3

教育部審定

新中學教科書

高級幾何學

全一冊

編者

無錫 胡敦復　武進 吳在淵

校者

無錫 胡明復

中華書局印行

編輯大意

1. 本書程度,備供高級中學校及後期師範學校等教學之用.

1. 本書取材豐富,證題詳明,理論應用,兼籌並顧.每章末增加演算及解題之例,每編末再增加練習題數十爲學者復習之用.

1. 本書前四編屬平面,凡平面幾何圖之一切基本定理,已包括無遺,關於軌跡及作圖題,較他書尤爲詳備;後三編屬立體,凡空間之點綫以及柱體錐體球體等之重要性質,無不應有盡有,以適合高級中學之程度爲限.

1. 本書對於已習混合算學者,讀之尤覺合宜:蓋混合編纂之教科書,幾何之分量甚少,入高級中學後,再授是書,所以補足未竟之學程,決無重複之弊病.

1. 我國舊有之幾何學教科書,先屬英派,後爲美派.本書參酌英美,加以法派之教材:講比例則避去插合論之沈悶,導計算則先明量數間之關係,時加應用,而以不背嚴格之理論爲歸.

1. 本書於算術及代數方面力求貫通;然仍保守系統,決不以理論遷就,致失幾何學

之精神.

1. 關於測量之問題,本書詳示簡易方法,用以溝通三角法而不侵占三角法之範圍.

1. 本書所用學語,依照算學名詞審查會之已審定者,其未定者暫用現今廣行之語,俟定後再改.

編者識

新 中 學 教 科 書

高級幾何學

目　次

緒　論

第一編　直線圖形

頁數

第二編　圓

第三編　比及比例

第四編　面積

第五編　直線及平面

第六編　多面體

第七編　三圓體

新中學教科書

高級幾何學

緒論

1. 導言.

幾何學[1]者,就宇宙間可以視覺及觸覺認識之諸物體研究其所占空間部分之形象,[2]大小,[3]位置[4]之學問也.

凡物體之占有宇宙間若干地位者,必各有其形象,大小,及位置. 顧或形象同而大小異,或大小等而形象別,亦有形象大小全等而位置不同者;此其間之異同胥有關係存焉;幾何學卽就此等之關係研究之.

他如物體有色澤,或軟,或硬,或飘,或重,或輕;而其物質之爲土,或木,或金;幾何學皆置不論;論者但爲其間之形象,大小,位置而已. 譬有二球,一金質而一木質;其附麗於金木之性;當就物理學或化學研究之;幾何學則單論其球形,或比較其大小,如其大小相等,則徑可視爲全相等之二球也.

凡物體存在之處曰空間,[5]空間者在吾人周圍各方向無限擴張而不能想像其止境者也.

物體在無限空間中占有之地位曰立體,[6]立體之

(1) 幾何學 Geometry. (2) 形象 Form. (3) 大小 Magnitude.
(4) 位置 Position. (5) 空間 Space. (6) 立體 Solid.

界爲表面,[1]而立體者以表面所圍空間之一部分也.

表面之界爲線,[2]線之界爲點,[3]表面之最簡單者曰平面.[4]

表面,線,點,就立體觀察之,始得認其存在,夷考其實,無此物也. 顧幾何學欲便於研究,恒以繪於紙上之圖形表之. 故紙上之點或線,實非幾何學中之點或線,而爲想像上之記號,有如算術中之數,初非實有其物,不過爲表示多寡之記號也. 惟學者欲研究時不易謬誤,則繪圖宜清.

點,線,表面,或分或合者曰圖形.[5]

幾何學者,研究圖形之性質,兼測其大小者也.

幾何學通例分爲二部分,一曰平面幾何學,[6]一曰立體幾何學.[7] 平面幾何學所論圖形中之各點皆在一平面上. 立體幾何學所論圖形中之各點不皆在一平面上. 而在初等平面幾何學中,所論之圖形惟爲點,直線,及圓.

幾何學者,以吾人由經驗所得之若干眞理作基礎,本推理之法以演繹判斷此外之眞理者也.

2. 幾何學中之名詞.

語. 述一事而完全其意者曰語.

語有二種;一曰肯定語,A 爲 B 是也,一曰否定語,甲非

(1) 表面 Surface. (2) 線 Line. (3) 點 Point.
(4) 平面 Plane surface, Plane. (5) 圖形 Figure.
(6) 平面幾何學 Plane geometry. (7) 立體幾何學 Solid geometry.

乙是也. 例如「幾何學係數學之一分科」此爲肯定語,「鯨非魚」爲否定語.

定義.[1] 定言語意義之語曰定義.

公理.[2] 吾人以尋常之智識,由累次經驗決定一事,其簡單毋庸加以推度,其眞確無人能作異議者曰公理.

幾何學硏究圖形之性質時,端賴公理作推理之基礎.

幾何學中之公理有二種,一曰普通公理,[3] 一曰幾何學公理.[4] 普通公理,係通用於數學中各科之公理,幾何學公理,則僅能用於幾何學中者也.

3. 普通公理. 幾何學中所用普通公理之重要者如下:

(a) 全量[5]等於其各部分之和.

例如B, C, D爲A之部分,則$A=B+C+D$.

(b) 全量比其一部分大.

例如$A=B+C+D$,則$A>B$,或$A>B+C$等.

(c) 等於同量之二量相等.

例如$A=M$, $B=M$則$A=B$,擴充此理更得如下之公理:

(c') 等於等量之二量相等.

例如$A=M$, $B=N$,而$M=N$則$A=B$.

(d) 此量比彼量大,則此之等量比彼量大,彼之等量比此量小.

例如$A=M$, $B=N$而$M>N$,則$A>N$, $M>B$而$A>B$.

---

(1) 定義 Definition. (2) 公理 Axiom. (3) 普通公理 General axiom.
(4) 幾何學公理 Geometric axiom. (5) 量 Quantity.

(e) 等量加等量其和相等.

例如 $A=M$, $B=N$ 則 $A+B=M+N$ 或 $A+N=B+M$.

(f) 等量減等量其差相等.

例如 $A=M$, $B=N$ 則 $A-B=M-N$ 或 $A-N=M-B$.

(g) 不等量加等量其和不等,原大者和亦大,原小者和亦小.

例如 $A>B$ 而 $C=D$, 則 $A+C>B+D$.

(h) 不等量減等量其差不等,原大者差亦大,原小者差亦小.

例如 $A>B$ 而 $C=D$, 則 $A-C>B-D$.

(i) 等量減不等量其差不等,所減者大其差小,所減者小其差大.

例如 $A=B$ 而 $C>D$ 則 $A-C<B-D$.

(j) 等量等倍數之量相等.

例如 $A=B$, 而 $m=n$, 則 $m\times A=n\times B$, 或 $mA=nB$. 但 m, n 表正整數.

(k) 等量等分數之量相等.

例如 $A=B$, 而 $p=q$, 則 $A\div p=B\div q$, 或 $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}$. 但 p, q 表正整數.

由(j), (k), 可知 $A=B$, $m=n$, $p=q$ 則 $\frac{m}{p}A=\frac{n}{q}B$.

4. 定理.[1] 以定義公理等已認爲眞確之事作基礎,由此加以推斷而得之眞理曰定理.

(1) 定理 Theorem.

定理由二部分所成,一曰假設,[1]一曰終決,[2]假設者,假定之事,藉以為推理之端;終決者,應於假設而起之事,由推斷而後知其確否者也.

定理形狀之模範如下:

若A為B,則C為D. (I)

此中「A為B」為假設,而「C為D」為終決. 意謂A若為B,則C必可為D也.

此一定理若能眞確,則下一定理亦必眞確:

若C不為D則A不為B. (II)

定理(I)及(II)互相為倒否,[3]即(II)為(I)之倒否定理,(I)亦為(II)之倒否定理.

又有彼此二定理,此定理之假設為彼定理之終決,而彼定理之假設為此定理之終決,則此二定理互相為倒.[4]例如:

若C為D,則A為B. (III)

為定理(I)之倒,而定理(I)亦為(III)之倒.

又作(III)之倒否,得:

若A不為B,則C不為D. (IV)

此與(I)互相為否.[5]

以上四種定理相互之關係更表明之如下:

(I), (II) > 倒否.	(I), (III) > 倒.	(I), (IV) > 否.
(II), (III) > 否.	(II), (IV) > 倒.	(III), (IV) > 倒否.

(1) 假設 Hypothesis, 或 Supposition. (2) 終決 Conclution.

(3) 倒否 Contraposition. (4) 倒 Converse. (5) 否 Obverse.

有時定理中有二個以上之假設,則任取一假設與其終決交換,所得之各定理皆為原定理之倒.

例如在下一定理中:

若A為B,C為D,E為F,則X為Y.

有三個假設,為「A為B」,「C為D」,「E為F」. 故此定理之倒亦有三者如下:

若A為B,C為D,X為Y,則E為F;

若A為B,X為Y,E為F,則C為D;

若X為Y,C為D,E為F,則A為B.

如前所言,一定理若為眞確,則其倒否定理亦必眞確;故有一定理於此若能證明其倒否定理必能眞確,則此定理卽可不加論證而認其為眞確可知.

然一定理眞確之時,其倒定理及否定理未必亦能眞確;卽倒與否之眞確與否,必當另行證明之. 故以前所言四種定理中,(I)與(II)是必同是,非必同非,(III)與(IV)亦然,若(I),(II)與(III),(IV),則渺不相關也.

例如今言「中國為亞洲之强國」,此語假定為眞確,則「非亞洲之强國必非中國」一語亦必眞確可知,卽互相倒否之二定理必能同時成立也. 然第一語之否定理「非中國必非亞洲之强國」,或其倒定理「亞洲之强國為中國」此二語未必能因第一語之確當而亦卽可認為眞確,因第一語中初未斷定日本等國不能亦為亞洲之强國故也.

又如「犬為四足之動物」此語羣知其不謬,然則其倒否「非四足之動物必非犬」亦必不謬可知,而其倒「四足之動物為犬」,其否「非犬卽非四足之動物」,此二語皆謬矣.

又如「世界第一之豪傑為拿破侖」,此語若確,則其倒否「非拿破侖卽非世界第一豪傑」,其倒「拿破侖為世界第一之

豪傑」其否「非世界第一之豪傑非拿破侖」,此三者乃亦同時爲眞確．以故一語而眞確,其倒其否,或眞或不眞,不能遽定,其眞也當俟證後始能定之．

問　　題[1]

有以下諸語,試作其倒否,及倒否,且判斷其眞確與否．

(1) 雞有二足．　　　　(2) 中國人爲黃種人．

(3) 幾何學爲數學之一分科．

5. 窮舉證法.[2] 有已經證明之一羣定理於此,其假設已盡其可起之種類,而其終決必不能同時成立,則此各定理之倒定理必能眞確．(證法視第一編定理十一及十二之證)

在幾何學中屢遇用此法證明之定理．例如在如下三個定理中:

$$A>B \text{ 則 } C>D,$$
$$A=B \text{ 則 } C=D,$$
$$A<B \text{ 則 } C<D.$$

其假設$A>B$,$A=B$,$A<B$已盡其可起之種類,而其終決$C>D$,$C=D$,$C<D$決不能同時成立,如此三個定理若已知其爲眞確,則其倒定理

$$C>D \text{ 則 } A>B,$$
$$C=D \text{ 則 } A=B,$$
$$C<D \text{ 則 } A<B.$$

亦必皆爲眞確．

6. 同一證法.[3] 若有獨一無二之A,又有

(1) 問題 Exercise.　　(2) 窮舉證法 Method of exhaustion.

(3) 同一證法 Rule of identity.

獨一無二之B,而能證明「A為B」之定理為眞確,則可徑行斷定「B為A」亦必眞確.(此卽同一證法,例視第一編定理二十六之證)

例如「北京為中華民國之都城」已知其為眞確,則因北京有一無二,中華民國之都城亦有一無二,故此定理之倒「中華民國之都城為北京」亦必眞確無疑.

7. 輔定理[1]及系.[2] 欲某一定理之證明較易,而先行證一預備之定理,是曰**輔定理.**

系. 由已知定理及其推斷之法少加申說卽可決定之定理曰**系.**

8. 作圖題.[3] 一題,求用幾何學上之方法作一圖形令合於所設之事者曰**作圖題.**

作圖時所許用之器械惟規[4]及矩,[5]規以作圓,或移定長於他處,矩以作直線.矩亦可以三角板代之.

在本書中證明一定理必先作其圖形,依此圖形解釋定理之意義,由是舉其**證明.**[6] 又在作圖題中,先解釋其題義,次舉作圖之方法及證明,時或更述其**討論.**[7]

9. 記號.[8]

以下因欲論證之簡明,用下所列之記號.

$+$.	加.	$-$.	減.
$\sim$.	差.	$=$.	相等.
$\equiv$或$\cong$.	全相等或合同形.	$\neq$.	不等.
$>$.	大於.	$<$.	小於.

(1) 輔定理 Lemma. (2) 系 Carollary. (3) 作圖題 Problem.

(4) 規 Compass. (5) 矩 Ruler. (6) 證 Demonstration, or proof.

(7) 討論 Discussion. (8) 記號 Symbol.

$\leqq$或$\ngtr$	不大於.	$\geqq$或$\nless$	不小於.
$\therefore$	故.	$\because$	何則.
$\angle$	角.	R	直角.
$\parallel$	平行.	$\nparallel$	不平行.
$\perp$	垂直.	$\triangle$	三角形.
$\square$	平行四邊形.	▭	矩形.
□	正方形.	$\odot$	圓.
$\backsim$	相似.	$\frown$	弧.

其餘在算術,代數學中所用之記號,幾何學中亦有用之者.

A, B, C,……各等於X, Y, Z,……, 卽

$$A=X, B=Y, C=Z, \ldots\ldots$$

第一編

直線圖形

10. 定義1. 點.[1]

點者,有位置而無大小者也.

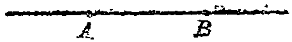
11. 定義2. 線.[2]

線者,有位置有長而無廣狹厚薄者也.

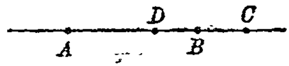
線之界爲點. 線與線之交亦爲點.

12. 定義3. 直線.[3]

直線者任置其任一部分於又一部分上,兩點重而全相合者也.



慣例,以兩文字記一直線.如AB.



直線向兩方面皆無限止.若取其一部分考之,名之曰有限直線,或曰線分.[4] 線分有二端是爲線之界. 在線分兩端間定一點,則爲線分分於此點,而自此點至兩端之長名曰分. 如圖AB爲線分,D爲二端A, B間之一點,則AD,DB爲AB之部分卽爲分. 又從線分之一端向其外引伸之部分爲其延線,[5]卽如BC爲AB之延線.

(1) 點 Point. (2) 線 Line. (3) 直線 Straight line.
(4) 線分 Segment. (5) 延線 Production.

13. 定義4. 表面.[1]

表面者有位置,有長,有廣而無厚者也.

表面之界爲線. 兩表面之交處亦爲線.

14. 定義5. 平面.[2]

平面爲表面之最簡者,聯其上任意二點之直線恆全在其面上者也.

15. 定義6. 平面圖形.[3]

圖形之在一平面上者(點及線之或分或合者)爲平面圖形或略曰平面形.[4]

【註】 取一細絲,懸一鉛錘於其一端,而微風不動,則此絲可定一位置. 慣例以絲之如此情狀爲眞直. 若更去此絲之大小而惟懸想其形狀,即可得直線之概念. 又就靜止之水面觀之,可得平面之概念.

16. 幾何學公理.

公理 I. 圖形可不變其形象及大小而任意變其位置.

公理 II. 直線爲二點間之最短距離.

系 I. 過二點之直線有一無二.

系 II. 共有二點之二直線可全相重合.

公理 III. 全相重合者大小相等.

17. 定義7. 二點間之距離.[4]

(1) 表面 Surface.　(2) 平面 Plane.

(3) 平面圖形 Plane figure.　(4) 距離 Distance.

所設二點間之距離,爲聯此二點間所得線分之長.

18. 作圖之公設.[1]

作圖之公設者,公認爲可以作圖之事,藉是作種種圖形而決不可出其範圍者也. 作圖之公設有三,茲先舉其關於直線之二者如下:

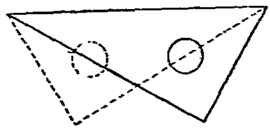
(1) 過二定點必能作一直線.

(2) 凡線分必能任意延長之.

19. 直線之畫法.

欲過二定點畫一直線,可取邊緣正直之矩,令其一邊與此二點密合,乃以筆端沿此邊而繪之.

矩以界尺,或三角板代之皆可,惟其邊緣必當正直,否則所繪之線不直.



如取一三角板而欲驗其邊緣之正直與否,法用鉛筆沿三角板之邊繪一線分於紙上,更反置此三角板,令此邊之兩端與線分之兩端合,復沿邊繪一線分,兩線分能密合,則此邊爲正直;否則非正直

問題

(1) 線分AB上任意之點爲P,其中點爲M,則

$$PM=\frac{1}{2}(PA\sim PB).$$

證之.

(1) 公設 Postulate.

(2) 若P在AB之延線上,則

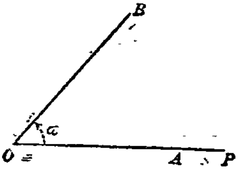
$$PM=\frac{1}{2}(PA+PB).$$

證之.

第一章　角

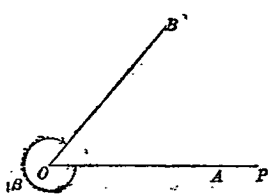
20. 定義8. 角.(1)

角,由一點所引二直線所成,其點爲角之頂點,(2)二直線爲此角之二邊,(3)或曰角之二腕.



如圖,O爲角之頂點,而OA, OB爲角之二邊.

從角之頂點引直線OP與第一邊OA合,乃以O爲中心在同平面上依如圖所示矢之方向旋轉,遂至與OB相合,則曰直線OP旋轉此角.而角之大小卽爲此直線旋轉所經之路,與其邊之長短無關係.



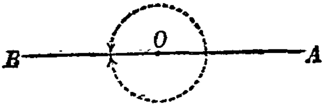
OP由OA之位置旋轉至OB之位置,其旋轉之方法有二,一如α,一如β,故共有一頂點及二邊之角有二個,此二者互稱爲相屬角,(4)其大者曰優角,(5)小者曰劣角.(6)凡僅言角者每指劣角而言.

記角之法,以記頂點之文字置中間,記二邊上各一點

(1) 角 Angle.　(2) 頂點 Vertex.　(3) 二邊(角之)Arms.
(4) 相屬角 Conjugate angles.　(5) Major angle.　(6) Minor angle.

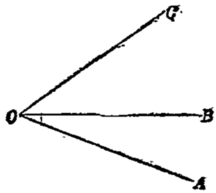
之文字分置兩傍,且於其上附一符號∠以代角例如∠AOB或∠BOA,皆角AOB之意．若從頂點所引之直線惟有二個,則可僅以記頂點之文字記之,如∠O．有時用一希臘文字記於角之二邊間以記角,如∠α,及∠β．

21. 定義9. 直線角.[1]



角之二邊在一直線上而與其相屬角相等,則其各角曰**直線角**．故直線上任意之點可視作直線角之頂點．

22. 定義10. 隣角,[2]**角之等分線.**[3]



有二角共有一頂點及一邊,且分列於此共有一邊之兩傍,則此二角互爲**隣角**.

二隣角之和爲兩外邊所夾之角．如圖∠AOB,∠BOC共有頂點O及一邊OB,且分列於OB之兩傍,故∠AOB,∠BOC互爲隣角,而

$$\angle AOB+\angle BOC=\angle AOC.$$

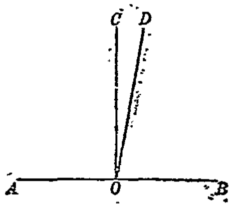
一直線分一角爲相等二隣角,則此直線爲原角之**等分線**．

23. 定義11. 垂線,[4]**直角,**[5]**斜線.**[6]

一直線立於叉一直線上而成相等之隣角,則曰前一直線**垂線於**後一直線,或曰此二線**互相垂直**,亦曰

(1) 直線角 Straight angle.　(2) 隣角 Adjacent angle.
(3) 等分線 Bisector.　(4) 垂線 Perpendicular.
(5) 直角 Right angle.　(6) 斜線 Oblique.

互爲垂線.



角之二邊互相垂直,則此角曰**直角**. 如圖∠AOC=∠BOC,則CO垂直於AB,而∠AOC,∠COB各爲直角. CO垂直於AB,以CO⊥AB記之.直角以R∠記之.

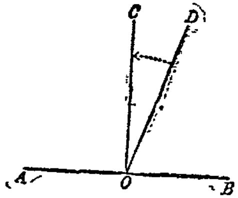
一直線不爲他直線之垂線,即爲他直線之**斜線**,如圖DO爲AB之斜線.

垂線或斜線與直線相會之點名曰垂線或斜線之足[1]

【注意】 由直角及直線角之定義,可知一直線角等於二直角.

24. 定理一.

由一直線上一點所作此直線之垂線有一無二.



由直線AB上之一點O可作AB之一垂線而惟能作一垂線.

【證】 直線OD初重於OB之上. 由此依矢所示之方向旋轉,遂達於OA之位置,則其間∠BOD由零漸次增大而至一直線角. 同時∠AOD由一直線角漸次減少而至於零. 即初時∠BOD比∠AOD小,以後逐漸增大而可至比∠AOD大. 由是可知OD在旋轉之途中必經過如OC之一位置,即令∠AOC及∠BOC相等者,而如此CO之位置惟有一個,即過AB上一點O而垂直於AB之直線

(1) 足 Foot or pied.

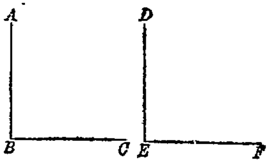
惟有一個.

25. 定理二.

凡直角皆相等.

∠ABC, ∠DEF各爲直角,則

∠ABC=∠DEF.



【證】 移置∠DEF於∠ABC上,令邊EF重於BC上,E點與B點合,而D及A在BC之同傍. 因

ED⊥EF,　　(假設)

而ED亦於B點垂直於BC;

又　　BA⊥BC,　　(假設)

然於B點惟可引BC之一個垂線【定理一】,

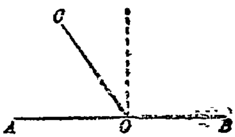
故ED不可不取BA之方向,即二角∠DEF, ∠ABC全相合,而

∠ABC=∠DEF.　　可知.

26. 系一.

凡直線角皆相等.

因一直線角等於二直角故也.



27. 定義12. 銳角.[1]

比一直角小之角曰銳角.

28. 定義13. 鈍角.[2]

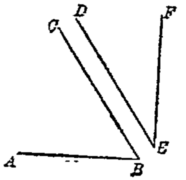
比一直角大而比二直角小之角曰鈍角.

如圖∠AOC爲銳角而∠BOC爲鈍角.

29. 定義14. 餘角.[3]

(1) 銳角 Acute angle.　(2) 鈍角 Obtuse angle.　(3) 餘角 Complement.

二角之和等於一直角,則此二角互爲餘角.

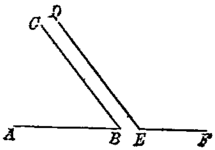


如圖 ∠ABC+∠DEF=R∠.

則 ∠ABC 爲 ∠DEF 之餘角, ∠DEF 爲 ∠ABC 之餘角.

30. 定義15. 補角.[1]

二角之和等於二直角,則此二角互爲補角.



如圖 ∠ABC+∠DEF=2R∠.

則 ∠ABC 爲 ∠DEF 之補角, ∠DEF 爲 ∠ABC 之補角.

31. 系二.

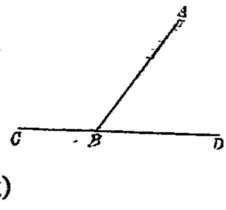
等角之餘角相等.

32. 系三.

等角之補角相等.

33. 定理三.

一直線立於他直線上,則其所成之二隣角互爲補角.



直線 AB 立於他直線 CD 上,則二隣角 ∠ABC, ∠ABD 互爲補角.

【證】 ∠ABC, ∠ABD 之和爲 BC, BD 所成之角卽等於直線角 CBD.

然　　直線角 CBD=2R∠, (23款注意)

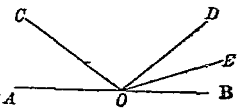
(1) 補角 Supplement.

$\therefore\quad \angle ABC+\angle ABD=2R\angle.$

故 $\angle ABC$ 及 $\angle ABD$ 互爲補角.

34. 系一.

由一直線上一點向此線之一傍引若干直線,則此諸直線順次所成諸角之和等於二直角.



從直線 AB 上之一點 O 在 AB 之一傍引直線 OC, OD, OE 等,則

$\angle AOC+\angle COB=2R$ 【定理三】

然　$\angle COB=\angle COD+\angle DOE+\angle EOB.$

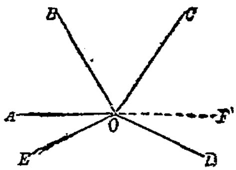
$\therefore\ \angle AOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOB=2R.$

35. 系二.

由一點引若干直線順次所成諸角之和等於四直角.

由一點 O 引直線 OA, OB, OC, OD, OE, 則

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOA=4R.$



【證】 延長直線 AO 至 F, 則

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COF=2R,$

【定理三系一】

而　$\angle FOD+\angle DOE+\angle EOA=2R,$

$\angle COF+\angle FOD=\angle COD;$

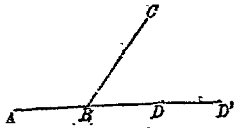
$\therefore\ \angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOA=4R\angle.$

36. **定理四.** (定理三之例).

二隣角互爲補角,則不公共二邊之一在

他一之延線上.

二隣角ABC, CBD互爲補角,則BD可在AB之延線上.



【證】延長AB至D′,則

然 $\angle ABC+\angle CBD'=2R\angle$.

$\angle ABC+\angle CBD=2R$,(假設)

$\therefore$ $\angle ABC+\angle CBD'=\angle ABC+\angle CBD$;

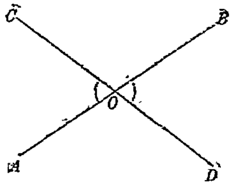
$\therefore$ $\angle CBD'=\angle CBD$;

故BD′, BD全相重合可知,卽BD在AB之延線上.

【注意】此定理係證三點在一直線上必需之要件.

37. 定義16. 對頂角.[1]

二直線相交,則其相向之角曰對頂角. 如圖$\angle AOC$, $\angle BOD$爲對頂角,又$\angle COB$, $\angle AOD$爲對頂角.



38. 定理五.

對頂角相等.

$\angle AOC$, $\angle BOD$爲對頂角;又$\angle COB$, $\angle AOD$亦爲對頂角,

則 $\angle AOC=\angle BOD$, $\angle COB=\angle AOD$.

【證】AB, CD各爲一直線,故

$\angle AOC+\angle COB=2R\angle$【定理三】,

$\angle COB+\angle BOD=2R$【定理三】;

$\therefore$ $\angle AOC+\angle COB=\angle COB+\angle BOD$;

$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOD$.

(1) 對頂角 Vertically opposite angles.

倣此　　　　$\angle COB=\angle AOD$.

39. 例題.

例一. 一角爲直角之$\frac{3}{4}$,則其餘角爲四直角之幾分.

【解】　所求之餘角$=R-\frac{3}{4}R$

$$=\frac{1}{4}R$$

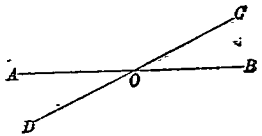
$$=\frac{4}{16}R$$

故此角爲四直角之$\frac{1}{16}$.

例二. 由直線AB上之一點O向此線之兩傍引OC, OD二直線,而令$\angle AOC=\angle BOD$,則OC, OD在一直線上.

【證】　AOB爲一直線,故

$\angle AOC+\angle COB=2R$



【定理三】.

然　　　$\angle AOC=\angle BOD$ (假設),

$\therefore$　$\angle BOD+\angle COB=2R$.

故COD爲一直線.【定理四】.

問　題

(1) 有一所設角,試作其補角.

(2) 一角等於直角五分之三,則其餘角等於一直線角之幾分?

(3) 一角等於直角六分之七,則其補角等於四直角之幾分?

(4) 二直線相交所成四角之一爲直角,則除三角亦各爲直角.

(5) 此直線垂直於彼直線,則彼直線亦垂直於此直線.

(6) 二隣角之和等於一直角四分之三,則其二等分線所成之角等於四直角之幾分?

(7) 二隣角互爲補角,則其等分線所成之角爲直角.

(8) 會於一點之三直線成相等之三角,則各角等於一直角三分之四.

(9) 會於一點之二直線所成二角(相屬角)之和等於直角之幾倍?

(10) 會於一點之四直線所成之四角各爲直角,則此四直線可合成二直線.

(11) 問題(4)及(10)有若何之關係?

(12) 由一點 O 引四直線 OA, OB, OC, OD 而 $\angle AOB=\angle COD$, $\angle BOC=\angle DOA$, 則 AOC, BOD 各爲一直線.

(13) 等分對頂角之二直線成一直線.

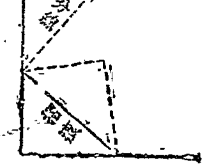
(14) 由一點 O 引四直線 OA, OB, OC, OD, 而 $AO\perp OC$, $BO\perp OD$, 則 $\angle AOB$ 及 $\angle COD$ 或相等,或互爲補角.

(15) 所設角 AOB 之等分線爲 OC, 又從 O 向 $\angle AOB$ 二邊之外引任意直線 OM, 則

$$\angle COM=\tfrac{1}{2}(\angle AOM+\angle BOM).$$

(16) 若 OM 在 $\angle AOB$ 二邊之間,則

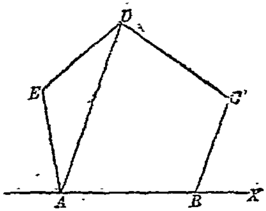
$$\angle COM=\tfrac{1}{2}(\angle AOM\sim\angle BOM).$$



(17) 斜摺方紙之一隅,則其一邊之一部分與餘一部分所成角之等分線垂直於摺痕. 證之.

第二章　三角形

40. 定義17. 多角形.(1)



多角形謂以諸直線所圍平面之一部分.

如圖,ABCDE為以五直線所圍之多角形.

41. 定義18. 邊,(2)周.(3)

圍多角形之直線中界形之部分曰多角形之邊. 一切邊長之和曰多角形之周.

如圖 AB, BC, CD,…為多角形之邊,而 AB+BC+…+EA 為多角形之周.

42. 定義19. 頂點.

多角形中各角之頂點為此多角形之頂點,或曰角頂.

43. 定義20. 內角,(4)外角.(5)

多角形中相隣二邊所夾形內之角曰多角形之內角. 一邊及隣邊延線所夾之角曰多角形之外角. 僅言多角形之角者指其內角.

如上圖, ABC, BCD,…為多角形 ABCDE 之內角,而 CBX

(1) 多角形 Polygon.　(2) 邊 Side.　(3) 周 Perimeter.
(4) 內角 Interior angle.　(5) 外角 Exterior angle.

爲其外角之一.

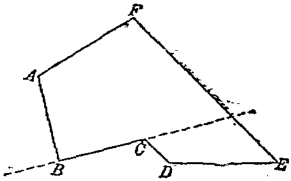
44. 定義21. 對角線.[1]

連結多角形中不相隣二角頂之直線曰多角形之對角線.

如前圖中AD爲對角線之一.

45. 定義22. 凸多角形,[2]**凹多角形.**[3]

以多角形之各邊向兩方面無限延長而多角形全在線之一傍者曰凸多角形. 否則爲凹多角形.



如40款中之圖爲凸多角形, 右圖爲凹多角形.

46. 定義23. 正多角形.[4]

邊皆相等及角皆相等之多角形曰正多角形.

47. 定義24. 三角形.[5]

有三個邊之多角形曰三角形. 用△作三角形之記號.

例如三角形ABC記爲△ABC.

48. 定義25. 四角形,[6]**五角形,**[7]**六角**

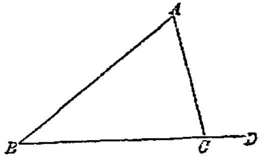
(1) 對角線 Diagonal. (2) 凸多角形 Convex polygon.
(3) 凹多角形 Concave polygon. (4) 正多角形 Regular polygon.
(5) 三角形 Triangle. (6) 四角形 Quadrilateral. (7) 五角形 Pentagon.

形,[1]等.

有四邊,五邊,六邊,….之多角形名曰四角形,五角形,六角形,….或曰四邊形,五邊形,六邊形,….

49. 定義26. 底邊,[2]頂點.

三角形可視作立於其一邊之上,如此者名其一邊曰三角形之底邊,或略曰底. 對此底邊之角頂特名曰三角形之頂點.



如圖,△ABC中邊BC爲底邊,則A爲其頂點.

50. 定義27. 內對角.[3]

三角形之三個內角中,不與其一外角隣接之二個內角爲此外角之內對角.

如上圖,∠ACD爲△ABC之外角,則∠ABC及∠CAB爲∠ACD之內對角.

51. 定義28. 等邊三角形,[4]二等邊三角形,[5]不等邊三角形.[6]

三角形從邊之關係分成三種:

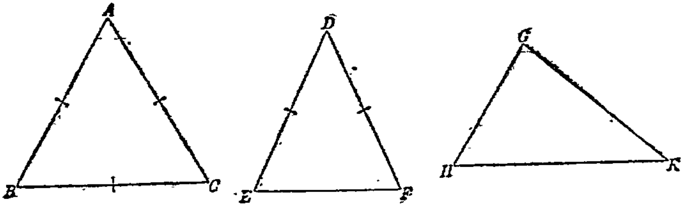
(a) 三角形之三邊互相等者曰等邊三角

(1) 六角形 Hexagon. (2) 底邊 Base.
(3) 內對角 Interior and opposite angle. (4) 等邊三角形 Equilateral triangle.
(5) 二等邊三角形 Isosceles triangle. (6) 不等邊三角形 Scalene triangle.

形.

(b) 三角形之二邊相等者曰二等邊三角形.

(c) 三角形之三邊各不相等者曰不等邊三角形.



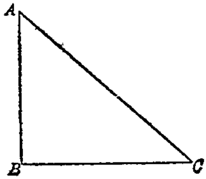
(a)　(b)　(c)

二等邊三角形恒以二等邊之交點爲其頂點,對此之邊爲其底邊. 如圖(b)中D爲二等邊三角形DEF之頂點,而EF爲其底邊.

52. 定義29. 直角三角形,[1]鈍角三角形,[2]銳角三角形.[3]

三角形又從其角之關係分成三種:

(a) 三角形之一角爲直角者曰直角三角形.



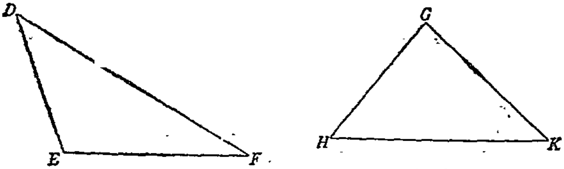
(a)

(b) 三角形之一角爲鈍角

(1) 直角三角形 Right-angled triangle. (2) 鈍角三角形 Obtuse-angle triangle. (3) 銳角三角形 Acute-angled triangle.

者曰鈍角三角形.

(c) 三角形之三角皆爲銳角者曰銳角三角形.



(b) (c).

【註】 三角形僅能有一個直角或一個鈍角,且不能同時有一直角及一鈍角視定理24可知.

【注意】 若二等邊三角形在頂點之角爲直角則有時名之曰直角二等邊三角形.

53. 定義30. 斜邊.[1]

直角三角形中對直角之邊曰斜邊.

如在上之圖(a)中,B爲直角,則AC爲其斜邊.

54. 定義31. 合同形.[2]

以二個多角形相重而可合而爲一,則此二個多角形曰全相等,[3] 或曰合同形. 表合同形之記號爲≡或≌.

55. 定理六.

三角形之一邊比餘二邊之和小而比其差大.

(1) 斜邊 Hypotheuse. (2) 合同形 Congruent figure.
(3) 全相等 Identically equal.

在△ABC中;

(i)　$BC<CA+AB$;

(ii)　$BC>CA-AB$.

【證】(i)　線分BC為二點B, C間之最短距離;(公理2)

故　$BC<CA+AB$.

倣此　$CA<AB+BC$,

$AB<BC+CA$.

(ii)　以上之第二式書作

$BC+AB>CA$;

從此不等式之兩邊減去AB,則

$BC>CA-AB$.

倣此,　$AB>BC-CA$,

$CA>BC-AB$.

【注意】以上二結果可表成一個不等式

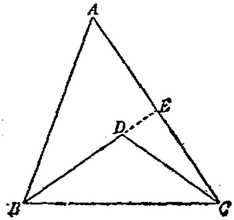
$CA+AB>BC>CA-AB$.

【註】CA, AB之大小不一定,則可書作

$BC>CA\backsim AB$.

56. 定理七.

從三角形內一點至其一邊之兩端所引二線分之和比他二邊之和小.



D為△ABC內之一點,連結DB, DC,

則　$DB+DC<AB+AC$.

【證】延長BD會邊AC於E,則

$BD+DE<AB+AE$; (定理五)

又　$DC<DE+EC$;

此二不等式左右各相加,且從所得結果中兩邊減去DE,

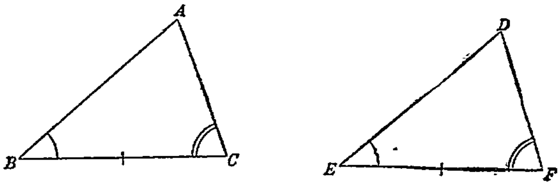
則 $BD+DC<AB+AE+EC$;

然 $AE+EC=AC$,

故 $BD+DC<AB+AC$.

57. 定理八.

一三角形之一邊及其兩端之角各等於他一三角形之一邊及其兩端之角,則此兩三角形爲合同形.



在兩三角形ABC, DEF中,

$$\begin{cases} BC=EF, \\ \angle B=\angle E, \\ \angle C=\angle F; \end{cases}$$

則 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.

【證】 移置$\triangle DEF$於$\triangle ABC$之上,而令EF與BC相重,E與B合,D與A皆在邊BC之同傍;

則因 $EF=BC$, (假設)

而F與C合;

又因 $\angle E=\angle B$, (假設)

故邊ED與邊BA相重,其一端D可落於BA上或其延線上;

又 $\angle F=\angle C$. (假設)

故邊FD與邊CA相重,而其一端D可落於CA上或其延線

上;

D點既同時在BA,CA二邊之上,故必與BA,CA之交點A合;

由此二個三角形合而爲一;

故　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

58. 系.

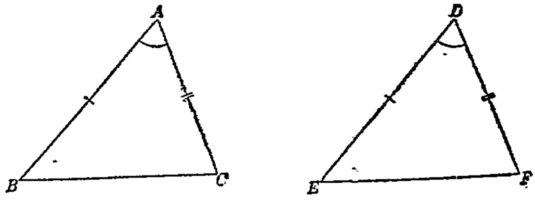
在定理內之二個三角形中,對於等角之邊相等,對於等邊之角亦相等.

如上已證得AB與DE,AC與DF,∠A與∠D各相重合;

故　$AB=DE,\quad AC=DF,\quad \angle A=\angle D.$

59. 定理九.

一個三角形之二邊及其夾角各等於他一個三角形之二邊及其夾角,則此兩三角形爲合同形.



在△ABC及△DEF中,

$$\begin{cases} AB=DE, \\ AC=DF, \\ \angle A=\angle D; \end{cases}$$

則　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$

【證】　移置△DEF於△ABC上,令D與A合,DE與

AB相重,且DF,AC皆在AB之同傍;

因 $DE=AB,$ (假設)

故E與B合;

因 $\angle D=\angle A,$ (假設)

故邊DF與AC相重;

又因 $DF=AC;$ (假設)

故F與C合;

二邊EF,BC之二端既各相合,故此二邊不得不相重;故兩三角形合而爲一,

即 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF.$

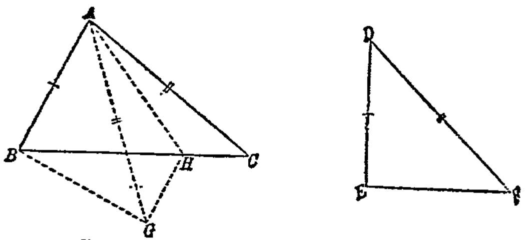
60. 系.

在前定理中,對於等邊之角各相等,對於等角之邊亦相等.

即 $\angle B=\angle E,\quad \angle C=\angle F,\quad BC=EF.$

61. 定理十.

一個三角形之二邊各等於他一個三角形之二邊,而其夾角不相等,則其第三邊不相等而對大角之邊較大.



在$\triangle ABC$,$\triangle DEF$中,

$$\begin{cases} AB=DE, \\ AC=DF, \\ \angle BAC>\angle EDF; \end{cases}$$

則 $$BC>EF.$$

【證】 移置$\triangle DEF$於$\triangle ABC$上,令DE與AB相重,D與A合,且F及C在AB之同傍;

則因 $$DE=AB,$$

故E與B合;

因 $$\angle EDF<\angle BAC,$$

故邊DF可落於$\angle BAC$之內,如AG之位置;

由此邊EF落於BG之位置;

引$\angle GAC$之等分線AH,與邊BC會於H;

連結GH;

則在$\triangle GAH$, $\triangle CAH$中,

$$\begin{cases} AG(\text{即 }DF)=AC, & \text{(假設)} \\ AH\text{共有}, \\ \angle GAH=\angle CAH; \end{cases}$$

$$\therefore \quad HG=HC; \qquad \text{(定理九)}$$

而 $$BH+HG>BG; \qquad \text{(定理六)}$$

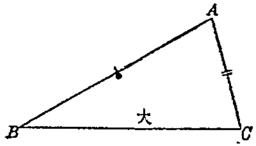
然 $$BH+HG=BH+HC=BC,$$

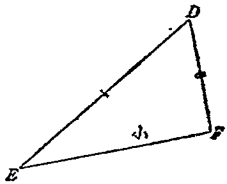
$$BG=EF;$$

$$\therefore \quad BC>EF.$$

62. 定理十一. (定理十之倒)

一個三角形之二邊各等於他一個三角形之二邊,而其第三邊不等,則二邊之夾角不相等,而對於較大之第三邊者大.





在△ABC,△DEF中,

$$\begin{cases} AB=DF, \\ AC=DF, \\ BC>EF; \end{cases}$$

則 $\angle A>\angle D.$

【證】 若云$\angle A \ngtr \angle D$,則不可不$\angle A=\angle D$,

或 $\angle A<\angle D;$

然不能$\angle A=\angle D;$

何以故,以若使$\angle A=\angle D$,則當$BC=EF$(定理九),而與假設相背故;

又不能$\angle A<\angle D;$

何以故,以若使$\angle A<\angle D$,則當$BC<EF$(定理十),而亦與假設相背故;

卽 $\angle A\neq\angle D$,及$\angle A\nless\angle D;$

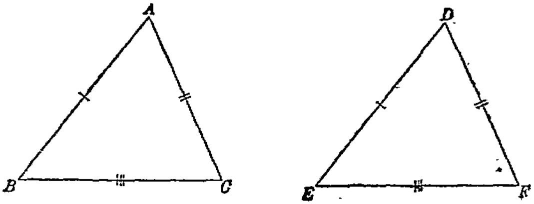
故 $\angle A>\angle D.$

63. 定理十二.

一個三角形之三邊各等於他一個三角形之三邊,則此兩三角形爲合同形.

在△ABC,△DEF中,

$$\begin{cases} AB=DE, \\ AC=DF, \\ BC=EF; \end{cases}$$



則　　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

【證】　比較二角$\angle A$, $\angle D$之大小,不出以下三種之一:

(a)　$\angle A > \angle D$;　(b)　$\angle A < \angle D$;　(c)　$\angle A = \angle D$.

若云$\angle A > \angle D$,則當$BC > EF$;　　(定理十)

若云$\angle A < \angle D$,則當$BC < EF$;　　(同上)

此皆與假設相背,不可;

故不得不$\angle A = \angle D$.

由是在二個三角形ABC, DEF中,

$$\begin{cases} AB = DE, \\ AC = DF, \\ \angle A = \angle D; \end{cases}$$

故　　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.　　(定理九)

64.　系.

在前定理之二個三角形中,對於等邊之角各相等.

即　　$\angle A = \angle D$,　$\angle B = \angle E$,　$\angle C = \angle F$.

【注意】　合同三角形之應用極廣,今更約舉之如下:

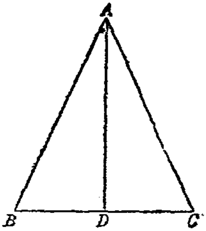
二個三角形可合同之要件

(1) 一邊及其兩端之角各相等; (定理八)
(2) 二邊及其夾角各相等; (定理九)
(3) 三邊各相等. (定理十二)

65. 例.

例一. 等分三角形一角之直線垂直於對此角之邊,則此三角形爲二等邊三角形.

直線AD二等分△ABC之一角A而垂直於BC,則△ABC爲二等邊三角形.



【證】 在△ABD,△ACD中,

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle CAD, & \text{(假設)} \\ \angle ADB = \angle ADC = R, & \text{(定理二)} \\ AD\text{共有}; \end{cases}$$

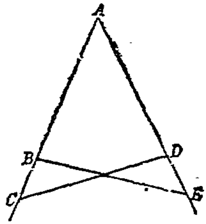
∴ AB=AC, (定理八)

卽ABC爲二等邊三角形.

例二. 設一角,頂點爲A,在其一邊上有二點B, C,在他一邊上有二點D, E,而AB=AD, AC=AE,則BE=CD.

【證】 在△ABE,△ADC中,

$$\begin{cases} AB = AD, & \text{(假設)} \\ AE = AC, & ,,\ ,, \\ \angle A\text{共有}; \end{cases}$$

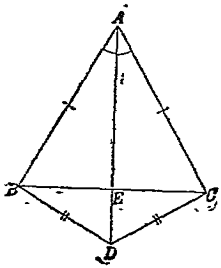


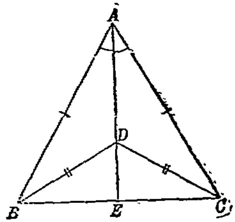
故由定理九,

BE=CD.

例三. 二個二等邊三角形有同一底邊,則連結其頂點之直線垂直等分其底.

(垂直等分者,謂旣爲底邊之垂線又等分之也).





ABC, DBC 為有同一底邊 BC 之二個二等邊三角形,連結其頂點之直線 AD 交 BC 於 E,則

$$BE=EC, \quad AE\perp BC.$$

【證】　在 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC, & \text{(假設)} \\ BD=CD, & \\ AD\text{共有}, & \end{cases}$$

故二個三角形相等而

$$\angle BAD=\angle CAD; \qquad \text{(定理十二)}$$

又在 $\triangle ABE$, $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC, \\ AE\text{共有}, \\ \angle BAE=\angle CAE, \end{cases}$$

故　$BE=EC,$　(定理九)

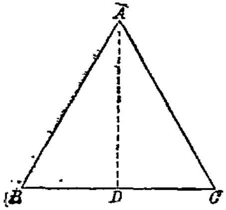
$\angle AEB=\angle AEC;$　,,

由此　$AE\perp BC.$　(定義 11)

66. 定理十三.

二等邊三角形中,對於等邊之角相等.

在 $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$, 則 $\angle B=\angle C$.



【證】 連結頂點A及底邊之中點D;

則在 $\triangle ABD$, 及 $\triangle ACD$ 中,

$\begin{cases} AB=AC, & \text{(假設)} \\ BD=CD, & \text{,,} \\ AD\text{共有}. \end{cases}$

$\therefore \quad \angle B=\angle C.$ (定理十二)

67. 系一.

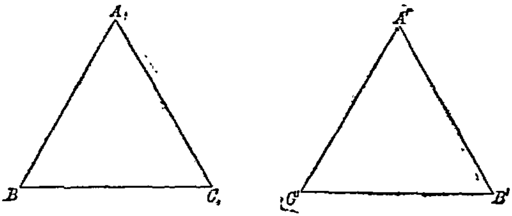
連結二等邊三角形頂點及底邊中點之直線,等分頂角(在頂點之角),且垂直於底.

68. 系二.

等邊三角形之三角互相等.

69. 定理十四. (定理十三之逆)

三角形之二角相等,則此三角形爲二等邊三角形.



在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\angle C$, 則 $AB=AC$.

【證】 $\triangle A'B'C'$ 爲 $\triangle ABC$ 覆置之圖形,而 A', B', C' 各

對應於A, B, C;

則因 $\angle B=\angle C$, (假設)

$$\begin{cases}\angle C'=\angle B,\\ \angle B'=\angle C,\\ C'B'=BC;\end{cases}$$

故二個三角形A'C'B', ABC全相等,而

$A'C'=AB$; (定理八)

然 $A'C'=AC$,

$\therefore AB=AC$.

70.　系.

三角形之三角互相等,則此三角形爲等邊三角形.

71.　定義32.　正三角形.[1]

等邊三角形又曰正三角形.

此事從定義23,定理十三之系二,及定理十四之系可知之.

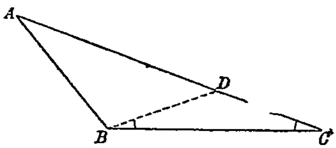
72.　定理十五.　(定理十四之否).

三角形之二角不相等,則對此之邊亦不相等,而大角所對之邊大.

在 $\triangle ABC$ 中,

$\angle ABC>\angle ACB$,

則 $AC>AB$.



【證】　先, $AC\neq AB$;

何以故,以若使 $AC=AB$,則當

(1) 正三角形 Equilateral triangle.

$\angle ABC = \angle ACB$，而與假設相背故；

次，從 B 引直線 BD，使 $\angle DBC = \angle DCB$；

則因 $\angle ABC > \angle ACB$，　(假設)

故 BD 可在 $\angle ABC$ 內，而會 AC 於 D；

由是 $\triangle DBC$ 爲二等邊三角形，而 $DB = DC$；　(定理十四)

又在 $\triangle ADB$ 中，$AD + DB > AB$，　(定理六)

或　$AD + DC > AB$；

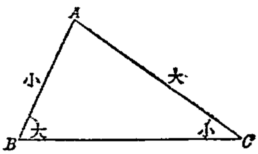
卽　$AC > AB$.

73. 定理十六. (定理十五之倒)

三角形二邊不相等，則對此之角亦不相等，而大邊所對之角大.

在 $\triangle ABC$ 中，$AC > AB$，則

$\angle ABC > \angle ACB$.



【證】 若云 $\angle ABC \ngtr \angle ACB$，

則必　$\angle ABC = \angle ACB$，

或　$\angle ABC < \angle ACB$；

然 $\angle ABC = \angle ACB$ 時，$AC = AB$；　(定理十四)

又 $\angle ABC < \angle ACB$ 時，$AC < AB$；　(定理十五)

此皆與假設相背，不可；

由此 $\angle ABC \neq \angle ACB$，又 $\angle ABC \nless \angle ACB$；

故不可不　$\angle ABC > \angle ACB$.

74. 定義 33. 中線.[1]

連結三角形頂點及其對邊中點之直線名曰三角形之中線.

(1) 中線 Median.

75. 定義34. 高.[1]

從三角形頂點至其對邊所引垂線之長名曰三角形之高.

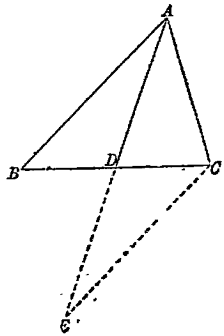
【註】 三角形有三個中線及三個高.

76. 例.[2]

例. AD爲△ABC之一中線,則

(i) $AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$;

(ii) $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.



【證】 (i) $AD>AB-BD$, (定理六)

又 $AD>AC-CD$; (定理六)

$\therefore$ $2AD>AB+AC-BD-CD$,

卽 $2AD>AB+AC-(BD+CD)$;

然 $BD+CD=BC$,

$\therefore$ $2AD>AB+AC-BC$;

$\therefore$ $AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

(ii) 延長AD至E,令$DE=AD$;

連結CE;

則在△CDE, △BDA中,

$\begin{cases} CD=BD, & \text{(假設)} \\ DE=AD, & \text{(本題)} \\ \angle CDE=\angle ADB, & \text{(定理五)} \end{cases}$

$\therefore$ $CE=AB$; (定理九)

次,在△ACE中, $AE<CE+AC$; (定理六)

然 $AE=2AD$, (本題)

(1) 高 Height, Altitude.　(2) 例 Example.

$\therefore \quad 2AD<AB+AC;$

$\therefore \quad AD<\frac{1}{2}(AB+AC).$

問　題

(1) 從二等邊三角形底邊之兩端各作底角之等分線至對邊,此二線之長相等.

(2) 設一角,頂點為 A,在其各邊上各定一點 B, C,令 AB=AC,則從此角等分線上任意點 O 至 B, C 之距離相等.

(3) 設一角,頂點為 O,從其等分線上任意點 P 引等分線之垂線,與角之二邊會於 B, C,則 △OAB 為二等邊三角形.

(4) 等分二等邊三角形頂角之直線垂直等分底邊.

(5) 三角形之一個中線垂直於其所會之邊,則此三角形為二等邊三角形.

(6) 三角形之外角比其內對角之任意一角大.

(7) 從二等邊三角形底邊兩端所引之二個中線相等.

(8) AD 為 △ABC 之一中線,若 ∠ADB 為鈍角則 AB>AC.

(9) 述前題之倒,且證之.

(10) 在 △ABC 中, AB=18 寸, BC=15 寸, CA=12.7 寸;則其三個內角中,孰為最大,孰為最小?

(11) 有不相交之二線分 AB, CD,若連結其端之二線 BC, AD 相交,則 AB+CD<AD+BC.

(12) 四邊形之最大邊與最小邊相對,則隣於最小邊之角比對此之角大.

(13) 從三角形內一點至各頂點距離之和比此三角

形之周小而比周之半分大.

(14) 四邊形中二個對角線之和比其周小而比周之半分大.

(15) 三角形三個中線之和比其周小而比周之半分大.

(16) 在正三角形之各邊上或各邊之延線上依次各取一點,各與頂點之距離相等,則連結此三點之直線亦成一正三角形.

(17) 二點A, B在直線XY之同傍,從此二點至直線上之一點P引線分AP, BP,而$\angle APX=\angle BPY$,又在此直線上取任意點Q而連結AQ, BQ,則$AP+BP<AQ+BQ$.

(18) 不用公理2而用定理八及十五證明定理六.

(19) 以$\triangle ABC$之二邊BA, CA各延長至B′, C′,令$AB'=AB$, $AC'=AC$,又BC, B′C′之中點各爲M, M′,則

(i) $B'C'=BC$;

(ii) M, A, M′三點在同一直線上;

(iii) A爲此線分之中點.

(20) 移置定理十中之圖,令G點及C點位於AB之兩傍而證之.

(21) 用定理十六直接證明定理十一.

(22) 以證定理十四之方法用定理八證明定理九.

(23) 直接證明定理十六.

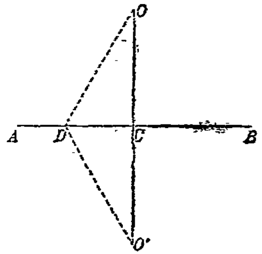
第三章　垂線及斜線

77. 定理十七.

從一直線外一點所引此直線之垂線有

一無二.

從直線AB外之一點O可向AB引一垂線,而僅能引一垂線.



【證】 (i) 以AB爲摺痕反摺圖形,令其在AB上之部分摺至與下一部分相重;O落於O′之位置;
再以後一圖形復至原位置,引線分OO′,與AB交於C點;
則 $OO' \perp AB$;
何則,若以此新圖形再反摺之,則O點至O′點,而線分CO可落於CO′之位置,故

$$\angle ACO = \angle ACO';$$

故由定義11, $AB \perp OO'$;
從此, $OO' \perp AB$.

(ii) 連結AB上之任意點(C不在內)D及O引直線OD,則OD爲AB之斜線;
何則,連結O,O′之直線僅有OO′一個; (公理2系)
故DO′不能爲OD之延線;
由此二隣角ODC,O′DC之外邊不在同一直線上,故不互相爲補角;
卽 $\angle ODC + \angle O'DC < 2R$;
然 $\angle ODC = \frac{1}{2}(\angle ODC + \angle O'DC)$,

$$\therefore \quad \angle ODC < R;$$

卽OD爲AB之斜線;
故從O點向AB之垂線僅有OC一個.

78. 定義35. 距程.[1]

從一直線外一點向此直線引垂線及斜線,此二線足之距離名曰斜線之距程.

如在前款之圖中,CD爲斜線OD之距程.

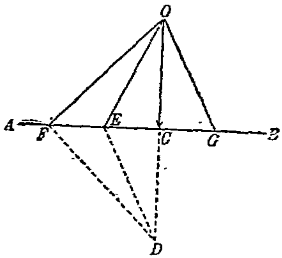
79. 定理十八.

從一直線外一點向此直線所引諸線分之中.

(i) 垂線最短.

(ii) 有等距程之二斜線相等.

(iii) 有不等距程之二斜線不等,而具有大距程之斜線較大.



從直線AB外之一點O向AB引垂線OC及斜線OE, OF, OG,而

$$CE = CG,$$

$$CF > CG,$$

則(i)　$OC < OE$;

(1) 距程 Departure.

(ii) $OE=OG$;

(iii) $OF>OG$.

【證】 延長OC至D,令$CD=OC$;連結ED, FD;則(i)在$\triangle OCE$, $\triangle DCE$中,

$$\begin{cases} CD=CO, \\ CE\text{共有}, \\ \angle DCE=\angle OCE=R\angle; \end{cases}$$

$\therefore$ $ED=EO$; (定理九)

又在$\triangle OED$中,

$$OD<OE+ED,$$

卽 $$2OC<2OE;$$

$\therefore$ $OC<OE$;

E點爲直線AB上C點外之任意點,故OC爲從O向AB所引諸線分中之最短線分.

(ii) 在$\triangle OCE$, $\triangle OCG$中,

$$\begin{cases} CE=CG, & \text{(假設)} \\ OC\text{共有}, \\ \angle OCE=\angle OCG=R\angle; \end{cases}$$

$\therefore$ $OE=OG$.

(iii) 從(i) $ED=EO$;

倣此可證明 $FD=FO$;

E爲$\triangle OFD$內之一點,故

$$OE+ED<OF+FD, \quad \text{(定理七)}$$

卽 $$2OE<2OF;$$

$\therefore$ $OE<OF$;

然在(ii)中已知 $OE=OG$;

$\therefore$ $OG<OE$.

80. 系一. (定理十八之倒)

從一直線外一點向此直線所引諸線分之中,

(i) 最短者爲垂線;

(ii) 相等二斜線之距程相等;

(iii) 不等二斜線之距程不等,大斜線之距程較大.

81. 系二.

從一直線外一點向此直線僅可引相等二斜線.

82. 定義 36. 點與直線之距離.

一點與一直線之距離,爲從此點向其直線所引垂線之長.

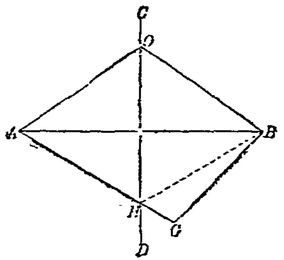
83. 定理十九.

過線分之中點而引此線分之垂線,則

(i) 垂線上之一切點與此線分兩端之距離相等;

(ii) 垂線外之一切點與此線分兩端之距離不相等.

F 爲線分 AB 之中點,過 F 引 AB 之垂線 CD; O 爲 CD 上之任意點, G 爲 CD 外之任意點,則



(i) OA=OB;

(i) GA≠GB.

【證】 (i) OF⊥AB, (假設)

FA=FB; (,, ,,)

∴ OA=OB. (定理十八(ii))

(ii) GA, GB二者之一(例如GA)交CD於H,連結BH;則H爲垂線CD上之一點;故

HA=HB;

而在△BHG中,

BG<GH+HB,

卽 BG<GH+HA;

∴ BG<GA.

84. 系. (定理十九之倒).

(i) 與線分兩端等距離之一切點在此線分之垂直等分線上.

(ii) 與線分兩端不等距離之一切點不在此線分之垂直等分線上.

此二者中(i)爲定理十九(ii)之倒否,(ii)在定理十九( )之倒否,故定理十九既知爲眞確,則此系亦必眞確可知.

【注意】 二定點決定一直線,故連結線分二端等距離二點之直線爲線分之垂直等分線可知.

85. 定義37. 軌跡[1]

一線或諸線係具有同一性質之一切點所成,而此線外之點更無其性質,則此一線或諸線爲滿足此性質之點之軌跡.

由此定義,上款之定理可述之如下:

與線分兩端等距離點之軌跡爲此線分之垂直等分線.

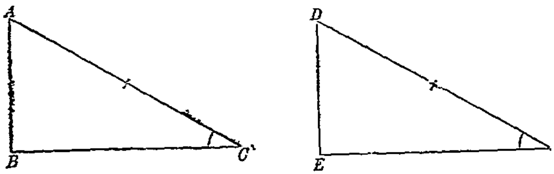
或易一語以言之如下:

與二定點等距離點之軌跡爲連結二點所得線分之垂直等分線.

【註】 初等平面幾何學所論之軌跡僅爲直線及圓周. 在第二編中當更說明之

86. 定理二十.

二個直角三角形之斜邊及其一端之角各相等,則此二形爲合同形.



在二個直角三角形ABC, DEF中,

(1) 軌跡 Locus.

$$\begin{cases} \text{斜邊} AC=DF, \\ \angle C=\angle F, \end{cases}$$

則 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.

【證】 移置$\triangle DEF$於$\triangle ABC$之上,令DF與AC相重,D與A合,且E與B皆置於斜邊AC之同傍;

則因 $DF=AC$, (假設)

故F與C合;

因 $\angle F=\angle C$, (假設)

故邊FE與邊CB相重;

由是E點可落於CB上或其延線上;

又 $DE\perp FE$, (假設)

故亦 $DE\perp CB$;

然 $AB\perp CB$, (假設)

而從A點至直線CB僅可引一個垂線; (定理一)

故DE與AB不得不相重;

即E點不可不同時在CB及AB之上;

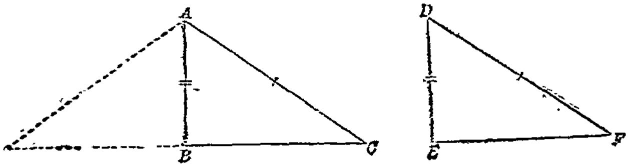
故E與B合;

由此$\triangle DEF$與$\triangle ABC$合而為一;

故 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.

87. 定理二十一.

二個直角三角形之斜邊及又一邊各相等,則此二形為合同形.



在二個直角三角形ABC, DEF中,

$$\begin{cases} 斜邊\ AC=DF, \\ AB=DE, \end{cases}$$

則　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

【證】 移置$\triangle DEF$於$\triangle ABC$上,令DE與AB相重,D與A合,且令F及C在邊AB之同傍;

則因　$DE=AB$,　(假設)

而E與B合;

因　$\angle E=\angle B(=R\angle)$,

而邊EF與邊BC相重;

故二斜邊AC, DF可爲從直線BC外一點A向此直線所引相等之二斜線;

故從定理18系一,其距程相等,即

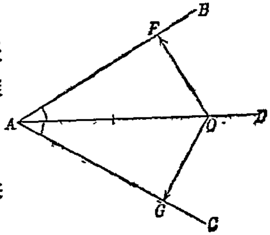
$$EF=BC;$$

故F與C合,而$\triangle DEF$與$\triangle ABC$合而爲一;

由此　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

88. 定理二十二.

一角等分線上之任意點與此角二邊之距離相等.



從$\angle BAC$二等分線AD上之任意點O向此角之二邊AB, AC引垂線OF, OG,　(定義36)

則　$OF=OG$.

【證】 在二個直角三角形AOF, AOG中,

斜邊AO共有，
$\angle OAF=\angle OAG$，　(假設)

$\therefore\ \triangle AOF\equiv\triangle AOG$；　(定理二十)

由此　$OF=OG$.

89. 定理二十三. (定理二十二之倒)

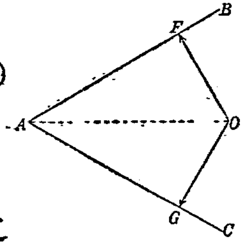
與一角二邊等距離之點在此角之等分線上.

從$\angle BAC$內之一點O向此角之二邊AB, AC, 引垂線OF, OG, 若$OF=OG$, 且連結OA,

則　$\angle OAF=\angle O'$

【證】　在二個直角三角形AOF, AOG中,

斜邊AO共有,
$OF=OG$,　(假設)



$\therefore\ \triangle AOF\equiv\triangle AOG$; (定理二十一)

從此　$\angle OAF=\angle OAG$;

故O點在$\angle BAC$之等分線上.

90. 系.

(i) 不在一角等分線上之一切點與此角二邊之距離不相等. (定理二十三之倒否).

(ii) 與一角二邊距離不相等之一切點不在此角之等分線上. (定理二十二之倒否).

【註】　在此系中,(i)與(ii)互相爲倒.

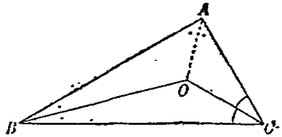
91. 定理二十四.

一角之等分線爲與此角二邊等距離點

之軌跡.

92. 例.

例. 三角形之三個等分線會於一點.



△ABC中二角B,C之等分線BO,CO交於O,則O亦在∠A之等分線上.

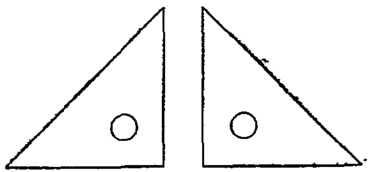
【證】 O在∠B之等分線上,故與二邊AB,AC之距離相等; (定理二十二)
又O在∠C之等分線上,故與其二邊BC,CA之距離相等; (定理二十二)
卽O在二邊CA,AB等距離之處;
故O在CA,AB所夾角之等分線上. (定理二十三)

【注意】 在此例中之O點名曰△ABC之內心.[1]

93. 畫垂線之器械.

畫直線時須用矩,矩之形雖有種種,而在初等幾何學之作圖中,用一對三角板足矣.

學者備三角板,可備一對全相等之直角三角板,則用時較便.



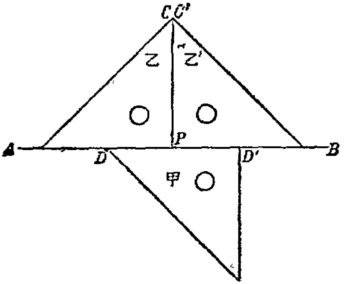
三角板可用之畫垂線. 惟未畫之前,先須檢其三邊

(1) 內心 Incentre.

是否爲眞確之直線形狀(視19款),更須察其直角是否爲眞確之直角,察之之法如下.

94. 檢察三角板法.

沿直線AB置一三角板(甲)令其一邊DD′與AB相合,再以一三角板(乙)之一邊DP密接於(甲)之邊DD′而沿其一邊CP引直線CP. 次,固定(甲)之位置而翻置(乙),使爲(乙′)之位置,且令P仍置於初時P之位置,而沿其一邊引直線C′P.



若直線C′P與直線CP合而爲一,則∠CPD爲直角,即

$$CP \perp AB;$$

即三角板(乙)爲眞確之直角三角形.

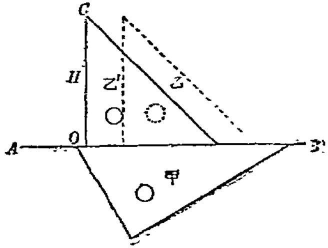
(甲)與(乙)爲合同形.(乙)既爲眞確之直角三角形,則(甲)自亦爲眞確之直角三角形.

95. 用三角板畫垂線法.

(i) 過一所設直線上之一點畫此直線之垂線.

欲過直線AB上之一點O引AB之垂線,法以一三角板(甲)之一邊沿此AB置之,再以又一三角板(乙)密接於(甲),固定(甲)而滑動(乙)至取(乙′)之位置,爰沿其一邊OC用鉛筆或

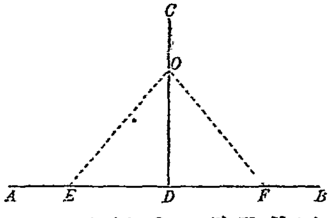
畫圖筆引過O之直線.



(ii) 過一所設直線外之一點畫此直線之垂線.

若所設點H在直線AB之外,畫法可與前一種全然相同.

96. 考驗垂線法.



直線CD立於直線AB之上,欲驗是否$CD\perp AB$;法於D點之左右取相等距離DF,DF,從CD上之任意點O引二直線OE,OF;若

$$OE=OF,$$

則　　$$CD\perp AB;$$

否則CD爲AB之斜線

問題

(1) 從三角形頂點至底上任意點所引之線分比二邊中之大者小.

(2) 若三角形之一個高分其底邊爲不相等之二部分,則大部分所鄰接之邊較大.

(3) 從二等邊三角形底邊之兩端向其對邊所引之二垂線相等.

(4) 在∠BAC之二邊上各取一點B,C,而令AB=AC,從B,C各引AB,AC之垂線,則此二垂線之交點在∠BAC之二等分線上.

(5) 從三角形底之兩端向其對邊所引垂線之長相等,則此三角形爲二等邊三角形.

(6) 若直角三角形之一銳角等於他銳角之二倍,則斜邊等於最小邊之二倍.

(7) △ABC二角B,C等分線之交點,與此二外角等分線之交點在∠A之二等分線上.

(8) 設二點及一直線,在此直線上求一點,令此點與二定點距離之和爲最小.

(i) 二點在直線兩傍時若何?

(ii) 二點在直線同傍時若何?

(9) 設二點及一直線,在此直線上求一點,令此點與二定點距離之差爲最大.(如前題分二種觀察之).

(10) 在所設銳角之二邊間設一點,再在其間求第二點,令從第一點至角之一邊所作之垂線與從第二點至角之他一邊所作之垂線,及此二垂足之距離,三者之和爲最

第四章　平行直線

97. 定義38. 平行直線.[1]

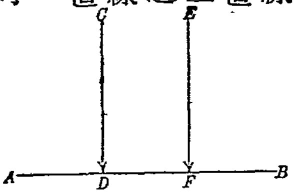
在同一平面上之二直線無論至何處不相交者曰平行直線,或略曰平行線,又曰二直線互相平行.

用 // 作平行線之記號.

例如直線AB平行於CD,記之為AB//CD.

98. 定理二十五.

垂直於同一直線之二直線互相平行.



$CD \perp AB, \quad EF \perp AB,$

則　　$CD // EF.$

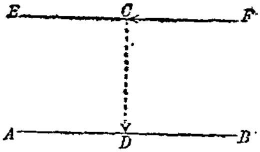
【證】 若CD, EF不相平行則必會於某一點;
然則從其交點可向一直線AB引二個垂線CD, EF矣;
此與定理十七相背,不可;
故CD, EF不可相會;
即　　$CD // EF.$

99. 系.

過一直線外一點可引此直線之一個平

(1) 平行直線 Parallel straight lines, 或 Parallels.

行直線.



AB爲所設直線,C爲所設點,則過C點可引平行於AB之一個直線.

【證】　從C點向AB引垂線CD;
更過C點引CD之垂線EF;
則　　$AB\perp CD$,　$EF\perp CD$;
$\therefore$　$AB//EF$.　　(定理二十五)

100. 公理IV.

過一直線外一點僅可引此直線之一個平行直線.

101. 系.

二直線平行,則交其一之直線亦必交其二.

102. 定理二十六.　(定理二十五之倒).

二直線平行,則垂直於其一之直線亦必垂直於其二.

$AB // CD$,　$EF \perp AB$,

則　$EF \perp CD$.

【證】　過F點而平行於AB之直線僅有一個;　(公理iV)

又過F點而垂直於EF之直線僅有一個;　(定理一)

今　$AB \perp EF$;　(假設)

故過F點而垂直於EF之直線平行於AB;　(定理二十五)

故從同一證法,

過F點而平行於AB之直線CD垂直於EF.

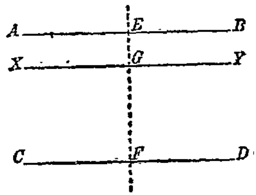
【證】　學者試不用同一證法而直接證之.

103. 定理二十七.

平行於同一直線之二直線互相平行.

$AB // XY$,　$CD // XY$;

則　$AB // CD$.



【證】　引垂直於XY之直線EF;

則　$AB \perp EF$,

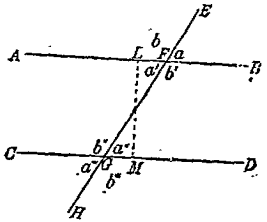
及　$CD \perp EF$;　(定理二十六)

故　$AB // CD$.

104. 定理二十八.

一直線與二個平行直線斜交,可成相等

之四個銳角及相等之四個鈍角.



直線EFGH與二個平行線AB,CD斜交,所成四個銳角爲a, a', a'', a''',四個鈍角爲b, b', b'', b'''

則 $$a=a'=a''=a''',$$

$$b=b'=b''=b'''.$$

【證】 從定理五,已知

$$a=a',\quad a''=a''';$$

尚須證明 $$a'=a'';$$

過FG之中點O引AB之垂線LOM,則此線亦爲CD之垂線;

在二個直角三角形OLF,OMG中,

斜邊OF=OG, (假設)

$\angle FOL=\angle GOM$; (定理五)

$\therefore\quad \triangle OLF\equiv\triangle OMG$; (定理二十)

從此 $$a'=a'',$$

$$\therefore\quad a=a'=a''=a'''.$$

又b, b', b'', b'''四角各爲a, a', a'', a'''之補角;

故 $b=b'=b''=b'''$. (定理二系三)

105. 定義39. 內角,[1]外角,[2]內錯角,[3]

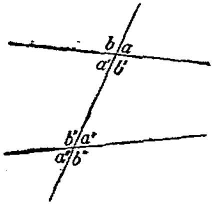
(1) 內角 Interior angles. (2) 外角 Exterior angles.

(3) 內錯角 Interior alternate angles.

外錯角,[1] 同位角,[2] 同傍內角,[3] 同傍外角.[4]

一直線與二直線相交所成八個角中從其相互之關係命名如下:

(1) **內角.** 在二直線間之角. 例如 a', b', a'', b''.



(2) **外角.** 在二直線外之角. 如 a, b, a''', b'''.

(3) **內錯角.** 在一直線兩傍而不相隣之二內角. 如 a 及 a'', b' 及 b''.

(4) **外錯角.** 在一直線兩傍而不相隣之二外角. 如 a 及 a''', b 及 b'''.

(5) **同位角.** 在一直線同傍而不相隣之內角及外角. 如 a 及 a'', b 及 b'', a' 及 a''', b' 及 b'''.

(6) **同傍內角.** 在一直線同傍之內角. 如 a' 及 b'', b' 及 a''.

(7) **同傍外角.** 在一直線同傍之外角. 如 a 及 b''', b 及 a'''.

106. 定理二十九.

(1)外錯角 Exterior alternate angles. (2)同位角 Corresponding angles.
(3)同傍內角 Interior angles on the same side.
(4)同傍外角 Exterior angles on the same side.

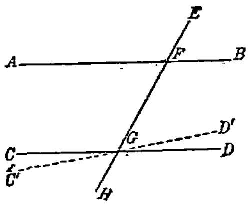
一直線與二平行線相交,則
(1) 內錯角相等;
(2) 外錯角相等;
(3) 同位角相等;
(4) 同傍內角互為補角;
(5) 同傍外角互為補角.

107. 定理三十. (定理二十八之倒).

一直線與二直線相交,而
(1) 內錯角相等,
(2) 外錯角相等,
(3) 同位角相等,
(4) 同傍內角互為補角,
(5) 同傍外角互為補角.

則此二直線互相平行.

此五個倒定理中證明其一,則其餘四個皆易於推得之,今證其第一個於下:



直線EFGH與二直線AB, CD相交,而

$\angle AFG = \angle FGD$,

則　　$AB /\!/ CD$.

【證】　過G點引AB之平行直線C′D′,

則　　$\angle FGD' = \angle AFG$;　　(定理二十八)

然　　$\angle AFG = \angle FGD$;　　(假設)

$\therefore \angle FGD' = \angle FGD$;

故直線GD′不得不與GD相重,即C′D′可與CD相合;

故　　$CD /\!/ AB$.

108. 系一.

一直線與不平行之二直線相交,則

(1) 內錯角不相等;

(2) 外錯角不相等;

(3) 同位角不相等;

(4) 同傍內角不互為補角;

(5) 同傍外角不互為補角.

109. 系二.

一直線與二直線相交,而

(1) 內錯角不相等,

(2) 外錯角不相等,

(3) 同位角不相等,

(4) 同傍內角不互為補角,

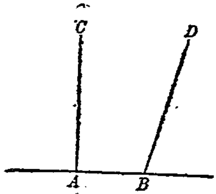
(5) 同傍外角不互為補角,

則二直線不相平行.

【註】　系一為定理三十之倒否,系二為定理二十九之倒否.

110. 例.

例一. 一直線之垂線及斜線必相會.



CA 為 AB 之垂線, DB 為 AB 之斜線,則

CA╫DB.

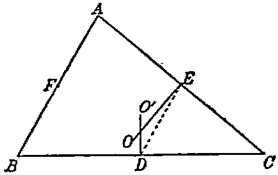
【證】 ∠CAB=R∠, (假設)

又 ∠DBA≠R∠; (假設)

由是同傍內角 CAB 及 DBA 不互為補角;

故 CA╫DB. (定理30系二)

例二. 三角形三邊之垂直等分線會於一點.



D, E, F 各為 △ABC 三邊 BC, CA, AB 之中點,過 D,E,F 而垂直於 BC, CA, AB 之三個直線會於一點.

【證】 先,證 BC, CA 之垂線 DO′, EO 必相交;

連結 DE, 則 O′DE<R∠,

OED<R∠;

由是同傍內角 ∠O′DE, ∠OED 不互為補角;

故 DO′╫EO;

故 DO′, EO 必相交;命其交點為 O.

次,證三邊之三個垂直等分線交於一點:

OD 為 B, C 等距離點之軌跡,故 O 點與 B 及 C 之距離相等;

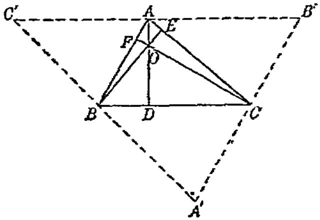
倣此, O 點與 C 及 A 之距離相等;

故從邊 AB 之中點 F 所引 AB 之垂線必過 O.

(定理二十一系)

【注意】[1] 在此例中, O 點為 △ABC 之外心.[2]

例三. 三角形之三個高會於一點.



從 △ABC 之頂點 A, B, C 各向對邊所引之垂線 AD, BE, CF 交於一點.

【證】 過 A, B, C 各引對邊之平行直線作成 △A′B′C′.

在 △ABC′, △ABC 中,

$$\begin{cases} \text{AB 共有}, & \\ \angle ABC' = \angle BAC, & \because BC' \parallel AC \ (\text{定理二十八}) \\ \angle BAC' = \angle ABC; & \because AC' \parallel BC \ (\text{定理八}) \end{cases}$$

$\therefore AC' = BC;$

倣此,從 △AB′C, △ABC 可證得

$AB' = BC;$

$\therefore AC' = AB;$

(1) 注意 Remark. (2) 外心 Circum-centre.

故A為$B'C'$之中點;

做此,B為$C'A'$之中點,C為$A'B'$之中點;

又 $\begin{cases} B'C' /\!/ BC, & \text{(本題)} \\ AD \perp BC; & \text{(假設)} \end{cases}$

$\therefore\ AD \perp B'C'$; (定理二十七)

做此, $BE \perp C'A'$,

$CF \perp A'B'$;

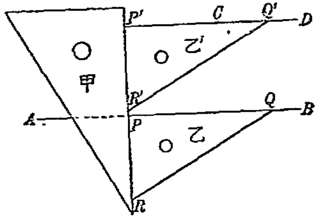
由此DA, BE, CF, 為$\triangle A'B'C'$三邊之垂直等分線;

故從例二, AD, BE, CF 會於一點O.

【注意】 在此例中,O為$\triangle ABC$之垂心.(1)

141. 用三角板畫平行線法.

過一所設點引平行於所設直線之直線.



欲作一直線令過所設一點C而與直線AB平行.

沿AB置一三角板(乙)之一邊PQ,別以一三角板(甲)密附於(乙)之一邊PR;固定(甲)而滑動(乙),令至(乙')之位置,可以鉛筆或畫圖筆沿PQ畫過C之直線CD.

問題

(1) 以$\triangle ABC$之中線AD延長至E,而令DE=AD;連

(1) 垂心 Ortho-centre.

結CE,則CE//AB.

(2) 從一角等分線上任意點引二線分各與二邊之一平行而止於又一邊上;則此二線分相等.

(3) AB//CD,而EF⊥AB, GH⊥CD,則EF//GH.

(4) 相交二直線之垂線必相交.

(5) 過二等邊三角形頂點所引平行於底邊之直線等分頂角之外角.

(6) 過三角形之各頂點引其對邊之平行線,可得與原形全相等之三個三角形.

(7) 二角之二邊兩兩平行,則此二角或相等,或互爲補角.

(8) 二角之二邊兩兩平行,則此二角之等分線或相平行,或相垂直

(9) 二角之二邊兩兩垂直,則此二角或相等,或互爲補角

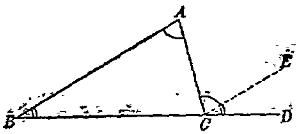
(10) △ABC二角B, C之等分線交於O,過O引BC之平行直線DOE各與AB, AC會於D, E,則DE=BD+CE.

(11) 求從一直線外一點至此直線所引線分中點之軌跡.

第五章　多角形之角

112. 定理三十一.

三角形三個內角之和等於二直角.



在$\triangle ABC$中　$\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=2R\angle$.

【證】 延長$\triangle ABC$之一邊BC至D,又過C點引邊BA之平行直線CE,

則　$\angle CAB=\angle ACE$, (定理二十八系)

$\angle ABC=\angle ECD$;

$\therefore\ \angle CAB+\angle ABC=\angle ACE+\angle ECD$,

即　$\angle CAB+\angle ABC=\angle ACD$;

兩邊加$\angle BCA$,則

$\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=\angle ACD+\angle BCA$;

然　$\angle ACD+\angle BCA=2R\angle$, (定理三)

$\therefore\ \angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=2R\angle$.

113. 系一.

三角形之外角等於其內對角之和.

114. 系二.

三角形之外角比其內對角之任意一角大.

115. 系三.

三角形之一角爲直角,則他二角均爲銳角而互相爲餘角.

116. 系四.

三角形之一角爲鈍角,則他二角均爲銳角.

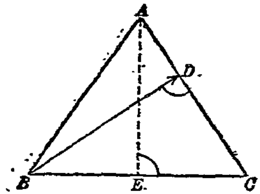
117. 系五.

一個三角形之二角各等於他一個三角

形之二角,則其第三角亦相等.

118. 例.

例一. 從二等邊三角形底之一端向其對邊所引垂線與底之夾角等於頂角之半.



BD為從二等邊三角形ABC底之一端B至其對邊AC所引之垂線,則　$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

【證】 引$\angle BAC$之等分線AE,與BC會於E;

則　$AE\perp BC$;

在$\triangle BDC$, $\triangle AEC$中,

$\angle BDC=\angle AEC=R\angle$,

$\angle BCD=\angle ACE$;

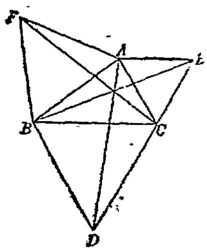
$\therefore\ \angle DBC=\angle EAC$;　(定理三十一系五)

然　$\angle EAC=\frac{1}{2}\angle BAC$,

$\therefore\ \angle DBC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

例二. 在$\triangle ABC$之各邊上向形外畫正三角形ABF, BCD, CAE,而連結AD, BE, CF;

則　$AD=BE=CF$.



【證】　正三角形之一角爲二直角之三分之一,

$\therefore\ \angle BCD=\angle ACE;$　　(定理三十一)

兩邊加$\angle BCA$,則

$$\angle BCD+\angle BCA=\angle BCA+\angle ACE,$$

卽　$$\angle ACD=\angle BCE;$$

故在$\triangle ACD$, $\triangle BCE$中,

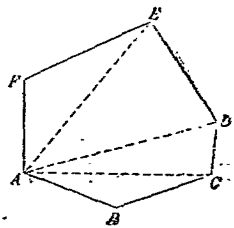
$$\begin{cases} AC=CE, \\ CD=CB, \\ \angle ACD=\angle BCE; \end{cases}$$

$\therefore\ AD=BE;$　　(定理九)

倣此,從$\triangle ABD$及$\triangle FBC$可證　$AD=CF;$

$\therefore\ AD=BE=CF.$

119. 定理三十二.



多角形內角之和等於以其邊數減2之差倍二直角.

多角形ABC…之邊數爲n,則此多角形諸內角之和等於$2(n-2)$直角.

【證】　(假定此多角形爲六角.

形).

從多角形之一個頂點A引諸對角線,則分多角形爲$(n-2)$個三角形而此諸三角形內角之總和即爲多角形諸內角之和;

然每一個三角形內角之和爲$2R\angle$;　　(定理三十一)

由是$(n-2)$個三角形諸內角之和爲$2(n-2)R\angle$;

故多角形諸內角之和爲$2(n-2)R\angle$,或$(2n-4)R\angle$.

120. 系一.

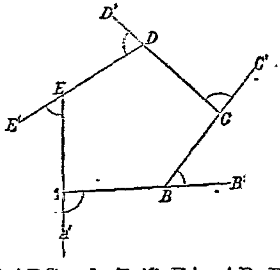
邊數爲n之正多角形每一內角爲$\frac{2(n-2)}{n}R\angle$.

121. 系二.

四邊形之四個角互相等,則其各角皆爲直角.

122. 定理三十三.

順次延長凸多角形各邊所得諸外角之和等於四直角.



以凸多角形ABC....之各邊EA, AB, BC,....各延長至A', B', C',....,則　$\angle BAA'+\angle CBB'+\angle DCC'+\cdots=4R\angle$.

【證】　$\angle EAB+\angle BAA'=2R\angle$,　　(定理三)

即 (一內角)+(隣接外角)$=2R\angle$,

多角形之邊數爲 n,則

(諸內角和)+(諸外角和)$=2nR\angle$;

然 (諸內角和)$=(2n-4)R\angle$, (定理三十二)

$\therefore$ (諸外角和)$=[2n-(2n-4)]R\angle$

$=[2n-2n+4]R\angle$

$=4R\angle$.

123. 系一.

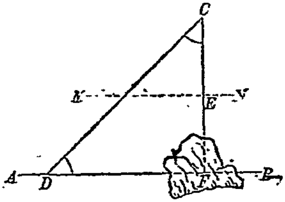
邊數爲 n 之正多角形每一外角爲$\frac{4}{n}R\angle$.

124. 系二.

正多角形之一個外角爲 p 直角,則此多角形之邊數爲$\frac{4}{p}$.

125. 簡易測量[1]法(一).

從平地上之直線 AB 外一點 C 向 AB 引垂線. 但此垂線之足係人所不能達到之處.



設在 AB 線上有一障礙之物 EF,今欲從 C 點向 AB 引垂線.

[第一法] 在 AB 線上選取一點 D,其選法當令從 D 視 C 之視線 DC 與 DB 所成之角爲一直角之半,乃引連結 C, D 之直線,(若在 D 建一標竿使從 C 視 D 之視線可準確,則不引此直線亦可),從 C 點引一直線 CE,令其與 DC 所成之角亦爲直角之半;假定 CE 與 AB 相會之點(其實不

(1) 測量 Surveying.

能相會)爲F,則在$\triangle DCF$中,

$$\angle DCF=\frac{1}{2}R\angle,\quad \angle CDF=\frac{1}{2}R\angle,$$

$$\therefore\ \angle CFD=R\angle;\qquad\text{(定理三十一)}$$

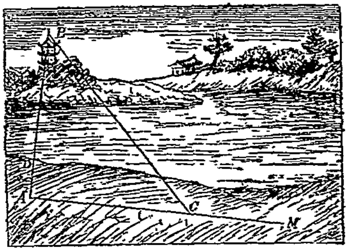
故　$CF\perp AB.$

[第二法] 引AB之平行直線MN(可應用定理二十五系),乃從C向MN引垂線CE,則

$$CE\perp AB.$$

126. 簡易測量法(二).

求從一點A至不能達到之他一點B之距離.



設A爲吾人能到之一點,B爲可望而不可即之一點,則欲知A與B之距離,必測量而後可.

法先定AB之方向,引其一部分之AD線;再引AD之垂線AM,而在AM上選擇C點,使CB之方向與CA所成之角ACB適等於直角之半,乃實量AC之長,其長卽等於AC之距離.

何則,在$\triangle ABC$中,

$$\angle A=R\angle,\quad \angle C=\frac{1}{2}R\angle,$$

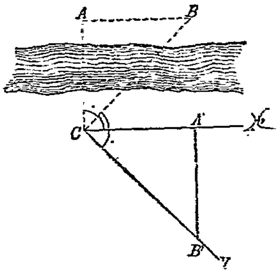
則　$$\angle B=\frac{1}{2}R\angle;$$

$$\therefore\ \angle C=\angle B;$$

$$\therefore\ AB=AC.$$

127. 簡易測量法(三).

求不能達到之二點間距離.



A, B 皆爲不能達到之點,求其間之距離,法如下:

選擇同時可見 A 及 B 之一點 C,引 CA 之垂線 CX;及 CB 之垂線 CY,

用前款之法,在 CX 上取 A′,令 CA′=CA;

又在 CY 上取 B′,令 CB′=CB;

則 $$\angle ACX=\angle BCY=R\angle;$$

$$\therefore\quad \angle ACX-\angle BCX=\angle BCY-\angle BCX;$$

$$\therefore\quad \angle ACB=\angle A'CB';$$

從 $$CA=CA',\quad CB=CB',$$

得 $$AB=A'B';$$

故實量 A′B′ 之長,則所得者即爲 A, B 之距離.

問　題

(1) 直角三角形之斜邊在三邊中爲最大.

(2) 一直線等分二等邊三角形頂角之外角,則此直線平行於其底邊.

(3) 從三角形內之一點至其一邊之兩端所引二線分之夾角比他二邊之夾角大.

(4) △ABC 中一角 A 之等分線與邊 BC 會於 E,又以

邊BC延長至D,則$2\angle AED=\angle ABD+\angle ACD$.

(5) 用本章之定理證前章之問題(9).

(6) 三角形一邊之中點與三個頂點之距離相等,則此三角形爲直角三角形.

(7) 正五角形之一角等於正十角形一角之四分之三.

(8) 正十二角形之一角等於正十八角形一角之幾分?

(9) 正多角形之一角等於一直角之五分之九,則此多角形之邊數如何?

(10) 正多角形之各外角等於正三角形內角之二分之一,則此多角形之邊數如何?

(11) 直角三角形之斜邊等於他一邊之二倍,則其一銳角等於直角三分之一.

(12) ABC爲任意三角形,BP,CQ各爲BA,CA之垂線,且$BP=BA$,$CQ=CA$,若垂直於BC各引PM,QN.

(i) 使B,C各爲銳角,則$BC=PM+QN$.

(ii) 使B,C之一爲鈍角,則$BC=PM\sim QN$.

(13) 以$\triangle ABC$之二個中線BE,CF,各自延長至G,H,而令$EG=BE$,$FH=CF$,則G,A,H三點在一直線上.

(14) 過三角形一角等分線上任意一點引其垂線,則

(i) 此垂線與夾此角之各邊所成之角等於他二角之半和;

(ii) 垂線與第三邊所成之角等於他二角之半差.

(15) 從三角形之一角頂作其角之等分線,及至對邊之高,則此二線所夾之角等於他二角之半差.

(16) 五角形有幾個對角線? 六角形有幾個對角線?

(17) 多角形之邊數爲 n,則其所有對角線之總數幾何? 試作公式表之.

(18) 過△ABC之頂點B引直線BD,令與邊AB夾成與C相等之角,又引直線BE,令與邊BC夾成與A相等之角,此二線各會AC於D, E, 則△DBE爲二等邊三角形.

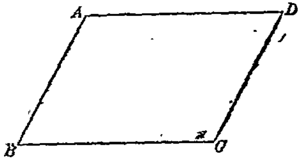
(19) 延長五角形之各邊兩兩相交於五點,在此五點諸角之和等於二直角.

(20) OB,OC各爲△AEC中B, C二外角之等分線,二線交於O, 則∠BOC與$\frac{1}{2}$∠A互爲補角.

第六章 平行四邊形

128. 定義40. 平行四邊形.[1]

四邊形之兩兩對邊互相平行者曰平行四邊形.

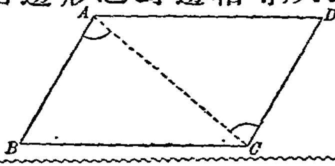


如圖,四邊形ABCD中,AB//DC, AD//BC, 則ABCD爲平行四邊形.

用▱作平行四邊形之記號,例如▱ABCD, 或▱AC.

129. 定理三十四.

平行四邊形之對邊相等,又對角相等.



(1) 平行四邊形 Parallelogram.

在▱ABCD中,

$$AB=CD,\quad AD=BC;$$

又　$\angle ABC=\angle ADC,\quad \angle BAD=\angle BCD.$

【證】 引對角線AC;

則因　$AB \parallel DC,$　(假設)

$\therefore\ \angle BAC=\angle ACD;$　(定理二十八)

又　$AD \parallel BC,$　(假設)

$\therefore\ \angle ACB=\angle CAD;$　(定理二十八)

在二個三角形ABC, ADC中,一邊AC共有,而其兩端之角各相等,故二個三角形全相等;

由是　$AB=CD,$

$AD=BC,$

$\angle ABC=\angle ADC,$　(定理八)

又　$\angle BAC+\angle CAD=\angle ACD+\angle ACB,$

即　$\angle BAD=\angle BCD.$

130. 系一.

平行四邊形之任一對角線分原形爲全相等之二個三角形.

131. 系二.

二平行線夾於他二平行線間之部分相等.

132. 系三.

平行四邊形之相隣二角互爲補角.

133. 系四.

平行四邊形之一角爲直角,則他三角亦

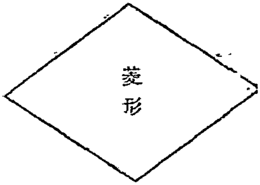
各爲直角.

134. 系五.

平行四邊形之相隣二邊相等,則諸邊皆相等.

135. **定義41. 矩形.**[1]

平行四邊形之各角爲直角者曰矩形.



136. **定義42. 菱形.**[2]

平行四邊形之諸邊皆相等者曰菱形.

137. **定義43. 正方形.**[3]

矩形之諸邊皆相等者曰正方形. 或易一語言之: 菱形之各角爲直角者曰正方形.

【註】 矩形,菱形,皆爲平行四邊形之特例,故平行四邊形所有之性質,矩形菱形中亦有之.

又正方形爲特種之矩形,亦爲特種之菱形,故正方形不惟具有平行四邊形之性質,亦且兼含矩形與菱形之性質也.

138. **定義44. 平行線之距離.**

二平行線之距離謂其所夾公共垂線部

(1) 矩形 Rectangle. (2) 菱形 Rhombus. (3) 正方形 Square.

分之長.

139. 定理三十五. (定理三十四之倒).

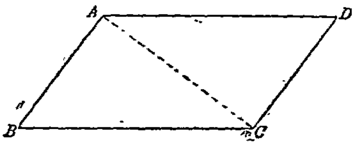
四邊形中:

(i) 對邊相等;

(ii) 對角相等;

(ii) 一雙對邊相等而且平行;

則此四邊形爲平行四邊形.



在四邊形ABCD中,

(i) $AB=CD$, $AD=BC$;

(ii) $\angle ABC=\angle ADC$, $\angle BAD=\angle BCD$;

(iii) $AB=CD$, $AB\parallel CD$;

則ABCD爲平行四邊形.

【證】 (i) 作對角線AC;

在△ABC, △ADC中, $\begin{cases} AB=CD, \\ BC=AD, \\ AC共有. \end{cases}$ (假設) ,,

$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$; (定理十二)

由此 $\angle ACB=\angle CAD$, $\angle BAC=\angle ACD$;

$\therefore$ $BC\parallel AD$, $AB\parallel CD$; (定理二十八)

$\therefore$ ABCD爲▱. (定義40)

(ii) $\angle ABC = \angle ADC$, (假設)

$\angle BAD = \angle BCD$, ,,

$\therefore$ $\angle ABC + \angle BAD = \angle ADC + \angle BCD$;

然 $\angle ABC + \angle BAC + \angle ADC + \angle BCD = 4R$;(定理三十二系二)

$\therefore$ $2(\angle ABC + \angle BAD) = 4R$;

$\therefore$ $\angle ABC + \angle BAD = 2R$;

$\therefore$ $BC /\!/ AD$; (定理二十九)

做此,可證明 $AB /\!/ CD$;

故ABCD爲平行四邊形. (定義40)

(iii) $AB /\!/ CD$; (假設)

$\therefore$ $\angle BAC = \angle ACD$; (定理二十八)

故在$\triangle ABC$, $\triangle ADC$中,

$$\left\{\begin{array}{l}\angle BAC = \angle ACD,\\ AB = CD,\\ AC \text{ 共有};\end{array}\right.$$ (假設)

$\therefore$ $\angle ACB = \angle CAD$; (定理九)

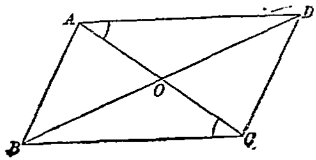
$\therefore$ $AD /\!/ BC$; (定理三十)

然 $AB /\!/ CD$; (假設)

$\therefore$ ABCD爲▱.

140. 定理三十六.

平行四邊形之對角線互相等分.



□ABCD之對角線AC, BD交於O,則

$$OA=OC,\quad OB=OD.$$

【證】 在△AOD, △BOC中,

$$\begin{cases} AD=BC, & & (定理三十二)\\ \angle ADO=\angle OBC, & \because AD /\!/ BC, & (定理二十八)\\ \angle DAO=\angle OCB; & ,, & (,,\ ,,\ ,,) \end{cases}$$

$\therefore$ $OA=OC$,

$OB=OD$.

141. 系. (定理三十六之倒).

四邊形之對角線互相等分,則此四邊形爲平行四邊形.

何則,

$$\begin{cases} OA=OC,\\ OB=OD,\\ \angle AOB=\angle COD; \end{cases}$$

$\therefore$ $\angle OAB=\angle OCD$;

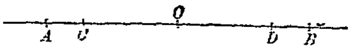
$\therefore$ $AB /\!/ CD$; (定理三十)

倣此, $AD /\!/ BC$;

$\therefore$ ABCD爲□.

142. 定義45. 點對稱.[1]

一直線上二點分列於此直線上一定點之兩旁且與此定點之二個距離相等,則曰二點就此定點爲對稱.

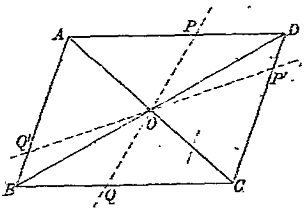


(1) 點對稱 Point-symmetry, 或 Symmetry with respect to a centre,

如圖，AO=BO，則A，B二點就O點爲對稱；又CO=DO，則C，D二點亦就O點爲對稱；然A，D二點就O點言不爲對稱．

若在一平面圖中過某一點引任意直線所得與圖之二交點恒就此點爲對稱，則曰**此平面形就此點爲對稱，名此點曰對稱之中心，而如此之圖謂爲有點對稱之圖．**

例如平行四邊形就其對角線之交點有點對稱．



何則，過▱ABCD中二對角線交點O引任意直線與四邊形會於P及Q，則

$$\left\{\begin{array}{ll} OB=OD, & \text{(定理三十六)} \\ \angle BOQ=\angle DOP, & \text{(定理五)} \\ \angle OBQ=\angle ODP; & \text{(定理二十八)} \end{array}\right.$$

$$\therefore\quad OP=OQ; \qquad \text{(定理八)}$$

故O爲▱ABCD之對稱中心．

【注意】 平行四邊形對角線之交點名曰**平行四邊形之中心．**[1]

143. 定理三十七．

一個平行四邊形之相隣二邊及一角各

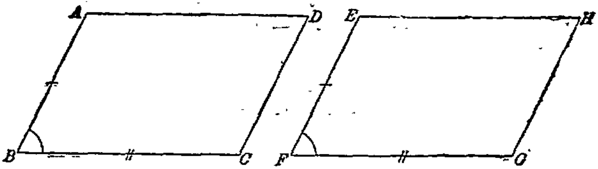
(1) 中心 Centre.

等於他一個平行四邊形之相隣二邊及一角，則此兩形為合同形.

在二個平行四邊形ABCD, EFGH中，

$$\begin{cases} AB=EF, \\ BC=FG, \\ \angle B=\angle F; \end{cases}$$

則　$\square ABCD \equiv \square EFGH$.



【證】　移置$\square$EFGH於$\square$ABCD之上，令EF與AB相重，E與A合，且令二邊GH, CD皆在邊AB之同傍；

因　$EF=AB$,　(假設)

故F與B合；

因　$\angle F=\angle B$,　(假設)

故邊FG與邊BC相重；

然　$FG=BC$,　(假設)

故G與C合；

又　$EH // FG$,　(定義40)

故　$EH // BC$;

因過A點而平行於BC之直線僅有一個；

故EH與AD不得不相重；　(公理III)

然　$EH=FG$,

　　$AD=BC$;　(定理三十四)

又　$BC=FG$;　(假設)

$\therefore$ EH=AD;

故H與D合;

卽EFGH與ABCD合而爲一;

故　　□ABCD=□EFGH.

【註】 假設∠B=∠F以∠C=∠G或∠C=∠E代之亦可.因此等角均爲B,F之補角故也.

144. 系一.

相隣二邊各相等之二個矩形爲合同形.

145. 系二.

一邊及一角各相等之二個菱形爲合同形.

146. 系三.

一邊相等之二個正方形爲合同形.

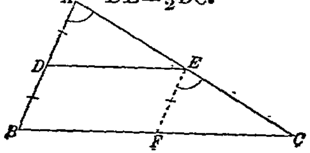
147. **定理三十八.**

過三角形一邊之中點而平行於底之直線必過他一邊之中點,且其夾於二邊間之部分等於半底.

D爲△ABC一邊AB之中點,過D而平行於底邊BC之直線與邊AC會於E,則

(i)　　AE=EC,

(ii)　　DE=$\frac{1}{2}$BC.



【證】過E點引AB之平行直線EF,與BC會於F;則DBFE為▱;

故 $EF=DB$; (定理三十四)

然 $AD=DB$; (假設)

$\therefore EF=AD$;

又 $EF/\!/AB$, (本題)

$BC/\!/DE$; (假設)

$\therefore \angle FEC=\angle DAE$,

$\angle EFC=\angle ADE$; (定理二十八)

$\therefore \triangle EFC\equiv\triangle ADE$; (定理八)

由此(i) $AE=EC$,

又 $DE=FC$;

然 $DE=BF$, (定理三十四)

$\therefore DE=\frac{1}{2}(BF+FC)$;

卽(ii) $DE=\frac{1}{2}BC$.

148. 系.

連結三角形二邊中點之直線平行於第三邊.

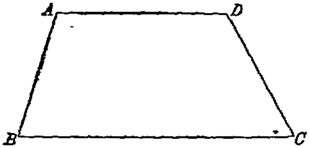
何則,過邊AB中點D而平行於BC之直線僅有一個,邊AC之中點亦僅有一個(E),今過D而平行於BC之直線過E,故本同一證法,知直線DE平行於BC.

149. 定義46. 梯形.[1]

四邊形之一雙對邊互相平行者曰梯形.

梯形之不平行二邊相等者曰二等邊梯形.[2]

(1) 梯形 Trapezoid. (2) 二等邊梯形 Isosceles trapezoid.



如圖,在四邊形ABCD中,

AD//BC,

AB∦CD,

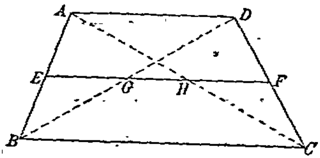
則ABCD爲梯形,而AD,BC爲其底,若AB=CD,則此爲二等邊梯形.

150. 例.

例一. 連結梯形中不平行二邊之中點作線分,則

(i) 此線分過兩對角線之中點,且與底平行;

(i) 此線分等於二底之半和;又其夾於兩對角線間之部分等於兩底之半差.



梯形ABCD不平行二邊AB,CD之中點爲E,F,而對角線BD,AC之中點爲G,H,則

(i) EF過G,H,且平行於BC;

(ii) $EF=\frac{1}{2}(BC+AD)$, $GH=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

【證】 (i) 過E點引平行於底之直線,則此直線可過BD之中點G,AC之中點H,及CD之中點F;

(定理三十八)

卽連結AB中點E及CD中點F之直線過G, H, 且平行於BC.

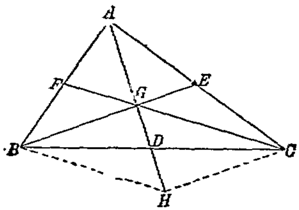
(ii) ∵ $EG=\frac{1}{2}AD=HF$, $EH=\frac{1}{2}BC=GF$; (定理三十八)

$$\therefore\quad EF=EH+HF=\tfrac{1}{2}BC+\tfrac{1}{2}AD=\tfrac{1}{2}(BC+AD);$$

$$GH=EH-GE=\tfrac{1}{2}BC-\tfrac{1}{2}AD=\tfrac{1}{2}(BC-AD).$$

例二. 三角形之三個中線會於一點.

AD, BE, CF 爲△ABC之三個中線,則此三線可會於一點.



【證】 設二個中線BE, CF之交點爲G;

連結AG, 且延長之,與邊BC會於D;

又過B點引CF之平行直線,與AG之延線會於H;

連結CH;

則因F爲AB之中點,而(FG//BH); (假設)

故G爲AH之中點; (定理三十八)

又G爲AH之中點, E爲AC之中點,

故 GE//HC; (定理三十八系)

卽 BG//HC;

∴ BHCG爲▱;

故其對角線BC, GH互相等分; (定理三十六)

卽AD爲一中線;

故三個中線AD, BE, CF會於一點.

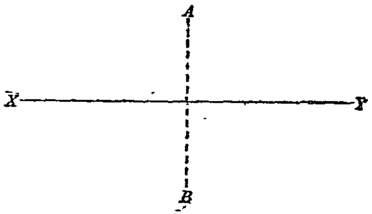
【注意】 AG=GH=2GD,

$\therefore\ AG=\frac{2}{3}AD.$

【注意】 在此例中,三個中線之交點G名曰△ABC之重心.[1]

151. 定義47. 線對稱.[2]

連結二點之線分為一直線所垂直等分,則曰二點就此直線為對稱,此直線曰對稱之軸.



例如線分AB為直線XY所垂直等分,則A, B二點就XY為對稱,而直線XY為對稱之軸.

倒言之,A,B二點就直線XY為對稱,則線分AB為直線XY所垂直等分.

普徧言之,欲一個平面形有對稱軸,則其圖形之一切點須兩兩就某定直線為對稱.或易一語言之,若以某直線為摺痕摺此圖形而其一部分全然與他一部分合一,則此圖形就其直線為對稱.

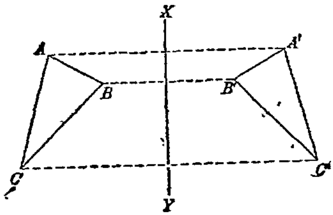
一直線為某圖形之對稱軸,則曰此直線以圖形分於對稱,亦曰其圖形有線對稱.

例如二等邊三角形有一對稱軸,為連結其頂點與底邊中點之直線.

(1) 重心 Centre of gravity.

(2) 線對稱 Line-symmetry, 或 symmetry with respect to an axis.

又如左圖，A′,B′,C′三點各與A,B,C三點就直線XY為對稱，則△A′B′C′,△ABC就XY為對稱．蓋若以XY為摺痕而摺圖形，則A′,B′,C′各與A,B,C相合，而△A′B′C′可與△ABC合而為一故也．



問題

(1) 在平行四邊形ABCD之一邊AB上取一點P，連結PC,PD，則

$$\triangle PDC = \triangle PAD + \triangle PBC.$$

(2) 矩形之對角線相等．

(3) 對角線相等之平行四邊形為矩形．

(4) 菱形之二個對角線互相垂直．

(5) 二個對角線互相垂直之平行四邊形為菱形．

(6) 菱形就其二對角線之一為對稱．

(7) 平行四邊形就其對角線之一為對稱者係菱形．

(8) 平行四邊形之就其各對角線為對稱者係菱形．

(9) 若一個四邊形之二對角線相等，且互相垂直等分，則此四邊形為正方形．

(10) 平行四邊形之二個對角線相等且互相垂直，則此平行四邊形為正方形．

(11) 二等邊梯形有線對稱．

(12) 矩形有二個對稱軸．

(13) 正方形有幾個對稱軸?

(14) 正三角形有幾個對稱軸?

(15) 在▱ABCD之四邊AB, BC, CD, DA上各取E, F, G, H四點而令AE=CG, AH=CF,則
(i) EFGH為一▱; (ii) 此▱與ABCD有同一中心.

(16) 與一所設直線在定距離處之點之軌跡爲何?

(17) 直角三角形斜邊之中點與三個頂點之距離相等.

(18) 二個三角形ABC, ABD立於同底AB上,而邊AC, BC, AD, BD之中點各爲E, F, G, H,則EGHF爲一▱. 又此題有一例外,試說明之.

(19) ▱ABCD二邊AD, BC之中點爲E, F,則直線BE, DF三等分對角線AC.

(20) 從二等邊三角形底上之任意點引二個線分,令各與二等邊之一平行而止於又一邊上,則此二線分之和一定.

(21) 若前題中之點取於底之延線上則如何?

(22) 從二等邊三角形底邊上之任意點至二個等邊作二垂線,則此二垂線之和一定.

(23) 若前題中之點取於底之延線上則如何?

(24) 二等邊梯形之相對二角互爲補角.

(25) 以所設四點之一爲對稱中心求他三點之對稱點.

(26) 以所設一點爲對稱中心作所設多角形之對稱多角形.

(27) 在正方形ABCD之各邊AB, BC, CD, DA上或其延線上各取點E, F, G, H而令AE=BF=CG=DH,則四邊形EFGH亦爲正方形.

(28) 從線分AB之兩端向他直線XY上下垂線AC,

BD,則C,D二點與AB中點之距離相等.

(29) 以▱ABCD之相隣二邊AB,AD各自延長至E,F,而令BE=AB, DF=AD,則三點B,C,F在一直線上.

第一編之問題

(1) 設二點A,B,求一點令其與此二點距離之差爲最大.

(2) 在前題中,欲二距離和爲最小,求點之位置.

(3) 一凸多角形全在他一多角形之內,則外形之周比內形之周大.

(4) 從△ABC之各頂點引線分,令過形內之任意一點P而止於其對邊上,則此三個線分之和比此三角形之半周大.

(5) 從△ABC之角頂A作其等分線AC之垂線XY,則XY上任意點M與B,C距離之和比AB+AC大.

(6) 正三角形之三個高相等.

(7) 在定理二十九之圖中,不引C′D′而用同一證法證明其定理.

(8) 證明定理二十九中之(ii),(iii),(iv),(v).

(9) 就定理十三中之圖用定理九證之;從此用定理十三證明定理十二.

(10) 三角形之一中線若又爲角之等分線,則此三角形爲二等邊三角形.

(11) 一直線與凸多角形之交點不能比二個多.

(12) 在定理十之圖中連結CG而用定理十五證明之.

(13) 二個三角形之二邊各等,從此二邊相交之角頂所引之中線又相等,則此二個三角形爲合同形.

(14) 在一角 A 之二邊上各取二點 B, C 及 D, E, 而令 AB=AD, AC=AE; 若 BE, CD 交於 O, 則直線 AO 等分 A 角.

(15) 在二個三角形 ABC, DEF 中 AB=DE, AC=DF, $\angle B=\angle E$, 則 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 是否爲合同形?

(16) 在 $\triangle ABC$ 中 AB<AC. 引中線 AD, 則

$\angle BAD>\angle CAD$.

(17) 直接證明定理二十三之系.

(18) 三角形中一角之二邊不相等,則此角等分線所分對邊上之二部分亦不相等,而隣接大邊之部分比隣接小邊之部分大.

(19) 以正三角形 ABC 之一邊 CB 延長至 D 而令 BD=BC. 在 C 點引邊 BC 之垂線 CE, 與 DA 之延線會於 E, 則 AD=3AE.

(20) 三角形中一角之二邊不相等,則此角之等分線在從此角頂所引中線及垂線之間.

(21) 二個四邊形可爲合同形之條件若何?

(22) 在 $\triangle ABC$ 中, AB>AC, 今若在 AB, AC 上或在其延線上各取 D 點及 E 點,而令

$$AD=AE=\tfrac{1}{2}(AB+AC),$$

則直線 DE 交 BC 於其中點.

(23) 在 $\triangle ABC$ 中, AB>AC. 今過 BC 之中點 M 引直線, 令與邊 AB, AC 各交於 P, Q, 而 AP=AQ, 則 BP=CQ.

(24) $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 之等分線與 C 外角之等分線交於 I, 過 I 引 BC 之平行直線,與 AB, AC 會於 D 及 E,

則　$$DE=BD-CE.$$

(25) 從 $\triangle ABC$ 之 B, C 向 $\angle A$ 外角之等分線引垂線 BE, CF, 則 CE, BF 與 $\angle A$ 之等分線交於一點.

(26) 從三角形之一角頂向對邊所引之中線比對邊之半分或大或小或相等,則此角或爲銳角,或爲鈍角,或爲直角.

(27) 從$\triangle ABC$之頂點A至其對邊引線分AD, AE,而令$\angle BAD=\angle C$, $\angle CAE=\angle B$,則$AD=AE$.

(28) 一多角形有119個對角線,則其邊數若何?

(29) 直角三角形中,對於斜邊之高及中線所夾之角等於二銳角之差.

(30) 從正三角形內一點至各邊距離之和一定. 又點在三角形外則若何?

(31) 一個正多角形一角之大小爲二倍其邊數所得正多角形一角之$\frac{4}{5}$. 此正多角形之邊數若何?

(32) 以n邊多角形之各邊延長而作成一星形,則在此星形中各角之和爲$2(n-4)R\angle$.

(33) 四邊形中相隣二角等分線所夾之角等於他二角之半和.

(34) 四邊形中相對二角等分線所夾之角等於他二角之半差.

(35) 四邊形ABCD中,對邊AB, CD之延線交於E, BC, AD之延線交於F,則二角BEC,CFD等分線所夾之角等於$\angle A$及$\angle C$之半和.

(36) 等分四邊形各外角之直線所成新四邊形之對角互爲補角.

(37) (i) 等分四邊形各角之直線所成新四邊形之對角互爲補角.

(ii) 若原四邊形爲平行四邊形,則新四邊形爲矩形,而其對角線等於平行四邊形中相隣二邊之差.

(iii) 若原四邊形爲矩形則何如?

(38) 四邊形之一雙對邊相等,且一雙對角爲相等之鈍角,則此四邊形爲平行四邊形.

(39) 三角形三個中線之和比其周之四分之三大.

(40) 三角形之二邊不等,則對於大邊之中線比對於小邊之中線小.

(41) 三角形之二個中線相等,則此三角形爲二等邊三角形.

(42) 在▱ABCD之二邊AB,CD上各畫向形外之正三角形ABE,CDF,又在邊BC上畫正三角形BCG而令G與A在BC之同傍,則GE,GF各等於原形之二對角線.

(43) AD,BC均垂直於直線AC,且B與D在AC之兩傍,若直線AC,BD交於E而ED=2AB,則$\angle DBC=\frac{1}{3}\angle ABC$.

(44) 四邊形中,二對邊之中點與二對角線之中點爲一平行四邊形之頂點.

(45) 連結四邊形中兩兩對邊中點之直線交於連結二對角線中點所得線分之中央.

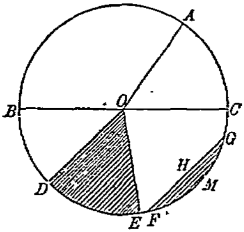
第 二 編

圓

152. 定義 1.　圓周,[1] 中心.[2]

圓周,爲一平面曲線,此曲線上之一切點與在其內而名爲中心之一定點等距離者也.

153. 定義 2.　圓.[3]



圓爲圓周所圍平面之一部分.

如圖,O 點爲中心,曲線 ABC 爲圓周,ABC 內之部分爲圓.

用記號 ⊙ 表圓,記之爲 ⊙ABC,或僅用表其中心之文字記爲 ⊙O.

154. 定義 3.　半徑.[4]

從中心至圓周上任意點所引之線分曰圓之半徑.

如圖,OA, OB, OC 等爲半徑.

從圓之定義,可知一圓之半徑皆相等.

圓之平面上一點與中心之距離比半徑大,則此點在圓周之外,比半徑小,則此點在圓

(1) 圓周 Circumference.　(2) 中心 Centre.
(3) 圓 Circle.　(4) 半徑 Radius.

周之內,此可徑從定義推得者也.

以故

圓周係與一定點在定距離之點之軌跡.

又,圓周就其中心爲點對稱.

等半徑之二圓全相等. 蓋若以二圓相重而令其中心相合,則二圓周必能全相重合故也. 由是欲二圓全相等,則必其半徑相等.

155. 定義4. 直徑.(1)

過中心而兩端止於圓周上之線分曰圓之直徑.

如在前圖中BC爲一直徑.

凡一圓之直徑皆相等. 以其長等於圓之半徑之二倍故也.

156. 定義5. 弧.(2)

圓周之一部分曰圓之弧.

可合成一全圓周之二弧互稱爲相屬弧,(3)而其大者曰優弧,(4)小者曰劣弧.(5)

如在前圖中,FMG爲一弧,而FAG爲其相屬弧.

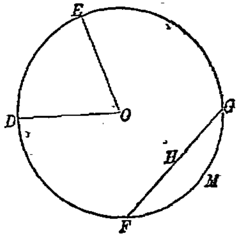
用記號⌒表弧,如⌒FMG爲弧FMG.

157. 定義6. 弦.(6)

連結弧兩端之線分爲此弧之弦,就弧言之曰對於其弧之弦,亦曰弧爲此弦所張.

(1) 直徑 Diameter. (2) 弧 Arcs. (3) 相屬弧 Conjugate arcs. (4) 優弧 Major arc. (5) 劣弧 Minor arc. (6) 弦 Chord.

如圖,線分FG爲對於弧FMG之弦.



158. 定義7.　扇形.[1]

扇形係圓之一部分而爲一弧與其兩端之半徑所圍之形.

如左圖,ODE爲一扇形.

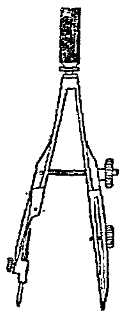
159. 定義8.　弓形.[2]

弓形係圓之一部分而爲弧及其弦所圍之形.

弓形之弧爲優弧者曰優弓形,爲劣弧者曰劣弓形.

如上圖,FMGH爲一弓形.

160. 畫圓之器具.



畫圓之器具爲規筆,有二足,一足爲金屬所製者,其端銳,用以定圓心;又一足端可裝置鉛筆或畫墨線之嘴筆,用以畫圓周,畫時以前一足置中心,令二足間之距離等於半徑,以規筆旋轉一周,則其第二足端卽畫成一圓周;因此第二足端移動時所行之路途爲第一足端等距離之點之軌跡故也.

如此畫圓方法爲幾何學所容許之事,前在緒論中曾言之.

初等幾何學作圖所用之器具,僅許用規筆一枝,三角

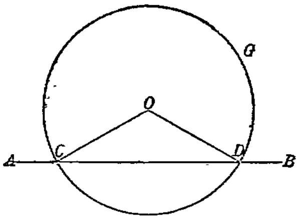
(1) 扇形 Sector.　(2) 弓形 Segment.

板一對,學者備此二物足矣.

第一章　弧及弦

161. 定理一.

一直線與一圓周相會之點不能比二個多.



設直線AB與圓周CDG相會之點爲C, D,則在此二點之外更無相會之點.

【證】 從圓之中心O至直線AB所引諸斜線之中,等於此圓之半徑者可有OC, OD二個而僅有此二個;故如題言. (一編定理十八系二)

162. 定義9. **割線.**[1]

與圓周交於二點之直線曰割線,弦卽割線與圓周二交點間之部分.

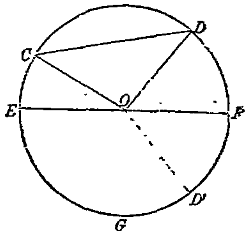
163. 定理二.

(i) 直徑爲圓之最大弦.

(ii) 凡直徑分圓周及圓爲全相等之二部

(1) 割線 Secant.

分.



(i) ⊙CDG中任意直徑EF比他之任意弦CD大.

(ii) EF分圓周CDG及圓CDG爲全相等之二部分.

【證】 (i) 引半徑OC, OD;

在$\triangle COD$中, $OC+OD>CD$;

然 $OC+OD=OE+OF$

$=EF$;

$\therefore\ EF>CD$.

(ii) 以直徑EF爲摺痕而以圓之上一部分摺疊於下一部分上,半徑OD落於OD′之位置,

則 $\angle D'OF=\angle DOF$;

又 $OD'=OD$,

故D與D′合;

因D爲弧EDF上之任意點,

由此可知弧EDF上之一切點各與弧ED′F上之點合;

故二弧全相等;

因此「弧EDF與直徑EF所圍之部分」及「弧ED′F與直徑EF所圍之部分」全相等;

故直徑EF分圓周及圓爲全相等之二部分.

(ii) 又可如下述之:

圓就其任意直徑爲對稱,圓之諸直徑皆爲圓之對稱軸.

164. 系.

互相垂直二直徑分圓周及圓爲全相等之四部分.

165. 定義10. 半圓,[1]四分圓.[2]

直徑分一圓所得之各部分曰半圓.

互相垂直二直徑分一圓所得之各部分曰四分圓,或曰象限.

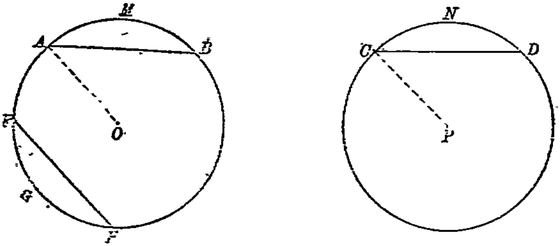
166. 定理三.

在同圓或等圓中,對於等弧之弦相等.

O及P爲相等二圓,而

$$\frown AMB = \frown CND,$$

$$弦\ AB = 弦\ CD.$$



【證】 移置⊙P於⊙O之上,令中心P與O合,半徑PC與OA相重,且令$\frown CND$與$\frown AMB$皆在AB之同傍;

(1) 半圓 Semi-circle. (2) 象限 Quadrant.

則因　　　　　　半徑 PC＝OA，

而二圓周可合而為一；

由此⌒CND與⌒AMB相重；

因　　　　　　⌒CND＝⌒AMB，

故D與B合；

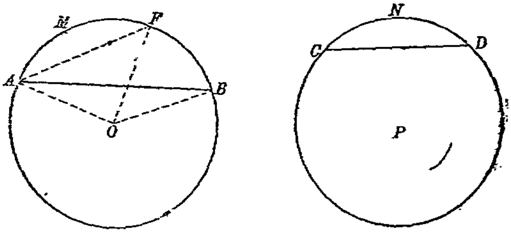
故弦CD與弦AB合而為一；

$$\therefore\ AB=CD.$$

【注意】 若⌒AMB及⌒FGH為屬於同一圓O中之二等弧，而欲證其弦AB，FH相等，則可在⊙O之等圓P上取等於⌒AMB或⌒FGH之⌒CND，用上法可證得弦AB，FH均與弦CD相等，故　AB＝FH.

167. 定理四.

在同圓或等圓中，對於不等劣弧之弦不相等，而對於大劣弧之弦較大.



O及P為相等二圓，而

⌒AMB＞⌒CND，

且二弧皆為劣弧，

則　　　　　　弦AB＞弦CD.

【證】 在⌒AMB上取⌒AMF，令

$\frown AMF = \frown CND$,

則 弦 AF = 弦 CD; (定理三)

因 $\frown CND < \frown AMB$, (假設)

故F點必在二點A與B之間;

今引半徑OA, OF, OB,

則 $\angle AOF < \angle AOB$;

故在△AOB, △AOF中,

$$\begin{cases} AO \text{ 共有}, \\ BO = FO, \\ \angle AOB > \angle AOF, \end{cases}$$

$\therefore$ AB > AF; (一編定理十)

$\therefore$ AB > CD.

168. 系.

在同圓或等圓中,

(i) 等弦所張之劣弧相等;優弧亦相等. (定理四之對偶)

(ii) 不等弦所張之弧不相等;而立於大弦上之劣弧較大,優弧較小. (定理三之對偶)

169. 定理五.

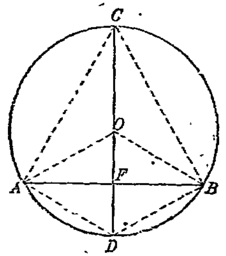
圓之一直徑垂直於一弦,則此直徑以此弦及此弦所張二個相屬弧分爲相等二部分.

AB爲⊙ABC之一弦, CD爲垂直於AB之直徑, AB, CD之交則爲F,

則 AF = FB,

$\frown AC = \frown BC$,

$\frown AD = \frown BD$



【證】 OF爲從O至AB之垂線,而OA, OB,爲從O至AB之相等二斜線,

故 $AF = FB$; (一編定理十八)

即F爲AB之中點.

次,CD以AB垂直等分,

故 $AC = BC$,

$AD = BD$; (一編定理十九)

$\therefore$ $\frown AC = \frown BC$;

$\frown AD = \frown BD$; (定理三系一)

即C, D各爲$\frown ACB$, ADB之中點.

【注意】 直線CD具有如下之五個條件:

( ) 過圓之中心O;

(ii) 過弦AB之中點F;

(iii) 過$\frown ADB$之中點D;

(iv) 過$\frown ACB$之中點C;

(v) 垂直於弦AB.

此等條件中任意二個足以決定直線CD. 何以故,以過二點之直線有一無二,而從一點向一直線之垂線亦有

一無二故也.

由是可從此定理推得諸系如下:

170. 系一.

連結圓之中心與其一弦之中點所得直線垂直於此弦且過此弦所張二個相屬弧之中點.

171. 系二.

連結「圓之中心」與「其一弦所張一弧之中點」所得之直線垂直等分此弦.

172. 系三.

連結「一弦所張二弧之中點」所得之直線過圓之中心,且垂直等分此弦.

173. 系四.

連結「一弦之中點」及「其所張一弧之中點」所得之直線過圓之中心,且垂直於此弦.

174. 系五.

垂直等分一弦之直線過圓之中心,且過此弦所張二弧之中點.

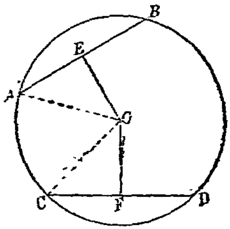
175. 系六.

從立一弦所張弧之中點向此弦所引之垂線過圓之中心及此弦之中點.

176. 定理六.

在同圓或等圓中,相等二弦中心之距離

相等.



AB, CD 為同一圓 O 中之二弦,而

AB=CD,

從中心 O 至此二弦引垂線 OE, OF, 則

OE=OF.

【證】 OE⊥AB,

∴ AE=$\frac{1}{2}$AB; (定理五)

倣此, CF=$\frac{1}{2}$CD;

然 AB=CD, (假設)

∴ AE=CF;

引二半徑 OA, OC,

則在二個直角三角形 OAE, OCF 中,

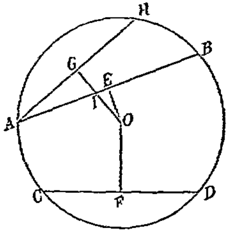
斜邊 OA=斜邊 OC,

AE=CF,

∴ OE=OF, (一編定理二十一)

177. 定理七. (定理六之否).

在同圓或等圓中,不等二弦與其中心之距離不相等,而小弦與中心之距離較遠.



AB, CD 為同一圓 O 中之二弦,而

$$CD<AB,$$

從中心 O 至此二弦引垂線 OE, OF,

則 $$OF>OE.$$

【證】 從 A 引等於 CD 之弦 AH,令劣弓形 AH 與劣弓形 AB 在圓之同一部分,而從中心 O 向弦 AH 引垂線 OG;則從前一定理,

$$OG=OF;$$

又因 $$AH=CD,$$

而 $$AH<AB;$$

故 劣弧 AH<劣弧 AB;

故 H 在劣弧 AB 之上;

由是中心 O 與弦 AH 之中點 G 在弦 AB 之兩傍;

故垂線 OG 可與 AB 相交. 名其交點為 I,則

$$OG>OI;$$

然因 OE 為 AB 之垂線而 OI 為其斜線,

故 $$OI>OE;$$

由是 $$OG>OE;$$

$$\therefore\ OF>OE.$$

【注意】 以上二定理皆就同圓立論,若為等圓,則

可以二圓相重而如上證明之.

178. 系.

在同圓或等圓中,

(i) 與中心等距離之二弦相等;(定理七之倒否).

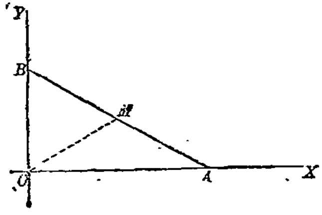
(ii) 與中心不等距離之二弦不相等;而離中心較遠之弦較小.(定理六之倒否).

179. 定義11. 點與圓周之距離.

一點與圓周之距離爲此點與中心之距離減去半徑所得之差.

180. 例.

例一. 一定長線分之兩端恒在直交二定直線上移動,求此線分中點之軌跡



OX, OY 爲直交二定直線,AB 爲定長線分之一位置,其兩端 A, B 恒在 OX, OY 上移動,求 AB 中點 M 之軌跡.

【解】 因 AB 爲定長;故無論其位置若何,直角三角形OAB中斜邊之長一定;

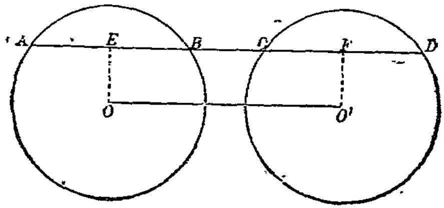
直角三角形斜邊之中點 M 與三個頂點之距離相等,

即 $MO=MA=MB;$

故OM之長恆等於$\frac{1}{2}$AB而爲一定;

故M點之軌跡爲以O作中心AB半分作半徑之一圓周.

例二. 一直線與連結相等二定圓中心之直線平行,則此直線含於二圓周中之部分相等.



O,O′爲相等二圓,OO′爲連結其中心之直線,ABCD平行於OO′而與二圓周交於A,B,C,D,則

弦AB=弦CD.

【證】 從O,O′向ABCD引垂線OE,O′F,

則 $OE \parallel O'F;$

又 $EF \parallel OO';$ (假設)

故 OEFO′爲▱,

而 $OE=O'F;$

然 $OE \perp AB,\qquad OF \perp CD,$

$\therefore\ AB=CD.$ (定理七系)

問題

(1) 以定長之半徑作一圓,令其中心在一所設直線上而圓周過一所設點.

(2) △ABC之底BC一定中線CD之長亦一定,則A點

之軌跡若何?

(3) 矩形之四個角頂在一圓周上.

(4) 以所設直線上任意點爲中心所畫過一定點之諸圓周皆過他一定點.

(5) 一動圓周恒過二定點,求此圓中心之軌跡.

(6) 在圓之直徑上取任意一點,從此點向直徑之兩傍各引一線分,令止於圓周之上而與直徑夾成相等之角,則此二線分相等.

(7) 從正方形對角線上一點引各邊之平行線得其與各邊之交點,則此諸交點必在一圓周上,此圓周以二對角線之交點爲中心.

又一點取於對角線之延線上則如何?

(8) A, B, C 爲一圓周上之三點,而 $\widehat{AB}=\frac{1}{2}\widehat{BC}$, 則弦 AB $>\frac{1}{2}$弦 BC.

(9) 不爲直徑之二弦決不能互相等分.

(10) 一圓中諸等弦中點之軌跡爲與原圓同中心之一圓周.

(11) 求與定圓周有定距離之點之軌跡.

(12) 求過圓周內一定點之最大弦及最小弦.

(13) 凸多角形各邊之垂直等分線會於一點,則此多角形之諸頂點在一圓周上.

(14) 一定長之直線恒與一所設直線平行,而其一端運動於所設圓周上,則他一端之軌跡若何?

(15) 從一定點引止於一所設圓周上之諸線分,則此諸線分中何者爲最長,何者爲最短? 就定點在圓周之內及圓周之外分別研究之.

(16) 一圓中二等弦之交點(或在圓內或在圓外)與二

弦各端之距離兩兩相等.

(17) AB為一圓之弦而C及D為其三等分點,過C,D之二半徑其端各為E,F;則

$$\frown AE=\frown FB<\frown EF.$$

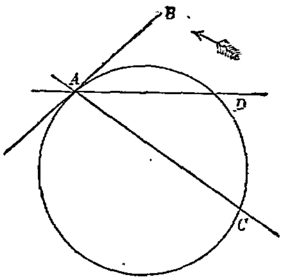
(18) AB為一圓之定直徑,而CD為平行於AB之弦.求AC,BD交點之軌跡.

(19) A為圓O外之一定點,從A引圓之割線ABC,令其在圓外之一部分AB等於圓之半徑;又引直徑AOD,則$\angle CAD=\frac{1}{3}\angle COD$.

第二章　切線及二圓

181. 定義12.　切線.[1]

一直線僅會圓周於一點,則曰直線切[2]圓於其點,而此直線曰切線,其點曰切點.[3]

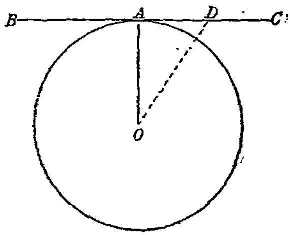


設想任意割線AC旋轉於A點之周圍,則C點沿圓周移動逐漸接近於A點而終至與A點合而為一,此時直線切圓於A點.

182. 定理八.

在半徑一端之垂線為圓之切線.

(1) 切線 Tangent.　(2) 切 To touch.　(3) 切點 Point of contact.



OA為圓O之半徑,從其一端A引垂線BC,則此BC為圓之切線.

【證】 在直線BC上取A以外之任意一點D,

連結OD;

因OA為BC之垂線,故OD必為BC之斜線;

由是　　　　　OD>OA;

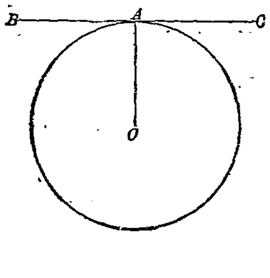
即D點與中心O之距離恒比半徑大,故D在圓周之外;

故直線BC僅與圓周會於A點;

故BC為此圓之切線.

183. 定理九.

圓之切線垂直於過切點之半徑.



直線BC切圓O於A點,則

$$OA\perp BC.$$

【證】 直線BC上,除A點外,其餘諸點皆在圓周之外,故此等點與中心之距離皆比半徑大;

故半徑OA爲從中心O向直線BC所引諸線分中之最短者;

故 $OA\perp BC.$ (一編定理十三系一)

184. 系一.

從半徑一端所引之此半徑斜線非圓之切線.

185. 系二.

從圓周上一點所引此圓之切線有一無二.

186. 系三.

從圓之中心向其切線所引之垂線必過切點.

187. 系四.

從切點所引切線之垂綫必過中心.

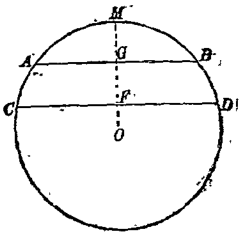
188. 定理十.

二平行線於圓周上夾相等之二弧.

(第一) 二平行線皆爲圓之弦:

AB, CD爲圓O之二個平行弦,

則 $\frown AC=\frown BD.$



【證】　從中心O引垂直於弦CD之半徑OM,則OM亦爲弦AB之垂線;

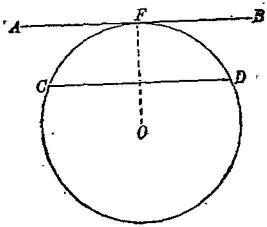
故　$\frown CM=\frown DM$,

$\frown AM=\frown BM$,　(定理五)

$\therefore\ \frown CM-\frown AM=\frown DM-\frown BM$,

$\therefore\ \frown AC=\frown BD$.

(第二)　二平行線之一爲圓之切線.



直線AB切圓O於F點,CD爲平行於AB之弦,則

$\frown FC=\frown FD$.

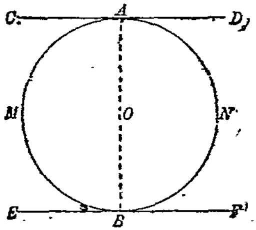
【證】　AB爲F點之切線,故$OF\perp AB$;　(定理九)

然　$AB\parallel CD$,　(假設)

故　$OF\perp CD$;

$\therefore\ \frown FC=\frown FD$.　(定理五)

(第三) 二平行線皆為圓之切線.



CD, EF 各為圓 O 之切線,且 CD//EF,

則 ⌒AMB=⌒ANB;

【證】 引半徑 OA, 則 OA⊥CD; (定理九)

然 CD//EF, (假設)

∴ OA⊥EF;

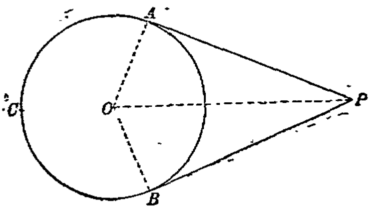
故 AO 與 EF 相會之點不可不為切點 B; (定理九系三)

即 A, B 為一直徑之兩端;

故 ⌒AMB=⌒ANB. (定理二)

189. 例.

例. 從⊙ABC 外一點 P 引此圓之二切線 PA, PB, 而 A, B 為其切點,則 PA=PB.



【證】 圓之中心為 O, 連結 OA, OB, OP;

因PA, PB爲圓之切線,

故 $\angle OAP=R\angle$, $\angle OBP=R\angle$;

在二個直角三角形OAP, OBP中,

$$\begin{cases}\text{斜邊}OP\text{共有},\\ OA=OB,\end{cases}$$

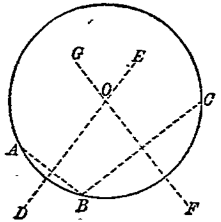
$\therefore \triangle OAP\equiv\triangle OBP$, (一編定理二十一)

而 $PA=PB$.

190. 定理十一.

過不在一直線上三點之圓周有一無二.

A, B, C爲不在同一直線上之三點,則過此三點之圓周必有一個而僅有一個.



【證】 線分AB之垂直等分線DE爲與A, B等距離點之軌跡; (一編定理十九)

又線分BC之垂直等分線FG爲與B, C等距離點之軌跡; (同上)

因AB, BC爲相交二直線,故ED, FG亦必可相交,名其交點爲O;

O與三點A, B, C之距離相等;

故以O作中心, OA, OB, OC中任意一個作半徑畫圓,可過A, B, C三點;

因DE,FG僅交於一點故如此之圓僅有一個.

【注意】 此一定理亦可述之如下:

過三角形三個頂點之圓周有一無二.

191. 系一.

共有三點之二圓周全相合.

192. 系二.

不全相合之二圓周,其交點不能多於二個.

193. 定義13. 外接圓,(1)外心.(2)

過三角形三個頂點之圓周爲此三角形之外接圓,其中心曰外心.

194. 定義14. 二圓之相切(3)及相交.(4)

二圓僅會於一點曰相切,其一圓全在他圓之外者曰外切,(5)一圓在他圓之內者曰內切,(6)而其相會之一點爲二圓之切點.

二圓會於二點曰相交.

195. 定義15. 中心線.(7)

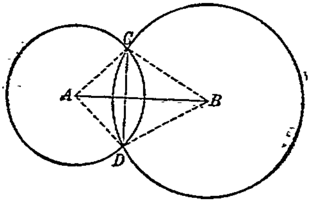
連結二圓中心之直線曰中心線.

196. 定理十二.

(1) 外接圓 Circumscribed circle.
(2) 外心 Circum-centre.
(3) 相切 Are tangent to each other.
(4) 相交 Intersect, 或 Cut.
(5) 外切 Are tangent externally.
(6) 內切 Are tangent internally.
(7) 中心線 Straight line through the centres.

二圓周相交,則其中心線爲共公弦之垂直等分線.

A, B 爲二圓之中心,此二圓周交於 C, D, 則直線 AB 爲弦 CD 之垂直等分線.



【證】　連結 AC, AD, BC, BD,

則　　AC＝AD,

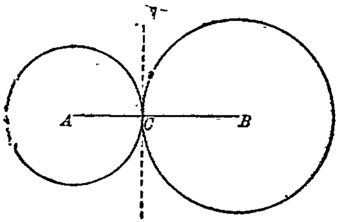
　　　BC＝BD,

卽二點 A, B 皆在與 C, D 等距離之處;

故直線 AB 爲 CD 之垂線且過 CD 之中點. (一編定理十九)

197. 定理十三.

二圓周相切,則其中心線過切點.



【證】　在前款之圖中,固定 A 圓及 C 點,而以 B 圓旋轉於 C 點之周圍,則 D 點沿圓周向 C 點移行,逐漸接近

於C而終至與C相合;
無論B圓若何旋轉,其聯心線AB恒為弦CD之垂直等分線;
故至D點與C點合一時,AB可過C點,卽過二圓之切點.

【注意】 在此旋轉運動中,公共弦CD為過二圓周一交點C之一割線而亦旋轉於C點之周圍;
至二圓周切於C點,則因C, D合為一點,故此時直線CD僅與各圓周會於一點而為各圓之切線.
由是可得如下之系.

198. 系.

相切二圓周於其切點有公共之切線,而此切線為中心線之垂線.

199. 定義16. 二圓周之交角.

從二圓周交點之一引二圓之切線,得二切線,此二切線所成之角名曰二圓周之交角.

二圓周之交角為直角,則曰二圓周互相垂直.

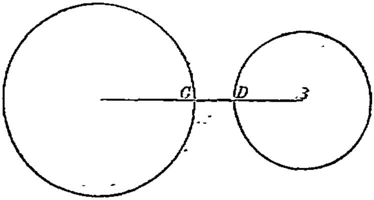
二圓周位置之關係

二圓周位置之關係共有五種:

(1) 一圓全在他圓之外;
(2) 外切;
(3) 相交;
(4) 內切;
(5) 一圓全在他圓之內.

200. 定理十四.

(1) 二圓周之一全在他圓之外,則其中心距離比半徑之和大.



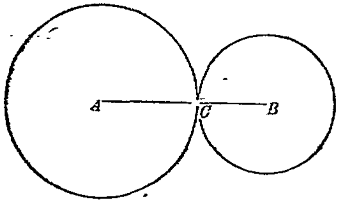
A, B 為二圓之中心, R, r 各為其半徑,則

$$AB > R + r.$$

【證】 中心線AB交二圓周於C, D,

則 $$AB = AC + CD + DB$$
$$= R + CD + r;$$
$$\therefore \quad AB > R + r.$$

(2) 二圓外切,則其中心距離等於半徑之和.

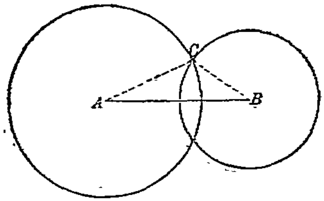


【證】 C 為切點,則

$$AB = AC + CB,$$

即 $$AB = R + r.$$

(3) 二圓相交,則其中心距離比半徑之和小而比其差大.



【證】 二圓周交點之一爲C,則在$\triangle ACB$中,

$$AC+BC>AB>AC-BC,$$ (一編定理六)

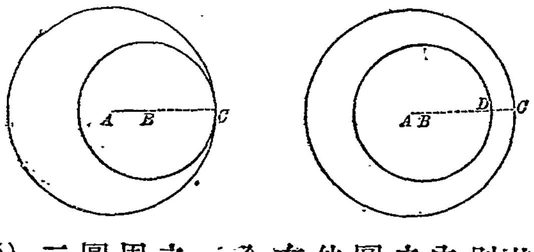
卽 $$R+r>AB>R-r.$$

(4) 二圓內切,則其中心距離等於半徑之差.

【證】 C爲切點,則

$$AB=AC-BC,$$

卽 $$AB=R-r.$$



(5) 二圓周之一全在他圓之內,則其中心距離比半徑之差小.

【證】 AB之延線與二圓周交於C及D,則

$$AB=AC-CD-BD$$
$$=R-CD-r$$
$$=R-r-CD,$$
$$\therefore\ AB<R-r.$$

201. 系.

在二圓中,

(1)中心距離比半徑之和大,則一圓全在他圓周之外;

(2)中心距離等於半徑之和,則二圓周相外切;

(3)中心距離比半徑之和小而比其差大,則二圓周相交;

(4)中心距離等於半徑之差,則二圓周內切;

(5)中心距離比半徑之差小,則一圓全在他圓周之內.

本款之系一一爲前款定理之倒定理.

在前款定理之假設中,凡二圓周位置相互之關係巳應有盡有,而其各終決又不能同時成立;

故前款之定理既巳一一證得其眞確,則本款之系可一一由窮舉證法證其必皆眞確也.

202. 定義17. 同心圓.[1]

有公共中心之二圓周曰同心圓.

203. 例.

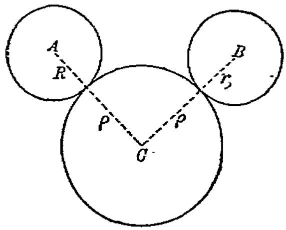
(1) 同心圓 Concentric circles.

例. A,B各爲二定圓之中心,其半徑各爲 R, r, 而 A,B 之一全在他圓周之外,今切此二定圓之任意圓其中心爲C,則

(1) C圓與A,B二圓皆外切時, $CA \sim CB = R \sim r$;

(2) C圓與A圓外切而與B圓內切時, $CA \sim CB = R + r$;

(3) C圓與A,B二圓皆內切時, $CA \sim CB = R \sim r$.



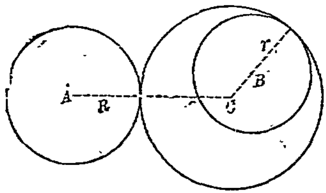
【證】 假定C圓之半徑爲ρ, 及 $R > r$.

(1) 從定理十四,　$CA = R + \rho$,

$$CB = r + \rho,$$

$$\therefore\ CA - CB = R + \rho - (r + \rho)$$

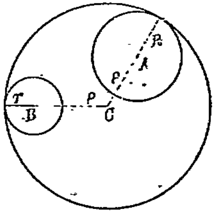
$$= R - r.$$



(2)　$CA = \rho + R$,

$$CB = \rho - r,$$

$$\therefore\ CA - CB = (R + \rho) - (\rho - r) = R + r.$$



(3) $CA=\rho-R,$

$CB=\rho-r,$

$\therefore\ CB-CA=\rho-r-(\rho-R)$

$=R-r.$

若 $r>R$,則以上三種結果中 $R-r$ 變為 $r-R$. 故總而言之,

(1) $CA\sim CB=R\sim r,$

(2) $CA\sim CB=R+r,$

(3) $CA\sim CB=R\sim r.$

問　題

(1) 一直線與一圓周之關係位置共有幾種?

(2) 以所設半徑作一圓,令切所設直線於其上之一點.

(3) 以所設半徑作一圓,令切所設圓周於其上之一點.

(4) 切相交二直線之圓心軌跡為何?

(5) 切平行二直線之圓心軌跡為何?

(6) 四邊形之邊皆切同一圓周,則其對邊之和相等.

(7) 四邊形對邊之和相等,則此四邊形為圓之外接

四邊形.

(8) 過相切二圓周之切點引任意直線,從其再會圓周之點引各圓之半徑,則此二半徑相平行.

(9) 過相交二圓周之交點作一線分,令其二端止於各圓周上而爲最長.

(10) 一圓周全在他一圓周之外,則二圓周間之最短距離及最長距離爲皆在中心線上.

(11) 在 203 款之例中,就二圓周之相切者,相交者,一圓全在他一圓之內者,一一分別研究之.

(12) 過二圓周之交點向任意方向引二個平行線,其端各在一圓周上,則此二線分相等.

(13) 在所設圓周上求一點,令與一所設點之距離等於所設之長. 盡其可起之種類一一考察之.

(14) 求一點,令與所設二圓周之距離各等於所設之長.

(15) 等分所設圓周之圓周,其半徑一定,則其中心之軌跡如何?

(16) 以所設半徑畫一圓,令其周與不在同一直線上三點之距離相等.

第三章 中心角 圓周角

204. 定義18. 中心角.[1]

一圓中二半徑所夾之角曰中心角.

205. 定義19. 圓周角.[2]

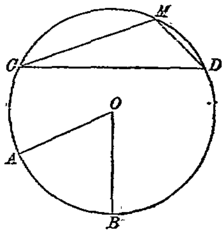
(1) 中心角 Angle at centre。 (2) 圓周角 Angle at circumference。

從圓周上一點所引二弦之交角曰圓周角.

中心角及圓周角爲立於其二邊間之弧上.

206. 定義20. 弓形角.[1]

從弓形弧上一點向其兩端所引二直線之交角曰弓形角. 名弓形曰含此角之弓形.

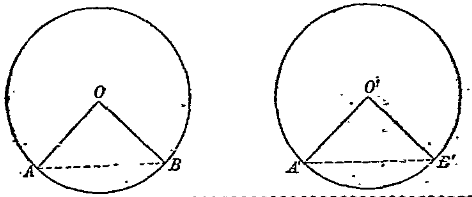


如圖,圓ABD之中心爲O,則∠AOB爲中心角,二弦MC, MD之交角∠CMD爲圓周角,然MC, MD可視作從弓形CMD弧上一點M向其兩端所引之直線,則∠CMD又可爲弓形角,而弓形CMD爲含此角之弓形. 故圓周角與弓形角其實相同,所異者惟名耳.

207. 定理十五.

在同圓或等圓中.

(1)等中心角立於等弧上;



(1) 弓形角 Angle is inscribed in segment.

(2)立於等弧上之中心角相等.

在相等二圓O及O′中,

(1)　中心角AOB=中心角A′O′B′,

則　$\frown AB=\frown A'B'$.

【證】引弦AB,A′B′,

則在△AOB,△A′O′B′中,

$$\begin{cases} AO=A'O' \\ BO=B'O' \\ \angle AOB=\angle A'O'B', \end{cases}$$ (假設)

$\therefore$　$AB=A'B'$;　(一編定理九)

$\therefore$　$\frown AB=\frown A'B'$,　(定理四系)

(2)　$\frown AB=\frown A'B'$,

則　$\angle AOB=\angle A'O'B'$.

【證】　$\frown AB=\frown A'B'$,　(假設)

$\therefore$　$\overline{AB}=\overline{A'B'}$,　(定理三)

故在△AOB及△A′O′B′中三邊各相等,

$\therefore$　$\angle AOB=\angle A'O'B'$.　(一編定理十二)

208. 系一.

中心角為直角,則對此之圓弧為象限弧.

209. 系二.

在同圓或等圓中,

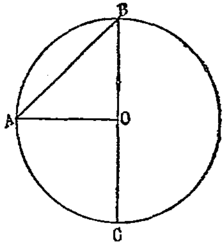
(1)二個不等中心角中大者立於大弧上;

(2)二個不等弧中大者對大中心角.

210. 定理十六.

圓周角與中心角立於同弧上,則圓周角

等於中心角之半.



$\angle ABC$ 爲立於弧 AC 上之圓周角, $\angle AOC$ 爲立於同弧上之中心角,則 $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$.

【證】 (第一) 圓周角之一邊 BC 爲直徑,

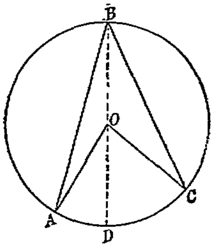
則 $\angle AOC=\angle OAB+\angle ABO$ (一編定理三十一系一)

然 $OA=OB$, 而 $\angle OAB=\angle ABO$,

$\therefore\ \angle AOC=2\angle ABO$,

卽 $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$.

(第二) 中心 O 在二邊 AB, BC 之間.



引直徑 BOD, 則從(第一),

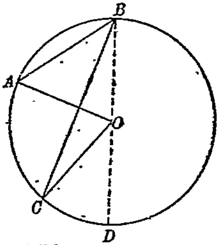
$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD$,

$$\angle CBD=\tfrac{1}{2}\angle COD,$$

$$\therefore\ \angle ABD+\angle CBD=\tfrac{1}{2}(\angle AOD+\angle COD),$$

即 $$\angle ABC=\tfrac{1}{2}\angle AOC.$$

(第三) 中心O在二邊AB,BC之外.



引直徑BOD,則從(第一),

$$\angle ABD=\tfrac{1}{2}\angle AOD,$$

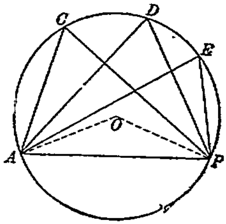
$$\angle CBD=\tfrac{1}{2}\angle COD,$$

$$\therefore\ \angle ABD-\angle CBD=\tfrac{1}{2}(\angle AOD-\angle COD),$$

即 $$\angle ABC=\tfrac{1}{2}\angle AOC.$$

211. 系.

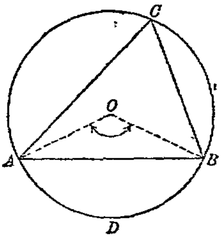
同弓形所含之角皆相等.

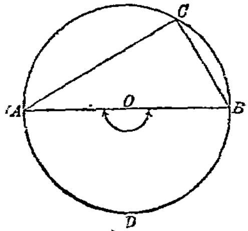


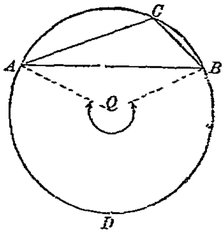
弓形ACB中,所含諸角$\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$,等皆相等.因其皆與$\tfrac{1}{2}\angle AOB$相等故也.

212. 定理十七.

弓形比半圓大,則其所含弓形角爲銳角;爲半圓,則所含弓形角爲直角;比半圓小,則弓形角爲鈍角.







ACB爲一圓之弓形,則因

弓形ACB$\gtreqless\angle$半圓,

而 $\angle ACB \lesseqgtr R\angle$.

【證】 O爲中心;連結OA, OB,

則 $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$; (定理十六)

今 弓形ACB$\gtreqless$半圓,

則 $\frown ADB \geqq$ 半圓周,

由此 $\angle AOB \geqq 2R\angle$;

$\therefore \frac{1}{2}\angle AOB \geqq R\angle$;

$\therefore \angle ACB \geqq R\angle$.

213. 系.

弓形角爲銳角,則其弓形比半圓大;爲直角,則其弓形爲半圓;爲鈍角,則其弓形比半圓小.

在上款定理中三種假設已盡其可起之種類而一一眞確,且其終決又不能同時成立,故本款之系必能同窮舉法證之可知.

214. 定義20. 內接多角形,[1] 外接圓.[2]

多角形之各頂點皆在一圓周上,則此多角形爲內接於圓或曰圓之內接多角形,而其圓爲外接於多角形,或曰多角形之外接圓.

215. 定理十八.

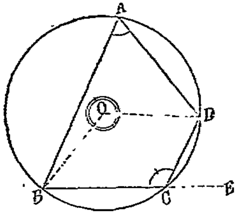
內接於圓之四邊形中,兩兩對角互相爲補角.

ABCD 爲內接於⊙ABCD之四邊形,

則 $\angle A+\angle C=2R\angle$,

$\angle B+\angle D=2R\angle$.

(1) 內接多角形 Inscribed polygon. (2) 外接圓 Circumscribed circle.



【證】　O為圓之中心,連結OB, OD.

則　$\angle A=\frac{1}{2}$劣角BOD,　　(定理十六)

$\angle C=\frac{1}{2}$優角BOD,

∴　$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}$(二共軛角之和)

$=\frac{1}{2}(4R\angle)$

$=2R\angle$.

做此,可證　$\angle B+\angle D=2R\angle$.

216. 定義21.　內對角.

圓之內接四邊形中一角,對於其對角之外角而言,為其外角之內對角.

例如在前款之圖中,$\angle A$為外角$\angle DCE$之內對角.

217. 系一.

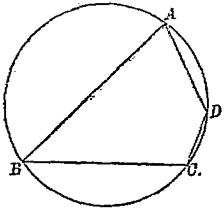
圓內接四邊形之一外角等於其內對角.

如在前圖中,　$\angle DCE=\angle A$.

218. 系二.　(定理十八之倒).

四邊形之兩對角互為補角,則此四邊形為圓內接四邊形.

在四邊形ABCD中,$\angle A+\angle C=2R\angle$,或$\angle B+\angle D=2R\angle$,則ABCD為圓內接四邊形.



何則,過三個頂點A,B,C之圓周必有一個,(定理十一)若D點不在此圓周上,則不能∠B+∠D=2R∠也.

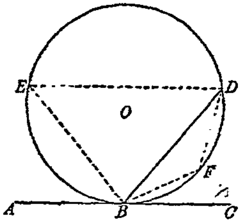
219 定理十九.

切線與切點弦之交角等於隣接弓形所含之角.

直線AC爲圓周DEF上B點之切線,而BD爲從切點B所引之弦;

則(1) ∠DBC等於弓形BED所含之角;

(2) ∠DBA等於弓形BFD所含之角.



【證】 (1) 過D引平行於AC之弦DE,

則 $\frown DB=\frown EB$, (定理十)

∴ $\overline{DB}=\overline{EB}$, (定理三)

∴ ∠EDB=∠DEB;

然因ED//BC,而　$\angle DBC=\angle EDB$,

$\therefore\ \angle DBC=\angle DEB$;

弓形BED所含之角皆等於$\angle DEB$;　(定理十六系)

故$\angle DBC$等於弓形BED所含之角.

(2) F為弓形DFB弧上之任意一點,連結BF, DF,

則　$\angle DEB+\angle DFB=2R$,　(定理十八)

又　$\angle DBA+\angle DBC=2R$;

$\therefore\ \angle DBA+\angle DBC=\angle DEB+\angle DFB$;

然　$\angle DBC=\angle DEB$,

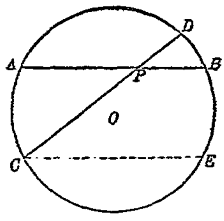
$\therefore\ \angle DBA+\angle DEB=\angle DEB+\angle DFB$,

$\therefore\ \angle DBA=\angle DFB$;

故$\angle DBA$等於弓形BFD所含之角.

220. 定理二十.

二弦交於圓周之內,則取其一雙對頂角所對之弧求和而作立於和上之圓周角時,此圓周角等於一雙對頂角之各角.



二弦AB, CD交於圓周內之一點P,則$\angle DPB$與立於$\frown AC+\frown BD$弧上之圓周角相等.

【證】過C引平行於AB之弦CE,

則 $\frown AC=\frown BE$, (定理十)

$\therefore \frown DB+\frown AC=\frown DB+\frown BE$

$=\frown DBE$;

然因AB//CE,而 $\angle DPB=\angle DCE$;

故$\angle DPB$與立於$\frown DBE=\frown DB+\frown AC$弧上之圓周角$\angle DCE$相等.

做此,可證 $\angle APD$與立於$\frown AD+\frown CB$弧上之圓周角相等

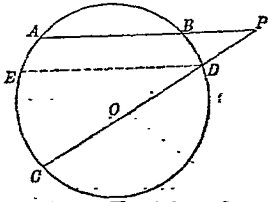
221. 系.

O為圓之中心,則

$$\angle DPB=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD).$$

222. 定理二十一.

二弦之延線交於圓周之外,則取其交角所對之二弧求差而作立於差上之圓周角時,此圓周角等於二弦之交角.



二弦AB,CD之延線交於圓外之一點P,則$\angle APC$與立於$\frown AC-\frown BD$弧上之圓周角相等.

【證】 過D引平行於AB之弦DE,

則 $\frown BD=\frown AE$; (定理十)

$\therefore \frown AC-\frown BD=\frown AC-\frown AE$

$=\frown EC;$

因AB//ED,而 $\angle APC=\angle EDC,$

故$\angle APC$與立於$\frown EC$上之圓周角等,即與立於$\frown AC-\frown BD$弧上之圓周角相等.

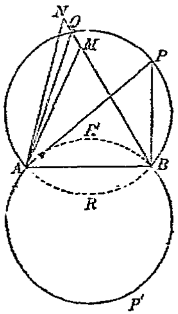
223. 系.

O為圓之中心,則

$$\angle APC=\frac{1}{2}(\angle AOC-\angle BOD).$$

224. 定理二十二.

一角之二邊恒過一線分之兩端而其角之大小又一定,則此角頂點之軌跡為以此線分作弦之相等二圓弧.



AB為定線分,P為軌跡上之任意點,即$\angle APB$=定角.過三點A,B,P畫一圓周ABPQ,則此圓周中弧APB上之任意點Q可為屬於軌跡之點.

【證】 $\angle AQB=\angle APB,$ (定理十六系)

故Q為軌跡上之一點;

由此在弧APB上之任意點皆適合於所設之條件.

次,在此弧APB內或外之點M,N皆不適合於所設條件;

試連結BM而延長之,與圓周會於Q點,連結AQ,AM,

則 $\angle AMB > \angle AQB$, (一編定理三十一系二)

即 $\angle AMB > \angle APB$;

即 $\angle AMB >$ 定角;

故M不適合於所設條件,

倣此,可證明 $\angle ANB < \angle APB$,

即 $\angle ANB <$ 定角;

即N亦不適合於所設條件.

若以線分AB爲摺痕而摺圖形所居之平面,令弧APB至於AP′B之位置,則$\frown$AP′B亦爲合於所設條件之點之軌跡.

若線分AB在一動點所張之角爲定角之補角,則此動點之軌跡爲二弧ARB,AR′B.

若定角爲直角,則二弧APB,ARB相等而皆爲半圓周;故圓周AP′BR′與APBR合而爲一. 由是可得下款之系.

225. 系.

一角之二邊恒過一定線分之兩端而其角爲直角,則此角頂點之軌跡爲以定線分作直徑之圓周.

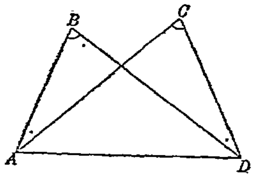
【註】 前款之定理亦可述之如下:

一定線分張於一動點之角恒爲定角,則此點之軌跡爲以此定線分爲弦之相等二圓弧.

226. 四點在同一圓周上之條件.

當解幾何學之問題時,往往須知四點是否在同一圓周之上. 今從以上諸定理,可得四點在一圓周上之條件如下:

四點 A, B, C, D 在同一圓周上之條件.

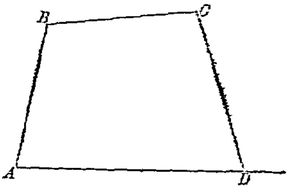


(第一) 連結 AB, CD, AC, BD,

若 $\angle ABD = \angle ACD$,

或 $\angle BAC = \angle BDC$,

則 A, B, C, D 可在同一圓周上.



(第二) 連結 AB, BC, CD, DA.

若 $\angle B + \angle D = 2R$,

或 $\angle A + \angle C = 2R$,

則 A, B, C, D 可在同一圓周上.

(第三) 在前圖中,延長AD至E,

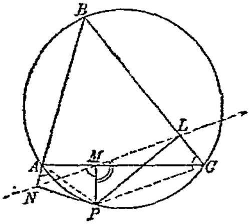
若 $\angle CDE=\angle ABC$,

則A, B, C, D可在同一圓周上.

227. 例.

例一. 從三角形外接圓周上之任意點向各邊引垂線,此三個垂線之足在一直線上.倒理,從一點向三角形各邊所引垂線之足在一直線上,則此點爲三角形外接圓周上之點.

從△ABC外接圓周上一點P向各邊引垂線PL, PM, PN,則其足L, M, N在同一直線上.



【證】 連結PA, PC, LM, MN,

則因 $\angle PMA+\angle PNA=2R\angle$,

而 P, M, A, N在一圓周上;

$\therefore\ \angle PMN=\angle PAN$;

然 $\angle PAN=\angle BCP$,

$\therefore\ \angle PMN=\angle BCP$;

又因 $\angle PMC=\angle PLC$,

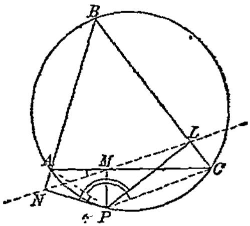
而 P, C, L, M在一圓周上.

$\therefore\quad \angle BCP+\angle PML=2R\angle;$

由此　$\angle PMN+\angle PML=2R\angle;$

故　L,M,N在一直線上.

次,從P點向△ABC各邊所引垂線之足L,M,N在一直線上則P爲△ABC外接圓周上之點.



【證】　因　$\angle CPL=\angle CML=\angle AMN=\angle APN,$

$\therefore\quad \angle CPL+\angle LPA=\angle APN+\angle LPA,$

卽　$\angle CPA=\angle NPL;$

然　$\angle NPL+\angle B=2R\angle,$

故　$\angle CPA+\angle B=2R\angle;$

故C,P,A,B在同一圓周上.

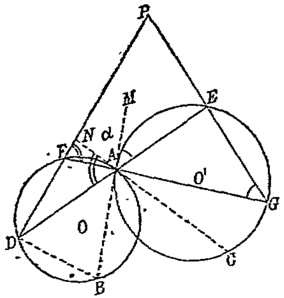
【注意】　此定理名曰Simson定理,直線LMN爲△ABC關於P點之Simson線,英人Simson所發見者也.

從上之證,此定理亦可述之如下:

從一動點向一定三角形各邊所引垂線之足在一直線上,則此動點之軌跡爲定三角形之外接圓周.

例二.　過相交二圓周之交點A引任意二直線DAE,FAG,與各圓周會於D,E,F,G,則二弦DF,GE交角之

大小一定.



【證】 從A點引各圓之切線MAB, NAC, 則其交角之大小一定,名之爲 α;

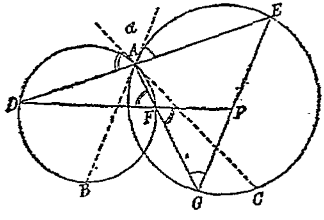
由此如上圖, $\angle NAD = \angle ABD = \angle AFP$,

又 $\angle MAE = \angle AGP$;

然 $\angle NAD + \angle MAE + \angle \alpha = 2R\angle$,

而 $\angle AFP + \angle AGP + \angle P = 2R\angle$;

$\therefore \quad \angle P = \angle \alpha$.



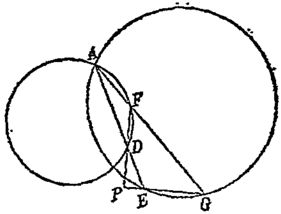
又如第二圖, $\angle NAD = \angle AFD = \angle PFG$,

又 $\angle MAE = \angle AGP$,

而 $\angle NAD + \angle MAE + \angle \alpha = 2R\angle$,

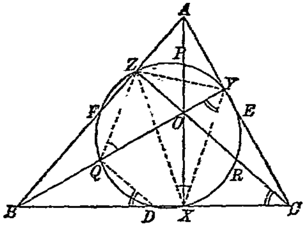
$\angle PFG + \angle AGP + \angle P = 2R\angle$;

$$\therefore \quad \angle P = \angle a.$$



學者更可用此第三圖證之.

例三. 在一三角形中, (1) 各邊之中點, (2) 從各頂點向其對邊所引垂線之足, (3) 各頂點與垂心連結線分之中點. 以上九點在同一圓周上.



△ABC各邊之中點爲D, E, F, 又從各頂點向其對邊所引垂線之足爲X, Y, Z, 連結垂心O與各頂點所得線分之中點爲P, Q, R, 則D, E, F, X, Y, Z, P, Q, R九點可在同一圓周上.

【證】 過X, Y, Z畫一圓周, 此圓周與各邊相會之點爲D, E, F, 而與各垂線相會之點爲P, Q, R, 能證明D, E, F爲各邊之中點,P,Q,R爲AO,BO,CO之中點足矣.

連結ZQ,

因　$\angle OZB=\angle OXB=R\angle$,

故BO爲BXOZ外接圓之直徑;

又　$\angle ZQO=2\angle ZBO=2\angle ZXO=\angle ZXY$,

故Q爲⊙BXOZ之中心;

即Q爲BC之中點.

倣此,可證P爲AO之中點,R爲CO之中點.

次,連結QD,

則　$\angle QDB=\angle QYX$;

而OYCX爲圓之內接四邊形,故

$\angle OYX=\angle OCX$;

由是　$\angle QDB=\angle OCX$,

而　$QD/\!/OC$;

然　Q爲BO之中點,

故　D爲BC之中點.

倣此,可證E爲CA之中點,F爲AB之中點.

即D,E,F,X,Y,Z,P,Q,R九點在一圓周上.

【注意】 此圓名曰三角形之九點圓,(1) 恒以N.P.⊙表之. 法人Poncelet瑞士人Euler及德人Jfeuerbach等所發見者也.

228. 定義22. 垂足三角形.(2)

以三角形三個高之足爲頂點之三角形名曰垂足三角形. 如前款例三圖中,XYZ爲垂足三角形.

(1) 九點圓 Nine point circle.　(2) 垂足三角形 Pedal triangle.

問　題

(1) 從圓周APC外之一點P引此圓之二切線PA,PB,又引直徑AC,則

$$\angle APB=2\angle BAC.$$

(2) 以$\triangle ABC$之一邊AB作直徑畫一圓,更引此圓之直徑DE平行於邊BC,則直線DB及EB等分$\angle B$之內角及外角.

(3) 過相等二圓周交點之一A引任意直線PAQ,與各圓周會於P及Q,連結此二點與二圓周之第二交點B,則PB=QB.

(4) 內切二圓中一圓之直徑等於他一圓之半徑,則外圓中過切點之弦恒為內圓周所二等分.

(5) 二圓之一全在他圓之外,引此二圓之平行直徑AB,CD,過A,C,引直線再交圓周於P及Q,從P,Q各作二圓周之切線則此二切線相平行.

(6) 一直線與圓ABC上A點之切線平行而與圓之二弦AB,BC或其延線交於D,E,則四點B,C,D,E可在一圓周上.

(7) BO為圓之半徑,過垂直於此之直徑上一點A引任意弦BAP,從此弦之一端P引切線PC,與OA之延線會於C,則CA=CP.

(8) A,B為二圓周之交點過A引一直線CAD,交圓周於C,D,從C及D引各圓之切線,二切線交於E,則B,C,D,E四點在一圓周上

(9) 從圓周上一點A引二弦AB,AC,弧AB,AC之中點為D,E,且D,E在$\angle BAC$之外,引弦DE與AB,AC交於F,G,則

AF=AG.

(10) 過二圓周之交點A,B引直線CAD,EBF,與各圓周交於C,D,E,F,復引弦CE,DF,則CE//DF.

(11) 過相切二圓周之切點引任意二直線得其與二圓周之交點,連結此交點作二圓之弦,則此所作之二弦相平行.

(12) 二圓內切於A點,BDC為小圓上D點之切線且為大圓之弦,則直線AD等分∠BAC.

又二圓外切則如何?

(13) A為弓形BAC之弧之中點,過A引任意二弦AD,AE,與BC交於F,G,則F,D,E,G四點在一圓周上.

(14) 二圓周交於A及B,CD為一圓周上C點之切線,CA,CB各與他圓周交於E及F,則EF//CD.

(15) 引相交二圓之任意平行直徑,則連結其各端之直線必過切點.

(16) 二圓周相切於P點,一任意割線與二圓周交於A,B,C,D,則

$$\angle APD+\angle BPC=2R\angle.$$

(17) 述定理十九之倒定理,且證之.

(18) AB為圓之直徑,P為圓周上之任意點,以AP,BP為直徑作二圓,求此二圓周交點之軌跡.

(19) 過相交二圓周之交點A引任意割線MAN,交圓周於M,N,過M,N引直徑,此二直徑交於P,求此P點之軌跡.

(20) 從圓周上一點所引諸弦中點之軌跡為何?

(21) 圓之諸弦皆過不在其周上之一定點,求此諸弦中點之軌跡.

(22) 從一定點向諸同心圓所引切線之切點之軌跡

如何?

(23) 從三角形之一頂點向其對邊引垂線,延長之與外接圓周交,此交點與垂心之距離爲垂線之足所等分.

(24) 從三角形一頂點至其垂心之距離等於外心與其對邊距離之二倍.

(25) X,Y爲從△ABC中A,B向其對邊所引垂線之足,M爲AB之中點,則　∠MXY=∠MYX=∠C.

(26) 垂足三角形之各角爲原三角形之高所等分.

又原三角形之一角爲鈍角則何如?

(27) 在三角形之各邊上畫向其外傍之三個正三角形,則此三個三角形之外接圓周交於一點

(28) 從圓之直徑AB之一端引任意弦AC,延長之至P,令CP=CB,則P點之軌跡如何?

(29) 在前題中,CP=AC,則P點之軌跡如何?

(30) 圓內接四邊形之二對角線互相垂直,則過其交點而垂直於一邊之直線等分此邊之對邊.

【注意】 此定理係印度人Brahma-Gupta氏所發明.

(31) 圓內接四邊形之二對角線互相垂直,則從圓心至一邊之距離等於此邊對邊之半分.

(32) 圓內接六邊形之二雙對邊互相平行,則他一雙對邊亦可互相平行.

(33) 三角形之外心,重心,垂心在一直線上. 其外心,重心之距離等於重心,垂心距離之半.

(34) 在227款例一之圖中延長PL,PM,PN,再與圓周會於X,Y,Z,連結AX,BY,CZ,則此三線皆與Simson線平行.

(35) 連結三角形之垂心及其外接圓周上任意點之

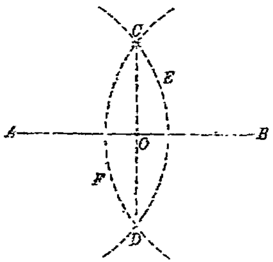
線分為此點之Simson線所等分.

第四章

關於直線及圓之作圖題

229. 作圖題一.

等分一所設線分.



AB為所設線分,分之為相等二分.

【解】 以A為中心,大於AB半分之長為半徑,畫圓弧CED;

更以B為中心,用前之同一半徑,畫圓弧CFD;

連結二弧之交點C,D引直線CD,此CD與AB之交點O即為AB之等分點.

【證】 因C,D為與A,B等距離之二點,

故直線CD垂直等分線分AB; (一編定理十九系)

即 $AO=BO$.

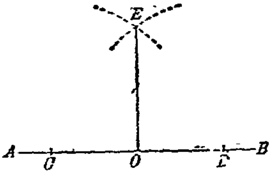
230. 系.

CD為AB之垂直等分線.

231. 作圖題二.

從一直線上之一點作此直線之垂線.

O爲所設直線AB上之所設點,求從O引AB之垂線.



【解一】 在直線AB上於O之左右定與O等距離之二點C,D;

以C爲中心用大於CO之半徑畫圓弧;

復以D爲中心用同一半徑畫圓弧;

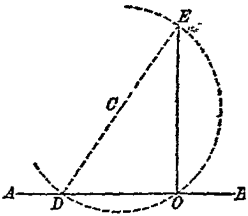
二圓弧交於E;

連結EO,則　　$EO \perp AB$.

【證】 因O及E爲與C,D等距離之二點

$\therefore$　$EO \perp CD$,

即　　$EO \perp AB$.



【解二】 在直線AB外取任意點C;

以C爲中心,CO爲半徑,畫圓周,再交AB於D;

引直線DC延長之,交圓周於E;
連結EO,則此EO為所求之垂線.

【證】 DOE為半圓周;

故　$\angle DOE = R\angle$;　(定理十七)

$EO \perp AB$.

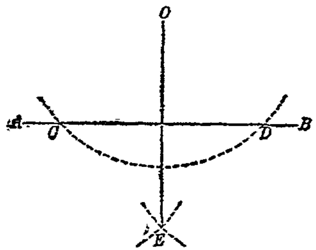
【註】 若所畫之圓周不再與直線AB相會,則AB切此圓周於O點. 由是半徑CO卽為AB之垂線.

232. 作圖題三.

從直線外之一點作此直線之垂線.

O為所設直線AB外之所設點,求從O作AB之垂線.

【解】 從AB上取任意一點C;
以O為中心,OC為半徑,畫圓周,再交AB於D;
次以C及D各為中心,用大於$\frac{1}{2}$CD之長為半徑,畫二圓弧其一交點為E;
連結EO,則此EO卽為AB之垂線.



【證】 O及E為與C,D等距離之二點;

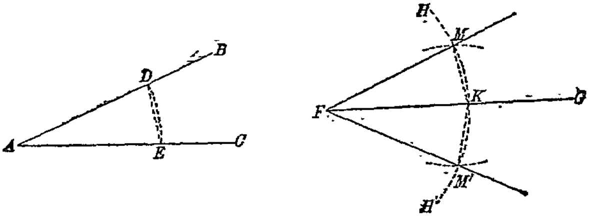
$\therefore$ $OE \perp AB$.

【註】 若O為中心之圓周不再於AB相會,則AB切圓O於C. 由是可知　半徑$OC \perp AB$.

233. 作圖題四.

過一所設直線上之一點作一直線,令與所設直線夾成所設角.

FG為一所設直線,F為其上之一點,∠BAC為所設角.求從F引一直線,使此直線與FG所成之角等於∠BAC.



【解】 以A為中心,用任意半徑畫圓弧,與二邊AB,AC各交於D,E;

次以F為中心用同一半徑畫圓弧HKH',與FG之交點為K;

更以K為中心,用線分DE之長為半徑畫圓弧,與⌒HKH'交於M,M';

連結MF,M'F,則∠MFK,∠M'FK皆等於所設角∠DAE.

【證】 因二弧MK,DE之半徑相等,其弧又相等,

∴ ⌒MK=DE;　(定理三系)

∴ ∠MFK=∠DAE,　(定理十五)

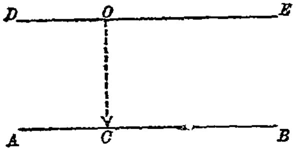
倣此,可證 ∠M'FK=∠DAE.

234. 作圖題五.

過一直線外之一點作此直線之平行線.

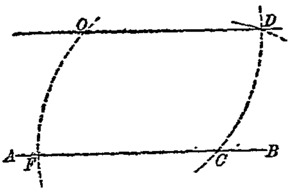
O為所設直線AB外之所設點,求過O作一直線與AB

平行.



【解一】 從O向AB引垂線OC; (作圖題二)
次,過O點引直線OC之垂線DOE;
則 DE//AB.

【證】 從一編定理二十五系及公理III可知此解不誤.



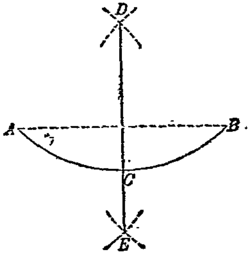
【解二】 連結O點與直線AB上之任意點C,
以C爲中心,CO爲半徑畫圓弧OF,與AB交於F點;
次,以O爲中心,OC爲半徑畫圓弧CD,更以C爲中心,線分FO之長爲半徑畫圓弧,二弧交於D (D與O在AB之同傍);
連結OD,則 OD//AB.

【證】 $\angle DOC = \angle OCF$, (作圖題四)
$\therefore$ OD//AB.

235. 作圖題六.

等分所設弧.

ACB爲所設弧,分之爲相等之二分.



【解】　引弦AB;

作線分AB之垂直等分線DE,　　(作圖題一)

與弧AB交於C;

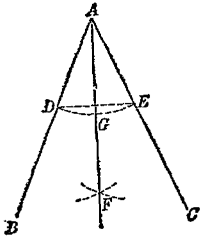
則　　$\frown AC = \frown CB$.

【證】　因DC爲弦AB之垂直等分線,故亦等分弧AB.

236. 作圖題七.

等分所設角.

∠BAC爲所設之角,分之爲相等之二分.



【解】　以頂點A爲中心,用任意半徑畫圓弧DE,與二邊AB,AC交於D及E;

次,以D,E各爲中心,用大於$\frac{1}{2}$DE之半徑畫二圓弧,得其一交點F(F與A在DE之兩傍);
連結AF,則AF爲∠BAC之等分線.

【證】 A及F爲與D,F等距離之二點,

故　　　　$AF \perp DE$;

由此AF等分$\frown$DE於G,

即　　　　$\frown DG = \frown GE$;

$\therefore \angle DAG = \angle EAG$;

故AF爲∠BAC之等分線.

【注意一】 作圖題二可視作「作圖題七」之特例.

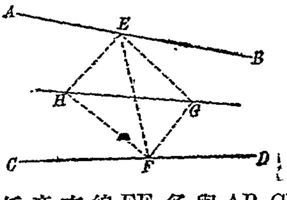
【注意二】 從作圖題一,可以線分分作四等分,八等分,十六等分,以至2^n等分(n爲正整數).

從作圖題六,可以弧分作四等分,八等分,十六等分,以至2^n等分.

從作圖題七,可以角分作四等分,八等分,十六等分,以至2^n等分.

237. 例.

例. 不許延長二線分AB,CD而等分其交角.



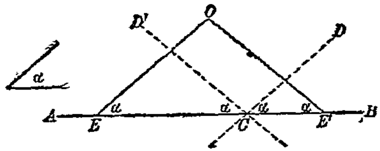
【解】 引任意直線EF,各與AB,CD交於E,F;
引∠BEF,∠DFE之二等分線,其交點爲G;　　(作圖題六)
又引∠AEF,∠CFE之二等分線,其交點爲H;

連結GH,則GH即爲所求之等分線.

【證】 假定AB, CD之交點爲O,則△OEF之三個等分線可交於一點,故G點在∠EOF之等分線上;
又△OEF之一內角及二外角之等分線亦可交於一點,故H點亦在∠EOF之等分線上;
故直線GH卽爲∠EOF之等分線.

238. 作圖題八.

過一所設直線外之一點作一直線,令與所設直線夾成所設角.



AB爲所設直線求從AB外之一點O向AB引一直線,令此直線與AB所成之角等於所設角α.

【解一】 在直線AB上取任意點C;
過C引直線CD或CD',令

$\angle DCB=\angle\alpha$, 及 $\angle D'CA=\angle\alpha$;　　(作圖題四)

次,從O引CD, CD'之平行直線,與AB會於E, E';
則OE, OE'均爲所求之直線.

【證】 $OE\parallel CD$,

$\therefore\ \angle OEB=\angle DCB$　　(一編定理二十八)

$=\angle\alpha$;

倣此可證　$\angle OE'A=\angle\alpha$.

【解二】 從O向直線AB引垂線OC; (作圖題三)

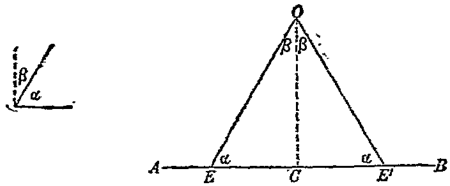
在$\angle\alpha$之頂點引其一邊之垂線,得$\angle\alpha$之餘角$\angle\beta$;

(作圖題二)

從O引直線OE或OE′,與AB交於E,E′,而令

$\angle EOC=\angle\beta,\quad \angle E'OC=\angle\beta,$ (作圖題四)

則OE OE′卽為所求之直線.



【證】 $\triangle OEC$為直角三角形,

故 $\angle EOC+\angle OEC=R\angle$; (一編定理三十一系三)

然 $\angle EOC=\angle\beta,$

又 $\angle\alpha+\angle\beta=R\angle,$

$\therefore\ \angle OEC+\angle\beta=\angle\alpha+\beta;$

由此 $\angle OEC=\angle\alpha.$

倣此, $\angle OE'C=\angle\alpha.$

239. 作圖題九.

設一三角形之二角,作其第三角.

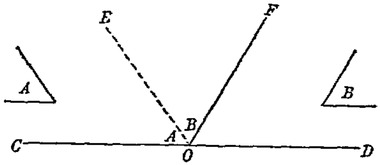
設三角形之二角A,B,求作其第三角.

【解】 引一直線CD,在其上取任意一點O;

過O引直線OE,令 $\angle COE=\angle A$; (作圖題四)

再從O點引直線OF,令 $\angle EOF=\angle B$;

則$\angle FOD$為所求之角.



【證】　$\angle COE+\angle EOF+\angle FOD=2R\angle$;

然　$\angle COE=\angle A$,　$\angle EOF=\angle B$,

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle FOD=2R\angle$;

故 $\angle FOD$ 爲三角形之第三角.　(一編定理三十一)

【討論】 苟非 $\angle A+\angle B<2R\angle$, 則此題不能解;因三角形中三個內角之和當等於二直角故也.

【注意】 自此以後;用 A, B, C 表 $\triangle ABC$ 之三角,而用 a, b, c 各表其對邊之長;卽 $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.

240. 作圖題十.

設三角形之一邊及二角,作此三角形.

(1) 設三角形之一邊 a 及其兩端之角 B, C, 求作此三角形.

【解】 引一線分 BC, 令其長等於 a;

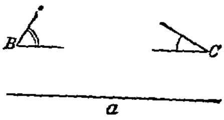
從 BC 之一端 B 引一直線 BA, 令

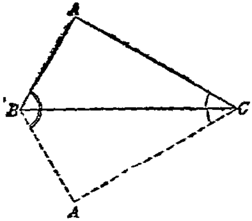
$\angle CBA=\angle B$;　(作圖題四)

又從 BC 之又一端 C 引直線 CA, 令

$\angle BCA=\angle C$;

BA, CA 之交點爲 A, 則 $\triangle ABC$ 爲所求之三角形.





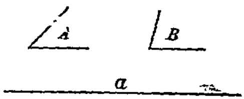
【證】 略.

【討論】 苟非$\angle B+\angle C<2R\angle$,則此題不能解.

【註】 在BC之下倘可作一適合所設條件之三角形A′BC. 如此在所設直線之一傍可作一圖形,則在又一傍恒可作一全相等之圖形. 在以下諸題中有如此者不更一一註明.

(2) 設三角形之二角A,B及對於$\angle A$之邊a,求作此三角形.

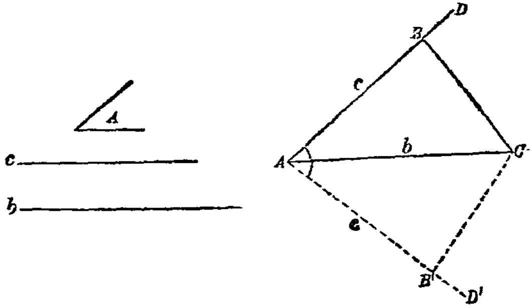
【解】 從作圖題九作三角形之第三角C,再用上法,可作此三角形.



241. 作圖題十一.

設三角形之二邊及其夾角,作此三角形.

設三角形之二邊b,c,及其夾角A,作此三角形.



【解】　作一線分 AC,令其長等於 b;
從 AC 之一端 A 引直線 AD,令

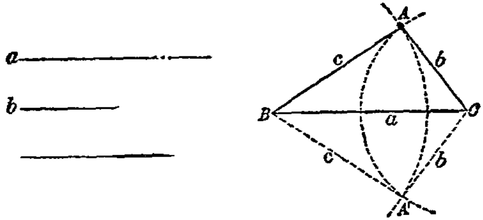
$$\angle DAC = \angle A,$$ (作圖題四)

在 AD 上截取 B 點,令　AB=C;
連結 BC,則 $\triangle ABC$ 爲所求之三角形.

【證】　略.

242. 作圖題十二.

設三角形之三邊,作此三角形.



設三角形之三邊 a, b, c,作此三角形.

【解】　先引線分 BC,令其長等於 a;

次,以B為中心,c之長為半徑畫圓弧;
又以C為中心,b之長為半徑畫圓弧;
二弧之交點為A;
連結AB,AC,得△ABC為所求之三角形.

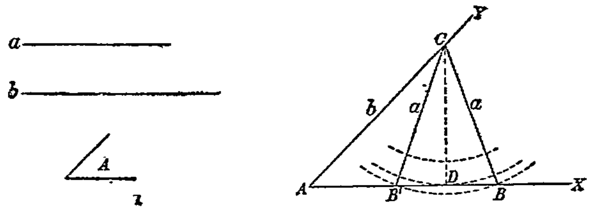
【討論】 欲此題成立,必須所畫之二弧相交,即須二中心距離之一邊a比用作二半徑之二邊b, c之和小而比其差大. 申言之,a, b, c三邊必須滿足不等式

$$b+c>a>b\sim c.$$

否則本題不能解.

243. 作圖題十三.

設三角形二邊及對其一之角,作此三角形,



設三角形之二邊a, b及對於a之角A,作此三角形.

【解】 引一直線AX,從其一端A引直線AY,令

$\angle XAY=\angle A$; (作圖題四)

在直線AY上定C點,令$AC=b$;
次,以C為中心用a之長為半徑畫圓弧,此圓弧與AX之一交於B;
連結BC,得△ABC為所求之三角形.

【討論】 為便於討論起見,以此作圖題分作三種

而論之;

(第一)　$\angle A<R\angle$;

欲此題之成立,須$\frown BB'$與AX能相會;卽須半徑a不比從C向AX所引之垂線CD小;

由是

$a<CD$,則本題無解答;

$a=CD$,則弧切於AX而有一解,如圖中直角三角形ADC;

$\left.\begin{array}{l} a>CD \\ a<b, \end{array}\right\}$ 則弧BB'交AX於B, B'二點,且B, B'皆在A之右,故有二解,如△ABC, △AB'C.

$a=b$,　則B'與A相合,而僅得一解,爲二等邊三角形ABC;

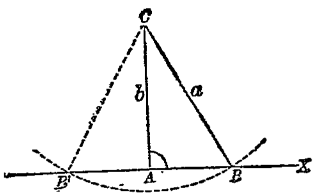
$a>b$,　則B'至A之左,故本題於此僅得一解.

(第二)　$\angle A=R\angle$;

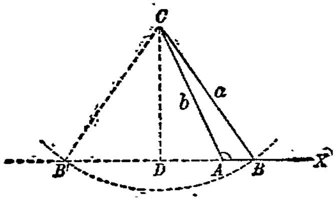
$a>b$,　時有解,但△ABC, △AB'C全相等,故僅可云有一解;

$a=b$,　無解;

$a<b$,　亦無解.



(第三)　$\angle A > R\angle$;



$a > b$ 時僅有一解,如 $\triangle ABC$;

$\triangle AB'C$ 中二邊 AC, $B'C$ 雖各等於所設二邊 b, a, 然其一角 CAB' 不等於所設角 A 而等於 A 之補角,故非本題之解;

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ a<b \end{array}\right\}\text{皆無解.}$$

總括以上討論,列表如下:

$a < CD$ 時必無解,

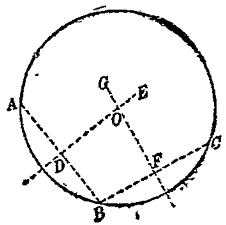
$$A<R\angle\begin{cases} a=CD\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有一解} \\ a>CD\begin{cases} a<b\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有二解} \\ a\geqq b\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有一解} \end{cases} \end{cases}$$

$$A=R\angle\begin{cases} a\leqq b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{無解} \\ a>b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有一解} \end{cases}$$

$$A>R\angle\begin{cases} a\leqq\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{無解} \\ a>b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有一解} \end{cases}$$

244. 作圖題十四.

求圓周或圓弧之中心.



設圓周或圓弧ABC,求其中心.

【解】 引任意二弦AB, BC;
作AB之垂直等分線DE, BC之垂直等分線FG;
二線交於O,則O爲所求之中心.

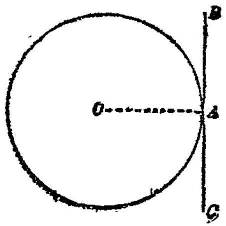
【證】 DE, FG各爲過中心之直線;(定理五系五)
且二直線之交點僅有一個;
故DE, FG之交點O爲所求之中心.

【注意】 欲過不在一直線上之三點畫圓周,其法從本題及定理十一可得之.

245. 作圖題十五.

從所設一點作一圓周之切線.

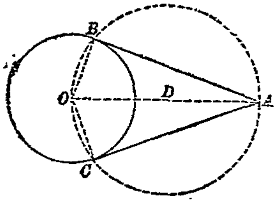
(1) 所設點在圓周之上.
求從圓周上一點A作此圓周之切線.



【解】 圓之中心爲O;
連結AO,從A引OA之垂線BAC;
BAC卽爲所求之切線.

【證】 因$OA \perp BC$, 故BC爲A點之切線.

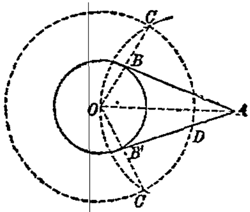
(2) 所設點在圓周之外,
求從圓周外一點A作此圓之切線



【解析一】 假定本題爲可解者,而AB爲所求之切線,
從切點B引半徑OB,則 $OB \perp AB$; (定理九)
故引直線OA,則B點在一軌跡上.此軌跡乃線分AO張一直角之點之軌跡,卽B爲以線分OA作直徑所畫圓周上之一點; (定理二十二系)
然B又爲所設圓周上之一點;
故B爲此二圓周之交點;
由是可得作圖之法如下:

【解】 設所設圓之中心爲O;
連結OA,求其中點D;
以D爲中心,DA或DO爲半徑畫一圓周.此圓周與所設圓周交於B及C;
連結AB,AC則AB,AC卽爲所求之切線.

【註】 解析者,假定問題可解或已解而逆推如何作圖之事也.



【解析二】 設AB爲所求之切線;
引半徑OB,且延長至C,令BC=OB;
連結AO,AC;
則C當在以O作中心O圓之直徑作半徑之圓周上;
又C當在以A作中心AO作半徑之圓周上; 因AB⊥OC而距程BO=BC故也.
由是又可得作圖之法如下:

【解】 以所設　之中心O作中心,用其直徑之長作半徑畫圓周CDC′;
又以A作中心用AO作半徑畫圓周COC′;
二圓周交於C,C′;
連結CO,C′O,從A向此二線引垂線AB,AB′;
則AB,AB′爲所求之切線,

【注意】 (1) AB=AB′;
(2) AO等分∠BAB′;
(3) AO垂直等分切點弦BB′.

246. 定義23. 外公切線,[1]內公切線.[2]

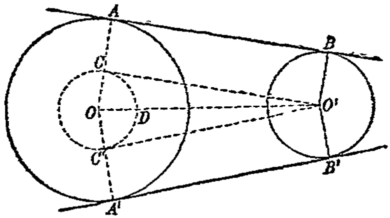
(1) 外公切線 Extrior tangent. (2) 內公切線 Interior tangent.

一直線同時切二圓而二圓在其同傍,則此直線爲二圓之外公切線;若二圓在其兩傍,則爲二圓之內公切線.

247. 作圖題十六.

設二圓周,作其公切線.

(第一) 設二圓O,O′,作其外公切線.



【解析】 設直線AB爲所求外公切線之一;從切點A,B引二圓之半徑OA,O′B;過O′引AB之平行直線O′C,交AO於C;

因 $CA\perp AB$, (定理九)

$O'B\perp AB$, ,,

$CO'\parallel AB$,

$\therefore$ ABO′C爲▱;

$\therefore$ $O'B=CA$;

$\therefore$ $OC=OA-O'B$;

故直線O′C切於中心O半徑$OC=OA-O'B$之圓周CDC′.

(定理八)

由是得作圖之法如下:

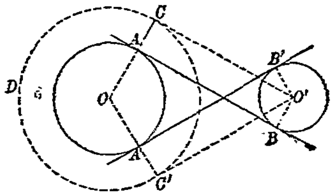
【解】 以大圓中心O作中心,二圓半徑之差OC作

半徑,畫圓周CDC′;
從小圓中心O′向圓周CDC′引切線O′C, O′C′;
乃引大圓之半徑OCA, OC′A′;
過A, A′引CO′, C′O′之平行直線AB, A′B′, 則AB, A′B′皆爲所求之切線.

【證】 略.

【討論】 所設二圓周,或相交,或外切,或一圓全在他圓之外,則中心距離OO′必比兩半徑之差OD大,故中心O′必在圓周CDC′之外,故此時從O′點向圓周CDC′可引二個切線,由是所設二圓周有二個外公切線,卽於此三種本題有二解.

若二圓內切,則僅有一解,卽在二圓切點之公切線.



(第二) 作所設二圓O, O′之內公切線.

【解析】 設直線AB爲所求內公切線之一;
從切點A, B引半徑OA, O′B;
過O′引AB之平行直線O′C, 交OA之延長線於C點;
則　　ACO′B爲□,
而　　O′B=CA;
$\therefore$　OC=OA+O′B;
卽直線O′C切於中心O半徑OC=OA+O′B之圓周.

由是得作圖之法如下:

【解】 以任意一圓之中心O爲中心,用二圓半徑之和OC爲半徑,畫圓周CDC′;

從又一圓之中心O′向圓CDC′引切線O′C, O′C′;

在第一圓中引半徑OAC, O′A′C′;

過A, A′各引O′C, O′C′之平行直線AB, A′B′;

AB, A′B′即爲所求之內公切線.

【證】 略.

【討論】 一圓全在他圓之外,則中心距離OO′比兩半徑和OC大,而中心O′必在圓周CDC′之外;故此時本題有二解,如上圖中之AB, A′B′.

若二圓外切,則中心距離等於半徑之和,而圓周CDC′可過中心O′;故此時本題僅有一解,即在二圓周切點之公切線.

二圓或相交,或內切,或一圓全在他圓之內,本題皆無解.

總核以上二次之討論,列表如下:

二圓周之一全在他圓之外,則有四個公切線,二個爲外公切線,二個爲內公切線.

二圓周外切,則有三個公切線,二個爲外公切線,一個爲內公切線.

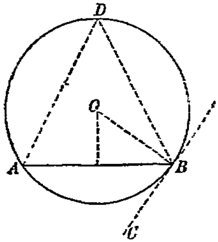
二圓周相交,則有二個公切線,皆爲外公切線.

二圓周內切,則僅有一個外公切線.

二圓周之一全在他圓之內,則內外公切線皆無.

248. 作圖題十七.

在所設線分上作一含有所設角之弓形.



AB爲所設線分,∠E爲所設角;求在AB上作一弓形含有∠E之等角.

【解析】 設弓形ADB含有∠E之等角;
引半徑OB,在B點引切線BC;

則　　$\angle ABC = \angle ADB$　　(定理十九)

$$= \angle E.$$

由是得作圖之法如下:

【解】 過線分AB之一端B引直線BC,令

$\angle ABC = \angle E$;　　(作圖題四)

從B引BC之垂線OB;　　(作圖題二)

再作線分AB之垂直等分線OF;　　(作圖題一)

以OB,OF之交點O爲中心,OB爲半徑,畫圓,則所得之弓形卽所求

【註】 所設角E爲銳角,則弓形比半圓周大;爲直角,則弓形爲半圓周;爲鈍角,則弓形比半圓周小.

249. 定義24. 內接圓,[1]傍接圓.[2]

切三角形三邊之圓名曰三角形之內接

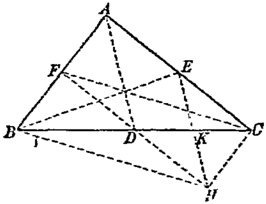
(1) 內接圓 Inscribed circle.　　(2) 傍接圓 Excribed circle.

圓,其中心曰內心.[1] 切三角形一邊及他二邊延線之圓名曰三角形之傍接圓,其中心曰傍心.[2]

【註】 三角形有一個內接圓及三個傍接圓.

250. 例.

例一. 設三角形之三中線,作此三角形.



【解析】 設ABC為三角形,AD,BE,CF為其三中線;引FC,BF之平行直線BH,CH,

則 BHCF為▱, ∴ BH=CF,

又 DH=FD;

然 $FD=\frac{1}{2}AC=AE$, FD//AC,

∴ DH=AE, DH//AC,

∴ AEHD為▱;

∴ HE=AD;

又 K為DC之中點,

而 $BC=\frac{4}{3}BK$.

由是得作圖之法如下:

【解】 以所設三中線為三邊作三角形BEH;

(作圖題十二)

(1) 內心 In-centre. (2) 傍心 Ex-centre.

引此三角形之一中線BK,更延長至C,令

$$BC=\frac{4}{3}BK;$$

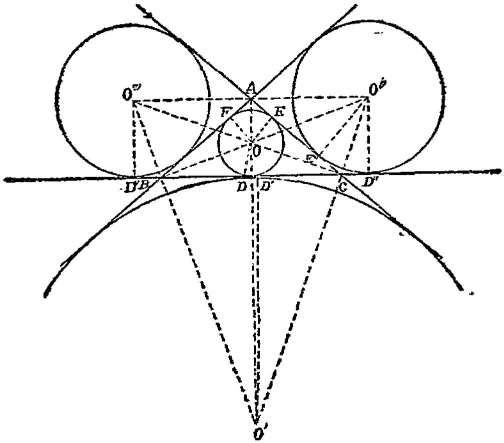
連結CE,更延長之至A,令

$$EA=CE;$$

連結AB,得△ABC爲所求之三角形.

【討論】欲此問題成立,須三中線之一比餘二中線之和小而比其差大,否則本題無解.

例二. 設△ABC,作其內接圓及傍接圓.



【解】作△ABC中二角B,C之二等分線,得其交點O,從O向三邊引垂線OD, OE, OF,則

$$OD=OE=OF;\qquad\text{(一編92款)}$$

故以O爲中心OD爲半徑畫圓,則其周可過D,E,F而切BC, CA, AB於此各點.

又三角形各外角之二等分線交於O', O'', O''',則此三

點皆在三邊等距離之處,故以此三點各爲中心自此至任意一邊之距離$O'D'$, $O''D''$, $O'''D'''$各爲半徑畫圓周,即得傍接圓.

問題

以下諸題舉其解及證,有當討論者詳細討論之;

(1) 在上例二中,AC平行於BC則若何?

(2) 設二點P, Q, 過P作直線,令與Q之距離等於定長.

(3) 在一所設直線上求一點,令與所設二點等距離.

(4) 設三點A, B, C, 過A作一直線,令從B,C二點至此直線之距離相等.

(5) 三等分一直角.

(6) 以所設半徑作一切於所設二直線之圓.

(7) 設⊙ABC,作一弦,令等於所設長,且等分所設弦AB.

(8) 設四點而以作圖之法察其是否在同一圓周上,其法若何?

(9) 作一直線,令過一所設點,且令其夾於所設二直線間之部分等於所設長.

(10) 設三角形三邊之中點,作此三角形.

(11) 設三角形之二邊及一中線(有二類),作此三角形.

(12) 設三角形之一邊及二中線(有二類),作此三角形.

(13) 設平行四邊形之一邊及二對角線,作此平行四邊形.

(14) 設菱形之一邊及一角,作此菱形.

(15) 設菱形之二對角線,作此菱形.

(16) 設菱形之一邊及一對角線作此菱形.

(17) 設矩形之一邊及對角線,作此矩形.

(18) 設矩形之一邊及二個對角線之夾角,作此矩形.

(19) 設相交二直線AB, CD及一點O,過O作一直線,令與二線交於P及Q而OP=PQ.

(20) 設二直線,求一點,令其與二線之距離各等於所設長.

(21) 設二直線及一點,別作一點,令與二直線之距離相等而與所設點之距離爲定長.

(22) 設三角形之一邊,在其一端之角,及他二邊之和或差,作此三角形.

(23) 設三角形之一邊,對此邊之角,及他二邊之和或差,作此三角形.

(24) 設三角形之二角及周,作此三角形.

(25) 設三角形之二角及二邊之和,作此三角形.

(26) 設三角形之二角及二邊之差,作此三角形.

(27) 設三角形之一邊,一角,及一個高,作此三角形.

(28) 設正三角形之高,作此三角形.

(29) 設正三角形內接圓之半徑作此三角形.

(30) 設正三角形外接圓之半徑,作此三角形.

(31) 設正方形之對角線,作此正方形.

(32) 設正方形之一邊與對角線之和,作此正方形

(33) 設正方形之一邊與對角線之差,作此正方形.

(34) 作一直線令平行於所設直線而切一所設圓.

(35) 作一直線令垂直於所設直線而切一所設圓.

(36) 作一直線,令與一所設直線夾成所設角而切一所設圓.

(37) 作一圓,令切一所設直線於其上之一定點,且切他一直線.

(38) 作一圓,令過一所設點,且切一所設直線於其上之一定點.

(39) 作一所設圓之割線,令過一所設點,且令其爲弦之部分等於所設長.

(40) 以所設半徑作一圓,令過一所設點,且切一所設直線.

(41) 以所設半徑作一圓,令過一所設點,且切一所設圓周.

(42) 以所設半徑作一圓,令切一所設直線,且切一所設圓周.

(43) 以所設半徑作一圓,令切於所設二圓周.

第二編之問題

(1) $\triangle ABC$之外心爲O,內心爲I.則

$$\angle OAI=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C).$$

(2) 從圓外一點O向此圓引二切線OA, OB,與圓周上任意一點P之切線交於D, E,則

$$AD+AE+DE \text{ 或 } AD+AE-DE$$

之長一定.

(3) 以圓之內接四邊形兩兩對邊延長相交,則其二個交角之等分線互相垂直.

(4) 諸三角形ABC, A'BC, A''BC,……等共有底BC而

其頂角A,A′,A″,……皆相等,且皆在底之同傍,則其諸頂角之等分線皆交於一點.

(5) 圓內接平行四邊形必爲矩形,或正方形.

(6) 圓外接平行四邊形必爲菱形或正方形.

(7) 設一線分,分之爲任意等分.

(8) 作一直線,平行於三角形之底且令其夾於二邊間之部分與二邊中隣接底邊部分之和或差相等.

(9) 從一點作各具有定長之三個線分,令其他端在一直線上,而其一爲他二之中點.

(10) 從所設一點作一直線,令與相交二定直線成一二等邊三角形.

(11) 有所設二直線X,Y,而A爲X上之一定點. 在X線上求一點M,令M與Y線之距離等於MA.

(12) 在三角形之底上求一點,令從此至各邊所引平行於他邊之二線分相等.

(13) 在所設圓周外求一點,令從此向圓周所引二切線之交角等於所設角.

(14) 以所設半徑作一圓令其中心在一所設直線上,且切於他一所設直線.

(15) 以所設半徑作一圓令其中心在一所設直線上,且切於一所設圓周.

(16) 以所設半徑作一圓,令其中心在一所設圓周上,且切於一所設直線.

(17) 以所設半徑作一圓,令其中心在一所設圓周上,且切於他一所設圓周.

(18) △ABC之垂心爲O,則四個三角形ABC,OBC,OCA,OAB之外接圓互相等.

(19) 切四邊形之各邊及其隣接二邊延長線作四個圓,則此四圓之中心在一圓周上

(20) $\triangle ABC$之垂心爲 O 而其垂足三角形爲 XYZ,則

(i) O爲$\triangle XYZ$之內心.

(ii) A, B, C爲$\triangle XYZ$之傍心.

(iii) $\triangle XYZ$爲$\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OBA$之垂足三角形.

(iv) A, B, C各爲$\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$之垂心.

(21) $\triangle ABC$之內接圓周切BC, CA, AB於 P, Q, R, 又其傍接圓周切BC於X, 切AC, AB之延長線於Y, Z, 則以a, b, c表BC, CA, AB之長且置$a+b+c=2p$時,

(i) $AY=AZ=p$.

(ii) $BZ=p-c$.

(iii) $AQ=AR=p-a$.

(iv) $PX=c\sim b$.

(22) 作一圓周,令過一所設點,且切所設圓周於其上之一定點.

(23) 過相交二圓周之交點引公共之割線令其夾於各圓中之弦相等.

(24) 設三角形之底,二底角之差,及二邊之和或差,作此三角形.

(25) 四直線無二個相平行者,欲從一點向此四直線所引垂線之足在一直線上,則其點之位置若何?

(26) 三角形之外心,垂心,重心,及九點圓之中心在一直線上.

(27) 九點圓之中心在垂心及外心之正中.

(28) 九點圓之半徑等於外接圓半徑之半分.

(29) 以圓內接四邊形 ABCD 之各邊爲弦畫任意圓周,此諸圓周兩兩相交,其交點爲 E,F,G,H,則四邊形 EFGH 可內接於圓.

(30) 在一正方形內作一內接正三角形,令其一頂點與正方形之一頂點相合.

(31) 在上題中三角形之一頂點在正方形一邊之中點則如何?

(32) 作一直線,令平行於一所設直線而與他二個所設相交直線交,且令其交點間之部分等於所設長.

(33) 作所設二圓周之公共割線,令其夾於各圓周間之弦各等於所設長.

(34) 作一圓,令切一所設圓周,且切一所設直線於其上之所設點.

(35) 作一圓,令切一所設直線,且切一所設圓周於其上之所設點.

(36) 作一圓,令切一所設圓周,且切他一所設圓周於其上之所設點.

(37) 在臺球臺上打一球,令其球衝擊於臺之四邊而最後復歸原位置,則初打時當取若何之位置? 又求其所經之路程.

(38) 以所設三點爲中心,作兩兩相切之圓.

(39) P 爲圓 O 內之一定點,在此圓周上求一點 Q,令 $\angle PQO$ 最大.

第三編

比及比例

緒論

251. 定義1. **倍量,[1]約量.[2]**

一量適爲同種類他量之若干倍,則前者名曰後者之倍量,後者名曰前者之約量.

例如以A, B表同種類之二量,而

$$A=nB, \qquad (n\text{爲正整數})$$

則A爲B之倍量, B爲A之約量.

252. 定義2. **可通約量.[3]**

二量均爲他一量之倍量,則此二量互相爲可通約量,第三量爲其公約量.[4]

例如 $A=mC,\quad B=nC,$

則A, B互爲可通約量,而C爲其公約量.

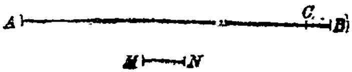
253. 定義3. **不可通約量.[5]**

無公約量之二量互相爲不可通約量.

254. 量之𩨨數.

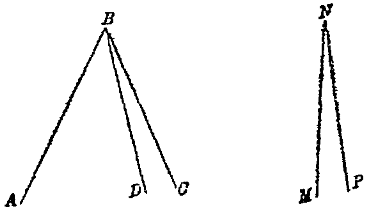
(1) 倍量 Multiple. (2) 約量 Measure, Submultiple.
(3) 可通約量 Commensurable quantity. (4) 公約量 Common measure.
(5) 不可通約量 Incommensurable quantity.

欲量度一量之大小,宜擇同種類之一量爲其單位,[1]而求此量含有幾倍單位或適爲單位幾分之幾.



例如欲量度線分AB之長,先定長之單位MN而求AB之中含有MN之幾倍;
今設AB適爲MN之6倍,則6爲AB對於單位MN之度數;若AB含有6倍MN之AC及小於MN之CB,則當更視CB適爲MN之幾分;假如CB含有MN之$\frac{59}{100}$倍,則CB對於MN之度數爲$\frac{59}{100}$,而AB之度數爲$6\frac{59}{100}$卽$\frac{659}{100}$.

倣此,欲度一角ABC之大小,可定角之單位MNP而求$\angle$ABC中含有$\angle$MNC之幾倍;



若$\angle$ABC含有$\angle$MNP之4倍,則4爲$\angle$ABC對於單位角$\angle$MNP之度數;
又若$\angle$ABC含有4倍$\angle$MNP之$\angle$ABD及小於$\angle$MNP之$\angle$DBC,

(1) 單位 Unite.

則當更視$\angle DBC$中含有$\angle MNP$之幾分;假如$\angle DBC$適合$\angle MNP$之$\frac{31}{60}$倍,則$\angle DBC$之度數爲$\frac{31}{60}$,而$\angle ABC$之度數爲$4\frac{31}{60}$或$\frac{371}{60}$.

【註】 長之單位及角之單位,至後章中論之.

255. 定義4. 比.[1]

一量取同種類之他量爲單位時,其度數名曰前一量對於後一量之比.

例如有種類二量A, B, 以B爲單位度A,則其度數爲A對於B之比,以符號

$$A:B$$

或

$$\frac{A}{B}$$

表之. A曰比之前項,[2] B曰比之後項.[3]

由是以B爲單位度A,與求A對於B之比,其演算之事全然相同可知.

若A, B二量爲不可通約量,則因此二量無公約量,而以B度A乃不能得精密之度數,然可別求一與B可通約之量A′而使A′與A之差爲無窮小;

以單位B分作n等分,則其一分之値爲$\frac{B}{n}$. 今假定A比$\frac{B}{n}$之m倍大而比$(m+1)$倍小;又假定A′適等於$\frac{B}{n}$之m倍;則

(1) 比 Ratio. (2) 前項 Antecident. (3) 後項 Conseque t.

$$\frac{m}{n}B<A<\frac{m+1}{n}B,$$

$$\frac{m}{n}B=A',$$

然則A'比A所小者不及B之$\frac{1}{n}$. 而從n至極大時此差可至極小. 若n之值無窮增加,則A'無窮接近於A,其極限可逕視爲A.

故在計算上之應用不妨以A'代A,而以比$\frac{A'}{B}$表A與B之比.

256. 定義5. 比例量.[1]

同種類二量A, B之比等於他同種類二量C, D之比,則曰此四量成比例,而四量爲比例量,表以

$$A:B::C:D,$$

讀曰A之於B如C之於D;或記爲

$$A:B=C:D,$$

讀曰A比B等於C比D; 而A與D名曰比例之外項,[2] B與C曰內項,[3] D曰A, B, C之第四比例項;[4] 二前項A與C相對應,二後項B與D相對應.

比例式(1)亦可記爲

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

【註】 A,B,C,D爲比例量,則A與B必當爲同種類

(1) 比例量 Proportionals.　(2) 外項 Extremes.

(3) 內項 Intrems.　(4) 第四比例項 Fourth proportional.

之量,C與D必當爲同種類之量,A,B與C,D不必定爲同種類之量.

同類二量A, B之比等於以同一單位度此二量所得二個度數a, b之比(定義4),即

$$A:B=a:b,$$

倣此,C, D之度數爲c, d,則

$$C:D=c:d,$$

故(1)之比例式可以

$$a:b=c:d$$

代之.以故數字所作比例式之性質可擴充之以作任意量所成比例式之性質,但以各數視作各量對於同一單位之度數可矣.

若同種類之三個量成比例式

$$A:B=B:C,$$

則曰此三量成連比例,[1] 而C爲A, B之第三比例項,[2] B爲A, B之比例中項.[3]

257. 定義6.　反比.[4]

一比A:B與交換其兩項所成之比B:A互相爲反比.

258. 定理(a).

A:B=C:D, 則B:A=D:C.

【證】　本定理就可通約量之證法可與代數學中之證法全然相同,略之.

(1) 連比例 Continued proportion.　(2) 第三比例項 Third proportional.
(3) 比例中項 Proportional mean.　(4) 反比 Reciprocal ratios.

【注意】 此定理名曰反比定理,[1]略曰反理.

【註】 於此所舉諸定理為比例之基礎性質,其用處不僅限於幾何學中,推之於一切量皆可. 凡有不加證明者,以其理簡而甚易,學者在代數學中已得之故也.

259. 定理(b).

$A:B=C:D$, 則

(i) $mA:mB=A:B$; (ii) $mA:mB=nA:nB$.

260. 定理(c).

在 $A:B=C:D$ 四項為同種類之量,則

$$A:C=B:D.$$

【注意】 此定理名更比定理,[2]略曰更理.

261. 定理(d).

在 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$

中,各項為同種類之量,則

$$A:B=(A+C+E+\cdots\cdots):(B+D+F+\cdots\cdots).$$

【證】 置 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\cdots\cdots=r,$

則 $A=rB,\quad C=rD,\quad E=rF,\cdots\cdots$

$\therefore\quad A+C+E+\cdots\cdots=r(B+D+F+\cdots\cdots),$

$$\therefore\quad \frac{A+C+E+\cdots\cdots}{B+D+F+\cdots\cdots}=r;$$

然 $$\frac{A}{B}=r,$$

$$\therefore\quad \frac{A}{B}=\frac{A+C+E+\cdots\cdots}{B+D+F+\cdots\cdots},$$

(1) 反比定理 Invertendo. (2) 更比定理 Alternando.

即 $A:B=(A+C+E+\cdots):(B+D+F+\cdots)$.

【注意】 此定理名曰加比定理,[1]略曰加理.

262. 定理(e).

$A:B=C:D$, 則 $A+B:B=C+D:D$.

【證】
$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$
$$\therefore\ \frac{A}{B}+1=\frac{C}{D}+1,$$
$$\therefore\ \frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D},$$

即 $$A+B:B=C+D:D.$$

【注意】 此定理名曰合比定理,[2]略曰合理.

263. 定理(f).

$A:B=C:D$, 則 $A\sim B:B=C\sim D:D$.

【注意】 此定理名曰分比定理,[3]略曰分理.

264. 定理(g).

$A:B=C:D$, 則 $A+B:A\sim B=C+D:C\sim D$.

【證】 從(e), $\frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D}$,

從(f), $$\frac{A\sim B}{B}=\frac{C\sim D}{D},$$

由後一式,得 $$\frac{B}{A\sim B}=\frac{D}{C\sim D},\qquad\text{(反理)}$$

由此 $$\frac{A+B}{B}\times\frac{B}{A\sim B}=\frac{C+D}{D}\times\frac{D}{C\sim D},\qquad\text{(普通公理)}$$

(1) 加比定理 Addendo.　(2) 合比定理 Componendo.
(3) 分比定理 Dividendo.

即 $$\frac{A+B}{A\sim B}=\frac{C+D}{C\sim D},$$

即 $$A+B:A\sim B=C+D:C\sim D.$$

此爲合比及分比定理.

265. 定理(h).

若 $A:B=X:Y,\quad B:C=Y:Z;$

或 $A:B=Y:Z,\quad B:C=X:Y;$

則 $$A:C=X:Z.$$

【證】 $$\frac{A}{B}=\frac{X}{Y},\quad \frac{B}{C}=\frac{Y}{Z},$$

$$\therefore\quad \frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{X}{Y}\times\frac{Y}{Z},$$

$$\therefore\quad \frac{A}{C}=\frac{X}{Z},$$

即 $$A:C=X:Z.$$

266. 定理(i).

$$(A:B)(B:C)=A:C.$$

【證】 置 $$\frac{A}{B}=m,\quad \frac{B}{C}=n,$$

則 $$A=mB,\quad B=nC,$$

$$\therefore\quad A=mnC,$$

$$\therefore\quad \frac{A}{C}=mn;$$

然 $$\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=mn,$$

故 $$(A:B)(B:C)=A:C.$$

【注意】 以上諸定理皆就可通約量證之,然就255

欵不可通約量之比可以可通約量之比表其近似值,故此諸定理對於不可通約量之比亦可通用.

267. 定義7. 相乘比.[1]

一比等於二比 A:B, C:D 之積,則此比爲彼二比之相乘比. 以(A:B)(C:D)或A.C:B.D表之.

268. 定義8. 二乘比,[2] **三乘比.**[3]

相等二比之相乘比爲其二乘比. 相等三比之相乘比爲其三乘比. 其餘類推.

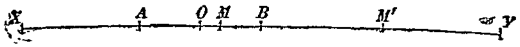
A:B之二乘比以$(A:B)^2$或$A^2:B^2$記之. 三乘比等記法倣此.

【注意】 記法$A^2:B^2$及$A^3:B^3$係表「比A:B」之二乘冪及三乘冪,決非A之二乘冪,三乘冪與B之二乘冪,三乘冪之比也. 惟$A^2:B^2$可視作用同一單位測A及B所得數數之平方比.

第一章 比例線[4]

269 定理一.

在一直線上與二個所設點之距離之比等於定値之點有二個而僅有二個.



XY爲所設直線,A, B爲其上之所設二點,$\frac{m}{n}$爲定值,在

(1) 相乘比 Compound ratio.
(2) 二乘比 Duplicate ratio.
(3) 三乘比 Triplicate ratio.
(4) 比例線 Proportional lines.

此線上取某點使其與A, B距離之比等於$\frac{m}{n}$,如此之點可有二點而僅有二點

【證】 先假定 $\frac{m}{n}>1$.

設想一點P在線XY上循自X至Y之方向移動.
P在A左無窮遠之距離時PA:PB殆等於1, P離A漸近,比PA:PB之值漸次減少,至P與A合,則其值爲0.
以故P在A之左時,PA:PB決不能比1大而爲$\frac{m}{n}$.
P點從A向右運動而近於B,則PA:PB之值從0起漸次增大,至P與AB之中點O合,則

$$PA:PB=1;$$

P尚向右行,則PA:PB之值從1起漸次增大,至P與B無窮接近時,PA:PB之值大至無窮,可用符號∞表之(∞讀曰無窮大).
P更從B向右運動,則比PA:PB之值從∞起漸次減少,第恒比1大,迨P至B右無窮遠之處時,比PA:PB之值無窮接近於1.

以故欲PA:PB之值比1大而等於$\frac{m}{n}$,則P點之位置不出二個區域,一在O, B二點之間,一在B點之右.
即在O, B二點間可有一點M,在B點之右可有一點M′合於

$$MA:MB=m:n,$$

及 $$M'A:M'B=m:n,$$

倣此, $$\frac{m}{n}<1,$$

則適合 $$PA:PB=m:n$$

之P點位置不出二個區域,一在A點之左,一在A,O二點之間.

總之適合 $PA:PB=m:n$

之P點位置必有二個而僅有二個.

【註】 $\frac{m}{n}=1$,則P點之位置一當在AB之中點O,一當在離A及B無窮遠之處.此時雖尙可云有二點,實則在圖形上已不復能見其一之位置矣.此等理論在初等幾何學中恒爲存而不論之事.

270. 長之單位.

當度長時,先須定其單位,在理論中可任意定之,至實用時則有通行之種種單位.

長之單位用之最廣者爲尺,其十倍曰丈,其十分之一曰寸,其餘如下表:

1丈=	10尺=	100寸=	1000分=	10000釐
	1尺=	10寸=	100分=	1000釐
		1寸=	10分=	100釐
			1分=	10釐

又3.125尺爲一公尺,在物理之計算中恒用之.

測量地面之距離,大者單位用里,小者用步,測量鐵路電線則用哩,測量航路用浬,其各單位間之關係,詳載於算術書中,今不贅.

271. 分點與定點間之距離.

命二定點A,B間之距離爲a,求從M,M′至A,B之距離.則從關係式

$$\frac{MA}{m}=\frac{MB}{n}=\frac{MA+MB}{m+n}=\frac{AB}{m+n}=\frac{a}{m+n},$$

可得

$$\mathrm{MA}=\frac{m}{m+n}a,$$

及

$$\mathrm{MB}=\frac{n}{m+n}a.$$

此二者顯然皆比 1 小.

次, M 點在 B 點之右,則

$$\frac{\mathrm{M'A}}{m}=\frac{\mathrm{M'B}}{n}=\frac{\mathrm{M'A}-\mathrm{M'B}}{m-n}=\frac{\mathrm{AB}}{m-n}=\frac{a}{m-n}.$$

故

$$\mathrm{M'A}=\frac{m}{m-n}a,$$

$$\mathrm{M'B}=\frac{n}{m-n}a,$$

m 比 $m-n$ 大,則 M'A 比 a 大,然 n 比 $m-n$ 大或小不能定,故 M'A, M'B 可比 a 大,亦可比 a 小,且可等於 a.

272. 定義 1.　內分.外分.

MA+MB=AB,則 M 點爲內分 AB 之點. M'A∼M'B=AB,則 M' 點爲外分 AB 之點. 從分點 M 或 M' 至 A,B 距離之比等於所設比.則此分點爲以所設比內分或外分 AB 之點.

【注意】

$$\mathrm{MA}:\mathrm{MB}=m:n,$$
$$\mathrm{M'A}:\mathrm{M'B}=m:n,$$

則

$$\mathrm{MA}:\mathrm{MB}=\mathrm{M'A}:\mathrm{M'B}. \qquad (1)$$

273. 定義 2.　調和點列.(1)

M, M' 二點以同比內分及外分 AB 間之距離,則此二點爲以線分 AB 分於調和. A,

(1) 調和點列 Harmonical range.

M, B, M′ 四點曰調和點列,而 M, M′ 爲對於 A, B 二點之調和相屬點.[1]

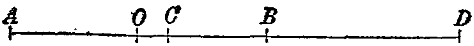
反之, A, B 爲對於 M, M′ 二點之調和相屬點. 何則,從比例式(1),

$$MA:M'A=MB:M'B \qquad \text{(更理)}$$

卽 A, B 二點爲以同比分線分 MM′ 之二分點也.

274. 定理二.

二點以一線分分於調和,則此線分之半爲從此二點至線分中點所得二距離之比例中項.



線分 AB 爲 C, D 二點分於調和,而 AB 之中點爲 O,

則 $$CO:AO=AO:DO.$$

【證】 $$CA:CB=DA:DB, \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore\ CA+CB:CA-CB=DA+DB:DA-DB; \qquad \text{(合比及分比定理)}$$

然
$$CA+CB=AB=2AO,$$
$$CA-CB=(AO+CO)-(BO-CO)$$
$$=2CO, \qquad (\because\ AO=BO)$$
$$DA+DB=(DO+AO)-(DO-BO)$$
$$=2DO,$$
$$DA-DB=2AO,$$
$$\therefore\ 2AO:2CO=2DO:2AO,$$

(2) 調和相屬點 Conjugate harmonical points.

或　$AQ:CO=DO:AO$,

或　$CO:AO=AO:DO$.　(反理)

275. 系. (定理二之倒).

O爲線分AB之中點,C,D二點在此直線上O點之同傍,而AO爲CO,DO之比例中項,則C,D二點對於A,B二點爲調和相屬點.

【證】　$CO:AO=AO:DO$,　(假設)

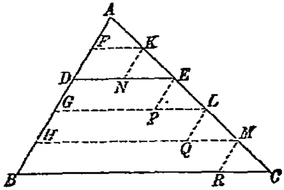
$\therefore CO+AO:CO\sim AO=AO+DO:AO\sim DO$,(合比及分比定理)

即　$AC:CB=AD:BD$;　($\because AO=BO$)

故C,D爲A,B之調和相屬點.

276. 定理三.

一直線平行於三角形之底,則此直線所分二邊上之部分成比例.



一直線平行於$\triangle ABC$之底BC而與AB,AC或其延線各交於D,E,則

$$AD:DB=AE:EC.$$

【證】　先設D爲AB之內分點,

若　$AD:DB=m:n$,

則AD,DB有公約量.　而AB等於此公約量之m倍,DB等於其n倍.

以AD分作m等分,DB分作n等分,則此各部分卽爲AD及DB之公約量,名其各分點爲F, G, H (圖中m爲2,n爲3);

過F, G, H引底邊之平行直線各與AC會於K, L, M;

則 $AK=KE=EL=LM=MC.$

過K, L, M,引AB之平行直線,各與DE, GL, HM, BC會於N, P, Q, R;

則 $KN=FD, EP=DG, LQ=GH, MR=HR.$

故△AFK, △KNE, △EPL,中,一邊及其兩端之角各相等,故皆爲全等形;

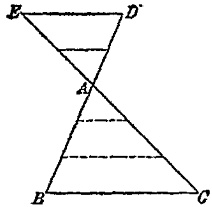
由是 $AK=KE=EL=LM=MC,$

卽AEm等分於K(圖中爲2等分),ECn等分於L, M;

故 $AE:EC=m:n;$

然 $AD:DB=m:n,$ (假設)

$\therefore$ $AD:DB=AE:EC,$ ……………………(1)



D爲AB之外分點證法可全然相同.

277. 系一.

$AB:BD=AC:CE,$ ……………………(2)

$AB:AD=AC:AE.$ ……………………(3)

又由(1),(2),(3)三個比例式用更理得

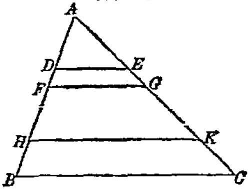
$AD:AE=BD:CE,$

$$AB:AC=BD:CE,$$

$$\therefore\quad AD:AE=BD:CE=AB:AC.$$

278. 系二.

平行於三角形底引多數直線,則二邊上所分各部分之比互相等.



引直線DE, FG, HK平行於△ABC之底BC而分AB於D, F, H, 分AC於E, G, K, 則可

$$AD:AE=DF:EG=FH:GK=HB:KC.$$

因此諸比皆等於AB:AC故也.

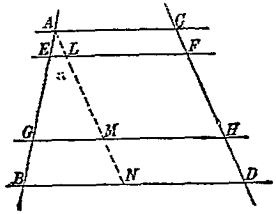
279. 系三.

數多平行線與二直線相交,則其各部分之比相等.

AC, EF, GH, BD爲諸平行直線, AB, CD各交此諸直線於A, E, G, B, 及C, F, H, D,

則

$$AE:CF=EG:FH=GB:HD.$$



【證】 過A引CD之平行直線ALMN,

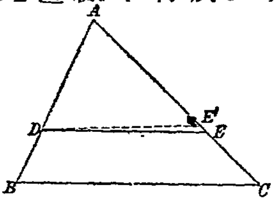
則 $AE:AL=EG:LM=GB:MN$; (系二)

然 $AL=CF,\quad LM=FH,\quad MN=HD$,

$\therefore\quad AE:CF=EG:FH=GB:HD$.

280. 定理四. (定理三之倒).

一直線分三角形二邊而其所得之各部分成比例,則此直線平行於三角形之第三邊.



直線DE與△ABC之二邊AB, AC各交於D, E,而

$$AD:DB=AE:EC,$$

則 $DE /\!/ BC$.

【證】 $AD:DB=AE:EC$, (假設)

則 $AD+DB:DB=AE+EC:EC$, (合理)

即 $AB:DB=AC:EC$;……………………(1)

過D引直線DE′平行於BC而交AC於E′,

則從定理三系一,

$AB:DB=AC:E'C$;……………………(2)

比較(1)及(2),得

$$AC:EC=AC:E'C,$$

$\therefore\quad EC=E'C$;

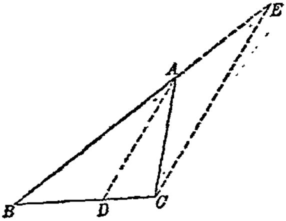
故E′與E不得不相合;

由是直線DE′與DE相合;

然 DE′//BC,　故　DE//BC.

281. 定理五.

三角形頂點之內角等分線或外角等分線以此三角形之底分於他二邊之比.



(1) 直線AD等分在△ABC頂點A之內角BAC而交底BC於D,

則　$BD:DC=BA:AC.$

【證】 過C引直線,平行於AD而與BA之延線會於E;

則因　$AD//EC,$

故　$\angle ACE=\angle CAD,$

$\angle AEC=\angle BAD;$

然　$\angle CAD=\angle BAD,$

$\therefore\ \angle ACE=\angle AEC,$

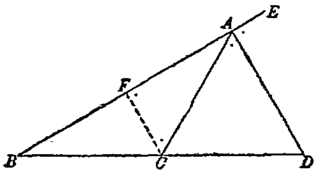
$\therefore\ AE=AC;$ ……………………………(1)

在△BCE中,AD平行於其一邊CE,

故　$BD:DC=BA:AE;$　(定理三)

故從(1),得　$BD:DC=BA:AC.$

(2) 直線AD等分在△ABC頂點A之外角CAE而交底BC之延線於D,



則 $BD:DC=BA\cdot AC$.

【證】 過C引AD之平行直線CF,與AB會於F,

則因 $FC /\!/ AD$,

故 $\angle ACF=\angle CAD$,

$\angle AFC=\angle EAD$;

然 $\angle CAD=\angle EAD$,

$\therefore \angle ACF=\angle AFC$;

$\therefore AF=AC$; ……………………………………(2)

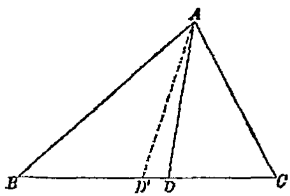
在$\triangle BAD$中,FC平行於其一邊AD,

$\therefore BD:DC=BA:AF$; (定理三)

故從(2), $BD:DC=BA:AC$.

282. 定理六. (定理五之倒).

從三角形頂點所引之直線若內分或外分底所得二部分之比等於他二邊之比,則此直線等分在頂點之內角或外角.



(1) AD為從△ABC之頂點A向底BC所引之直線.

而 $$BD:DC=BA:AC,$$

則AD等分∠BAC.

【證】 引∠BAC之等分線AD′,與底BC會於D′,則從

前款, $$BD':D'C=BA:AC;$$

然 $$BD:DC=BA:AC, \quad \text{(假設)}$$

故D′不得不與D相合,因線分BC內分於比BA:AC之分點僅有一個故也;

由是可知直線AD為∠BAC之等分線.

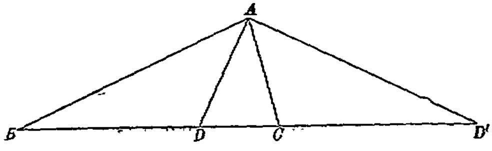
(2) AE為從△ABC頂點A向底BC之延線所引之直線,而

$$BE:EC=BA:AC,$$

則AE等分在A之外角.

證法與(1)全同,今略之.

283. 設三角形三邊之長,求其一角之等分線分對邊所得二部分之長.



在△ABC中∠A之等分線交BC於D,其外角之等分線交BC於D′,求BD, DC, BD′, D′C之長.

(1) 求BD, DC之長.

設 $$BC=a, \quad CA=b, \quad AB=c;$$

從 $$BD:DC=BA:AC,$$

得 $$BD:BA=DC:AC, \quad \text{(更理)}$$

或 $$\frac{BD}{BA}=\frac{DC}{AC},$$

卽 $$\frac{BD}{c}=\frac{DC}{b};$$

由是 $$\frac{BD+DC}{c+b}=\frac{BD}{c}=\frac{DC}{b};$$

然 $$BD+DC=BC=a,$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b+c}=\frac{BD}{c}=\frac{DC}{b};$$

$$\therefore\quad BD=\frac{ca}{b+c},\qquad DC=\frac{ab}{b+c}.$$

(2) 求BD′, D′C之長,

如前得 $$\frac{BD'}{c}=\frac{D'C}{b},$$

$$\therefore\quad \frac{BD'-D'C}{c-b}=\frac{BD'}{c}=\frac{D'C}{b};$$

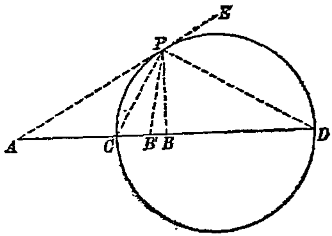
然 $$BD'-D'C=BC=a,$$

$$\therefore\quad \frac{a}{c-b}=\frac{BD'}{c}=\frac{D'C}{b};$$

$$\therefore\quad BD'=\frac{ca}{c-b},\qquad D'C=\frac{ab}{c-b}.$$

284. 定理七.

從一點至所設二點距離之比恆等於所設比,則此點之軌跡爲一圓周.



A, B 爲所設二點, $m:n$ 爲所設比, 一動點 P 恒依

$$PA:PB=m:n$$

之條件運動,則 P 點之軌跡可爲一圓周.

【證】 在 AB 上取二點 C, D, 令

$$CA:CB=DA:DB=m:n,$$

則 C, D 爲所求軌跡上之二點;

設 P 爲軌跡上之任意一點,連結 PA, PB, PC, PD,

則從假設, $PA:PB=m:n,$

$$\therefore\ CA:CB=DA:DB=PA:PB;$$

故 PC, PD 各爲 $\angle APB$ 及其補角 $\angle BPE$ 之二等分線;

因二隣角互爲補角,則其二等分線所成之角爲直角,

故 P 點對於定線分 CD 之角恒爲直角;

故 P 點之軌跡爲以 CD 作直徑之圓周.

(二編定理二十二系)

285. 系. (本定理之倒).

P 爲以 CD 作直徑所畫圓周上之任意點,則從 P 至 A, B 二點距離之比恆等於 m:n.

【證】 過 P 點引直線 PB′, 令 B′ 與 A 在 C 點之兩傍,

而 $\angle CPB'=\angle CPA;$

則因直線 PC 爲 $\triangle APB'$ 中一角 APB′ 之等分線,

故垂直於 PC 之 PD 可等分此角之外角 B′PE;

由是 $CA:CB'=DA:DB,$

或 $CA:DA=CB':DB';$ ……………………………(1)

然 $CA:CB=DA:DB,$ (假設)

或 $CA:DA=CB:DB;$ ……………………………(2)

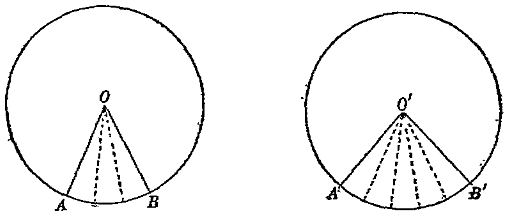
從 (1), (2), 可知 B′ 當與 B 合;

何則,因定線分CD分於CA:DA之比所得之內分點僅有一個故也.　(定理一)

由是　$PA:PB=CA:CB=m:n$.

236. 定理八.

在同圓或等圓中,二中心角之比等於其所立弧之比.



在相等二圓O,O′中,

中心角AOB:中心角A′O′B′$=\frown AB:\frown A'B'$.

【證】　設　$AB:A'B'=m:n$,

則AB,A′B′有公約量;

以AB,A′B′各分作m等分,n等分,則此各部分可為AB,A′B′之公約量,故相等;

過各分點引半徑,則此等各半徑順次所夾之角皆立於等弧上,故相等;　(二編定理十五)

卽$\angle AOB$含此等角之m倍,$\angle A'O'B'$含此等角之n倍;

故　$\angle AOB:\angle A'O'B'=m:n$;

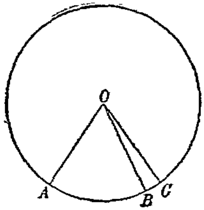
$\therefore$　$\angle AOB:\angle A'O'B'=\frown AB:\frown A'B'$.

【注意】此定理又可如下述之:

一圓之中心角比例於對此之弧.

287. 系.

取立於單位弧上之中心角作角之單位,則表中心角之度數同於表其二邊所夾弧之度數.



以$\frown$BC爲弧之單位,立於其上之中心角BOC爲角之單位,則表中心角AOB之度數與表$\frown$AB之度數可相同.

【證】　$\angle$AOB之度數係表比

$$\frac{\angle AOB}{\angle BOC}$$

之數值;$\frown$AB之度數係表比

$$\frac{\frown AB}{\frown BC}$$

之數值;

然依前款之定理,

$$\angle AOB:BOC=\frown AB:BC,$$

即

$$\frac{\angle AOB}{\angle BOC}=\frac{\frown AB}{\frown BC};$$

故$\angle$AOB之度數同於$\frown$AB之度數.

288. 弧之單位.

度弧所用之單位,慣例爲一象限,即圓周四分之一;從

此角之單位爲一直角,因立於象限弧上之中心角爲一直角故也.

有時欲用小於一象限之單位,可以一象限分作90等份,名其一份曰度,(1) 更以一度分作60等份,名其一份曰分,(2) 更以一分分作60等份,名其一份曰秒.(3)

故全圓周中含有360度,卽21600分,或1296000秒,列表如下:

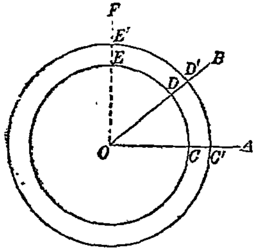
1圓周	=4象限	=360度	=21600分	=1296000秒
	1	=90	=5400	=32400
		1	=60	=3600
			1	=60

度分秒恆用記號°,′,″表之. 例如36度47分58秒記爲36°47′58″.

【證】 同度數之弧其長不一定,蓋弧之長短比例於其半徑之大小故也.

289. 定理九.

以一角之頂點爲中心用相異二半徑畫二圓周,則此角二邊所夾之二弧含相同之度



(1) 度 Degree.　(2) 分 Minute.　(3) 秒 Second.

數.

以$\angle AOB$之頂點O爲中心畫二圓周,其二邊OA,OB所夾之二弧爲CD,C′D′,則此二弧所含之度數相同.

【證】 過O點引OA之垂線OF,與二圓周各交於E,E′;

則　$\frown CD:\frown C'E=\angle AOB:\angle AOF,$　(定理八)

又　$\frown C'D':\frown C'E'=\angle AOB:\angle AOF,$

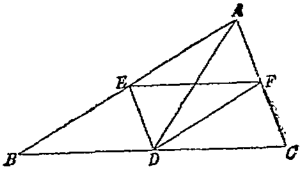
$\therefore\quad \frown CD:\frown CE=\frown C'D':\frown C'E';$

然$\frown CE,\frown C'E'$均含$90°$,故$\frown CD,\frown C'D'$所含之度數相同.

290. 例.

例一. 引$\triangle ABC$之一中線AD,又引$\angle ADB,\angle ADC$之等分線DE,DF,各與AB,AC交於E,F,則

$$EF /\!/ BC.$$



【證】　$AE:EB=AD:DB,$　(定理五)

$AF:FC=AD:DB;$　,,

然　$DB=DC,$　(假設)

$\therefore\ AE:EB=AF:FC;$

$\therefore\quad EF/\!/BC.$　(定理四)

例二. 在$\triangle ABC$中,$AB=84$尺,$AC=56$尺,在邊AB上取一點D,令$AD=28.8$尺,過D引BC之平行直線交AC於E,則AE,EC二部分各長幾何?

【解】 $DE /\!/ BC,$ (假設)

$\therefore \quad AB:AC=AD:AE,$ (定理三系一)

即 $84:56=28.8:AE;$

$\therefore \quad AE=\dfrac{56\times 28.8}{84}=19.2$尺,

$EC=56-19.2=36.8$尺.

問 題

(1) 在一直線上有二點A,B,其距離爲100寸. 在此線上再求一點M,令AM:MB=4:7.

(2) △ABC中,AB=100寸,AC=82寸. 在邊AB上取三點令其與A之距離各爲20寸,45寸,72寸. 過此諸點引BC之平行直線,則此諸直線截AC所得各部分之長若何?

(3) △ABC中,AB=100尺,AC=85尺. 今在此二邊上各取D點及E點,令AD=44尺,AE=37.4尺,連結DE,則直線DE能否與邊BC平行?

(4) △ABC中,AB=30寸,BC=80寸,CA=65寸. 求∠A內外等分線所分BC上各部分之長.

(5) D,E,F爲△ABC各邊之中點,連結DE,以AC.BC之比內分之於G,則直線GF等分∠DFE.

(6) 從△ABC邊BC上任意一點D引一直線,與∠A之等分線平行而與AC,AB,或其延線會於E,F,則

DB:DC=FB:EC.

(7) 在△ABC一邊BC上畫一正方形BCDE,令與A分居BC之兩傍;連結AE,AD,各與BC交於F,G,則FG可爲△ABC內接正方形之一邊.

(8) h爲△ABC中從A向BC之高,a爲邊BC之長;在此

三角形內作一內接正方形,令其一邊與BC相合,求此正方形各邊之長.

(9) A,B,C爲同圓周上之三點,而

$\frown AB=25$ 寸, $\frown BC=32$ 寸, 中心角 $AOB=43°52'18''$;

則(i)中心角BOC之度數若何?

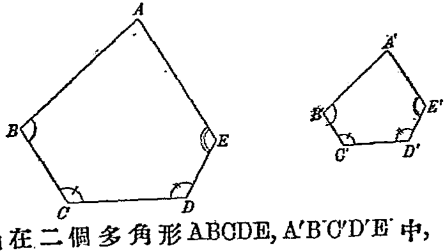
(ii)此圓周之長若何?

(10) 圓周長1000尺,則對於中心角32°之弧長若何?

第二章　相似形

291. 定義3.　等角多角形.(1)

一多角形之各角順次等於他多角形之各角,則此二形曰等角多角形;其兩兩相等之角曰對應角,在對應角間之邊曰對應邊.



例如在二個多角形ABCDE, A'B'C'D'E'中,

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$

則此兩形爲等角多角形;而∠A與∠A', ∠B與∠B',等各爲對應角; AB與A'B', BC與B'C'等各爲對應邊.

292. 定義4.　相似多角形.(2)

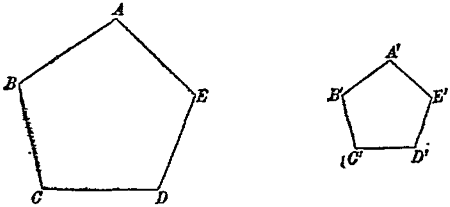
(1) 等角多角形 Equiangular polygon.

(2) 相似多角形 Similar polygon.

二個等角多角形之對應邊成比例,則此二形曰相似多角形,或略曰相似形.

293. 定義5. 相似比.[1]

在二個相似多角形中任意一雙對應邊之比名曰二個多角形之相似比.



例如在二個等角多角形ABCDE, A'B'C'D'E'中,

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$,

且 $AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DE:D'E'=EA:E'A'$,

則此二形爲相似形.

用記號∽表多角形之相似,如

$$ABCDE \backsim A'B'C'D'E',$$

而任意對應邊之比

$$AB:A'B'$$

爲二個多角形之相似比.

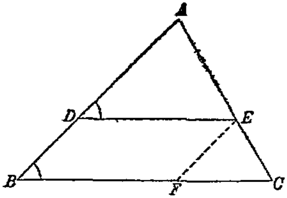
【注意】 在二個相似三角形ABC, A'B'C'中任意一雙對應邊AB, A'B'各對於相等角C, C'.

294. 定理十.

一直線平行於三角形之一邊而與他二

(1) 相似比 Ratio of similitude.

邊相會,則此直線與相會二邊所成之三角形爲原三角形之相似形.



一直線平行於$\triangle ABC$之一邊BC而會他二邊於D,E,

則　$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

【證】 (第一) 因　$DE /\!/ BC$,

故　$\angle ADE = \angle B$,　$\angle AED = \angle C$,

故二個三角形爲等角形.

(第二) 因　$DE /\!/ BC$,

故　$AD:AB = AE:AC$;……………………(1)　(定理三)

過E引AB之平行直線EF,會BC於F,

則　$AE:AC = BF:BC$;

然　BFED爲▱,

故　$BF = DE$,

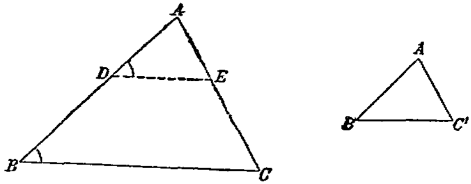
而　$AE:AC = DE:BC$;……………………(2)

從(1),(2),　$AD:AB = AE:AC = DE:BC$;

故　$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

295. 定理十一.

兩三角形中二角各相等,則此兩形爲相似形.



在兩三角形ABC, A'B'C'中,

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',$$

則 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

【證】 在A'B'之對應邊AB上取D點,令

$$AD=A'B';$$

過D引DE,平行於BC;

則 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$; (定理十)

由此 $\angle ADE=\angle ABC$;

然 $\angle ABC=\angle A'B'C'$. (假設)

故 $\angle ADE=\angle A'B'C'$;

又 $\angle A=\angle A'$,

$AD=A'B'$,

$\therefore \quad \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$; (一編定理八)

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

296. 系一.

兩直角三角形之一銳角相等,則兩形爲相似形.

297. 系二.

兩二等邊三角形中,

(1) 頂角相等; (2) 一底角相等;

則兩形爲相似形.

298. 系三.

直角三角形以對於斜邊之高分之,所得二個三角形皆爲原三角形之相似形. 而此高爲其所分底上兩部分之比例中項.

299. 定理十二.

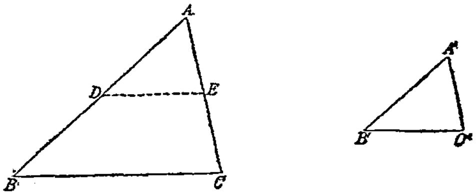
兩三角形之二邊成比例,且其夾角相等,則兩形爲相似形.

在二個三角形ABC,A'B'C'中,

$$A'B':AB=A'C':AC, \qquad\cdots\cdots(1)$$

且 $$\angle A'=\angle A,$$

則 $$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$



【證】 在A'B'之對應邊AB上取D點,令

$$AD=A'B';$$

過D引DE,平行於BC而會AC於E;

則 $$AD:AB=AE:AC; \qquad (定理三)$$

然 $$AD=A'B',$$

$$\therefore\ A'B':AB=AE:AC; \qquad\cdots\cdots(2)$$

從(1)及(2),得 $$A'C':AC=AE:AC,$$

$\therefore\quad AE=A'C'$;

由是在二個三角形ADE, A'B'C'中,

$$\begin{cases} AD=A'B', \\ AE=A'C', \\ \angle A=\angle A', \end{cases}$$

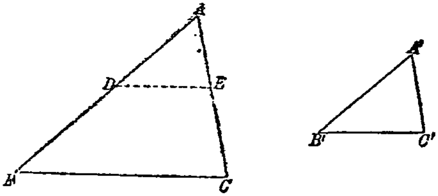
$\therefore\quad \triangle ADE\equiv\triangle A'B'C'$;　(一編定理九)

而　$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,　(定理十)

$\therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

300. 定理十三.

兩三角形之三邊成比例,則此兩形爲相似形.



在$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$中,

$$A'B':AB=B'C':BC=C'A':CA, \qquad (1)$$

則　$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

【證】　在$A'B'$之對應邊上取D點,令

$$AD=A'B';$$

過D引直線DE,平行於BC而與AC交於E;

則　$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$;　(定理十)

$\therefore\quad AD:AB=DE:BC=EA:CA$;

然　$AD=A'B'$,

$$\therefore \quad A'B':AB=DE:BC=EA:CA; \cdots\cdots\cdots (2)$$

從(1),(2),得

$$B'C':BC=DE:BC,$$

$$C'A':CA=EA:CA;$$

$$\therefore \quad DE=B'C', \quad EA=C'A',$$

$$\therefore \quad \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C';$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

301. 系.

凡正三角形皆爲相似三角形.

302. 相似三角形與合同三角形之比較.

以上所證三定理,係兩三角形可爲相似形之三種,與第一編中所舉兩三角形爲合同形之三種酷相類,今兩兩比照而列之,以便學者之記憶;

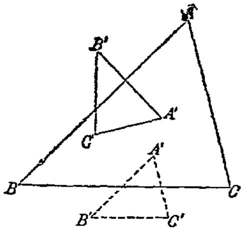
合同形	相似形
(1) 一邊及其兩端之角各相等.	(1) 二角各相等.
(2) 二邊及其夾角各相等.	(2) 二邊成比例,其夾角又相等.
(3) 三邊各相等.	(3) 三邊成比例.

【證】 相似三角形之相似比等於 1,則相似形卽成合同形.

303. 定理十四.

一個三角形之三邊各與他一個三角形之三邊互相垂直,或互相平行,則此兩形爲相

似形.

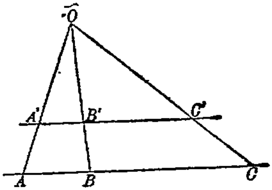


$\triangle ABC$ 之三邊各與 $\triangle A'B'C'$ 之三邊互相垂直,或互相平行,則　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

【證】 凡一角之二邊各與他一角之二邊相垂直,或相平行,則此二角或相等,或互爲補角;
從此一事,則合於本題假設之兩三角形當有三類如下:
(i)　$\angle A+\angle A'=2R$,　$\angle B+\angle B'=2R$,　$\angle C+\angle C'=2R$.
(ii)　$\angle A=\angle A'$,　$\angle B+\angle B'=2R$,　$\angle C+\angle C'=2R$.
(iii)　$\angle A=\angle A'$,　$\angle B=\angle B'$,　因而　$\angle C=\angle C'$.
然(i)及(ii)不能成立,何以故.以二個三角形內角之總和不能大於 4 直角故;
以故可成立者僅有(iii);
即二個三角形之二角各相等,
故　$\triangle ABC \backsim A'B'C'$.　(定理九)

304. 定理十五.

二個平行線爲過同點之諸直線所分,則其各部分成比例.



$A'C'$, AC 爲互相平行之二直線,從此外一點 O 引直線 $A'A$, $B'B$, $C'C$, 各與此二平行線交於 A', B', C' 及 A, B, C, 則

$$A'B':B'C'=AB:BC.$$

【證】　因 $A'B'$ 平行於 $\triangle AOB$ 之底 AB,

故　$\triangle A'OB' \backsim \triangle AOB$,

而　$A'B':AB=OB':OB$;……………………(1)

倣此,　$\triangle B'OC' \backsim \triangle BOC$,

而　$B'C':BC=OB':OB$;……………………(2)

從(1)及(2),得　$A'B':AB=B'C':BC$;

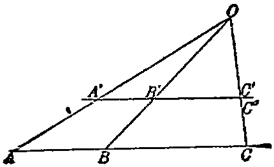
$\therefore$　$A'B':B'C'=AB:BC$.

305. 系.　(定理十五之倒).

三個直線 AA', BB', CC' 各與二個平行直線 $A'C'$, AC 交於 A', B', C' 及 A, B, C, 而

$$A'B':B'C'=AB:BC, \qquad (3)$$

則此三直線可交於一點,或互相平行.



【證】 (第一) 設AA', BB'為相交二直線,其交點為O;

連結OC,而名OC與$A'C'$之交點為C'';

則　　$A'B':B'C''=AB:BC$; ……………………(4)

從(3)及(4),得　　$A'B':B'C''=A'B':B'C'$;

$\therefore\quad B'C''=B'C'$;

故C''與C'不可不合一,即三點O,C',C在一直線上;

故CC'過AA',BB'之交點O;

故AA',BB',CC'交於一點.

(第二) 設AA',BB'不相交,則$AA'\parallel BB'$而$AA'B'B$為□;

由是　　$A'B'=AB$;

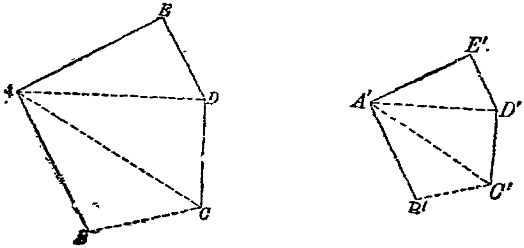
從(3)　　$B'C'=BC$;

故$BB'C'C$亦為□而$BB'\parallel CC'$;

$\therefore\quad AA'\parallel BB'\parallel CC'$.

306. 定理十六.

二個多角形從相似而在相似位置之同個數三角形所成,則此兩形為相似形.



有二個多角形ABCDE, $A'B'C'D'E'$; ABCDE從共有頂點A之諸三角形ABC, ACD ADE所成; $A'B'C'D'E'$從諸三角

形 $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'D'E'$ 所成;而 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ 各與 $\triangle A'B'C'$, $\triangle A'C'D'$, $\triangle A'D'E'$ 相似且在相似之位置,則

$$ABCDE \backsim A'B'C'D'E'.$$

【證】 (第一) 二個多角形互爲等角.

何則,因相似三角形之對應角相等,

故 $$\angle BAC = \angle B'A'C',$$
$$\angle CAD = \angle C'A'D',$$
$$\angle DAE = \angle D'A'E',$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD + \angle DAE = \angle B'A'C' + \angle C'A'D' + \angle D'A'E',$$

卽 $$\angle BAE = \angle B'A'E';$$

又 $$\angle B = \angle B';$$

次, $$\angle BCA + \angle ACD = \angle B'C'A' + \angle A'C'D',$$

卽 $$\angle BCD = \angle B'C'D';$$

倣此, $$\angle CDE = \angle C'D'E';$$

又 $$\angle E = \angle E';$$

卽 A,B,C,D,E 各角各等於 A', B', C', D', E' 各角也.

(第二) 二個多角形之對應邊成比例.

何則,從二個相似三角形 ABC, $A'B'C'$,

得 $$AB:A'B' = BC:B'C' = CA:C'A';$$

又從三角形 ACD, $A'C'D'$,

得 $$CA:C'A' = CD:C'D' = DA:D'A';$$

又從三角形 ADE, $A'D'E'$,

得 $$DA:D'A' = DE:D'E' = EA:E'A';$$

$CA:C'A'$ 爲前二式共有之比,而 $DA:D'A'$ 爲後二式共有之比,

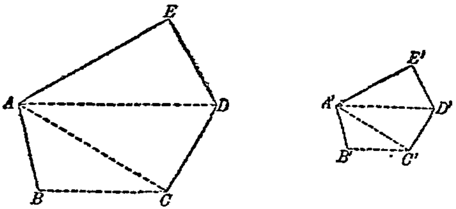
故 $$AB:A'B' = BC:B'C' = CD:C'D'$$
$$= DE:D'E' = EA:E'A'.$$

故　$ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$.　(定義4)

【註】 於此所證者爲五角形然推之任何多角形皆可成立.

307. 定理十七. (定理十六之倒).

二個相似多角形可分成相似而在相似位置之同個數三角形.



在二個相似多角形ABCDE, A'B'C'D'E'中, A, A'爲相對應之二個頂點,從A, A'各引各形之對角線,則可得同個數之三角形,此等三角形各互相似而在相似之位置.

【證】 由假設,

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D',\ \angle E=\angle E', \cdots\cdots(1)$$

$$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DE:D'E'$$
$$=EA:E'A'; \cdots\cdots(2)$$

故在二個三角形ABC, A'B'C'中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle B',\\ AB:A'B'=BC:B'C',\end{cases}$$

而　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$;　(定理十二)

由此　$\angle BCA=\angle B'C'A'$,

$CA:C'A'=BC:B'C'$;

然　$\angle BCD=\angle B'C'D'$,　(假設)

$\therefore\quad \angle BCD-\angle BCA=\angle B'C'D'-\angle B'C'A',$

卽　$\angle ACD=\angle A'C'D';$

又　$BC:B'C'=CD:C'D',$　(假設)

$\therefore\quad CA:C'A'=CD:C'D';$

$\therefore\quad \triangle ACD\backsim\triangle A'C'D';$　(定理十二)

倣此可證　$\triangle ADE\backsim\triangle A'D'E'.$

308. 系.

在二個相似多角形中,相對應對角線之比如其對應邊之比.

309. 定理十八.

二個相似多角形周之比等於其對應邊之比.

設 P, P' 各為二個相似多角形 $ABCDE, A'B'C'D'E'$ 之周圍, $AB, A'B'$ 為其對應邊則

$$P:P'=AB:A'B'.$$

【證】　$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'$

$=DE:D'E'=EA:E'A',$

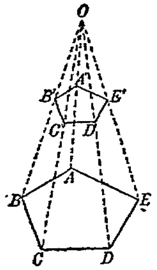
故從加比定理,

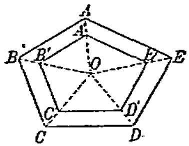
$$AB:A'B'=(AB+BC+CD+DE+EA):(A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A')$$

卽　$AB:A'B'=P:P'.$

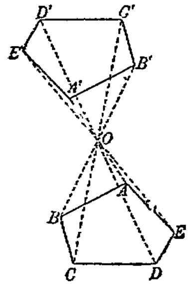
310. 定理十九.

從一點至一多角形各頂點引線分而以所設比內分或外分之,則順次連結諸分點所成之多角形為原多角形之相似形.





(甲圖)



(乙圖)　　　　(丙圖)

O為一點, ABCDE為多角形,連結 OA, OB, OC, OD, OE, 以其所設比內分(如甲乙二圖)或外分(如丙圖)於 A', B', C', D', E',

即
$$OA:OA'=OB:OB'=OC:OC'$$
$$=OD:OD'=OE:OE',$$

作多角形A'B'C'D'E',則

$$A'B'C'D'E'\backsim ABCDE.$$

【證】 (第一) 此兩多角形互為等角多角形.

何則在二個三角形OAB, OA'B'中,

$$\begin{cases} OA:OA'=OB:OB', & \text{(假設)} \\ \text{在O之角公有,} & \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle AOB\backsim\triangle OA'B'$,

$\therefore$　$\angle OBA=\angle OB'A'$;

$\therefore$　$AB\parallel A'B'$;

倣此,　$BC\parallel B'C'$;

$\therefore$　$\angle OBC=\angle OB'C'$;

在甲圖中,　$\angle OBA+\angle OBC=\angle OB'A'+\angle OB'C'$,

在乙圖中,　$\angle OBA-\angle OBC=\angle OB'A'-\angle OB'C'$,

總之， $\angle ABC = \angle A'B'C'$;

倣此可證 $\angle BCD = \angle B'C'D'$,

$\angle CDE = \angle C'D'E'$,

$\angle DEA = \angle D'E'A'$,

$\angle EAB = \angle E'A'D'$.

(第二) 二個多角形之對應邊成比例。

從二個相似三角形 OAB, OA'B',

得 $AB:A'B' = OB:OB'$;

又從相似三角形 OBC, OB'C',

得 $BC:B'C' = OB:OB'$,

$\therefore \quad AB:A'B' = BC:B'C'$;

倣此，可證明

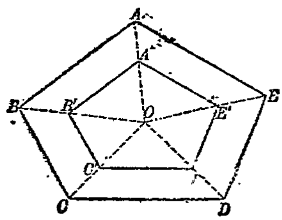
$$AB:A'B' = BC:B'C' = CD:C'D' = DE:D'E' = EA:E'A'.$$

由是可知 $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$. (定義 4)

【注意】 在此定理中，二個多角形之相似比等於從 O 至對應頂點距離之比.

311. 定理二十. (定理十九之倒).

二個相似多角形之對應邊各相平行，則連結其對應頂點之諸直線可會於一點，或互相平行。



ABCDE, A'B'C'D'E' 爲二個相似多角形,其諸對應邊各相平行,即 $AB // A'B'$, $BC // B'C'$, $CD // C'D'$, $DE // D'E'$, $EA // E'A'$, 則其諸對應頂點之連結線 AA', BB', CC', DD', EE' 會於一點,或互相平行.

【證】 (1) 若二直線 AA', BB' 相交,名其交點爲 O;
連結 OC;
設直線 OC 與邊 $B'C'$ 之交點爲 C'';
則因二個三角形 OBC, $OB'C''$ 可爲相似形,

故 $BC : B'C'' = OB : OB'$;……(1)

又 $\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$,

$\therefore$ $AB : A'B' = OB : OB'$;……(2)

從(1),(2),得 $AB : A'B' = BC : B'C''$;

然 $AB : A'B' = BC : B'C'$, (假設)

$\therefore$ $BC : B'C'' = BC : B'C'$;

$\therefore$ $B'C'' = B'C'$;

從假設, C'' 爲邊 $B'C'$ 上之點,故 C'' 點不得不與 C' 點合,即直線 OC 過 C' 點;
故直線 CC' 過 O 點;
同理可證直線 DD', EE' 等亦皆過 O 點.

(2) 若二直線 AA', BB' 不相交,則 $AA'B'B$ 爲▱,而

$AB = A'B'$;

從 $AB : A'B' = BC : B'C'$, (假設)

得 $BC = B'C'$;

然 $BC // B'C'$,

故 $BCC'B'$ 爲▱,而 $CC' // BB'$;

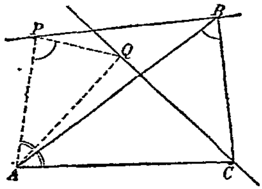
做此可證 $AA' // BB' // CC' // DD' // EE'$.

【註】 於此所示之圖僅爲諸種類之一,就前款乙

丙各圖亦可得全然相同之證,學者自爲之可也.

312. 例.

例一. 一動三角形恒與所設三角形相似,其一頂點一定第二頂點常在一定直線上,則其第三頂點亦可在一定直線上.



ABC 爲與所設三角形相似之三角形,A 爲定點,B 常在定直線 BP 上. 則 C 點亦可在一定直線上.

【證】 引 AP 令垂直於 BP;

又引 PQ, AQ 令　$\angle APQ=\angle ABC$,　$\angle PAQ=\angle BAC$;

連結 CQ 而向兩端延長之,

則因　$\triangle APQ \backsim \triangle ABC$,

$\therefore$　$CA:AQ=BA:AP$;

然　$\angle CAQ=\angle BAP$,

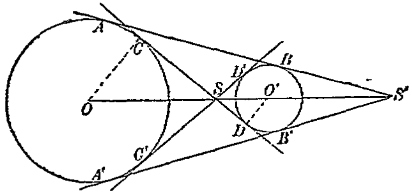
$\therefore$　$\triangle CAQ \backsim \triangle BAP$;

因 Q 爲定點,而 QA 之方向一定,

故 CQ 之方向亦一定;

故 C 常在一定直線上.

例二. 二圓周內公切線之交點及外公切線之交點爲以半徑之比內分及外分中心線分之分點.



二圓O, O'內公切線CD, C'D'之交點為S, 外公切線AB, A'B'之交點為S',二圓之半徑各為R, r, 則

$$OS:O'S=R:r,$$
$$OS':O'S'=R:r.$$

【證】 先OO', CD, C'D'可交於一點S;

連結OC, O'D,

則 OC, O'D各垂直於CD,

$\therefore$ $\triangle OCS \backsim \triangle O'DS$,

$\therefore$ $OS:O'S=OC:O'D$,

即 $OS:O'S=R:r$;

倣此,可證 $OS':O'S'=R:r$.

313. 系.

O, S, O', S'為調和點列.

因$OS:O'S=OS':O'S'$故也.

314. 定義6. 相似中心.[1]

二圓內公切線之交點及外公切線之交點名曰二圓之相似中心;而前者曰相似內心,後者曰相似外心.

(1) 相似中心 Centre of similitude.

問　題

(1) 有二個相似三角形,其相似比爲 40:133,而一個三角形之三邊各長64寸,72寸,100寸,則又一三角形各邊之長若何?

(2) 從銳角三角形或鈍角三角形之頂點 A,B 引高 AD,BE,連結DE,則 $\triangle DEC \backsim \triangle BAC$.

(3) 梯形兩底之長各爲30寸及54寸,而其高爲16寸.求延長不平行二邊所成三角形之高.

【註】 梯形平行二邊間之距離爲梯形之高.

(4) 梯形兩底之長各爲 b 及 b',而其高爲 h. 求延長其不平行二邊所成三角形之高.

(5) 以二等邊三角形底之一端C爲中心,CB爲半徑,畫圓周,再交AB於D,則

$$AB:BC=BC:BD.$$

(6) 從三角形一個頂點所引之高交於對邊之上(不在其延線上)而爲所分對邊上二部分之比例中項,則此三角形爲直角三角形.

(7) 在 $\triangle ABC$ 之二邊AB,AC上各取D及E點,連結BE,CD,若 $OE:OB=OD:OC=1:2$,則 $DE /\!/ BC$,而D,E各爲 AB, AC 之中點.

(8) 一動三角形與所設三角形相似,其一頂點一定,第二頂點常在定圓周上. 求其第三頂點之軌跡.

(9) 作一三角形,令外接於所設圓而與所設三角形相似.

(10) 作一三角形,令內接於所設圓而與所設三角形相似.

(11) 作一矩形,令內接於所設圓而與所設矩形相似.

(12) 平行於$\triangle ABC$之一邊BC引直線DE,與邊AB, AC各會於D, E,連結CD, BE,其交點爲O;則DE之中點,BC之中點,及O,三點在一直線上.

(13) 從平行二直線外一點引多數直線,可得多數之梯形. 此各梯形對角線之交點在一直線上.

(14) 從直線XY外之一點O引任意直線會XY於A,以$m:n$之比分線分OA於B點,則B點之軌跡若何?

(15) 在二個相似多角形之對應邊$AB, A'B'$上各取點M, M',令$MA:MB=M'A':M'B'$. 從M, M'各向形之各頂點引線分,分多角形爲多數三角形則第一多角形中各三角形各與第二多角形中各三角形相似.

(16) 在二個相似多角形對應邊$AB, A'B'$上向形之外旁或內旁作相似三角形$ABM, A'B'M'$. 從M, M'各向其多角形之頂點引線分,則可得兩兩相似之諸三角形.

(17) $\triangle ABC$之重心爲G,引AA', BB', CC', GG'皆垂直於任意直線XY,則$GG'=\frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$.

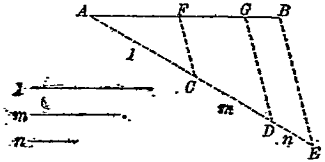
第三章

關於比例之作圖題

315. 作圖題一.

分所設線分,令其所得各部分與所設諸線分成比例.

分線分AB,令其所得各部分之比如所設線分l, m, n之比.

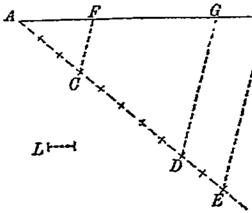


【解】　過A點引任意直線AE;在AE上取C, D, E點,令　$AC=l,\quad CD=m,\quad DE=n;$
連結DE,過C, D各引BE之平行直線CF, DG,會AB於F, G;則F, G為所求之點.

【證】　$AF:AC=FG:CD=GB:DE,$
即　$AF:l=FG:m=GB:n.$　(定理三系二)

【注意一】 線分可分之,使比例於所設諸數. 何則,任意擇取長之單位,而倍此單位使其倍數如所設之數,則作圖之法與上全同故也.

例. 以3, 5, 2之比分所設線分AB.



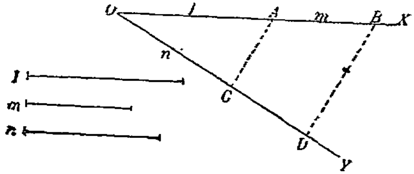
【解】　過A點引任意直線AE,擇取任意單位長L,在AE上取3倍L長之AC, 5倍L長之CD,二倍L長之DE;連結BE,過C, D,引EB之平行直線CF, DG,交AB於F, G;則　$AF:FG:GB=3:5:2.$

【注意二】 在作圖題一中,若$l=m=n$,則線分AB

三等分於F, G.

316. 作圖題二.

求所設三線分之第四比例項.

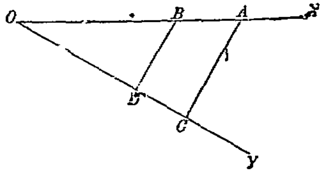


l, m, n 爲所設三線分,求作第四線分,令其爲 l, m, n 之第四比例項.

【解】 作任意角XOY;
在邊OX上截取等於 l 之OA,等於 m 之AB;
又在邊OY上截取等於 n 之OC;
連結AC,過B引平行於AC之BD,與OY會於D;
則CD爲所求之第四比例項

【證】 $OA:AB=OC:CD,$
卽 $l:m=n:\ D.$

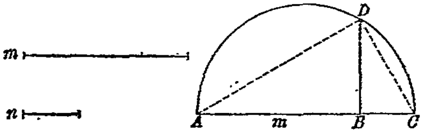
【注意一】 設在上圖中,取OA等於 l, OB等於 m, OC等於 n,而引BD平行於AC,則OD亦可爲所求之第四比例項,因 $OA:OB=OC:OD$
而 $l:m=n:OD$
故也.



【注意二】 在本題中 $n=m$,則前二圖之CD或OD爲 l, m 之第三比例項.

317. 作圖題三.

求所設二線分之比例中項.



設二線分m, n求其比例中項.

【解一】 引任意直線AC,在其上取$AB=m$, $BC=n$,
但令C在AB之延線上,
以AC為直徑,作半圓ADC;
從B引AC之垂線,與半圓周會於D;
則BD卽為所求之比例中項.

【證】 ADC為半圓周,

故　$\angle ADC = R\angle$;

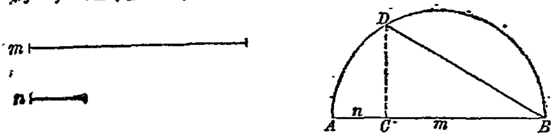
由此,　$\triangle ABD \backsim \triangle DBC$,

而　$AB:BD=BD:BC$;　(定理九系三)

然　$AB=m$,　$BC=n$,　(假設)

$\therefore$　$m:BD=BD:n$;

卽BD為m, n之比例中項.

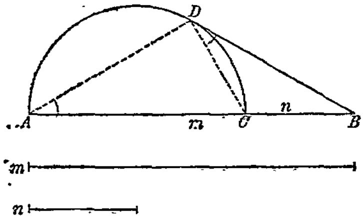


【解二】 取$AB=m$, $AC=n$,而令C在A, B之間;
以AB為直徑作半圓周ADB;
從C引AB之垂線CD,與半圓周會於D;
連結BD,則BD卽為所求之比例中項.

【證】　在二個直角三角形 BAD, BDC 中, B 角公有,
故爲相似形;　(定理九)

故　$AB:BD=BD:BC$;

即　$m:BD=BD:n$.



【解三】　如前,取 $AB=m$, $BC=n$, 而令 C 在 A, B 之間;
以線分 AC 爲直徑,畫半圓周;
從 B 引切線 BD, 則 BD 即爲所求之比例中項.

【證】　連結 AD, BD,

則　$\angle BAD=\angle BDC$,　(二編定理十九)

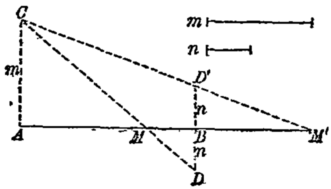
$\therefore$　$\triangle BAD \backsim \triangle BDC$;　($\because \angle B$ 公有)

$\therefore$　$AB:BD=BD:BC$;

即　$m:BD=BD:n$.

318. 作圖題四.

以所設比內分及外分一線分.



(1) 以所設比$m:n$內分線分AB.

【解】 在A及B引AB之垂線AC, BD, 令C及D在AB之兩旁,且

$$AC=m,\quad BD=n;$$

連結CD, 與AB交於M, 則M為以$m:n$內分AB所得之分點.

【證】 二個三角形AMC, BMD皆為直角三角形,且在M之角相等.

故 $$\triangle AMC\backsim\triangle BMD,\qquad\text{(定理九)}$$

$$\therefore\ AM:MB=AC:BD,$$

卽 $$AM:MB=m:n.$$

(2) 以所設比$m:n$外分線分AB.

【解】 延長(1)中所作DB至D′, 令

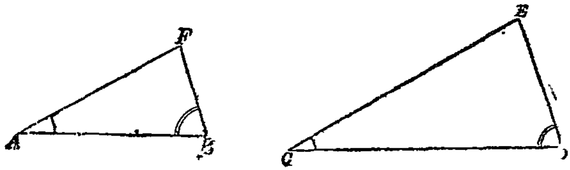
$$BD'=BD;$$

連結CD′,延長之,與AB之延線交於M′, 則M′卽為以比$m:n$外分AB所得之分點.

【證】 與(1)之證法全同,略之.

319. 作圖題五.

在一所設線分上作一三角形,令與在他一所設線分上之所設三角形相似而在相似之位置.



AB爲所設線分，△CDE爲在他一所設線分CD上之所設三角形，求在AB上作一三角形，令與△CDE相似，且在相似之位置.

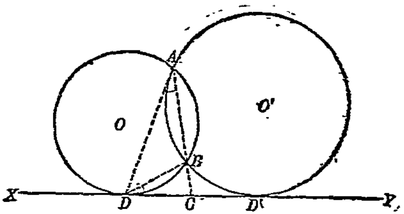
【解】　從A，B，二點引直線AF，BF，令

$$\angle FAB=\angle ECD,\quad \angle ABF=\angle CDE;$$

則　$$\triangle ABF\backsim\triangle CDE.$$

320. 例.

例.　作一圓，令過所設二點A，B，且切於所設直線XY.



【解】　連結AB，延長之，交直線XY於C；

求CA，CB之比例中項，在XY上從C點起截取其等長得D點及D'點；

過A，B，D，及A，B，D'各畫圓，得二圓周，皆爲所求之圓周.

【證】　連結DA，DB，

則　$CA:CD=CD:CB,$　(本題解)

又　$\angle ACD=\angle DCB,$

$\therefore\ \triangle CAD\backsim\triangle CBD,$　(定理十二)

而　$\angle CAD=\angle CDB;$ ……………………(1)

今從D點引⊙ADB之切線，則其與弦DB所成之角當等於弓形角∠BAD，且過D點僅有一個⊙ADB之切線，

故從(1),可知直線DC切圓ADB,即圓周ABD切於直線XY,做此,可證圓周ABD′亦切於XY.

【討論】(第一) A,B在XY之同旁.

(1) 直線AB為XY之斜線,則如上圖可得二解;

(2) 直線AB垂直於XY,則雖尚有二解而所得二圓周全相等;

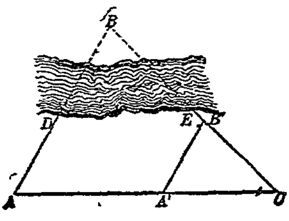
(3) 直線AB平行於XY,則不能求得C點;在此類中,線分AB之垂直等分線與XY相會之點為所求圓周與XY之切點.

(第二) A,B二點之一,如B點,在XY之上,則B點即為切點;所求圓之中心,為從B所作AB之垂線,與線分AB之垂直等分線二者之交點,故此類僅有一解.

(第三) A,B二點在XY之兩旁則無解.

321. 簡易測量法(一).

求從地上一點A至可望而不可即之他一點B之距離.



【第一法】從A定AB之方向,引其一部分AD,再從A引AD之垂線AC;

從C定CB之方向,引其一部分CE;

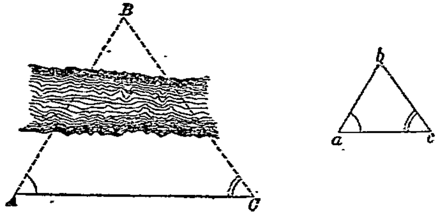
次在直線AC上定近於C點之任意一點A′,從A′引A′C之

垂線 A′B′,令與 CE 會於 B′;

然則 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$;

故 $A'C : A'B' = AC : AB$.

由是實量 A′C, A′B′, AC 之長,即可計算 AB 之長.



【第二法】 從 A 點起在地上引一可量其長之線分 AC,以為基線;[1]

次,置眼於 A 點觀測 AB 之方向,取大小合宜之厚紙一片,置其一隅於 A 點,其一邊在 AB 之方向,更以此紙摺之,令其摺痕在 AC 之方向;則在紙之此隅可得一等於 ∠BAC 之角;

倣此,更可用厚紙作一角令等於 ∠ACB;

乃在豫備之紙上畫 $\triangle abc$,令其一邊 ac 等於 AC 千分之一,(不必定為千分之一,用任何之比皆可)而 a, c 二角各等於前從二厚紙所得之二角 A, C;量 ab 之長,取其一千倍,即得所求 AB 之距離,因

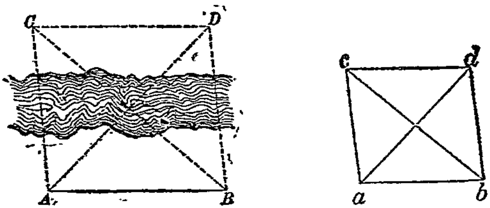
$$\triangle abc \backsim \triangle ABC$$

故也.

322. 簡易測量法(二).

求不可接近之二點 C, D 間距離.

(1) 基線 Base line.



取可以同時望見C,D之二點A,B,引一可量其長之基線AB;

次,用前法,求得$\angle CAB$, $\angle DAB$, $\angle DBA$, $\angle CBA$;

在紙上引一線分ab,令其長爲AB千分之一,在其兩端作$\angle cab$, $\angle dab$, $\angle dba$, $\angle cba$令各等於$\angle CAB$, $\angle DAB$, $\angle DBA$, $\angle CBA$;

連結cd而量其長;則cd之千倍卽爲CD之距離.

何則, $\triangle ABC \backsim \triangle abc$,

$\therefore\ AC:ac=AB:ab;$

又 $\triangle ABD \backsim \triangle abd$,

$\therefore\ AD:ad=AB:ab;$

$\therefore\ AC:ac=AD:ad;$

然 $\angle CAD=\angle cad$,

$\therefore\ \triangle CAD \backsim \triangle cad;$

$\therefore\ CD:cd=AC:ac=AB:ab;$

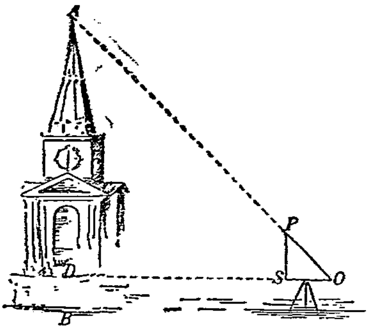
因$AB=1000.ab$,故$CD=1000.cd$也.

323. 簡易測量法(三).

求地平面上建築物之高. 但其底爲可

達到之地點.

建築物AB之頂點為A,底為B,假定AB垂直於地平面,欲測其高.



在地平面BC上取適宜之位置置一几,令几面與地平面平行;几上置一直立之三角板POS(S為直角),置眼於O以望A,進退几面,使O, P, A可在一直線上.

次,在OS之方向望建築物,得見D點,而OD為可量其長之距離;

然則 $\triangle POS \backsim \triangle AOD$,

故 $OS:PS=OD:AD$;

因OS, PS之長皆已知,故從此可得AD之長;

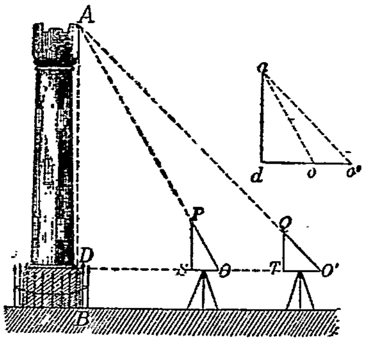
再,實量地面至D之高,加於AD中,可得AB之高.

324. 簡易測量法(四).

求一不能行至其底之建築物之高.

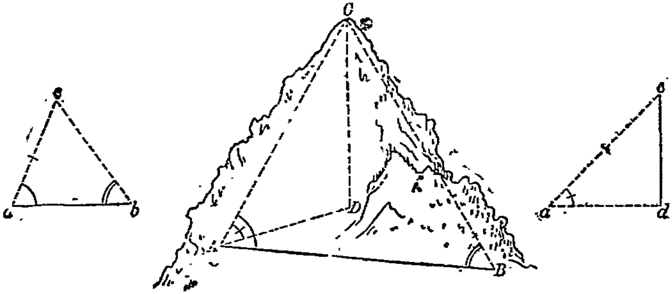
如前,置三角板於適宜之位置O以測$\angle AOD$;

次,再以三角板之較小一銳角置於O′以測$\angle AO'D$,但須令



D, O, O′在同一直線上;
實量O, O′之距離;
在紙上引直線doo',令oo'等於OO′千分之一;從o, o'引直線oa, $o'a$,令$\angle aod=\angle$AOD, $\angle ao'd=\angle$AO′D;再從a向do引垂線ad而量ad之長;
則ad之千倍即爲AD之高,再加從地面至D之高即得所求AB之高.

325. 簡易測量法(五).



測山之高.

先在山麓用一三角板以其一角擇定一點A,令地平線AD與從A至山巔C之方向二者間之角等於三角板之一角CAD(321款);

次,從A點在地平面上任意方向引線分AB;實量其長;從319款之法以厚紙作等於∠CAB, ∠CBA之二角;
乃在紙上引線分 ab,令其長等於 AB 千分之一;在 ab 上作 $\triangle abc$,令在 a 及 b 之角各等於∠CAB, ∠CBA.
復在紙上作 $\triangle acd$,令其一邊 ac 等於 $\triangle abc$ 中之 ac,及 $\angle cad$ 等於∠CAD,而在 d 之角爲直角;
量 cd 之長,取其千倍,卽得所求之山高CD.

【註】 簡易測量之法,以上五者不過示其一斑,其餘種種,學者本比例之理論自推之可也.

用測角器之測量,俟至三角法中論之.

問題

(1) 作一三角形,令與一所設三角形相似而周爲其二倍.

(2) 以一所設線分爲一邊,作一多角形,令與他一所設線分上之多角形相似而在相似之位置.

(3) 作一三角形,令與一所設三角形相似而其周爲所設長.

(4) 作一多角形,令與一所設多角形相似而其周爲所設長.

(5) 設三點A, B, C於一直線上,求C點對於A, B二點之調和相屬點.

(6) 設三點A,C,B於一直線上,在此直線上求一點P,

令CP爲AP,BP之比例中項.

(7) 設四點A,B,C,D於一直線上. 在此線上求一點P,令AP:DP=BP:CP.

(8) 求從所設點P向相交二直線AB,AC引直線PBC;

(1) 令PB:PC等於所設比$m:n$;

(2) 令AB:AC等於所設比$m:n$.

(9) 在△ABC之邊AB或其延線上求一點P,從此點引一直線,各與BC及CA交於E,F,令PE:EF等於所設比$m:n$.

(10) 過所設三點之一引一直線,令從他二點至此直線之距離等於所設比.

(11) 設三角形之底,二邊之和,及二邊之比,作此三角形.

(12) 設三角形之底,頂角,及二邊之比,作此三角形.

(13) 設三角形之底,及二邊之比,作合此之三角形,且令其頂點在一所設直線上.

(14) 設三角形之底,高,及二邊之比,作此三角形.

(15) 在一所設三角形內作一內接正方形,令其一邊與三角形之任意一邊相重.

(16) 在一所設半圓內作一內接正方形,令其一邊與半圓之直徑相重.

(17) 在一所設三角形內作一內接矩形,令與一所設矩形相似,而其一邊與三角形之任意一邊相重.

(18) 在一所設半圓內作一內接矩形,令與一所設矩形相似,而其一邊與半圓之直徑相重.

(19) 在一所設三角形內作一內接平行四邊形,令與一所設平行四邊形相似而其一邊與三角形之任意一邊

相重.

(20) 過所設圓周內一定點,引一弦,令其二部分之比如所設比.

(21) 分所設弧爲二分,令張此各部分之弦之比等於所設比.

第三編之問題

(1) 同底AB上有二個三角形ABC, ABD,在AB或其延線上取任意點P,過P各引AC,AD之平行直線PE, PF,各與邊BC, BD交於E, F,連結EF,則EF//CD.

(2) 用比例之定理證二等邊三角形頂角之等分線等分其底.

(3) 用比例之定理證三角形之三個等分線交於一點.

(4) PA爲一圓之所設弦,XY爲平行於此之任意弦,從P引此圓之切線,與XY之延線交於T,連結PX, AX,則$\triangle PTX \backsim \triangle AXP$.

(5) D爲$\triangle ABC$中$\angle A$等分線與邊BC之交點,M爲BC之中點,則

$$OB:OM=AB+AC:AB\sim AC.$$

(6) 梯形ABCD中AD//BC,其對角線之交點爲O,而AD=36寸, BC=57寸, OD=12寸,求BD之長.

(7) 四邊形ABCD中AB//CD. 在邊AD, BC上各取E, F點,令

$$AE:ED=BF:FC,$$

則AB, CD之交點在EF線上.

(8) 在$\triangle ABC$二邊AB,AC上各取一點P,Q,令BP=CQ,

延長PQ, BC交於R, 則$AC:AB=PR:QR$.

(9) P爲$\triangle ABC$中線AD上之任意點, BP, CP各與AC, AB會於E, F, 則$EF/\!/BC$.

(10) 分線分AB於C點, 令$AC:CB=m:n$, 從A, B, C三點引三個平行線與他一所設直線交於A', B', C', 則

$$(m+n)CC'=nAA'+mBB'.$$

但m, n均爲正整數.

(11) 三角形之二邊不相等,則大邊與對其邊高之和比小邊與對其邊高之和大.

(12) 在一所設三角形內作一內接三角形,令與他一所設三角形相似,而其一頂點爲原三角形一邊上之所設點.

(13) 從四邊形各對角線兩端至他一對角線所引二垂線和之比等於二對角線之反比.

(14) 從$\odot ABC$外一點P引二個切線PA, PB, 從B向過A之直徑AC引垂線BD,則直線PC等分BD.

(15) 切二定圓晝任意圓,而連結其二切點引直線,則此直線可過定圓中心線上之一定點.

(16) 一三角形與一所設三角形相似,而其三邊恆過三定點;則此形內任意點之軌跡爲一圓周.

第四編

面積

第一章 多角形之面積

326. 定義1. 面積.[1]

表面之部分曰面積.

面積之數即此面積與面積單位之比値.

二個多角形形象不似而面積相等者曰等積.[2]

故二個多角形爲合同形,則此二形相似而且等積,以是表合同形之記號≡可以≌代之.

327. 定義2. 平行四邊形之底及高.

以平行四邊形之任意一邊爲其底,則其與對邊之距離爲平行四邊形之高.

故以矩形之任意一邊爲其底,則與此相隣之一邊即爲高.

328. 定義3. 梯形之高.

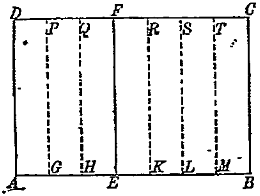
梯形二底間公共垂線之部分爲梯形之

(1) 面積 Area. (2) 等積 Equivalent.

高.

329. 定理一.

同高二矩形之比等於其底之比.



二矩形ABCD, AEFD有同高AD,而其底各爲AB, AE,

則　$\square ABCD : \square AEFD = AB : AE.$

【證】 設　$AB : AE = m : n;$ ……………………(1)

分AB爲m等分, AE爲n等分(圖中m爲7, n爲3),其分點爲G, H, K, L, M;

過此等分點引邊AD之平行直線,可得矩形AGPD, GHQP, ….等;

此等矩形皆同高而等底,故相等,

即　$\square ABCD = m \cdot \square AGPD,$　(圖中m爲7)

$\square AEFD = n \cdot \square AGPD,$　(,, ,, n ,, 3)

$\therefore\ \square ABCD : \square AEFD = m : n;$ ……………………(2)

從(1),(2),

$\square ABCD : \square AEFD = AB : AE.$

【注意一】 證中假定AB及AE爲可通約量者;若爲不可通約量,則但須取AG至任何小,倘可得如(1)之比例式,學者可就255款再觀之.

【注意二】 若以S, S′表同高二矩形之面積,以b, b'

表其底,則 $S:S'=b:b'$.

330. 系.

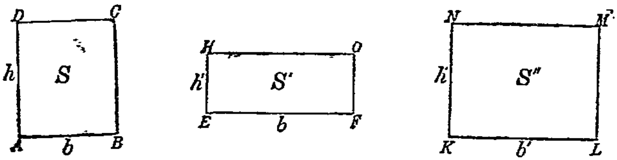
同底二矩形之比等於其高之比.

以S, S'表二矩形之面積, h, h'表其高,則

$$S:S'=h:h'.$$

331. 定理二.

二矩形之比等於其底之比及高之比之相乘比.



二矩形ABCD, EFGH,其面積各爲S, S';其底各爲b, b',其高各爲h, h';則

$$s:s'=b.h:b'.h'.$$

【證】 別作一矩形KLMN,令其底爲b',高爲h;若其面積爲s'',則因s, s''同高而

$$s:s''=b:b',$$

或 $$\frac{s}{s''}=\frac{b}{b'};\text{..........}(1)$$

又s'', s'同底而

$$s'':s'=h:h',$$

或 $$\frac{s''}{s'}=\frac{h}{h'};\text{..........}(2)$$

從(1)及(2),

$$\frac{s}{s''}\times\frac{s''}{s'}=\frac{b}{b'}\times\frac{h}{h'},$$

$$\therefore\qquad \frac{s}{s'}=\frac{b.h}{b'.h'},$$

即　$$s:s'=bh:b'h'.$$

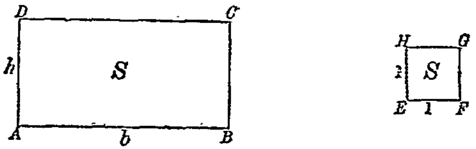
例. 若$b=6$寸, $h=4$寸, $b'=9$寸, $h'=12$寸, 求s, s′之比;

$$\frac{s}{s'}=\frac{6\times4}{9\times12}=\frac{2}{9}.$$

即二矩形之比爲2:9.

332. 定理三.

以作於單位長上之正方形作面積之單位,則矩形面積之數數等於其底及高二數數之積.



【證】 設矩形ABCD之底及高各爲b, h,其面積爲S;作正方形EFGH,其各邊爲長之單位即等於1,其面積爲S′;

則從前一定理,

$$\frac{s}{s'}=\frac{b\times h}{1\times1}=b.h;$$

故以s′爲面積之單位,則矩形s面積之數數等於其底及高二數數之積,即

$$s=b.h.$$

【註】 本定理恒如下略言之:

矩形之面積等於其底及高之積.

此中所謂面積乃「表面數之數」之略語,所謂底及高則「表底之數」及「表高之數」之略語,而量面積之單位卽係作於「量底及高單位」上之正方形者也.

例如以寸爲長之單位,則面積之單位卽爲平方寸;若一矩形底長3寸4分,高7寸2分,則矩形之面積爲3.4×7.2卽24.48平方寸.

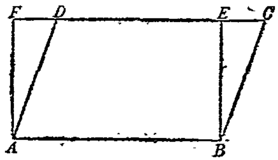
更有當注意者,「幾平方寸」與「幾寸平方」二語意義不一. 例如三平方寸爲一平方寸之三倍,而三寸平方則爲每邊長三寸之正方形,其面積爲九平方寸.

333. 系.

正方形面積之度數等於其一邊度數之平方.

334. 定理四.

平行四邊形等於同底同高之矩形.



▱ABCD及▭ABEF有同底AB及同高AF,

則 ▱ABCD=▭ABEF.

【證】 在 △BEC 及 △AFD 中,

$$\left\{\begin{array}{ll} BE=AF, & (\text{▱}ABEF\text{之對邊}) \\ BC=AD, & (\text{▱}ABCD\text{之對邊}) \\ \angle BEC=\angle AFD, & (\text{皆為直角}) \end{array}\right.$$

$\therefore \quad \triangle BEC \cong \triangle AFD;$

$\therefore \quad ABED+\triangle BEC=\triangle AFD+ABED;$

$\therefore \quad$ ▱ABCD=▱ABEF.

335. 系一.

平行四邊形面積之駊數等於其底及高駊數之積.

336. 系二.

同底同高之二個平行四邊形相等.

以其均等於同底同高之矩形故也.

337. 系三.

等底等高之二個平行四邊形相等.

以其均等於等底等高之矩形,且等底等高之二矩形相等故也.

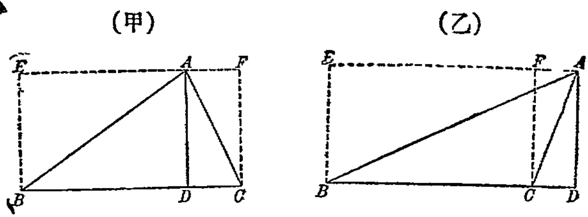
338. 系四.

等底二平行四邊形之比如其高之比.

等高二平行四邊形之比如其底之比.

339. **定理五.**

三角形等於同底同高矩形之半.



△ABC之底爲BC,高爲AD,則此三角形等於以BC爲底AD爲高所成矩形EBCF之半.

【證】 △ABD=$\frac{1}{2}$□AEBD,(一編定理三十四系二)

△ACD=$\frac{1}{2}$□AFCD;

故在甲圖中,

△ABD+△ACD=$\frac{1}{2}$(□AEBD+□AFCD),

即 △ABC=$\frac{1}{2}$□EBCF;

又在乙圖中,

△ABD−△ACD=$\frac{1}{2}$(□AEBD−□AFCD),

即 △ABC=$\frac{1}{2}$□EBCF;

總之,△ABC等於有同底BC,同高AD之矩形之半.

【備考】 三角形之面積爲s,底爲b,高爲h,則

$$s=\frac{b.h}{2}.$$

340. 系一.

同底同高之兩三角形相等.

因兩三角形面積之駁數相同故也.

由是若諸三角形之底在同一直線上而相等,且頂點皆在其平行直線上,則此諸三角形相等.

341. 系二.

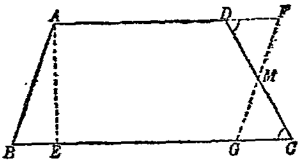
等底等高之兩三角形相等.

342. 系三.

同高兩三角形之比如其底之比. 又同底兩三角形之比如其高之比.

343. **定理六.**

梯形等於以其二底之半和作底以其高作高所成之矩形.



梯形ABCD之二底爲AD,BC,其高爲AE,則ABCD等於以AE作高$\frac{1}{2}$(AD+BC)作底之矩形.

【證】 DC之中點爲M,過M引AB之平行直線,與AD,BC或其延線交於F,G;

則在△DMF,△CMG中,

$$\begin{cases} \angle MDF=\angle MCG, \\ \angle DMF=\angle CMG, \\ DM=CM, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DMF\equiv\triangle CMG, \qquad \text{(一編定理八)}$$

而 $$DF=GC;$$

$$\therefore \triangle CMG+ABGMD=\triangle DMF+ABGMD,$$

即 $$\text{梯形}ABCD=\square ABGE.$$

又 $$AD+BC=AD+BG+GC$$

$$=AD+DF+BG$$
$$=AF+BG;$$

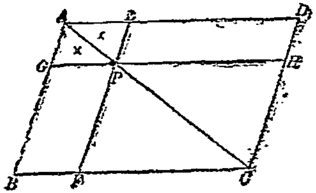
然　$$AF=BG,$$

$$\therefore\quad AD+BC=2BG;$$
$$\therefore\quad BG=\tfrac{1}{2}(AD+BC);$$

故梯形ABCD等於以AE作高$\frac{1}{2}$(AD+BC)作底之矩形.

344. 定理七.

過平行四邊形對角線上任意一點引平行於二邊之直線,則所得不含此對角線之二個平行四邊形等積.



ABCD為平行四邊形,P為其對角線AC上之任意點,過P引平行於AB,AD之直線EF,GH,分原形為四個平行四邊形.　則不含AC之二個平行四邊形PB,PD等積.

【證】　$\triangle ABC=\triangle ADC,$

$\triangle AGP=\triangle AEP,$

$\triangle PFC=\triangle PHC,$　(一編定理三十四系一)

$\therefore\quad \triangle ABC-(\triangle AGP+\triangle PFC)=\triangle ADC-(\triangle AEP+\triangle PHC),$

即　$\square PB=\square PD.$

345. 定義4.　平行四邊形之餘形.[1]

(1) 餘形 Complements.

▱PA, ▱PC 爲 ▱AC 中沿對角線 AC 之平行四邊形,而 ▱PB 及 ▱PD 爲其餘形.

346. 定義 5. 線分所包之矩形.

矩形之二邊各等於所設長之線分,則此矩形爲二線分所包之矩形.

例如一矩形之二邊各等於 AB, CD 二線分,則此矩形爲 AB, CD 所包之矩形,而以 □AB.CD 表之.

347. 定義 6. 線分上之正方形.

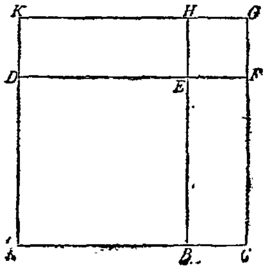
正方形之一邊等於所設長之線分,則此正方形爲其線分上之正方形.

例如一正方形之一邊等於線分 AB,則此正方形爲線分 AB 上之正方形,而以 $\overline{AB}^2$ 表之.

348. 定理八.

二線分和上之正方形等於各線分上正方形之和加此二線分所包矩形之二倍.

AB, BC 爲二線分, AC 爲其和. 則 AC 上正方形等於 AB, BC 上正方形之和加 AB, BC 所包矩形之二倍.



【證】 以AC及AB各爲一邊向直線AC之同傍作正方形ACGK及ABED;延長BE, DE, 各與KG, CG會於H, F, 則可得以EF或BC爲一邊之正方形EG;
因□DH, 及□BF均爲AB, BC所包之矩形,
故 □AG=□AE+□EG+2▭AB.BC.

【注意】 本定理可書作

$$(AB+BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB.BC.$$

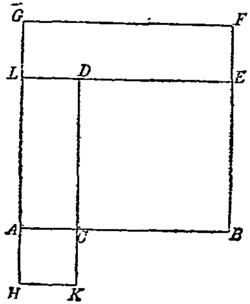
349. 系.

一線分上之正方形等於其半分上正方形之四倍.

350. 定理九.

二線分差上之正方形等於從各線分上正方形之和減去此二線分所包矩形之二倍.

AB, AC爲二線分, BC爲其差. 則BC上正方形等於從AB, AC上正方形之和減去AB, AC所包矩形之二倍.



【證】 以AB及BC各爲一邊向直線AB之同旁作

正方形ABFG及BCDE;

又以AC爲一邊於其上作正方形ACKH,令其與前二正方形分居AB之兩傍;

延長ED會AG於L,

則 $LE=AB,\quad GL=AC,\quad LH=AB,$

故▭LF及▭LK皆爲AB,AC所包之矩形,而

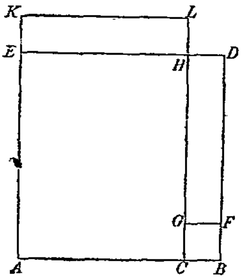
$$\square BD=\square AF+\square AK-(\text{▭}LF+\text{▭}LK),$$

即 $$\square BD=\square AF+\square AK-2\text{▭}AB.AC,$$

或 $$(AB-AC)^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2.AB.AC.$$

351. 定理十.

二線分上正方形之差等於此二線分和及差所包矩形.



AB,BC爲二線分,AC爲其差,則AB上正方形與BC上正方形之差等於(AB+BC)及(AB−BC)所包之矩形.

【證】 以AB及BC各爲一邊向AB之同旁作正方形ABDE,BCGF;

延長CG,與ED會於H,則▭AH,▭GD之和爲$\overline{AB}^2$與$\overline{BC}^2$之

差,卽□AD與□BG之差.

以AE,CH各延長至K,L,令EK,HL各等於BC,連結KL;

則 $\square EL=\square GD$;

由此 $\square AH+\square GD=\square AH+\square EL$;

然 $\square AH+\square GD=\square AD-\square BG$,

又 $\square AH+\square EL=\square AL$,

$\therefore$ $\square AD-\square BG=\square AL$;

因
$$\square AL=AK.AC$$
$$=(AB+BC)(AB-BC),$$

$\therefore$ $\square AD-\square BG=(AB+BC)(AB-BC)$,

卽 $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=(AB+BC)(AB-BC)$.

【註】 今假定AB>BC,若BC>AB,

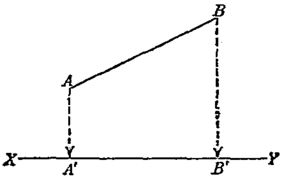
則 $\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=(BC+AB)(BC-AB)$,

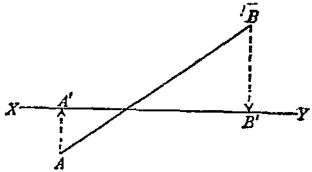
故此定理可書作

$$\overline{AB}^2\sim\overline{BC}^2=(AB+BC)(AB\sim BC).$$

352. 定義7. 垂直射影.[1]

從一線分之兩端向他一所設直線引垂線,則二垂線足所夾直線之部分名曰此線分向直線上所投之垂直射影.





(1) 正射影 Orthographic projection.

例如從線分AB之兩端向直線XY引垂線AA′, BB′,則A′B′爲AB投於直線XY上之垂直射影.

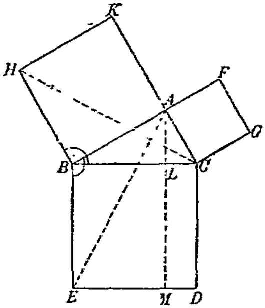
【註】 若AB//XY,則A′B′=AB.

AB或其延線與XY所成之角從0起漸次增大,則A′B′漸次減小,至AB⊥XY時,AB投於XY上之垂直射影可爲一點.

在初等幾何學中,所論射影僅此垂直射影,故垂直射影可略曰射影.(1)

353. 定理十一.

直角三角形斜邊上之正方形等於他二邊上正方形之和.



△ABC中∠A爲直角,則斜邊BC上之正方形等於二邊AB, AC上正方形之和.

【證】 以BC,CA,AB各爲一邊,向三角形之外各作正方形BCDE, CAFG, ABHK;

從A向斜邊引垂線AL,更延長之,與ED會於M;

(1) 射影 Projection.

連結AE, CH;

則在$\triangle ABE, HBC$中,

$$\begin{cases} AB=HB, \\ BF=BC, \\ \angle ABE=\angle HBC, \end{cases} \qquad (\because \angle HBA=\angle CBE=R)$$

$\therefore$ $\triangle ABE\equiv\triangle HBC$; (一編定理九)

然$\triangle ABE$及$\square BM$有同底BE及同高BL,

故 $\triangle ABE=\frac{1}{2}\square BM$; (定理五)

又$\triangle HBC$及$\square BK$有同底HB及同高AB,

故 $\triangle HBC=\frac{1}{2}\square BK$;

$\therefore$ $\square BM=\square BK$;

同理,可證 $\square CM=\square CF$;

故 $\square BM+\square CM=\square BK+\square CF$;

然 $\square BM+\square CM=\square BD$,

$\therefore$ $\square BD=\square BK+\square CF$;

即 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$,

354. 系一.

直角三角形一邊上正方形等於從斜邊上正方形中減去他邊上正方形之差.

355. 系二.

直角三角形一邊上正方形等於斜邊與此邊在斜邊上射影二者所包之矩形.

何則,在353款中,已知

$$\square BK=\square BM,$$

即 $\overline{AB}^2=BL.BE$,

即　　$\overline{AB}^2=BL.BC.$

倣此，　$\overline{AC}^2=CL.BC.$

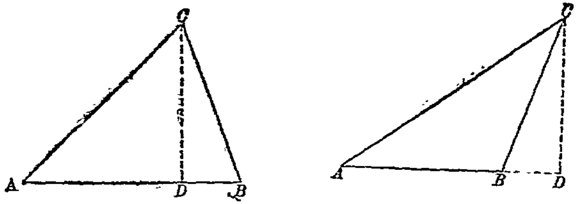
356. 系三.

直角三角形二邊上正方形之比等於各邊在斜邊上射影之比.

【注意】 定理十一名曰Pythagoras之定理,係二千年前希臘哲學兼數學家Pythagoras氏所發明者也.

357. 定理十二.

三角形中對銳角一邊上正方形比他二邊上正方形之和小,所小者爲此二邊中之一,與他一邊在其上之射影,二者所包矩形之二倍.



在△ABC中,A爲一銳角,邊AC在邊AB上之射影爲AD,

則　$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB.AD.$

【證】 在直角三角形BCD中,

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$　　(定理十一)

$=(AB\sim AD)^2+(\overline{AC}^2-\overline{AD}^2)$

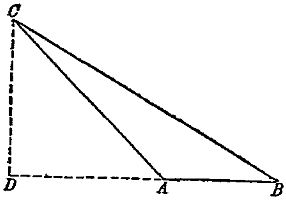
$=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2AB.AD+\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$　(定理九)

$\therefore\ \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB.AD.$

【註】 若B為直角,則D點與B點相合而AD=AB,於是本定理之終決化為 $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$,此即定理十一之系一,而亦為本定理之特例.

358. 定理十三.

在鈍角三角形中,對鈍角一邊上正方形比他二邊上正方形之和大,所大者為此二邊中之一與他一邊在其上之射影,二者所包矩形之二倍.



在△ABC中,A為鈍角,邊AC在邊AB上之射影為AD,

則 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2.AB.AD.$

【證】 在直角三角形BCD中,

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$ (定理十一)

$=(AB+AD)^2+(\overline{AC}^2-\overline{AD}^2)$

$=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2.AB.AD+\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$ (定理八)

$=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2.AB.AD.$

359. 系.

三角形中一邊上正方形比他二邊上正方形之和或小,或等,或大,則對此之角或為銳

角,或爲直角,或爲鈍角.

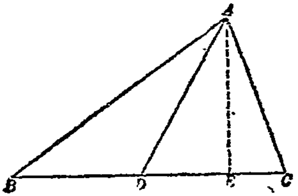
此系中之三事各爲定理六,七,八三者之倒定理,在前三定理中假設已盡其可起之種類,終決又各不相容,故其倒必眞確,可用窮舉證法證之.

360. 定理十四.

三角形二邊上正方形之和等於第三邊之半與對第三邊之中線二者上正方形和之二倍.

△ABC之一中線爲AD,則

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2).$$



【證】 從A向邊BC引垂線AE,

設∠ADB爲鈍角而∠ADC爲銳角,

則 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+2BD.DE,$ (定理十三)

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2-2DC.DE;$ (定理十二).

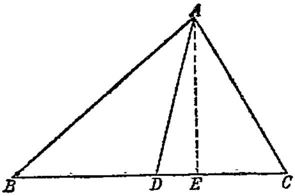
然 $DC=BD,$ (假設)

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2).$

361. 定理十五.

三角形二邊上正方形之差等於第三邊與對此中線在此邊上射影二者所包矩形之

二倍.



在△ABC中,AD爲其一中線,DE爲AD在邊BC上之射影,

則 $$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2.BC.DE.$$

【證】 假定AB>AC,

則∠ADB爲鈍角而∠ADC爲銳角;

故 $$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+2.BD.DE, \quad (定理十三)$$

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2-2\,DC.DE; \quad (定理十二)$$

然 $$BD=DC,$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2-\overline{AC}^2=4BD.DE;$$

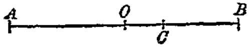
即 $$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2BC.DE.$$

362. 系.

從一點至二定點距離上正方形之差一定,則此點之軌點爲連結二定點所得直線之一垂線.

363. 定理十六.

一線分內分或外分於任意點,則其二部分上正方形之和等於半線分上正方形與分點中點距離上正方形二者和之二倍.



線分AB內分或外分於任意點C,而O為其中點,

則 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{OC}^2)$,

【證】 $AC=AO+OC$,

$\therefore$ $\overline{AC}^2=\overline{AO}^2+\overline{OC}^2+2AO.OC$; (定理八)

又 $BC=OB\sim OC$,

即 $BC=AO\sim OC$,

$\therefore$ $\overline{BC}^2=\overline{AO}^2+\overline{OC}^2-2AO.OC$; (定理九)

$\therefore$ $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{OC}^2)$.

364. 例.

例一. 在△ABC中, BC=13寸, CA=12寸, AB=5寸,
則A為直角.

【證】 $\overline{BC}^2=13^2=169$, $\overline{CA}^2=12^2=144$,
$\overline{AB}^2=5^2=25$;

而 $\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=144+25=169$,

$\therefore$ $\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$;

故對於邊BC之角A為直角. (定理八系)

例二. 在△ABC中, BC=15寸, CA=23寸, AB=17寸,
則A, B, C各角之大小若何?

【解】 $\overline{BC}^2=15^2=225$, $\overline{CA}^2=23^2=529$,
$\overline{AB}^2=17^2=289$;

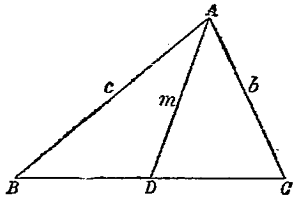
而 $$225+529=754,\quad 225+289=514,$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2<\overline{BC}^2+\overline{CA}^2,\quad \overline{CA}^2>\overline{AB}^2+\overline{BC}^2;$$

故對於邊AB之角C爲銳角,而對於CA之角B爲鈍角,於是角A亦必爲銳角可知.

例三. 設三角形三邊之長,求其中線之長.

【解】 設△ABC中三邊BC, CA, AB之長各爲a, b, c,從頂點A所引中線AD之長爲m;



從定理十四, $$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2),$$

而 $$BD=\tfrac{1}{2}BC,$$

$$\therefore\quad c^2+b^2=2m^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$\therefore\quad m^2=\frac{b^2+c^2-\dfrac{a^2}{2}}{2},$$

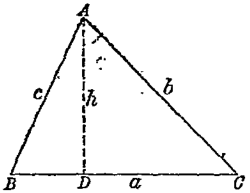
即 $$m^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4},$$

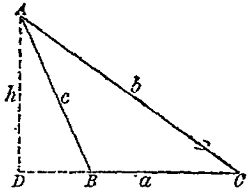
$$\therefore\quad m=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

又設從B, C所引之中線各爲m', m'',則如上可得

$$m'=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2},\quad m''=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

例四. 設三角形三邊之長,求其高.





【解】　設△ABC三邊之長爲 a, b, c; 從頂點A所引之高爲 h;

在直角三角形ADC中,

$$h^2=b^2-\overline{CD}^2, \qquad \text{(定理十一系一)}$$

又在△ABC中,

$$c^2=a^2+b^2-2a.CD, \qquad \text{(定理十二)}$$

$$\therefore \quad CD=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a};$$

代入上一式中,

$$h^2=b^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$

$$=\frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2};$$

今命　$a+b+c=2p,$

則得　$a+b-c=2(p-c),$

$c+a-b=2(p-b),$

$$c-a+b=2(p-a),$$

以此諸值代入上所得h^2之結果中,則

$$h^2=\frac{2p\times2(p-c)\times2(p-b)\times2(p-a)}{4a^2};$$

$$\therefore\quad h=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (1)$$

又設從B及C所引之高各為h', h'',

則

$$h'=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h''=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

【注意】 △ABC之面積為S,則

$$S=\frac{a\cdot h}{2} \qquad (定理五)$$

以(1)中h之值代入此式,得

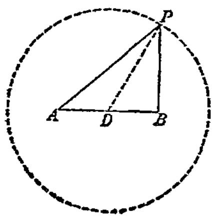
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

例五. 從一點至二定點距離上正方形之和一定,求此點之軌跡.

【解析】 A,B為二定點,P為軌跡上之一點,設

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=k^2,$$

而k為定長.



線分 AB 之中點為 D, 連結 PD,

則 $$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PD}^2+2\overline{AD}^2,\qquad \text{(定理十四)}$$

即 $$2\overline{PD}^2+2\overline{AD}^2=k^2;$$

$$\therefore\quad PD=\sqrt{\frac{k^2}{2}-\overline{AD}^2};$$

因 AD 為定長 AB 之半,故 PD 亦為定長;

由是 P 點之軌跡為以 D 作中心之一圓周. (學者自證之)

【討論】 欲此問題成立,當

$$\frac{k^2}{2}>\overline{AD}^2,$$

即 $$k>AD\sqrt{2}.$$

問　題

(1) 有同底二矩形,其高之比為 5:3, 而大者之面積為 75 平方寸,則此二矩形面積之和若何?

(2) $\triangle ABC$ 中, $BC=12$ 寸, $CA=8$ 寸, 而從 A 所引之高為 6 寸,則從 B 所引之高若何?

(3) 梯形之二底各長 10 寸,及 17 寸,而其高為 4 寸,求其面積.

(4) 直角三角形之直角二邊各長 21 寸及 20 寸,斜邊之長若何?

(5) 正三角形之一邊為 a, 其高若何?

(6) $\triangle ABC$ 中, $BC=18$ 寸, $CA=8$ 寸, $\angle C=120°$, 則 AB 之長及此三角形之面積若何?

(7) 平行四邊形之一角為 120° 而相隣二邊各長 25 寸及 40 寸. 求其面積.

(8) 設三角形之三邊各長 25 寸, 28 寸, 40 寸;則

(I) 此三角形之三角各若何?
(II) 此三角形三中線之長各若何?
(III) 三個高若何?
(IV) 面積若何?
(V) 最小邊在最大邊上之射影若何?

(9) 在二個四邊形中,二雙對角線各相等,且對角線之交角相等,則此二個四邊形能否相等?

(10) 在一直線上取四點,順次名之爲 A, B, C, D, 則

$$AC.BD=AB.CD+BC.AD.$$

【註】 此定理爲 Leonhard Euler 所發明.

(11) 從直角三角形直角頂點 C 向斜邊 AB 引垂線 CD, 則 AB, CD 和上正方形與 AC, CB 和上正方形二者之差等於 CD 上之正方形.

(12) O 爲一圓之中心, P 爲其周上任意一點,從 P 引二直線與一直徑 AB 會於 C, D, 而令 CO=OD, 則

$$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2.$$

(13) 在一圓中,引互相垂直之二弦 AB, CD, 其交點爲 P, 圓之中心爲 O, 則

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+4.\overline{OP}^2=8.\overline{OA}^2.$$

(14) P 爲一圓直徑 AB 上之任意點, CD 爲平行於 AB 之弦,連結 PC, PD, 則

$$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2.$$

(15) 四邊形之一對角線分本形爲二等分,則亦可分他對角線爲二等分.

(16) 在梯形 ABCD 中 AD, BC 爲其底, O 爲其二對角線之交點,則 $\triangle AOB=\triangle COD.$

(17) 前題之倒定理亦眞確.

(18) 內分一線分,則其二部分所包之矩形當分點爲中點時面積最大.

(19) 在一直線上取二個等長部分爲底,向此直線之同旁作二個等高三角形,則底之平行線夾於各三角形二邊間之部分相等.

(20) 在□ABCD內取一點P,過P引平行於二邊之直線,則□分成四個□而□PC與□PA之差等於△PBD之二倍.

(21) O爲□ABCD對角線之交點,在△AOB內取任意點P,引PA, PB, PC, PD,則

$$\triangle CPD=\triangle APB+\triangle APC+\triangle BPD.$$

(22) 從多角形ABCDE….內任意點P向邊AB, BC, CD, ….引垂線PG, PH, PK, PL, …., 則

$$\overline{AG}^2+\overline{BH}^2+\overline{CK}^2+\cdots=\overline{GB}^2+\overline{HC}^2+\overline{KD}^2+\cdots\cdots.$$

(23) 在△ABC之一邊BC上取一點X,而令

$$\overline{AB}^2+\overline{BX}^2=\overline{AC}^2+\overline{CX}^2;$$

若AX之中點爲M,則 $BM=CM.$

(24) 三角形三邊上正方形和之三倍等於三中線上正方形和之四倍.

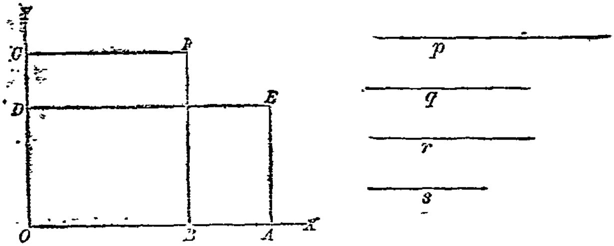
(25) 連結四邊形ABCD中兩雙對邊中點之線分爲EF, GH,則 $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{EF}^2+\overline{GH}^2).$

第二章

比例線及面積之關係

365. 定理十七.

四線分成比例,則其外項所包之矩形等於內項所包之矩形.



四個線分為p, q, r, s,若$p:q=r:s$,
則p, s所包之矩形等於q, r所包之矩形.

【證】 從一點O引互相垂直二直線OX, OY;
在OX上取二點A, B,令$OA=p$, $OB=q$;
又在OY上取二點C, D,令$OC=r$, $OD=s$;
以OA,OD為二邊作矩形AD,又以OB,OC,為二邊作矩形BC;

則 $\square AD:\square BD=OA:OB=p:q$, (定理一)

$\square BC:\square BD=OC:OD=r:s$; (定理一系)

然 $p:q=r:s$ (假設)

$\therefore \square AD:\square BD=\square BC:\square BD$;

$\therefore \square AD=\square BC$;

卽 $p.s=q.r$,

366. 系一. (定理十七之倒).

p, s所包之矩形等於q, r所包之矩形,則

$$p:q=r:s.$$

如上圖,

$$\square AD:\square BD=\square BC:\square BD,$$

而 $$\square AD:\square BD=OA:OB=p:q,$$

$$\square BC:\square BD=OC:OD=r:s,$$

$$\therefore\quad p:q=r:s.$$

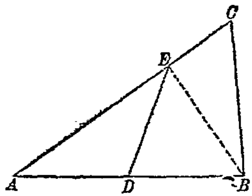
367. 系二.

三線分成連比例,則外項所包之矩形等於中項上正方形.

倒. 一線分上正方形等於一矩形,則此線分爲矩形二邊之比例中項.

368. 定理十八.

二個三角形之一角相等,或互爲補角,則此二三角形之比等於夾此角二邊比之相乘比.



(1) 二個三角形ABC, ADE中,共有一角A,則

$$\triangle ADE:\triangle ABC=AD.AE:AB.AC.$$

【證】 連結EB,則二三角形ADE, ABE皆以從E至AD之垂線爲其高,

故 $$\triangle ADE:\triangle ABE=AD:AB,$$ (定理五系三)

或 $$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABE}=\frac{AD}{AB};\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

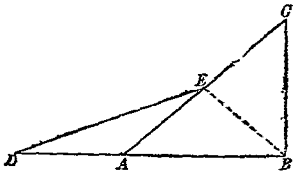
又二三角形ABE, ABC皆以從B至AC之垂線爲其高,

故 $$\frac{\triangle ABE}{\triangle ABC}=\frac{AE}{AC};\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

由是 $$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABE}\cdot\frac{\triangle ABE}{\triangle ABC}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC};$$

$$\therefore\ \frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AD.AE}{AB.AC},$$

即 $$\triangle ADE:\triangle ABC=AD.AE:AB.AC.$$



(2) 在二個三角形ABC, ADE中一角BAC, DAE互爲補角,則 $\triangle ADE:\triangle ABC=AD.AE:AB.AC.$

【證】 連結BE,如前可得

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABE}=\frac{AD}{AB},$$

$$\frac{\triangle ABE}{\triangle ABC}=\frac{AE}{AC},$$

$$\therefore\ \frac{\triangle ADE}{\triangle ABE}\cdot\frac{\triangle ABE}{\triangle ABC}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC},$$

即 $$\triangle ADE:\triangle ABC=AD.AE:AB.AC.$$

369. 系.

二個平行四邊形之一角相等,則此兩形

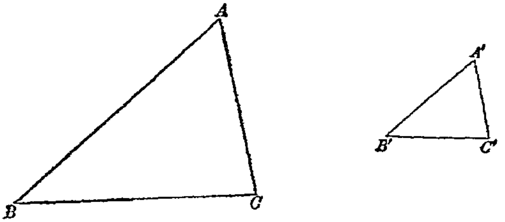
之比等於其相隣二邊之相乘比.

370. 定理十九.

二個相似三角形之比等於其對應邊之二乘比.

二個相似三角形ABC,A′B′C′中BC及B′C′爲其對應邊,

則　$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=\overline{BC}^2:\overline{B'C'}^2.$



【證】　$\angle B$及$\angle B'$爲兩形中之對應角,故相等,

故　$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=AB.BC:A'B'.B'C'$,

或　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{BC}{B'C'};$$

然　$AB:A'B'=BC:B'C'$,

卽　$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'};$$

$$\therefore\ \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{BC}{B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2};$$

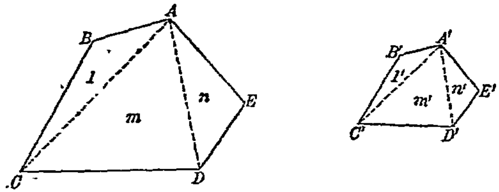
卽　$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=\overline{BC}^2:\overline{B'C'}^2.$

【注意】　本定理又可述之如下:

二個相似三角形之比等於其對應邊上正方形之比.

371. 定理二十.

二個相似多角形之比等於其對應邊之二乘比.



二個多角形ABCDE, A′B′C′D′E′中對應邊爲AB, A′B′,

則 $$ABCDE:A'B'C'D'E'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2.$$

【證】 從對應頂點A, A′引對角線,則可以二個多角形分成相似而在相似位置之同個數三角形;

以l, m, n及l', m', n'表二羣三角形之面積,

則 $$l:l'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2, \quad \text{(定理十九)}$$

又 $$m:m'=\overline{AC}^2:\overline{A'C'}^2$$

$$=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2,$$

倣此, $$n:n'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2;$$

故 $$l:l'=m:m'=n:n';$$

而 $$l:l'=l+m+n::l'+m'+n'; \quad \text{(加比之理)}$$

然 $$l:l'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2,$$

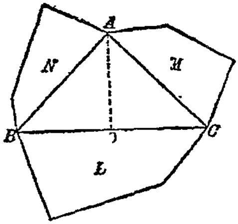
$$\therefore\quad l+m+n:l'+m'+n'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2;$$

即 $$ABCDE:A'B'C'D'E'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2.$$

372. 定理二十一.

在直角三角形各邊上作相似而在相似

位置之多角形,則斜邊上之多角形等於他二邊上多角形之和.



△ABC中∠A為直角,L,M,N為在BC,CA,AB上相似而在相似位置之多角形,則L=M+N.

【證】　從A向BC引垂線AD,

則　$BD:DC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$;　(定理十一系三)

$\therefore\ BD+DC:DC=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2:\overline{AC}^2$;　(合理)

然　$BD+DC=BC$,

又　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$,　(定理十一)

$\therefore\ BC:DC=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2$;

又因　$L:M=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2$,　(定理二十)

$\therefore\ L:M=BC:CD$;

倣此,　$L:N=BC:BD$,……(1)

$\therefore\ M:N=DC:BD$;

$\therefore\ M+N:N=BD+DC:BD$,　(合理)

卽　$M+N:N=BC:BD$;……(2)

從(1),(2),

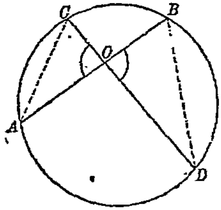
$L:N=M+N:N$,

$\therefore\quad L=M+N.$

【注意】 此定理較定理十一爲普徧.

373. 定理二十二.

過一定點引一圓之二弦,則各弦上二部分所包之矩形相等.



過一定點O引⊙ABC之二弦AB, CD,

則　　$\square AO\cdot BO=\square CO.DO.$

(1) O在圓周內者.

【證】 連結AC, BD,

則　　$\angle ACO=\angle DBO,$

$\angle AOC=\angle BOD,$

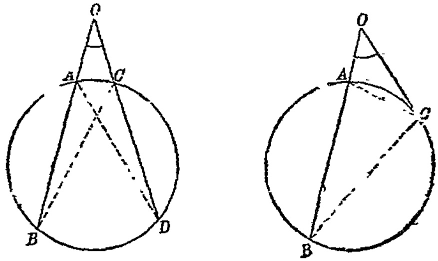
$\therefore\quad \triangle AOC\sim\triangle DOB;$　　(三編定理十一)

$\therefore\quad AO:DO=CO:BO;$

$\therefore\quad AO\cdot BO=CO\cdot DO.$

【注意】 一弦以O點爲中點則過O點諸弦上二部分所包矩形等於此弦半分上之正方形.

(2) O在圓周外者.



【證】 連結AD, BC,

則 $\angle ABC = \angle ADC$.

$\triangle OBC$及$\triangle ODA$中,共有一角而又一角相等,故爲相似形;

$$\therefore \quad BO:CO=DO:AO;$$

$$\therefore \quad AO.BO=CO.DO.$$

【注意】 若D點沿圓周移動漸次接近於C點而至與C點合一,此時割線OCD至切線OC之位置,而OA.OB等於$\overline{OC}^2$可知.

374. 系一.

諸弦皆過一定點,則其上二部分所包矩形之大小一定. 定點在圓內,則諸矩形等於以此定點爲中點之半弦上正方形. 定點在圓外,則諸矩形等於從此定點所作切線上正方形.

375. 系二. (定理二十二之倒).

二線分相交而各線分上二分所包矩形之大小一定,則此二線分之各端在一圓周上.

O爲線分AB,CD之交點,若$OA \cdot OB = OC \cdot OD$,
則四點A,B,C,D在一圓周上.

【證】 設過三點A,B,C之圓周再交OC之點爲D′,

則從定理二十二, $OA \cdot OB = OC \cdot OD'$;

然從假設, $OA \cdot OB = OC \cdot OD$,

$$\therefore \quad OD' = OD,$$

而D′與D不可不合而爲一;
故過三點A,B,C之圓周必又過D點.

376. 系三.

從圓外一定點至圓周所引線分上正方形若等於從此定點所引割線上二部分所包之矩形,則此線分爲圓之切線.

連結圓外一點O及圓周上一點C,又從O引割線OAB,與圓周交於A及B;若$\overline{OC}^2 = OA \cdot OB$;
則OC爲此圓之切線. (視§373之圖).

【證】 若云OC非圓周之切線,則OC與圓周除C外當尙有一交點,名其點爲D;

由此 $OA \cdot OB = OC \cdot OD$; (系一)

然 $OA \cdot OB = \overline{OC}^2$, (假設)

$$\therefore \quad \overline{OC}^2 = OC \cdot OD;$$

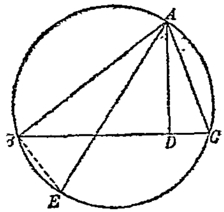
此式苟非D點與C點合一不能成立;
故OC不可不與圓切於C.

377. **定理二十三.**

三角形二邊所包矩形等於對第三邊之高與其外接圓直徑所包之矩形.

AD為$\triangle$ABC之一個高,AE為其外接圓之直徑,

則　　$AB.AC=AD.AE.$



【證】 連結BE,

則. $\angle AEB=\angle ACD,$　　(二編定理十六系)

$\angle ADC=R\angle$

$=\angle ABE,$　　(二編定理十七)

$\therefore\quad \triangle AEB\sim\triangle ACD;$

$\therefore\quad AB:AD=AE:AC;$

$\therefore\quad AB.AC=AD.AE.$

378. 設三角形之三邊(a, b, c),求其外接圓之半徑(R).

從上款,　　$bc=2R.AD;$

而　　$AD=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ (364款例四)

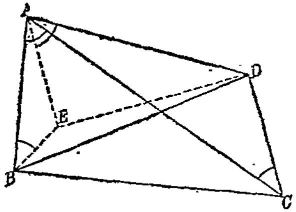
$$\therefore\quad bc=\frac{4}{a}R\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\therefore\quad R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

379. 定理二十四.

四邊形中對角不互為補角,則其二對角

線所包之矩形比二雙對邊所包矩形之和小.



在四邊形ABCD中, $\angle ABC$, $\angle ADC$不互爲補角,卽A, B, C, D四點不在一圓周上,

則 $AC.BC < AB.CD + AD.BC.$

【證】 因A, B, C, D四點不在一圓周上,

故 $\angle ABD \neq \angle ACD$;

今設 $\angle ABD > \angle ACD$;

作BE及AE,令

$\angle ABE = \angle ACD$, $\angle BAE = \angle CAD$,

連結DE;

則 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$; (三編定理十一)

$\therefore$ $AB:BE = AC:CD$;……………………(1)

又 $AB:AE = AC:AD$,

卽 $AB:AC = AE:AD$, (更理)

且 $\angle BAC = \angle EAD$,

$\therefore$ $\triangle BAC \sim \triangle EAD$;

$\therefore$ $BC:CA = ED:DA$;……………………(2)

從(1)及(2),得 $AB.CD = BE.AC$,

及 $AD.BC = ED.AC$;

故 $AB.CD + AD.BC = BE.AC + ED.AC$

$$=(BE+ED)\cdot AC;$$

然　$BE+ED>BD,$

$\therefore\ (BE+ED)AC>BD\cdot AC;$

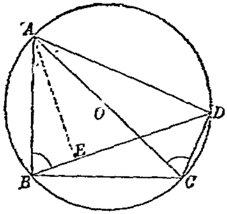
$\therefore\ AB\cdot CD+AD\cdot BC>BD\cdot AC,$

卽　$AC\cdot BD<AB\cdot CD+AD\cdot BC.$

380. 系一.

若A, B, C, D在一圓周上,卽四邊形ABCD內接於圓,則

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC.$$



因此時E在對角線BD上而

$$BE+ED=BD$$

故也.

【注意】 此定理名曰Ptalemaeus定理.

381. 系二. (系一之倒).

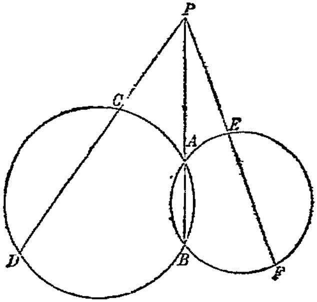
在四邊形ABCD中,

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC,$$

則此四邊形可內接於圓.

382. 例.

例一. 在相交二圓公共弦AB之延線上取任意一點P,從P引二圓之割線 PCD, PEF, 則四點C, D, E, F在一圓周上.



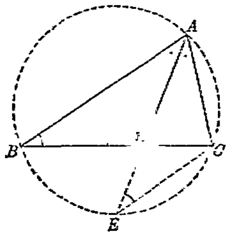
【證】 因 $PC.PD=PA.PB$, (定理二十二)

$PE.PF=PA.PB$;

$\therefore$ $PC.PD=PE.PF$;

故C, D, E, F在一圓周上. (定理二十二系二)

例二. 三角形一角等分線上之正方形比夾此角二邊所包之矩形小,所小者爲此等分線分第三邊所得二部分所包之矩形.



AD爲△ABC中一角A之等分線,

則　$\overline{AD}^2=AB.AC-BD.DC.$

【證】作$\triangle ABC$之外接圓ABC,延長AD與此圓周交於E,連結CE;

則　$\angle ABD=\angle AEC,$

$\angle BAD=\angle EAC,$

$\therefore\ \triangle ABC\sim\triangle AEC,$　　(三編定理十一)

$\therefore\ AB:AE=AD:AC;$

$\therefore\ AB\cdot AC=AD\cdot AE;$

然　$AE=AD+DE,$

$\therefore\ AB.AC=AD(AD+DE)$

$=\overline{AD}^2+AD.DE;$

又因　$AD.DE=BD.DC,$

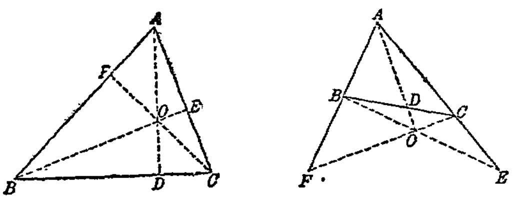
$\therefore\ AB.AC=\overline{AD}^2+BD.DC;$

$\therefore\ \overline{AD}^2=AB.AC-BD.DC.$

例三. 從三角形各頂點至其對邊或對邊之延線引交於一點之三直線,則三邊上部分比之相乘比等於1.

又此倒定理亦眞確.

(甲)　(乙)



從$\triangle ABC$之三個頂點A, B, C引交於一點O之三直線AD, BE, CF,此三直線各與對邊BC, CA, AB或其延線交於

D, E, F,

則 $(BD:DC)(CE:EA)(AF:FB)=1.$

【證】 $BD:DC=\triangle ABD:\triangle ADC$, (定理五系四)

又 $BD:DC=\triangle OBD:\triangle ODC$, (同上)

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}=\frac{\triangle OBD}{\triangle OBC}$$

$$=\frac{\triangle ABD\pm\triangle OBD}{\triangle ADC\pm\triangle OBC}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO};$$

(在甲圖中用±中之一號,乙圖則用+號)

故 $$\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO};$$

倣此, $$\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle BCO}{\triangle ABO},$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{\triangle ACO}{\triangle BCO};$$

$$\therefore\quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}\cdot\frac{\triangle BCO}{\triangle ABO}\cdot\frac{\triangle ACO}{\triangle BCO}=1;$$

即 $(BD:DC)(CE:EA)(AF:FB)=1.$

倒之,在 $\triangle ABC$ 三邊或其延線上各取 D, E, F 點,而
$(BD:DC)(CE:EA)(AF:FB)=1,$
則 AD, BE, CF 交於一點.

【證】 AD, BE 之交點為 O, 連結 CO, 設 CO 與邊 AB 或其延線會於 F′;

則 $(BD:DC)(CE:EA)(AF':F'B)=1;$

從假設 $=(BD:DC)(CE:EA)(AF:FB);$

$\therefore\quad AF':F'B=AF:FB;$

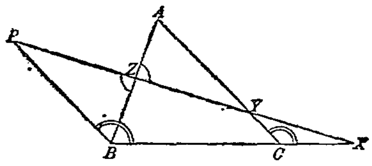
故 F′ 不得不與 F 合而為一. (三編定理一)

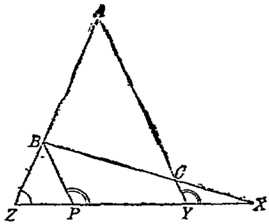
【注意】 此定理名曰 Ceva 氏之定理.

例四. 一直線與三角形ABC之三邊或其延線,各交於X, Y, Z, 則

$$(AZ:ZB)(BX:XC)(CY:YA)=1.$$

又此倒定理亦眞確.





【證】 從B引邊CA之平行直線BP,與直線YZ交於P點,則從相似三角形AYX, BPZ,得

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{YA}{BP};$$

又從相似三角形BXP, CXY,得

$$\frac{BX}{XC}=\frac{BP}{CY};$$

$$\therefore\quad \frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=\frac{YA}{BP}\cdot\frac{BP}{CY}\cdot\frac{CY}{YA}=1;$$

即 $(AZ:ZB)(BX:XC)(CY:YA)=1.$

倒之,在△ABC之三邊BC, CA, AB上或其延線上各取X, Y, Z, 若 $(AZ:ZB)(BX:XC)(CY:YA)=1,$

則X, Y, Z三點在一直線上.

【證】 連結X, Y之直線與邊AB交於Z′,

則 $(AZ':Z'B)(BX:XC)(CY:YA)=1$

由假設 $=(AZ:ZB)(BX:XC)(CY:YA);$

$$\therefore\quad AZ':Z'B=AZ:ZB;$$

故Z'不得不與Z合而爲一;

即X, Y, Z在一直線上.

【注意】 此定理名曰Menelaus氏之定理.

問題

(1) 二線分所包矩形爲各線分上正方形之比例中項.

(2) 在△ABC一邊BC上取任意點D,過D引AB, AC之平行直線DE, DF,各與AC, AB會於E, F,則

$$\triangle DEC:\triangle AEF=\triangle AEF:\triangle DBF.$$

(3) 從正三角形內一點至各邊距離之和爲一定長;以比例之定理證之.

(4) 在△ABC之二邊AB, AC上各取D及E點,令

$$AD=\tfrac{1}{3}AB,\quad AE=\tfrac{1}{3}AC,$$

CD, BE之交點爲F,則 $\triangle BFC=\frac{1}{2}\triangle ABC.$

(5) P爲二等邊三角形ABC底BC或其延線上之任意一點,則 $\overline{AB}^2\sim\overline{AP}^2=BP.CP.$

(6) 在正三角形ABC外接圓周上取一點M,令M與A分居弦BC之兩旁,則MB+MC=MA.

(7) 一直線切相交二圓於P, Q,而交其公共弦之延線於R,則PR=QR.

(8) 梯形二對角線之交點等分過此點而平行於底邊之線分.

(9) 在二三角形ABC, DEF中, $\angle A=113°$, $\angle D=67°$, AB=18寸, AC=13寸; DE=12寸, DF=26寸; 則此二三角形面積之比若何?

(10) 在△ABC之三邊BC, CA, AB上各取點D, E, F,令

$BE:DC=9:4$, $CE:EA=7:3$, $AF:FB=3:2$,

則$\triangle DEF$與$\triangle ABC$之比若何?

(11) $\square ABCD$中$\angle A$之等分線與邊BC, CD,或其延線交於E, F,則 $\triangle ABF=\triangle ADE$.

(12) 從$\triangle ABC$之頂點A至其對邊引直線AD, AE,令

$$\angle BAD=\angle CAE,$$

則 $$BD.BE:CD.CE=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2.$$

(13) 一直線截相交二圓周及其公共弦,其交點順次爲A, B, C, D, E,則 $AB:BC=ED:CD$.

(14) $\triangle ABC$內接圓與三邊BC, CA, AB之切點各爲D, E, F,則AD, BE, CF交於一點.

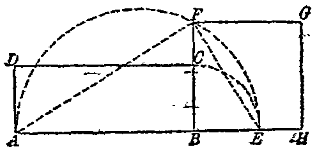
(15) 三角形二內角及他一外角之等分線各與對邊或其延線之交點在一直線上.

第三章

關於面積之作圖題

383. 作圖題一.

設矩形之面積,作其等積之正方形



ABCD爲所設矩形,求作與此等積之正方形.

【解】 延長矩形之一邊AB,在其上取E點,令BE=BC;以AE作直徑畫半圓周AFE,與BC之延線交於F;

以BF為一邊作正方形BFGH,卽為所求之正方形.

【證】 連結AF,EF,

則 $\triangle ABF \backsim \triangle FBE$;

$\therefore$ $AB:BF=BF:BE$;

$\therefore$ $\overline{BF}^2=AB\cdot BE$;

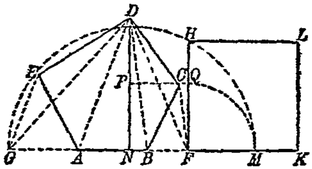
然 $BE=BC$,

$\therefore$ $\overline{BF}^2=AB.BC$;

卽 $\square BFGH=\square ABCD$.

384. 作圖題二.

設任意多角形,作其等積之正方形.



ABCDE為所設多角形,求作其等積之正方形.

【解】 (第一) 作對角線AD,BD,過E,C各作AD,BD之平行直線EG,CF,與AB之延線交於G,F;連結DG,DF,則 $\triangle DGF=ABCDE$.

【證】 因 $EG \parallel DA$,

$\therefore$ $\triangle DAG=\triangle DAE$; (定理五系一)

倣此, $\triangle DBF=\triangle DBC$;

$\therefore$ $\triangle DAG+\triangle DAB+\triangle DBF$

$=\triangle DAE+\triangle DAB+\triangle DBC$;

$\therefore$ $\triangle DGF=ABCDE$.

(第二) 作$\triangle DGF$之高DN,求其中點P;

從P引GF之平行直線PQ與從F所引GF之垂線FH會於Q;以GF爲底,FQ爲高之矩形等於△DGF;

故如作圖題一作等於矩形GF.FQ之正方形FHLK;

則　　□FHLK＝△DGF;

然　　△DGF＝ABCDE,

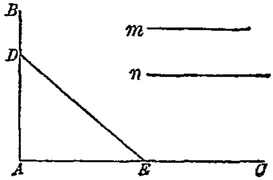
∴　　□FHLK＝ABCDE.

【注意】 任意多角形恒可變爲等積而少一邊之別一多角形.

385. 作圖題三.

作一正方形,令等於所設二正方形之和或差.

(1) 以m,n各爲所設二正方形之邊,求作一正方形,等於此二正方形之和.



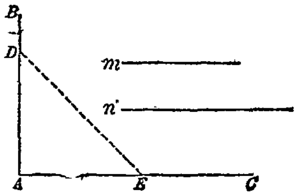
【解】 作直角BAC,在其二邊AB,AC上各取等於m,n之線分AD,AE,連結DE,則DE爲所求正方形之一邊.

【證】 $\angle DAE = R\angle$,

$$\therefore \quad \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 \qquad \text{(定理十一)}$$

$$= m^2 + n^2.$$

(2) m,n各爲所設二正方形之一邊,求作一正方形,等於此二正方形之差.



【解】 如前作直角BAC;假定$m<n$;

在直角BAC之一邊AB上取線分AD,令AD=m;
以D作中心,n之長作半徑,畫圓,交AC於E;
則AE爲所求正方形之一邊.

【證】　　$\angle DAE = R\angle$,

$$\therefore \quad \overline{AD}^2+\overline{AE}^2=\overline{DE}^2;$$

而

$$\overline{AE}^2=\overline{DE}^2-\overline{AD}^2$$
$$=n^2-m^2.$$

386. 作圖題四.

作一多角形,令與所設二個相似多角形相似,且等於其和或差.

【解析】 所設二個相似多角形爲P, P′,其對應邊爲 a, a';
設所求之多角形,卽與P, P′相似而等於其和或差之多角形,爲P″,此形中對應於a, a'之邊爲x

則因三個多角形爲相似形,

故

$$\frac{P}{a^2}=\frac{P'}{a'^2}=\frac{P''}{x^2};\qquad\text{(定理二十)}$$

$$\therefore \quad \frac{P\pm P'}{a^2\pm a'^2}=\frac{P''}{x^2};$$

然

$$P''=P\pm P',$$

$$\therefore \quad x^2=a^2\pm a'^2;$$

由是得作圖之法如下:

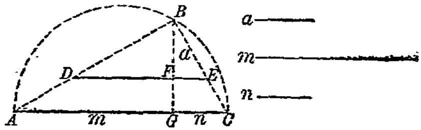
【解】 先各以二個相似多角形之對應邊a, a'爲一邊作正方形;
次,別作一正方形,令等於前二正方形之和或差以求其一邊x;　(作圖題四)

復在x上作一多角形,令與a上之多角形P相似而在相似之位置;　　(三編作圖題五)

則此多角形即爲所求之多角形P″.

387. 作圖題五.

作一正方形,令其與所設正方形之比等於所設二線分之比.



a爲所設正方形之一邊,m, n爲所設二線分;求作一正方形,令其與正方形a^2之比等於$m:n$.

【解】　引一直線AC,在其上取二線分AG, GC,令

$$AG=m,\quad GC=n;$$

以AC爲直徑,在其上作半圓周ABC,與從G所引AC之垂線交於B;連結BA, BC;

次,在BC上取等於a之BE;

過E引AC之平行直線,與AB交於D;則BD爲所求正方形之一邊.

【證】　因　$\overline{AB}^2:\overline{BC}^2=m:n$,　　(定理十一系三)

又　　$BD:BE=AB:BC$,　(三編定理十)

$\therefore$　$\overline{BD}^2:\overline{BE}^2=\overline{AB}^2:\overline{BC}^2$;

$\therefore$　$\overline{BD}^2:\overline{BE}^2=m:n$,

即　　$BD^2:a^2=m:n$.

【注意】　若比$m:n$中二項m,n皆爲所設數,則可取

任意線分單位,以二線分之長表各項而如上法作之;然用下法較為便利:

(1) $m:n<1$.

例如 $m:n=3:5=\frac{3}{5}$,求一正方等於所設正方形之$\frac{3}{5}$.

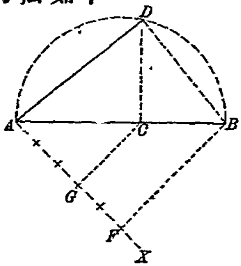
設AB為所設正方形之一邊,x為所求正方形之一邊,

則 $$x^2=\overline{AB}^2\times\frac{3}{5};$$

或 $$x^2=AB\cdot\frac{3AB}{5};$$

故x為AB及$\frac{3AB}{5}$之比例中項.

由是得作圖方法如下:



【解】 從A引任意直線AX,在其上取任意長之三倍AG,五倍AF;

連結BF,從G引FB之平行線GC,會AB於C;

則 $$AC=\frac{3}{5}AB;$$

次,以AB作直徑,作半圓周ADB,與從C所引AB之垂線CD會於D;連結AD,BD;

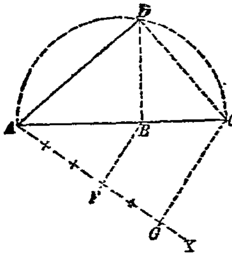
則 $$\triangle ABD\backsim\triangle ADC,$$

$$\therefore\quad AB:AD=AD:AC,$$

卽 $$AB:AD=AD:\frac{3}{5}AB;$$

$$\therefore\quad \overline{AD}^2=AB.\frac{3AB}{5};$$

故AD爲所求正方形之一邊.



(2) $m:n>1$.

例如 $m:n=5:3=\frac{5}{3}$.

【解】 在AB之延長線上取C點,令$AC=\frac{5}{3}AB$;

在AC上作半圓周ADC,與從B所引AC之垂線會於D;連結AD, DC;

則如前可證 $$\overline{AD}^2=AB.AC=AB.\frac{5AB}{3};$$

故AD爲所求正方形之一邊.

388. 作圖題六.

作一多角形,令與一所設多角形相似,且令其與此所設形之比如所設二線分之比.

【解析】 所設多角形爲P,所求多角形爲P′,又所設二線分爲m, n,欲令 $P':P=m:n$;

今設P, P′之任意對應邊爲a, a',

則　　$P':P=a'^2:a^2$;　　(定理二十)

然須　　$P':P=m:n$,

故當　　$a'^2:a^2=m:n$;

由是得作圖之法如下:

【解】 先作一線分 a',令此線分上正方形對於多角形P任意一邊 a 上正方形之比等於所設比 $m:n$;

(作圖題五)

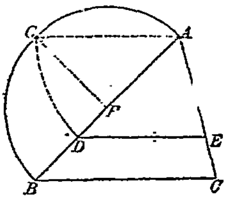
次,在求得之線分 a' 上作一多角形 P',令此 P' 與 a 上多角形 P 相似而在相似之位置;　　(三編作圖題五)

則 P' 即爲所求多角形.

389. 作圖題七.

作一直線,令與所設三角形之一邊平行,而分之爲相等二部分.

求作一直線,平行於 $\triangle ABC$ 之一邊 BC,而分 $\triangle ABC$ 爲相等二部分.



【解析】 假定DE爲所求平行於BC而等分 $\triangle ABC$ 之直線,則　　$\triangle ADE:\triangle ABC=1:2$;

而　　$\triangle ADE\sim\triangle ABC$,

$\therefore$　　$\triangle ADE:\triangle ABC=\overline{AD}^2:\overline{AB}^2$;　　(定理十九)

$\therefore$　　$\overline{AD}^2:\overline{AB}^2=1:2$;

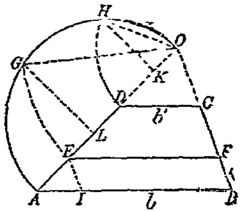
由是本題可變爲他一問題如下:

求在邊AB上截取線分AD,令正方形$\overline{AD}^2$等於正方形$\overline{AB}^2$之半.

【解】　以AB爲直徑作半圓周AGB;
從AB之中點F引AB之垂線,交圓周於G,連結AG;
以A爲中心AG爲半徑畫圓周,交AB於D;
從D引BC之平行線DE,卽爲所求之直線.

390. 作圖題八.

作一直線,令平行於梯形之底而分之爲相等二部分.



【解析】　設EF爲平行於梯形ABCD之底AB而分之爲二等分之直線;
延長AD,BC交於O;
則△OAB,△OEF,△ODC爲相似三角形而AB,EF,DC爲其對應邊,故從定理十九,

$$\frac{\triangle OAB}{\overline{AB}^2}=\frac{\triangle OEF}{\overline{EF}^2}=\frac{\triangle ODC}{\overline{DC}^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今以AO爲直徑畫半圓周AGO,又以O爲中心OD,OE爲半徑畫圓弧DH,EG,各與前圓周會於H,G;
弦OA,OG,OH上之正方形,各與其在直徑OA上之射影OA,

OL,OK成比例,

即 $$\frac{\overline{OA}^2}{OA}=\frac{\overline{OG}^2}{OL}=\frac{\overline{OH}^2}{OK}$$ (定理十一系三)

或 $$\frac{\overline{OA}^2}{OA}=\frac{\overline{OE}^2}{OL}=\frac{\overline{OD}^2}{OK};\quad\cdots\cdots(2)$$

然 $$\triangle OAB\backsim\triangle OEF\backsim\triangle ODC,$$

$$\therefore\quad \frac{OA}{AB}=\frac{OE}{EF}=\frac{OD}{DC};$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{OE}^2}{\overline{EF}^2}=\frac{\overline{OD}^2}{\overline{DC}^2}$$

從(2), $$\frac{OA}{\overline{AB}^2}=\frac{OL}{\overline{EF}^2}=\frac{OK}{\overline{DC}^2};\quad\cdots\cdots(3)$$

從(1)及(3), $$\frac{\triangle OAB}{OA}=\frac{\triangle OEF}{OL}=\frac{\triangle ODC}{OK};$$

由此 $$\frac{\triangle OAB-\triangle OEF}{OA-OL}=\frac{\triangle OEF-\triangle ODC}{OL-OK},$$

即 $$\frac{AEFB}{AL}=\frac{EDCF}{LK};$$

從假設, $$AEFB=EDCF,$$

$$\therefore\quad AL=LK;$$

由是可得如下之解.

【解】 延長二邊AD, BC交於O;

以AO為直徑畫半圓周AGO;

又以O為中心OD為半徑畫圓弧DH,與AGO交於H;

從H向AO引垂線HK,而等分AK於L;

從L引AO之垂線LG,與半圓周交於G;

再以O為中心OG為半徑畫圓弧GE,與AO會於E;

從E引AB之平行直線EF,則EF即為所求之直線.

391. 設梯形二底邊AB, DC之長,求EF之長. (視前款之圖)

令 $AB=b,\quad DC=b',\quad EF=x;$

因 $$\frac{\triangle AOB}{b^2}=\frac{\triangle EOF}{x^2}=\frac{\triangle DOE}{b'^2},$$

故 $$\frac{\triangle AOB-\triangle EOF}{b^2-x^2}=\frac{\triangle EOF-\triangle DOE}{x^2-b'^2},$$

卽 $$\frac{AEFB}{b^2-x^2}=\frac{EDCF}{x^2-b'^2};$$

今欲 $$AEFB=EDCF,$$

則當 $$b^2-x^2=x^2-b'^2;$$

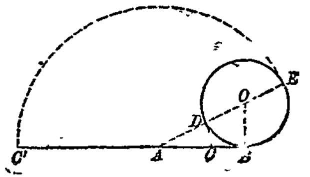
由是 $$x=\sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2+b'^2)}.$$

【注意】 若在前款之圖中量AB, DC之長而從本款之公式求EF之長,在BC上截取與此等長之BI,從I引BC之平行線會AD於E,卽可從E引EF; 如此作EF之法在實用上似較上款之法為便利.

392. 作圖題九.

內分或外分一線分,令此線分與其一部分所包矩形等於他部分上正方形.

內分或外分線分AB,令AB與其一部分所包矩形等於他部分上正方形.



【解】　在AB一端引其垂線BO,且令$BO=\frac{1}{2}AB$;
以O為中心,OB為半徑,畫圓周DBE;
連結AO,得其與圓周之交點D,E;
次,以A為中心,AD,AE各為半徑,畫圓弧,各與AB及其延線會於C,C′;則C,C′即為所求之分點,即

(1)　$AB.BC=\overline{AC}^2$;

(2)　$AB.BC'=\overline{AC'}^2$.

【證】　(1)　$AB\perp OB$,
故直線AB切⊙DBE於B點,而

$DA.AE=\overline{AB}^2$;　　(定理二十三)

然　$BO=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore\ DE=2DO=2BO=AB$;

$\therefore\ AD.AE=AD(AD+DE)$
$=AD(AD+AB)$;

$\therefore\ AD(AD+AB)=\overline{AB}^2$,

即　$\overline{AD}^2+AD.AB=\overline{AB}^2$;

由是　$\overline{AB}^2-AD.AB=\overline{AD}^2$,

即　$AB(AB-AD)=\overline{AD}^2$;

然　$AD=AC$,

$\therefore\ AB(AB-AC)=\overline{AC}^2$;

即　$AB.BC=\overline{AC}^2$.

(2)　$AD=AE-DE$,

$\therefore\ AD.AE=AE(AE-DE)$
$=AE(AE-AB)$;

$\therefore\ AE(AE-AB)=\overline{AB}^2$,

即　$\overline{AE}^2-AE.AB=\overline{AB}^2$;

然　$AE=AC'$,

$\therefore$　$\overline{AB}^2+AC'\cdot AB=\overline{AC'}^2$,

即　$AB(AB+AC')=\overline{AC'}^2$;

$\therefore$　$AB\cdot BC'=\overline{AC'}^2$.

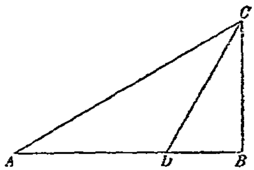
【注意】　$AB:AC=AC:BC$　$AB:AC'=AC':BC'$.

393. 定義 8.　中末比.[1]

在前款中,C,C′二點各爲以線分AB內分或外分於中末比之點.

394. 例.

例一. 以所設線分分作二部分,令其各部分上正方形之差等於所設正方形.



AB爲所設線分,l爲所設正方形之一邊,求以AB分作二部分,令其各部分上正方形之差等於l上之正方形.

【解】　從AB之一端B引其垂線BC,令$BC=l$;

連結AC;

從C引直線CD,與AB會於D而$\angle ACD=\angle CAD$;

則D爲所求之點.

【證】　因　$\angle ACD=\angle CAD$,

故　$CD=AD$;

(1) 中末比 Extreme and mean ratio.

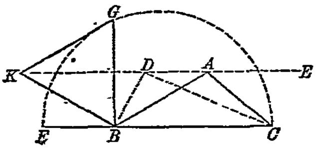
而 $\overline{CD}^2-\overline{DB}^2=\overline{BC}^2$, (定理十一系一)

$\therefore$ $\overline{AD}^2-\overline{DB}^2=l^2$.

$b<AB$,則D點在AB線上;$l>AB$,則D在AB之延線上;由是從所設正方形之一邊比AB小或大,而D爲內分點或外分點.

例二. 有一所設三角形,作與此等積之正三角形.

ABC爲所設三角形,求作等於此之正三角形.



【解】 過A引平行於BC之直線DAE;

從B引直線BD令會DA於D而$\angle DBC=\frac{2}{3}R\angle$;

求BD,BC之比例中項,得BG; (圖中BF=DB)

在BG上作正三角形BGK,卽爲所求之三角形.

【證】 因$\triangle DBC$之一角$\angle B=\frac{2}{3}R\angle$,而在BG上所作正三角形BGK之角亦爲$\frac{2}{3}R\angle$,

故 $\triangle DBC:\triangle BGK=DB.BC:\overline{BG}^2$; (定理十八)

然 $BD:BG=BG:BC$,

卽 $DB.BC=\overline{BG}^2$,

$\therefore$ $\triangle BGK=\triangle DBC$;

然 $\triangle DBC=\triangle ABC$, (定理五系二)

$\therefore$ $\triangle BGK=\triangle ABC$.

問題

(1) 延長線分AB而在其延線上求一點X,令

AX+AB, AX−AB所包之矩形等於他一所設線分CD上正方形.

(2) 作一直線,令過三角形一邊上所設一點而分此三角形爲二等分.

(3) 在線分AB之延線上求一點X,令AB,AX所包矩形等於所設正方形.

(4) 在△ABC內求一點O,令OA, OB, OC分此三角形爲三等分.

(5) 在四邊形ABCD內求一點O,令OA,OB,OC,OD分此四邊形爲四等分.

(6) 作一矩形,令其周圍等於所設長而其面積等於所設正方形.

(7) 內分或外分一線分AB,令其各部分上正方形之和等於所設正方形.

(8) 設正方形中一邊與對角線之和或差,作此正方形.

(9) X, Y爲所設二正方形. 求更作一正方形,令其頂點在X之各邊或其延線上而面積等於Y.

(10) 外分一線分AB,令其二部分所包矩形等於AB上之正方形.

(11) 外分一線分AB,令其一部分上正方形等於他部分上正方形之二倍.

(12) 設∠AOB及一點P.過P作一直線,令其與∠AOB之二邊所成三角形等於一所設三角形.

(13) 設二線分上正方形之差及此二線分所包之矩形,求此二線分.

(14) 以一所設線分分作二部分,令其一部分與他一

所設線分所包矩形等於他一部分上之正方形.

(15) 內分一線分AB於C點,令$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$為$\overline{AC}^2$之三倍.

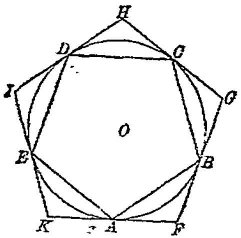
第四章 正多角形

395. 定理二十五.

任意等分一圓周,則

(1) 連結順次相隣分點之弦,成一內接於此圓之正多角形;

(2) 在各分點引此圓周之切線,成一外接於此圓之正多角形.



以圓周O等分作n等分,(圖中n為5),其分點順次為A, B, C, D, E,則

(1) ABCDE為圓之內接正多角形.

【證】 AB, BC, CD,…為立於等弧上之弦,故互相等;
∠ABC, ∠BCD, ∠DEF,…為立於等弧上之圓周角,故亦互相等; (二編定理十六系)

故ABCDE為正多角形.

(2) 在 A, B, C,…引此圓之切線成一多角形 FGHIK,則此多角形爲圓之外接正多角形.

【證】　$\angle FAB=\angle FBA$, (二編定理十九)

故 $\triangle AFB$ 爲二等邊三角形;

倣此,可證 $\triangle BGC$, $\triangle CHD$,…,亦各爲二等邊三角形;

此等三角形中底 AB, BC, CD,…互相等,其底角亦互相等;

故在 F, G, H,…之角互相等;且 FG, GH,…各等於 FB 之二倍,故亦互相等;

由是 FGHIK 爲正多角形.

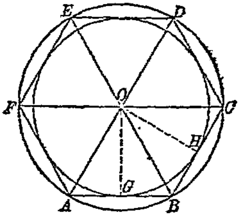
【注意】　依此定理,知若能以圓周分作任意等分,則即可得內接或外接於此任意邊數之正多角形.

然任意等分圓周在初等幾何學中係不能之事,所可作者僅爲特別數種,法載於本章之末.

396. 定理二十六.

正多角形可有一外接圓或一內接圓.

ABCDEF 爲正多角形,則必能作一外接或內接於此形之圓周.



【證】　從多角形相隣二邊 AB, BC 之中點 G, H,引此二邊之垂線 GO, HO,得其交點 O;

以O爲中心OA爲半徑畫圓周,則此圓周過A,B,C三點;
以直線OH爲摺痕而覆摺四邊形ABHO,
則因 $\angle OHB=\angle OHC=R\angle$,
而邊HB與HC相重;
又因 $HB=HC$,
而B與C合,
故邊BA與CD相重;
然 $BA=CD$, (假設)
故A與D合,直線OA與OD相重;
故過A,B,C三點之圓周又過D點;
倣此,可證此圓周又過其餘諸頂點;
故正多角形可畫一外接圓周.

因多角形之邊爲其外接圓周之弦且互相等,故與其中心之距離相等; (二編定理六)
卽從O至各邊之垂線OG, OH,....互相等;
故以O爲中心OG之長爲半徑畫圓周,則此圓周可切多角形ABCDEF之各邊於其中點;
卽正多角形可畫一內接圓周.

397. 定義9. 正多角形之中心.

正多角形內接圓或外接圓之中心名曰正多角形之中心.

398. 定義10. 正多角形之半徑及邊心距.[1]

正多角形之外接圓半徑名曰正多角形

(1) 邊心距 Apothem.

之半徑;其內接圓半徑,即從中心至邊之垂線曰正多角形之邊心距.

399. 定義11. 正多角形之中心角.

過正多角形一邊兩端所引二半徑之夾角名曰正多角形之中心角.

如在396款之圖中,O為正多角形ABCDEF之中心,OA為其半徑,OG為邊心距,AOB為中心角.

400. 系一.

正多角形之中心角等於四直角除以邊數所得之商.

401. 系二.

正多角形之內角為其中心角之補角.

如在396款之圖中,正多角形ABCDEF之一個內角為ABC,

則 $$\angle ABC=\angle OBA+\angle OBC$$
$$=\angle OBA+\angle OAB;$$

然 $$\angle AOB+\angle OBA+\angle OAB=2R\angle,$$

$$\therefore\quad \angle ABC+\angle AOB=2R\angle.$$

402. 例.

例一. 正八角形之一內角為幾度?

【解】 正八角形之中心角為$\frac{360°}{8}$,即45°;故其一內角為180°−45°,即135°.

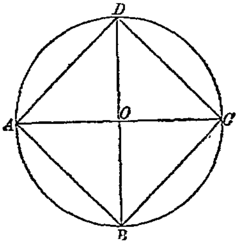
例二. 正多角形之一內角為162°,則其邊數若何?

【解】 此多角形之中心角為$180°-162°=18°$，故其邊數為$360°\div18°=20$.

403. 作圖題十.

作圓內接正方形.

【解】 在所設圓中作互相垂直之二直徑AC, BD; 引AB, BC, CD, DA; 則ABCD即為所求之正方形.



【證】 因AC, BD為互相垂直之二直徑,

故 $\frown AB=\frown BC=\frown CD=\frown DA$; (二編定理二系)

$\therefore$ $AB=BC=CD=DA$; (二編定理三)

又 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=R$; (二編定理十五)

故ABCD為內接正方形.

【注意】 二等分弧AB, BC, CD, DA, 而連結其分點與正方形中隣於此之頂點,則可得圓之內接正八角形. 累次用此法,則可得內接於圓邊數2^n之正多角形[n為正整數].

404. 作圖題十一.

作圓內接正六角形.

【解析】 假定ABCDEF為內接於圓之正六角形;

引半徑OA, OB, OD,

則　　$\angle AOB = \frac{2}{3}R\angle$,　　(定理二十五系一)

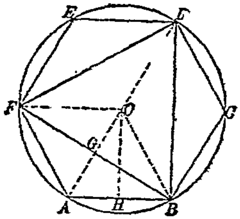
又　　$\angle BOD = 2 \times \frac{2}{3}R\angle$,

故AOD爲一直徑;

又　　$\angle OAB = \frac{1}{2}\angle 1OD = \frac{2}{3}R\angle$; (二編定理十六)

故AOB爲正三角形而其各邊等於圓之半徑;

由是得解如下:



【解】　以圓周上任意一點A爲中心用等於半徑之長作半徑,畫圓周,與所設圓周交於B及F;

再以B及F各爲中心,用同於前之半徑畫圓周,與所設圓周交於D及E;

連結AB, BC, CD, DE, EF, FA, 得ABCDEF, 爲所求之正六角形.

【注意一】　連結BD, DF, FA, 得BDF, 爲圓內接正三角形.

【注意二】　等分弧AB, BC, …, 連結其分點與正六角形中隣接此之頂點,則可得內接正十二角形;

累次用此法,可作內接於圓邊數爲3×2^n之正多角形.

405. 系一.

在同圓中作內接正三角形及正六角形,則

(1) 正三角形之邊心距爲正六角形一邊之半分;

(2) 正六角形之邊心距爲正三角形一邊之半分.

如前圖,OG爲正三角形之邊心距,OH爲正六角形之邊心距;

因　$FA=AB=BO=OF$,

故OFAB爲菱形,而其對角線OA,BF互相等分;

故　$OG=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}AB$.

次,OH,BG爲同一正三角形之二個高,

故　$OH=BG=\frac{1}{2}BF$.

406. 系二.

作圓內接正三角形.

【解】 引圓之任意直徑AD,更作弦BF,垂直等分半徑OA;

連結DB,DF,則DBF卽爲所求之正三角形.

407. 作圖題十二.

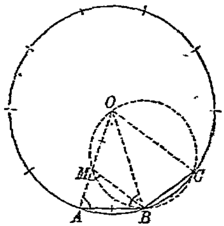
作圓內接正十角形.

【解】 引任意半徑OA;

以中末比內分OA於M點,卽令

$$OA.AM=\overline{OM}^2;\qquad\text{(作圖題九)}$$

引等於OM之弦AB:則AB爲所求內接正十角形之一邊



【證】 連結OB, MB而作$\triangle$OMB之外接圓，

則因 $$OA\cdot AM=\overline{OM}^2,$$

及 $$AB=OM,$$

$$\therefore\quad OA\cdot AM=\overline{AB}^2;$$

故AB切於圓OMB; (定理二十二系三)

由此 $$\angle ABM=\angle BOM,$$

而 $$\angle ABM+\angle MBO=\angle BOM+\angle MBO,$$

即 $$\angle ABO=\angle AMB;$$

然因OA=OB而 $$\angle ABO=\angle BAO,$$

$$\therefore\quad \angle BAO=\angle AMB;$$

而 $$AB=MB=MO;$$

由是 $$\angle MBO=\angle MOB,$$

$$\therefore\quad \angle ABO=2\angle MOB,$$

或 $$\angle ABO=2\angle AOB;$$

$$\therefore\quad \angle BAO=2\angle AOB;$$

故$\triangle$AOB三內角之和等於$5\angle AOB$,

即 $$5\angle AOB=2R\angle,$$

$$\therefore\quad \angle AOB=\frac{2}{5}R=\frac{4}{10}R\angle,$$

故弧AB等於圓周十分之一;

故弦AB為⊙O內接正十角形之一邊.

408. 系.

⊙BMO再交圓周於C,連結BC,則BC亦為內接正十角形之一邊.

因 $\angle OCB=\angle BMA=\frac{4}{5}R\angle$,

而 $\angle OBC=\frac{4}{5}R\angle$,

$\therefore\quad BOC=\frac{2}{5}R\angle=\frac{4}{10}R\angle$,

故也.

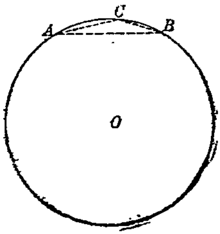
【注意】 在正十角形之十個頂點中取其順次隔離一個之頂點凡得五點,順次連結之,可得一內接正五角形.

又等分諸弧AB, BC, ...,而連結其分點與正十角形中隣於此之頂點,可得一內接正二十角形;

累次如此,則可作內接於圓邊數為5×2^n之正多角形(n為正整數).

409. 作圖題十三.

作圓內接正十五角形.



【解】 在所設圓O中作內接正六角形之一邊AB，及內接正十角形之一邊AC；
連結BC，則BC為所求正十五角形之一邊．

【證】
$$\frown BC=\frown AB-\frown AC$$
$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)\text{圓周}$$
$$=\frac{1}{15}\text{圓周},$$
故弦BC為內接正十五角形之一邊．

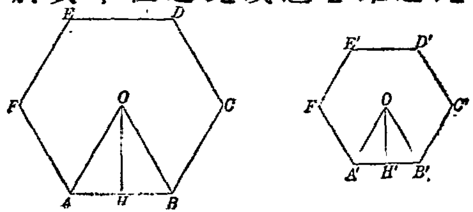
【注意】 等分弧BC，則得圓周三十分之一，故可作內接於圓之正三十角形；
用同法可作內接於圓邊數為 15×2^n 之正多角形（n為正整數）．

從以上諸款所能作之內接或外接於圓正多角形之邊數為 2^n, 3×2^n, 5×2^n, 15×2^n.
但 n 為正整數．

第五章 圓周及圓面積

410. 輔定理一.

同邊數之二個正多角形為相似形；其周之比等於其半徑之比或邊心距之比．



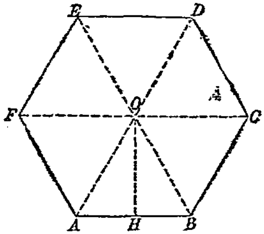
ABCDEF, A'B'C'D'E'F' 爲邊數相同之二個正多角形,而 OA, OH, 及 O'A', O'H' 各爲其半徑及邊心距;又以 P, P' 表其周則　$ABCDEF \sim A'B'C'D'E'F'$,

而　$$P:P'=OA:O'A'$$
$$=OH:O'H'.$$

(從第三編定理十七及十八可證,學者自爲之可也).

411. 輔定理二.

正多角形之面積等於其周及半徑所包矩形之半.



ABCDEF 爲正多角形,O 爲其中心,OH 爲其邊心距,則此多角形之面積等於其周與 OH 所包矩形之半.

【證】　引半徑 OA, OB, ...,

則以 O 作頂點,各邊作底邊之諸三角形皆全相等;

故多角形之邊數爲 n,則其面積等於 $n\triangle AOB$;

然　$$\triangle AOB=AB\cdot\frac{OH}{2},$$

$$\therefore\ ABCDEF=(AB\times n)\cdot\frac{OH}{2}.$$

今以 S 表多角形之面積,p 表其周 $AB\times n$, a 表 OH,

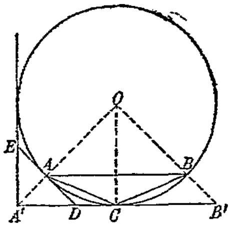
則　$$S=\frac{p\times a}{2}.$$

412. 系.

同邊數二個正多角形面積之比等於其半徑之二乘比,亦等於其邊心距之二乘比.

413. 定理二十七.

同圓內接正多角形及外接正多角形邊數相同,且邊數爲無窮多,則此二形周之差可比任何小之長尙小.



【證】 設AB爲圓內接正多形之一邊,A'B'爲同邊數外接正多角形之一邊,AB及A'B'在相平行之位置,則O, A, A'及O, B, B'各在一直線上; (三編定理二十)

以P, P表二個正多角形之周,

則 $$P:P'=OA:OA',$$ (輔定理一)

$$\therefore\quad P:P'-P=OA:OA'-OA$$
$$=OA:AA';$$

而 $$P'-P=P\times\frac{AA'}{OA}.$$

內接正多角形之周無論其邊數如何恒比任意邊數外接多角形之周小;

例如外接多角形取正方形,則其一邊爲$2.OA$,而

$$P<8.OA,$$

由是
$$P'-P<\frac{8.OA\times AA'}{OA},$$

即
$$P'-P<8.AA'.$$

令內接及外接正多角形之邊數增加,則其一邊之長漸次減小,故A及A'漸次接近C點;

A'接近C時,OA'減小而差$OA'-OC$可減至任何小;

因OA之長恆等於OC,故

$$\begin{aligned}OA'-OC&=OA'-OA\\&=AA';\end{aligned}$$

由是內接及外接正多角形之邊數增加時,AA'不絕減小而可比任何小之長尙小.

令多角形之邊數爲前之二倍,則在內接形之周中每一邊AB當以較大之$AC+CB$代之,故其周P當較前大,反之,在外接形之周中$DA'+A'E$當以較小之DE代之,故其周P'當較前小;

以故多角形之邊數次第增加二倍時,P逐漸增大,P'逐漸減小,同時AA'逐漸微小,而$P'-P$更加微小;

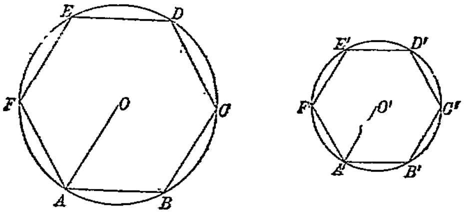
多角形之邊數至無窮多,則$P'-P$可爲無窮小,其極限遂至P及P'殆與圓周合一而互相等.

414. 系.

圓周等於其內接正多角形及外接正多角形當邊數爲無窮多時之周圍.

415. 定理二十八.

二圓周之比等於其半徑之比.



【證】　ABCDEF 及 A'B'C'D'E'F' 爲內接於二圓 O, O' 而邊數相同之正多角形,各引其半徑 OA, O'A', 則此二多角形周之比等於 OA:O'A';　(輔定理一)
今累次二倍此二個正多角形之邊數,則其周之比尙等於 OA : O'A', 而各周無窮接近於其外接圓周,至其極限遂等於圓周.
故二個圓周之比等於其半徑之比.

416. 系一.

不相等之二圓爲相似形.

417. 系二.

在不相等二圓中,對於等中心角二弧之比等於其半徑之比.

418. 系三.

在不相等二圓中,含等圓周角之二弓形爲相似形.

【注意】 在不相等二圓中,對於等中心角之二弧時或名爲相似弧.

419. 系四.

圓周與其直徑之比爲常數.

【證】 二圓周爲C,C′,其半徑爲r,r',其直徑爲D,D′,

則 $$C:C'=r:r'=D:D',$$

故 $$C:D=C':D'.$$

故無論何圓中,圓周C與其直徑D之比爲一定不變之數.

420. 定義12. 圓周率.

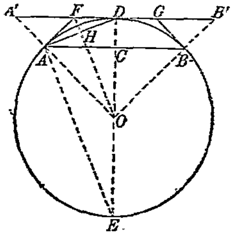
圓周C與其直徑D之比名曰**圓周率**,恒以希臘文字π表之,

即 $$\frac{C}{D}=\pi;$$

故 $$C=\pi D,$$

或 $$C=2\pi r.$$

421. 設圓之半徑及其內接任意正多角形之一邊,求有二倍邊數之內接正多角形及外接正角形各一邊.



【解】 如圖,AB爲內接於⊙ABE任意正多角形一邊,A′B′爲同邊數之外接正多角形一邊,而A′B′∥AB;引垂直於AB之直徑DOE,各與AB,A′B′交於C,D,連結AD,則AD爲二倍邊數之內接正多角形一邊;

又在A,B引切線AF,BG,交A′B′於F,G,則FG為二倍邊數之外接正多角形之一邊;

引弦AE,而令

$$OA=r,\quad AB=a,$$

則從直角三角形ADE,

$$\overline{AD}^2=DE.DC;$$

然 $$DE=2r,$$

$$\therefore\quad \overline{AD}^2=2r.DC;\quad\cdots\cdots(1)$$

又 $$DC=OD-OC$$

$$=r-OC,$$

從直角三角形OAC,

$$OC=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}$$

$$=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2},$$

$$\therefore\quad DC=r-\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2};$$

以此代入(1),得

$$\overline{AD}^2=2r\left(r-\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2}\right)$$

$$=2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore\quad AD=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}}.\quad\cdots\cdots(3)$$

次,連結OF,與AD交於H,則

$$OH\perp AD,$$

而 $$\triangle ABC\sim\triangle DFH;$$

$$\therefore\quad AC:AD=DH:DF,$$

或 $$2AC:2AD=2DH:2DF,$$
卽 $$AB:2AD=AD:FG;$$
$$\therefore \quad FG=\frac{2.\overline{AD}^2}{a};$$

以(2)之結果代入此式,
$$FG=\frac{2(2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2})}{a}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

(A),(B)二式爲以半徑 r 及邊 $AB=a$ 求 AD 及 FG 之公式.

今命 $\quad r=1,\ AD=C,\ FG=C',$

則從(A),(B)得
$$C=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A')$$
$$C'=\frac{2(2-\sqrt{4-a^2})}{a}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B')$$

422. 公式(A′),(B′)之應用.

今以C表圓內接正多角形之一邊;如內接正方形之一邊爲 C_4,內接正八角形,正十六角形,正三十二角形,……之一邊爲 $C_8, C_{16}, C_{32}, \ldots$,用以代(A′)中之 a,

則
$$C_4=\sqrt{2};$$
$$C_8=\sqrt{2-\sqrt{4-C_4{}^2}}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{4-2}}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{2}};$$
$$C_{16}=\sqrt{2-\sqrt{4-C_8{}^2}}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{4-2+\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$
$$C_{32}=\sqrt{2-\sqrt{4-C_{16}{}^2}}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{4-2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

繼續行此算法,則可得內接正二百五十六角形之一邊C_{256},

$$C_{256}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}.$$

次,以C'表圓外接正多角形之一邊;如外接正方形之一邊爲C'_4,外接正十六角形,正三十二角形,…爲C'_{16}, C'_{32}, …,用公式(B')得

$$C'_4=2,$$

$$C'_8=\frac{2[2-\sqrt{4-C_4{}^2}]}{C_4}$$

$$=\frac{2[2-\sqrt{4-2}]}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}[2=\sqrt{2}]$$

$$=2(\sqrt{2}-1);$$

………………………

故取圓半徑爲長之單位時,得其內接及外接正四角形,正八角形,…一邊之長如下表:

邊　數	內接形之一邊	外接形之一邊
4	1.414213	2.000000
8	0.765366	0.828427
16	0.390180	0.397825
32	0.196034	0.196983
64	0.098135	0.098254
128	0.049082	0.049097
256	0.024543	0.024545

423. π之計算法.

從420款，　　$C=2\pi r$,

故　　$\pi=\frac{C}{2r}$;

今取半徑爲長之單位,卽令$r=1$,

則　　$\pi=\frac{C}{2}$.

故圓之半徑等於長之單位,則求得其圓周,卽可得π之數值.

424. π之值.

從422款之表,計算內接及外接正二百五十六角形之周P及P′,得

$$P=6.283008,$$
$$P'=6.283520;$$

此二數至小數第三位止全然相同;

更累次二倍多角形之邊數,則P及P′之數值更相接近而可得前若干小數位全然相同,從414款,知此相同之數值卽爲圓周C之數值;

又從上款，　　$\pi=\frac{C}{2}$;

因π之數值爲一不盡數,故應用時恒取若干小數位.

今計算π之值至小數十六位如下:

$$\pi=3.1415926535897932\ldots\ldots$$

普通所用π之值爲3.1416或$\frac{355}{113}$,後者易於記憶;且精密至小數六位,用之殊便.

425. 定義13.　輻角[1](或半徑角).

(1) 輻角 Radian.

一中心角所對之弧等於半徑之長,則此中心角曰輻角,或曰半徑角.

426. 設圓之半徑 r, 求其 n 度弧之長.

【解】 180° 之弧即半圓周長 πr,

故 1° 之弧長 $\frac{\pi r}{180}$;

由是設 n° 之弧長 l,

則 $$l=\frac{n\pi r}{180}.\qquad\qquad(1)$$

而 $$r=\frac{180l}{n\pi};\qquad\qquad(2)$$

$$n=\frac{180l}{\pi r}.\qquad\qquad(3)$$

由此等公式,設 l, r, n 中二者之值時,可求餘一之數值.

427. 輻角之度數.

在前款之(3)中置 $l=r$,

則 n 即爲輻角之度數;

實行代用,得

$$\begin{aligned}n^\circ&=180^\circ\times\frac{1}{\pi}\\&=180^\circ\times0.3163098\\&=57^\circ17'44''.80\end{aligned}$$

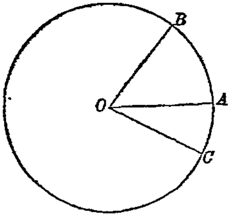
故輻角之度數爲 $57^\circ17'44''.80$; 此度數爲一定不易之數,在理論數學中恒用之.

428. 定理二十九.

以輻角爲弧度[1]之單位,則中心角等於

(1) circular measure.

其所立弧之長對於半徑之比.



在⊙ABC中,中心角AOB爲一輻角,即$\overset{\frown}{AB}$=半徑OA;
∠AOC爲任意之中心角;
以輻角AOB爲弧度之單位,則∠AOC等於比$\overset{\frown}{AC}:OA$.

【證】 $\angle AOC:\angle AOB=\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{AB}$;

然 $\overset{\frown}{AB}=OA$,

$\therefore\ \angle AOC:\angle AOB=\overset{\frown}{AC}:OA$;

又因 $\angle AOB=1$, (假設)

$\therefore\ \angle AOC=\overset{\frown}{AC}:OA$.

今以r表半徑,l表弧AC,則

$$\angle AOC=\frac{l}{r}.$$

【注意】 ∠AOC之度數可以$\frac{l}{r}$乘輻角之度數$57°17'44''.8$得之.

例. 長256尺之弧在半徑100尺之圓周上,求此弧所張中心角之度數.

【解】 在本定理之公式中,置

$$l=256,\quad r=100,$$

則得∠AOC之度數爲

$$57°17'44''.8 \times \frac{256}{100} = 36°40'9''.5.$$

429. 定理三十.

圓面積等於其周與半徑所包矩形之半.

【證】 圓可視作邊數無窮多之正多角形,其半徑可視作此正多角形之邊心距;

故從輔定理二,知圓面積等於其周與半徑所包矩形之半.

430. 求圓面積之公式.

以 C 表圓周, r 表其半徑, S 表圓之面積,則從上款,

$$S = \frac{C \times r}{2}. \quad \cdots\cdots(1)$$

因 $C = 2\pi r$,

故又可得

$$S = \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2. \quad \cdots\cdots(2)$$

又以 d 表圓之直徑,

則 $d = 2r$,

而 $r = \frac{1}{2}d$,

故又得

$$S = \frac{1}{4}\pi d^2. \quad \cdots\cdots(3)$$

又在(1)中以 $\frac{C}{2\pi}$ 代 r,

則 $$S = \frac{C^2}{4\pi}. \quad \cdots\cdots(4)$$

(1),(2),(3),(4)均爲求圓面積之公式,其用甚廣.

【注意】 從(2),(3),(4)可得以圓面積 S 求其半徑,直徑,及圓周之公式.

即 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$, $d=\sqrt{\frac{4S}{\pi}}$, $C=\sqrt{4\pi S}$.

431. 系.

二圓面積之比等於其半徑之二乘比.

432. 例.

例. 有圓池,其周圍爲450步,則其直徑及面積若何?

【解】 $C=450$ 步,

$$\therefore\ d=\frac{C}{\pi}=\frac{450\text{步}}{3.1416}$$
$$=450\text{步}\times 0.3163$$
$$=142.335\text{ 步}$$
$$=142\text{步}1\text{尺}6\text{寸}7\text{分}5\text{釐}.$$

又 $$S=\frac{C^2}{4\pi}=\frac{450^2}{4\pi}\text{平方步}$$
$$=\frac{45^2\times 100}{4}\times 0.3163\text{ 平方步}$$
$$=50625\times 0.3163\text{ 平方步}$$
$$=16012\text{平方步}17\text{平方尺}18\text{平方寸}75\text{平方分}.$$

問題

(1) 圓之半徑爲12寸,則

(i) 其內接正方形之面積若何?

(ii) 內接正三角形之面積若何?

(2) 同圓內接正三角形及正六角形之比若何?

(3) 同圓內接正三角形及外接正三角形之比若何?

(4) 圓之半徑爲10寸,求其內接正十角形之面積.

(5) 圓內接正十角形一邊之長爲 a,
(i) 求此圓內接正二十角形一邊之長;
(ii) 求此圓之半徑.

第四編之問題

(1) 在△ABC二邊AB,AC上晝正方形BX,CY,令各在三角形之外,連結XY,則

$$\overline{BC}^2+\overline{XY}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2).$$

(2) 在△ABC之各邊上作正方形BCDE,CAFG,ABHK,各在三角形之外,連結DG,CH,FK,則六角形DEHKFG各邊上正方形之和等於△ABC各邊上正方形和之四倍.

(3) 在直角三角形ABC之斜邊上取二點D,E,令

$$AD=AC,\quad BE=BC,$$

則
$$\overline{ED}^2=2AE.BD.$$

(4) 梯形ABCD之二底爲AD,BC,

則
$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2AD.BC.$$

(5) 從等邊凸多角形內任意一點至各邊距離之和爲定長.

(6) 四邊形ABCD二對角線AC,BD之中點各爲M,N,其交點爲O,則△AOB+△COD與△AOD+△COB之差等於△OMN之四倍.

(7) 以△ABC之二邊AB,AC爲底向此形外作任意平行四邊形ABDE,ACFG;DE,FG或其延線之交點爲H;連結AH;又以BC爲底作平行四邊形BCKL,令CK$\underline{\parallel}$AH;則

$$\square BCKL=\square ABDE+\square ACFG.$$

(8) 直角三角形直角二邊上正三角形之和等於斜邊上之正三角形. 不用定理二十一而直接證之.

(9) 在△ABC內取任意點O,連結AO,BO,CO而延長之,與三邊各交於D,E,F;EF,BC延線之交點為P:
則 $$BD:CD=BP:CP.$$

(10) 從△ABC之三頂點引互相平行之三直線AX,BY,CZ,與三邊或其延線會於X,Y,Z;則三個三角形AYZ,BZX,CXY均等於△ABC.

(11) 在二等邊三角形ABC中,二底角均等於頂角A之二倍;則 $$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AB.BC.$$

(12) 在△ABC之一邊BC上取一點P,令CP=2.BP;
則 $$2.\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6.\overline{BP}^2+3.\overline{AP}^2.$$

(13) 圓內接四邊形ABCD二對角線AC,BD之交點為E,則 $$EA:EC=AB.AD:CD.CB.$$

(14) 從▱ABCD頂點A引任意直線,交BD,BC,CD或其延線於P,Q,R;則 $$\overline{AP}^2=PQ.PR.$$

(15) △ABC中A為銳角,則$\overline{BC}^2$比$\overline{AB}^2$,$\overline{AC}^2$之和小,其所小者為從A至「以BC為直徑之圓」所引切線上正方形之二倍.

(16) 以線分AB內分或外分於X,令
$$\overline{AB}^2+\overline{AX}^2=3.\overline{BX}^2.$$

(17) 在線分AB之延線上求一點X,令
$$\overline{AB}^2+\overline{AX}^2=2AX.BX.$$

(18) 作一內接於△ABC之矩形,令以△ABC內一所設點P為其對角線之交點

(19) 從四邊形之一頂點作一直線,分此形為二等分.

(20) 內接於半徑r之圓而邊數為n之正多角形一邊為a,則內接於同圓而邊數為$2n$之正多角形面積為$\frac{nar}{2}$.

第五編

直線及平面

第一章

直線與平面之關係

433. 定義1.　平面.[1]

平面者,過其中任意二點之直線全在面中之表面也.

故一直線上二點在一平面中,則其直線全在此平面中;易一語言之,即直線之一部分已在某平面中,則他一部分決不能在此平面外.

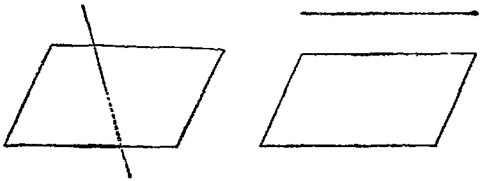
直線或點在平面中,則曰其平面含此直線或點,或曰平面過此直線或點.

【注意】平面於任何方向廣遠皆無窮,而慣例以平行四邊形表之.

434. 定義2.　直線與平面相交及平行.

直線與平面僅共有一點,則曰此直線與平面相交.

(1) 平面 Plane.



直線與平面無共有之點,則曰互相平行.

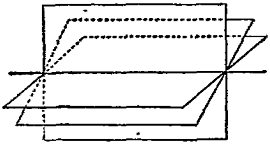
435. 公理 I.

二點在平面兩旁,則過此二點之直線必交此平面.

交平面之直線爲交點所分之二部分必在此平面之兩旁.

436. 公理 II.

過二點或一直線之平面有無數個.



437. 公理 III.

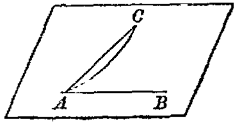
取平面中一直線爲軸而旋轉一周,則此平面可過空間所有一切點.

438. 定理一.

過一直線及此外一點之平面有一無二.

AB 爲一直線, C 爲 AB 外之一點,

則過AB及C之平面必有一個而僅有一個.



【證】取含直線AB之任意平面,以AB爲軸而旋轉之,則可至含C點之一位置;　(437)

故含AB及C點之平面必有一個.

次,如此之平面僅有一個;

何則,若云如此之平面有二個,則從C點至AB線上任意點A之直線必在各平面中;　(433)

如是,則二點間可有二個直線矣,不可;

故含C點及AB線之平面僅有一個可知.

【注意】含若干直線或點之平面有一無二,則曰此等直線或點決定(Determine)此平面.

故以上定理略言之,卽爲:

一直線與此外一點決定平面.

439. 系一.

不在一直線中之三點決定平面.

何則,蓋三點爲A,B,C,則過直線AB及點C之平面卽爲過此三點之平面故也.

440. 系二.

相交二直線決定平面.

441. 系三.

平行二直線(AB, CD)決定平面.

先,從平行直線之定義,知平行線AB, CD在同一平面中,故過此之平面必有一個.

次,含一線AB及他線中任意一點C之平面僅有一個,

故如此之平面僅有一個.

442. 二直線相對之位置.

由以前至此,可知二直線對待之位置不出以下三種之外:

(A) 相交;
(B) 平行; } 在同一平面上;

(C) 不相交亦不平行——不在同一平面上,

以故,在立體幾何學中欲證明二直線爲平行,則不能僅證其不相交,尙當證其在同一平面中.

問　題

(1) 三角形之三邊皆在同一平面中.

(2) 梯形或平行四邊形之四邊皆在同一平面中.

(3) 凡直線交相交二直線之一而平行於其二者皆在原二直線所決定之平面中.

443. 直線與平面相對之位置.

一直線與一平面相對之位置不出以下三種之外:

(A) 直線全在平面上;

(B) 直線與平面僅會於一點;

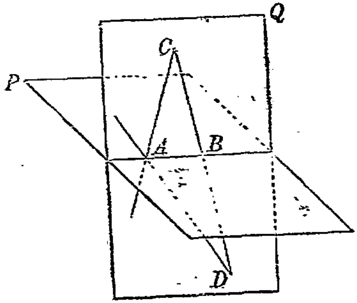
(C) 直線與平面平行.

444. 定理二.

二平面共有一點,則此二平面共有過此點之一直線而此外無公共點.

二平面P,Q共有一點A,

則P,Q共有之點皆在過A之一直線上而此外更無共有點.



【證】在Q面中引過A點之任意二直線AC, AD;

若此二線之一在P面中,則題中所言第一事不待證而已明;

若此二線無一在P面中,則可在此二線中各取一點分居於P面之兩旁者如C,D,然則直線CD可與P面交於A外之一點B;（公理I）又因CD為過Q面中二點之直線而全在Q面中,故CD中之一點B亦在Q面中;由此二平面P, Q共有二點A,B,故共有直線AB.　　（定義一）

又二平面P, Q在直線AB外不能有共有之點,因過一直線及其外一點之平面僅有一個故也.　　（定理一）

445. 定義3.　二平面之相交及平行.

二平面共有一直線則曰此二平面相交其直線曰交線.[1]

二平面無一公共之點,則曰此二平面平行.

446. 定理三.

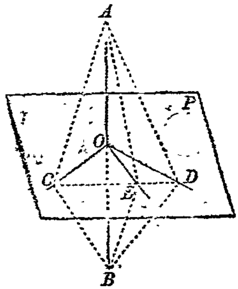
一直線垂直於相交二直線之各線,則此直線亦必垂直於此二線所決定平面中之任意直線.

(1) 交線 Line of intersection

相交二直線CO,DO決定平面P,直線AO垂直於CO及DO,

則AO亦必垂直於平面P中任意直線EO.

【證】 引一任意直線CED,令與三直線OC,OE,OD相交,延長AO至B,令OB=OA,



從B連結三點C, E, D;

則因OC為AB線分之中垂線,而

$AC=BC$;

倣此, $AD=BD$;

故 $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$,

而 $\angle ACE = \angle BCE$;

由是 $\triangle ACE \equiv \triangle BCE$;

故 $AE=BE$;

故OE又為AB之中垂線,

即 $AO \perp EO$.

447. 定義4. 平面之垂線及斜線.

交平面之直線垂直於平面中過其交點之一切直線,則曰此平面與直線互相垂直,而此直線為平面之垂線,或曰法線.[1]

例如前圖中,AO線及P平面互相垂直.

不垂直於平面之直線曰此平面之斜線.

垂線或斜線與平面之交點曰垂線或斜線之足或曰趾點.

平面與其垂線爲互交於直角,又曰互相

(1) 法線 Normal.

直交,與其斜線亦曰互相斜交.

448. 系.

與二定點A, B等距離點之軌跡為垂直等分連結此二定點所得線分AB之平面.

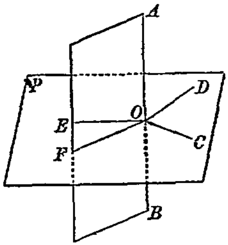
【註】 某圖形中,所有一切點皆有某性質而此外之點皆無此性質,則某圖形為有此性質之點之軌跡.

【注意】 欲證一直線與一平面斜交,但能證明此直線與平面中過其交點之一直線斜交已足.

從一直線中一點可引直交此直線之無數直線.

449. **定義5.**　**面對稱.**[1]

二點就其連結線分之垂直等分平面為對稱.



例如在443款之圖中二點A, B就平面P為對稱.

450. **定理四.**

過一直線中一點而垂直於此之一切直線皆在過此點而垂直於此之同一平面中.

OC, OD, OE等直線皆直交直線AB於其上之O點,則OC, OD, OE等皆在直交AB於O之一平面上.

【證】 二直線OC, OD決定之平面為P,則此平面過O點而垂直於AB;　(定理三)

故但能證明直線OE在平面P中已足;

(1) 面對稱 Symmetry with respect to a plane.

若云OE不在平面P中,則因相交二直線OE, AB所決定之平面AEB與P之交線OF當垂直於AB; (定理三)
而在同一平面AEB中之二直線OE, OF當垂直於同一直線AB矣;
此爲背理之事,不可;
故OE必在平面P中.

451. 系.

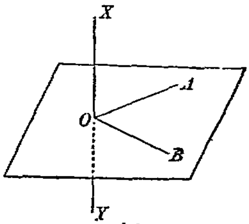
以直角之一邊爲軸而旋轉一周,則他邊可成一垂直於此軸之平面.

452. 定理五.

過一直線(XY)中一點(O)而垂直於此直線之平面有一無二.

O 爲直線XY上之一點,
則直交XY於O之平面有一無二.

【證】 在過直線XY之任意二平面AXY, BXY中,
引過O點而垂直於XY之二直線OA, OB,則此二直線所決定之平面AOB垂直於XY; (定理三)
又過O點而垂直於XY之一切直線皆在平面AOB中; (定理四)
故過O之他平面皆當含斜交於XY之直線,而其平面亦斜交於XY; (定理三系)
故過O點而垂直於XY之平面僅有一個.



問 題

(1) 在一平面中,求與此平面外二點等距離之點之軌跡.

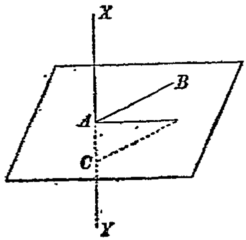
(2) 一動點與二定點距離平方之差一定,則此動點之軌跡爲垂直於連結此二定點所得直線之平面.

(3) 在空間有出自一點O之三個半直線OX,OY,OZ,又有二個三角形ABC,abc,其頂點A及a在OX上,B及b在OY上,C及c在OZ上,則BC及bc之交點,CA及ca之交點,AB及ab之交點在同一直線上.

453. 定理六.

過一直線外之一點而垂直於此直線之平面有一無二.

O爲直線XY外之一點,
則過O而直交XY之平面有一無二.

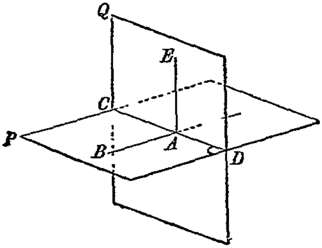


【證】 在直線XY及點O所決定之平面中,從O向XY引垂線OA,次在含XY之任意他平面BXY中從A引XY之垂線AB,則平面OAB過O而垂直於直線XY; (定理三)
又因過A而垂直於XY之平面含OA而過O, (定理四)
由此過O而垂直於XY之一切平面當含OA;
如云不然,則是謂當含斜交XY之直線,其不合理可知;
今因過A而垂直於XY之平面僅有一個;
故過O而垂直於XY之平面亦僅有一個.

454. 定理七.

過一平面中一點而垂直於此平面之直線有一無二.

A 爲平面 P 中之一點,
則過 A 而垂直於 P 之直線有一無二.

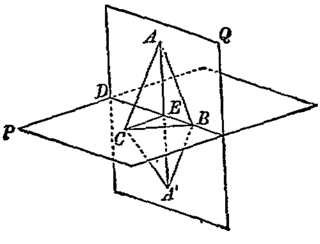


【證】 在平面 P 中,引過 A 點之任意直線 AB;再作過 A 而垂直於 AB 之平面 Q;(定理三系)
在平面 Q 中引二平面交線 CD 之垂線 AE;
則此線亦垂直於 AB, 故垂直於平面 P;
次,若有垂直於 P 之他直線如 AE′, 則 AE 及 AE′ 皆當垂直於含此二線之平面與 P 之交線,其不合理可知;
故 AE 爲獨一無二之垂線.

455. 定理八.

過一平面(P)外之一點(A)而垂直於此平面之直線有一無二.

A 爲平面 P 外之一點,
則過 A 而垂直於 P 之直線有一無二.



【證】 在平面 P 中引任意直線 BC,過 A 點作垂直於此線之平面 Q; (定理六)
此平面與 P 之交線爲 BD;
從 A 點引 BD 之垂線 AE, A 點就 BD 之對稱點爲 A′;
由是因 △ABC≡△A′BC,

而　　　　$AC=A'C$;

故 CE 爲 AA′ 之垂直等分線;

而 AE 垂直於平面 P 中之二直線 EB, EC;

故　　　　$AE\perp$ 平面 P;

且 AE 爲 P 惟一之垂線,何則,

試從 A 別引一直線 AF 交 P 面於 F, 則因 $\angle AEF=R\angle$,

而　　　　$\angle AFE<R\angle$, 卽 AF 當爲斜線;

倣此,可證從 A 向 P 所引之諸直線除 AE 外必皆爲 P 之斜線;

是則 AE 爲 P 平面獨一無二之垂線可知.

456. 定理九.

從平面外一點向此平面引垂線及諸斜線,則:

(一)垂線比一切斜線皆短;

(二)斜線之足與垂線之足距程相等者,此斜線亦相等;

(三)斜線之足與垂線之足距程不相等者,此斜線亦不等,距程遠之斜線較大.

(四)(二),(三)之倒亦眞確.

M 爲平面 P 外之一點,從 M 至 P 引垂線 MO, 斜線 MA, MB, MC, 而 $AO=BO$, $CO>AO$,

則　(一)　MO 小於 MA, MB, MC;　　(二)　$MA=MB$;

(三)　$MC>MA$;　　(四)　(二)及(三)之倒定理亦眞確.

【證】　(一)　在直角三角形 MOA, MOB, MOC 等中, 斜邊 MA, MB, MC 爲最大邊,卽

MO<MA, MO<MB, MO<MC,

故垂線 MO 比諸斜線皆小.

(二) OA=OB,則 △MOA≅△MOB,

故 MA=MB.

(三) OC>OA,

在 OC 中取 B 點,令 OB=OA,聯 MB,

則 MB=MA;

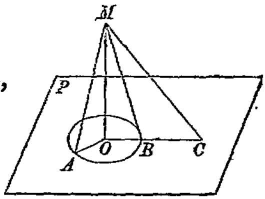
因 ∠MBC>∠MOB, 卽 ∠MBC>R∠,

故 MBC 爲鈍角三角形而 MC 爲對鈍角之邊;

由是 MC>MB;

故 MC>MA.

(四) 可用窮舉證法證之.



(二)

457. 定義 6. 一點與一平面之距離.

一點與一平面之距離爲其間垂線之長.

問題

(1) 一動點與不在同直線上之三點等距離,則此動點之軌跡爲過此三點所定圓心而垂直於含此圓之平面之直線.

(2) 從一定點至一定平面所作定長斜線足之軌跡爲圓.

(3) 在平面中視面外定線分得視角爲直角之點其軌跡爲圓.

(4) 有二棒直立於水平面上而其高不等,在此平面中求視各棒得等視角之點之軌跡.

458. 定理十.

一直線垂直於一平面,從其足至此平面中任意直線引垂線,則連結此第二垂足與第一垂線中一點之直線垂直於平面中之第二直線.

AB⊥平面P,DE為平面P中任意直線而BC⊥DE,則AC⊥DE.

【證】 在DE上於垂足C之兩旁取D及E點,令

CD=CE;

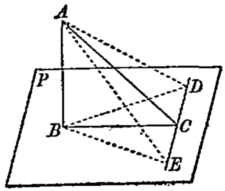
連結AD, AE, BD, BE,

則因BC為DE之垂直等分線,

而　BD=BE;

故　斜線AD=AE;　(定理九)

故　AC⊥DE.



【注意】 此定理名曰三垂線之定理.

459. 系.

從平面外一點向此平面及其中之任意直線各引垂線,則連結此兩垂足之直線亦垂直於面中之直線.

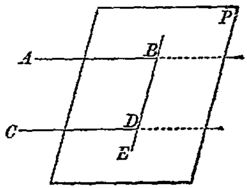
460. 定理十一.

一平面交平行二直線之一,則必又交其二.

直線AB//CD,而平面P與AB交於B,

則P與CD亦必相交.

【證】 從假設,AB線及平面P共有一點B,故平行



線所定之平面ABCD亦與平面P共有一點B,從此共有一直線BE;(定理二)

BE交平行二直線之一AB,故必又交其二;

設其交點爲D,則平面P與CD線共有D點;

而CD線中之他點皆在P平面外;

若云不然而謂CD與P在BE線中尙有公共點,則CD當與BE相合,從此CD不與AB平行而與假設矛盾矣,故不可;

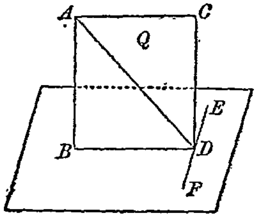
又使謂CD與P在BE線外有公共點,則平行線所定之平面當與P面相合,從此P面不與AB相交而與假設矛盾矣,故亦不可.

461. 定理十二.

垂直於同一平面之二直線互相平行.

二直線AB, CD皆垂直於平面P,

則AB//CD.



【證】 連結二垂線之足B, D,又引AD,再在P面中引過D而垂直於BD之直線EF,則

EF⊥AD; (458)

又因CD垂直於P,故EF⊥CD;

因三直線DB, DA, DC垂直於同一直線EF,故皆在同一平面Q中; (定理四)

由此AB亦在平面Q之上而與CD垂直於同一直線BD,

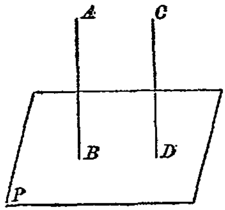
則 AB//CD,

462. 系.

二平面垂直於二平行線之一,則亦必垂直於其二.

直線AB∥CD,而平面P⊥AB,

則　　P⊥CD.



【證】 過D引平面P之垂線DC′,則

DC′∥AB;　　(定理十二)

因從一點D所引一直線AB之平行直線僅有一個,故DC′與DC相合;

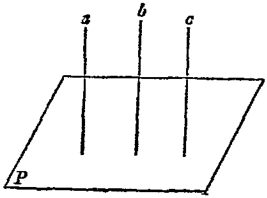
故CD垂直於平面P.

463. 定理十三.

平行於同一直線之二直線互相平行.

直線$a\parallel c$, $b\parallel c$,

則　　$a\parallel b$.



【證】 作垂直於直線c之平面P,則因　$a\parallel c$,　$b\parallel c$,

故此平面必與a及b相交,且垂直於a及b;　　(定理十二系)

故a與b平行.　(定理十二)

問題

(1) 從一定點至相交二平面下垂線,又從此二垂線之足至二平面之交線引垂線,則此後二垂線與二平面之交線會於一點.

(2) 從一平面外一定點至此面中共過一定點之諸

直線所作垂線足之軌跡如何?

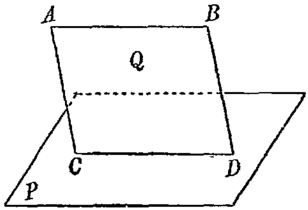
(3) 順次連結扭振四邊形(四頂點不在同一平面上者)四邊之中點,則得一平行四邊形.

464. 定理十四.

含平行二直線之一而不含其二之任意平面平行於其第二線.

直線AB//CD,平面P含CD而不含AB,

則　　P//AB.



【證】 AB線與CD線平行,故AB線決不能與平面P會於CD線中;

而AB又不能與平面P會於CD線之外;

蓋若謂AB與P會於CD線外之點,則平行線所決定之平面Q當與P相合,而題言P不含AB,此決不能之事也.

465. 系一.

一直線平行於一平面,則含此直線之任意平面與原平面之交線平行於原直線.

466. 系二.

一直線平行於一平面,則過平面中一點而平行於此直線之直線全在此平面中.

問題

(1) 一直線與一平面平行,則夾於其間任意平行線

之部分相等.

(2) 垂直於同一直線之直線及平面互相平行.

(3) 二平面平行於同一直線,則其交線亦平行於此直線.

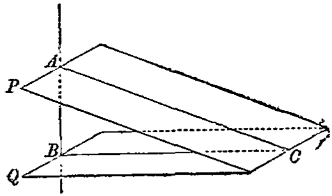
(4) 二平面各含二平行線之一,則其交線平行於此二線.

467. 定理十五.

垂直於同一直線(AB)之二平面(P,Q)互相平行.

平面P⊥直線AB,平面Q⊥AB,
則平面P//Q.

【證】 若云二平面P,Q共有一點C,則可得一具有二個直角之三角形ABC;
此爲背理之事,不可;
故二平面無公共之點,卽互相平行.

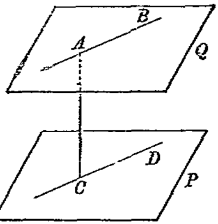


468. 定理十六.

過一點而平行於任意平面之直線皆在過此點而平行於此平面之同一平面中.

A爲平面P外之一點,任意直線AB//P,
則AB在過A而平行於P之平面Q中.

【證】 從A點至平面P引垂線AC,AB,AC所決定之平面與平面P之交線爲CD,則CD//AB;
因CD⊥AC,故AB⊥AC;



由是通過A點而平行於平面P之直線皆直交AC於A,故在直交AC於A之平面Q中;　(定理四)
而Q平行於P.　(定理十五)

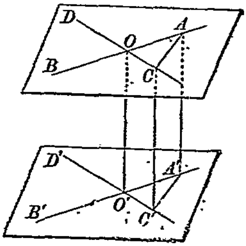
469. 定理十七.

二相交線(AOB, COD)各與不在其所定平面中之他二相交線(A′O′B′, C′O′D′)平行,則此二雙相交線所定之平面互相平行,又其夾角或相等,或互為補角.

二線AB,CD交於O,他二線A′B′,C′D′交於O′,而AB//A′B′,CD//C′D′,

則(一)AB, CD所定平面平行於A′B′, C′D′所定平面;

(二) ∠AOB＝∠A′O′B′, ∠AOB＋∠B′O′C′＝2R∠.



【證】 (一) 二直線AB, CD均平行於含A′B′, C′D′之平面;　(定理十四)
故在過O而平行於此平面之平面中;　(定理十六)
即AB, CD所定之平面與A′B′, C′D′所定之平面平行.

(二) 從∠AOC, ∠A′O′C′之頂點起在其二邊上取A, A′, C, C′,令

OA＝O′A′,　OC＝O′C′;

連結OO′, AA′, CC′, AC, A′C′;

則因OA//O′A′, OC//O′C′,

故AOO′A′, COO′C′均為平行四邊形,AA′及CC′皆等於OO′

而與OO'平行,故亦自相等而互平行;

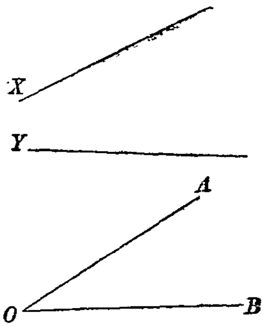
故　$AC=A'C'$;

由此　$\triangle AOC \equiv \triangle A'O'C'$;

故　$\angle AOC=\angle A'O'C'$.

倣此,可證 $\angle AOD=\angle A'O'D'$ 及 $\angle AOC$, $\angle B'O'C'$ 等互爲補角.

470. 定義 7. 不在同平面中二直線間之角.



從任意一點引不在同平面中二直線之平行線,此二線所成之角卽爲彼二線之夾角.

【注意】 從此定義,則垂直於一平面之直線與此平面中之一切直線皆成直角.

問　題

(1) 三平面兩兩相交,則其三交線會於一點抑爲平行?

(2) 過平行四邊形一對角線之平面與他對角線兩端之距離相等.

(3) 一點A在相交二平面間,從A向此二平面引垂線AB, AC,則BC垂直於交線.

471. 定理十八.

一平面與平行二平面相交,則其二交線平行.

【證】 二交線各在平行之平面中,故不相會;又同在一平面中,故平行.

472. 定理十九.

二平面平行,則

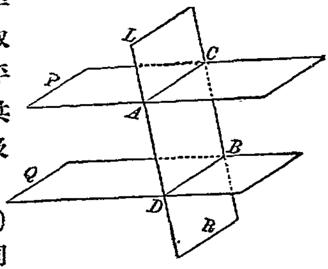
(一)交其一(P)之直線(L)必交其二(Q).

(二)交其一(P)之平面(R)必交其二(Q).

平面P//平面Q,

則　(一)交平面P之直線L必交Q;

(二)交平面P之平面R必交Q.



【證】 (一) 直線L與平面P之交點爲A,在平面Q中取任意點B,作含B與直線L之平面,則此平面與P,Q二平面各共有A,及B點,故可共有直線AC及BD; (定理二)

而此二線平行; (定理十八)

然則直線L與平行線AC,BD同在一平面中而與AC相交,故亦與BD相交,其交點D又爲L線與Q面之交點;

而L線與Q面更不能共有D以外之點.

(二) 二平面P,R之交線爲AC,在平面R中,過交線AC中任意點A引直線L,因此直線交P,故亦必交Q;(本題一)其交點D在二平面R,Q中,故共有一直線BD, (定理二)

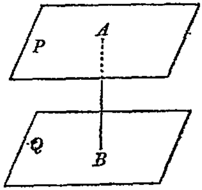
且於此線外不能有公共點;
故R與Q相交.

473. 定理二十.

過一點而平行於一平面之平面有一無二.

A爲平面Q外之一點,平面P過A而平行於Q,
則平面P有一無二.

【證】 從A點至平面引垂線AB,又過A作垂直於AB之平面P;　(定理五)



然則　　P//Q;
次,通過A點之他平面必交P;(定理二)
故又交Q;　　(定理十九)
卽過A而平行於Q之平面僅有一個.

474. 系.

平行於一平面(R)之二平面(P,Q)互相平行.

平面P//平面R,又平面Q//R,
則平面P//Q.

【證】 若云P與Q相交,則因Q//R而P亦當與R相交;
此與假設相反,不可;
故P與Q不相交,卽P與Q平行.

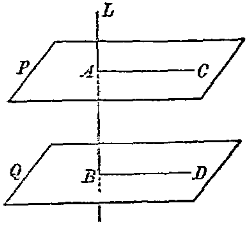
475. 定理二十一.

一直線垂直於平行二平面之一則亦必

垂直於其二.

平面P//平面Q,而直線∠A⊥P,
則直線∠A⊥Q.

【證】 線LA交平面P,故可交平行於此之平面Q; (定理十九)
命其交點爲B;



又在平面Q中從B引任意直線BD,則平面LBD與平面P之交線AC平行於BD; (定理十八)
且垂直於LA; (定理三)
故LA垂直於平面Q中之任意直線BD,亦必垂直於平面Q中之一切直線;
故線LA垂直於平面Q.

【注意】 此定理又可述之如下:

平行二平面有公共垂線.

476. 定理二十二.

平行二直線夾於平行二平面間之部分相等.

(學者可自證之).

477. 系.

平行二平面間所夾公共垂線之部分相等.

478. 定義8. 平行二平面間之距離.

平行二平面之距離謂其間所夾公共垂

線部分之長.

479. 定理二十三.

任意二直線(ABC, A′B′C′)交平行三平面(P, Q, R),則其對應部分成比例.

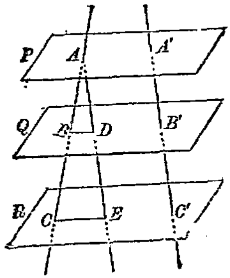
三平面 P//Q//R,任意二直線各交此三平面於 A, B, C 及 A′, B′, C′,

則 AB:BC=A′B′:B′C′.

【證】 二直線若平行則對應部分兩兩相等; (定理二十二)

故成比例;

二直線若相交,則因此二直線在同一平面中,從定理十八及平面幾何學之定理以證本定理甚易,故略之;



二直線若不在同一平面中,則可過 A 引直線 A′B′C′ 之平行直線 ADE,與平面 Q 及 R 各交於 D 及 E,則 AD=A′B′, DE=B′C′;

(定理二十二)

次,引 BD 及 CE,則因此二直線平行,而

$$AB:BC=AD:DE;$$

故 $$AB:BC=A'B':B'C'.$$

問　　題

(1) 平行二平面與他平行二平面相交,其四交線皆平行.

(2) 二平面平行,則平行於其一之直線或平行於其

二,或全在其二之中.

(3) 平行二平面間所夾線分中點之軌跡爲何?

(4) 二平面各垂直於平行二直線,則此二平面或平行,或合一.

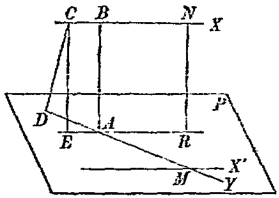
(5) 從所設圓平面外之所設點至圓周上各點作線分,則此諸線分中點之軌跡爲何?

480. 定理二十四.

不在同一平面中之二直線其公共垂線有一無二.

二直線X,Y不在同一平面中,

則其公共垂線必有一個而僅有一個.



【證】 過Y線中任意點M引X之平行線X',且作過X'及Y之平面P,則此平面P可平行於X;　(定理十四)

次,從X線中任意點N引P面之垂線NR,從R引X之平行線RA,則此線必交Y線,且平行於X'線;　(定理十三)

從此線與Y線之交點A引RN之平行線AB,則因X線與RA爲平行線而在同平面中,故此AB線必交X線;

今NR垂直於平面P,故平行於此之AB亦垂直於P;

由此AB垂直於Y;

又ABNR爲平行四邊形,故∠ABN=∠ARN=R∠;

由此AB亦垂直於X;

故AB爲所求X及Y之公共垂線.

次,在AB之外必更無X及Y之公共垂線:

若云在 AB 之外尚有公共垂線 CD;試過 D 引 X 之平行線;則因此直線可在平面 P 中而 CD 垂直於平面 P;（定理四）又引 BA 之平行線 CE,與直線 RA 交於 E,則 CE 亦垂直於平面 P;（定理十二）

此爲背理之事,不可;（定理八）

故 X, Y 之公共垂線僅有一個.

481. 系.

一線分(AB)爲不在同平面中二直線(X, Y)之公共垂線,則此線分爲二直線間所能引之最短線分.

【證明】 如上圖, CE＝BA, 而 CE＜CD;（定理九）

故　　BA＜CD.

482. 立體幾何學中作圖之公設.

在立體幾何學中作圖題之解法與平面幾何學中不同,有如上一定理,作二直線之公共垂線,僅確定圖形之位置而止. 且在立體幾何學中不若平面幾何學,有可以明白確定之作圖公設,第如以下所舉各題,則恒視爲可以作圖者,在解作圖題時恒用之:

(I) 含不在同直線上三點之平面;
含相交二直線之平面;
含平行二直線之平面;
平面與所設直線之交點;
平面與平面之交線;

(II) 過一定點而垂直於一定平面之直線等.

問　　題

(1) 作一直線,令過一定點而交不在同平面中之二直線. 且舉其不能之種類.

(2) 在所設平面中求一點,令至此面外二定點之距離和爲最小,或距離差爲最大.

(3) 作二平面,令互相平行,且各含不在同平面中二直線之一.

(4) 求一點,令與一平面之距離爲所設長,且與此平面上三定點之距離相等.

(5) 作一平面,令過一定點而平行於不在同平面中之二直線.

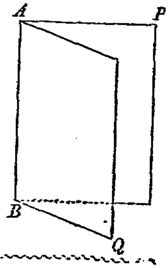
(6) 作一平面,令過所設一直線,且與二個所設點之距離相等.

第二章 二面角

483. 定義9. 半平面.

一平面以其上之一直線分作二分,則其每一分曰半平面,此直線爲半平面之原線,而他一分爲此半平面之延面.

484. 定義10. 二面角.(1)



共以一直線爲原線之二個半平面所成之圖形,曰二面角,此二個半平面各爲二面角之面,(2) 其原線爲二面角之稜.(3)

例如二個半平面ABP,ABQ所成之圖

(1) 二面角 Dihedral angle. (2) 二面角之面 Face. (3) 稜 Edge.

形爲二面角,記以

二面角PABQ, 或 二面角AB,

相交二平面分空間爲四部分,故得四個二面角.

485. 二面角之大小.

取一個半平面,以二面角之稜AB爲其原線者,先令其位置與二面角之一面ABP相合,乃以原線爲軸而旋轉此半平面於角內,至與二面角之第二面ABQ相合而止,則其旋轉之量卽二面角之大小.

486. 定義11. 隣二面角.[1]

二個二面角共有稜及一面,且分居此面之兩旁,則此二個二面角爲隣二面角.

487. 定義12. 二等分面.

用二面角之稜作原線之一個半平面以此二面角分成二個相等之隣二面角,則此半平面爲二面角之等分面.

作如此之半平面,名曰二等分二面角.

488. 定義13. 對稜二面角.[2]

共有一稜之二個二面角,其一角中二面各爲他角中二面之延面,則此二個二面角曰對稜二面角.

(1) 隣二面角 Adjacent dihedral angles.

(2) 對稜二面角 Vertical dihedral angles.

二個平面相交所成四個二面角中,其兩兩不相隣接者互爲對稜二面角.

489. 定義14. 直二面角.[1]

二平面相交成相等之隣二面角,則此二平面曰互相垂直其各角曰直二面角.

【注意】 補角,餘角,銳角,鈍角等諸名稱,凡在二直線間之角所用者,皆可用之於二面角.

490. 定義15. 二面角之平面角[2]

從二面角稜中一點在各面中引垂直於稜之直線,此二個直線在二面角內之角爲二面角之平面角,或曰二面角之直線角.

二面角之平面角,無論其頂點之位置若何,其大小必一定. (定理十七)

491. 定理二十五.

二個二面角相等,則其平面角亦相等;二個二面角不相等,則其平面角亦不相等,而二面角較大者其平面角亦較大.

【證】 可用重合法證明,略之.

492. 系

對稜二面角相等.

(1) 直二面角 Right dihedral angles. (2) 平面角 Plane angle.

493. 系二.

定理25之倒亦眞確.

494. 系三.

眞二面角之平面角爲直角;其倒亦眞確;由此直二面角皆相等.

495. 系四.

此平面垂直於彼平面,則彼平面亦垂直於此平面.

496. 定理二十六.

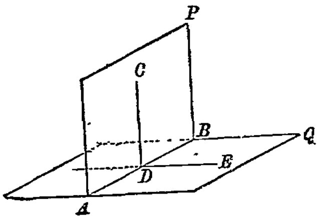
二個二面角之比,等於其平面角之比.

證法與第三編中定理八之證法相同,略之.

【注意】 從以上兩定理,故二面角之大小可可以平面角度之. 例如平面角爲30°之二面角亦爲30°.

497. 定理二十七.

此平面垂直於彼平面,則在此平面中垂直於交線之直線垂直於彼平面.



平面P⊥平面Q,直線CD在P中而直交此二平面之交線AB於D,

則CD⊥平面Q.

【證】 在平面Q中,過D引AB之垂線DE,則∠CDE爲二面角CABE之平面角,故爲

直角; (定理二十五系三)

由此CD垂直於AB,又垂直於DE,故CD垂直於平面Q.

498. 系一.

二平面互相垂直,則過其一面中一點而垂直於他面之直線全在第一面中.

(可用同一證法證之).

499. 系二.

相交二平面垂直於第三平面,則其交線亦垂直於第三平面.

500. 定理二十八.

一直線(CD)垂直於一平面(Q),則含此直線之任意平面(P)亦垂直於前一平面.

直線CD⊥平面Q,而平面P為含CD之任意平面,

則平面P⊥Q.

【證】 如前定理之圖,二平面P, Q之交線AB顯然過D點;

今在平面Q中從D引AB之垂線DE,則CD垂直於Q,故又垂直於DE;

而∠CDE為二面角CABE之平面角;

故P及Q互相垂直.

501. 系.

含平面之斜線而垂直於此平面之平面有一無二.

問　題

(1) 從一點向相交二平面各引垂線,則此二垂線之平面垂直於二平面之交線,且二垂線交角之一等於二平面間二面角之平面角.

(2) 與相交二平面等距之點之軌跡爲二個平面.

又與平行二平面等距之點之軌跡爲何?

(3) 與相交二直線等距之點之軌跡爲何?

又與平行二直線等距之點之軌跡爲何?

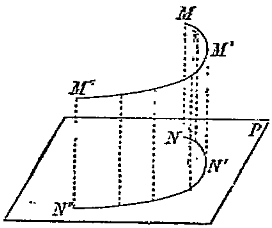
(4) 從一定點至過一直線之無數平面所下垂線之足之軌跡爲圓.

(5) 有矩形紙 ABCD, AB 長四尺, BC 長三尺,今以對角線 AC 爲摺痕而摺之,使平面 ABC 與 CDA 互相垂直,則 B, D 之距離若何?

502. 定義 16. 射影.[1]

一點在平而上之垂直射影,爲從點至平面所下垂線之足;一線在一平而上之垂直射影,爲線中一切點之垂直射影之軌跡.

例如 P 爲平面, MM′M″ 爲任意線,設想一點 M 在此線上行動,則此點之垂直射影成線 NN′N″,是爲線 MM′M″ 之垂直射影.



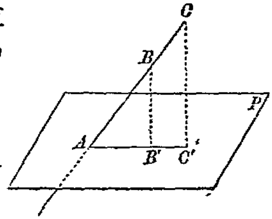
【注意】 本書僅論垂直射影而不論他種射影,故以後僅言射影者必指垂直射影可知.

503. 定理二十九.

(1) 射影 Projection。

斜交平面(P)之直線(ABC)在此平面上之射影爲直線.

直線ABC斜交平面P,
則ABC在P上之射影爲一直線.



【證】 含直線ABC而垂直於平面P之平面必含從線ABC中一切點向P所下之垂線;

(定理二十七系一)

故此二平面之交線AB'C'爲ABC之射影;
卽ABC之射影爲直線.

504. 系一.

垂直於平面之直線向此平面上之射影爲一點.

505. 系二.

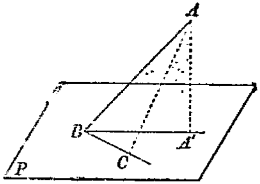
平行於平面之直線向平面上之射影與此直線平行. 此倒定理亦確.

506. 定理三十.

斜交於平面之直線與此平面中過其足之諸直線成諸角,就中以與其射影所成之銳角爲最小.

直線AB與平面P斜交於B,而其在P上之射影爲A'B,
BC爲在P中過B之任意直線,
則∠ABA'<∠ABC.

【證】 A′爲A之射影;
取B 之長等於BA′,則在兩三角形ABA′,ABC中,二邊相等而第三邊不等,即AA′<AC;
故 $\angle ABA' < \angle ABC$.



【注意】 平面P中之直線雖不過B者,亦可應用此理.

(定義7)

507. 系.

一直線斜交平面,則面中諸線與此斜線之射影成等角者與斜線亦成等角;與斜線之射影成較大之角者與斜線亦成較大之角.

508. 定義17. **直線與平面之角.**

直線與平面之角爲此直線與其射影所成之銳角.

直線垂直於平面,則其角爲直角.

問題

(1) 相等而且平行之二線分在任意平面中之射影亦相等而且平行.

(2) 多數點在一平面中之射影共一直線則此諸點皆在同平面中.

(3) 一線在相交二平面上之射影均爲直線,則原線亦爲直線. 又其特例若何?

(4) 一圓與在其平行平面上之射影相等.

(5) 平面P中之直線,與直線AB在P中之射影成直

角者,與AB亦成直角.

(6) 平面中二直線與他平面成等角,則此二直線與交線亦成等角.

第三章 多面角

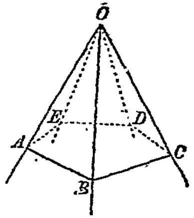
509. 定義18. 多面角.[1]

共有一點且兩兩順次相交之諸平面所成圖形曰多面角,或曰立體角.[2]

多面角因其成此平面之數而別之爲三面角,[3] 四面角,[4] 五面角[5] 等.

相交二平面分空間爲四部分,若更作與其交線相交之第三平面,則分空間成八部分,其各部分皆爲三面角.

510. 定義19.



成多面角之平面皆以二隣面之交線爲界. 例如五平面AOB, BOC,...,交於原點O之直線OA, OB, ...,上而成五面之多面角.

O曰多面角之頂點,半直線OA, OB等爲其稜,稜間之角AOB, BOC,等爲其面角,[6]各二面間之二面角向多面角之內部所測者爲其稜角.

作一平面令與多面角中一切稜相交,則

(1) 多面角 Polyhedral angle.
(2) 立體角 Solid angle.
(3) 三面角 Trihedral angle.
(4) 四面角 Tetrahedral angle.
(5) 五面角 Pentahedral angle.
(6) 面角 Face angle.

此面與多面角中各面之交線可圍成一多角形,是曰多面角之截面,[1]亦曰底面.

511. 定義20. 凸多面角.[2]

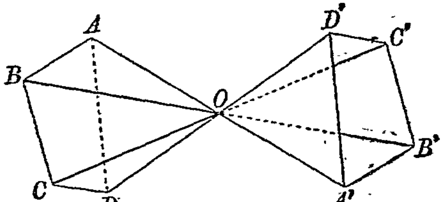
多面角之截面爲凸多角形,則此多面角爲凸多面角.

512. 定義21. 對頂多面角.[3]

有二個多面角,其一之各稜各爲他一中各稜之延線,則此二個多面角互爲對頂多面角.

例如O−ABCD及O−A′B′C′D′爲對頂多面角.

【注意】 對頂多面角之面角及稜角雙雙爲對頂角及對稜角,故相等,然在兩形中各



部分之位置次序全相反;即從O點觀之,A,B,C,D爲左旋,而A′,B′,C′,D′爲右旋.以故

普通之對頂多面角非合同形.

(1) 截面 Section.　(2) 凸多面角 Convex polyhedral angle.
(3) 對頂多面角 Vertical polyhedral angle.

513. 定義22. 對稱多面角.[1]

二多面角中各部分各相等而其排置之次序相反,則此二個多面角為對稱多面角.

對稱多面角非合同形,惟可移成對頂多面角之位置.

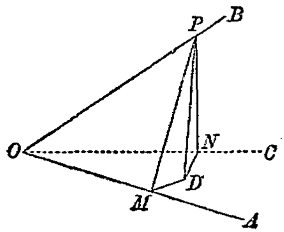
514. 定理三十一.

三面角之二個面角相等,則對此之稜角亦相等. 倒定理亦眞確.

三面角O—ABC中,面角AOB=BOC,

則稜角OC=OA.

又此倒定理亦眞確.



【證】 從稜OB中之任意點P向稜OA, OC及面AOC下垂線PM, PN, PD,而連結DM, DN,則

DM⊥OA及DN⊥OC;

又 $\angle POM = \angle PON$;

故 $\triangle POM \equiv \triangle PON$,

而 $PM = PN$;

由此 $\triangle PDM \equiv \triangle PDN$,

而 $\angle PMD = \angle PND$;

然$\angle PMD$及$\angle PND$各為稜角OA及OC之平面角;

故稜角亦相等.

次,倒定理之證明不難,略之.

515. 系.

三面角之二個面角相等,則此三面角與

(1) 對稱多面角 Symmetrical polyhedral angle.

其對頂三面角爲合同形.

516. 定理三十二.

三面角中一個面角比他一面角大,則對於前者之稜角比對於後者之稜角大.

(學者自證之).

問　題

(1) 三面角中含各面角之等分線而垂直於其面之三個平面會於同一直線.

(2) 一動點與三面角中三稜恒等距,求此動點之軌跡.

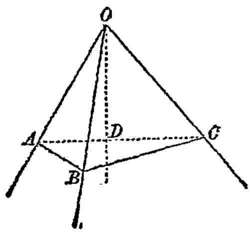
(3) 等分三面角中三個二面角之三平面會於同一直線.

(4) 三面角S—ABC中在稜SA處之二面角爲直角,則以垂直於稜SB或SC之平面截此三面角所得之截口爲直角三角形.

517. 定理三十三.

三面角之各面角比他二個面角之和小.

【證】 三個面角若皆相等,則本定理不必證而能明;故今在三面角O—ABC中定AOC爲最大之面角.



在二邊OA,OC間引任意直線AC,於$\angle$AOC之內作OD,令$\angle$AOD$=\angle$AOB;更截取OB令等於OD,連結AB, BC;

則　　$\triangle$AOD$\cong\triangle$AOB;

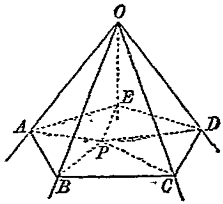
然在 $\triangle ABC$ 中 $AC-AB<CB$, 卽 $CD<CB$;
故在 $\triangle OCD$, $\triangle OCB$ 中,

$$OC\equiv OC,\quad OD=OB,\quad CD<CB,$$

故 $\angle COD<\angle COB$;
加 $\angle AOD=\angle AOB$,
則得 $\angle AOC<\angle AOB+\angle BOC$.

518. 定理三十四.

凸多面角(O－ABC…*)中諸面角之和比四直角小.



【證】 從底面內任意一點 P 連結底面諸頂點,分底面爲諸三角形,此三角形之個數與以 O 爲頂點底面各邊爲底所作三角形之個數相同,故二羣三角形內角之和相等;

然 $\angle EAB<\angle OAE+\angle OAB$, (定理三十三)

$\angle ABC<\angle OBA+\angle OBC$,

……………………………………

故加此諸式,則知以 P 爲頂點之諸三角形中,底角之和比以 O 爲頂點之諸三角形中底角之和小;
故 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$,…之和比 P 點周圍之角卽四直角小.

519. 系.

三面角(O－ABC)中三個稜角之和,比二

*爲簡約起見,嗣後以圖形記號附入定理中而略去說明. 此所附記號寫於括弧之內,去之則仍得普偏之定理.

直角大而比六直角小.

從角內一點O′向面AOB,BOC,COA各下垂線O′A′,O′B′,O′C′,即可見面角B′O′C′,C′O′A′,A′O′B′各與稜角OA,OB,OC互為補角;

故此六個角之和為六直角,其中前三個面角之和比四直角小(本定理),故後三個稜角之和比二直角大而比六直角小.

【注意】 二個三面角O—ABC及O′—A′B′C′名曰互為補角之三面角.

問題

(1) O為頂點之三面角中三個平面角皆為直角,則從任意一點X向三稜引垂線XP,XQ,XR時,可有關係如下:

$$\overline{OX}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2+\overline{OR}^2.$$

(2) 含三面角中各稜及對此各面角中等分線之三個平面會於同一直線.

(3) 二個三面角中面角各相等,則此二個三面角為合同形或為對稱形.

【提示】 O—ABC, O′—A′B′C′為所設之三面角;取OA,OB,OC,O′A′,O′B′,O′C′皆令相等,而向ABC,A′B′C′下垂線OD,O′D′,則D,D′各為合同三角形ABC,A′B′C′之外心.

(4) 以平面截四面角,令其截面為平行四邊形.

【提示】 平行於二雙對面之交線作平面.

第六編
多面體
第一章
多面體之定義及性質

520. 定義 1. 多面體.[1]

多數平面多角形所圍之立體曰多面體.

此等多角形名曰多面體之面,其邊其頂點各爲多面體之稜及頂點.

多面體因其面數而別之爲四面體,[2]五面體,[3]六面體[4]等.

三個以下平面不能作成多面體.

521. 定義 2. 凸多面體.[5]

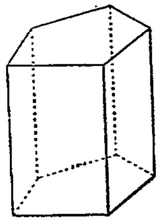
延長任何一面均不入體內之多面體曰凸多面體.

本書所論之多面體限於凸多面體.

522. 定義 3. 角壔.[6]

(1) 多面體 Polyhedron.
(2) 四面體 Tetrahedron.
(3) 五面體 Pentahedron.
(4) 六面體 Hexahedron.
(5) 凸多面體 Convex dihedron.
(6) 角壔 Prism.

多面體之二面平行而他面皆爲平行四邊形者曰角壔.



平行之二面爲角壔之底面,他面曰側面,[1]側面之交線曰側稜,[2]兩底面必爲合同之多角形.

角壔因其底面之邊數而別之爲三角壔,[3]四角壔[4]等.

兩底面之距離曰角壔之高.

523. 定義 4.　直角壔,[5]斜角壔.

角壔之側稜垂直於底面者曰直角壔,否則爲斜角壔.[6]

直角壔之底面爲正多角形者曰正角壔.[7]

524. 定義 5.　多面體之截面[8]及直截面.[9]

以一平面截多面體所得之多角形爲多面體之截面.

垂直於角壔側稜之截面爲角壔之直截面.

(1) 側面 Lateral faces.
(2) 側稜 Lateral edges.
(3) 三角壔 Triangular prism.
(4) 四角壔 Quadrangular prism.
(5) 直角壔 Right prism.
(6) 斜角壔 Obleque prism.
(7) 正角壔 Regular prism.
(8) 截面 Section.
(9) 直截面 Right section.

525. 定理一.

截角壔一切側稜之平行截面爲合同之多角形.

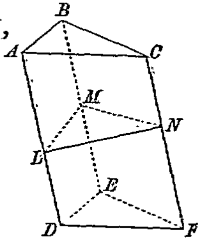
【證】 平行截面之邊爲平行四邊形之對邊,故相等;

又平行截面之角,因其二邊平行而亦相等;

故爲合同形.

526. 定理二.

角壔之側面積,等於其直截面之周與一側稜所包矩形之積.



【證】 AF爲角壔,LMN爲直截面,

則 $AD=BE=CF$,

$\square ABED=LM\cdot AD$,

$\square BCFE=MN\cdot BE$,

$\square CADF=NL\cdot CF$,

故 側面積$=(LM+MN+NL)\cdot AD$.

527. 系.

直角壔之側面積等於其底面之周與高所包矩形之積.

問題

(1) 平行於角壔側稜之截面爲平行四邊形.

(2) 過角壔中二雙側稜作二平面,若其交線垂直於底面,則此角壔爲直角壔.

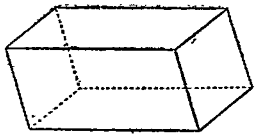
(3) 已知正六角壔中底面之一邊爲 a 尺,高 h 尺,則

其全面積幾何?

(4) 已知正八角壔中底面之一邊長一尺,高二尺,求其側面積.(求至平方分而止).

528. 定義 6.　平行面體.[1]

角壔之底面爲平行四邊形者曰平行面體.



從此定義,則平行面體之兩兩對面皆爲合同之平行四邊形,故其中無論何面皆可視爲底面.

平行六面體之側稜垂直於底者,曰直平行面體,[2]各面皆爲矩形者曰矩平行面體,又曰直方體.[3]

直方體之稜皆相等者曰立方體,[4]亦曰立方.

529. 定義 7.　多面體之對角線.

連結多面體內不在同一面中二頂點所得之線分爲多面體之對角線.

問　題

(1) 平行面體之四個對角線皆於其中點相會,(是爲平行面體之中心). 又其十二個稜平方之和,等於四個對角線平方之和.

(1) 平行四體 Parallelopiped.　(2) 直平行面體 Right parallelopiped.
(3) 直方體 Rectangular parallelopiped.　(4) 立方體 Cube.

(2) 直方體之對角線皆相等,其平方等於在一個頂點三稜之平方和.

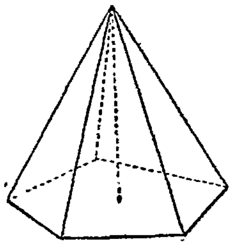
(3) 立方體中各對角線之平方等於其各稜平方之三倍.

(4) 已知立方體中各稜長一尺,則其對角線長幾何?(算至釐位而止).

(5) 直方體之三稜為 a, b, c, 則其全面積若何?

530. 定義8. 角錐.[1]

多面體之一面為多角形他面悉為有同一頂點之三角形者曰角錐.此公共頂點為角錐之頂點,對此之面曰底面. 從頂點向底面所下垂線之長曰角錐之高,而集於頂點之稜及面各為角錐之側稜及側面.



角錐因其底面之邊數而別之為三角錐,[2]四角錐[3]等.

531. 定義9. 正角錐.[4]

角錐之底面為正多角形而其底面之中心為頂點,在此底面上之射影者曰正角錐.

從正角錐之頂點向底面之一邊所下垂

(1) 角錐 Pyramid. (2) 三角錐 Triangular pyramid. (3) 四角錐 Quadrangular pyramid. (4) 正角錐 Regular pyramid.

線爲正角錐之斜高.[1]

【注意】 正角錐之側面皆爲合同之二等邊三角形.

532. 定義10. 角錐臺.[2]

角錐夾於底面及其平行截面間之立體部分日角錐臺. 截面與底面共爲角錐臺之底面,其間之距離爲其高.

正角錐臺二底面平行二邊間之距離爲錐臺之斜高.

533. 定理三.

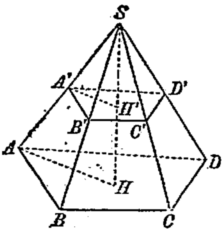
角錐以平行於底面之平面截之,則

(一)側稜及高分於比例;

(二)截面與底面相似;

(三)截面與底面之比等於自頂點至此二面距離之二乘比.

【證】 S—ABCD爲角錐,A′B′C′D′爲平行於底面之截面,SH′H爲高.



(一) A′H′, AH爲平行面A′C′, AC與平面ASH之交線,故平行;

$\therefore\ SA':A'A=SH':H'H.$

(二) 截面與底面之各雙對應邊平行而同向,故其角各等;

(1) 斜高 Slant height. (2) 角錐臺 Frustum of a pyramid.

又對應邊之比顯然等於SA', SA之比;

故　　$A'B'C'D' \backsim ABCD$.

(三) 截面與底面之比等於$A'B':AB$之二乘比;

又因　　$\triangle SA'B' \backsim \triangle SAB$;

故　　$A'B':AB=SA':SA=SH':SH$;

故　　$A'B'C'D':ABCD=(SH':SH)^2$.

534. 系一.

在等高兩角錐中,兩截面與頂點等距而平行於底面,則其比等於兩底面之比.

535. 系二.

在等底等高兩角錐中,兩截面與頂點等距而平行於底面者相等.

問　題

(1) 連結三角錐(卽四面體)對稜中點之三線分互交於各中點.

(2) 等分四面體中各二面角之六個平面會於一點.

(3) 作一三角錐之截面,令其平行於錐之底面而其積爲底面積之半.

(4) 求一點,令與一四面體之各頂點等距.

536. **定理四.**

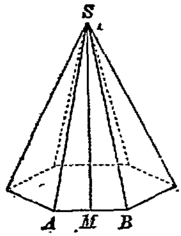
正角錐之側面積等於底面之周與斜高之積之半.

【證】 正角錐$S-ABC$……底面之邊數爲n,斜高爲

SM，則

$$側面積=n\cdot\triangle SAB$$
$$=\frac{n\cdot AB\cdot SM}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(n\cdot AB)\cdot SM$$

而$n\cdot AB$顯然爲底面之周圍.



537. 定理五.

正角錐臺之側面積等於兩底面周半和與斜高之積.

問題

(1) 從立方體一頂點所出之對角線垂直於一平面而此平面過會於此頂點之三稜之他端.

(2) 等分四面體中二面角之平面以對稜分於兩側面之比.

(3) 在四面體S—ABC中作底面ABC之平行截面DEF，則連結此截面三邊DE，EF，FD中點G，H，K，與底面中對角頂C，A，B之三直線GC，HA，KB會於一點.

(4) 四面體中相對二稜相等，則此四面體以平行於此二稜之平面截之所得之截面爲周圍一定之平行四邊形.

(5) 從四面體各頂點各引直線，皆與其三面成等角，則此各直線必會於一點.

第二章　角壔之體積

538. 定義11. 立體之體積.[1]

立體之體積爲其面所圍空間之部分.

二個立體體積相等者,不必定能重合,其可重合者爲合同形.

計算體積,慣例以線單位作稜之立方體體積爲其單位.

539. 定理六.

二個直角壔之底面全相等,

(一)若其高又等,則此二壔爲合同形.

(二)若其高不等,則此二壔亦不等,其高較大者積亦大.

【證】 略.(可用重合法證之).

540. 系.

二個直方體中集於一頂點之三稜各等,則此二形爲合同形.

541. 定理七.

二個底面全等直方體之比,等於其高之比.

證法與第四編中定理之證法相同,略之.

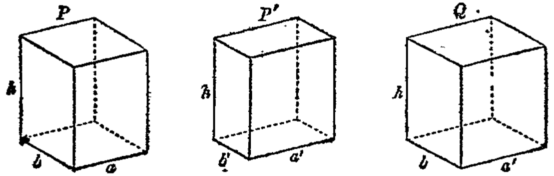
542. 系.

二個二稜各等直方體之比,等於其第三稜之比.

(1) 體積 Volume.

543. 定理八.

等高直方體之比等於其底面之比.



【證】　P 及 P′ 為所設二個直方體,底面之二邊各為 a, b 及 a', b', 高為 h;

別作一直方體 Q, 以 a', b, h 為其三稜;

則　　$P:Q=a:a',\quad Q:P'=b:b',$

故　　$P:P'=(a:a')(b:b')=a\cdot b:a'\cdot b',$

因 $a\cdot b$ 及 $a'\cdot b'$ 為 P 及 P′ 之底面,故如題言.

544. 定理九.

二個直方體之比等於其三稜比之相乘比.

【證】　P 及 P′ 為所設二個直方體,其三稜各為 a, b, c 及 a', b', c';

別作一直方體 R, 令其三稜為 a', b', c';

則由前二定理,

$$P:R=(b:b')(c:c'),$$

$$R:P'=a:a';$$

故　　$P:P'=(a:a')(b:b')(c:c').$

545. 系一.

二個直方體之比等於其底面之比及高之比之相乘比.

546. 系二.

直方體體積之度數等於底面及高度數之乘積,亦等於三稜度數之積.

547. 系三.

二個立方體之比,等於其稜之比之三乘比.

548. 系四.

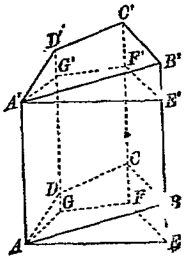
立方體體積之度數等於其稜之度數之第三冪.

【注意】 以是故,名一數之第三冪爲立方.

549. **定理十.**

斜角壔之體積等於以其直截面作底面其稜作高所得直角壔之體積.

【證】 所設之角壔爲ABCD—A′B′C′D′,



過稜AA′之兩端作垂直於此稜之平面而令與側面相交;

然則以此直截面AEFG,A′E′F′G′作底面AA′作高之直角壔等於所設之斜角壔.

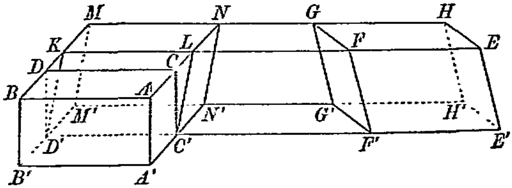
何則,今試取立體ABCDEFG重於他之立體A′B′C′D′E′F′G′上,置面AF於面A′F′之上,則因此二面爲合同形而全相重合; (525)

又稜EB, FC, GD各等於E′B′, F′C′, G′D′,且垂直於相重之面;
故亦相重合;
由此兩立體爲合同形;
故於二者中各加立體ABCD−A′E′F′G′,卽得斜角壔ABCD−A′B′C′D′等於直角壔AEFG−A′E′F′G′.

【注意】若過A及A′之直截面與底面相交,則證之亦不難,今從略,學者可自爲之.

550. 定理十一.

平行面體等於等底等高之直方體.



【證】EFGH·E′F′G′H′爲所設之平行面體,E′F′G′H′爲其底面,h爲其高;

以稜EF, HG, E′F′, H′G′任意延長,而在E′F′之延線上取C′D′等於E′F′,過二點C′,D′作垂直於直線C′D′之平面,則得直平行面體K′N′;
次,延長稜N′C′, NL, MK, M′D′,而在N′C′之延線上取等於N′C′之C′A′,在平面ANN′A′中從C′引A′C′之垂線C′C;
稜D′C′垂直於平面AN′,故垂直於C′C及C′A′;
故作平面CC′D′,又過A′作平行於此平面之平面A′B′BA,則由此所生之立體A′D爲直方體;
今原立體EG′與直平行面體KN′等積,而此立體又與直方

體 A'D 等積; (549)
此三立體之高同於平行平面之距離,故皆等於 h;
又直方體之底面 A'B'D'C' 為原底面 E'F'G'H' 等底等高之矩形,故此二底面亦相等;
故如題言.

【注意】 從定理九系一,可知二個等底等高之直方體相等,故直方體之底面不必定與原底面為等底等高,僅須其底之面積相等,而此直方體又與原體等高,則二者之積即能相等矣.

551. 系一.

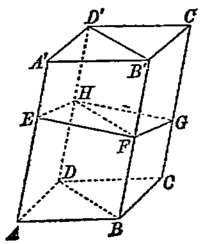
等底等高之平行面體相等.

552. 系二.

平行面體體積之度數等於其底面及高二度數之積.

553. 定理十二.

過平行面體(ABCD－A'B'C'D')中二對稜(BB',DD')之平面分此面體為相等之兩三角壔.



【證】 垂直於稜 BB' 之直截面為 EFGH, 則 △EFH, △GFH 各為三角壔 ABD', CBD' 之直截面;
於是三角壔 ABD' 等於以 BB' 為高 △EFH 為底面之直三角壔;三角壔 CBD' 等於以 DD' (＝BB') 為高 △GFH 為底面之直三角壔;

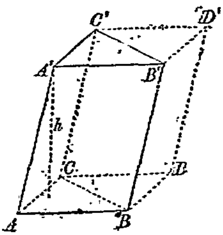
而二個直三角壔有合同之底面EFH, GFH,
故為合同形;　(定理六)
由是　三角壔ABD′=CBD′.

【注意】三角壔ABD′, CBD′之各面及稜角雖兩兩相等,然以其排置之順序相反,故兩體不為合同形.

554. 定理十三.

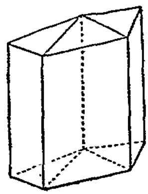
三角壔(ABC－A′B′C′)體積之度數等於其底面(ABC)及高(h)二度數之積.

【證】作成平行四邊形ABCD及A′B′C′D′,連結DD′,則AD′為平行面體而為三角壔ABC′之二倍;　(定理十二)
因平行面體體積之度數等於其底面及高二度數之積;　(定理十一系二)
而此三角壔之底面ABC等於平行面體底面ABDC之半;
故三角壔體積之度數,等於其底面及高二度數之積.



555. 系一.

任意角壔體積之度數等於其底面及高二度數之積.



556. 系二.

角壔體積之度數等於其直截面及側稜二度數之積.

問　題

(1) 三角壔體積之度數等於「其一側面」及「從其對稜中一點向此面所下垂線」二者度數之半積.

(2) 有正三角壔,已知其底面之一邊長 a 尺,高 h 尺,則其體積爲幾立方尺?

(3) 有正六角壔已知其底面之一邊長 3 尺,而側稜之長爲 5 尺,則其體積爲幾立方尺?

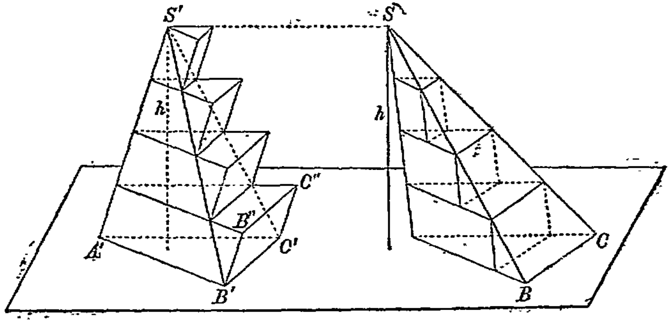
(4) 體積爲148.877立方粴之立方體,全面積幾何?

(5) 直方體之全面積爲 497.26 平方呎,而其三稜之比如3:4:5,則其三稜之長若何?

第三章　角錐之體積

557. 定理十四.

等底(ABC, A′B′C′)等高(h)二個三角錐(S－ABC, S′－A′B′C′)相等.



【證】 置所設兩體於同一平面上,因兩體等高,故直線SS′平行於此平面;

分稜SA爲n等分,過其分點作平行於底面之平面,則兩角錐之截面兩兩相等;　(定理三系二)
在三角錐S—ABC中,以各截面爲上底作$n-1$個三角壔,令其稜皆平行而等於稜SA之一部分,又在S′—A′B′C′中亦爲同式之作圖,則在兩體中之三角壔因兩兩等底等高而相等;
今命三角錐S—ABC, S′—A′B′C′之體積爲V, V′,內部三角壔體積之和爲P,則

$$P<V, \text{及 } P<V';$$

命n增大,則P可從之而大;例如n爲前之二倍,則各角壔爲二個,其一爲原壔之半而其二可比此半大;

次,在三角壔S′—A′B′C′中作n個角壔,令其下底爲三角錐之底面及截面,而其稜皆平行且等於S′A′之一部分;又在三角錐S—ABC中亦爲同式之作圖,則在兩體中之三角壔亦因兩兩等底等高而相等;
令各角錐中三角壔體積之和爲Q,則

$$Q>V, \text{及 } Q>V';$$

今命n增大,則Q及各三角錐之差可至爲任何小;

故P及Q均接近於某極限;

因P及Q之極限相等,故恆在P及Q間之定量V及V′相等而皆等於P及Q之公共極限;

Q—P爲三角壔A′B″C″;因Q中他$n-1$個三角壔各與三角錐S—ABC中$n-1$個之三角壔等積故也.

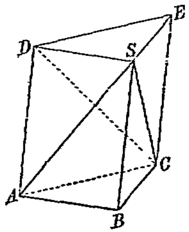
然此三角壔A′B″C″之底面恆一定,其高等於兩三角錐高之$\frac{1}{n}$,故其體積因n之無窮增大而無窮接近於零;故Q—P可無窮接近於零;然V及V′共在Q及P之間,故其差比Q—P小而竟可爲零,即V及V′爲Q及P之公共極限,即

相等.

558. 定理十五.

三角壔(S－ABC)等於等底(ABC)等高(h)三角壔之三分之一.

【證】 從頂點S作SD, SE,令各與BA, BC平行而相等,連結AD,DE,EC,則得三角壔DSE—ABC與原三角錐等底而等高;



作面SDC,則此三角壔分成三個三角錐S—ADC, S—ECD, S—ABC;

此第一,第二兩三角錐之底面ADC, ECD相等又共以從S向平面AE所下之垂線爲高,故二體相等;又以C視作第二個三角錐之頂點, DSE爲其底面,則第二,第三兩三角錐等底而同高,故此二錐體亦相等;以故三角錐S—ABC等於三角壔DSE—ABC之三分之一,故如題言.

559. 系一.

三角錐體積之測度,等於其底面及高兩測度相乘積之三分之一.

560. 系二.

任意角錐體積之測度等於其底面及高兩測度相乘積之三分之一.

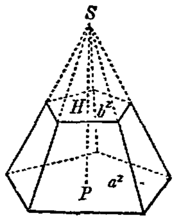
561. 系三.

等高(或等底)兩角錐之比等於其底面(或高)之比.

562. 定理十六.

角錐臺之體積等於兩底及其比例中項之和與其高之積之三分之一.

(此所謂體積,底,等皆謂其數數)



【證】 SP 爲角錐之高,V 爲角錐臺之體積,a^2 及 b^2 爲其兩底之面積,HP$=h$ 爲角錐臺之高,因 V 爲二個角錐之差而

$$V=\frac{SP}{3}\times a^2-\frac{SH}{3}\times b^2;$$

然 $$\frac{a^2}{\overline{SP}^2}=\frac{b^2}{\overline{SH}^2},$$

故 $$\frac{a}{SP}=\frac{b}{SH}=\frac{a-b}{h};$$

由此 $$SP=\frac{ah}{a-b},\quad SH=\frac{bh}{a-b},$$

故 $$V=\frac{a^3h}{3(a-b)}-\frac{b^3h}{3(a-b)}$$
$$=\frac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)}$$
$$=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2).$$

問　題

(1) 含三角錐側稜之一而等分其稜角之平面以其對稜分爲二隣面之比.

(2) 二個三角錐中一個三面角相等,則此二個三角錐之比等於此三面角之三稜所包直方體積之比.

(3) 有三角錐,已知其高爲 2.04 尺,而底面之三邊各爲 0.4 尺. 0.5 尺, 0.6 尺,則其體積幾何?

(4) 正六角錐體之一邊爲一寸八分而高爲四寸七分,則其體積幾何?

(5) 有體積一立方寸之角錐,其底面爲平行四邊形而其二邊及對角線各爲1寸,2寸,$\sqrt{7}$寸,則其高爲若干寸.

(6) 已知正四面體之一稜長6寸,求其體積,求至立方寸以下之第二位而止.

第四章　正多面體

563. 定義12.　正多面體.[1]

多面體之各面皆爲合同之正多角形而其各多面角又皆相等者曰正多面體.

564. 定理十七.

任意多面體中面數(F)及多面角數(V)之和比稜數(E)多2.

【證】 設想取一個m邊之多角形順次附加以其餘之多角形以成此多面體;
命當此附加時之稜數爲E′,面數爲F′,角頂之數爲V′;
先多角形爲一個,故

$$F'=1,\quad E'=m,\quad V'=m,$$

由此　　$E'-V'=0;$

次,附上一面則此所附之一面與前一面有公共一稜及公共二角頂故新稜比新頂點多增一個,

故　　$F'=2$時,　$E'-V'=1;$

復次,再附上一多角形,與前一次同理,所增新稜之數又比

(1) 正多面體 Regular polyhedron.

所增新角頂之數多一個,

故　　$F'=3$ 時, $E'-V'=2$;

如此每附上一面,則所增新稜之數必比所增新角頂之數多一個,以至於最後之前一次時,

$$F'=F-1, \text{而 } E'-V'=E-2;$$

最後,更附上一多角形,以成一完全之多面體,此時面之數雖增一個而稜數及角頂之數一無增加可知;

故　　$F'=F$ 時, $E-V=F-2$;

即　　$$F+V=E+2.$$

565. 定理十八.

若多面體之面數為 F 每面皆為 m 邊之多角形,多面角數為 V 每角皆為 n 面角,稜數為 E, 則

$$mF=nV=2E.$$

【證】　圍成多面體之多角形中各邊兩兩相合而成一稜故諸多角形共有之邊數等於稜數之二倍;

次,各多面角之面數為 n, 故 n 倍多面角之數則得諸多角形共有之角數;

又考多面體之各面,每面有角 m 個,故 m 倍面數亦得諸多角形共有之角數;

分離多面體之各面為一一單獨之多角形,則此諸多角形共有之角數與共有之邊數當相等;

故　　$mF=nV=2E.$

566. 定理十九.

正多面體有五種而僅有五種.

【證】 從定義12,知正多面體中各多面角之面角必皆爲合同多角形之角,而其和又決不能大於四直角;

(五編定理三十四)

今正三角形之一角 $=\frac{2}{3}R\angle$,

而 $\frac{2}{3}R\angle\times3=2R\angle$, $\frac{2}{3}R\angle\times4=2\frac{2}{3}R\angle$, $\frac{2}{3}R\angle\times5=3\frac{1}{3}R\angle$,皆小於 $4R\angle$, $\frac{2}{3}R\angle$ 之四倍以上卽比四直角大,

故以正三角形爲面所可作之多面角有三種而僅有三種,卽三面角,四面角五面角是;

次正四角形(卽正方形)之一角 $=R\angle$,

於此惟有 $R\angle\times3=3R\angle$ 小於 $4R\angle$,

故以正方形爲面之多面角有一種而僅有一種(卽三面角);

復次正五角形之一角 $=\frac{6}{5}R\angle$,

於此惟有 $\frac{6}{5}R\angle\times3=3\frac{3}{5}R\angle$,小於 $4R\angle$,

故以正五角形爲面之多面角僅有三面角一種;

再,正六角形之一角 $=\frac{4}{3}R\angle$,而 $\frac{4}{3}R\angle\times3=4R\angle$,

故以正六角形爲面不能作成多面角,卽不能作成多面體;多角形之邊數更多者亦然;

由此可知正多面體僅有五種之語爲不誣.

567. 計算題一.

求各種正多面體之面數,角數,稜數.

【解】 在定理十八中,已知 $mF=nV=2E$; (1)

復從前款,知第一種正多面體中, $m=3, n=3$; (2)

第二種正多面體中, $m=3, n=4$; (3)

第三種正多面體中, $m=3, n=5$; (4)
第四種正多面體中, $m=4, n=3$; (5)
第五種正多面體中, $m=5, n=3$; (6)

聯立(1),(2)解之,得 $F=4,\ V=4,\ E=6$,
,, ,, ,, (3) ,, ,, ,, $F=8,\ V=6,\ E=12$;
,, ,, ,, (4) ,, ,, ,, $F=20,\ V=12,\ E=30$;
,, ,, ,, (5) ,, ,, ,, $F=6,\ V=8,\ E=12$;
,, ,, ,, (6) ,, ,, ,, $F=12,\ V=20,\ E=30$;

由是可定此五種正多面體之名如下:

(I) 正四面體. 爲以四個正三角形爲面之多面體,有四個角頂,六個稜.

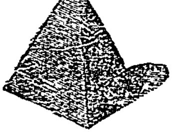
(II) 正六面體(立方體). 爲以六個正方形爲面之多面體,有八個角頂,十二個稜.

(III) 正八面體. 爲以八個正三角形爲面之多面體,有六個角頂,十二個稜.

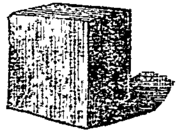
(IV) 正十二面體. 爲以十二個正五角形爲面之多面體,有二十個角頂,三十個稜.

(V) 正二十面體. 爲以二十個正三角形爲面之多面體,有十二個角頂,三十個稜.

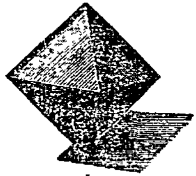
今更舉此五種正多面體之圖形於下:



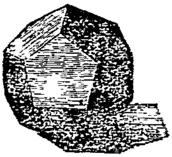
正四面體



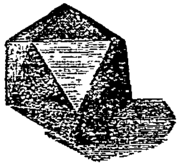
正六面體
(立方體)



正八面體



正十二面體

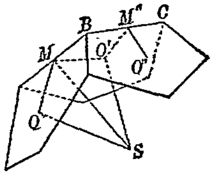


正二十面體

568. 定理二十.

正多面體可作內接球及外接球.*

【證】 在正多面體中,O及O′為二隣面之中心,AB為其交線;從二點O,O′向AB引垂線,則可會於同一點M;又各引其平面之垂線,則此二垂線為二面中諸頂點等距離點之軌跡,故可交於平面OMO′中之點S;



直角三角形MOS,MO′S因有公共斜邊及OM=O′M而為合同形;

因∠OMO′為二面角AB之平面角,故無論移於若何二隣面中皆一定,而其半∠OMS亦一定,從此△OMS亦一定;

次,就與第二面隣接於BC之第三面考之,從其中心O″引其面之垂線,亦可於S點會OS,因△O″M″S與△OMS合同故也;

累次行此法,可見通過正多面體各面中心之垂線皆會於同一點S,而此點與各面之距離等,與各頂點之距離

*本定理可移於第八編第三章以後,今因分類上之便利姑置於此。

球係半圓旋轉於其直徑之周圍所生之立體;圓之中心旋轉後即為球之中心,球之表面上一切點與中心之距離皆相等。

亦等;

故以S爲中心以SA爲半徑作球即得體之外接球;

又以S爲中心SO爲半徑作球,即得體之內接球.

【注意】 S爲多面體之中心,SA爲其半徑.

問題

(1) 在正多面體中有如下之關係:

$$\frac{1}{F}=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right),\quad \frac{1}{V}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right),\quad \frac{1}{E}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}.$$

(2) 正四面體之稜長 a 尺,則其高,全面積,及體積各如何?

(3) 從正四面體內一點至其四面距離之和一定不變.

(4) 正四面體之對稜互相垂直而連結其中點之直線爲其公共垂線.

(5) 各稜長 a 尺之正八面體體積爲$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$立方尺.

(6) 從正四面體一頂點向底面中三中線之交點引線分,則此線分等於從其交點向一側面所引垂線之三倍.

第七編

三圓體*

第一章　直圓壔

569. 定義1.　直圓壔.[1]

以矩形之一邊爲軸而旋轉一周,由此所生之立體曰直圓壔.

垂直於軸之相對二邊因旋轉而生圓,是曰圓壔之底面.　平行於軸之一邊因旋轉而生曲面,是曰圓壔之側面.

軸之長,卽兩底面之距離,爲圓壔之高.

570. 定義2,　直圓壔之內接或外接直角壔.

直角壔之底面內接或外接於直圓壔之底面則曰此直角壔內接或外接於此直圓壔,而名角壔爲圓壔之內接角壔或外接角壔.

571. 定理一.

直圓壔側面積之數等於底面之圓周

* 直圓壔,直圓錐,球,總名之曰三圓體.

(1) 直圓壔 Right circular cylinder.

及高兩度數之積.

【證】　以 P 表直圓壔內接正多角壔之周圍, H 表高,則此角壔之側面積為 $P.H$;　(526)
今角壔中底面之邊數無限增加,則 P 之極限為圓壔底面之圓周 C;　(401)
故此正多角壔側面積之極限為 $C.H$, 是卽為直圓壔之側面積.

572. 系.

直圓壔底面之半徑為 R, 高為 H, 則其全面積 $S=2\pi R(R+H)$.

【注意】　曲面之面積恆為平面面積和之極限.

573. 定理二.

直圓壔體積之度數等於其底面及高二度數之積.

【證】　直圓壔之體積 V 比其內接正多角壔之體積 P 大而比其外接正多角壔之體積 P' 小,卽

$$P<V<P';$$

今命高為 H, 內外角壔之底面積為 B, B', 則

$$P=B.H,\quad P'=B'.H;$$

然角壔底面之邊數無窮增加,則 P 及 P' 均無窮接近於 V, 故 V 為其共有之極限而等於底面及高之積.

574. 系.

直圓壔底面之半徑為 R, 高為 H, 則

體積 $V=\pi R^2H$.

問題

(1) 直圓壔以平行於其軸之平面截之,則其截面爲矩形.

(2) 矩形之二隣邊爲 a, b,以其各邊爲軸而旋轉之,則由此所生兩直圓壔體積之比若何?

(3) 有直圓壔之水桶,高四尺,底面之直徑長一尺五寸,則其容量若何? (算至勺而止,而 $\pi=3.1416$).

(4) 一圓壔之高等於其底面之直徑,則其側面積比例於底半徑之平方,體積比例於其立方.

(5) 有直圓壔,高 1 尺,其全面積等於半徑 2 尺之圓面積,則此圓壔之半徑及體積若何?

(6) 直圓壔之側面積爲169.56平方尺,而其高與直徑之比如 2:3,其體積如何?

第二章　直圓錐

575. 定義3.　直圓錐.[1]

以直角三角形直角一邊爲軸而旋轉之,由此所生之立體曰直圓錐.

軸之長爲圓錐之高,由垂直於軸之邊所生之圓爲其底面. 又斜邊之長爲圓錐之斜高,由斜邊所生之曲面爲圓錐之側面.

角錐與直圓錐共有頂點而其底面又內接或外接於直圓錐之底面,則曰角錐內接或

(1) 直圓錐 Right circular cone.

外接於直圓錐,此角錐爲直圓錐之內接角錐[1]或外接角錐.[2]

576. 定理3.

直圓錐側面積之度數等於其底面之圓周及斜高兩度數之半積.

【證】　直圓錐中內接正角錐之側面積等於底面周圍及斜高兩度數之半積;　(六編定理四)
若底面之邊數無窮增加,則角錐之側面積無窮接近於圓錐之側面積;
而角錐底面周圍之極限爲圓錐底面之圓周,角錐斜高之極限爲圓錐之斜高;
故圓錐之側面積等於其底面之圓周及斜高兩度數之半積.

577. 系一.

過直圓錐高之中點作平行於底面之截面,則此直圓錐側面積之度數等於此截面之周圍與斜高兩度數之積.

578. 系二.

直圓錐之高爲H,斜高爲H',底面之半徑爲R,則

$$全面積\ S=\pi R(H'+R),$$

且
$$H'=\sqrt{H^2+R^2}.$$

(1) 內接角錐 Pyramid inscribed in a cone.

(2) 外接角錐 Pyramid circumscribid about a cone.

579. 定理四.

直圓錐體積之度數等於底面及高兩度數相乘積之三分之一.

580. 系.

直圓錐底面之半徑為R,高為H,則

$$體積 V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

581. 定義4.　直圓錐臺.[1]

直圓錐以平行於底面之平面截之,所得介於截面及底面間之立體為直圓錐臺.

梯形之一邊垂直於其兩底時,以此邊為軸而旋轉之,則可生一直圓錐臺. 對軸之邊為此圓錐臺之斜高.

582. 定理五.

直圓錐臺側面積之度數等於兩底面中圓周度數之和與斜高度數相乘積之半.

583. 系一.

直圓錐臺截以垂直於軸而過其中點之平面,則此錐臺側面積之度數等於此截面之圓周與斜高兩度數之積.

584. 系二.

直圓錐臺之體積,高,及兩底面之半徑各

(1) 直圓錐臺 Frustum of right circular cone.

爲 V, H, R, R′, 則

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+RR'+R'^2).$$

問　題

(1) 過直圓錐頂點之截面爲二等邊三角形.

(2) 二邊各長 a 及 b 之直角三角形以其斜邊爲軸而旋轉之,則其所生立體之全面積及體積各若何?

(3) 一正三角形每邊長 L, 以通過一頂點而平行於其對邊之直線爲軸而旋轉之,則由此所生立體之體積若何?

(4) 有直圓錐,已知其高四尺,底面之直徑爲六尺,求其斜高,側面積,底面積,及體積.

(5) 求作一直圓錐之截面,令其與底面平行而等分其側面積.

又設底半徑爲 8 公釐,高爲 20 公釐,則此截面與底面之距離若何?

(6) 有矩形 ABCD, 以邊 AB 爲軸而旋轉全形,又以對角線 AC 爲軸而旋轉其一部分 △ABC, 此二次所生立體體積之比若何?

但 AB=3 尺, BC=5 尺.

第三章　球

585. 定義 5.　球面.　球.(1)

球面者,密閉之曲面,其面上一切點與名

(1) 球 Sphere.

爲中心之定點等距者也. 球面所圍之立體曰球.

連結中心及球面上一點之線分曰球之半徑,過中心而兩端止於球面之線分曰球之直徑,直徑之兩端曰球之對點.

【注意一】 球面爲與一定點在一定距離之點之軌跡.

【注意二】 以半圓之直徑爲軸而旋轉之,所生之立體爲球.

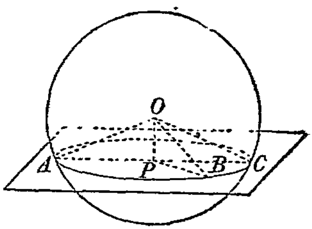
【注意三】 慣例,恒略稱球面爲球.

586. 定理六.

球面與平面之交線爲圓周.

【證】 若平面過球之中心,則交線中之點皆在此平面上,且與球之中心在等距離之處;
故此交線爲以球之中心作中心球之半徑作半徑之圓周;

若此平面不過球之中心O,則從O向此平面引垂線OP,更從O連結交線ABC中之任意二點A及B;



然則OA,OB爲球之半徑,故相等;
故A及B與此垂線OP之足P等距;
由此可知交線ABC爲以P作中心PA作半徑之圓周.

【注意】 圓ABC爲球之截面.

587. 系一.

球之半徑爲R,截面之半徑爲r,兩中心之距離OP爲d,則

$$r^2=R^2-d^2,$$

故與中心等距之截面皆相等,離中心遠之截面比離中心近之截面小.

588. 定義7. **球之大圓及小圓.**[1]

球之截面過球之中心者曰球之大圓,不過中心者曰小圓.

589. 系二.

同球之大圓皆合同.

590. 系三.

同球之二大圓互相二等分.

591. 系四.

直線與球面之交點多不過二.

因過此直線之任意平面與球之交線爲圓周,而此圓周與此直線之交點多不過二故也.

592. 系五.

球面上之二點非對點,則過此二點之大圓有一無二.

593. 定理七.

(1) 球之大圓及小圓 Great & small circles of a sphere.

大圓等分球及球面.

【證】 以大圓直徑之一爲軸而以球之一部分旋轉一直平線角,使此大圓合於原位置,則因從中心至球面上一切點之距離皆等而此二部分之曲面可相合;故二部分爲合同.

594. 定義8. 極.[1]

過球之大圓或小圓中心而垂直於其面之直線名曰此圓之軸,[2]軸與球面之二交點曰此圓之極.[3]

球之大圓及小圓之軸過球之中心,各極爲其圓周等距之點.

問題

(1) 一球過二定點或三定點,求此球之中心之軌跡.

(2) 通過四面體頂點之球,有一無二.

【注意】 此球爲外接於四面體.

(3) 至二定點距離之比一定之點之軌跡爲球.

(4) 與二定點距離平方和爲一定不易之點之軌跡若何?

(5) 一球之半徑爲五寸,一小圓在離其中心三寸之處,則此小圓之面積若何?

595. 定義9. 球之切線及切平面.[4]

(1) 極 Pole. (2) 圓之軸 Axis of a circle. (3) 圓之極 Pole of a circle.
(4) 球之切線及切平面 Tangent line and tangent plane of a sphere.

直線或平面與球面僅共有一點,則日與球面相切,此直線及平面各爲球之切線及切平面. 二球僅共有一點,則日二球相切.

596. 定理八.

垂直於球半徑而過其端之平面切其球面.

597. 系一.

垂直於球半徑而過其端之直線切其球面.

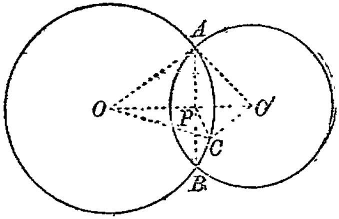
598. 系二.

切球面之直線及平面垂直於其切點之半徑.

因此半徑爲從中心至切線及切平面之最短線分故也.

599. 定理九.

二球面之交線(ABC)爲圓周,此圓之平面垂直於二球之公共中心線(OO′).



【證】 交線中之任意點爲C,則三角形OCO′因三邊之長一定而高CP之長亦一定,故P爲定點;由此C點恒在過P而垂直於OO′之平面中,且與P點之距離一定;

故交線ABC爲以P作中心之圓周.

600. 定理十.

共有公共中心線中一點之二球面相切.

【注意】 共有點在兩中心之間,則兩球面爲外切,否則爲內切.

601. 系.

相切二球面之切點在公共中心線上,且可於此點作公共之切平面.

問　題

(1) 從球面外一點向此球所引之切線皆相等,且其切點在同一之小圓上.

(2) 求切於二平面或三平面之球面中心之軌跡.

(3) 求與二定點各在已知距離之點之軌跡.

(4) 直徑四寸之球以每邊六寸之正三角形三邊托之,求此三角形之面與球最高點之距離.

602. 定理9. **球帶.[1]缺球.[2]**

在平行平面間球面之部分爲球帶.

二平面之距離爲球帶之高.

以小圓截球所得球之各部分曰缺球.

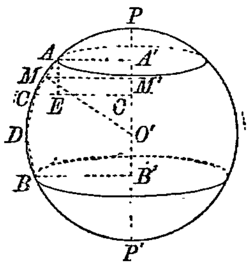
小圓爲缺球之底面,其極與底面之距離爲缺球之高.

(1) 球帶 Spherical zone.　　(2) 缺球 Zone of one base.

603. 定理十一.

球帶面積之度數,等於其高及大圓圓周兩度數之積.

【證】 以圓O(中心)之直徑PP′爲軸,旋轉弧ACB,則可得一球帶;



以弧AB在C,D等處分作若干等分,引弦AC,CD等,從O向弦AC引垂線OM,又A, M, C, P在PP′上之射影爲A′, M′, C′, B′,則A′B′爲球帶之高;

先求弦AC由旋轉所生曲面之面積:因此面爲圓錐臺之側面,故其面積爲

$$2\pi\, MM'\cdot AC;\qquad\text{(定理五系一)}$$

從A向CC′引垂線AE則三角形ACE, OMM′爲等角三角形,

故 $$AC:AE=OM:MM';$$

由此 $$MM'\cdot AC=OM\cdot AE;$$

而 $$AE=A'C',$$

故所求之面積爲

$$2\pi\, OM, A'C';$$

從此折線ACD…B由旋轉所生曲面之面積等於以OM作半徑之圓周及A′B′二者度數之積;

弧AB中分點之數無窮增加,則此折線之極限爲弧AB,OM之極限爲球之半徑,而如上所言曲面之極限爲球帶之面積;

故球帶之面積等於大圓之圓周及高A′B′二度數之積.

604. 系.

缺球之曲面可作球帶觀之．故其曲面積等於其高及大圓圓周之積．(此中各量後省去度數二字，嗣後皆然．)

605. 定理十二．

球之面積等於其直徑與大圓圓周之積．

因球面可視作直徑爲高之球帶故也．

606. 系一．

球之面積爲S，半徑爲R，則

$$S=4\pi R^2,$$

故球面等於大圓之四倍．

607. 系二．

球之面積等於其外接直圓壔之側面積．又等於其全面積之三分之二．

608. 定理十三．

球之體積等於其面積與半徑之積之三分之一．

【證】 在球面上取無數點兩兩相連作三角形，則可得一內接於此球之多面體，其各面皆爲三角形；

以此多面體之頂點連結球之中心，則此多面體可視作無數三角錐之和；

在球面上所取之點數無窮增加，則此多面體之體積無窮接近於球之體積，而其各面面積之和無窮接近於球之面積；

且作成此多面體之三角錐之高，無窮接近於球之半徑；

然三角錐之體積爲底與高之積之三分之一;
故球之體積等於球面積與半徑之積之三分之一.

609. 系一.

球之體積爲 V,則

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

610. 系二.

球之體積等於其外接直圓壔體積之三分之二.

問　題

(1) 求球半徑之垂直等分面所分球面二部分之比

(2) 球之直徑爲一尺,求其體積與其外接直圓壔體積之差.

(3) 球之外接直圓錐之高爲球直徑之二倍,則直圓錐之全面積等於球面積之二倍.

(4) 一直圓壔及一直圓錐,高與底半徑皆爲 a,又有一半球,半徑亦爲 a,今以壔居中,錐及半球附接於其兩端合成一個立體,此立體之體積及面積各如何?

(5) 有直角二等邊三角形ABC,以其直角頂點C爲中心CA爲半徑畫弧 AMB,再以AC爲軸而旋轉之,則弓形AMB由旋轉所生之體積若何?

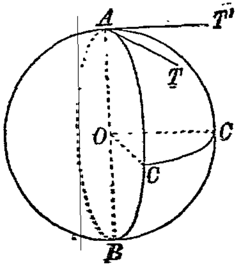
(6) 一正四面體,各稜長 a 尺,則其內接球及外接球之半徑各若何?

第四章　球面多角形

611. 定義10. 二圓周之交角.

二圓周相交,無論此兩圓周是否在同一平面中,於其交點所作各圓切線之交角爲二圓周於此交點之交角.

例如球之二個大圓弧 ACB 及 AC′B 之交角,爲在 A 所作各圓切線之交角 TAT′;故此角與此二個大圓弧之平面所夾之平面角有同一之度數.



【注意】 O 爲中心, AC, AC′ 爲象限弧,則 OC, OC′ 各與 AT, AT′ 平行,故

$\angle COC' = \angle TAT'$; 故弧 CC′ 與此二個大圓弧之交角有同度數.

612. 定義11. 球面多角形.[1]

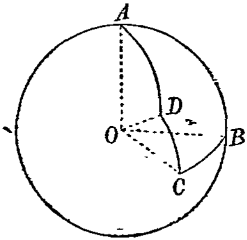
三個以上大圓弧所圍球面之部分曰球面多角形,其弧爲此多角形之邊弧間之角爲此多角形之角,弧之交點爲此多角形之頂點.

球面多角形因其邊數而別之爲球面三角形,[2]球面四角形等.

例如 ABCD 爲球面四角形.

【注意】 以球面多角形之頂點連結球之中心,則可得以此中心爲頂點之多面角.

(1) 球面多角形 Spherical polygon. (2) 球面三角形 Spherical triangle.



此多面角之面角與此多角形之邊有同一度數其稜角與此多角形之角有同一度數. 故從多面角之性質易於導得球面多角形之性質.

613. 定義12. 對稱球面多角形[1]及對頂球面多角形.

二個球面多角形邊及角互相等而其順序相反者曰對稱球面多角形.

二個球面多角形之頂點互為對點者曰對頂球面多角形.

614. 定理十四.

對頂球面多角形必對稱.

自此以下五個定理,皆可徑從多面角之性質得其證,學者自證之可也.

615. 定理十五.

球面三角形之二邊相等,則其對角亦必相等. 其倒定理亦眞確. (用五編定理三十一)

616. 定理十六.

二個對稱之二等邊球面三角形為合同形. (用五編定理三十一系)

(1) 對稱球面多角形 Symmetrical spherical polygons.

617. 定理十七.

對稱球面三角形必等積.

【略解】 過三頂點作小圓,從此小圓之極至三頂點引大圓弧,可得三個二等邊球面三角形.

618. 定理十八.

球面三角形三角之和比二直角大而比六直角小, (用五編定理三十四系)

619. 定義13. 球面過剩.[1]

球面三角形三角之和與二直角之差曰球面過剩.

620. 定理十九.

球面三角形之一邊比他二邊之和小.

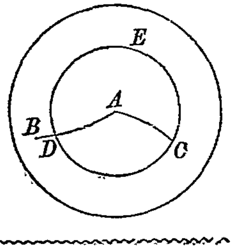
(用五編定理三十三)

621. 系.

球面多角形之一邊比他邊之差大.

622. 定理二十.

從球面上一點至他一點最短之途爲過此二點大圓之劣弧.



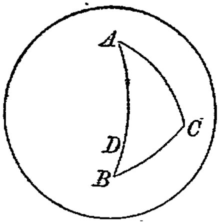
【證】 本題分二節證之:

(1) A,B,C 爲球面上之三點,令A,B間之大圓弧(指劣弧以下皆同)比A,C間之大圓弧大;然則在球面上自A至B最短之途可比自A至C最短之途大.

(1) 球面過剩 Syherical excess.

何則,試取A作中心而以從A至C最短之途沿球面旋轉,則C畫小圓或大圓之弧CDE,A與B分居此圓弧之兩旁,故從A至B最短之途無論其取若何形狀,必可與此弧交於一點D,而從A至C最短之途與從A至D最短之途其長可相等;故從A至B最短之途比從A至C最短之途長,所長者爲從D至B最短之途.

(II) 假定從A至B過大圓弧ADB外之一點C,截取大圓弧AD,等於大圓弧AC,則從A至D最短之途等於從A至C最短之途,且大圓弧DB<BC,故從D至B最短之途比從C至B最短之途小. 故從A至B而過大圓ADB外之一點C者其途徑不爲最短而尚有比其短之途徑在. 故從A至B最短之途不可不爲大圓弧ADB.



623. 定義14. 三直球面三角形.[1]

三角皆爲直角之球面三角形曰三直球面三角形.

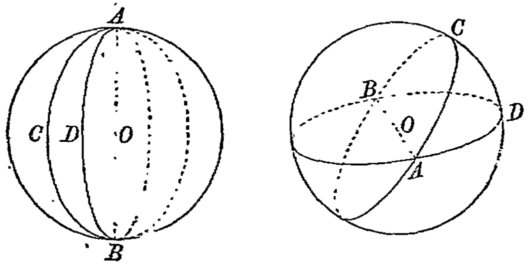
三直球面三角形之面積爲全球面之$\frac{1}{8}$,故其度數爲$\frac{1}{2}\pi R^2$. 故欲知任意球面三角形之面積,但須知其與三直球面三角形面積之比卽可. 今逐段說明求此比之方法於下:

624. 定義15. 月形.[2]

(1) 三直球三角形 Tri-rectangular spherical triangle. (2) 月形 Lune.

二大圓之半圓周所圍球面之部分曰月形. 二大圓之交角爲月形之角.

例如ACBDA爲月形,而二個大圓弧AC, AD之交角爲月形之角.



625. 定理二十一.

在同球或等球上,有等角之二個月形合同.

626. 系一.

在同球或等球上,二個月形之比等於其角之比.

627. 系二.

月形與球面之比等於其角與四直角之比.

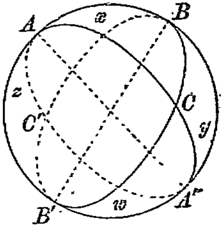
628. 系三.

月形之面積與其角之二倍有同一之匙數. 但以三直球面三角形作面積之單位,直

角作角之單位.

629. 定理二十二.

球面三角形之面積與其球面過剩有同一之度數. 但以三直球面三角形作面積之單位,直角作角之單位.



【證】 ABC 爲球面三角形,頂點之對點爲 A′, B′, C′, 在半球 ABA′B′C 上三角形 ABC, A′BC, AB′C, A′B′C 之度數各爲 x, y, z, w, 則

$$x+y=\text{月形 A}=2\text{A},$$

$$x+z=\text{月形 B}=2\text{B};$$

又對頂球面三角形 A′B′C, ABC′ 等積,故

$$x+w=\text{月形 C}=2\text{C},$$

故 $\qquad 2x+(x+y+z+w)=2(\text{A}+\text{B}+\text{C});$

然 $x+y+z+w$ 爲半球之度數,故等於 4;

由此 $\qquad x=\text{A}+\text{B}+\text{C}-2.$

630. 系.

球面多面形面積之度數爲 S, 邊數爲 n, 角之度數和爲 s, 則

$$\text{S}=\text{s}-2(\text{n}-2).$$

問　題

(1) 等分球面三角形三內角之大圓弧會於一點,等分一內角及二外角則如何?

(2) 球面菱形之對角線互相垂直.

(3) 在半徑一尺之球面上有球面三角形,三角之大各爲100°,120°,110°,其面積如何?

(4) 有球面四角形,其角各大120°,130°,140°,150°,而球之半徑爲五寸,其面積如何?

雜　題

(1) 與不共面三個平行直線等距之點之軌跡為何?

(2) 作一直線,令與三面角之三稜成等角.

(3) 求與三面角之三面等距之點之軌跡.

(4) 平行於拗捩四邊形二邊之平面分他二邊成比例.

(5) 拗捩四邊形四角之和比周角小.

(6) ABCD為折線而角BCD為直角,若AB垂直於平面BCD,則CD垂直於平面ABC.

(7) 數多平面之交線平行,則從任意一點向此等平面所下垂線之足在平面上.

(8) 過不共面二直線之公共垂線中點而平行於此二線之平面等分在此二線間之任意線分.

(9) 一直線交一平面而與此面內過其交點之三直線成等角,則此直線能否垂直於平面?

(10) 在所設直線中求一點,令自此至二定點距離平方之差一定.

(11) 一直線垂直於相交二平面之一,則其向他一平面上之射影垂直於二平面之交線.

(12) 一定直線與二定點不在同一平面中,在此直線中求一點,令自此點至二定點距離之和為最小,或距離之差為最大.

(13) 在三面角O—ABC內引線OD,則有次之關係:

(I) $\angle AOD+\angle BOD+\angle COD>\frac{1}{2}(\angle BOC+\angle COA+\angle AOB)$;

(II) $\angle AOD+\angle BOD<\angle AOC+\angle BOC$;

(III) $\angle AOD+\angle BOD+\angle COD<\angle BOC+\angle COA+\angle AOB$.

(14) 與直角三角形三頂點等距之點及斜邊之中點連結作直線,則此直線垂直於此三角形之平面.

(15) 平面中之直線與他平面成最大角,則此線垂直於此二平面之交線.

(16) 平行二線分之比等於其在任意平面上之射影之比.

(17) 諸平面為一點與諸平行線所決定,則此諸平面與任意平面之交線或會於一點,或平行.

(18) 一直線與平行於此平面中諸直線之最近距離相等.

又發見其特例.

(19) 一定長線分兩端各在不共面而互相直交之二直線上移動,則其中點必在定圓周上.

(20) 從任意一點O引平行於平面P之二直線OA,OB,再過O點作垂直於OA, OB之二平面則其交線垂直於平面P.

(21) 有動線,恒平行於所設平面,且交二定直線,則以其交點間線分分於定比之點之軌跡為何?

(22) 以平面截直三角面(三面角之三面兩兩垂直者),若自頂點至底面之稜長為 a, b, c,.則

$$底面之面積=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}.$$

(23) 以平面截直三角面,則其截面之垂心為頂點在此截面上之射影.

(24) A,B為二點,P,Q為二平面. 若自A至P,Q距離之和等於自B至P,Q距離之和,則從AB線中之任意點至P,Q之距離和一定.

(25) 有三定點,從各點至二定平面距離之和皆相等,

則從此三點所定平面中之任意點至此二平面距離之和亦一定不變.

(26) 含三面角各稜而垂直於其對面之三平面過同一直線.

(27) 在一平面中求合於下一條件之點之軌跡.

自軌跡中之點所引過此面外二定點之直線與此平面成等角.

(28) 角錐之側面積比底面積大.

(29) 以 a, b, c 表直方體三稜之長,則過對稜之截面面積爲 $a\sqrt{b^2+c^2}$, $b\sqrt{c^2+a^2}$, $c\sqrt{a^2+b^2}$.

又 $a>b>c$,則此三者中孰爲最大截面.

又不用數值而求最大截面.

(30) 四面體以平行於其二對稜之平面截之,則其截面爲平行四邊形,此截面當平面通過稜之中點時爲最大.

(31) 角錐以平行於其底面之平面截之,令其截面與底面之比等於已知之比.

(32) 四面體中六稜平方之和等於連結對稜中點所得三線分平方和之四倍.

(33) 任意四角墻中十二稜平方之和比四對角線平方之和大,所大者爲連結兩兩對角線公共中點所得線分平方之八倍.

(34) 連結四面體各頂點與對面重心之四線分交於一點,且各線分爲此點分於1:3之比.

【注意】 此點名曰四面體之重心.

(35) 過四面體各稜及對稜中點之平面皆過同一點.

(36) 若四面體中二雙對稜互相垂直,則他一雙對稜亦互相垂直,且從頂點向對面所下之四垂線會於一點.

(37) 含四面體各稜而垂直於對稜之六平面過同一點,又三雙對稜之公共垂線會於一點.

(38) 過四面體各稜中點而垂直於此稜之六平面過同一點.

(39) 過四面體各面之外心而垂直於各面之四直線會於一點.

(40) 三角錐之底面爲正三角形而在頂點之各面角均爲直角,則

(I) 三側稜皆相等;

(II) 高之平方等於側稜平方之$\frac{1}{3}$;

(III) 從底面中一點至三側面三垂線之和一定不變.

(41) 三角錐O—ABC頂點O之面角均爲直角,則

(I) 底面ABC爲銳角三角形.

(II) H爲頂點O在底面ABC上之射影,則△AOB爲△ABC及△HAB之比例中項.

(42) 角壔或角錐一截面中各邊與他截面中對應邊之交點在同直線上.

從此可推定下之定理:

二個三角形之頂點兩兩在三個會於一點之線中,或兩兩在三個平行線中,則對應邊之交點在一直線上.

(43) 一直線過四面體ABCD頂點A而與三面角A之三面成等角,此線與對面BCD之交點爲A′,則三角形A′BC, A′CD, A′DB之面積比例於ABC, ACD, ADB之面積.

(44) 過四面體二對稜中點之平面以他二對稜分於

比例.

(45) 四面體二對稜 AB, CD 之中點為 E, F, 過此二點之平面與他二稜之交點為 G, H, 則直線 EF 等分 GH.

(46) 過四面體二對稜中點之平面等分本體.

(47) 作平面截立方體,令截面為正六邊形.

(48) 在四面體內求一點,令含此點及各稜之六平面分本體為四等分.

(49) 四面體 ABCD 其之一點為 O, AO, BO, CO, DO 與面之交點各為 A′, B′, C′, D′, 則

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

(50) 從四面體 ABCD 底面 BCD 內一點 O 引平行於 AB, AC, AD 之直線,與側面會於 B′, C′, D′, 則

$$\frac{OB'}{AB}+\frac{OC'}{AC}+\frac{OD'}{AD}=1.$$

(51) 作平行面體,令其三稜在三定直線上.

(52) 有直方體,其體積為 V, 而其三稜比例於三數 a, b, c, 求三稜之長.

(53) 角壔之直截面比他截面小.

(54) 從四面體重心至不截此體一平面之距離等於從四頂點至此平面距離和之四分之一.

更就截此體之平面考察之.

(55) 作過定直線之平面,令等分所設平行面體.

(56) 求過定點而等分所設四面體之平面之位置.

(57) 求平行於定直線而等分所設四面體之平面之位置.

(58) 有等行積之諸直方體中,立方體之體積為最大.

(59) 立方體之對角線長35尺,求其全面積及體積.

(60) 定長線分之兩端移動於球面之上,則其中點之軌跡如何?

(61) 視所設二球或三球得等視角之點之軌跡爲何?

(62) 從球之小圓至其極之大圓弧之長爲象限三分之一,則其小圓之半徑等於球半徑之二分之一.

(63) 視所設二線分得視角爲直角之點之軌跡爲何?

(64) 三個球面相交,則其公共之二點關於過三球中心之平面爲對稱點.

(65) 一球截二定球,其截面恒爲二定球之大圓周,則此一球中心之軌跡爲何?

(66) 從定點O向定平面引任意線分OA,分之於B點,令矩形OA·OB一定不變,則B點之軌跡爲何?

(67) 缺球之曲面積等於從其底面之小圓周至其極之距離上平方倍以π之積.

(68) 球外接直圓壔之全面積與此球面積之比若何?又其體積之比若何?

(69) 求球外接立方體之體積與此球體積之比.

(70) 以半徑r之球分爲二個缺球面,若其大部爲小部與全球面之比例中項,則從球心至截面之距離若何?

(71) 等半徑二球外接多面體體積之比等於其全面積之比.

(72) 二個等側面積直圓壔體積之比如何?

(73) 二個等體積直圓壔側面積之比如何?

(74) 以矩形之二隣邊爲軸各旋轉一周,其所生兩圓壔之體積爲a立方尺及b立方尺,則此矩形對角線之長若何?

(75) 已知直圓壔之高及全面積,求其底面之半徑.

(76) 直圓壔以平行於底面之平面截之,令其側面二部分之比例中項等於截面.

(77) 有一三角形,以其面上過一頂點而不入形內之直線爲軸旋轉之,由此所生立體之體積等於以對此頂點之邊爲軸旋轉所生曲面積與對應於此之高二箇數積之三分之一.

(78) 直圓壔之側面積等於以其高及底面直徑之比例中項爲半徑所作圓之面積.

(79) 球扇形(半圓內之扇形旋轉於其直徑周圍所生之立體)之體積等於其底面上球帶等面積與球之半徑二箇數積之三分之一.

(80) AB 爲半圓 CABD 弧之一部,弦 AB 在直徑 CD 上之射影爲 A′B′,則以 CD 爲軸旋轉弓形 AB 所生立體之體積爲

$$\frac{\pi}{6}\times\overline{AB}^2\times A'B'.$$

(81) 缺球之體積爲

$$V=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r^2),$$

但 r 爲底面之半徑,h 爲其高.

又 R 爲球之半徑,則

$$V=\pi h^2(R-\frac{1}{3}h).$$

(82) 球分(在平行面間所夾球之部分)之體積爲

$$V=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r^2+3r'^2),$$

但 r, r' 爲其兩底面之半徑而 h 爲其距離(即高).

(83) 直圓錐及直圓壔之底面均等於球之大圓,則圓

錐,球,圓壔之體積比例於 1, 2, 3 三數. 但錐及壔之高均等於球之直徑.

(84) 證下之定理:

(I) 球內接等邊圓壔之全面積為球面積與內接等邊圓錐全面積之比例中項,體積亦然.

(II) 球外接等邊圓壔之全面積為球面積與外接等邊圓錐全面積之比例中項,體積亦然.

【註】 等邊圓錐,謂過其軸之截面為正方形之直圓壔.

等邊圓錐,謂過其軸之截面為正三角形之直圓錐.

(85) 求過球面上非對點二定點 A, B 作大圓弧.

(86) 求過球面上定點 A 而垂直於所設大圓弧 BC 作大圓弧.

(87) 於球面上作一垂直等分所設大圓弧之大圓弧.

(88) 求過球面上三定點之小圓之極.

(89) 作過所設直線而切所設球之平面.

(90) 求與三定點各在已知距離之點.

(91) 作一過定直線而截所設球之平面,令其截面之半徑等於已知之長.

(92) 約算地球之面積.

【解】 地球之大圓周為四萬粁,故其直徑為$\frac{40000}{\pi}$粁,由此其面積為$\pi\left(\frac{40000}{\pi}\right)^2$平方粁,即 50929 萬平方粁.

(93) 約計地球之體積.

(94) 月之半徑殆為地球半徑之$\frac{31}{114}$,則其體積之比

約為$\frac{1}{49}$,證之.

(95) 等邊圓錐底面之半徑為2.5寸,則其內接球之體積若何?

(96) 球之體積為V,內接正六面體之稜為a,則$V=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$,證之.

(終)

升學預備

幾何學問題解法指導

代數問題解法指導

算術問題解法指

匡文濤編

本書就算術、何、立體……預備升學自……饒與……

516
220

高級幾何学

半(511)

民國十四年五月發行
民國十五年五月五版

新中學教科書 高級幾何學（全一冊）

【定價銀一元六角】

（外埠酌加郵匯費）

編者　無錫胡敦復　武進吳在淵
校者　無錫胡明復
發行者　中華書局
印刷者　中華書局
印刷所　上海靜安寺路二七七號　中華書局
總發行所　上海棋盤街　中華書局
分發行所　北京　天津　保定　家口　濟南　青島　太原　開封　鄭州　西安　蘭州　南京　徐州　杭州　蘭溪　安慶　蕪湖　南昌　九江　漢口　武昌　沙市　長沙　衡州　常德　成都　重慶　福州　廈門　廣州　潮州　汕頭　雲南　貴陽　奉天　吉林　哈爾濱　新加坡　中華書局