Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

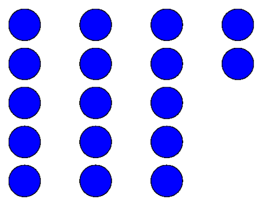
Arbeitsblatt 14

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 14.1. Bestimme den Rest von 123456789 bei Division durch 7.

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.2. Bringe die Division mit Rest damit in Verbindung, wie man Zahlen als Kästchen in Blöcken konfigurieren kann.



Aufgabe 14.3. Es seien n, d natürliche Zahlen mit $d \geq 1$. Zeige, dass d genau dann ein Teiler von n ist, wenn bei der Division mit Rest von n durch d der Rest gleich 0 ist.

Aufgabe 14.4. Es seien $q, d, s \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$ und $n = qd + s$. Zeige, dass der Rest von n bei Division durch d gleich dem Rest von s bei Division durch d ist.

Aufgabe 14.5. Sei d eine positive natürliche Zahl. Es seien a, b natürliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch d. Zeige, dass der Rest von $a + b$ bei Division durch d gleich dem Rest von $r + s$ bei Division durch d ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

Für die folgenden Aufgaben vergleiche man Aufgabe 14.5 und Beispiel 11.4.

Aufgabe 14.6. Erstelle Verknüpfungstabellen, die das Verhalten der Reste bei der Division durch 3 bei der Addition und der Multiplikation wiedergeben.

Aufgabe 14.7. Erstelle Verknüpfungstabellen, die das Verhalten der Reste bei der Division durch 4 bei der Addition und der Multiplikation wiedergeben.

Aufgabe 14.8. Sei $d \geq 2$ eine natürliche Zahl. In welcher Beziehung stehen die Verknüpfungstabellen, die das Verhalten der Reste bei der Division durch d bei der Addition und der Multiplikation wiedergeben, zum kleinen Einsundeins und zum kleinen Einmaleins im d-System?

Aufgabe 14.9. Es seien $a, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$. Zeige, dass bei Division mit Rest durch d aller Potenzen von a (also $a^0, a^1, a^2, \ldots$) schließlich eine Periodizität eintreten muss. Es gibt also $i < j$ derart, dass sich die Reste von $a^i, a^{i+1}, a^{i+2}, \ldots, a^{j-2}, a^{j-1}$ bei den folgenden Potenzen periodisch (oder „zyklisch") wiederholen (insbesondere besitzen also a^i und a^j den gleichen Rest). Zeige ebenfalls, dass diese Periodizität nicht bei $a^0 = 1$ anfangen muss.

Aufgabe 14.10. Es seien a und d teilerfremde ganze Zahlen. Zeige, dass es eine Potenz a^i mit $i \geq 1$ gibt, deren Rest bei Division durch d gleich 1 ist.

Aufgabe 14.11. Begründe die Eindeutigkeit der Ziffernentwicklung im Zehnersystem mit Hilfe der Eindeutigkeit bei der Division mit Rest.

Aufgabe 14.12. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann gerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $0, 2, 4, 6$ oder 8 ist.

Aufgabe 14.13. Zeige, dass eine positive natürliche Zahl genau dann von 10^k geteilt wird, wenn sie in der Dezimaldarstellung mit mindestens k Nullen endet.

Aufgabe 14.14. Finde die Primfaktorzerlegung der Zahlen

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ 111111\,.$$

Aufgabe 14.15. Betrachte im Zehnersystem die Zahl

$$473\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Dualsystem aus?

Aufgabe 14.16. Bestimme für die im Zehnersystem gegebene Zahl 300 die Ziffernentwicklung im Dreiersystem.

Aufgabe 14.17. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$5E6BB\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Zehnersystem aus?

Aufgabe 14.18. Bestimme für die als Strichfolge gegebene natürliche Zahl

$$n = ||||||||||||$$

für jede mögliche Basis $g = 2, 3, \ldots$ die Zifferndarstellung. Ab welchem g ist die Zifferndarstellung einstellig?

Aufgabe 14.19. Zeige, dass es für jede natürliche Zahl n nur endlich viele Basen $g = 2, 3, \ldots$ gibt, für die die Zifferndarstellung von n nicht einstellig ist.

Aufgabe 14.20. Inwiefern kann man das Strichsystem als Einersystem auffassen, inwiefern nicht?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.21. (2 Punkte)

Erstelle Verknüpfungstabellen, die das Verhalten der Reste bei der Division durch 5 bei der Addition und der Multiplikation wiedergeben.

Aufgabe 14.22. (4 Punkte)

Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die modulo 4 den Rest 3 besitzen.

Aufgabe 14.23. (6 (2+4) Punkte)

Zu einer natürlichen Zahl n sei $\psi(n)$ gleich der Summe aller Reste, die bei der Division von n durch die Zahlen $d = 1, 2, \ldots, n$ auftreten.

(1) Berechne $\psi(n)$ für die Zahlen $n = 1, 2, \ldots, 10$.
(2) Zeige, dass für $n \geq 7$ stets
$$\psi(n) \geq n$$
gilt.

Aufgabe 14.24. (2 Punkte)

Bestimme für die im Zehnersystem gegebene Zahl 626 die Ziffernentwicklung im Fünfersystem.

Aufgabe 14.25. (3 Punkte)

Bestimme für die im Vierersystem gegebene Zahl 321002 die Ziffernentwicklung im Zehnersystem.

Abbildungsverzeichnis