の平均一〇七にて各比率を割れば總和が一二〇〇となるところの季節指數が求められるのである（表14）。

表14

	修正された連鎖比率	季節指數
一　月	100	93
二　月	92	86
三　月	110	103
四　月	95	88
五　月	102	95
六　月	107	99
七　月	93	87
八　月	96	90
九　月	112	104
十　月	118	110
十一月	127	118
十二月	135	127

併し最初の一月と最後の一月の値の差が算術的に十二ケ月に均分される修正法は理論的には缺陷がある。差が僅少なる場合にはこの方法で充分であるが、大なる差の生じた場合には寧ろ複利的に配分するのが正しいであらう。今、一月から次の一月までの連鎖比率を 100, C_2, C_3……C_{12}, C_{13} とすれば

$$100\,(1+d)^{12}=C_{13}=95$$

d が計算されゝば、修正された各月の連鎖比率は

$$100,\ \frac{C_2}{(1+d)},\ \frac{C_3}{(1+d)^2}\cdots\cdots\frac{C_{12}}{(1+d)^{11}}\quad\frac{C_{13}}{(1+d)^{12}}$$

實際にこれを計算するには、當然對數に書改めねばならぬ。次表はその手續きを示したもので、例へば三月の修正連鎖比率 $\frac{C_3}{(1+d)^2}$ は、對數では $\log C_3-2\log(1+d)$ となるから、一般に $\log C-(n-1)\log(1+a)$ によつて表はされる事は說明する迄もないであらう。

表15

	C	logC	(n−1)×log(1+d)	logC−(n−1)×log(1+d)	修正された連鎖比率	指數
一　月	100	2.00000	0.00000	2.00000	100	93
二　月	92	1.96379	0.99814—1	1.96565	92	86
三　月	109	2.03743	0.99628—1	2.04115	110	103
四　月	94	1.97313	0.99442—1	1.97871	95	88
五　月	100	2.00000	0.99256—1	2.00744	101	94
六　月	105	2.02119	0.99070—1	2.03049	107	99
七　月	90	1.95424	0.98884—1	1.96540	92	86
八　月	93	1.96848	0.98698—1	1.98150	96	90
九　月	109	2.03743	0.98512—1	2.05231	113	105
十　月	114	2.05690	0.98326—1	2.07364	118	110
十一月	123	2.08991	0.98140—1	2.10851	128	119
十二月	130	2.11394	0.97954—1	2.13440	136	127
一　月	95	1.97772	0.97772—1	2.00000		

平均=107

斯くて得た修正された連鎖比率をその平均 107 で割れば、十二ヶ月の合計が 1200 になるところの季節指數が得られる。この指數を前の算術的配分法によつて得た指數と比較すれば、兩者の甚だ類似せるを見るであらう。これは本例に於ける始めの一月と終りの一月との差が僅少なるに基因するのであつて、總ての場合にかうなるとは限らないのである。

右の如くにして得られた季節指數は月の値と月平均値との比を示すもの、即ち典型的月値と典型的月平均値との比を示すものである。この典型的月平均値の中には季節の影響は全く排除されてゐると見てよい、蓋し平均する事によつて各十二ヶ月の各種季節變動は除去されてゐるからである。指數が百よりも大なるか、等しきか、又は小なるかによつて、典型的月値が典型的月平均値よりも小さいか、等しいか、又は大きいかゞ判るのである。即ち季節指數は季節變動に影響されぬ平均値から典型的月値が幾何の偏差を有するかを數字的に表はすものであるから、吾人はこれを利用して一經濟系列を季節變動曲線と、季節變動に影響されざる曲線とに分解する事が出來るのである。即ち或る月の原數をその月の季節指數にて割つた商が、季節變動に影響されざる値となるのである。

表 16　季節變動を除去せるもの

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
1900	4.75	4.90	5.06	5.03	4.85	4.91	4.72	4.48	4.20	3.66	3.50	3.54
1901	3.84	3.74	3.68	3.83	3.39	3.23	3.27	2.51	2.55	2.57	2.39	2.33
1902	2.27	2.15	1.74	1.88	2.11	2.19	1.85	1.95	2.04	2.48	2.61	2.66
1903	2.43	2.21	2.61	2.97	3.29	3.32	3.44	3.67	3.50	3.02	2.91	2.79
1904	2.77	3.22	3.34	3.22	3.30	3.01	3.02	2.91	2.94	3.35	3.35	3.10
1905	2.75	2.24	2.16	2.17	2.45	2.36	2.47	2.48	2.85	3.64	3.88	3.93
1906	4.10	3.90	3.90	3.91	3.61	3.72	4.06	3.81	4.03	4.39	4.43	4.39
1907	5.27	5.44	5.24	5.28	4.72	4.71	5.16	5.13	4.84	4.46	5.55	5.57
1908	5.35	5.21	4.36	4.67	4.16	3.36	3.21	3.13	2.99	2.54	2.13	2.30
1909	2.41	2.52	2.58	2.25	2.47	2.94	2.65	2.37	2.91	3.48	3.76	3.42
1910	3.32	3.42	3.42	3.57	3.39	3.26	3.52	3.70	3.67	3.77	3.78	3.57
1911	3.76	3.57	3.24	3.36	3.02	3.41	2.86	3.37	3.96	3.93	3.79	3.83
1912	3.58	4.41	4.58	4.26	4.16	4.18	3.91	4.37	4.17	3.81	4.39	4.68
1913	5.03	5.99	5.73	5.18	5.65	5.59	5.41	5.42	5.10	4.28	3.74	3.60

右に算出した季節指數は平均を百として示してあるが（A）、これ以外に平均を一として示す事もあるし（B）、又百分比偏差として示すこともある（C）。即ち三月の指數一〇三を一・〇三としても又は＋3 としてもよく、一月の指數九三を〇・九三としても又は－7 としてもよい。これを表示すれば

表 17

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	平均
A	93	86	103	88	94	99	86	90	105	110	119	127	100

B	0.93	0.86	1.03	0.88	0.94	0.99	0.86	0.90	1.05	1.10	1.19	1.27	1
C	−7	−14	+3	−12	−6	−1	−14	−10	+5	+10	+19	+27	0

A及びBは單に單位を異にするに過ぎないから、Bによつて季節變動を除去する方法はAによる方法と全く同じである。然るにCはA及びBと全く構成が異るから、これによつて季節變動を除去する方法も異つて來る理である。Cは上述の如く百分比偏差を示すものであるから、これによつて關係數曲線を季節變動曲線と季節變動に影響されざる曲線とに分解しうるので、この點に於てA及びBが與へられた系列そのものを分解しうるのとは趣きを異にする。

第三節　季節變動に於ける自然的及び人爲的要素の分解

季節變動を生ぜしむる原因は、既述の如く、時には天候の如き自然的現象であり、又時には制度及び習慣の如き人爲的現象である。これら二ケの原因は素より單獨に作用する事がありうる。例へば降雨量や溫度の如きものは全く自然的原因に基くもので、毫も人爲的原因に左右されないし、又これに反して毎月末に於ける貨幣需要の增加の如きは明かに人爲的原因のみに基くものと言へるであらう。

然るにこの自然的及び人爲的の二原因は幾多の經濟現象に於ては、大なる程度に協働してゐるのである。即ち或現象に就て測定された季節變動指數は右二要素の合成と認められるのである。例へば二月の交通量の減少は、一部は氣候寒冷の結果であり、一部は暦日の少い結果であるから、畢竟自然的原因と人爲的原因との合成的結果と認めざるを得ない。この種の現象は枚擧に遑なきほど多數存在するから、問題は求められた季節指數を更に分解し、幾何が自然的原因に幾何が人爲的原因に歸せられるかを測定しうるや否やといふ事になる。言ふ迄もなくこの二要素の結合は大部分の場合に毎年同一條件の下に行はれる。前述の二月の交通量に就て見ても、二月は毎年必ず氣候上最も寒冷な月に屬し、同時に毎年必ず暦日上最も日數の少い月である。中元直前の賣上の增加は素より贈答なる習慣卽ち人爲的要素にも歸せしめられるが、同時にその頃は夏の必要品を準備する時期であり、從つて一部は自然的要素にも歸せしめられるのである。これらは毎年規則正しく繰返へされるのであるから、季節指數は假令事實は右二要素の合成であつても、實際の目的からすれば、これを一ケの總體として認めて差支へなく、必ずしもこれを更に分解する必要はないとも言へるのである。

併し季節變動を生ぜしめる二原因は元來その性質を異にするもので、一方の自然的原因の全く不變的なるに對し他方の人爲的原因は多大の程度に可變的なるものである。二月の氣候の寒冷なる事は不變的事實と認められるが、その暦日の少い點に至つては、若し新たに十三ケ月制その他の新暦が採用され、毎月の日數が均等化されゝば忽ち消滅する。斯かる習慣や制度は可成り動搖的であるから、統計的に求めた季節指數をその異る合成要素に分解する事は、現象の眞の認識の上から極めて重要なのである。然るにこの分析の方法は高度の數學的操作を必要とし、これを試みた者は極めて少く、我國に於てはその方法の紹介すら殆ど行はれてゐないやうである。筆者の知る限りでは、この方面

に於て最も優れた結果を齎らした者はワーゲマンの協力者パウル・ロレンツである。彼の Die Bestimmungsgründe für die Saisonschwankungen des Berliner Marktdiskonts in der Vorkriegszeit (Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, 1928, Heft 4. Teil A) は主としてこの問題を取扱つたものである。

パーソンズの季節指數算出法を說明する爲に利用したベルリン市場割引率の季節變動表を再考されたい。パーソンズ法によつて求めた該指數は既述の見く

一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
93	86	103	88	94	99	86	90	105	110	119	127

である。右表から、年末の指數の大なる事は一見して明かであるが、同時に各四半期末卽ち三月、六月、九月及び十二月の指數の槪して大なる事も認められる。斯く各四半期末に割引率の高まるのは、畢竟ベルリン市場に於ける決濟上の習慣に基くもので、從つて人爲的原因に基く季節變動と見てよいのである。反之、年末に特に高まるのは、農產物の收穫に隨伴する一般的結果であり、從つて自然的原因に基く季節變動と認められるのである。ロレンツはこの材料からこの兩者の分離を行はんとする。

氏の考案した測定法は二つある。一は殆ど數學的操作を必要とせざる素朴な方法であり、他は調和解析法に據る複雜な方法である。今、その簡單な方法に就て見るに、季節指數の高まる各四半期末、三月、六月、九月及び十二月の各指數とその各々の隣接せる月の指數の差は平均十三である。依つてこの十三を以て直ちに人爲的季節指數と見做すのであつて、これを表示すれば

一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
0	0	13	0	0	13	0	0	13	0	0	13

となる。斯くて自然的季節指數は原指數から右の人爲的指數を控除した殘餘によつて示される事となり、これを表示すれば

一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
93	86	90	88	94	86	86	90	92	110	119	114

となるのである。併しこの方法に於ては各四半期末の月の指數とその隣接月の指數との差を平均したのみであるから、平均なるものゝ本質上、時には著しく實際と異つた結果に到達する惧がある。故により嚴密な結果を求めんとすれば、次の第二の方法に據らざるを得ないのである。

パーソンズの方法によつて求めた如上の季節指數は各月の中央について求められたものであるから、これをグラフに描けば十二の點を連結した斷續線となる。併し季節變動は元來連續的なるべきものであるから、事實はかゝる斷續

線の代りに曲線を以て示さるべきである。而して季節指數は一ヶの周期運動であるから、當嵌めらるべき曲線は當然三角函數でなければならぬ。ロレンツは斯くて右の材料について

$$y=100+12{,}14\sin(117{,}5^\circ+x)+9{,}27\sin(151^\circ+2x)+8{,}68\sin(101{,}5^\circ+4x)$$

なるフーリエ曲線を當嵌めた。次の圖2Aの點線は季節指數を、實線はそれに當嵌められた右のフーリエ曲線を示すが、この曲線が甚だよく季節指數に接近して居る事は容易に窺へるであらう。

斯くて問題はこのフーリエ曲線を更に分解すればよいのであつて、ロレンツはこれを次の二つの方程式を以て示してゐる。

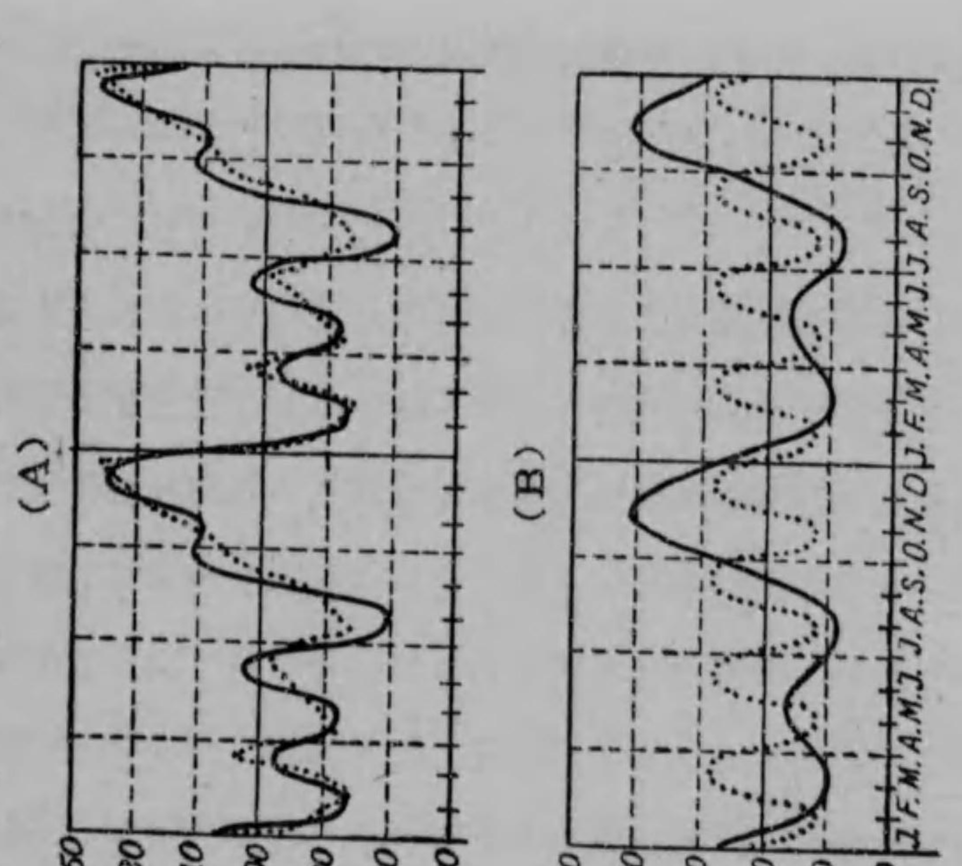
(1)　$y=100+8{,}68\sin(101{,}5^\circ+4x)$

(2)　$y=100+12{,}14\sin(117{,}5^\circ+x)+9{,}27\sin(151^\circ+2x)$

（一）の方程式 $y=100+8{,}68\sin(101{,}5^\circ+4x)$ 即ち左圖（B）に於て點線を以て示された曲線は、一年の各四半期末の直前（三月、六月、九月、十二月の直前）に於て高まり、各四半期中央直前（二月、五月、八月、十一月の直前）に於て低い規則正しい四ヶの波狀を作る。この波狀はベルリン金融市場の慣習に合致する。換言すれば右の方程式は人爲的原因に基く季節變動を反映するものと認められるのである。（二）の方程式即ちB圖の實線を以て示された曲線は勿論最初の季節指數に當嵌められたフーリエ曲線から（一）の方程式を控除した殘餘である。然るに（一）の方程式は人爲的原因に基く季節變動を示すから、（二）の方程式は當然自然的原因に基く季節變動を示すものと考へる外はないのである。

今この點を考察するに、この（二）の方程式の示す曲線は聯邦鐵道貨車運轉數の季節指數の曲線に酷似して居るが、(註1) 後者は言ふ迄もなく財貨取引量を反映するものである。そして財貨取引量が當然金融市場に影響を與へて割引利率を變動せしめる事は特に指摘する迄もない。ロレンツ曰く「故にこの二つの曲線の酷似は毫も不思議ではなく、寧ろ吾人の主張する事實、卽ちフーリエ曲線を援用して季節指數を分析することは經濟的に解釋しうべき合成要素の發見に導くといふ事實を更に確認するものである」(註2) と。

圖1



このベルリン市場割引利率季節指數の「自然的」要素が上記の如き經過を示す原因は、貨車運轉數の季節指數と同じく結局氣候的條件に在るのである。この二ヶの曲線が秋季に高まるのは、穀物、甜菜及び馬鈴薯の如き主要農産物の收穫がこの時期に鐵道輸送量や資金に對する需要を增加せしめるからであり、年首の低下、春期の若干の上昇及び夏期の低下等も同樣の自然的條件から充分に說明がつくのである。

季節變動を生ぜしめる自然的及び人爲的の二原因は、上掲圖1Bの示す通り、或る時期には同一の方向に働いて季節指數を大ならしめるが、又或る時期には反對の方向に働いて或る程度まで相殺され從つて季節指數を小ならしめるのである。斯く季節指數は異る二ヶの要素の合成物である事が、季節指數をこの要素に分解する必要の科學的根據をなすのである。

素より如上の方法によつては各月の內部の變動樣態は知るを得ない。蓋し與へられた季節指數は月から月への變動を示すのみだからである。ロレンツはその "Bestimmungsgründe für die Saisonschwankungen des Berliner Marktdiskonts" に於ては、一九〇六年五月一日より一九一四年八月三十日までの毎日の割引利率を用ひ、この八年間の全部に亙つて各々半ヶ月についての平均を求め、これよりパーソンズ法によつて季節指數を算出し、この指數をば上記のフーリエ曲線によつて全年、半年、三分一年……二十三分一年、二十四分一年等の變動に分解してゐる。併しこれは單に計算の可能性を示すに止まり、實際的見地からは無意味のものが多い。

フーリエ曲線の適用によるロレンツの如上の方法がその他の經濟系列に幾何の程度まで應用せられるかは今後の研究に俟つ外はない。併しその可能性は右の試みに於て可成り明瞭に示されたと言へる、この方面の今後の發達は充分期待してよいであらう。

（註1） Lorenz-Höhere Mathematik, S. 46. abb. 17 を參照せよ
〃 Saisonschwankungen des Berliner Marktdiskonts, S. 34. abb. 2.

（註2） Lorenz—Höhere Mathematik, S. 46.

第四節　循環運動及び不規則變動の測定

始めに說明した通り、時系列に內在する變動形態は長期傾向、季節變動、循環運動及び不規則變動の四箇に分類される。上記の方法によつて最初の二形態、即ち長期傾向と季節變動とが測定されたならば、この兩者をば原系列から除去する事によつて、殘餘の二形態、即ち循環運動と不規則變動とを求め得る筈である。勿論この場合には、この二つの運動は未だ分離せず、相合して現はれて來るから、何等かの手段によつてこの兩者を分離する必要がある。この手續は後に述べる事として、先づ原系列から長期傾向と季節變動とを除去する方法を考へて見よう。いま或る系列の某年某月の數値は九六萬圓、長期傾向値は八五萬圓、季節指數は九三(%)とすれば、$96 \div (85\times93) = 121.5(\%)$ の算式によつて、循環運動と不規則變動との大さを示す事が出來る。何となれば右式に於ける 85×93 は該月の正常値と認められるから（長期傾向値八五萬圓は長期間について見た該月の正常値であり、季節指數九五%は一年內に於ける該月の正常値であるから、從つてこの兩者を總括した 85×93 は該月の眞の正常値と認めざるを得ない）、この正常値と原系列との隔りは、當然殘餘の二運動形態の所產に外ならぬからである。即ち一般に或月の與へられた數字（原系列）を y、その月の長期傾向値と季節指數をそれ〴〵T及びSとすれば、その月の循環運動及び不規則變動の大さは $\frac{y}{T\times S}$ である。この計算を全期間の各月について行へばよい。次の假設例について見られたい。これは一九二一年

表 1

年　月 (1)	原　數 (單位 百萬噸) (2)	傾向値 (單位 百萬噸) (3)	季節指數 (%) (4)	正常値 (3)×(4) (5)	循環＋不規則 (%) (2)÷(5) (6)
1921					
一　月	25.76	17.60	111.8	19.68	130.9
二　月	24.73	17.88	117.4	20.99	117.8
三　月	17.20	18.15	109.7	19.91	86.4
四　月	14.17	18.42	104.7	19.29	73.4
五　月	11.70	18.70	91.5	17.11	68.4
六　月	13.00	18.97	83.6	15.86	82.0
七　月	10.88	19.24	76.3	14.68	74.1
八　月	12.95	19.51	78.2	15.26	84.8
九　月	15.28	19.79	92.8	18.37	83.2
十　月	16.83	20.06	105.0	21.06	80.0
十一月	19.36	20.33	110.5	22.46	86.2
十二月	20.00	20.61	118.5	24.42	81.9
1931					
一　月	48.78	50.39	111.8	56.34	76.6
二　月	47.50	50.67	117.4	59.49	79.8
三　月	43.46	50.94	109.7	55.88	77.8
四　月	42.84	51.21	104.7	53.62	79.9
五　月	39.70	51.49	91.5	47.11	84.2
六　月	37.22	51.76	83.6	43.27	86.0
七　月	85.08	52.03	76.3	39.70	88.3
八　月	33.10	52.30	78.2	40.90	80.9
九　月	38.12	52.58	79.8	48.79	78.2
十　月	42.96	52.85	105.0	55.49	77.5
十一月	46.46	53.12	110.5	58.70	79.2
十二月	44.86	53.40	118.5	63.28	70.9

一月から一九三一年十二月に至る十一年間の某商品生産額に關するものであるが、ここでは單に最初と最後の二年分だけを擧げて置く。その傾向値は最小自乘法によつて當嵌められた直線の値であり、季節指數は連環比率法によつて測定されたものである（右表には單にその結果のみを記した）。

さて斯かる方法によつて原系列から長期傾向及び季節變動を除去し得るが、併し斯くして得た結果は循環運動と不規則變動との混合物であるから、次にこの兩者を分離せねばならぬ。然るに現在のところ、不規則變動を分離せしめる眞に適當な方法は無いのである。これは不規則變動なるものは全く偶然的理由によつて發生するもので、その生起の時期及び程度は時によつて著しく相違し、決して一率の取扱ひを許さないからである。併し既に説明した移動平均法を適用すれば、或る程度まで不規則變動を相互に相殺し、從つて眞の循環運動を抽出する事が出來る筈である。幾箇月の移動平均が適當なるかは一概に言へないが、一般に三箇月又は五箇月移動平均が用ひられるやうである。前例の結果に三箇月移動平均を適用すれば次の如くなる。但しこの場合、中心となる月の値に重きを置くため、二項式加重法を採つた。故に一九二一年二月の平均一一三・二は

$$\frac{130.9+2\times117.8+86.4}{4}$$

として求められたものである。(註1)

圖 2　循環運動

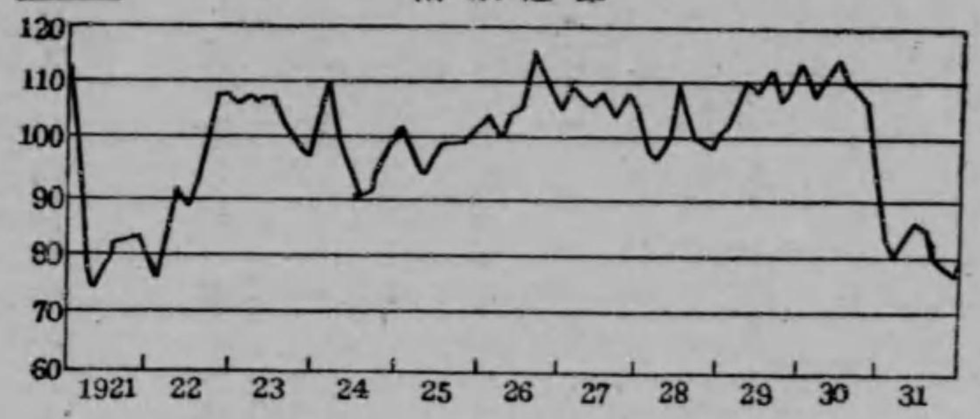


表 2

(1)	(2)	三ケ月移動平均 (加重式)
1921		
一　月	130.9	—
二　月	117.8	113.2
三　月	86.4	91.0
四　月	73.5	75.5
五　月	86.4	73.1
六　月	82.0	76.6
七　月	74.1	78.8
八　月	84.9	81.8
九　月	83.2	82.8
十　月	79.9	82.8
十一月	86.2	83.6
十二月	81.9	83.5
1931		
一　月	86.6	89.7
二　月	79.8	81.0
三　月	77.8	78.8
四　月	79.9	80.5
五　月	84.3	83.6
六　月	86.0	86.2
七　月	88.4	85.9
八　月	80.9	82.1
九　月	78.1	78.6
十　月	77.4	78.0
十一月	79.1	76.4
十二月	70.9	—

斯くて求められた移動平均値は、不規則變動の略ゝ除去された値であるから、これを以て循環運動そのものと見てよいであらう。從つて若し不規則變動のみを知らんとする

たらば、右の移動平均値との差を採ればよい。例へば一九二一年二月の不規則變動は 117.8−113.2=4.6 (%) である。

上述の如くして求められた十一年間の循環運動は圖2の如き圖表によつて示される。Y軸の一〇〇なる目盛は正常の狀態を示すものであるから、曲線が該線の上にあるか、下にあるかによつて、その時の狀態が正常狀態以上なるか以下なるかを判斷する事が出來る。循環運動とは所謂景氣變動に外ならぬから、景氣推移の樣態は物價・生產額・就業率等の主要系列について求められた斯かる圖表から知り得るのである。

(註1) 二項式加重とは二項式展開に於ける各項の係數を以て、その項の重要さの程度と認める事である。卽ち甲、乙、丙三項を平均する場合には、$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ の係數を採ればよい。$a^2=1\times a^2$, $2ab=2\times ab$, $b^2=1\times b^2$ であるから、係數は 1, 2, 1 となり、從つて $\frac{\text{甲}\times1+\text{乙}\times2+\text{丙}\times1}{4}$ として平均値を求める。これを移動平均に適用すれば、右の平均値は乙の値となる。卽ちこの方法によれば、乙の値を定める爲に、乙に對して他の諸項の二倍の重要さを附與した事になる。

第八章　相關々係(I)

第一節　相關々係の概念

第一項　因果關係と相關々係

度數分布表及び時系列の解析によつて吾人は與へられた個々の統計系列を取扱ふことを學んだが、これは未だ統計的方法の核心には觸れてゐない。蓋し現實に於ける事象は決して各々獨立して存在するものではなく、必ず他の諸事象と多かれ少かれ關聯し、常に原因結果の關係に立つてゐるからである。死亡率は健康、年齡、體性、職業、季節、其他種々の要因によつて決定される。米穀收穫高は耕地面積、耕作技術、土地の豐沃度、天候其他種々の要因によつて決定される。故に單に死亡率又は收穫高を示す一系列のみを對象としてゐる限りは、如何に高度の解析を施したところで、如上の關聯は依然として不明である。然るにかゝる關聯を明かにせざる限りは、吾人は事象を律する法則を云々するを許されない。死亡率又は收穫高の研究は、結局はそこに現はれる大小增減の原因を卽ち法則を求めることでなければならぬ。惟ふに因果律の發見が凡ゆる科學の窮極の目的たることは既に冒頭に論じたところである。然らば科學研究の方法としての統計的方法も亦この方向に寄與することに於てその存在の意義が發揮されるのである。卽

ち個々の統計系列のみを取扱ふことから一歩を進め、二つ又はそれ以上の統計系列を同時に取扱ふことによつて系列間の因果關係を明示する方向に向はねばならぬ。

併し因果關係の確定は實は統計學の課題ではない。それは最早や統計學の領域を超えてゐるのである。事象間の關聯には厚薄樣々の程度があつて、最も密接な卽ち必然的な關聯を函數關係といひ、單に蓋然的な關聯を相關々係 (Correlation) といふ。因果關係とは函數關係のうち、一事象が他事象を獨立變數とする從屬變數なることが論理的に確定された場合に外ならない。溫度(x)と氣體の體積(y)との關係は $y=f(x)$ であつて、$x=f(y)$ ではないことは論理上明かであるから、溫度を原因とし體積を結果とする因果關係なることが斷言されるのである。然るに卒然溫度の系列と體積の系列とを與へられたのでは――換言すれば單に純數學的に眺めたのでは――何れが獨立變數（原因）なりや何れが從屬變數（結果）なりやは全く見當がつかぬであらう。純粹の統計學の立場はこの純數學の立場と毫も異るものではない。

素より右の如き極めて單純な關係に於ては何れが原因なるかは常識的にも明かであらう。併し無限に錯綜した社會事象の間には甲乙間に時には甲が、時には乙が原因となることもあつて、一義的な因果關係は存在しないのが寧ろ原則である。例へば出生率と死亡率との間には一般に高度の比例關係ありと言はれてゐるが、これに就て直ちに因果關係を規定しうるであらうか。出生率の上昇が必然に乳兒死亡數を增大せしめ延いて一般死亡率を上昇せしめるとも言へるし、逆に死亡率の上昇が出產を奬勵して出生率を上昇せしめるとも言へよう。卽ち時により所によつて關係は絕えず變轉しつゝあるのであつて、而もこのことは統計系列の上には必ずしも明瞭には現はれないのである。勿論原因は結果に先行するから、時系列の形態で示された出生・死亡の二系列が時間的差違を明示してゐれば、或ひは統計數字も因果關係も表明してゐると言へるかも知れぬが、併しそれとて決して決定的なものではない。蓋し現實には同時に他の種々の要因が出生・死亡の決定に參加してゐるからである。

卽ち因果關係の規定は統計自體の任務たり得ない。それは當該事象を對象とする各々の科學の任務たるものである。統計學にして能くこの任務を果しうるならば、他の一切の科學は殆ど存在の意義を失はねばなるまい。そこで統計學の課題としては事象間に果して相關々係ありや否やを正確に測定することで滿足すべきであるが、この爲には一應相關々係を函數關係として規定する必要がある。そして、若し斯かる關係の存在が斷定され得た曉には、他の科學がかかる相關々係を更に因果關係にまで追究すべきである。換言すれば統計學は相關々係の測定によつて、他の科學に對して貴重なる出發點を提供するものである。統計學を形式的方法學と解する限り、これは自明の理であらう。

第二項　相關々係の形態

相關々係卽ち事象間の蓋然的關係には次の如き種々の形態がある。

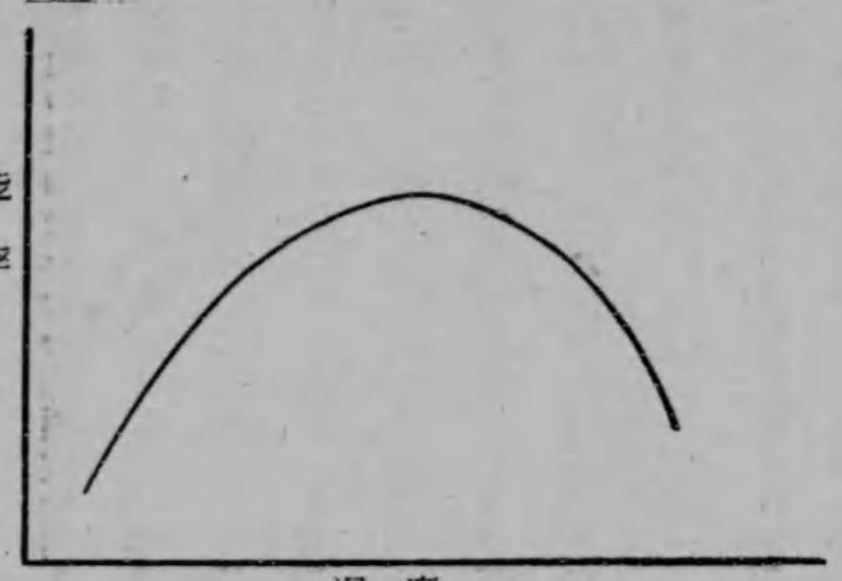
(1) 順相關と逆相關。甲乙二事象間に甲事象が增大するに連れて乙事象も亦增大し、反對に甲事象が減少するに連れて乙事象も亦減少する關係が存在するときは、甲乙二事象間に順相關 (Direct correlation) ありといふ。物價と兌換

券發行高、卸賣相場と小賣相場、價格と供給量、熟練程度と賃銀等この例である。これに對して甲乙二事象間に甲事象が增大するに連れて乙事象は減少し、反對に甲事象が減少するに連れて乙事象は增大する關係が存在すれば、甲乙二事象間には逆相關 (Inverse correlation) があるといふ。健康と死亡率、價格と需要量、景氣と失業等この例である。後述する相關係數は必ず正か又は負の記號を伴ふが、正は順相關を負は逆相關を意味する。

(2) 直線相關と曲線相關。甲事象が絕對量に於てA單位だけ增大するに連れて乙事象も絕對量に於てB單位だけ增大又は減少する關係があるときは、兩者の間に直線相關があるといふ。これは直線的回歸線を以て示しうる相關々係といふ意味である。寒暖計の攝氏と華氏の間には確實にこの關係があり、又もし運賃が距離と正比例して定められてゐる國に於ては、運賃と距離との間にはこの關係がある。社會事象の大部分については嚴格にはこの關係は認められないが、併し大略的には——又は限られた範圍內に於ては——この形態の關係は極めて屢々認められる。そしてこの形態が一切の相關々係形態の基本であつて、相關係數とはこれを數學的に表現したものである。

これに對して直線的回歸線を以て示し得ない相關々係は總て曲線相關である。但し甲事象が增大するに連れて乙事象が一定比率だけ增大（又は減少）する關係——即ち複利關係——がある場合には、對數を用ひれば直線關係と轉化するから、前記の直線相關を以て律し得るのである。然るに例へば溫度と能率の關係を見るに、如何なる仕事にも最適溫度なるものがあつて、この溫度に達する迄は、溫度の上昇は能率の上昇を伴ふが、この溫度を超えれば超えるほど

圖1



能率は減退する。この種の關係は上圖の如き所謂拋物線的關係である。年齡と死亡率、投下勞働量と收穫增量の關係の如き、何れもこの形態の相關々係である。斯かる拋物線的又はそれに類似の形態の相關々係を總稱して曲線相關といふのである。

曲線相關の程度を示す係數としては相關比 (Correlation ratio) 或ひは相關指數 (Index of correlation) が用ひられる。直線的相關の程度を示す相關係數は必ず正負の記號を伴ふに對し、相關比又は相關指數は斯かる記號を伴はない。蓋し相關係數に於ける正負の記號は、直線の上昇又は下降を意味するが、曲線相關は上昇と下降の兩者を兼備するから、これに正負の記號を與へることは無意味でもあり、不可能でもあるからである。

(3) 單純相關、多元相關、部分相關。二つの事象間の相關を單純相關 (Simple correlation) といふ。これには直線相關と曲線相關の二つがある。これに對して三つ又は三つ以上の事象間の相關は多元相關 (Multiple correlation) である。年齡と物價と賃銀の關係、又は年齡と體性と所得と死亡率の關係なぞこの例である。惟ふに社會事象の認識の困難さは、關係の複雜さに基くのである。關係の複雜さは勿論物理事象についても言ひうるところであるが、斯かる複雜さ

は吾人の力によつて單純化することが出來る。例へば實驗室に於ては吾人は氣壓その他の要素を一切消去して溫度と體積の關係を求めることが出來る。然るにこの方法は社會事象に就ては行ひ得ない。賃銀は年齡と關係あることは事實であるが、更に體性、能率、業種、法律規定その他萬般とも亦關係があり、後者を消去して賃銀と年齡のみを取り出すことは不可能である。卽ち社會事象は多元相關が本來の姿である。

併しこの複雜性をそのまゝ考慮に入れて相關々係を決定せんとするが如きは人智の及ぶところではない。それは恰も無數の未知數を含む方程式を解かんとするのと同じである。そこで實際の問題としては第一に出來うる限り未知數の數を制限する。換言すれば一事象に特に關係の深い若干事象のみを擧げ、これらとの相關々係を求めるのである。故に多元相關と言つても、多くの場合、三つ乃至四つの事象をとり、その一つと他の二つ又は三つとの關係を云々するのである。第二には現實の多元相關は曲線相關を原則とするが、計算に於ては一般に直線相關と假定する。然らずんば到底計算の煩に堪へぬからである。斯かる前提に於て相關の程度を示す方法は二つあつて、一は多元相關係數、他は部分相關係數である。假りに甲乙丙の三事象ありとし、甲と乙丙との相關を求むるに、多元相關係數は乙と丙とを結合して、これと甲との關係を示し、部分相關係數は假りに丙を一定とし、その條件の下に於て甲と乙との關係を示すのである。

〔註〕甲乙間の相關を云々する場合、甲乙共に數量を以て表現せられてゐるのが原則である。併し時には兩者又は一方が非數量的なる場合もある。出席率と合格・不合格の關係（出席率は數量、合格不合格は非數量）とか、父の頭髮の色と子のそれの關係（兩方とも非數量）の如きこれである。これらの相關程度を測定する爲に種々の方法が案出されてゐるが、本書ではこれに觸れない。

第二節　相關點圖

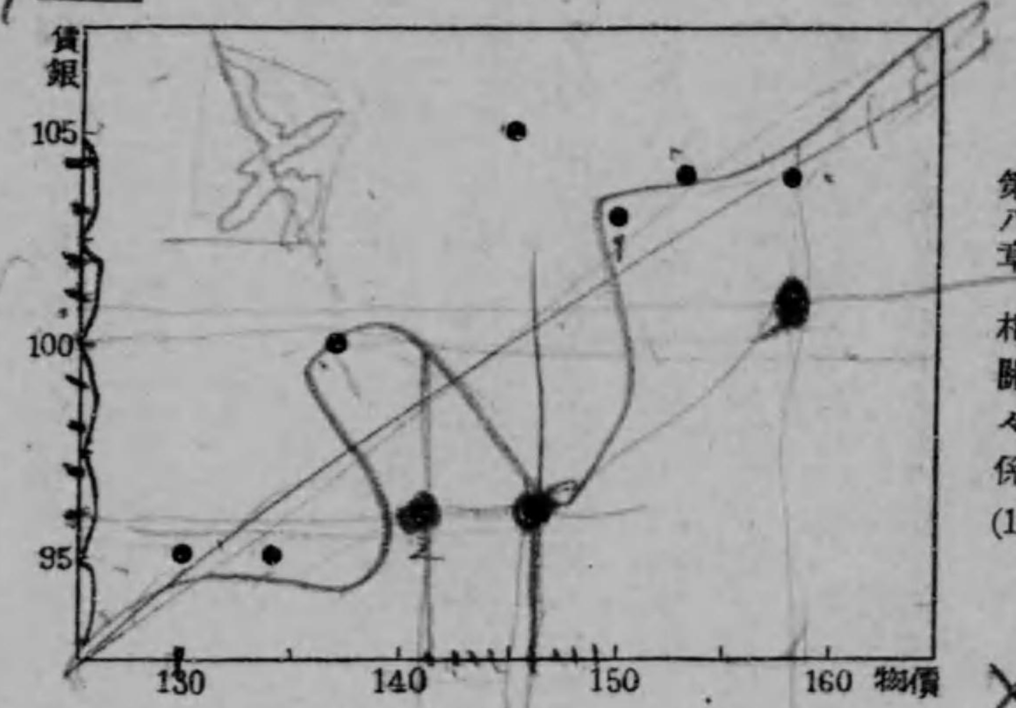
個々の項の與へられた二箇の統計系列の間に相關々係があるか否かは、相關點圖 (Scatter Diagram) なる特殊の圖表を作つて見れば容易に見當がつく。相關點圖とは二系列の一方を縱軸に、他の一方を橫軸にとり、二系列の關係をば座標點によつて示した圖表をいふ。茲に最も簡單な例によつて說明しよう。上表は十年間の物價と賃銀とを示す假設例であるが、この表の物價の欄と賃銀の欄とを對比するに、兩者の間に一義的な關係卽ち嚴格な數學的函數關係は認められない。一般に賃銀は物價に追隨すると言はれるが、常に必ずしも然りとは言へない。右表に於ても第十年目に於ては前年よりも物價は下り乍ら賃銀は却つて上つて居り、また第三、五及び九年目に於ては前年よりも物價は下つて居り乍ら、賃銀は少しも動いてゐない。

表 1

年次	物價 X	賃銀 Y
1	158	101
2	146	96
3	141	96
4	134	95
5	130	95
6	137	100
7	150	103
8	158	104
9	153	104
10	145	105

併しその他の年について見れば、物價の上つた年には賃銀も上り、物價の下つた年には賃銀も亦下り、所謂順相關の存在する事を示してゐる。與へられた材料が斯くの如く僅かであれば、單に表を一覽する事によつて相關々係の存否を略ゝ推察し得るであらうが、材料が豐富となれば目測では中々見當がつかない。斯かる場合には次圖の如き相關

圖 1



點圖を必要とする。二直線を直角に交らしめ、X軸の目盛は物價を、Y軸の目盛は賃銀を示すものとする。第一年目は物價は一五八、賃銀は一〇一であるから、$x=158$, $y=101$ の座標點によつて第一年目の物價と賃銀との關係を示す事が出來る。第二年目のそれは $x=146$, $y=96$ の座標點、第三年目のそれは $x=141$, $y=96$ の座標點で示されるであらうし、以下同樣にして、與へられた十年間の各年の狀態をそれぐ〵座標點として示す事が出來る。

さて若し物價と賃銀との間に最も完全な相關々係（卽ち $y=f(x)$ なる數學的函數關係）があるものとすれば、これら各座標點は一直線上に位ひする筈である（複雜な函數關係ならば一曲線上に位ひする）。例へば兩者間に $y=25+0.5x$ の關係があるとすれば、物價が一三〇ならば賃銀は $25+0.5\times130$ 卽ち九〇であり、物價が一五〇ならば賃銀は $25\times0.5\times150$ 卽ち一〇〇となるから、斯かる一聯の座標點を相關點圖に描けば圖2の如く總て一直線上に位ひするのである。反之、もし兩者間に何の相關々係も無ければ、換言すれば一定の物價の下に高い賃銀も低い賃銀もあるならば、座標點は圖4の如く平面上に散在して了ふ。

惟ふに二系列間に成り立つ相關々係は、完全な函數關係である場合は、少くとも統計的研究に於ては先づ皆無と言

圖 2　完全な順相關のある場合

圖 3　完全な逆相關のある場合

圖 4　全く相關なき場合

つてよい。併し多少とも相關々係があれば座標點が全體に散在する事もない。卽ち實際には相關點圖上の座標點は右兩極端の中間的な形を示し、一直線（又は一曲線）上に位ひする事もなく、又全く全面に散在する事もないのである。そして相關々係が大なれば大なるほど各座標點は一直線（又は一曲線）に集中し、これに反して相關々係が小さければ小さいほど集中傾向が少くなつて散在的となるから、要するに相關點圖上の各座標點の狀態を見れば、果して兩系列間にどの程度の相關々係があるかを略〻推測する事が出來るのである。

第三節　回歸線（退行線）

相關々係の有無は上記の如き相關點圖の上から判斷されるが、いま二系列間に相關々係の存在する事が判つたとして、更に一變數に對應する他の一變數の最も確からしい數値、卽ち理論値を知り得ないものであらうか。然るに例へ

ば兒童の體格檢査に於て男女各歳につき身長は何糎、體重は何瓩といふやうな所謂「標準體格」があるが、これは要するに各年齢に對應する最も確からしい身長又は體重に外ならない。して見れば上記の物價と賃銀についても、物價の或る値に對應する最も確からしい賃銀が無ければならぬ。然らば斯かる理論値は如何にして求められるかと言ふに、時系列解析に於て取扱つた長期傾向値の算出と全く同じ手續を施せばよいのである。最も合理的な長期傾向値は數學線の當嵌めによつて求められる事は既に説明したが、その場合には、時なる自變數とそれに對應する從屬變數とによつて決定される各座標點を最もよく代表する直線又は曲線を引けばよいのであつて、これが爲に最小自乘法を適用したのであつた。上記相關點圖に示される座標點はX軸が時の經過を示すものでない點で、時系列の示す座標點とは異るが、二變數間の關係を示す點では毫も異るものではない。長期傾向線は時に對應する變數の最も確からしい値を示す線であるから、全く同様にして例へば物價に對する賃銀の最も確からしい値を決定する事が出來る。即ち上記の相關點圖上の各座標點につき最小自乘法を適用して直線又は曲線を引けばよいのであつて、唯だ斯くして得られた線は傾向線とは呼ばれず、一般に回歸線（又は退行線、Line of Regression）と呼ばれる。即ち回歸線とは、相關々係を函數關係として規定したものに外ならないのである。

傾向線算出に當つて、それが直線の場合には、必要な公式は

$$\begin{cases} \Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X) \\ \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2) \end{cases}$$

であつたが、この場合のXは必ず時を示す自變數であつた。然るに上記の相關點圖ではX軸は物價を、Y軸は賃銀を示すものとしたから、次の如き計算となる。

表 1

	X	Y	XY	X^2
1	158	101	15958	24964
2	146	96	14016	21316
3	141	96	13536	19881
4	134	95	12730	17956
5	130	95	12350	16900
6	137	100	13700	18769
7	150	103	15450	22500
8	158	104	16432	24964
9	153	104	15912	23409
10	145	105	15225	21025
計	1452	999	145309	211684

この結果を右公式に當嵌めれば

$$\begin{cases} 999=10a+1452b \\ 145309=1452a+211684b \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} a=56.7 \\ b=0.297 \end{cases}$$

となるから、求める回歸線の方程式は

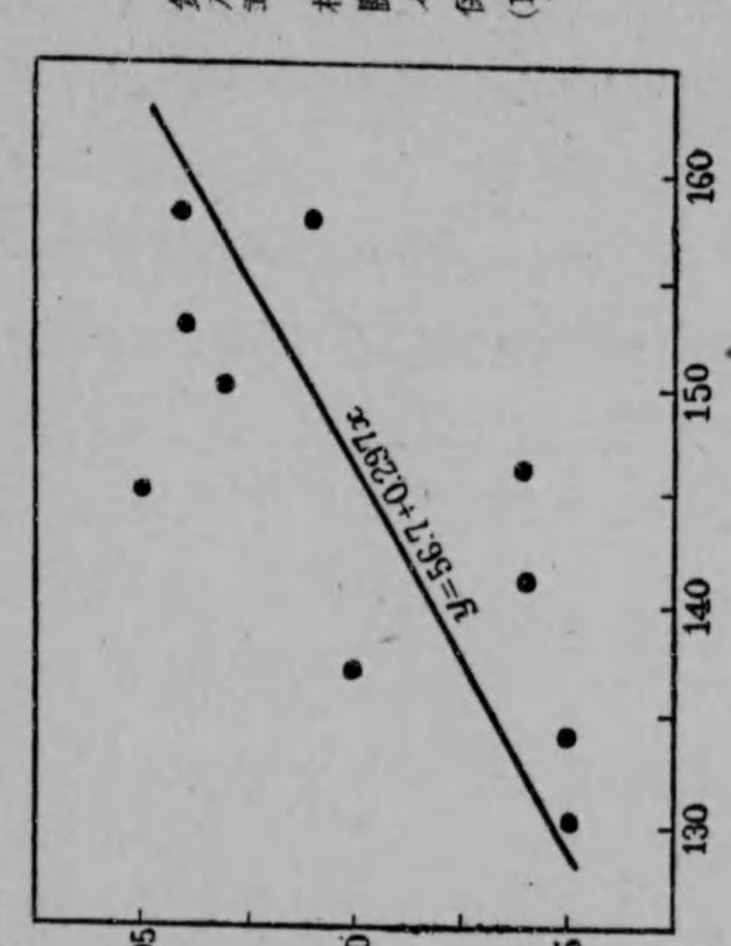
$$y=56.7+0.297x$$

となる。斯くて或る物價に對應する最も確からしい賃銀は、この方程式のxに該物價を代入すれば求められるのであつて、例へば物價が一三〇のときは、賃銀の理論値yは

$$y=56.7+0.297\times130=95.3$$

であり、實際値たる九五と比較すれば〇・三だけの偏差がある。同様の計算をXの各値について行つた結果は、次節の表（二四三頁）の「理論値」の欄を見られたい。

圖 1



右の計算では物價に對應する賃銀の理論値を求めたのであるが、同様の計算によつて賃銀に對應する物價の理論値を求める事が出來る。その計算には右に於けるXとYとを入れ替へればよいから、次の如くなる。

表 2

	Y (賃銀)	X (物價)	XY	Y^2
1	101	158	15958	10201
2	96	146	14016	9216
3	96	141	13536	9216
4	95	134	12730	9025
5	95	130	12350	9025
6	100	137	13700	10000
7	103	150	15450	10609
8	104	158	16432	10816
9	104	153	15912	10816
10	105	145	15225	11025
計	999	1452	145309	99949

$$\begin{cases} 1452=10a+999b \\ 145309=999a+99949b \end{cases}$$

これを解いて　$a=84.26$　$b=0.61$　となるから、求める回歸線の方程式は

$$x=84.26+0.61y$$

となる。これは前述の如く、賃銀に對する物價の理論値を示すもので、例へば、賃銀が一〇〇のときには、物價の理論値は　$84.26+0.61\times100=145.26$　であり、賃銀が一〇五のときには、$84.26+0.61\times105=148.31$　となるのである。

$y=a+bx$ なる回歸線の b をXに對するYの回歸係數 (Coefficint of regression) といふ。蓋し b の大さが回歸線の傾斜を決定するからである。若し回歸線の算出に際して兩系列の基準をそれぞれ算術平均値に求めれば、$\Sigma x=\Sigma y=0$ となり、聯立方程式は

$$\begin{cases} Na=0 \\ b\Sigma x^2=\Sigma xy \end{cases}$$

となるから、從つて

$$a=0, \quad b=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

なる簡單な形で示される。

〔註〕二系列間に回歸線を描く場合に、何れをX軸に採る可きかは、時に極めて困難な問題となる。理論的に言ふならば、X軸に採られた系列には誤謬がなく、Y軸に採られた系列には誤謬があるものと假定されねばならぬ。前例で言へば、もしX軸に物價を採れば、該物價統計には誤差がないものと假定されたのである。蓋しX軸は基準となるものであるから、座標點が總て回歸線上に位ひしないのは、Y軸に示される賃銀の側に於ける誤差に基因すると認めざるを得ないからである。

第四節　推算の標準誤差

さて回歸線は右の如く一系列に對應する他の系列の最も確からしい値を示すものであるから、その論理的性質は恰も度數分布に於ける平均値と同樣のものである。某工場の女工賃銀が平均八十錢だといふ意味は、該工場の各女工の最も確からしい賃銀は八十錢だといふ事に外ならぬ。然るに各女工の實際の賃銀は必ずしも八十錢ではなく、事實は一部はそれ以上、一部はそれ以下であつて、要するに八十錢なる平均値は理論的抽象的數値に過ぎない。この平均値が幾許の程度まで事實と合致するか、換言すれば幾許の程度まで信賴し得るかは、散布度の大小によつて決定されること、そしてその爲には標準偏差(σ)の用ひられること等については既に說明した。さて回歸線は平面上に散在する各座標點を代表する「最も確からしい」値を示すものであるから、該線は時には各座標點を能く代表することもあるし、時には充分に代表しないこともあらう。故に幾許の程度までこれに信賴を置きうるかは、平均の問題に於ける標準偏差と同樣の手段によつて決定されねばならぬ。

然るに標準偏差は平均（算術平均）と各項との差(d)の平方の總和をば項の數(N)で除したものゝ平方根、卽ち

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{N}}$$

であつた。この方法は回歸線の場合にもそのまゝ適用出來るのであつて、異る點は單に「平均」の代りに「理論値」を採ればよいのである。そして斯くて得た測定値は、標準偏差と區別する爲に「推算の標準誤差」(Standard Error of Estimate) 又は單に標準誤差と呼ばれ、Sの記號で示される。いまこれを前例について求めれば上の如くである。

表 1

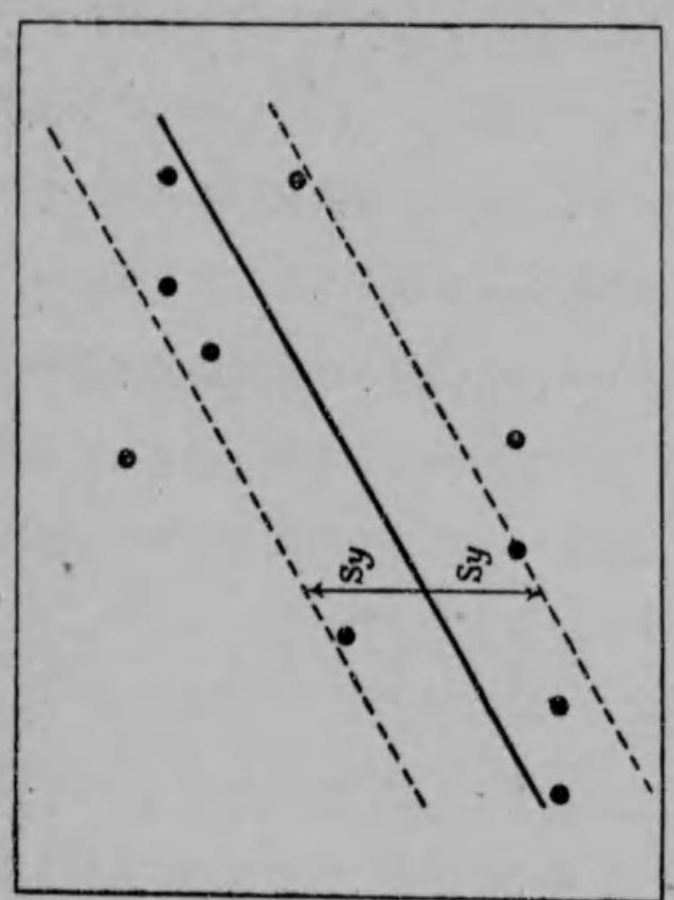
年次	X	Y	理論値	d	d^2
1	158	101	103.6	−2.6	6.7
2	146	96	100.0	−4.0	16.0
3	141	96	98.5	−2.5	6.2
4	134	95	94.9	+0.1	0.01
5	130	95	95.3	−0.3	0.09
6	137	100	97.4	+2.6	6.0
7	150	103	101.2	+1.8	3.2
8	158	104	103.6	+0.4	0.16
9	153	104	102.1	+1.9	3.6
10	145	105	99.7	+5.3	28.0
					70.0

$$S_y=\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{N}}=\sqrt{\frac{70.0}{10}}=2.7$$

S_y と記したのは、上表は物價Xに對する賃銀Yの理論値を問題とするものであるから、標準誤差も亦Xに對するYの標準誤差を意味するからである。さてこの標準誤差は如何に解釋さるべきか。

正常度數分布に於て、平均を中心としてその上下に標準偏差に等しい値を採れば、その限界內に全度數の約七割（詳しくは六八・二六%）が含まれ、標準偏差の三倍を採れば殆ど全部（詳しくは九九・七%）が含まれる事は既に說いた。例へば兒童千人の身長が正常分布を示すものとし、その平均値（算術平均）が假りに一米、標準偏差が五糎とすれば、右千人中の約七百人は九五糎乃至一〇五糎の身長を有すべく、殆ど全部が八五糎乃至一一五糎の身長を有すと見てよいのである。この理は回歸線に於ける標準誤差についても全く同樣であつて、いま各座標點が回歸線の周圍に略〻正規的に分布してゐるとすれば、回歸線の上下に標準誤差に等しい値を採れば、その限界內に約七割が、そして標準誤差の三倍を採れば殆ど全部が含まれるのである。この場合、限界內と言ふのは回歸線を中心とした幅を指すのであつて、幅の廣さは $2S_y$ 又は $6S_y$ となるわけである。

圖 1



前例に於ける回歸線は $56.7+0.297x$ であつたからその上下に標準誤差 2.7 を採つた幅は $56.7+0.297x\pm2.7$ である。換言すれば $y=59.4+0.297x$ と $y=54.0+0.297x$ なる二直線の間に挾まれた部分に當る。試みにこれを圖示すれば上の圖1となる。例へば、物價が一六〇となれば、それに對應する最も確からしい賃銀は $56.7+0.297\times160$ 即ち一〇四・二二であるが、實際には $104.22\pm3\times2.7$ の範圍、即ち略々九六乃至一一二の間なる事が推察されるのである。

〔註〕標準誤差は標準偏差までの大さを採りうる事に注意されたい。前例では賃銀系列の標準偏差は次の相關係數の算出に於て示される通り三・五八であつて、標準誤差は上記の如く二・七である。なほ標準誤差については誤差法則を論ずるに當つて再び言及するであらう。

第五節　單純直線相關

二系列間に成り立つ相關を單純相關 (Simple Corrolation) といふ。そして特に直線回歸線を以て示される單純相關は單純直線相關であつて、最も簡單な、而も最も基本的な相關々係である。上記の通り回歸線に於ける標準誤差の大小は相關々係の强弱を測定する基準となるものである。蓋し若し二系列間に最も强大な相關々係、即ち數學的函數關係が存在する場合には、相關點圖上の各座標點は必ず回歸線の上に位ひする事となるから、標準誤差は零となり、反之、相關々係が薄弱となれば標準誤差は次第に大きくなるからである。故に單に標準誤差の大小だけを見て相關々係の程度を推しうる理であるが、併しこれには大なる障碍がある。それは標準誤差は絕對値を以て示されるからであつて、例へば前例に於ける標準誤差二・七なるものは、賃銀指數の二・七を意味し、從つて假りに通貨膨脹の結果として物價指數も賃銀指數も共に大なる數字となれば、相關々係に差が生じなくとも、標準誤差は當然大きくなるであらう。故に單に標準誤差だけで相關の程度を推す事は不可能と言つてよいのである。

この障碍を除くには標準誤差をば標準偏差に對する比率即ち $\frac{S_y}{\sigma_y}$ として示せばよい。前例に於ける賃銀系列に就て標準偏差（即ち σ_y）を求めれば

	偏差 d	d^2
101	+1	1
96	−4	16
96	−4	16
95	−5	25
95	−5	25
100	0	0
103	+3	9
104	+4	16
104	+4	16
105	+5	25
100 (平均)		149

から $\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{N}}=\sqrt{\frac{149}{10}}=3.85$

であるから、$\frac{S_y}{\sigma_y}=\frac{2.7}{3.85}$ となる。若し完全な相關々係があれば $S_y=0$ となるから、

$\frac{S_y}{\sigma_y}=0$ 又は $\frac{S_y^2}{\sigma_y}=0$

となり、反對に全く相關々係がなければ $S_y=\sigma_y$ となるから、

$$\frac{S_y}{\sigma_y}=1 \quad 又は \quad \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}=1$$

となる。故にこれを書換へて

$$1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

とすれば、完全な相關々係は一、完全な無關係は零となる。換言すれば相關の程度は一から零までの數字によつて明白に示されるのである。よつて右式を η_y^2 と置いて

$$\eta_y^2=1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

とすれば、

$$\eta_y=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

となりこれを一般に相關比 (Correlation ratio) といふ。そして直線的回歸線に於てはこの相關比を特に相關係數 (Coefficient of correlation) といひ、一般に r の文字を以て示す。且つこの場合には

$$\eta_y=r=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}=\frac{\Sigma xy}{n\sigma_x\sigma_y}=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}$$

となるから（これは代數學的に證明しうるが、こゝでは割愛する）、實際の計算に當つては、次の二式の何れかゞ用

ひられる。

$$r=\frac{\Sigma xy}{n\sigma_x\sigma_y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$（又は）r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

表 1

年次	物價 X	賃銀 Y	x	y	xy	x^2	y^2
1	158	101	+13	+ 1	+13	169	1
2	146	96	+ 1	− 4	− 4	1	16
3	141	96	− 4	− 4	+16	16	16
4	134	95	−11	− 5	+55	121	25
5	130	95	−15	− 5	+75	225	25
6	137	100	− 8	0	0	64	0
7	150	103	+ 5	+ 3	+15	25	9
8	158	104	+13	+ 4	+52	169	16
9	153	104	+ 8	+ 4	+32	64	16
10	145	105	0	+ 5	0	0	25
	(平均)145	(平均)100			+254	854	149

この三つの式を前例に適用して見よう。第一の $r=\sqrt{1-\frac{S_y}{\sigma_y}}$ を用ふれば $S_y=2.7$ $\sigma_y=3.87$ であるから

$$r=\sqrt{1-\frac{(2.7)^2}{(3.87)^2}}=\sqrt{1-0.489}=+0.71 \text{ となる。}$$

第二及び第三を計算する爲には、次の如き計算表を作ると便利である。

即ち第二式に代入すれば

$$r=\frac{\Sigma xy}{n\sigma_x\sigma_y}=\frac{254}{10\sqrt{\frac{854}{10}}\sqrt{\frac{149}{10}}}=\frac{254}{10\times9.3\times3.8}=+0.71$$

となり、第三式に代入すれば

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}=\frac{254}{\sqrt{854\times149}}=\frac{254}{357}=+0.71$$

となり、何れを用ひるとも同じ結果となる。これは第二及び第三の式は何れも第一式の變形に過ぎないからである。

〔註〕 r の正負の記號は回歸方程式の b のそれと同一なることに注意されたい。

〔註〕 $\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$ が大なるほど相關々係の稀薄なるを示すから、その平方根即ち $\sqrt{\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$ を非相關係數 (Coefficient of alienation) といふ。これを k と置けば

$$1=r^2+k^2$$

$$\therefore\ k=\sqrt{1-r^2}$$

右の公式に於ては何れも豫め兩系列の各々の平均値を求め、これを基準とする偏差を算出して置かねばならぬ。この不便を避け、直接に原資料から相關係數を算出せんとすれば、次の公式を適用すべきである。

$$r=\frac{n\Sigma XY-\Sigma X\Sigma Y}{\sqrt{[n\Sigma X^2-(\Sigma X)^2][n\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2]}}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

この式は勿論如上の公式を展開する事によつて得られたもので、從つて内容は全く同一である。

注意一、この第四式のXとYとを交替せしめても値は不變である。換言すれば直線的回歸線によつて示される相關關係に於ては、Xに對する相關係數と、Yに對するXのそれとは全く同一である。故に二變數間に直線的回歸線が承認される場合には、兩者間の相關係數は右二變數の何れを基準として算出しても良いのである。但し後に述べる曲線的回歸線に於ては、何れを基準とするかによつて値は異つて來る。

注意二、直線的回歸線に於ては相關係數は必ず正か又は負の記號を持つ。正は順相關、負は逆相關を意味する。

第六節　相關表

右の例に於ては相對應する二ヶの變數によつて決定される座標點をそれぞれ一單位として計算した。從つて物價とそれに對應する賃銀が各々十ヶ與へられてゐれば、

表 2

	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	158	101	24964	10201	15958
2	146	96	21316	9216	14016
3	141	96	19881	9216	13536
4	134	95	17956	9025	12730
5	130	95	16900	9025	12350
6	137	100	18769	10000	13700
7	150	103	22500	10609	15450
8	158	104	24964	10816	16432
9	153	104	23409	10816	15912
10	145	105	21025	11025	15225
	1452	999	211684	99949	145309

$$r=\frac{10\times145309-1452\times999}{\sqrt{(10\times211684-1452^2)(10\times99949-999^2)}}$$

$$=+0.71$$

十ヶの座標點が打たれることになり、延いてその回歸線を求めるに當つては、十ヶのXY及び十ヶのX^2を計算せねばならなかつた。故にもし與へられた二ヶの系列が共に極めて大なる項數を含む場合には、計算は著しく煩雜とならざるを得ない。このことは相關係數を求めるに當つても亦同樣である。これを避けるには兩系列を共に度數分布の形態に書改めればよいのであつて、これは一種の複式表となり、これを示したものは所謂相關表 (Correlation Table) とな

る。次表は九百二十八組の親子をとり、親子の間の身長の相關々係を示したものである。

〔註〕こゝでいふ親の身長とは父母の身長の平均であるが、單純な算術平均ではなく、所謂中央親なる特殊の値である。即ち父の身長をh、母のそれをh'とすれば、$\frac{1}{2}(h+1.08h')$を中央親の身長といふのであつて、一種の加重平均であり、ガルトンの規定せるものである。

表 1

親の身長（吋）

子の身長（吋）

	64	66	68	70	72	74	fx	Mx
74.7				8	6		14	70.9
72.7		1	11	22	20	4	58	70.5
70.7		11	69	66	17		163	69.0
68.7	4	41	148	83	11		287	68.3
66.7	14	56	130	48	7		255	67.8
64.7	10	19	56	21	1		107	67.7
62.7	7	15	15	2			39	66.6
60.7	2	1	1	1			5	66.4
fy	37	144	430	251	62	4	928	68.4
My	65.3	66.9	67.8	69.0	70.8	72.7	68.1	

相關表から相關係數を算出するのは多少複雜であつて、次の如き計算表を作らねばならぬ。

(一) X系列（親の身長）は六四吋を基準とし、この階級を零と置けば、六六吋、六八吋……の諸階級は1、2、……5、と書換へられる。同様にしてY系列（子の身長）も亦六〇・七吋を基準としそれぐ0、1、2、……7、と書換へる。これは級間隔を單位とし、基準階級に對する偏差に外ならぬから、これらをdで示す。

(二) 各階級に含まれる度數(f)を並記する。

(三) 偏差と度數の乘積卽ちfdを計算し、

(四) 偏差の平方と度數の乘積卽ちfd^2を計算する。

表 2

					64	66	68	70	72	74		
	d				0	1	2	3	4	5		
		f			37	144	430	251	62	4	928	
			fd		0	144	860	753	248	20	2025	
				fd^2	0	144	1720	2259	992	100	5215	
74.7	7	14	98	686				168 8 21	168 6 28			336
72.7	6	58	348	2088		6 1 6	132 11 12	396 22 18	480 20 24	120 4 30		1134
70.7	5	163	815	4075		55 11 5	690 69 10	990 66 15	340 17 20			2075
68.7	4	287	1148	4592	0 4 0	161 41 4	1184 148 8	996 83 12	176 11 16			2517
66.7	3	255	765	2295	0 14 0	168 56 3	780 130 6	432 48 9	84 7 12			1464
64.7	2	107	214	428	0 10 0	38 19 2	224 56 4	126 21 6	8 1 8			396
62.7	1	39	39	39	0 7 0	15 15 1	30 15 2	6 2 3				51
60.7	0	5	0	0	0 2 0	0 1 0	0 1 0	0 1 0				0
		928	3427	14203								
					0	443	3040	3114	1256	120		7973

$$p=\frac{7973}{928}-\frac{2025}{928}\times\frac{3427}{928}=0.5331$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{5215}{928}-\left(\frac{2025}{928}\right)^2}=0.926$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{14203}{928}-\left(\frac{3427}{928}\right)^2}=1.293$$

$$\therefore\ r=\frac{0.5331}{0.926\times1.293}=+0.44$$

(五)次に度數分布を示す各々の枡につき、$d_x\,d_y$ を求め、これを各々の枡の左下の隅に記す。

(六)更に各々の枡につき、右に求めた $d_x\,d_y$ とその枡に記された度數との乘積卽ち $fd_x\,d_y$ を計算し、これを各々の枡の右上の隅に記す。

(七)この $fd_x\,d_y$ を縱及び橫に合計し、更にそれらの總計卽ち $\Sigma(fd_x\,d_y)$ を求める。右端の最下行に記された七九七三の數字がこれである。

さてこれらの計算をば次の公式に代入する

$$\boxed{r=\frac{p}{\sigma_x\sigma_y}}\quad 但シ\ p=\frac{\Sigma(fd_xd_y)}{N}-\frac{\Sigma(fd_x)}{N}\cdot\frac{\Sigma(fd_y)}{N}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma(fd_x^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma fd_x}{N}\right)^2}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(fd_y^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma fd_y}{N}\right)^2}$$

實際の計算は計算表の下に記して置いた。注意すべきは右の計算では級間隔を單位に改めてあるが、この事は相關係數には何等の影響をも與へないといふことである。蓋し二系列間の關係を求めるに當つては、兩系列の數字が共に十倍されても、又は共に十分の一にされても、これによつて關係の强度は毫も影響されることはないからであつて、例へばA:B＝10A:10B＝0.2A:0.2B なることは言ふ迄もないであらう。但し斯かる變形を加へれば、相關係數を利用して回歸線を決定するに當つては、再び或る換算を必要とする。この事は次に說明しよう。

相關係數が判明すれば次式によつて回歸線の方程式 y を求めることが出來る(註1)

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

右の數字を代入すれば

$$y=0.35\times\frac{1.293}{1.182}x=0.383x$$

然るにこの式に於ては各級間隔を單位とし、且つ x は六四吋を、y は六〇・七吋を基準としたから

$$\begin{cases}y=Y-\bar{Y}\\ x=X-\bar{X}\end{cases}$$

として換算せねばならぬ。$\bar{Y}$ 及び $\bar{X}$ はそれぞれ平均値であるから

$$\begin{cases}\bar{Y}=60.7+C\times\dfrac{\Sigma(fd)}{\Sigma f}=60.7+2\times\dfrac{3427}{928}=60.7+2\times3.692=68.084\\[2ex] \bar{X}=64+C\times\dfrac{\Sigma(fd)}{\Sigma f}=64+2\times\dfrac{2025}{928}=64+2\times2.186=68.362\end{cases}$$

となる。故に

$$y=0.383x=Y-68.084=0.383\,(X-68.362)$$

$$\therefore\quad Y=41.9+0.383X$$

これが親の身長に對する子の身長の回歸線である。同樣の方法によつて子の身長に對する親の身長の回歸線を決定しうることは勿論である。

（註1）二四一頁に述べた通り、X及びYのそれ〴〵の平均値を基準として回歸線を算出すれば、その回歸係數bは

$$b=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

である。然るに $r=\dfrac{\Sigma xy}{n\sigma_x\sigma_y}$ であるから

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\Sigma xy}{n\sigma_x\sigma_y}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\Sigma xy}{n\,\sigma_x^2}=\frac{\Sigma xy}{n\left(\sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n}}\right)^2}=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

斯くて求むる回歸線は

$$y=bx=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}x=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

となるのである。

第九章　相關々係 (2)

第一節　曲線的回歸線

上例に於ける物價に對する賃銀の回歸線は $y=56.7+0.297x$ なる直線で示されたが、回歸線なるものが元來相關點圖上の各座標點を縫ふ代表線である以上、もしこれら座標點が曲線的に並んでゐる場合には、恰も時系列に於ける曲線的傾向線と同じく、曲線による回歸線を描く必要が起つて來る。

曲線的回歸線によつて示される相關々係を曲線相關（Curvilinear Correlation）といひ、特に二系列間の曲線相關を單純曲線相關といふ。そしてこれを求める方程式は、直線の場合と同じく、長期傾向線のそれと同樣である。例へば拋物線的回歸線は次の聯立方程式を解く事によつて求められる。

$$\begin{cases}\Sigma(Y)=na+b\Sigma(X)+c\Sigma(X^2)\\ \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)+c\Sigma(X^3)\\ \Sigma(X^2Y)=a\Sigma(X^2)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^4)\end{cases}$$

いまA、B、C……Jなる十名の社員の入社試驗成績（X）と、各人の毎月の販賣成績（Y）について拋物線的相

關々係が成り立つものとすれば、右の方程式を利用する事によつて次の計算が行へる（Davis & Yoder—Business Statistics, 1937. p. 356)。

表 1

	X	Y	XY	X^2Y	X^2	X^3	X^4
A	4	5	20	80	16	64	256
B	5	4	20	100	25	125	625
C	6	5	30	180	36	216	1296
D	4	6	24	96	16	64	256
E	5	9	45	225	25	125	625
F	6	10	60	360	36	216	1296
G	6	9	54	324	36	216	1296
H	7	12	84	588	49	343	2401
I	9	11	99	891	81	729	6561
J	8	9	72	576	64	512	4096
計	60	80	508	3420	384	2610	18708

$$\begin{cases} 80 = 10a + 60b + 384c \quad \cdots\cdots (1) \\ 508 = 60a + 384b + 2610c \quad \cdots\cdots (2) \\ 3420 = 384a + 2610b + 18708c \quad \cdots\cdots (3) \end{cases}$$

(1)と(2)から

$$\begin{array}{rl} & 508 = 60a + 384b + 2610c \\ -) & 480 = 60a + 360b + 2304c \\ \hline & 28 = \quad 24b + 306c \quad \cdots\cdots (4) \end{array}$$

(1)と(3)から

$$\begin{array}{rl} & 3420 = 360a + 2610b + 18708c \\ -) & 3072 = 360a + 2304b + 14745.6 \\ \hline & 348 = \quad 306b + 3962.4c \quad \cdots\cdots (5) \end{array}$$

(4)と(5)から

$$\begin{array}{rl} & 1428 = 1224b + 15606c \\ -) & 1392 = 1224b + 15849.6c \\ \hline & 36 = \quad -243.6c \end{array}$$

$$\therefore \quad c = \frac{36}{-243.6} = -0.14778$$

(4)に代入すれば

$$24b = 28 + 306 \times 0.14778 = 73.22068$$

$$\therefore \quad b = \frac{73.22068}{24} = 3.05087$$

このb及びcを(1)に代入すれば

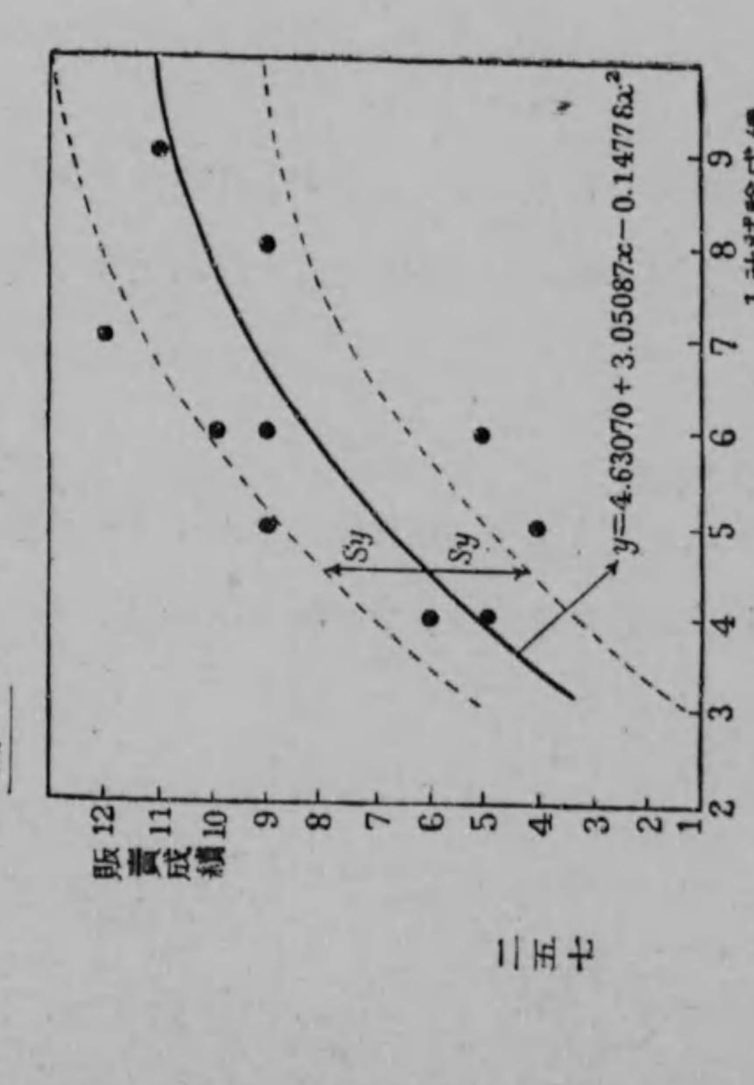
$$10a = 80 - 60 \times 3.05087 + 384 \times 0.14778 = 46.3070$$

表 2

	X	Y	Yの理論値	d	d^2
A	4	5	5.2085	−0.2085	0.043
B	5	4	6.9294	−2.9294	8.584
C	6	5	8.3547	−3.3547	11.222
D	4	6	5.2085	+0.7915	0.624
E	5	9	6.9294	+2.0706	4.284
F	6	10	8.3547	+1.6453	2.722
G	6	9	8.3547	+0.6453	0.416
H	7	12	9.4844	+2.5156	6.300
I	9	11	10.8571	+0.1429	0.020
J	8	9	10.3186	−1.3186	1.742
					35.957

$$Sy\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{M}} = \sqrt{\frac{35.957}{10}} = 1.9$$

圖 1



$$\therefore\quad a=\frac{-46.3070}{10}=-4.63070$$

故に求める抛物線的回歸線の方程式は

$$y=-4.63070+3.05087X-0.14778X^2$$

となる。この式のXに4、5、6等を代入すればそれらに對應するYの理論値が求められる。なほ直線の場合と同樣にして標準誤差Syを算出することが出來る。それらの計算は表2の如くで、その結果は圖1の示す通りである。

第二節　相關比

斯く曲線的回歸線が決定されたとして、次の問題は相關々係の程度を測定することである。直線相關が相關係數によつて測定されることは既に述べたが、曲線相關に於ては最早や相關係數は用ひられない。蓋し相關係數の公式は直線相關の前提の下に誘導されたものだからである。

然るに相關係數は相關比なる一般式

$$\eta_y^2=1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

より、直線相關の前提の下に誘導されたもので、右の一般式そのものは相關の形態に關する何等の前提も含んで居らぬから、吾人は直接この一般式を利用することによつて曲線相關の程度をも測定しうるのである。卽ち前例に於いては

$$S_y=1.9\quad ;\quad \sigma_y=\sqrt{7}$$

であるから

$$\eta_y=\sqrt{1-\frac{(1.9)^2}{(\sqrt{7})^2}}=0.486$$

となる。斯くて曲線相關の程度は相關比によつて測定される。前述の如く、相關比には正負の記號の存在し得ざることは注意せねばならぬ。更に、相關係數は二系列の何れを基準として計算しても同一の數値となるが、この事は相關比には當嵌らない。

直線相關に於ては $r=\eta$ なることは勿論であるが、然らざる場合には同一資料より算出した相關比と相關係數の間には一般に次の關係が成りたつ

$$\eta>r$$

そしてこの差は、相關々係の彎局度が大となるに從つて大となる傾きがあるから、この差を以て回歸線の彎局度を測ることが出來る。一般にこの目的のためには次式が用ひられる。

$$\zeta=\eta^2-r^2$$

相關比の上記公式は實際の計算には不便なため、一般には

$$\eta_y=\sqrt{1-\frac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又はこれを變形した

$$\eta_y=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

が用ひられる。(1)のσ_{ay}は、各欄の算術平均を聯結する線（次圖の點線）を基準として算出した標準偏差であり、(2)のσ_{my}はY系列全部の算術平均を基準として算出した各欄の平均値の標準偏差である。屢々引用される次の例題（Mills が Davenport の實驗に基いて作製せるもの。Mills—Statistical Methods, p. 443）について知られたい。この例題は一エーカー當りの窒素施肥量と小麥收穫高との相關關係を取扱つたものである。なほ(1)式より(2)式が如何にして誘導されるかの數學的證明は右書に掲げられてゐる。

(1)式の適用（表1）

表1

第　一　欄

級間（小麥收穫高）	m	f	d ($Ma=5.05$)	d^2	fd^2
8—11.9	10	3	4.95	24.5025	73.5075
4— 7.9	6	10	0.95	0.9025	9.0250
0— 3.9	2	8	−3.05	9.3025	74.4200
					156.9525

同樣の計算を各欄について行ふ。その各々の欄のfd^2を求めうれば、全部の欄の算術平均を基準とする標準偏差卽ちσ_{ay}を知りうべく、右例に於ては二・四二となる。なほ別にσ_yを計算すれば九・一八八となるから、求むる相關比は次の如くとなる。

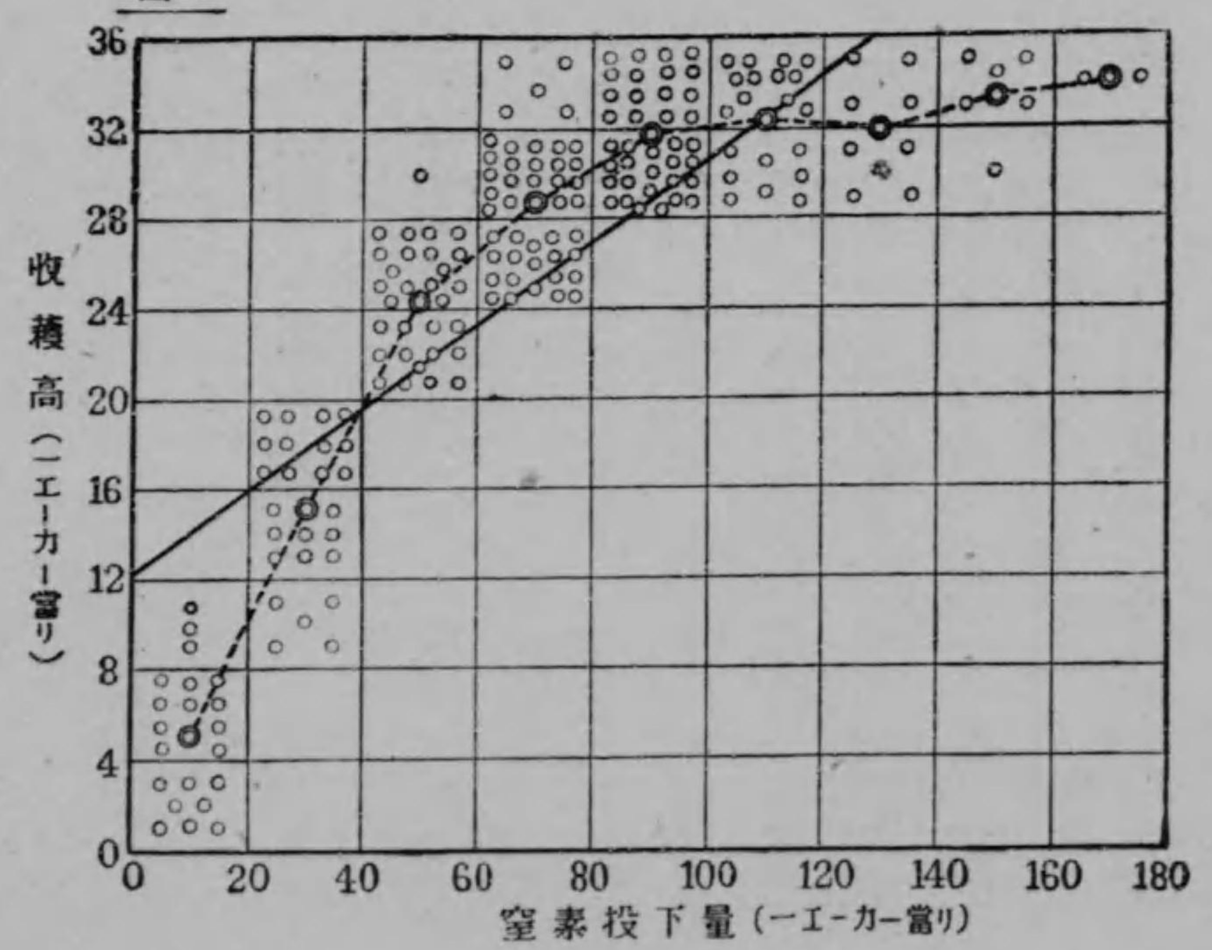
$$\eta_y=\sqrt{1-\frac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}}=\sqrt{1-\frac{(2.42)^2}{(9.188)^2}}=0.965$$

(2)式の適用（表2及び3）

表2

		X（一エーカー當り窒素投下量）										
		0–19.9	20–39.9	40–59.9	60–79.9	80.–99.9	100–119.9	120–139.9	140–159.9	160–179.9	合計	行の平均
Y（一エーカー當り小麥收穫高）	32–35.9				5	16	12	4	5	2	44	107.27
	28–31.9			1	20	21	8	4	1		55	88.91
	24–27.9			16	19						35	60.86
	20–23.9			13							13	50.0
	16–19.9		12								12	30.0
	12–15.9		8								8	30.0
	8–11.9	3	5								8	22.50
	4–7.9	10									10	10.0
	0–3.9	8									8	10.0
	合計	21	25	30	44	37	20	8	6	2	193	
	欄の平均	5.05	15.12	24.4	28.73	31.73	32.4	32.0	33.33	34.0		

圖1



$$\therefore\ \sigma_{my}=\sqrt{\frac{15,162.769}{193}}=8.864$$

$$\therefore\ \eta_y=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}=\frac{8.864}{9.188}=0.965$$

第三節 多元相關と部分相關

以上に述べた相關々係は二箇の變數間に成り立つ相互の關係、即ち「單純相關」である。併し或る一つの事象が他の或る一つの事象とだけ關聯してゐるやうな場合は實際には寧ろ稀れで、殊に社會的現象に於ては甚だ多くの事象が相互に關聯し、相互に影響を及ぼし合つてゐるものである。例へば勞働者の賃銀は單に一般物價と關聯してゐるばかりでなく、勞働能率、企業利潤、勞働供給、勞働組合の勢力の大小、勞働立法その他種々の要素と關聯してゐるのであつて、これら諸要素の何れかゞ變化すれば、賃銀は必ず多かれ少かれ變化するであらう。斯く一變數 y と二つ又はそれ以上の變數 $x_1\ x_2\ldots$ との間に成り立つ相互的關係を多元相關（Multiple Correlation）といひ、その程度を測定する係數を多元相關係數（R）といふ。併し研究に際し、x_2 以下を假りに不變的なものとし、換言すれば x_2 以下の變數の影響は無いものとし、單に y と x_1 との間の相關々係を知る必要の起

表 3

X	m_y	d (Ma=25.005)	d^2	f	fd^2
10	5.05	−19.955	398.202	21	8,362.242
30	15.12	− 9.885	97.713	25	2,442.825
50	24.40	− 0.605	0.366	30	10.980
70	28.73	+ 3.725	13.876	44	610.544
90	31.73	+ 6.725	45.226	37	1,673.362
110	32.40	+ 7.395	54.686	20	1,093.720
130	32.00	+ 6.995	48.930	8	391.440
150	33.33	+ 8.325	69.306	6	415.836
170	34.00	+ 8.995	80.910	2	161.820
				193	15,162.769

る場合がある。これを部分相關（Partial Correlation）といひ、その係數を部分相關係數といふ。一般に多元相關及び部分相關は理論的にも技術的にも取扱ひ困難で、從つて此處では極く簡單な例によつて、その一端を示すに止める。

「農產物の收穫總量は作付段別と段當り收穫量によつて決定される。即ち收穫總量と作付段別及び段當り收穫量との三者の間に多元相關の成り立つ事は言ふ迄もなからう。次表は一八九四年から一九三〇年までの米國に於ける小麥に就ての數字である。（耕地面積の單位は百萬エーカー、收穫總量のそれは百萬ブッシェル、單位收穫量のそれは一エーカー當りブッシェル）。

表 1

年次	耕地面積	收穫總量	單位收穫量
1894	39.4	516.5	13.1
1895	40.8	569.5	13.9
1896	43.9	544.2	12.4
1897	46.0	610.3	13.3
1898	51.0	772.2	15.1
1899	52.6	658.5	12.1
1900	51.4	602.7	11.7
1901	52.6	788.6	15.0
1902	49.6	724.8	14.6
1903	51.6	663.9	12.9
1904	47.8	596.9	12.5
1905	49.4	726.8	14.7
1906	47.8	756.8	15.8
1907	45.1	763.9	14.1
1908	45.9	644.7	14.0
1909	44.3	700.4	15.8
1910	45.7	635.1	13.9
1911	49.5	621.3	12.5
1912	45.8	730.3	15.9
1913	50.2	763.4	15.2
1914	53.8	891.0	16.6
1915	60.5	1025.8	17.0
1916	52.3	636.3	12.2
1917	45.1	636.7	14.1
1918	59.2	921.4	15.6
1919	75:7	967.9	12.8
1920	61.1	833.0	13.6
1921	63.7	814.9	12.8
1922	62.3	867.6	13.9
1923	59.7	797.4	13.4
1924	52.5	864.4	16.5
1925	52.4	676.8	12.9
1926	56.4	831.4	14.8
1927	58.8	878.4	14.9
1928	58.3	914.9	15.7
1929	61.1	806.5	13.2
1930	59.1	850.9	14.4

この材料について二系列づつ取つて單純相關を求めれば次の結果を得る。收穫總量は1、耕地面積は2、エーカー當り收穫量は3の數字で示してあるから、r_{12} とは收穫總量と耕地面積との間の相關係數を意味し、r_{23} とは耕地面積と

エーカー當り收穫量との間の相關係數を意味するのである。故に例へば r_{12} と r_{21} とは當然同じ事を意味する。

さて右表によれば收穫總量と耕地面積との間の相關係數は〇・七八二であるが、この係數は決して兩者の一般的關係を反映するものとは考へられない。何となれば、原材料の示す通り、第三の要素たるエーカー當り收穫量は年によつて異つてゐるから、右の〇・七八二なる係數は單に右材料に於ける收穫總量と耕地面積との關聯を示すに止まるのである。故にもし一般にこの兩者の關聯を決定せんとする場合には、第三の要素たるエーカー當り收穫量を每年等しいものと假定せねばならない。斯かる假定に立つて求められた係數は即ち部分相關係數であつて、これを求める公式は次の通りである。

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r^2_{13})(1-r^2_{23})}}$$

表 2

	收穫總量	耕地面積	單位收穫量
收穫總量		$r_{12}=0.782$	$r_{13}=0.587$
耕地面積	$r_{21}=0.782$		$r_{23}=0.016$
單位收穫量	$r_{31}=0.587$	$r_{32}=0.016$	

これを前例に適用すれば

$$r_{12\cdot3}=\frac{0.782-(0.587)(0.016)}{\sqrt{[1-(0.587)^2][1-(0.016)^2]}}=+0.956$$

となる。即ち單位收穫量を不變とした場合には、收穫總量と耕地面積との間には殆ど完全な順相關のある事となるが、

これは吾人の常識から考へても當然である。それどころか吾人の常識から言へば、收穫總量を決定するものは元來耕地面積と單位收穫量以外には無いのであるから、假りに單位收穫量を一定とすれば、收穫總量と耕地面積との間には+1なる完全な順相關が無ければならない。然らば右の〇・九五六なる係數は未だ僅か乍ら誤差を伴つてゐる事が判らう。この誤差は原材料に若干の誤差がある爲に生じたと見ねばならぬ。

同樣にして假りに耕地面積を一定とし、收穫總量と單位收穫量との間の部分相關係數 $r_{13\cdot2}$ を求める事も出來る。即ち右公式に於ける1、2、3の組合せを變へればよいのであつて

$$r_{13\cdot2}=\frac{r_{13}-r_{12}r_{32}}{\sqrt{(1-r^2_{12})(1-r^2_{32})}}=\frac{0.587-(0.782)(0.016)}{\sqrt{[1-(0.782)^2][1-0.016)^2]}}=+0.921$$

となる。これ亦常識的に言へば+1となるべきものであるから、略〻それに近い〇・九二一なる係數は大體に於て是認出來よう。最後に收穫總量を一定とし、耕地面積と單位收穫量との間の部分相關係數 $r_{23\cdot1}$ を求めれば

$$r_{23\cdot1}=\frac{r_{23}-r_{21}r_{31}}{\sqrt{(1-r^2_{21})(1-r^2_{31})}}=\frac{0.016-(0.782)(0.587)}{\sqrt{[1-(0.782)^2][1-(0.587)^2]}}=-0.879$$

となる。收穫量が一定ならば耕地面積と單位收穫量との間に反比例的關係、即ち逆相關の成り立つ事は當然であり、從つて右の係數は可成りの誤差を含む事が察せられるが、併し兎に角吾人の先驗的結論に接近してゐる事は認められよう。

賃銀の如く、決定要素が極めて複雜な場合には、部分相關の測定は甚だ煩雜となるけれど、原理的には右と異るものではない。そして相互の關聯が極めて錯雜してゐる現象については、右の收穫現象に於けるやうに豫め先驗的結論を下し得ないから、一に斯かる計算に據る外はなく、又斯くの如き場合こそ斯かる計算が尊重されるのである。

次に多元相關係數の算出に移らう。收穫に關する前例に於ては、例へば耕地面積を常に一定と假定した條件の下に於ては收穫總量と單位收穫量との間に如何なる關係が成り立つかを問題としたが、今度は收穫總量と耕地面積とが直線的に結合されてゐるものとした場合に、これと單位收穫量との間に如何なる關係が成り立つかを問題とする。その尺度たる多元相關係數Rは次の公式から求められる――

$$1-R^2_{3(12)}=(1-r_{31}^2)(1-r^2_{32\cdot1})$$

これに前例に於て算出した結果を代入すれば

$$1-R^2_{3(12)}=[1-0.587^2][1-(-0.879)^2]=0.6554\times0.2274=0.149$$

$$\therefore\ R^2_{3(12)}=1-0.149=0.851$$

$$\therefore\ R_{3(12)}=\sqrt{0.851}=0.9225$$

同様にして $R_{1(23)}$ も $R_{2(13)}$ も求める事が出來る。(計算すれば前者は 0.9701、後者は 0.9548 となる。)

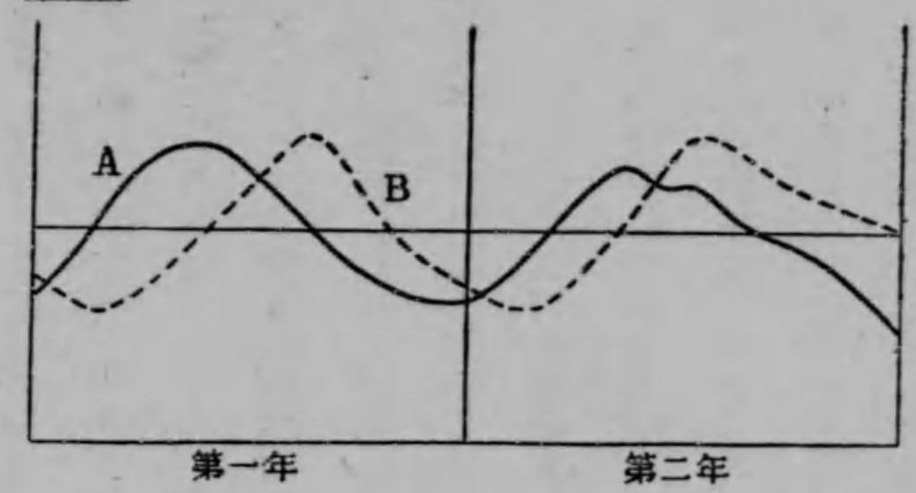
第四節　相關係數によるラグの測定

物價と賃銀、又は卸賣物價と小賣物價の如き二つの時系列間には一般に高度の相關々係が存在するもので、例へば一般に物價の騰貴する頃には賃銀も亦これに追隨して上昇するのが原則である。併し物價が騰貴し始めれば直ちに賃銀も上昇するものではなく、實際には多少の時間的間隔を置いて上昇し始めるものであり、反對に物價が下落し始めたからといつて賃銀も同時に低下し始めるのではなく、同じく或る時間的間隔を置いて低下し始めるものである。この時間的間隔を「時の遲れ」或ひはラグ (lag) といふ。そして正確にラグを測定する事は、時系列の解析、就中景氣變動の研究に於て不可缺の要件となつてゐる。蓋しこれによつて、相關聯する二つの時系列の一方の變化は、略ゝ何箇月の後に他の系列に影響を及ぼし始めるかを推察し得るからである。

ラグの測定は畢竟相關係數の適用である。いま二つの時系列を $X_1 X_2 \cdots X_n$ 及び $Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ とすれば、既に説明したやうな單なる相關係數を算出するには、$\boxed{\begin{array}{ll} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n \end{array}}$ と並べて計算した。Xを物價、Yを賃銀、1、2、3…nを一月、二月、三月…n月とし、假りに賃銀は二箇月のラグを以て物價に追隨するものとすれば、X_1の影響はY_3に於て、X_2の影響はY_4に於て、X_nの影響はY_{n+2}に於て現はれる筈である。して見れば相關係數の算出に際し、右の順序を變へ、X系列を二箇月ずらして $\boxed{\begin{array}{ll} X_1 & Y_3 \\ X_2 & Y_4 \\ X_3 & Y_5 \\ \vdots & \vdots \\ X_n & Y_{n+2} \end{array}}$ と並べれば、兩系列の間により大なる相關係數が求められるであらう。勿論賃銀が何箇月のラグを以て物價に追隨するかは豫め判つてゐないから、吾人は右の順序を逆に行つて、相關係數からラグを決定する外はない。卽ちXとYとの幾多の組合せを作つて、その都度相關係數を算出し、最も大なる相關係數の得られる

組合せを採つてそのラグとするのである。右の例に於ては先づ一箇月のラグを假定して、$\boxed{\begin{array}{l}X_1Y_2\\X_2Y_3\\X_3Y_4\\\vdots\quad\vdots\\X_nY_{n+1}\end{array}}$と組合せて$r$を求め、次には二箇月のラグを假定して$\boxed{\begin{array}{l}X_1Y_3\\X_2Y_4\\X_3Y_5\\\vdots\quad\vdots\\X_nY_{n+2}\end{array}}$と組合せて$r$を算出し、更に三箇月、四箇月等と假定してそれらの組合せの下に各々のrを求め、是等幾多のrのうち、例へば二箇月のラグを假定した場合のrが最大の値を示すならば、賃銀は二箇月のラグを以て物價に追隨すると結論して略々誤りが無いのである。

圖1



斯くラグの決定には兩系列の幾多の組合せを行つてその都度rを算出せねばならぬから、若し豫めラグの大體の見當がつかなければ幾回となく計算を行はねばならず、到底その煩に堪へないであらう。そこで豫め例へばラグは略々八箇月位であらうと、見當をつける事が出來れば、その前後の數箇月、例へば七箇月、八箇月及び九箇月の三つ位の組合せを行つて、この三つのrを比較して正しいラグを決定する事が出來よう。かやうな見當をつけるには、兩系列を同一グラフに描いて見るのがよい。上圖の如きグラフが得られゝば、B系列は略々四箇月乃至六箇月位のラグを以てA系列に追隨する事が推察出來るから、その前後數箇月の組合せを作ればよからう。ラグの決定に於て、若し必ずしも精密を必要としないならば、相關係數によ る代りに、單にグラフを一覽して足りる場合が少くない。尤もこれが爲には兩系列が共に比較的に規則正しい曲線を示す場合に限られる。蓋し或る箇所（時點）では三箇月、或る箇所では八箇月といふやうに、時點によつて著しくラグが違へば、グラフを一覽したゞけでは到底見當のつかないものである。

經濟統計學の主要な一課題として統計的景氣豫測法なるものがある。その中心をなすハーヴァード研究所の方法は、投機・商況・金融の三曲線の相互のラグから、景氣の近い將來の變化を豫測せんとするもので、相關係數の最も實用的應用の一例と見られる。

第五節　相關係數の妥當性

二つ又はそれ以上の異る統計系列の間に成り立つ相關々係の程度は相關係數又は相關比によつて測定されるが、その使用に際しては多分の警戒を必要とする。それは假令高い相關係數又は相關比が得られても、それが直ちに事實系列間に相互的關聯ある證據とはならないといふこと、況や因果關係ある證據とはならないといふことである。曾て著名な一統計學者は濠洲の或る地方では鸛の飛來する季節になると住民の間に出產率の高まる傾きある事を、兩者間の相關係數から結論した。これは決して彼が鸛が赤坊をくはへて來るといふ西洋の傳說を證明する爲ではなく、事實は反對に、若し相關係數に不用意に信賴を置いて、高い相關係數は現象間の必然且つ直接の關聯を反映するものと解釋するならば、かやうな莫迦らしい傳說をも肯定せねばならぬといふ事を警告する爲だつたのである。右の例は恐らく次の如く解釋するのが正しからう。即ち一國の出產率には季節的變動があり、(註1) 濠洲の該地方では偶々出產率が高まる

季節が鷸の飛來する季節と一致するに過ぎない、と。

（註１）我國では出產率は一月乃至三月の頃が一般に高い。これは結婚が三月前後に最も多い結果と思はれる。卽ち一般に受胎は結婚直後に多いから、十箇月の懷姙期間を考慮すれば、一月乃至三月頃に出產の多いのは當然であらう。尤もこの說以外に、人間に於ても春季は性慾增進期に當り、從つてその頃受胎が增加する、との說もある。

右例は偶〻二現象の季節變動が一致した結果生じたものであるが、同樣の事が例へば循環運動或ひは長期傾向の一致した場合についても頻々として發生するのである。工場災害數と金利との間には屢々高い相關係數が算出されるが、これは兩者の循環運動の一致する結果である。卽ち景氣上昇期には生產額を增加する爲に工場は勞働時間の延長や新規職工の傭入れなぞを行ふから各種の災害の增加するのは當然であり、又同じ景氣上昇期には一般に資本に對する需要が增加するから金利の高まるのも亦當然である。この場合、災害數と金利とは別に直接の關係にあるわけではなく、單にこの兩者が景氣變動なる廣大な運動によつて規制されてゐる丈けの事である。更にまた長期間に就て見れば、出生率と金利との間には可成り高い順の相關係數が現はれる。これは兩者が共に時代と共に低下する傾きあるが爲であるが、併し決してその間に直接の關聯があるものではない。出生率の低下は廣義の文化發展の必然的產物であり、金利の低下は資本蓄積の增大の不可避的結果たるに過ぎない。

斯く相關係數が必ずしも現象間の眞の相互關係を示すものでないとすれば、更に進んで、單に高い相關係數が求められたからと言つて、直ちに一方が原因で他方が結果であると推斷してならぬ事は明かであらう。なるほど若し現象間に因果關係があれば、原因たる現象の變化は必ず、結果たる現象の變化を伴ふから、その場合の相關係數は必ず極めて高いに決つてゐる。然るにその逆は必ずしも眞理ではない。高い相關係數も前例の如き事情の下に於ては何等の直接且つ合理的な關聯を反映するものではなく、單に間接の又は偶然の一致を反映するに過ぎない。素より高い相關係數は大多數の場合、直接又は間接の關聯ある場合に限られる。併しその關聯が直接か又は間接かは、單なる相關係數の上からは何等知る事は出來ないのである。換言すれば高い相關係數が得られたならば、現象間に因果關係が存在するのではあるまいかとの一應の想像を廻らす事は差支へなく、否必要でもあるが、それに終局的結論を下すのは最早や統計的事實ではなくして、實に吾人の合理的思惟の力である。科學の窮極の目的たる因果關係の決定に於て、統計的方法は極めて有力な手段たる事は否定し得ないが、併し最後の最も重要な段階に於ては統計的方法は既にその偉力を喪失してゐることを忘れてはならない。そして合理的思惟とはより具體的に言へば理論に外ならぬ。卽ち右の最終段階こそ、事實が終つて理論が始まる限界とも言へよう。理論のみを尊重して事實を無視するのは空中に樓閣を築くの類ひであり、反之、事實のみに偏して理論を忘れるのは科學の本領を沒却する所以である。

如上の諸點を常に念頭に置けば、相關係數は吾人の判斷を謬まらしめるものではなく、反對にこれによつて著しく科學的研究が促進されるのである。既述の如く相關係數の零又は一なる場合は實際には殆ど起り得ない。併し例へば $r=+0.6$ なる場合、これを中程度の相關と見るが、高程度のそれと見るかの如き問題に於ては必ずしも一定の規準があるわけではない。乍併一般に〇・二乃至〇・三以下なる場合は關係は稀薄であり、〇・六乃至〇・七以上なる場合は關

係は密接だと言つてよからう。

なほ全體の一部より算出した相關係數は多かれ少かれ誤差を伴ふと見ねばならぬ。誤差については次章に讓るとして、簡單に言ふならば相關係數の標準誤差は

$$\sigma_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

從つてその確率誤差は

$$\mathrm{P.E.}=0.6745\,\sigma_r$$

によつて示される。故に一部分から算出された相關係數にはその誤差の範圍を次の如く明記して置く必要がある。

$$r\pm\sigma_r \qquad \text{又は} \qquad r\pm0.6745\,\sigma_r$$

最後に、現實の相關々係は曲線的であり且つ多元的なるを寧ろ原則とするが、實際の研究に於ては殆ど常に單純直線相關が想定されてゐる。換言すれば相關比又は多元相關係數乃至は部分相關係數を以て示すべきものをば敢へて單純な相關係數を以て示してゐるのである。これは素より一種の便宜手段ではあるが、併し社會事象の無限の複雑性は却つてこの種の手段を必要ならしめるとも言へるのである。曲線相關又は多元相關は原理としては確かに是認しうるものではあるが、實際の適用に於てはその限界は極めて狹少なるを免かれない。曲線相關と雖も實際に複雜な曲線は想定されず、多元相關と雖も考慮さるゝ系列の數は或る程度を超えるを得ない。然らば相關の問題を單に二系列間に限定し、これについて直線相關を假定するのも、要するに程度の問題に外ならないのである。斯くて特別の理由なき限り、統計的相關は單純相關の理論と技術とを以て律して差支へなからう。

第十章　誤差法則

第一節　誤差生起の原理

統計的法則が常に一ヶの蓋然的法則に外ならざること、延いて斯かる統計的法則の探究に適用さるゝ統計的方法が常に蓋然の理論、即ち確率論に立脚することは、本書の冒頭に於て論じたところである。そしてその際、(1)論理的に展開された確率理論、即ち先驗的確率論はそのまゝでは經驗事象に於ける蓋然性、即ち經驗的確率の確定に適用され得ざること、(2)然るに現實の事象に於ても、それが廣汎な範圍について觀察されるならば、概して大なる安定性を認めうるもので、從つて大數法則を通じて斯かる經驗事象の確率を云々しうること、を述べた。次に統計調査を論ずるに當つて、本來の意味に於ける統計調査、卽ち一統計集團を構成する全單位を數へ上げる所謂悉皆調査は事實上は極めて限られた事柄にしか適用し得ず、多くの場合には代用調査を以て滿足する外なきこと、そして代用調査のうちに於ても任意試料に基く部分調査は誤差法則の背景をもつが故に最も合理的なることを述べた。

斯くて大數法則と誤差法則は統計的方法を確率論と結合する不可缺の媒介であり、これが理解は正しき統計的方法の不可缺の前提である。乍併、これら法則は何れも數學的命題であつて、從つて斯かる命題の說明は最早や統計學の領域ではない。故に詳細は專門書に委ねることゝして、こゝでは纔かに之の概要を記述するに止める。なほ大數法則は後に記す如く、誤差法則の一形態に外ならぬから、先づ誤差法則の構成を一考することゝしよう。

誤差は英語の Error 又は獨逸語の Fehler の譯字で、動もすれば誤謬とか過誤とかの意味と混同される惧れがあるが、この兩者は嚴に區別されねばならぬ。誤謬又は過誤は人の意識的又は無意識的な不用意に基くもので、何等かの意味に於ける失策に外ならない。故に誤謬は吾人の注意によつて避けうる性質のもので、從つて數字上の誤謬は調査や計算を入念にすれば起り得ないのである。反之、科學上の用語としての誤差は斯かる觀察上の心理的技術的原因に基くものではなく、實に事象發顯の樣態そのものに基くものを指すのである。事象の發顯は殆ど常に多かれ少かれ偶然的要素を含み、從つて觀察値と本質値とは必ずしも一致するものではない。日本人成年男子の身長の本質値が假りに五尺三寸なりとするに、觀察される各人の身長は或ひは五尺八寸とか或ひは五尺一寸とかの區々たる値を示してゐる。本質値と觀察値との斯かる差を誤差といふのであつて、この意味に於て誤差を特に偶然誤差と呼ぶのは極めて至當である。

誤謬と誤差との間には理論上次の如き重大な相違がある。卽ち誤謬は上記の如く觀察者の心理又は觀察用具の不完全さに基くが、この不完全さは一種の性癖を有し、從つて觀察値は常に同じ方向に誤り易い。縮んだ物指で長さを計れば常に過大の方向に誤りを犯す事になり、從つて觀察を重ねれば重ねるほど、誤謬は大きくなる一方である。然るに誤差は事象發顯の偶然性に起因するから、その生起は偶然法則卽ち確率論の原理に從ふべく、斯くて觀察を重ねれ

圖1

甲	○	○	●	●
乙	○	●	○	●
	1	2		1

ば重ねるほど正の誤差は負の誤差によつて相殺される傾きを生じ、結局に於ては本質値の所在を示すに至るのである。大數法則が誤差法則の一形態に外ならぬのも畢竟この理由に基く。

誤差生起の法則を最も簡單な例から研究しよう。甲乙二枚の鑄貨を投じて現はれる表裏の組合せは（○は表、●は裏とする）上の圖1の示すとほりの四通りである。二枚を投げたのであるから、一方が表で一方が裏の場合が最も合理的な結果卽ち本質形であることは言ふ迄もないが、右によれば四回のうち二回はこの本質形と一致し、他の二回は甲乙とも表か又は裏である。二枚とも表の場合、

卽ち本質形に甲が合致しない場合を正の誤差とすれば、本質形が二回現はれる間に正負の誤差が一回づつ現はれる事になる。これは確率論的に言へば、二枚とも表の出る確率は1/4、一枚表、一枚裏の出る確率は2/4、二枚とも裏の出る確率は1/4だといへよう。卽ち誤差と確率とは全く同一に取扱へるのである。

同様にして甲乙丙三枚の鑄貨を投げて見る。この時の本質形は一枚が表で二枚が裏か、又は二枚が表で一枚が裏の場合である。然るに全部が表又は裏の場合も起り得るのであつて、これらを例記すれば上の如くである（圖2）。

卽ち本質形が六回現はれる間に正負の誤差が一回づゝ現はれる事になる。次に更に一枚

圖2

甲	○	○	●	●	●	○	○	●
乙	○	●	○	●	○	●	○	●
丙	○	●	●	○	○	○	●	●
	1	$\underbrace{\quad}_{3}$			$\underbrace{\quad}_{3}$			1
		6						

圖3

甲	○	○	○	○	●	○	○	○	●	●	●	●	●	●	○	●
乙	○	○	○	●	○	○	●	●	●	○	○	●	●	○	●	●
丙	○	○	●	○	○	●	●	○	○	○	●	●	○	●	●	●
丁	○	●	○	○	○	●	○	●	○	●	○	○	●	●	●	●
	1	4				6						4				1

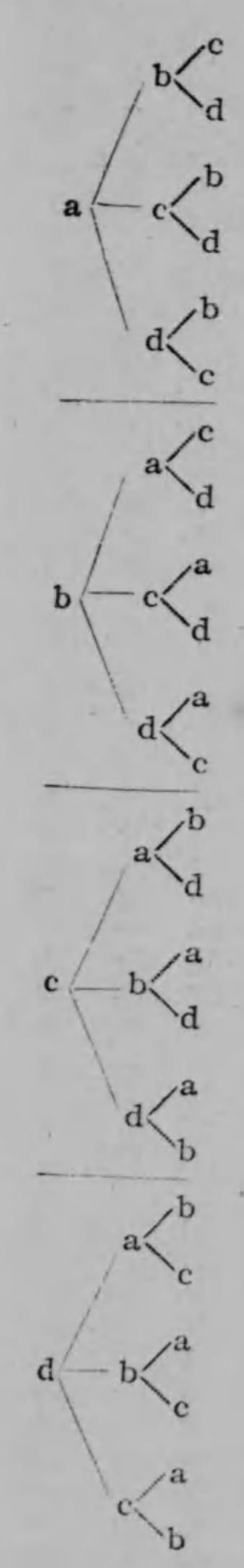
を增して四枚を投げて見れば、本質形は二枚が表で二枚が裏の場合であるが、この際全部が表なるとき、三枚が表で一枚が裏なるとき、三枚が裏で一枚が表なるとき、及び全部が裏なるときの四つの非本質的な形卽ち誤差が起りうる。その分布は上の如くである（圖3）。

卽ち本質形が六回現はれる間に、極端な正負の誤差（全部が表又は裏）が一回づゝ、中程度の正負の誤差（四枚のうち三枚が表又は裏）が四回づゝ現はれる事になるのである。

上記の例から直ちに推しうる事は、擲錢に於ける表裏出現の狀態は、二項式$(a+b)^n$の展開によつて求められる各項の係數に一致するといふ事である。二枚の場合に1、2、1と現はれるのは$(a+b)^2$卽ち$a^2+2ab+b^2$の三つの項の係數と一致し（a^2の係數は1、abのそれは2、b^2のそれは1である）、三枚の場合に1、3、3、1と現はれるのは$(a+b)^3$卽ち$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$の四つの項の係數に外ならず、更に四枚の場合の1、4、6、4、1は$(a+b)^4$卽ち$a^4+4a^3b+6a^2b_2+4ab^3+b^4$の五つの項の係數と一致する。斯くて例へば十枚の鑄貨を投げたときの出現狀態は$(a+b)^{10}$を、五十枚を投げたときのそれは$(a+b)^{50}$を展開する事によつて容易に知りうるであら

う。蓋しこの二項左の展開は「組合せ」(Combination) の應用による所謂二項定理 (Binomiald Theorem) に據ればよいからである。二項定理とは $(a+b)^n=a^n+na^{(n-1)}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{(n-2)}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{(n-3)}b^3+\cdots\cdots$ のことで、この各項の係數は組合せの原理に從つて決定される。上記の四枚の擲錢に於ける係數は1、4、6、4、1であつたが、これを一考して見よう。四枚を投げれば全部が表なる場合がありうるが、これは四箇から四箇とり出す組合せに外ならぬ。組合せは順列 (Permutation) に於ける排列の順序を無視したもので、次の如く理解されよう。

a、b、cの三箇から二箇づゝとり出す列べ方は ab, ba, ac, ca, bc, cb の六通りである。これを三箇から二箇づゝとり出す順列といひ $_3P_2$ と記し、$3\times2=6$ と計算する。何故然るかといふに、最初にaが來れば次にはbかcかであるから、列べ方は二通りであり、bが最初に來れば次にはaかcかであるから同じく二通り、最初にcが來たときも同樣にして二通りである。最初に來る文字はa、b、c即ち與へられた文字全部であるから、この場合は3である。その各々が二通りの列べ方をもつから從つて全部では六通りとなるのである。これと同じ理由から四箇のうちから二箇づゝとり出す順列は $_4P_2=4\times3=12$ 通りである。いま四箇のうちから三箇づゝとり出す順列を見れば、次の如くである。



即ち最初に來る文字はa、b、c、dの何れでもよいから全部で四通りあり、その各々がその次に殘りの三文字の一つをもち、またこの二番目の各々の文字がその次に殘りの二文字の一つをもつ事が出來るから、

$$_4P_3=4\times3\times2=24 \text{ 通り}$$

となる。これを一般的に言へばn箇のうちからr箇づゝとり出す順列は

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

である。これが順列の求め方である。

順列では排列の順序を考慮に入れ、例へば ab. と ba とは別の物として取扱ふが、問題によつては内容さへ等しければ順序は問はぬ場合が尠くない。四枚の錢を投げて四枚とも表なるとき、若し順序を云々すれば $_4P_4=4\times3\times2\times1$ 即ち三十二通りあるが、順序を全く無視して單に全部が表なることだけを問題とすれば、言ふ迄もなく一通りしかない。上記のa、b、c、dの四文字のうち三文字づゝとり出す順列は $_4P_3=4\times3\times2$ 即ち二十四通りであるが、このうち先づ abc, acb, bac, bca, cab, cba の六通りは相等しく、同樣にして abd, adb, dab, dba, bad, bda の六通り、acd, adc, dac, dca, cad, cda の六通り、及び bcd, bdc, dbc, dcb, bcd, bdc の六通りはそれ〲相等しい。故に全部で二十四通りの順列も、順序を無視すればその六分の一即ち僅か四通りの列べ方があるだけである。斯かる列べ方を組合せといひ、n箇のうちからr箇づゝとり出す組合せを

$_nC_r$

と記す。そしてその計算は

$$nCr=\frac{nPr}{r!}$$

なる公式に從つて行へる。蓋しn箇のうちからr箇づゝとり出す組合せの各々に於て、其中のr箇を種々の順序に列べればr!づゝの順列を得られるが、組合せの各々について順序を變更するとすれば、全部ではn箇のうちからr箇づつとり出す順列になつて了ふ。（r!とは 1×2×3×……r のことで、これをrの階乘といふ。）即ち

$$r!nCr=nPr$$

であり、これを變形すれば前記の公式が得られるのである。例へば上例の四文字から三文字づゝとり出す組合せは

$${}_4C_3=\frac{{}_4P_3}{3!}=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4\text{通り}$$

である。

組合せに關する如上の知識から、吾人は二項式の展開を、延いて誤差出現の法則を明かならしめうるのである。四枚の鑄貨を投げた場合の表裏の現はれ方は、既に說明した通り、$(a+b)^4$ の展開に於ける各項の係數に合致するが、この係數は $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 即ち1、4、6、4、1である。これは二項定理

$$(a+b)^n=a^n+na^{(n-1)}b+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}a^{(n-2)}b^2+\cdots\cdots$$

に於けるnを4とすればよい。

先づ第一の項（即ち全部が表なる場合）の係數が1なること、換言すればその出現度數の一回なることは、n箇か

ら n 箇をとつた組合せ nCn（この場合は ${}_4C_4$）は常に一なることから明かである。第二項（三枚表、一枚裏）の係數はn箇から一箇をとり出す組合せと考へられるから nC_1 であり、これは常にnとなる。本例ではnが4であるから從つて係數も4となるのである。第三項（二枚表、二枚裏）の係數は四箇のうちから二箇づゝとり出す組合せであるから、${}_4C_2$ 即ち $\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6$ であり、第四項（表一枚、裏三枚）の係數は ${}_4C_3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4$ で第二項と同じになり[註1]、最後の項（全部裏）は第一項と同じ理由から1となるのである。

（註1）　組合せの原理に從へば ${}_4C_3={}_4C_1$ 即ち一般に nCr=nCn−r である。何となれば

$$nCr=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!\ r!}=nCn-r$$

右の諸例に於ては $a=b=\frac{1}{2}$ である。蓋し表の出る確率と裏の出る確率は相等しいからである。故に右の諸例は $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^1$ なる一般式を以て示すことが出來る。然るにこれはn箇を一回投じたときの出現の確率であるから、もしn箇をN回投じたときのそれを求めるにはこれをN倍すればよい。即ち

$$N\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$$

である。いま $N=2^{10}$, $n=10$ として計算すれば

$$1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1=1024$$

となる。

表の數	度數
0	1
1	10
2	45
3	120
4	210
5	252
6	210
7	120
8	45
9	10
10	1
	1024

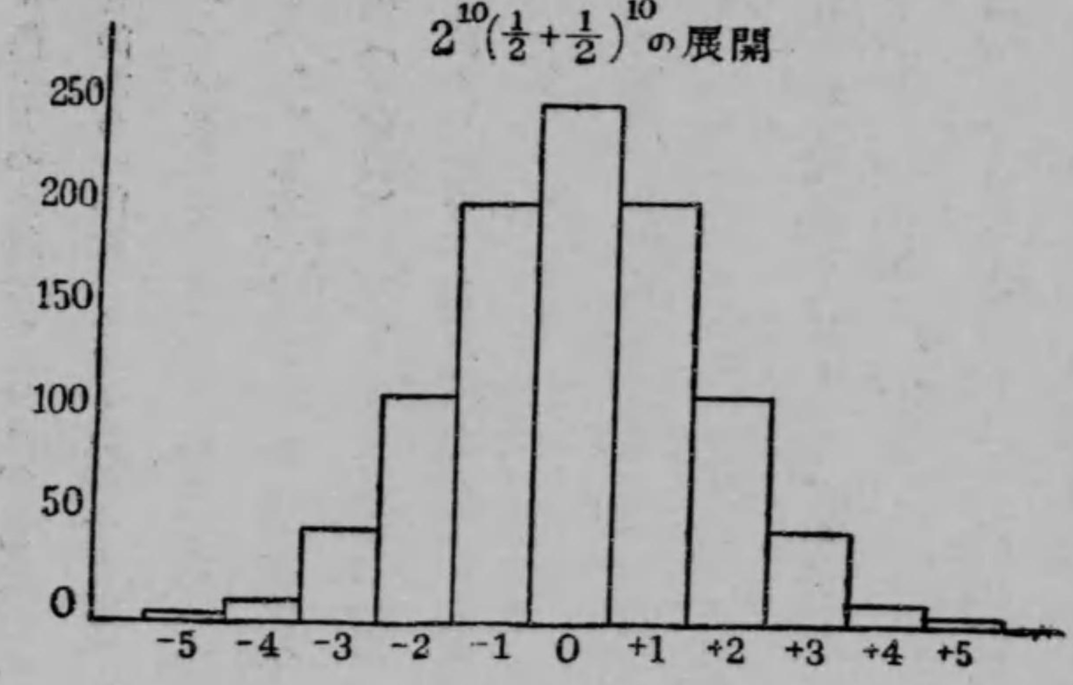
これは $N=2^{10}=1024$ 回の擲錢に於ける表裏出現の確率であり、

即ち千二十四回のうち十枚が全部表の場合は一回、九枚表一枚裏の場合は十回、八枚表二枚裏の場合は四十五回……五枚表五枚裏の場合は二百五十二回……一枚表九枚裏の場合は十回、全部裏の場合は一回なることを示す。即ち五枚表五枚裏の場合を中心として左右に對稱的に分布して居るのであつて、これを圖示すれば上の如くである（圖４）。

　五枚表五枚裏は十枚の擲錢に於ける本質形であるから、その他の場合は總て誤差と認められる。本質形を標準とすれば六枚表四枚裏は−1、四枚表六枚裏は＋1の誤差であり、同様にして七枚表三枚裏は−2、三枚表七枚裏は＋2の誤差、……全部表は−5全部裏は＋5の誤差である。斯くて千二十四回に於て本質形が二百五十二回出現する間に、−1及び＋1の誤差はそれ〲二百十回、−2及び＋2のそれはそれ〲百二十回、……−5及び＋5のそれはそれ〲一回出現する事が判るのである。

圖４

$2^{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{10}$の展開



第二節　誤差曲線

　さて二項式$(a+b)^n$を展開した場合の項の數は$n+1$である。故にnが大となるに從つて項數は增加し、nが無限大となれば項數も亦無限大となる。斯かる場合には上記の棒圖表は度數曲線となる筈である。そして特に$a=b=\frac{1}{2}$なる場合の度數曲線は中心を頂點とする完全な左右對稱形をなし、これを正常曲線又は正規曲線（Normal Curve）、確率曲線（Probability Curve）或ひは誤差曲線（Curve of Errors）と呼ぶ。またこの曲線の創始者ガウスの名をとつてガウス曲線といふこともある。

　その方程式は

$$y=f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}}e^{-x^2/2pqn}$$

となり、誤差の、延いては大數法則の種々の性質は凡てこの曲線、並びにこの曲線の包む面積から導かれるのである。

　右式のxに零を代入すれば、

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

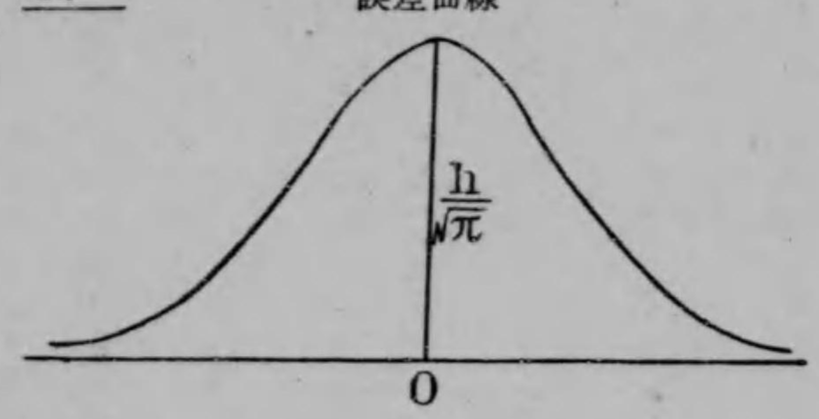
となる。これは誤差が零なる場合の出現確率であつて、誤差曲線はこれを中心として左右對稱的となる。更にxを無限大とすれば

$$y=0$$

となる。換言すれば誤差曲線がx軸に達するのは誤差を無限大とした場合である。

圖１

誤差曲線



如何にしてこの曲線が導出されるかを一考しよう。

前條に述べた通り誤差の起る確率は誤差の大小によつて決定されるから、數學的に言へば誤差の起る確率は誤差の函數である。即ち

$$y=f(x)$$

である。これよりして誤差 x の起る確率は

$$f(x)\,dx$$

であり、誤差が $x=a,\ x=b$ の間にある確率Pは

$$P=\int_a^b f(x)\,dx$$

である。いま誤差 x_1 の起る確率を $f(x_1)\,dx_1$、誤差 x_2 の起る確率を $f(x_2)\,dx_2$……誤差 x_n の起る確率を $f(x_n)\,dx_n$ とすれば、この誤差の總てが同時に起る確率Pは

$$P=f(x_1)f(x_2)\cdots\cdots f(x_n)\,dx_1,\ dx_2\cdots\cdots dx_n$$

或ひはこれを對數に書改めた

$$\log P=\log f(x_1)+\log f(x_2)+\cdots\cdots+\log f(x_n)+\log dx_1+\log dx_2+\cdots\cdots+\log dx_n$$

である。然るに $x_1\ x_2\cdots\cdots x_n$ はXを測る場合の誤差であるから何れもXの函數に外ならず、從つてこれを x について微分すれば

$$\frac{d\log P}{dX}=\frac{d\ \log f(x_1)}{dx_1}\ \frac{dx_1}{dX}+\cdots\cdots+\frac{d\ \log f(x_n)}{dx_n}\ \frac{dx_n}{dX}$$

となる。故にPの極大値は右方程式を零と置く事によつて求められる。然るに $x_1\ x_2\cdots\cdots x_n$ は夫々觀測値 $M_1\ M_2\cdots\cdots M_n$ と眞値Xとの差である、即ち $M_1-X=x_1,\ M_2-X=x_2\cdots\cdots$ である。故に右式の

$$\frac{dx_1}{dX}=\frac{d(M_1-X)}{dX}=-1$$

$$\frac{dx_2}{dX}=\frac{d(M_2-X)}{dX}=-1$$

等となり、よつて

$$\frac{d\ \log f(x_1)}{dx_1}+\frac{d\ \log f(x_2)}{dx_2}+\cdots\cdots+\frac{d\ \log f(x_n)}{dx_n}=0$$

或ひはこれを變形して

$$\frac{d\ \log f(x_1)}{x_1\ dx_1}x_1+\frac{d\ \log f(x_2)}{x_2\ dx_2}x_2+\cdots\cdots+\frac{d\ \log f(x_n)}{x_n\ dx_n}x_n=0$$

然るに誤差 $x_1\ x_2\cdots\cdots x_n$ は合計すれば零である。蓋し誤差は正負が相等しいからである。この事から次の比例式が成り立つ。

$$\frac{d\ \log f(x_1)}{x_1\ dx_1}=\frac{d\ \log f(x_2)}{x_2\ dx_2}=\cdots\cdots=\frac{d\ \log f(x_n)}{x_n\ dx_n}=K$$

いま $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ を一般的に x_i で示せば

$$\frac{d\ \log f(x_i)}{dx_i}=Kx_i$$

となり、これを積分すれば

$$\log f(x_i)=\frac{1}{2}Kx_i^2+C$$

$$\therefore\ f(x_i)=Ce^{\frac{k}{2}x_i^2}$$

又は單に $f(x)=Ce^{\frac{k}{2}x^2}$

この $f(x)$ は減少函數であるから（誤差が大となるに從つて確率は小となるから）$\frac{1}{2}K$ は負數である。いまこれを $-h^2$ で示せば

$$f(x)=Ce^{-h^2x^2}$$

この式の常數Cを決定するには次の如き積分法を使用する。$x=-\infty$, $x=+\infty$ との間に起る誤差の確率は1であるから

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-h^2x^2}dx$$

この積分變數 x を y と改めれば

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-h^2y^2}dy$$

$$\therefore\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-h^2x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-h^2y^2}dy$$

$$=C^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2y^2}dy$$

$$=C^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2(x^2+y^2)}dxdy$$

これを變形すれば

$$1=C^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-h^2r^2}\,r\,dr\,d\theta=C^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{2h^2}e^{-h^2r^2}\right]_0^{\infty}d\theta$$

$$=C^2\frac{2}{2h^2}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{C^2}{2h^2}[\theta]_0^{2\pi}=\frac{C^2}{2h^2}2\pi=\frac{C^2\pi}{h^2}$$

$$\therefore\quad C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

これを $f(x)=Ce^{-h^2x^2}$ に代入すれば

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}\qquad\cdots\cdots(1)$$

いま $h=\frac{1}{\sqrt{2pqn}}$ とすれば、右式は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2pqn}}e^{-x^2/2pqn}\qquad\cdots\cdots(2)$$

となる。然るに二項式 $(p+q)^n$ に於ては

$$\sqrt{pqn}=\sigma$$

であるから、次の如く書改めてもよい

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\qquad\cdots\cdots(3)$$

更に度數をNとすれば

$$f(x)=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\qquad\cdots\cdots(4)$$

とも書ける。この(1)、(2)、(3)、及び(4)は畢竟同じもので、これを誤差曲線又は正常曲線といふのである。

第三節　誤差曲線の包む面積

誤差の起る確率は誤差の函數即ち $f(x)\,dx$ であるから、誤差が $x=-a$ と $x=+a$ との間にあることの確率 p は

$$p=\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx$$

である。然るに

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

であるから、

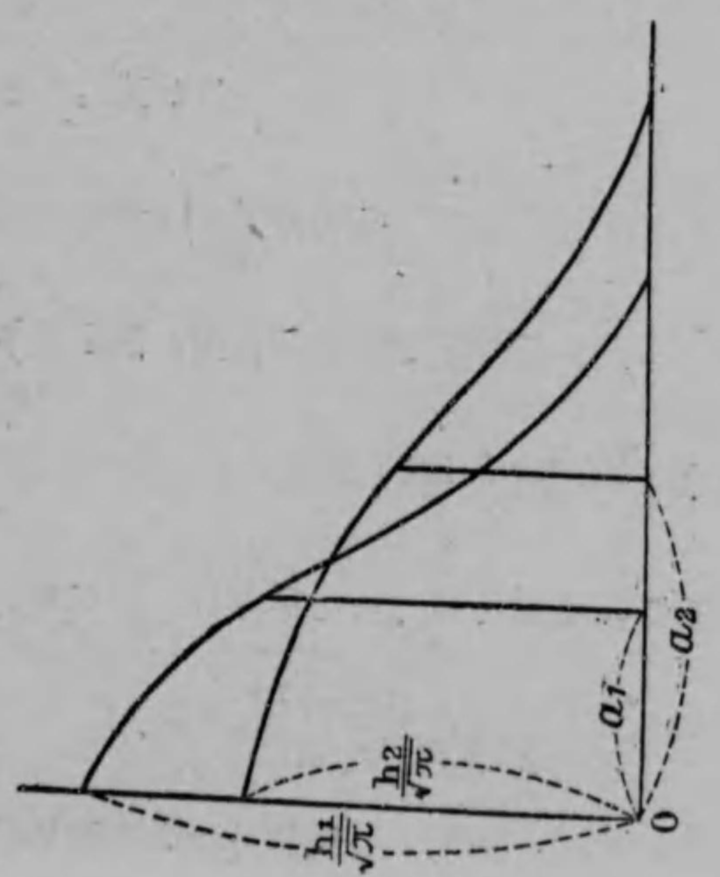
$$p=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{+a}e^{-h^2x^2}dx$$

と記すことが出來る。この式に於て $hx=t$ とおけば

$$p=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-ah}^{+ah}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah}e^{-t^2}dt$$

となり、pの大さはahの如何によつて決定されることが判る。換言すればpはahの函數である。故に二つの觀察に於けるpの値が等しい場合、誤差aの値が小さければ小さいほどhは大でなければならぬ。この理由からhをば觀察の精密度又は精度（Precision）といふのである。次の圖1はこれを示したものである。

圖 1



このhは前述の如く

$$h=\frac{1}{\sqrt{2pqn}}$$

であるが、これを直接に算出することは不可能である。然るに標準偏差σは正當分布に於ては $\sigma=\sqrt{pqn}$ であるから（nは回數）、これよりして

$$\sigma^2=pqn=\frac{1}{2h^2}$$

なる式が成り立つ。斯くて實際には標準偏差は精密度に反比例すると見てよいのであつて、誤差曲線に於ける標準偏差を特に標準誤差（Standard Error）といふのはこれが爲である。正常分布に於て標準偏差だけを算術平均の左右にとればその範圍即ちMa±σの間に全度數の約六八・二七%を含むが、これと全く同様に標準誤差を算術平均の左右にとれば、起る誤差全體（即ち誤差曲線の包む總面積）の六八・二七%を含む。また標準偏差の場合と同じく、算術平均の左右に2σをとれば全體の九五・四五%を、また3σをとれば九九・七三%を含むのである。

然るに誤差曲線は中央を境として左右全く對稱的であるから、求める面積の半分だけを計算すれば、それを二倍する事によつて容易に求める面積を知ることが出來る。即ちMa±σを知るには單にMa+σを知ればよく、その値は前記の六八・二七%の半分即ち三四・一三四%である。同様にしてMa±2σはMa+2σ即ち四七・七二五%（九五・四五%の半分）から、またMa±3σはMa+3σ即ち四九・八六五%から求めることが出來るのである。σの各種倍數の範圍内に含まれる斯かる面積は詳しく計算され數學表に纏められてゐるが、この若干を表示すれば次の如くである。

表 1

σの倍數	包む面積（%）
0.1	3.983
0.2	7.926
0.3	11.791
0.4	15.542
0.5	19.146
0.6	22.575
0.7	25.804
0.8	28.814
0.9	31.594
1.0	34.134
1.5	43.319
2.0	47.725
2.5	49.379
3.0	49.865
3.5	49.977

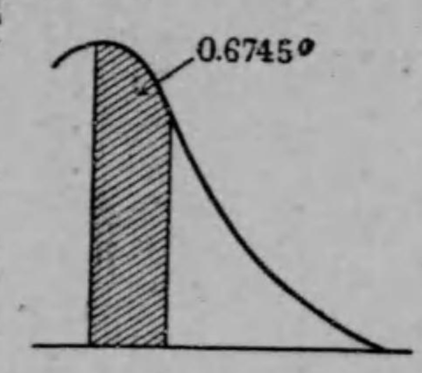
上表に就て見るに 0.6σ=22.575% であり、0.7σ=25.804% である。よつてこの二つ（〇・六と〇・七）の間の或る數に於てはその含む面積は25%となる筈で、これを二倍すれば 50% 即ち起る誤差全體の丁度半分を含む範圍となることが判る。この或る數は計算によれば〇・六七四五であつて、從つて 0.6745σ=25% と記す事が出來る。斯くて標準誤差の〇・六七四五倍を特に確率誤差（Probable Error）といひ、一般に P. E. と記す。即ち記號で示

せば、P.E$=0.6745\sigma$である。確率誤差よりも小さい誤差の確率と大きい誤差の確率とは全く相等しく、何れも$\frac{1}{2}$である。なほこの〇・六七四五は約$\frac{2}{3}$であるから、近似的には

$$\mathrm{P.\ E}=\frac{2}{3}\sigma$$

と記すことも出來る。

圖 2



部分的觀察の値と全域の値との間には斯く種々なる程度の誤差が介在するから、この誤差の範圍は必ず明瞭に記されて居らねばならぬ。然るに右の如く誤差の範圍は標準誤差又は確率誤差によつて示されるから、この何れかを觀察値に添へて置けばよいのであつて、假りに觀察値をAとすれば

$A\pm\sigma$　又は　$A\pm$P. E.

と記すことによつて誤差の範圍を限定するのである。

第四節　標準誤差と確率誤差

斯くて總ての統計誘導値につきその標準誤差及び確率誤差が算出されねばならぬが、その主たるものは次の如くである。

(1)算術平均（$\bar{X}$）の標準誤差　$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

(2)中位數（Me）の標準誤差　$\sigma_{Me}=1.2533\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

(3)標準偏差の標準誤差　$\sigma_{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$

(4)相關係數の標準誤差　$\sigma_{r}=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$

(5)平均の和又は差の標準誤差　$\sigma_{D}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1}+\frac{\sigma_2^2}{N_2}}$

これらの確率誤差は前述の如く右の標準誤差を〇・六七四五倍したものである。

何故斯かる標準誤差の公式が成り立つかを證明するのは必ずしも容易でないが、こゝではその一例として算術平均の標準誤差の誘導を説明しよう。

部分を大ならしめるほど、部分より求めた誘導値が全體の眞價に接近することは當然である。即ち部分の増大は誘導値の信頼度を増大する所以である。併し信頼度は決して部分の増大に正比例して増大せずして、寧ろ遞減的比例に於て増大するものである。經驗及び理論の示すところによれば、試料の信頼度はこの試料の大さの平方根に比例する。故に例へば壯丁の身長を云々するとき百人の代りに一萬人をとつても、信頼度は 100 : 10,000 即ち百倍されるのはでなく、$\sqrt{100}:\sqrt{10,000}$ 即ち十倍されるに過ぎない。

そこで或る系列について求めた算術平均値は、その系列に含まれる項が多いほど信頼度は大となるが、その割合は

項數の平方根に比例する。然るに該系列の算術平均値の價値はその標準偏差σによつて測られるから、全體の算術平均値の價値は右系列の標準偏差とその系列の項數の平方根との比卽ち $\sigma/\sqrt{N}$ によつて測られねばならぬ。これを算術平均値の標準誤差といふ。從つてその確率誤差はその〇・六七四五倍卽ち $0.6745\sigma/\sqrt{N}$ となるのである。例へば百人の壯丁の身長平均が五尺三寸、σが一寸なりとすれば、この標準誤差は $\frac{1寸}{\sqrt{100}}$、確率誤差は $0.6745\times\frac{1寸}{\sqrt{100}}$ であつて、その意味するところは、もし壯丁百人づゝの多數の組について各々平均値を求めれば、それら平均値の約三分の二は $53寸\pm\frac{1寸}{\sqrt{100}}$ 卽ち五尺二寸九分乃至五尺三寸一分の範圍內にあると見てよく、又はそれら平均値の半數は $53寸\pm0.6745\times\frac{1寸}{\sqrt{100}}$ の範圍內にあると見てよいといふ事である。故に百人の代りに千人をとれば、たとへσは大となつても $\sigma/\sqrt{N}$ は小となるから、それだけ平均値は眞の平均値に接近するのである。

起りうる誤差の範圍は前述の如く標準誤差の三倍を超えぬといふ命題は、各種の統計誘導値を判定するに當つて大なる效果をもつものである。例へば一見同種と思はれる二ケの統計系列につき各々平均値を求めたるに、相互の間に若干の差を認めたとする。二ケの平均値の和又は差の標準誤差は

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1}+\frac{\sigma_2^2}{N_2}}$$

によつて示されるから、右に於て認めた差がこの標準誤差の三倍以內なる場合は、その差は單に調査上の偶然的誤差と認められ、從つてこの二ケの系列は同種なりと斷定し得よう。反之、二ケの平均値の差が右の標準誤差の三倍を超えたならば、その差は單なる偶然誤差に非ずして、系列間の本質的相違に基くものと推論しうるのである。換言すればかゝる場合の二系列は嚴格な意味に於いては同種と認め得ないと見てよいのである。二〇歳の男子千人の身長平均と、同年の女子千人のそれについて計算すれば、恐らくこの二つの平均値の差は標準誤差の數十倍に達するであらう。これは男子の身長と女子のそれとは本質的に異るからである。

×　×　×　×

如上の誤差法則によつて吾人は部分と全體との關係を明確ならしめうることを知つた。卽ち任意無差別に選擇された部分卽ち任意試料は、誤差法則の示す誤差範圍內に於て全體卽ち母域の縮圖と認められるといふことであつて、換言すれば誤差の範圍內に於て部分から全體を推して差支へないのである。唯だ注意すべきは誤差法則の完全に作用するのは、抽出された部分が全體に對して比較的大なる割合を示す場合であり、且つ全體そのものが極めて大なる集團たる場合に限られることである。小なる部分については誤差法則の作用する理由がないから、特別の場合を除いては統計的方法の對象たるを得ないし、また小なる全體はこれを大なる母域の一部分として取扱ふ以外には適當な方法はない。故に如何なる場合にも統計的方法の對象が大數的現象たる可きことは依然として眞である。

最後に特に注意せねばならぬことは、試料からの推定は母域の構造に對して行へるのみであつて、母域の大さそのものを試料から決定する事は不可能だといふことである。この點についてはワーゲマンの次の一文が甚だ印象的である。

第四節　標準誤差と確率誤差

Durch die gegenseitige Vertretung zwischen der Gesamtheit und ihren Teilen und damit dieser Teile untereinander entstehen—darüber muss man sich klar sein—nur Aussagen über die Massenstruktur, niemals über den Umfang der Massen. Inklusion und Repräsentation können z. B. die Bevölkerungsdichte, die Geburtenziffer, den Durchschnittspreis veranschlagen, nicht aber die absoluten Bevölkerungszahlen, die Anzahl der Geburten, die Umsatzsummen angeben. Nur wenn von der zu vertretenden Masse weitere Anhaltspunkte gegeben sind, kann von der Struktur auf ihrem Umfang geschlossen werden. So lässt sich z. B. aus der Bevölkerungsdichte die Gesamtbevölkerung errechnen, wenn man ihre Gebietsfläche kennt; so kann die Grösse der Bevölkerung auch aus der Besetzung einer Altersklasse, etwa der schulpflichtigen Kinder, bei Kenntniss des Altersaufbaus erschlossen werden. (Wagemann, Narrenspiegel der Statistik. S. 176)

第五節 正常曲線の當嵌

正常曲線は凡ゆる度數分布曲線の基本形態であるから、與へられた度數分布が略〻正常分布に近いときは、これに正常曲線を當嵌めることが最も望ましい。その方法としては面積法と縦座標法との二つがある。

(一) 面積法

正常分布は對稱分布であるから、算術平均・並數及び中位數は何れも相等しく、何れも曲線の頂點の示す x 座標に一致する。この平均を中心として左右に標準偏差 σ に等しい距離をとれば、その範圍即ち $Ma\pm\sigma$ と曲線とによつて包まれる面積は上述の如く全度數の六八・二六%に該當し、標準偏差の二倍をとれば九五・四六%、三倍をとれば九九・七四%に該當する。故にもし左又は右の一方に σ だけをとればその面積は六八・二六%の半分、即ち三四・一三%、2σ をとれば九五・四六%の半分、即ち四七・七三%に當る筈である。故に例へば、賃銀別職工數の度數分布曲線が假りに正常曲線であつたとし、平均賃銀が一圓、σ が十錢だとすれば Ma と $Ma+\sigma$ との間、即ち一圓と一圓十錢との間に全職工の三四・一三%が含まれ、同様にして一圓と一圓二十錢との間に四七・七三%が含まれる。これを逆に言へば $\frac{x}{\sigma}=1$ ならば全職工の三四・一三%が、$\frac{x}{\sigma}=2$ ならば四七・七三%が含まれるのである。正常曲線當嵌の面積法とはこの最後に述べた原理を適用したもので、次に一箇の假設例について説明しよう (Arkin & Colton : Statistical Methods, p. 112 に據る)。

表 1

階級	厚さ(インチ)	枚數 (f)
1	.0180—.01839	6
2	.0184—.01879	30
3	.0188—.01919	42
4	.0192—.01959	66
5	.0196—.01999	94
6	.0200—.02039	120
7	.0204—.02079	102
8	.0208—.02119	60
9	.0212—.02159	54
10	.0216—.02199	14
11	.0220—.02239	12

某工場で生産される眞鍮板の厚さを精密に測定したところ、幾分厚いものや薄いものがあつて、六百枚について上表の如き結果を得た。

その平均は〇、〇二〇二インチ、σ は〇、〇〇〇八五インチである。

右の度數分布を見るに、圖2のヒストグラムの示す通り、厚さ〇、〇二一〇、〇二〇三九インチの一二〇枚を中心として略〻對稱的に分布し

圖 1

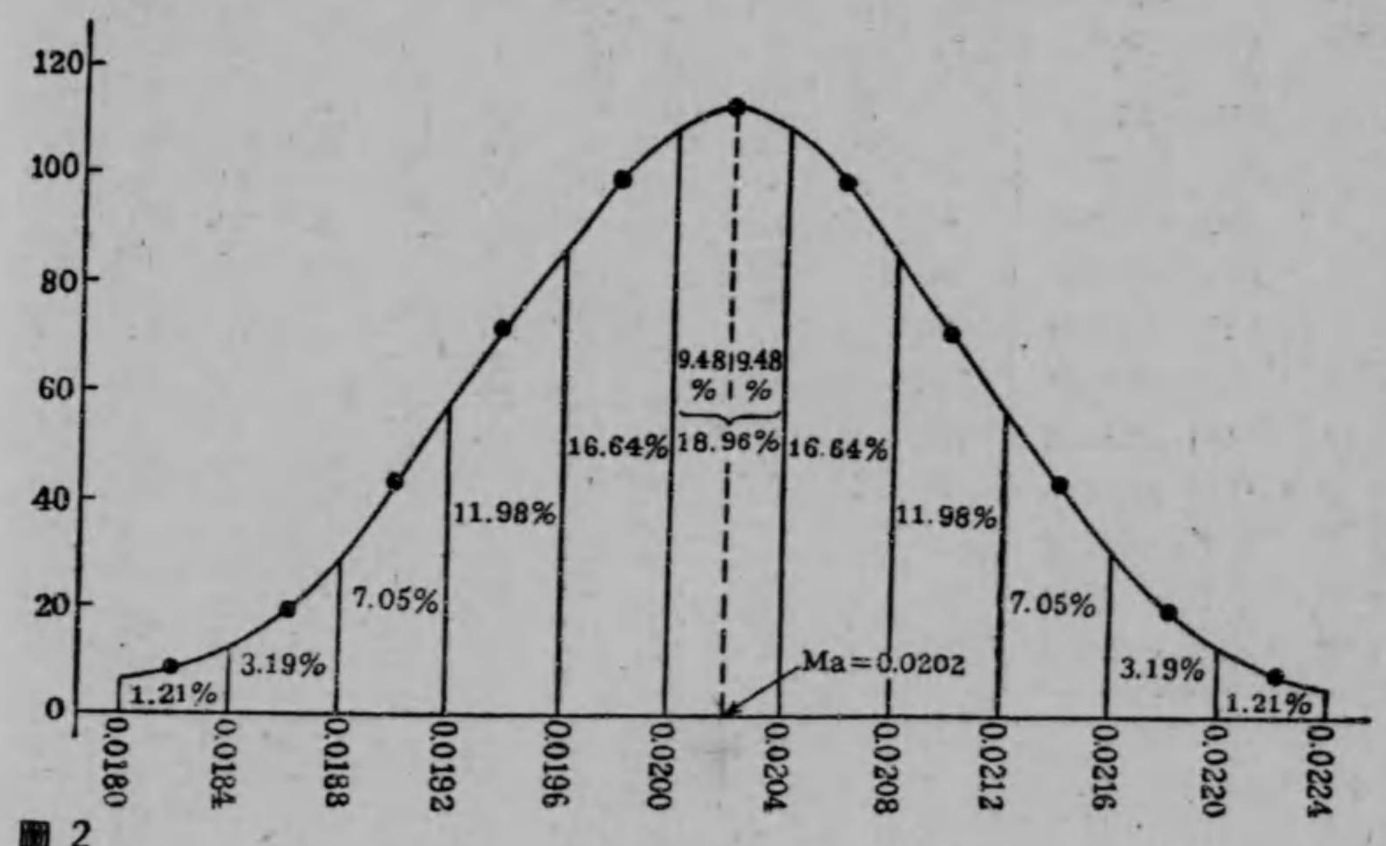
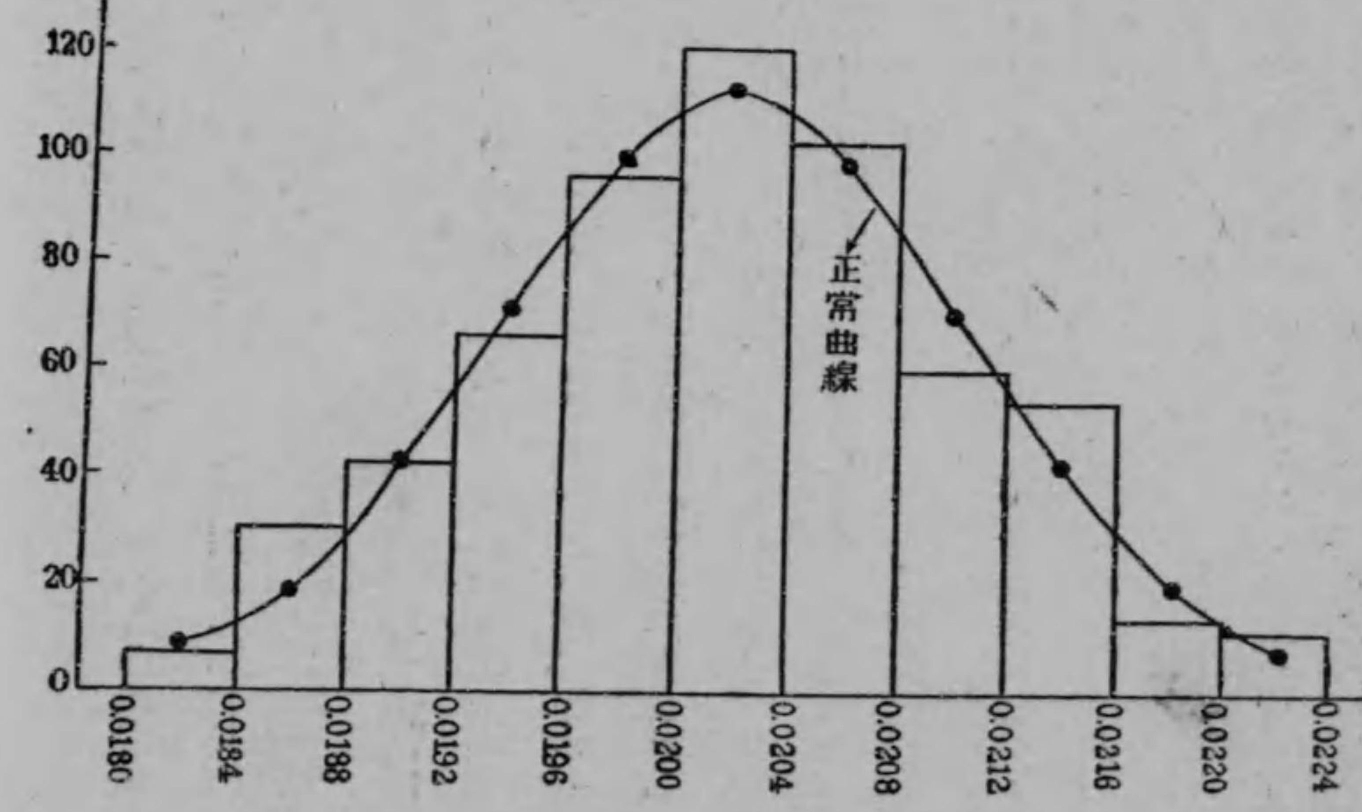


圖 2



てゐるから、これに正常曲線を當嵌める事は差支へなからう。

その方法を一考するに、例へば第三階級は下の限界が〇・〇一八八で上の限界が〇・〇一九一九であるから、その幅は兩者の差たる〇・〇〇一四インチである。前述の如くσは〇・〇〇〇八五であるから、右の〇・〇〇一四インチはσの一・六六倍に當る$\left(\frac{0.0014}{0.00085}=1.66\right)$。然るに $\frac{x}{\sigma}=1$ ならばその範圍内に總度數の三四・一三%、$\frac{x}{\sigma}=2$ ならば四七・七三%が含まれる事が判つてゐる。こゝでは $\frac{x}{\sigma}=1.66$ であるから、右の二つの%の間の或る數でなければならぬ。これを求めるには三〇二頁の「正常曲線面積表」を使用すればよい。之によれば $\frac{x}{\sigma}=1.66$ ならば 0.4515 即ち 45.15% なる事が判る。これは「平均」と「該階級の上の限界」との間に挾まれる面積即ち度數の%である。同樣の計算を次の階級（〇・〇一九二―〇・〇一九五九）について行へば $\frac{x}{\sigma}=1.18$ 即ち表から 38,10% を得る。故に兩者の差、即ち 45.15%―38.10%＝7.05% は第三階級の占める面積（度數）である。この例では總度數は六〇〇枚であるからその七・〇五%は 600×7.05%＝42.3枚 となる。これは第三階級の理論的度數である。同樣の計算を全部について行へば上の如き結果が得られる。圖1はこれを圖示したもので、この正常曲線が如何に當嵌まつてゐるかは圖2によつて容易に判らう。

〔註〕正常曲線は對稱的曲線であるから總階級の半分だけを計算すれば、あとの半分は同じである。本例では第六階級が中央に當るから、それまでを計算すればよい。猶ほ中央に當る第六階級が $\frac{19.48}{19.48}$ となつてゐるのは、平均値がこの階級の中點に一致するからである。換言すれば平均によつてこの階級が二分されるからである。

表 2

階級	階級限界と平均との間の面積	階級の面積	理論的度數
1	49.55%	1.21%	7.3
2	48.34	3.19	19.1
3	45.15	7.05	42.3
4	38.10	11.98	71.9
5	26.12	16.68	99.8
6	9.48 / 9.48	18.96	113.8
7	26.12	16.68	99.8
8	38.10	11.98	71.9
9	45.15	7.05	42.3
10	48.34	3.19	19.1
11	49.55	1.21	7.3

(二) 縦座標法

度數Nなる場合の正常曲線は

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

であるが、この式の$\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$は曲線の頂點の高さである。然るに $\pi=3.1416\cdots\cdots$であるから、

$$\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{N}{2.506628\sigma}$$

且つこの公式の適用に於てはσは階級を單位として計算すべき約束があるので、右例に當嵌めるに當つては

$$\sigma=\frac{0.00085}{0.004}=2.109$$

とせねばならぬ。故に求むる正常曲線の頂點の高さは

$$\frac{600}{2.109\times2.50668}=113.5$$

となる。さて第一階段の中點（〇・〇一八二）の偏差（平均値即ち〇・〇二〇二よりの偏差）は〇・〇〇二〇であるから、これを標準偏差に對する比率に換算すれば

$$\frac{x}{\sigma}=\frac{0.0020}{0.00085}=2.37$$

を得る。よつて別表の正常曲線縦座標表より六・〇三%となるが、これは第一階級の中點の高さ（曲線の頂點の高さに對する百分率）である。然るに曲線の頂點の高さは一一三・五であるから、求める高さは $113.5\times6.03\%=6.84$ となる。この操作を第二階級以下にも施せばよいのであつて、その結果は上表の如くである。前述の面積法の結果とは多少數値を異にするが、その差は極めて小である。

表 3

中　點	度數	平均よりの偏差 (x)	$\frac{x}{\sigma}$	縦座標 (%)	理論的度數
0.0182	6	0.0020	2.37	6.03	6.84
0.0186	30	0.0016	1.90	16.45	18.67
0.0190	42	0.0012	1.42	36.49	41.42
0.0194	66	0.0008	0.95	63.68	72.28
0.0198	94	0.0004	0.47	89.54	101.62
0.0202	120	0.0000	0.00	100.00	113.50
0.0206	102	0.0004	0.47	89.54	101.62
0.0210	60	0.0008	0.95	63.68	72.28
0.0214	54	0.0012	1.42	36.49	41.42
0.0218	14	0.0016	1.90	16.45	18.67
0.0222	12	0.0020	2.37	6.03	6.84
(平均) 0.0202	600				

正常曲線當嵌めの適不適はピアーソンの Chi Square Test によつて判斷される。與へられた度數をf_0、理論的度數をfとすれば、

$$\chi^2=\Sigma\frac{(f_0-f)^2}{f}$$

を Chi Square Test といふのであつて、Chi Square Tables に照し合はせて判斷を下すのである。

表 4　　正常曲線面積表

$\frac{x}{\sigma}$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3718	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4083	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4758	.4762	.4767
2.0	.4773	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4984	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990
3.1	.49903	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993

表 5　　正常曲線縱座標表

$\frac{x}{\sigma}$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	1.00000	.99995	.99980	.99955	.99920	.99875	.99820	.99755	.99685	.99596
0.1	.99501	.99396	.99283	.99158	.99025	.98881	.98728	.98565	.98393	.98211
0.2	.98020	.97819	.97609	.97390	.97161	.96923	.95676	.96420	.96156	.95882
0.3	.95600	.95309	.95010	.94702	.94387	.94055	.93723	.93382	.93024	.92677
0.4	.92312	.91399	.91558	.91169	.90774	.90371	.89961	.89543	.89119	.88688
0.5	.88250	.87805	.87353	.86896	.86432	.85962	.85488	.85006	.84519	.84060
0.6	.83527	.83023	.83514	.82010	.81481	.80957	.80429	.79896	.79459	.78817
0.7	.78270	.77721	.77167	.76610	.76048	.75484	.74916	.74342	.73769	.73193
0.8	.72615	.72033	.71448	.70861	.70272	.69681	.69087	.68493	.67896	.67298
0.9	.66689	.66097	.65494	.64891	.64287	.63683	.63077	.62472	.61865	.61259
1.0	.60653	.60047	.59440	.58834	.58228	.57623	.57017	.56414	.55810	.55209
1.1	.54607	.54007	.53409	.52812	.52214	.51620	.51027	.50437	.49848	.49260
1.2	.48675	.48092	.47511	.46933	.46357	.45793	.45212	.44644	.44078	.43516
1.3	.42956	.42399	.41845	.41294	.40747	.40202	.39661	.39123	.38569	.38058
1.4	.37531	.37007	.36487	.35971	.35459	.34950	.34445	.33944	.33447	.32954
1.5	.32465	.31980	.31500	.31023	.30550	.30082	.29618	.29158	.28702	.28251
1.6	.27804	.27361	.26923	.26489	.26059	.25634	.25213	.24797	.24385	.23978
1.7	.23575	.23176	.22782	.22392	.22008	.21627	.21251	.20879	.20511	.20148
1.8	.19790	.194 6	.19086	.18741	.18400	.18064	.17732	.17904	.17081	.16762
1.9	.16448	.16137	.15831	.15530	.15232	.14939	.14650	.14364	.14083	.13806
2.0	.13534	.13265	.13000	.12740	.12483	.12230	.11981	.11737	.11496	.11259
2.1	.11025	.10795	.10570	.10347	.10129	.09914	.09702	.09495	.09290	.09090
2.2	.08892	.08698	.08507	.08320	.08136	.07956	.07778	.07604	.07433	.07266
2.3	.07100	.06939	.06780	.06624	.06471	.06321	.06174	.06029	.05888	.05750
2.4	.05614	.05481	.05350	.05222	.05096	.04973	.04852	.04737	.04618	.04505
2.5	.04394	.04285	.04179	.04074	.03972	.03873	.03775	.03680	.03586	.03494
2.6	.03405	.03317	.03232	.03148	.03066	.02986	.02908	.02831	.02757	.02684
2.7	.02612	.02542	.02474	.02408	.02343	.02280	.02218	.02157	.02098	.02040
2.8	.01984	.01929	.01876	.01823	.01772	.01723	.01674	.01627	.01581	.01536
2.9	.01492	.01449	.01408	.01367	.01328	.01288	.01288	.01252	.01179	.01145
3.0	.01111	.00819	.00598	.00432	.00309	.00219	.00153	.00106	.00073	.00050
4.0	.00034	.00022	.00015	.00010	.00006	.00004	.00003	.00002	.00001	.00001

第十一章　統計比較の諸問題

第一節　比較一般の諸問題

總て事物のもつ價値或ひは意義は、それ自身からは判斷されない。それは常に相對的なものであつて、從つて何等か他のものと比較されて始めて或る判斷が下される。飛行機が便利かどうかは他の交通機關に比較されて始めて言へる事であり、六尺といふ身長が高いかどうかは他の人の身長と比較されて始めて斷定出來る事である。これらが全く他と切り離されて持ち出されたのでは、吾人はそれに對して何の解答をも與へ得ないであらう。

斯くて吾人は不斷に何等かの比較を强要されてゐるが、これを大別すれば質の比較と量の比較の二種となす事が出來よう。善惡美醜の判斷は質の比較によつて行はれ、長短多少のそれは量の比較によつて行はれる。この二つの比較のうち、前者卽ち質の比較は確實なるを期し難い。蓋し質それ自身は人の主觀的判斷によつて如何やうにも規定されるから、嚴格な比較標準なるものが存在しないのである。蓼食ふ蟲もすきずきとは、恐らく斯かる質的判斷の主觀性を指したものであらう。これに反して量的比較は原則として確實な結果を期待しうるもので、從つて科學的用語としての比較は必ずこの形態の比較を意味する。蓋し量は常に一定の客觀的尺度を以て測定され、その決定に主觀の働く餘地はないからである。甲の身長を判斷する爲には、物指で測つた甲の身長を、同じ物指で測つた他の身長に比較すればよいのであつて、僅少の觀測誤差を度外視すれば、何人が試みても少くとも數量的には同一結果を齎すであらう。

斯く比較は量的にのみ正確を期し得られるから、吾人は質の比較に於ても、豫め質を量に變形する事によつて正確な結果を求めんと努力するのである。學術試驗の良否を點數で示したり、意見の賛否を多數決によつて求めんとするが如きこの例である。

質を量に變形するに當つては依然として主觀的判斷の影響が大であるから、結果として生ずる量の正確さは素より疑問である。併し同一の質的現象を多數の人々に判斷せしめるならば、起るべき過大及び過少の過誤は所謂誤差法則の原理によつて著しく相殺され、客觀的な斷定に到達し得るであらう。水泳飛込競技やフィギュア・スケート競技の採點法の如き、この例である。決議に於ける多數決の方法なるものも、この原理を單に質の決定に適用したものである。この種の客觀的背景を有せざる價値判斷は總て多かれ少かれ獨善的なもので、若しこれによつて正しい結論に到達し得たとすれば寧ろ偶然と言はねばならぬ。勿論この事は直ちに一切の獨善主義又は獨裁主義の否定を意味するものではない。政治上の多數決主義は動もすれば衆愚政治となり、賢明な獨裁政治に遙かに及ばない事は屢々見受けられるところである。

乍併これは單に質を質として扱ふ限りに於てのみ許される事で、質を量に變形する問題に於ては全く適用されない。これは個人的判斷は一般にその人に特有の方向に常に誤謬を犯し易いといふ否定す可らざる理由に基くのである。卽

ち多少とも正確な結果を求めるには、多少とも客觀的基礎をもつ判斷を必要とするといふことは依然として眞である。そして若し變形の方法が正しいとすれば、質を代表する量の比較は直ちに質の比較を可能ならしめる。併し反對に若し變形の方法に誤りが介在すれば、結果は單に形の上の比較に止まり、背後の質についての本質を語るものではない。純粹の量に比して、質の問題に多大の困難の伴ふのはこれが爲である。そして吾人が日常使用するところの量は必ずしも常に純粹の量ではなく、極めて多くの場合、如上の質の變形なる事を顧れば、單なる形式的比較によつて輕卒に結論を下す事の如何に危險なるかは容易に推せるであらう。この問題については實質的比較の項目下に後段改めて言及する。

正確な比較が量の比較たるべきこと、從つてこの種の比較のみが眞に科學的な比較なる事は以上によつて明かであるが、次に斯かる比較は如何なる形態に於て行はれるかを一考せねばならぬ。換言すれば如何なるものゝ間に比較が行はれるかといふ事である。この事は一見甚だ容易な問題と思はれてゐるが、實際には日常用語としての比較なる文字は可成り混亂した概念なのである。故に吾人は先づ本來の意味に於ける比較と、二次的意味に於けるそれとを明かに區別する必要がある。

本質的には比較は二つ又はそれ以上の同種のものゝ間に行はれるものに限られる。比較とは或る事柄が他よりも多いか少いか、又は大きいか小さいかを求める事であるから、甲乙二つの間に或る共通點がなければならぬ。獨逸語で比較の事を Vergleich といふが、これは gleich（等しい）かどうかを見るといふ事で、從つて比較が單に同種の卽ち或る共通點を有するものゝ間にしか行へない事は自ら明かであらう。甲の身長を當人の過去の身長又は乙の身長に比較する事は出來るが、甲の身長を例へば他人の體重とか、牛肉とかに比較する事は出來ない。これはこの二つが同種でないからである。或る牛肉は他の牛肉と比較するべきである。尤も例へば牛肉と大根とどちらが榮養分があるかとか、どちらが美味いとかといふ場合には、異質の比較が行はれるわけであるが、併しこれは外見的に異質たるに止まり、問題となる榮養分又は味といふ點から見れば兩者は同質のものなのである。卽ち何が同質であるかは、問題によつて決定されるのであつて、これを一般的に規定する事は出來ない。男と女とは人間といふ點から見れば同質であるが、體性といふ點から見れば異質である。月と鼈とは全く異質のものとされてゐるが、これとて例へば形狀といふ點から見れば同質となる。——同質と同一とは異ることに注意されたい。二つが共に有形物であれば、兩者共に或る形をもつといふ點に於て同質なのであつて、決して丸いものは丸いものとでなければ同質たり得ないといふ意味ではない。

斯く同質性といふ事が比較の根本的要件であるが、而も吾人の日常用語としての比較は全くこの要件に合致しない場合をも含むのである。體格測定に於て身長と體重との比を求めることがあるが、これは全く異質の二つを比較する事である。同樣の計算は例へば人口と面積を比較するとか、一組の學生數と教室の廣さを比較するとか、其他極めて廣く行はれるところであつて、この種の比率を一般に關係數といふ。これらは人口密度とか教室の健康性とかを決定する手段であつて、その必要さは同質物の比較に毫も劣るものではない。而もこれが本來の比較と區別されねばなら

ぬ理由は次の通りである。卽ち異質物の間に成り立つ關係數はそれ自身では未だ無意味であり、その意味を確定するには同種の關係數の間に改めて比較を行はねばならぬといふ事である。昭和十年度の本邦人口密度卽ち人口と面積の比は一方粁につき一八一人であるが、この數字は恰も某の身長は五尺五寸といふのと同じく、それ自體では何物をも物語つてゐない。これを過去の本邦人口密度に比較して始めて增減が判り、又同じ昭和十年度の他國の人口密度に比較して始めて多少が判るのである。卽ち關係數は眞の比較を可能ならしめる豫備的計算に過ぎないのである。

比較と同質物の量的現象に限定すれば、比較は差か比率かによつて示される。甲は二圓、乙は六圓のとき、乙は甲よりも四圓大だといへば差を指し、乙は甲の三倍だといへば比率を指す。差は絕對數、比率は相對數であるから、全く別趣の表現法であるが、併し比較の結果を確定する爲にはこの二つを竝用する事が必要である。一年間に甲商品輸出額は一〇〇萬圓から一一〇萬圓に、乙商品のそれは一〇萬圓から一三萬圓に增加したとすれば、この二つの增加額は差（絕對數）では甲の增加は一〇萬圓、乙のそれは三萬圓であるから、前者は後者よりも七萬圓大であるが、比率（相對數）で見れば甲の增加は一割、乙のそれは三割であるから、反對に後者は前者よりも二割大である。卽ち差をとるか比率をとるかによつて、全く反對の結果が生じうるのである。故に比較の結果を正確に記述する爲には、如上の二つの表現方法を同時に必要とする事は自ら明かであらう。

併し一般的に言ふならば、その必要さの程度は必ずしも等しくはない。卽ち多くの場合——日常生活に於ても、また學問的にも——比率は差よりも遙かに重要なのである。これは一つには用途の廣汎なるにより、一つには計算乃至は解釋に幾多の問題が伴ふからである。若干の例を擧げて說明しよう。

米一升十錢の時代に俄かに二錢騰貴すれば主婦にとつては大恐慌であらう。併し一升四十錢の時代に二錢騰貴してもその影響は僅少に過ぎまい。月給百圓が一躍二百圓卽ち二〇〇%となれば恐らく生活樣式を一變せしめるであらう。併し月給千圓が千百圓に卽ち一〇%上つても恐らく何等の影響を與へる事はあるまい。卽ち絕對額に於て同一の差もその基準たる數字によつて全く異つた意義を帶びるのである。日常生活に現はれる數の增減多少は殆ど常に絕對數卽ち差の形態をとるが、これを正しく理解するには常に比率の概念を援用する必要ある所以である。

〔註〕百圓の增額が如何なる影響を與へるかは素より人によつて異るが、一般に所得の增減はその平方根に比例すると言はれるから、假りにこの假定を認容するならば、月給百圓が二百圓に上つたならば $\sqrt{100}:\sqrt{200}$ 卽ち約 10 : 14 或ひは四〇%の效用增加となり、これに對して千圓が千百圓に上つた場合には $\sqrt{1000}:\sqrt{1100}$ 卽ち約 31.6 : 33.2 或ひは五%の增加を意味するに過ぎない。この假定の正否は別として、少くも吾人の行ふ評價にはこの種の背景の存する事は心理學上明かな事である。經濟學上の限界效用說は必ずこの種の假定を包含するものである。

次に比率が差よりも計算上困難な事は次の例によつて推す事が出來よう。卽ちAは2、Bは3とすれば、差ではAはBよりも一少い、或ひはBはAよりも一多いと言へるから、Aを基準にするかBを基準にするかによつて正負の相違は起るけれども、絕對額の一そのものは不變である。然るにこれを比率として見れば A : B＝2 : 3 卽ち 100 : 150 とも書かれ又は 66.6 : 100 と書かれよう。卽ちAを基準とすればBはAよりも五〇%大であり、反對にBを基準とす

ればAはBよりも三三・三%小である。卽ち比率は何れを基準とするかによつて異る數位が現はれるのである。この矛盾は數ヶの數列を平均する場合、例へば物價指數を作製する場合、極めて困難なる問題を提起する。いま甲乙兩商品の價格が昨年は三圓と二圓だつたものが、今年は九圓と一圓に變つたりする。昨年を基準とすれば甲は $100\to 300$ 乙は $100\to 50$ となるから、算術平均をとれば $\frac{100+100}{2}\to\frac{300+50}{2}$ 卽ち $100\to 175$ 卽ち今年は七五%の上昇となる。然るに今年を基準とすれば甲は $33\frac{1}{3}\leftarrow 100$ 乙は $200\leftarrow 100$ となるからその算術平均は $\frac{33\frac{1}{3}+200}{2}\leftarrow\frac{100+100}{2}$ 卽ち $116\frac{2}{3}\leftarrow 100$ となつて、昨年の方が却つて一二%弱だけ高かつた事になる。この不都合は算術平均の代りに幾何平均をとれば排除されよう。卽ち昨年を基準とすれば $\sqrt{100^2}\to\sqrt{300\times 50}$ 卽ち $100\to 122.5$ となり、今年を基準とすれば $\sqrt{33\frac{1}{3}\times 200}\leftarrow\sqrt{100^2}$ 卽ち $81.6\to 100$ となる。言ふ迄もなく $100:122.5=81.6:100$ であるから、昨年を基準としても又は今年を基準としても外見的には假令不一致でも實質的には全く同じ結果を求めうるのである。

差と比率の區別は統計の圖示法の區別を必要ならしめる。時系列の圖示に於て、もし差を問題とすれば普通の方眼紙を用ふべく、もし比率を問題とすれば半對數用紙に描かねばならぬ。經濟統計で最近後者が著しく廣く用ひられてゐるが、これは如何に比率が問題とされてゐるかの證據である。併し企業家が盛んにこの圖示法を採用してゐるに反し、經濟學者の間には未だ餘り普及してゐないのは私としては奇怪の念に堪へない。

第二節　統計の形式的比較

9

以上述べたところのものは凡ゆる場合の比較の原則であるから、統計數字相互の比較についても妥當する事は言ふ迄もない。併し統計とは元來統計集團を大量觀察の方法に數字的に把捉したものであるから、個人の身長とか體重とかを測る場合の如き單純にして機械的な手段とは全く異る手段が必要である。正しい統計を獲得する爲には幾多の要件の充たされる事を必要とし、この際に行はれる複雜な操作は、動もすれば比較の必要條件たる同質性を破壞する恐れが少くない。加之、吾人が統計の比較を行ふ場合には、單に現象の大小增減を知らんとするばかりでなく、更に進んで斯かる大小增減の由つて來る原因を窮めんとするのが寧ろ最大の目的とされるのである。然るに社會的事業の大小增減を齎らす原因は多くの場合極めて錯綜してゐるから、形式的には比較は容易でも、研究の目的からは甚だ困難なものが多いのである。斯くて統計比較の可能性とその限界を明かならしめる事は、統計學方法論上の主要問題の一つと言つてよい。

この問題は特に統計利用上の中心課題であるが、而も從來統計學者にして特にこの問題を深く掘下げたものは少いのである。元來統計的研究法とは統計集團の大量觀察の方法と、その結果たる統計系列の解析的方法の兩者を指すものであるが、この兩者は概して分離されて取扱はれ、一部の統計學者は前者に、一部の統計學者は後者に自已の努力を集中する傾きがある。大雜把に言へば獨逸の統計學は前者卽ち大量觀察の方法を中心とし、英米のそれ就中數理統

計學派は後者卽ち統計的解析法を問題とする。(註1) 然るに統計の比較性は異る統計集團が同質的に把捉されてゐるか否かによつて決定されるのであるから、從つて大量觀察法を主題とする獨逸統計學に於て特に研究される事は自ら推知されよう。就中現代獨逸統計學の中心たる Zizek 及びその一派こそ、統計比較性の問題に特別の努力を拂ひつゝあるもので、私は主として次の諸作を參照しつゝこの問題の概觀を述べたいと思ふ。

F. Zizek—Grundriss der Statistik (1923)
" —Fünf Hauptprobleme der statistischen Methodenlehre, 1922
" —Der statistische Vergleich (Allgemeines Statistisches Archiv, 21. Bd. Heft 4.)
" —Nichtkorrekte statistische Verfahren (Allg. St. Archiv, 21. Bd. Heft 1)
" —Wie statistische Zahlen entstehen, 1937.
P. Flaskämper—Theorie der Indexzahlen, Beitrag zur Logik des statistischen Vergleichs, 1928
E. Wagemann—Narrenspiegel der Statistik, 1935
S. Schott—Statistik, 1923
A. Tischer—Grundlegung der Statistik, 1929

(註1) 獨逸と英米の對立的傾向は蜷川虎三氏「統計學研究1」(岩波書店) 研究第一補論第二「統計學に於ける二つの傾向に就いて」に巧みに要約されてゐる。

統計比較を論ずるに當つては先づ第一に抑も統計數字は如何に獲得されるかを明かならしめねばならぬ。一般に統計として吾人に提供される數字は大量觀察卽ち本來の統計調査の結果たる事もあり(國勢調査や勞働統計實地調査又は家計調査の如し)、又は他の目的上蒐集された資料を編成する事に得られる事もある(出生、死亡、婚姻の屆出から出生統計、死亡統計又は婚姻統計を作製するが如し)。前者を一次統計 (Primary statistics)、後者を二次統計 (Secondary statistics) といふ。そして一次統計も與へられた統計集團の全部を調査する悉皆調査——これが本來の意味に於ける大量觀察である——と、單に集團の一部を調査する所謂大量觀察代用法 (Surrogate der Statistik) とに分たれる。後者の主たるものは推計や部分調査であつて、大部分の統計は寧ろこの方法に據ると言へよう。

これら各種の調査法のうち、最も標準的な、從つて本來の意味に於ける調査は、言ふ迄もなく悉皆的大量觀察によるものである。これによつて統計集團を統計數字に轉化せしめるには、調査單位の各々につき一定の調査標識を調査し、その結果を分類せねばならぬ。人口統計について見るに、そのうちの靜態人口統計は今日國勢調査によつて求められるが、この場合一定時に當該國家の領域内に存在する各人を單位とし、この各單位について性別・職業・年齡の如き屬性を標識として調査し、その結果をば府縣別、性別、年齡別、職業別等の各種統計系列によつて示すのであつて、その示し方は時には絕對數を用ふる事もあり、又は比率や平均を用ふる事もある。いま二つの靜態人口統計が相互に比較される爲には、その各々の調査に於て單位と標識との概念が一致して居らねばならぬ事は言ふ迄もないが、更に分類及び示し方も亦一致して居る事を必要とする。

人口の單位については一般に疑問の餘地はないが、例へば或る調査では國內居住の外國人を除外し、次の調査ではこれを包含せしめんとすれば、單位の概念が變つた事になり、或は修正を施さぬ限り、比較は不可能とならう。標識として一般に調査される配偶關係の如きは「未だ結婚しない者は未、現に妻又は夫ある者は有、死別又は離別して現に獨身の者は夫々死別又は離別と記入すること」といふやうな注意書があつて、一見問題は無さゝうであるが、例へば妻又は夫とは法律上の妻又は夫を指すか或ひは內緣の妻又は夫をも含むかゞ疑問とならう。そこで我國では申告書記入心得に「配偶關係の記入は實際の狀態に依るもので、必ずしも戶籍と同一でなくてもよい」とあつて、從つて內緣關係をも含むことを明かにしてゐるのである。斯くて婚姻屆出から作製される動態統計の婚姻とは全く別のものなるを忘れてはならぬ。

惟ふに社會現象の單位や標識を概念的に規定する事は一般に極めて困難な問題である。これを多少詳細に一考するに先だち注意せねばならぬ事は、或る事項が單位なりや標識なりやは調査さるべき集團を如何に規定するかによつて決定されるもので、一般的にこれを言ふ事は出來ないといふ事である。國勢調査では職業は標識であるが、職業調査では單位となる。自殺は死因統計或ひは死亡統計では標識で、自殺統計では單位となる。故に概念規定の問題に於てはこの二つの間に別に差別を設ける必要はないのである。

統計が主として社會的集團を示すものである以上、これを求める場合の單位や標識が主として社會的な概念たる事は自ら明かであらう。體性とか年齡とかの概念は全く自然的なものであるが、斯かるものは寧ろ例外で、大部分は社會的なもの、卽ちその都度正確な規定を必要とするが如きものである。人口統計に於ける人とは生物としての人ではなく、國籍とか居住地とかと關聯した社會的人間であるから、概念規定の如何によつて異つた結果が得られよう。石炭生產額統計の石炭とは商品としての石炭であつて、鑛物學上の（卽ち自然的な）石炭とは必ずしも一致しない。職業や失業のやうな概念は專門家の間に於てすら容易に一致しない。例へば職業とは本業と副業とを指すが、日本では本業とは「主として一身を委ねるものを言ひ」「其の區別を爲し難きときは收入の最も多いものをいふ」と規定されてゐるが、これによつて職業が利得行爲たる事は明かにされたとしても、これで本業と副業の區別を、延いて職業一般を嚴格に規定しうるであらうか。卑近な例をとれば、常習的な泥棒や恐喝業者の行爲は職業とならねばならぬ。また同一の熱心さで家主と小賣業を兼ねてゐる人は、年により月によつて或ひは貸家業が或ひは小賣商が本業とならねばならぬ。更に墺太利では一九二〇年の國勢調査では主婦の行爲を職業として調査したが一九二三年にはこれを除外した。これは主婦の行爲が家政婦の行爲と同一と見れば職業と數へてよく、反對にこれを主婦たる身分の當然の義務と考へれば、恰も囚人や兵卒の行爲を職業とせざると同じ理由によつて、當然職業から除かねばならぬ。我國では主婦の仕事は素より職業とは考へられてゐない。

國を異にすれば勿論、同一國に於ても時の經過と共に、斯かる社會的事業に關する概念の相違するのは止むを得ない事である。蓋し吾人が或る社會的事象を問題とするのは、その社會的關聯に於てゞあるから、社會機構の相違や變化は到底普遍妥當な概念的規定を許さないのである。故にかゝる可變的な單位の標識に立脚する統計は、國や時間の

相違と共に、比較の要件たる同質性を失ふ事になる。殊に實際の統計の大部分は、既に述べた通り、直接に統計の獲得を目的とした統計調査によらず、單に統計調査以外の目的の爲に蒐集された資料（業務上の記錄等）による所謂二次統計の場合が甚だ多い。斯かる場合には概念の統一は一層困難となり、從つて同質性を著しく缺如した統計が生れて來る恐れがあるのである。その適例は內閣統計局と警察の發表する二つの自殺統計などである。

概念規定が一致しても、編成に當つて分類や示し方が異れば、同じく比較は妨げられる。分類の或るもの、例へば職業を本業と副業とに分つが如きは、前述の通り矢張り概念如何によつて決せられる問題であるから、今迄說明した事がそのまゝ當嵌る。反之、例へば人口の年齡構成を五歲別人口とするか各歲別とするかは、概念の問題ではなく便宜の問題であるが、併し比較を妨げる事は同じである。但しかゝる例に於ては多くの場合、一方の分類を他方のそれと同一に書改め得られるから、大した問題はないが、もし分類が單に一方は大分類、他方は小分類といふ相違でなく、全く異つた標準による分類であれば、到底比較は行へない。最後に示し方が一方は絕對數、他方は比率又は平均であつたとすれば、數學的換算が行はれぬ限り、比較は不可能である。單に統計を整理した場合許りでなく、これに解析的操作を加へた結果を相互に比較するときには一層の困難が生ずるが、それについては後段改めて言及しよう。

單位・標識・分類及び示し方が相互に一致すれば、二つの統計は同質物となり、これによつて比較の形式上の可能性は確立された筈であるが、實はこの要件が充分滿たされた場合でも未だ不充分なことがある。第一には二つの統計が二ヶ又はそれ以上の相違點を持つ場合で、例へば本年度の日本人口を昨年度の獨逸人口に比較するが如きこれである。この二つが各々如上の要件を具備してゐても、國を異にし時を異にしたのでは何等正しい答は得られないから、矢張り比較不能となつて了ふ。その不合理な事は最初に述べた、甲の身長を乙の體重に比較するのと同じであるが、而も實際にはこの種の比較は屢々必要なのである。同一事項の調査の國際的比較は常に要求されてゐるが、不幸にして必ずしも調査期日を同じふしない。如上の不合理な比較も止むを得ない所以であるが、これに處する途は二つ考へられる。第一には若し比較される現象が僅かの期間內では急變しないと考へられゝば、多少の誤差を覺悟する限りは、相互の大さを判斷しうる筈である。一國の出生率・死亡率又は男女比率等にはその國特有の型があつて、從つて多少時を異にしても、この型を知りうるならば比較の目的は達せられた事になるのである。併しいくら一定の型があると言つても、不斷に變化しつゝある事は爭へないから、より正確な比較を期する爲には、例へば補外法(Extrapolation)によつて本年度の獨逸の出生率等の蓋然値を求め、これを本年度の日本のそれに對比せしめる事が望ましい。この種の計算法は現在の統計學では既に著しい發達を遂げてゐるのである。乍併もし假令短期間內でも不規則にして急激な變化の豫想されるものについては修正の途は無い。

右と同じく、同質性の前提が充たされ乍ら而も正確な比較を困難ならしめるものは、Zizek の所謂「程度の異る不完全調査に基く比較不能性」(Nichtvergleichbarkeit wegen in verschiedenem Ausmass unvollständiger Erhebung) である。例へば醫學統計に於ける精神病や癌の患者數は近年顯著な增加を示したが、この增加の一部は單に統計上の幻覺的現象と認められてゐる。卽ち昔は斯かる疾病を發見する事が醫學的に困難だつたゝめ、實際よりは少く統計に

現はれてゐたものが、次第に診斷が確實となり、延いて數字の增加を來したのである。我國に双生兒の著しく少いのも恐らくは一方を里子に出すやうな奇妙な習慣が與つて大いに力があるのであらう。これらの例に於ては統計上の概念には誤りはないが、人が意識的又は無意識的に數字を歪曲するのである。

意識的な歪曲でも何等の惡意を含まぬものがある。商工省「工場統計表」の昭和八年と九年の工業生產額（單位千圓）を對比するに上表の如くである。

表 1

	昭和八年	昭和九年	增加率
紡織工業	2,914,156	3,167,756	% 8.7
金屬工業	878,691	1,496,793	70.3
機械器具工業	883,195	1,159,168	30.5
窯業	220,743	251,963	14.1
化學工業	1,288,084	1,480,784	15.0
製材及木製品工業	189,521	228,800	20.7
印刷及製本工業	181,589	203,843	12.2
食料品工業	1,017,037	1,046,341	2.9
*ガス及電氣業	14,578	19,539	34.0
其他工業	278,770	335,074	20.2
合計	7,866,364	9,390,051	19.3

（備考）　*印はガス及電氣を主業とする工場の副產品の價額のみ。

卽ち僅か一ケ年間に工業生產額は五億圓餘、比率にして二割弱の激增を示してゐる。特に金屬工業生產額は八億八千萬圓から十五億圓に、卽ち七割の急昇振りである。當時の重工業の發展は種々なる根據から充分肯定しうるところではあるが、併し如上の數字は餘りにも異常である。いまその數字を調査に遡つて一考すれば、數字の示す增加と實際の增加とが必ずしも一致しない事が判るのである。卽ち「工場統計表」に含まれる工場は民間工場に限られるが、昭和九年度から八幡製鐵所が官營工場から民營工場に移されたから、同年以後の「工場統計表」には當然包含されるに至つた。同所は言ふ迄もなく我國最大の製鐵所で、その生產額は——發表されぬため詳細は判らぬが——東洋經濟新報社の推定では製鐵だけで三億圓、其他副產物で二千餘萬圓に達するといふ。同所を昭和九年度の數字から除外すれば、全金屬工業生產額は十二億圓卽ち前年に比べて三割七分の增加に止まる。單に官營が民營に移された事は工業全體から見れば全く表面的變化に過ぎず、實質的には毫も變りはない筈で、この點新たに一ケの民營工場が設立されたのとは根本的に相違する。卽ち統計調査の上からは何等缺陷なきに拘らず、その數字は制度上歪曲され、從つてそのまゝでは正しい比較は不可能である。

右は惡意によらざる歪曲の一例であるが、世の中には故意又は惡意に歪曲された統計が少くない。統計調査論で調査の障碍と稱せられるものゝ大部分はこれである。一般に人の利害や祕密又は名譽等に關する事項については、正しい報告を求め得ない事は言ふ迄もなからう。所得統計は申告者が課税を念頭に置くため實際よりは少く現はれる傾きがあり、避姙や墮胎の統計の如きは到底信を置くに足りない。而も歪曲の程度は所により時によつて樣々であるから、その比較は全く無意味に終る場合が多い。但し事項によつては歪曲又は不完全の程度の餘り變化しないものもある。これらに就ては統計の數字そのものは信用し得ないとしても、相互の比較による大小多少の判斷は出來よう。斯かる數は一般に徵候數（Symptomatische Zahlen）といはれる。その代表的なものは物價指數とか景氣指數とかの所謂綜合指數である。卽ち物價とは凡ゆる商品・勤勞・權利等總て貨幣と交換されるものゝ價格の綜合を指すが、實際にこれを求める事は不可能であるから、特に若干の重要商品價格によつて一般を代表せしめる外はない。卽ち物價指數は

物價の絕對額を示すものではなく、單に相對的大さ又は變化を示すに止まる。

第三節　統計の實質的比較

調査の統一は統計の同質性を齎らし、從つて形式的には完全な比較を可能ならしめる。併し吾人が實際上又は學問上、統計を比較して、その數字の大小増減を決定するのは、それ自體が目的ではない。統計は、それが正しい調査と正しい編成に立脚する限りは、社會的事實を物語る、否、社會的事實それ自身である。從つて比較に現はれる統計數字の大小増減は、當該事實の大小増減に外ならぬ。然るに如何なるものも、それが同質同種であり乍ら而も大小増減の相違が生ずるについては、何等かの原因が無ければならぬ。この原因を探究することこそ、統計的研究法の窮極の目的なのである。然るに社會的事實の大小増減は一般に單一の原因によるものではなく、殆ど例外なく極めて多くの原因の錯綜的結果である。この事は比較の結果を效果的ならしめる爲に特別の困難を克服せねばならぬことを意味する。

原因が單純な場合に於ける比較は容易である。例へば同一壓力の下に於ける同一量の同一氣體が相互に體積を異にすれば、その原因が溫度の差にある事を結論しうるであらう。これはその體積を決定するものは壓力と溫度の二つ以外には無いからである。物理學や化學では實驗室內に於て隨意に條件を決定しうるから、右に類似の結論を得る事は一般に容易なのである。然るに甲國の死亡率が乙國のそれよりも高い事が統計上確立されても、これから一義的な結論は下し得ない。蓋し一國の死亡率は國民の人種的健康性、衞生思想や施設、經濟的安寧、自然的災害、戰爭及び人口の年齢構成等によつて決定されるが、これら諸原因を隨意に遊離する事は出來ないからである。即ち二國間の死亡率の差は、或ひは單に人種的原因に基くかも知れぬし、或ひは人口の年齢構成だけの結果かも知れないが、實際には如上の各種の自然的社會的諸原因の數ヶ乃至全部の結果なる場合が普通であらう。單に二國の死亡率の比較からだけでは、原因について何の推論をも行へないのである。

斯く言へば統計比較は原因の決定に全く無效のやうであるが、統計學者の努力は絕えずこの障碍の排除に向けられてゐるのである。二國の死亡率の比較に於ては、先づ豫め平靜な時期の數字を選擇する事によつて戰爭その他の不規則的原因を著しく排除しうるし、更に僅か一ケ年の數字の代りに數ヶ年の平均をとれば一層この目的に應ふであらう。更に年齢構成の相違に基く死亡率の相違は、單に人口千人についての死亡率即ち死亡粗率の代りに、標準死亡率をとれば略〻完全に排除する事が出來る。標準死亡率とは或る一定の一般的年齢構成人口を想定し、與へられた國の年齢別死亡率を右の假想人口に當嵌めたものである。これには種々の方式があつて、到底こゝにその詳細を傳へ得ないが、例へば國際統計協會では次の年齢構成を採用してゐる。

表1　國際統計協會の標準人口

年　齢	0—5	5—15	15—25	25—35	35—45	45—55	55—65	65—75	75以上	計
人口數	119,900	206,900	183,200	147,900	120,500	93,900	70,800	40,500	16,400	1000,000

卽ち人口百萬人のうち、零歳から五歳までの人口は一一九、九〇〇人、五歳から十五歳までのそれは二〇六、九〇〇人……といふ意味である。文明國には必ず年齡別死亡率は計算されてゐるから、右表の如き五歳別乃至十歳別人口の死亡率は直ちに求められよう。それを右表の人數に當嵌めて最後に平均を求めれば、標準死亡率となる。各國についてこれを行へば、相互に異る年齡構成とは無關係の死亡率が得られ、それだけ正確な比較が可能となるのである。卽ち統計技術の進步は、次第に統計的比較の範圍を狹めうるのであつて、從つて最後の結論に、換言すれば眞の原因に、次第に接近する事が出來るのである。この種の計算は特に人口統計の領域に於て最も發達して居り、單に死亡率のみか、例へば出生率や婚姻率の比較に於ても類似の操作が可能となつてゐる。

形式上の比較は出來ても實質的には不可能な例として、男女犯罪數の比較を擧げる事が出來る。或國の犯罪人員は、警察の卽決や微罪釋放者をも含め、昭和六年男百十三萬、女七萬五千、卽ち男百人に對し女は僅か六人强に過ぎない。この差は時によつて多少の變化は示すが、大體は常にこの程度である。この比較によつて女性の犯罪が男性のそれよりも少い事は判るが、一步進んでこれから男女の道德水準の程度を結論したとしたら大變な間違ひである。犯罪は素より道德水準如何に依るとはいへ、同時に人をして敢へて斯かる危險にして好ましからざる所業に出でしめる動機や誘因の强弱とか、又は犯罪を行ひうる知力や能力の程度にも依るものである。男と女とは生活條件や精神的肉體的能力を異にし、而もその大部分が男性の側に犯罪を多からしめる要因となつてゐる。妻子を扶養するのは男として當然の義務であり、從つて貧困の絕望から不法行爲に出でるのは殆ど男に限られよう。生活環境も男は斷えず外部に活動するため犯罪に對する刺戟も多からう。卽ち男女犯罪統計の比較は、それが同一標準によつて求められた以上は、形式的には同質的であり、從つて當然比較は差支へないが、これから直ちに相互の道德水準の高下を判斷してはならない。かゝる比較は、比較そのものは差支へなくとも、素々問題が異つてゐるのである。換言すれば人間の道德度は表面的な犯罪とは大なる關係がないのである。道德なる質的概念はこれを數字に轉化する事は不可能なのであつて、從つて犯罪統計は前述した徵候數とは見られまい。

第四節　比較可能の統計は如何にして求められるか

以上私は比較一般の本質と問題から發足して、統計數字の比較に於ける諸問題を一瞥した。そして形式上の要件は統計の同質性であり、實質上の要件は提問の合理性である事を明かにしたつもりである。後者卽ち統計の比較から現象の說明を、換言すれば現象の本質や因果關係を求めんとするのは、統計的研究法の窮極的目的ではあるが、併しこれは既に統計學の本來の任務ではない。蓋し統計學の本質的課題は社會的集團の大量觀察とその解析との方法を論ずるにあるのであつて、斯かる集團の社會科學的內容を論ずるのは各々の社會科學の任務だからである。統計的研究法が社會科學に援用されるのは理論の前提を求めまた理論の當否を檢する爲であつて、若し一部の人々の信ずるが如く、統計的方法によつて事象の因果關係が規定されるとしたら、統計學は唯一の實質的科學となり、他の一切の社會科學は存在の理由を失はねばならぬ。併し實際には統計學は上述の如く方法を論ずるところの形式科學であり、從つて統

計的方法は實質的結論に至る手段たるに過ぎない。

そこで統計學の觀點からすれば、統計的研究法を最も效果的ならしめるが如き統計は如何にして獲得されるかゞ本來の且つ特有の課題とされねばならぬ。具體的に言へば、統計の提供者卽ち直接に統計調査乃至整理に當る者は努めて比較可能の同質的統計を發表すべきであり、統計の利用者は自己の問題から當該統計を愼重に吟味して、若し同質性の要件に缺くるところが發見されたならば、適當な變形或ひは換算によつて、これを修正する必要がある事は勿論であるが、更に進んで、形式上には不備がなくとも、若し與へられた系列そのものゝ比較では研究目的に應はぬ場合には、例へば豫め關係數を求める事によつて又は各種の統計的解析を施す事によつて、有效な比較前提を獲得する事が必要である。

第一の統計發表の統一とは、要するに調査に於ける單位や標識の統一、調査の時や場所の統一並びに分類や發表形式の統一を意味する。この點に於て今日の統計には多々難色が認められる。官廳統計と民間統計との不一致は暫く措くとして、官廳統計それ自體がさつぱり統一されてゐないのは困つた事である。國勢調査報告すら例へば第一回では職業上の地位別による有業者の分類集計が行はれて居り、第二回にはこれを廢してその代りに產業上の地位別（雇主・使用人等）によるものが示されてゐる。內閣統計局と警察では共に自殺統計を發表してゐるが、前者の數字は常に後者のそれよりも少い。これは前者は死亡屆に基き後者は檢死に基くからであるが、一つの事柄が二つの異る數字を示すが如き、統計の價値を疑はしめるこれより大なるは無い。兎角各官廳間に意思の疎通を缺き各自勝手な振舞ひに出でゝゐる事は各方面に大なる迷惑を及ぼす所以であるが、この弊を一掃せぬ限り、官廳統計の不統一は望めまい。現下の急迫せる時局は凡ゆる方面に最も徹底した協力と統制を必要するが、國策の基準たるべき官廳統計が統計界にこの範を示す事が切望される。國家總動員準備に關する內閣訓令の一節に曰く「惟フニ國家總動員準備ノ要ハ汎ク人的及物質資源ニ關シテ正確精新ナル調査ニ基キ、綿密周到ナル計畫ヲ樹立スルト共ニ、其ノ總動員上ノ要法ヲ平時ノ施設ニ調和綜合シテ資源ノ圓滿ナル育成開發ヲ圖ルニ存ス、云々」と。その「正確精新ナル調査」は一方に於ては從來行はれなかつた方面に大規模の調査――例へば產業センサスの如き――を行ふと共に、他方に於ては從來の不統一な調査を根本的に訂正する事によつて實現される。勿論民間統計も亦この方針に向つて努力すべき事は言ふ迄もない。勞働組合の發表する統計と、企業者のそれとは屢々大きな喰違ひがあるが、これは兩者が共に自己に有利な結論を求める爲に勝手に範圍や概念を決定するからである。かゝるものに對しては政府が一定の調査原則を與へるとか、又は各自の統計にその調査法の內容を附記せしめる必要があらう。

一國內ですら調査の統制が困難な現狀の下に於て、國際間の統計にこれを求めるのは或ひは無謀の譏りを免かれないかも知れない。單位や標識の概念決定は、既に述べた通り、時代と國の影響を受けるが、特に後者の大なるを認めねばならぬ。統計は純理論の產物に非ずして、必ず或ひは何等か具體的必要に應じて求められるもの か（一次統計）、或ひは行政其他の事務から自ら生ずるもの（二次統計）かの何れかである。その何れもが各國特有の習慣や制度と關聯してゐる事は言ふ迄もなからう。故に統計といふ點から見れば、各國は各々別の世界に屬し、相互に比較し得ない

のが寧ろ本質的だとも言へる。併しそれにも拘らず文化的・政治的・經濟的の國際的關聯は常にかゝる比較を必要ならしめてゐるのである。例へば賃銀統計はそれ自體は主としてその國の勞働問題と關聯したもので、必ずしも他國との比較を必要としないが、併しこれを生産費の一部と見れば、商品の國際的競爭なる觀點から忽ち相互の高低が問題とならねばならぬ。簡單にこの問題を一考して見よう。

本邦産業の滿洲又は北支への進出は該地方の低賃銀を利用せんが爲であり、本邦商品をソシアル・ダンピングとして排斥するのは日本の低賃銀を指摘してその不當を非難する事から出發してゐる。漫然と日本の賃銀統計を歐米諸國のそれと比較すれば、その差の餘りにも大なる事から、直ちにソシアル・ダンピングの結論に到達するのも不思議はない。併し賃銀は素々生計費と相對的なもので、この點を判然たらしめねば何の結論をも下せないのである。若し日本で低賃銀が低生計費の原因となつてゐるならば、如上の非難は妥當であり、反之低生計費が低賃銀の原因となつてゐるとしたら、全く的を外れてゐる。この事は勿論統計の表面からは知り得ないが、併し東西の生活様式を一考すれば、同一程度の生活を營むに我國では歐米ほどの費用を必要としない事は確かである。これは主として米穀や魚類を食ひ木造家屋に住むのと、多量の肉類を食ひ石や煉瓦の家屋に住む相違から來るのであつて、この生計費の高低は毫も生活程度の高低を反映するものではない。素より日本の賃銀が高まる事は勞働者の爲に切望されるが、その根據は單に外國との比較からは求められないのである。

反之、賃銀統計を單に生産費の觀點からすれば、容易に合理點結論に到達する。斯かる場合こそ國際的比較が可能で且つ必要なのである。そしてこの意味に於ては、斯かる比較を寧ろ斷念すべき領域の甚だ大なるを承認せねばならぬ。唯だ吾人は殘された比較的僅かの領域に於ては努めて比較可能の統計を整備すべきであるが、これには調査及び發表形式につき豫め國際的協約が必要である。ブラッセルの商業統計會議、國際死因分類規定或ひはジュネーヴ國際經濟統計會議等の効果が認められる。國際統計に就ては別の機會に詳論したいと考へてゐる。

第二の、利用に際しての修正は、比較すべき二つ又はそれ以上の統計に於ける(1)表面的相違（異質性）に就て行ふ場合と、(2)研究目的の内容から見た相違に於て行ふ場合とがある。(1)は調査の範圍や時期の不一致及び單位・標識・分類並びに表現法の不統一を訂正して、出來る限り、同質的たらしめる事を目的とする。例へば東京市に關する統計は大東京市制の實施された昭和七年十月以前と以後とでは自ら別物となつて了つたから、この比較には或ひは舊時の統計に、その後市部に編入された郡部の數字を加へるか、又は今日の統計から如上の郡部（即ち新市域）の數字を控除せねばなるまい。(註1)

（註1） 斯かる修正が却つて事實の眞相を曖昧ならしめる事もある、例へば當時の東京と今日の舊市内（其者は同一物である）との人口には殆ど差がないから、若し今日の大東京の人口から新市域のそれを控除すれば、東京市の人口發展は全く現はれて來ない。

調査の時期の相違は補外法又は補間法によつて、分類の相違は一方を他方に合致せしめるか又は兩者を全く新たな規準から分類し直すかによつて修正すべきである。故に單位や標識が著しく異つて規定されてゐる統計は修正の甚だ

困難なるを常とする。

更に(2)の場合は單なる修正と言ふよりは、寧ろ與へられた統計から新たな統計を作り出し、この新たな統計を相互に比較する事によつて研究の目的に到達せんとするものである。出生率・死亡率・人口密度の如き關係數はその主たるものである。その場合にも研究が進むに從つて、例へば單なる死亡粗率の代りに、上述した標準死亡率の如き複雜な形をとる必要がある。同種の例としては、二國の鐵道發達の程度を比較する爲に、單に鐵道の長さをとらず、$\sqrt{\frac{鐵道ノ長サ}{人口}\times\frac{鐵道ノ長サ}{面積}}$ の如き二ヶの關係數の組合せを用ひる場合なぞがある。

家計調査に於ては所謂標準家族を選定し、家族員數や年齢構成を出來る限り統一しては居るが、而も全くの一致は考へられないから、これらの不一致は當然生計費の相違を來すであらう。これを修正する爲には例へばケトといふが如き消費單位を決定する外はない。ケトとは零歳の乳兒の消費量を一とし、男子は二十五歳、女子は二十歳まで一歳毎に〇・一を增すものである。故に男子は三・五ケト、女子は三ケトまでの値を持ちうる。故に夫婦と十歳及び六歳の子供から家族は　3.5+3.0+2.0+1.6　卽ち一〇・一ケトである、夫婦と老母及び三歳の子供から成る家族は　3.5+3.0+3.0+1.3　卽ち一四・三ケトとなる。斯かる單位が幾許の程度まで信を置けるかは別として、上述の標準死亡率といひまたこのケトといひ、何れも或る理論的基準位と對比する事によつて比較の精密度を加へうる事が判らう。これら理論値は素より著しく抽象的なものではあるが、併し一般に認容されてゐるやうなものは或ひは統計的事實から算出される事もあり或ひは他の科學的根據からも求められる事もある。

總て比較に於て、比較基準はなるべく理論的正常値なる事が最も望ましい。甲の體格は乙のそれに比較されるよりも、一般的標準的體格に比較されることが遙かに重要である。この事は如何なる統計の比較に於ても全く同じである。吾人が絕えず統計的正常値の決定を要求されてゐるのはこれが爲である。併し如何にしてかゝる正常値が算出されるかの問題に移れば、恐らく今迄述べ來つた統計學の全理論を繰返へさねばなるまい。例へば度數分布に於ける平均値、時系列に於ける傾向線や季節指數の如き主要問題は總てこれに含まれるであらう。

附　錄

常用對數表

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
100	000000	000434	000868	001301	001734	002166	002598	003029	003461	003891	432
1	4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	428
2	8600	9026	9451	9876	010300	010724	011147	011570	011993	012415	424
3	012837	013259	013680	014100	4521	4940	5360	5779	6197	6616	420
4	7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	020361	020775	416
105	021189	021603	022016	022428	022841	023252	023664	024075	4486	4896	412
6	5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978	408
7	9384	9789	030195	030600	031004	031408	031812	032216	032619	033021	404
8	033424	033826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028	400
9	7426	7825	8223	8620	9017	9414	9811	040207	040602	040998	397
110	041393	041787	042182	042576	042969	043362	043755	044148	044540	044932	393
1	5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830	390
2	9218	9606	9993	050380	050766	051153	051538	051924	052309	052694	386
3	053078	053463	053846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524	383
4	6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	060320	379
115	060698	061075	061452	061829	062206	062582	062958	063333	063709	4083	376
6	4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815	373
7	8186	8557	8928	9298	9668	070038	070407	070776	071145	071514	370
8	071882	072250	072617	072985	073352	3718	4085	4451	4816	5182	366
9	5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819	363
120	079181	079543	079904	080266	080626	080987	081347	081707	082067	082426	360
1	082785	083144	083503	3861	4219	4576	4934	5291	5647	6004	357
2	6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552	355
3	9905	090258	090611	090963	091315	091667	092018	092370	092721	093071	352
4	093422	3772	4122	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6562	349
125	6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681	100026	346
6	100371	100715	101059	101403	101747	102091	102434	102777	103119	3462	343
7	3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871	341
8	7210	7549	7888	8227	8565	8903	9241	9579	9916	110253	338
9	110590	110926	111263	111599	111934	112270	112605	112940	113275	3609	335
130	113943	114277	114611	114944	115278	115611	115943	116276	116608	116940	333
1	7271	7603	7934	8265	8595	8926	9256	9586	9915	120245	330
2	120574	120903	121231	121560	121888	122216	122544	122871	123198	3525	328
3	3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781	325
4	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	130012	323
135	130334	130655	130977	131298	131619	131939	132260	132580	132900	3219	321
6	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5769	6086	6403	318
7	6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	8934	9249	9564	316
8	9879	140194	140508	140822	141136	141450	141763	142076	142389	142702	314
9	143015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818	311
140	146128	146438	146748	147058	147367	147676	147985	148294	148603	148911	309
1	9219	9527	9835	150142	150449	150756	151063	151370	151676	151982	307
2	152288	152594	152900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032	305
3	5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061	303
4	8362	8664	8965	9266	9567	9868	160168	160469	160769	161068	301
145	161368	161667	161967	162266	162564	162863	3161	3460	3758	4055	299
6	4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022	297
7	7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9380	9674	9968	295
8	170262	170555	170848	171141	171434	171726	172019	172311	172603	172895	293
9	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802	291
150	176091	176381	176670	176959	177248	177536	177825	178113	178401	178689	289
1	8977	9264	9552	9839	180126	180413	180699	180986	181272	181558	287
2	181844	182129	182415	182700	2985	3270	3555	3839	4123	4407	285
3	4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239	283
4	7521	7803	8084	8366	8647	8928	9209	9490	9771	190051	281
165	190332	190612	190892	191171	191451	191730	192010	192289	192567	2846	279
6	3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623	278
7	5900	6176	6453	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382	276
8	8657	8932	9206	9481	9755	200029	200303	200577	200850	201124	274
9	201397	201670	201943	202216	202488	2761	3033	3305	3577	3848	272
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
160	204120	204391	204663	204934	205204	205475	205746	206016	206286	206556	271
1	6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247	269
2	9515	9783	210051	210319	210586	210853	211121	211388	211654	211921	267
3	212188	212454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579	266
4	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221	264
165	7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846	262
6	220108	220370	220631	220892	221153	221414	221675	221936	222196	222456	261
7	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051	259
8	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630	258
9	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	230193	256
170	230449	230704	230960	231215	231470	231724	231979	232234	232488	232742	255
1	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276	253
2	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795	252
3	8046	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9800	240050	240300	250
4	240549	240799	241048	241297	241546	241795	242044	242293	2541	2790	249
175	3038	3286	3534	3782	4030	4277	4525	4772	5019	5266	248
6	5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728	246
7	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	250176	245
8	250420	250664	250908	251151	251395	251638	251881	252125	252368	2610	243
9	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031	242
180	255273	255514	255755	255996	256237	256477	256718	256958	257198	257439	241
1	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833	239
2	260071	260310	260548	260787	261025	261263	261501	261739	261976	262214	238
3	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4346	4582	237
4	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937	235
185	7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279	234
6	9513	9746	9980	270213	270446	270679	270912	271144	271377	271609	233
7	271842	272074	272306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927	232
8	4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232	230
9	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525	229
190	278754	278982	279211	279439	279667	279895	280123	280351	280578	280806	228
1	281033	281261	281488	281715	281942	282169	2396	2622	2849	3075	227
2	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332	226
3	5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578	225
4	7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812	223
195	290035	290257	290480	290702	290925	291147	291369	291591	291813	292034	222
6	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246	221
7	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446	220
8	6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635	219
9	8853	9071	8289	9507	9725	9943	300161	300378	300595	300813	218
200	301030	301247	301464	301681	301898	302114	302331	302547	302764	302980	217
1	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136	216
2	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282	215
3	7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417	213
4	9630	9843	310056	310268	310481	310693	310906	311118	311330	311542	212
205	311754	311966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656	211
6	3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760	210
7	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854	209
8	8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938	208
9	320146	320354	320562	320769	320977	321184	321391	321598	321805	322012	207
210	322219	322426	322633	322839	323046	323252	323458	323665	323871	324077	206
1	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131	205
2	6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176	204
3	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	330008	330211	203
4	330414	330617	330819	331022	331225	331427	331630	331832	2034	2236	202
215	2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253	202
6	4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260	201
7	6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	8058	8257	200
8	8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849	340047	340246	199
9	340444	340642	340841	341039	341237	341435	341632	341830	2028	2225	198
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
220	342423	342620	342817	343014	343212	343409	343606	343802	343999	344196	197
1	4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157	196
2	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110	195
3	8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	350054	194
4	350248	350442	350636	350829	351023	351216	351410	351603	351796	1989	193
225	2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916	193
6	4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834	192
7	6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744	191
8	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646	190
9	9835	360025	360215	360404	360593	360783	360972	361161	361350	361539	189
230	361728	361917	362105	362294	362482	362671	362859	363048	363236	363424	188
1	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301	188
2	5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169	187
3	7356	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	186
4	9216	9401	9587	9772	9958	370143	370328	370513	370698	370883	185
235	371068	371253	371437	371622	371806	1991	2175	2360	2544	2728	184
6	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565	184
7	4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394	183
8	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	182
9	8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	380030	181
240	380211	380392	380573	380754	380934	381115	381296	381476	381656	381837	181
1	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636	180
2	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5428	179
3	5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212	178
4	7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989	178
245	9166	9343	9520	9698	9875	390051	390228	390405	390582	390759	177
6	390935	391112	391288	391464	391641	1817	1993	2169	2345	2521	176
7	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277	176
8	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025	175
9	6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766	174
250	397940	398114	398287	398461	398634	398808	398981	399154	399328	399501	173
1	9674	9847	400020	400192	400365	400538	400711	400883	401056	401228	173
2	401401	401573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949	172
3	3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	171
4	4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	171
255	6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070	170
6	8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	169
7	9933	410102	410271	410440	410609	410777	410964	411114	411283	411451	169
8	411620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132	168
9	3300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806	167
260	414973	415140	415307	415474	415641	415808	415974	416141	416308	416474	167
1	6641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	166
2	8301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9635	9791	165
3	9956	420121	420286	420451	420616	420781	420945	421110	421275	421439	165
4	421604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082	164
265	3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	164
6	4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349	163
7	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973	162
8	8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	162
9	9752	9914	430075	430236	430398	430559	430720	430881	431042	431203	161
270	431364	431525	431685	431846	432007	432167	432328	432488	432649	432809	161
1	2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409	160
2	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	159
3	6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592	159
4	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	158
275	9333	9491	9648	9806	9964	440122	440279	440437	440594	440752	158
6	440909	441066	441224	441381	441538	1695	1852	2009	2166	2323	157
7	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889	157
8	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	156
9	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	155
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
280	447158	447313	447468	447623	447778	447933	448088	448242	448397	448552	155
1	8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	450095	154
2	450249	450403	450557	450711	450865	451018	451172	451326	451479	1633	154
3	1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165	153
4	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692	153
285	4845	4997	5150	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214	152
6	6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731	152
7	7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242	151
8	9392	9543	9694	9845	9995	460146	460296	460447	460597	460748	151
9	460898	461048	461198	461348	461499	1649	1799	1948	2098	2248	150
290	462398	462548	462697	462847	462997	463146	463296	463445	463594	463744	150
1	3893	4042	4191	4340	4490	4639	4788	4936	5085	5234	149
2	5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719	149
3	6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200	148
4	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675	148
295	9822	9969	470116	470263	470410	470557	470704	470851	470998	471145	147
6	471292	471438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	2610	146
7	2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071	146
8	4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526	146
9	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976	145
300	477121	477266	477411	477555	477700	477844	477989	478133	478278	478422	145
1	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863	144
2	480007	480151	480294	480438	480582	480725	480869	481012	481156	481299	144
3	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731	143
4	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157	143
305	4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579	142
6	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997	142
7	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410	141
8	8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818	141
9	9958	490099	490239	490380	490520	490661	490801	490941	491081	491222	140
310	491362	491502	491642	491782	491922	492062	492201	492341	492481	492621	140
1	2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015	139
2	4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406	139
3	5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791	139
4	6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173	138
315	8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550	138
6	9687	9824	9962	500099	500236	500374	500511	500648	500785	500922	137
7	501059	501196	501333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291	137
8	2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3655	136
9	3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014	136
320	505150	505286	505421	505557	505693	505828	505964	506099	506234	506370	136
1	6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721	135
2	7856	7991	8126	8260	8395	8530	8664	8799	8934	9068	135
3	9203	9337	9471	9606	9740	9874	510009	510143	510277	510411	134
4	510545	510679	510813	510947	511081	511215	1349	1482	1616	1750	134
325	1883	2017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084	133
6	3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415	133
7	4548	4681	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	5741	133
8	5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064	132
9	7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382	132
330	518514	518646	518777	518909	519040	519171	519303	519434	519566	519697	131
1	9828	9959	520090	520221	520353	520484	520615	520745	520876	521007	131
2	521138	521269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314	131
3	2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616	130
4	3746	3876	4006	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915	130
335	5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210	129
6	6339	6469	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501	129
7	7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8531	8660	8788	129
8	8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	530072	128
9	530200	530328	530456	530584	530712	530840	530968	531096	531223	1351	128
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
340	531479	531607	531734	531862	531990	532117	532245	532372	532500	532627	128
1	2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899	127
2	4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167	127
3	5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432	126
4	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	126
345	7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951	126
6	9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	540079	540204	125
7	540329	540455	540580	540705	540830	540955	541080	541205	1330	1454	125
8	1579	1704	1829	1953	2078	2203	2327	2452	2576	2701	125
9	2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944	124
350	544068	544192	544316	544440	544564	544688	544812	544936	545060	545183	124
1	5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6419	124
2	6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652	123
3	7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8758	8881	123
4	9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	550106	123
355	550228	550351	550473	550595	550717	550840	550962	551084	551206	1328	122
6	1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2547	122
7	2668	2790	2911	3033	3155	3276	3398	3519	3640	3762	121
8	3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973	121
9	5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182	121
360	556303	556423	556544	556664	556785	556905	557026	557146	557267	557387	120
1	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589	120
2	8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787	120
3	9907	560026	560146	560265	560385	560504	560624	560743	560863	560982	119
4	561101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174	119
365	2293	2412	2531	2650	2769	2887	3006	3125	3244	3362	119
6	3431	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548	119
7	4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730	118
8	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909	118
9	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	118
370	568202	568319	568436	568554	568671	568788	568905	569023	569140	569257	117
1	9374	9491	9608	9725	9842	9959	570076	570193	570309	570426	117
2	570543	570660	570776	570893	571010	571126	1243	1359	1476	1592	117
3	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755	116
4	2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915	116
375	4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072	116
6	5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226	115
7	6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377	115
8	7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525	115
9	8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669	114
380	579784	579898	580012	580126	580241	580355	580469	580583	580697	580811	114
1	580925	581039	1153	1267	1381	1495	1608	1722	1836	1950	114
2	2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	114
3	3199	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	113
4	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	113
385	5461	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475	113
6	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	112
7	7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	112
8	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	112
9	9950	590061	590173	590284	590396	590507	590619	590730	590842	590953	112
390	591065	591176	591287	591399	591510	591621	591732	591843	591955	592066	111
1	2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	111
2	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	111
3	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5380	110
4	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	110
395	6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586	110
6	7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681	110
7	8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774	109
8	9883	9992	600101	600210	600319	600428	600537	600646	600755	600864	109
9	600973	601082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951	109
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
400	602060	602169	602277	602386	602494	602603	602711	602819	602928	603036	108
1	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	108
2	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197	108
3	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274	108
4	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348	107
405	7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	107
6	8526	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488	107
7	9594	9701	9808	9914	610021	610128	610234	610341	610447	610554	107
8	610660	610767	610873	610979	1086	1192	1298	1405	1511	1617	106
9	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	106
410	612784	612890	612996	613102	613207	613313	613419	613525	613630	613736	106
1	3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792	106
2	4897	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845	105
3	5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6790	6895	105
4	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943	105
415	8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	8884	8989	105
6	9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928	620032	104
7	620136	620240	620344	620448	620552	620656	620760	620864	620968	1072	104
8	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110	104
9	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146	104
420	623249	623353	623456	623559	623663	623766	623869	623973	624076	624179	103
1	4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210	103
2	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238	103
3	6340	6443	6546	6548	6751	6853	6956	7058	7161	7263	103
4	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287	102
425	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308	102
6	9410	9512	9613	9715	9817	9919	630021	630123	630224	630326	102
7	630428	630530	630631	630733	630835	630936	1038	1139	1241	1342	102
8	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356	101
9	2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367	101
430	633468	633569	633670	633771	633872	633973	634074	634175	634276	634376	101
1	4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383	101
2	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388	100
3	6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390	100
4	7490	7590	7690	7790	7890	7990	8090	8190	8290	8389	100
435	8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387	100
6	9486	9586	9686	9785	9889	9984	640084	640183	640283	640382	99
7	640481	640581	640680	640779	640879	640978	1077	1177	1276	1375	99
8	1474	1573	1672	1771	1871	1970	2069	2168	2267	2366	99
9	2465	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354	99
440	643453	643551	643650	643749	643847	643946	644044	644143	644242	644340	98
1	4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324	98
2	5422	5521	5619	5717	5815	5913	6011	6110	6208	6306	98
3	6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285	98
4	7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262	98
445	8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237	97
6	9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919	650016	650113	650210	97
7	650308	650405	650502	650599	650696	650793	650890	0987	1084	1181	97
8	1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150	97
9	2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116	97
450	653213	653309	653405	653502	653598	653695	653791	653888	653984	654080	96
1	4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042	96
2	5138	5235	5331	5427	5523	5619	5715	5810	5906	6002	96
3	6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960	96
4	7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916	96
455	8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870	95
6	8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821	95
7	9916	660011	660106	660201	660296	660391	660486	660581	660676	660771	95
8	660865	0960	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718	95
9	1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	2663	95
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
460	662758	662852	662947	663041	663135	663230	663324	663418	663512	663607	94
1	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548	94
2	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	94
3	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424	94
4	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360	94
465	7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293	93
6	8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224	93
7	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	670060	670153	93
8	670246	670339	670431	670524	670617	670710	670802	670895	0988	1080	93
9	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005	93
470	672098	672190	672283	672375	672467	672560	672652	672744	672836	672929	92
1	3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850	92
2	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769	92
3	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	92
4	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602	92
475	6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516	91
6	7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427	91
7	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	91
8	9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973	680063	680154	680245	91
9	680336	680426	680517	680607	680698	680789	680879	0970	1060	1151	91
480	681241	681332	681422	681513	681603	681693	681784	681874	681964	682055	90
1	2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957	90
2	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857	90
3	3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756	90
4	4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652	90
485	5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547	89
6	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440	89
7	7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8242	8331	89
8	8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220	89
9	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	690019	690107	89
490	690196	690285	690373	690462	690550	690639	690728	690816	690905	690993	89
1	1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877	88
2	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759	88
3	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	88
4	3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517	88
495	4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394	88
6	5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269	87
7	6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142	87
8	7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014	87
9	8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883	87
500	698970	699057	699144	699231	699317	699404	699491	699578	699664	699751	87
1	9838	9924	700011	700098	700184	700271	700358	700444	700531	700617	87
2	700704	700790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482	86
3	1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344	86
4	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205	86
505	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065	86
6	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922	86
7	5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778	86
8	5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632	85
9	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485	85
510	707570	707655	707740	707826	707911	707996	708081	708166	708251	708336	85
1	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9015	9100	9185	85
2	9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	710033	85
3	710117	710202	710287	710371	710456	710540	710625	710710	710794	0879	85
4	0963	1048	1132	1217	1301	1385	1470	1554	1639	1723	84
515	1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	84
6	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407	84
7	3491	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246	84
8	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084	84
9	5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920	84
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
520	716003	716087	716170	716254	716337	716421	716504	716588	716671	716754	83
1	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587	83
2	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8253	8336	8419	83
3	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248	83
4	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	720077	83
525	720159	720242	720325	720407	720490	720573	720655	720738	720821	0903	83
6	0986	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728	82
7	1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552	82
8	2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374	82
9	3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194	82
530	724276	724358	724440	724522	724604	724685	724767	724849	724931	725013	82
1	5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830	82
2	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646	82
3	6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7297	7379	7460	81
4	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273	81
535	8354	8435	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084	81
6	9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9813	9893	81
7	9974	730055	730136	730217	730298	730378	730459	730540	730621	730702	81
8	730782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1428	1508	81
9	1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313	81
540	732394	732474	732555	732635	732715	732796	732876	732956	733037	733117	80
1	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919	80
2	3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	80
3	4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519	80
4	5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317	80
545	6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	80
6	7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7829	7908	79
7	7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701	79
8	8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493	79
9	9572	9651	9731	9810	9889	9968	740047	740126	740205	740284	79
550	740363	740442	740521	740600	740678	740757	740836	740915	740994	741073	79
1	1152	1230	1309	1388	1467	1546	1624	1703	1782	1860	79
2	1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647	79
3	2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431	78
4	3510	3588	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215	78
555	4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997	78
6	5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777	78
7	5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556	78
8	6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334	78
9	7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110	78
560	748188	748266	748343	748421	748498	748576	748653	748731	748808	748885	77
1	8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659	77
2	9736	9814	9891	9968	750045	750123	750200	750277	750354	750431	77
3	750508	750586	750663	750740	0817	0894	0971	1048	1125	1202	77
4	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	77
565	2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740	77
6	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506	77
7	3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272	77
8	4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4883	4960	5036	76
9	5112	5189	5265	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799	76
570	755875	755951	756027	756103	756180	756256	756332	756408	756484	756560	76
1	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	76
2	7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079	76
3	8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8761	8836	76
4	8912	8988	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592	76
575	9668	9743	9819	9894	9970	760045	760121	760196	760272	760347	75
6	760422	760498	760573	760649	760724	0799	0875	0950	1025	1101	75
7	1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1778	1853	75
8	1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2529	2604	75
9	2679	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3203	3278	3353	75
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
580	763428	763503	763578	763653	763727	763802	763877	763952	764027	764101	75
1	4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848	75
2	4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594	75
3	5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338	74
4	6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082	74
585	7156	7230	7304	7379	7453	7527	7601	7675	7749	7823	74
6	7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564	74
7	8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303	74
8	9377	9451	9525	9599	9673	9746	9820	9894	9968	770042	74
9	770115	770189	770263	770336	770410	770484	770557	770631	770705	0778	74
500	770852	770926	770999	771073	771146	771220	771293	771367	771440	771514	74
1	1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	2102	2175	2248	73
2	2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	2835	2908	2981	73
3	3055	3128	3201	3274	3348	3421	3494	3567	3640	3713	73
4	3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444	73
695	4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173	73
6	5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5756	5829	5902	73
7	5974	6047	6120	6193	6265	6338	6411	6483	6556	6629	73
8	6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7354	73
9	7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079	72
600	778151	778224	778296	778368	778441	778513	778585	778658	778730	778802	72
1	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524	72
2	9596	9669	9741	9813	9885	9957	780029	780101	780173	780245	72
3	780317	780389	780461	780533	780605	780677	0749	0821	0893	0965	72
4	1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684	72
605	1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401	72
6	2473	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117	72
7	3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832	71
8	3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546	71
9	4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259	71
610	785330	785401	785472	785543	785615	785686	785757	785828	785899	785970	71
1	6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6680	71
2	6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390	71
3	7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098	71
4	8168	8239	8310	8381	8451	8522	8593	8663	8734	8804	71
615	8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510	71
6	9581	9651	9722	9792	9863	9933	790004	790074	790144	790215	70
7	790285	790356	790426	790496	790567	790637	0707	0778	0848	0918	70
8	0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620	70
9	1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322	70
620	792392	792462	792532	792602	792672	792742	792812	792882	792952	793022	70
1	3092	3162	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721	70
2	3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418	70
3	4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115	70
4	5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5672	5741	5811	70
625	5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6436	6505	69
6	6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198	69
7	7268	7337	7406	7475	7545	7614	7683	7752	7821	7890	69
8	7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8513	8582	69
9	8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272	69
630	799341	799409	799478	799547	799616	799685	799754	799823	799892	799961	69
1	800029	800098	800167	800236	800305	800373	800442	800511	800580	800648	69
2	0717	0786	0854	0923	0992	1061	1129	1198	1266	1335	69
3	1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021	69
4	2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705	68
635	2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389	68
6	3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071	68
7	4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4685	4753	68
8	4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433	68
9	5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112	68
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
640	806180	806248	806316	806384	806451	806519	806587	806655	806723	806790	68
1	6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467	68
2	7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143	68
3	8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818	67
4	8886	8953	9021	9088	9156	9223	9290	9358	9425	9492	67
645	9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964	810031	810098	810165	67
6	810233	810300	810367	810434	810501	810569	810636	0703	0770	0837	67
7	0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508	67
8	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178	67
9	2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847	67
650	812913	812980	813047	813114	813181	813247	813314	813381	813448	813514	67
1	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181	67
2	4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847	67
3	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511	66
4	5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175	66
655	6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838	66
6	6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7499	66
7	7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160	66
8	8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820	66
9	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478	66
660	819544	819610	819676	819741	819807	819873	819939	820004	820070	820136	66
1	820201	820267	820333	820399	820464	820530	820595	0661	0727	0792	66
2	0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448	66
3	1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103	65
4	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756	65
665	2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409	65
6	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061	65
7	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711	65
8	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361	65
9	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010	65
670	826075	826140	826204	826269	826334	826399	826464	826528	826593	826658	65
1	6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305	65
2	7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951	65
3	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595	64
4	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239	64
675	9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882	64
6	9947	830011	830075	830139	830204	830268	830332	830396	830460	830525	64
7	830589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166	64
8	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806	64
9	1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445	64
680	832509	832573	832637	832700	832764	832828	832892	832956	833020	833083	64
1	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721	64
2	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357	64
3	4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993	64
4	5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627	63
685	5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261	63
6	6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894	63
7	6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525	63
8	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156	63
9	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786	63
690	838849	838912	838975	839038	839101	839164	839227	839289	839352	839415	63
1	9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	840043	63
2	840106	840169	840232	840294	840357	840420	840482	840545	840608	0671	63
3	0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297	63
4	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922	63
695	1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547	62
6	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170	62
7	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793	62
8	3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415	62
9	4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036	62
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
700	845098	845160	845222	845284	845346	845408	845470	845532	845594	845656	62
1	5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275	62
2	6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894	62
3	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511	62
4	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128	62
705	8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743	62
6	8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358	61
7	9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972	61
8	850033	850095	850156	850217	850279	850340	850401	850462	850524	850585	61
9	0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197	61
710	851258	851320	851381	851442	851503	851564	851625	851686	851747	851809	61
1	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419	61
2	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029	61
3	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637	61
4	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245	61
715	4306	4367	4428	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852	61
6	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459	61
7	5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064	61
8	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668	60
9	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272	60
720	857332	857393	857453	857513	857574	857634	857694	857755	857815	857875	60
1	7935	7995	8056	8116	8176	8236	8297	8357	8417	8477	60
2	8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078	60
3	9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679	60
4	9739	9799	9859	9918	9978	860038	860098	860158	860218	860278	60
725	860338	860398	860458	860518	860578	0637	0697	0757	0817	0877	60
6	0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475	60
7	1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072	60
8	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668	60
9	2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263	60
730	863323	863382	863442	863501	863561	863620	863680	863739	863799	863858	59
1	3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452	59
2	4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045	59
3	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637	59
4	5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228	59
735	6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819	59
6	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409	59
7	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998	59
8	8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586	59
9	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173	59
740	869232	869290	869349	869408	869466	869525	869584	869642	869701	869760	59
1	9818	9877	9935	9994	870053	870111	870170	870228	870287	870345	59
2	870404	870462	870521	870579	0638	0696	0755	0813	0872	0930	58
3	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515	58
4	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098	58
745	2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681	58
6	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262	58
7	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844	58
8	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424	58
9	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003	58
750	875061	875119	875177	875235	875293	875351	875409	875466	875524	875582	58
1	5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160	58
2	6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737	58
3	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314	58
4	7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889	58
755	7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464	57
6	8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039	57
7	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612	57
8	9669	9726	9784	9841	9898	9956	880013	880070	880127	880185	57
9	880242	880299	880356	880413	880471	880528	0585	0642	0699	0756	57
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
760	880814	880871	880928	880985	881042	881099	881156	881213	881271	881328	57
1	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898	57
2	1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468	57
3	2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037	57
4	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605	57
765	3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172	57
6	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739	57
7	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305	57
8	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870	57
9	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434	56
770	886491	886547	886604	886660	886716	886773	886829	886885	886942	886998	56
1	7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561	56
2	7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123	56
3	8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685	56
4	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246	56
775	9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806	56
6	9862	9918	9974	890030	890086	890141	890197	890253	890309	890365	56
7	890421	890477	890533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924	56
8	0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482	56
9	1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039	56
780	892095	892150	892206	892262	892317	892373	892429	892484	892540	892595	56
1	2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151	56
2	3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706	56
3	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261	55
4	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814	55
785	4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367	55
6	5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920	55
7	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471	55
8	6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022	55
9	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	55
790	897627	897682	897737	897792	897847	897902	897957	898012	898067	898122	55
1	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670	55
2	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218	55
3	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766	55
4	9821	9875	9930	9985	900039	900094	900149	900203	900258	900312	55
795	900367	900422	900476	900531	0586	0640	0695	0749	0804	0859	55
6	0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404	55
7	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948	54
8	2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492	54
9	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036	54
800	903090	903144	903199	903253	903307	903361	903416	903470	903524	903578	54
1	3633	3687	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120	54
2	4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661	54
3	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202	54
4	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742	54
805	5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6281	54
6	6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820	54
7	6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358	54
8	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895	54
9	7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431	54
810	908485	908539	908592	908646	908699	908753	908807	908860	908914	908967	54
1	9021	9074	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503	54
2	9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	910037	53
3	910091	910144	910197	910251	910304	910358	910411	910464	910518	0571	53
4	0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104	53
815	1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637	53
6	1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169	53
7	2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700	53
8	2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231	53
9	3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761	53
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
820	913814	913867	913920	913973	914026	914079	914132	914184	914237	914290	53
1	4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819	53
2	4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347	53
3	5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5875	53
4	5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6296	6349	6401	53
825	6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927	53
6	6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453	53
7	7506	7558	7611	7663	7716	7768	7820	7873	7925	7978	52
8	8030	8083	8135	8188	8240	8293	8345	8397	8450	8502	52
9	8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026	52
830	919078	919130	919183	919235	919287	919340	919392	919444	919496	919549	52
1	9601	9653	9706	9758	9810	9862	9914	9967	920019	920071	52
2	920123	920176	920228	920280	920332	920384	920436	920489	0541	0593	52
3	0645	0697	0749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114	52
4	1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634	52
835	1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154	52
6	2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674	52
7	2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3089	3140	3192	52
8	3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710	52
9	3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228	52
840	924279	924331	924383	924434	924486	924538	924589	924641	924693	924744	52
1	4796	4848	4899	4951	5003	5054	5106	5157	5209	5261	52
2	5312	5364	5415	5467	5518	5570	5621	5673	5725	5776	52
3	5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6240	6291	51
4	6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805	51
845	6857	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319	51
6	7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832	51
7	7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345	51
8	8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8857	51
9	8908	8959	9010	9061	9112	9163	9215	9266	9317	9368	51
850	929419	929470	929521	929572	929623	929674	929725	929776	929827	929879	51
1	9930	9981	930032	930083	930134	930185	930236	930287	930338	930389	51
2	930440	930491	0542	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898	51
3	0949	1000	1051	1102	1153	1204	1254	1305	1356	1407	51
4	1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1865	1915	51
855	1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2322	2372	2423	51
6	2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930	51
7	2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437	51
8	3487	3538	3589	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943	51
9	3993	4044	4094	4145	4195	4246	4296	4347	4397	4448	51
860	934498	934549	934599	934650	934700	934751	934801	934852	934902	934953	50
1	5003	5054	5104	5154	5205	5255	5306	5356	5406	5457	50
2	5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960	50
3	6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463	50
4	6514	6564	6614	6665	6715	6765	6815	6865	6916	6966	50
865	7016	7066	7117	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468	50
6	7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969	50
7	8019	8069	8119	8169	8219	8269	8320	8370	8420	8470	50
8	8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970	50
9	9020	9070	9120	9170	9220	9270	9320	9369	9419	9469	50
870	939519	939569	939619	939669	939719	939769	939819	939869	939918	939968	50
1	940018	940068	940118	940168	940218	940267	940317	940367	940417	940467	50
2	0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964	50
3	1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462	50
4	1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958	50
875	2008	2058	2107	2157	2207	2256	2306	2355	2405	2455	50
6	2504	2554	2603	2653	2702	2752	2801	2851	2901	2950	50
7	3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445	49
8	3495	3544	3593	3643	3692	3742	3791	3841	3890	3939	49
9	3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4384	4433	49
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
880	944483	944532	944581	944631	944680	944729	944779	944828	944877	944927	49
1	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419	49
2	5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912	49
3	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403	49
4	6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894	49
885	6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385	49
6	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875	49
7	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	49
8	8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853	49
9	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341	49
890	949390	949439	949488	949536	949585	949634	949683	949731	949780	949829	49
1	9878	9926	9975	950024	950073	950121	950170	950219	950267	950316	49
2	950365	950414	950462	0511	0560	0608	0657	0706	0754	0803	49
3	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289	49
4	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775	49
895	1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260	48
6	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744	48
7	2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228	48
8	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711	48
9	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194	48
900	954243	954291	954339	954387	954435	954484	954532	954580	954628	954677	48
1	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158	48
2	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640	48
3	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	48
4	6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601	48
905	6649	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080	48
6	7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559	48
7	7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038	48
8	8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516	48
9	8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994	48
910	959041	959089	959137	959185	959232	959280	959328	959375	959423	959471	48
1	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947	48
2	9995	960042	960090	960138	960185	960233	960280	960328	960376	960423	48
3	960471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899	48
4	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374	48
915	1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848	47
6	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322	47
7	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795	47
8	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268	47
9	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741	47
920	963788	963835	963882	963929	963977	964024	964071	964118	964165	964212	47
1	4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684	47
2	4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155	47
3	5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625	47
4	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095	47
925	6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564	47
6	6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033	47
7	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501	47
8	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969	47
9	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436	47
930	968483	968530	968576	968623	968670	968716	968763	968810	968856	968903	47
1	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369	47
2	9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835	47
3	9882	9928	9975	970021	970068	970114	970161	970207	970254	970300	47
4	970347	970393	970440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765	46
935	0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229	46
6	1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693	46
7	1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157	46
8	2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619	46
9	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082	46
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	.0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
940	973128	973174	973220	973266	973313	973359	973405	973451	973497	973543	46
1	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005	46
2	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466	46
3	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926	46
4	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386	46
945	5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5845	46
6	5891	5937	5983	6029	6075	6121	6167	6212	6258	6304	46
7	6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6763	46
8	6808	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220	46
9	7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678	46
950	977724	977769	977815	977861	977906	977952	977998	978043	978089	978135	46
1	8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591	46
2	8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047	46
3	9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503	46
4	9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958	46
955	980003	980049	980094	980140	980185	980231	980276	980322	980367	980412	45
6	0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867	45
7	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320	45
8	1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773	45
9	1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226	45
960	982271	982316	982362	982407	982452	982497	982543	982588	982633	982678	45
1	2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130	45
2	3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581	45
3	3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032	45
4	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	45
965	4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932	45
6	4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382	45
7	5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830	45
8	5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279	45
9	6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727	45
970	986772	986817	986861	986906	986951	986996	987040	987085	987130	987175	45
1	7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622	45
2	7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068	45
3	8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514	45
4	8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960	45
975	9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	9405	45
6	9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850	44
7	9395	9939	9983	990028	990072	990117	990161	990206	990250	990294	44
8	990339	990383	990428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738	44
9	0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182	44
980	991226	991270	991315	991359	991403	991448	991492	991536	991580	991625	44
1	1669	1713	1758	1802	1846	1890	1935	1979	2023	2067	44
2	2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509	44
3	2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951	44
4	2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392	44
985	3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833	44
6	3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273	44
7	4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713	44
8	4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5108	5152	44
9	5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591	44
990	995635	995679	995723	995767	995811	995854	995898	995942	995986	996030	44
1	6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468	44
2	6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906	44
3	6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343	44
4	7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779	44
995	7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216	44
6	8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652	44
7	8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087	44
8	9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9479	9522	44
9	9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957	43
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

〔外地定價參圓參拾錢〕

昭和十四年十一月十一日初版印刷
昭和十四年十一月十五日初版發行
昭和十六年四月二十三日訂正再版印刷
昭和十六年四月二十八日訂正再版發行

統計學の理論と方法

㊥定價金參圓

著作者　寺尾琢磨（てらを たくま）

發行者　江草四郎
東京市神田區神保町二丁目十七番地

印刷者　白井赫太郎
東京市神田區錦町三丁目十一番地

發行所　書肆　有斐閣
東京市神田區神保町二丁目十七番地
本店　電話九段三二二・三二三　振替口座東京三七〇番
本郷支店　東京市本郷區帝大正門前　電話小石川一九二〇番

東京精興社神田