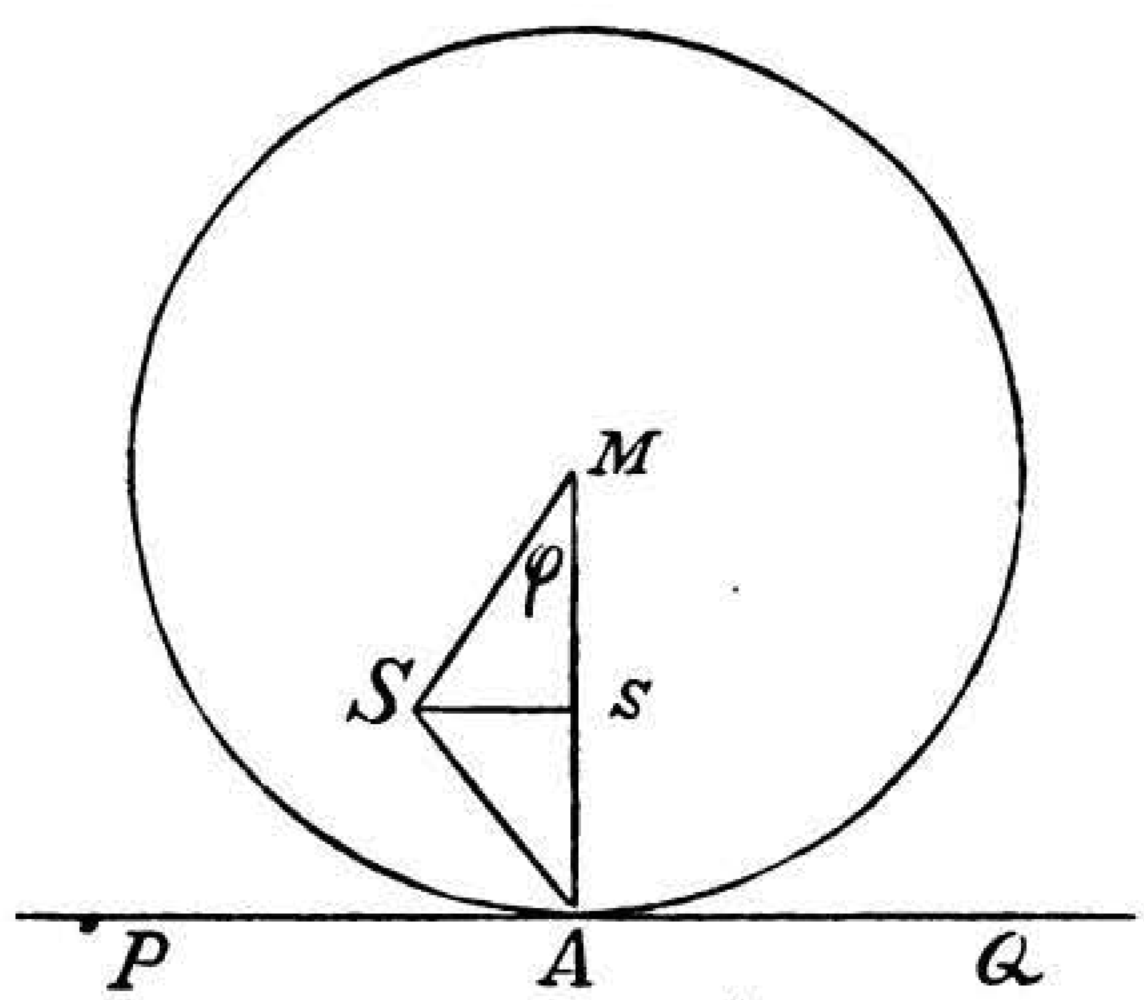
KLEINERE MEDEDEELINGEN.

PRIJSVRAAG N°. 12.

Opgelost door H. A. LORENTZ.

Op een horizontaal vlak ligt een massieve rechte cirkelvormige cylinder. Zoo nu het zwaartepunt van dien cylinder zich ergens buiten de as van het lichaam, en ook op eenig oogenblik niet verticaal onder die as bevindt, moet door de werking der zwaartekracht de cylinder eene rollend schommelende beweging aannemen. Bijaldien dan ondersteld wordt, dat deze schommelingen oneindig klein zijn, en dat er geen rollende wrijving bestaat, is de vraag: den tijd te bepalen, waarin elke schommeling volbracht wordt.



De bijgaande figuur stelt ons een doorsnede voor van den cylinder met een vlak, door het zwaartepunt S loodrecht op de as gebracht. Dit vlak snijdt de as in M; het horizontale vlak, waarop de cilinder steunt, volgens de lijn PQ; en de beschrijvende lijn, waarmede het lichaam daarop ligt, in A. Wij stellen nu den straal des cilinders $MA = R$, den afstand van het zwaartepunt tot de as $MS = r$, en den hoek $AMS = \varphi$. Dezen hoek rekenen wij positief of negatief, al naarmate S aan de eene of aan de andere zijde van MA valt.

Wij onderstellen verder dat de stof in den cilinder zoodanig verdeeld is, dat op een lijn, evenwijdig aan de as getrokken, de dichtheid in alle punten dezelfde is.

Dan is het vlak der figuur een vlak van symmetrie; en men kan hieruit afleiden, dat een der hoofdassen van S evenwijdig aan de as moet loopen. Noem nu den traagheidsstraal ten opzichte van die as k, en de massa des cilinders M.

Wij zullen nu het vraagstuk voor de volgende twee gevallen oplossen.

1. Er bestaat niet alleen geen rollende, maar ook geen slepende wrijving.
2. Er bestaat wel slepende wrijving.

I.

Wanneer geenerlei wrijving de beweging belemmert, zijn wij in staat, in elken stand van het lichaam de oogenblikkelijke as van wenteling aan te geven. Daartoe merken wij in de eerste plaats op, dat de eenige krachten, die op het lichaam werken, nl. de zwaartekracht en de weerstand van het horizontale vlak, verticaal gericht zijn.

Daar nu is opgegeven, dat het lichaam aanvankelijk in rust was, volgt hieruit, dat het zwaartepunt geen andere dan een verticale beweging kan hebben.

Derhalve bestaat de beweging van het lichaam op elk oogenblik uit een verticale verschuiving, verbonden met een wenteling om een as C, die door het zwaartepunt gaat. Nu is echter door de omstandigheid, dat het lichaam het horizontale vlak moet blijven aanraken, elke wenteling om een as, evenwijdig aan PQ, uitgesloten. Daaruit volgt, dat de as C noodzakelijk PQ loodrecht kruisen moet; m. a. w. zij moet liggen in het verticale vlak V, door S evenwijdig aan de as gebracht. Brengen wij door het punt, waarin de as C de centraalellipsoïde snijdt, een raakvlak W aan die ellipsoïde, dan moet dit het vlak zijn van het koppel, dat ontstaat bij de overbrenging der momentaan krachten (hoeveelheden van beweging) naar S; zooals het bekende verband tusschen de as van wenteling en het bedoelde koppel ons leert. Daar nu de werkende krachten bij hare overbrenging naar S steeds een koppel opleveren in een verticaal vlak gelegen, moet dit ook het geval zijn met het genoemde koppel der momentaan krachten, daar toch aanvankelijk het lichaam in rust was. Derhalve moet het vlak W verticaal zijn.

Wij zien dus, dat de as C die middellijn van de centraal-ellipsoïde is, die ligt in het vlak V en de eigenschap heeft, dat zij geconjugeerd is met een verticaal vlak. Nu heeft de centraal-ellipsoïde een hoofdas evenwijdig aan de horizontale as van den cilinder. Daaruit kan men afleiden, dat de as C, die aan de opgegeven voorwaarden voldoet, die hoofdas is; m. a. w. de as C loopt evenwijdig aan de as des cilinders.

In plaats van de wenteling om deze as en de verticale verschuiving, mag men ook een enkele wenteling stellen om een as, evenwijdig aan C en met deze in hetzelfde horizontale vlak gelegen. Uitsluitend een wenteling kan het lichaam echter alleen hebben om een lijn in het verticale vlak, dat door de as gaat; anders zou het niet het horizontale vlak blijven aanraken. Hieruit vinden wij dat, wanneer wij Ss loodrecht op MA trekken, het lichaam moet wentelen om de lijn, door s evenwijdig aan de as getrokken.

Nu wij voor elken stand van het lichaam de as van wenteling kunnen aangeven, is de beweging in zooverre bepaald, dat wij voor elk punt de baan kunnen vinden. Om tot de kennis te komen van de snelheid, waarmeê de beweging geschiedt, maken wij gebruik van het beginsel, dat de vermeerdering, die de levende kracht van het lichaam gedurende zekeren tijd ondergaat, gelijk is aan den arbeid, door de werkende krachten gedurende dien tijd verricht. Daarbij behoeven wij hier alleen den arbeid der zwaartekracht, die gevonden wordt door het gewicht met de daling van het zwaartepunt te vermenigvuldigen, in rekening te brengen. Immers daar de bewegingsrichting van de punten, waarmeê de cilinder het horizontale vlak aanraakt, steeds horizontaal is, is de arbeid van den verticalen weerstand van dat vlak gelijk 0. Zij nu ω de hoeksnelheid en k' de traagheidsstraal ten opzichte der as s; dan is, zooals men weet, de levende kracht $= \frac{1}{2} Mk'^2 \omega^2$; dus, daar

$$k'^2 = k^2 + Ss^2 = k^2 + r^2 \, Sin^2 \phi$$

is, de levende kracht

$$\tfrac{1}{2} M (k^2 + r^2 \, Sin^2 \phi)\, \omega^2 = \tfrac{1}{2} M (k^2 + r^2 \, Sin^2 \phi) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2.$$

Dit moet gelijk zijn aan den arbeid der zwaartekracht sedert het oogenblik, waarop het lichaam in rust was. Was op dat oogenblik α de waarde van ϕ, dan vindt men gemakkelijk dat de daling van het zwaartepunt sedert dien tijd bedraagt $r\,(Cos\, \phi - Cos\, \alpha)$, dus de arbeid der zwaartekracht $Mgr\,(Cos\, \phi - Cos\, \alpha)$. Wij hebben dus, na deeling door $\frac{1}{2} M$,

$$(k^2 + r^2 \, Sin^2 \phi)\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 2gr\,(Cos\,\phi - Cos\,\alpha)\,. \quad . \quad . \quad (1)$$

Uit deze vergelijking is het karakter der beweging af te leiden. Wij zien er n.l. uit, dat ω of $\frac{d\phi}{dt}$ de grootste waarde verkrijgt voor $\phi = 0$, dus voor den evenwichtsstand; dat verder voor twee standen, die aan weerszijden evenveel daarvan afwijken, waarvoor dus ϕ gelijke waarden met tegengestelde teekens heeft, ω de zelfde waarde heeft; terwijl voor $\phi = +\alpha$ of $\phi = -\alpha$, $\omega = 0$ wordt. Voor waarden van $\phi > \alpha$ vindt men geen werkelijke waarde voor ω. Hiermede zijn de schommelingen van het lichaam aangegeven, waarbij de hoek ϕ tusschen $+\alpha$ en $-\alpha$ heen en weer gaat.

Uit (1) kan men nu afleiden

$$t = \frac{1}{\sqrt{2gr}} \int \sqrt{\frac{k^2 + r^2 \, Sin^2 \phi}{Cos\,\phi - Cos\,\alpha}}.d\phi\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dus voor den duur eener schommeling

$$T = \frac{4}{\sqrt{2gr}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{k^2 + r^2 \, Sin^2 \phi}{Cos\,\phi - Cos\,\alpha}}\, d\phi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Om te vinden, wat dit voor oneindig kleine schommelingen wordt, stellen wij hierin vooreerst $\phi = 2\psi$. Dit geeft

$$T = \frac{4}{\sqrt{gr}} \int_0^{\frac{1}{2}\alpha} \sqrt{\frac{k^2 + 4r^2 \, Sin^2 \psi - 4r^2 \, Sin^4 \psi}{Sin^2 \frac{1}{2}\alpha - Sin^2 \psi}}\, d\psi.$$

Wij voeren nu de nieuwe veranderlijke χ in, met ψ verbonden door de betrekking $Sin\,\psi = Sin\,\frac{1}{2}\alpha.Sin\,\chi$, waaruit volgt

$$Cos\,\psi\, d\psi = Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha.Cos\,\chi\, d\chi\,,$$

$$d\psi = \frac{Sin\,\frac{1}{2}\alpha.Cos\,\chi}{Cos\,\psi}\, d\chi = \frac{Sin\,\frac{1}{2}\alpha.Cos\,\chi}{\sqrt{1 - Sin^2\,\frac{1}{2}\alpha.Sin^2\,\chi}}\, d\chi\,;$$

terwijl voor $\psi = 0$ $\chi = 0$ en voor $\psi = \frac{1}{2}\alpha$, $\chi = \frac{1}{2}\pi$ wordt. Wij verkrijgen hierdoor

$$T = \frac{4}{\sqrt{gr}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\frac{k^2 + 4r^2 \, Sin^2 \frac{1}{2}\alpha.Sin^2 \chi - 4r^2 \, Sin^4 \frac{1}{2}\alpha.Sin^4 \chi}{1 - Sin^2 \frac{1}{2}\alpha.Sin^2 \chi}}\, d\chi.$$

Wordt nu α oneindig klein, dan vinden wij voor den duur eener oneindig kleine schommeling

$$T = \frac{4}{\sqrt{gr}}\, k \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\chi = \frac{2\pi k}{\sqrt{gr}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

II.

Onderstellen wij nu ten tweede, dat er wel slepende wrijving bestaat, en dat deze juist het vermogen heeft een voortschuiving van de beschrijvende lijn, waarmeê de cilinder het horizontale vlak aanraakt, te verhinderen. Dan rolt de cilinder eenvoudig over dat vlak, en de as van wenteling is juist de genoemde beschrijvende lijn. Den tijd noodig voor een schommeling vinden wij ook hier door het beginsel der levende kracht. Daarbij is weer alleen de zwaartekracht in rekening te brengen want, ofschoon wij een nieuwe kracht in de wrijving aantreffen, de arbeid dezer kracht is gelijk 0; daar de punten, waar zij aangrijpt, op de as van wenteling liggen.

Voor de levende kracht vindt men nu

$$\tfrac{1}{2}M(k^2 + SA^2)\,\omega^2$$

of

$$\tfrac{1}{2}M(k^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\,Cos\,\phi)\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2;$$

waaruit even als boven volgt

$$(k^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\,Cos\,\phi)\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 2gr\,(Cos\,\phi - Cos\,\alpha). \quad (5)$$

Hieruit blijkt weer even als vroeger de aard der beweging. Wij hebben verder

$$t = \frac{1}{\sqrt{2gr}}\int\sqrt{\frac{k^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\,Cos\,\phi}{Cos\,\phi - Cos\,\alpha}}\,d\phi \;.\;.\;.\; (6)$$

en dus voor den duur eener schommeling

$$T = \frac{4}{\sqrt{2gr}}\int_0^{\alpha}\sqrt{\frac{k^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\,Cos\,\phi}{Cos\,\phi - Cos\,\alpha}}\,d\phi \;.\;.\;.\; (7)$$

Wij transformeeren deze integraal door dezelfde substitutiën als de integraal (3), en vinden daardoor vooreerst

$$T = \frac{4}{\sqrt{gr}}\int_0^{\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{\frac{k^2 + (R-r)^2 + 4Rr\,Sin^2\,\psi}{Sin^2\,\frac{1}{2}\alpha - Sin^2\,\psi}}\,d\psi,$$

en vervolgens:

$$T = \frac{4}{\sqrt{gr}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\frac{k^2 + (R-r)^2 + 4Rr\,Sin^2\,\frac{1}{2}\alpha.Sin^2\,\chi}{1 - Sin^2\,\frac{1}{2}\alpha.Sin^2\,\chi}}\,d\chi.$$

Hieruit volgt ten slotte voor den duur eener oneindig kleine schommeling

$$T = \frac{4}{\sqrt{gr}}.\sqrt{k^2 + (R-r)^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\chi,$$

of

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + (R-r)^2}{gr}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (8)$$