**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2019/2020**

# Bündel, Garben und Kohomologie

## Arbeitsblatt 26

Aufgabe 26.1. Definiere eine Garbe auf Spek$(\mathbb{Z})$ mit nichttrivaler erster Kohomologie.

Aufgabe 26.2. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes $X$ und sei $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf $X$. Zeige

$$\check{H}^0(U_i, i \in I, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{G}).$$

Aufgabe 26.3. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes $X$ und sei $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf $X$. Es sei $s \in \check{C}^k(U_i, \mathcal{G})$ ein ?ech-Kozykel, der für ein bestimmtes $J = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \subseteq I$ den Wert $a \in \Gamma(U_J, \mathcal{G})$ und für alle anderen $(k+1)$-elementigen Teilmengen $J' \neq J$ den Wert 0 besitzt. Bestimme $\delta(s) \in \check{C}^{k+1}(U_i, \mathcal{G})$.

Aufgabe 26.4. Es sei $K$ ein Körper und $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X, Y])$ die projektive Gerade über $K$. Bestimme die erste Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(D_+(X), D_+(Y), \mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^1_K}).$$

Welche Beziehung besteht zu Beispiel 26.1?

Aufgabe 26.5. Zeige, dass die Zuordnung aus dem Beweis zu Lemma 26.8, die einem Schnitt $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ eine Čech-Kohomologieklasse zu $\mathcal{F}$ zuordnet, unabhängig von den gewählten lokalen Repräsentanten in $\mathcal{I}$ und ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 26.6. Es sei $X$ ein irreduzibler topologischer Raum und sei $\mathcal{G}$ die konstante Garbe zur kommutativen Gruppe $G$. Bestimme den Čech-Komplex und die Čech-Kohomologien zu $\mathcal{G}$ zu einer endlichen offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Aufgabe 26.7. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeige, dass der Čech-Komplex zu $\mathcal{F}$ zur gegebenen Überdeckung ein Komplex von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln ist und dass folglich die Čech-Kohomologien ebenfalls $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln sind.

Aufgabe 26.8. Es sei $R$ ein kommutativer Ring, $X = \operatorname{Spek}(R) = D(f) \cup D(g)$ mit $f, g \in R$. Zeige

$$\check{H}^1(\{D(f), D(g)\}, \mathcal{O}_X) = 0.$$

# Abbildungsverzeichnis