

## Bündel, Garben und Kohomologie

### Arbeitsblatt 26

AUFGABE 26.1. Definiere eine Garbe auf  $\text{Spek}(\mathbb{Z})$  mit nichttriviale erster Kohomologie.

AUFGABE 26.2. Es sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes  $X$  und sei  $\mathcal{G}$  eine Garbe von kommutativen Gruppen auf  $X$ . Zeige

$$\check{H}^0(U_i, i \in I, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{G}).$$

AUFGABE 26.3. Es sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes  $X$  und sei  $\mathcal{G}$  eine Garbe von kommutativen Gruppen auf  $X$ . Es sei  $s \in \check{C}^k(U_i, \mathcal{G})$  ein Čech-Kozykel, der für ein bestimmtes  $J = \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$  den Wert  $a \in \Gamma(U_J, \mathcal{G})$  und für alle anderen  $(k+1)$ -elementigen Teilmengen  $J' \neq J$  den Wert 0 besitzt. Bestimme  $\delta(s) \in \check{C}^{k+1}(U_i, \mathcal{G})$ .

AUFGABE 26.4. Es sei  $K$  ein Körper und  $\mathbb{P}_K^1 = \text{Proj}(K[X, Y])$  die projektive Gerade über  $K$ . Bestimme die erste Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(D_+(X), D_+(Y), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}^\times).$$

Welche Beziehung besteht zu Beispiel 26.1?

AUFGABE 26.5. Zeige, dass die Zuordnung aus dem Beweis zu Lemma 26.8, die einem Schnitt  $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$  eine Čech-Kohomologiekategorie zu  $\mathcal{F}$  zuordnet, unabhängig von den gewählten lokalen Repräsentanten in  $\mathcal{I}$  und ein Gruppenhomomorphismus ist.

AUFGABE 26.6. Es sei  $X$  ein irreduzibler topologischer Raum und sei  $\mathcal{G}$  die konstante Garbe zur kommutativen Gruppe  $G$ . Bestimme den Čech-Komplex und die Čech-Kohomologien zu  $\mathcal{G}$  zu einer endlichen offenen Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ .

AUFGABE 26.7. Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein beringter Raum,  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Zeige, dass der Čech-Komplex zu  $\mathcal{F}$  zur gegebenen Überdeckung ein Komplex von  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -Moduln ist und dass folglich die Čech-Kohomologien ebenfalls  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -Moduln sind.

AUFGABE 26.8. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring,  $X = \text{Spek}(R) = D(f) \cup D(g)$  mit  $f, g \in R$ . Zeige

$$\check{H}^1(\{D(f), D(g)\}, \mathcal{O}_X) = 0.$$

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3