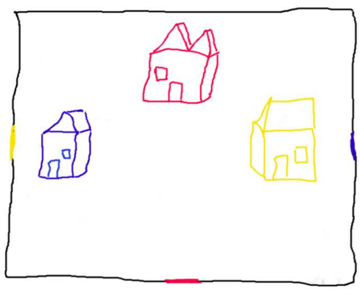
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 37

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 37.1. Lege in der Skizze für die drei Häuser überschneidungsfrei Wege zu den zugehörigen gleichfarbigen Gartentoren an.



Übungsaufgaben

Aufgabe 37.2. Finden Sie in Ihrem Alltagsleben möglichst viele Relationen. (Suchen Sie auch in Ihrem (Zweit-)Studienfach.)

Aufgabe 37.3. Beim Speeddating treffen sich n Frauen und n Männer und jede Frau plaudert mit jedem Mann fünf Minuten lang. Danach schreibt jede Frau auf einen Zettel, welche Männer sie wiedersehen möchte, und ebenso schreibt jeder Mann auf einen Zettel, welche Frauen er wiedersehen möchte. Die Moderatorin sammelt die Zettel ein und erstellt daraus eine Liste von Paaren, bei denen sich beide wiedersehen wollen. Beschreibe diese Situation mit Relationen.

Aufgabe 37.4. Wir betrachten zu der Flussmenge

$$F = \{\text{Rhein}, \text{Weser}, \text{Donau}, \text{Tiber}, \text{Themse}, \text{Nil}\}$$

und zu der Ländermenge

$$L = \{\text{Deutschland}, \text{Niederlande}, \text{Schweiz}, \text{Frankreich}, \text{Italien}, \text{Österreich}, \text{Ungarn}, \text{Uganda}\}$$

die Relation „fließt durch dieses Land".

(1) Beschreibe diese Relation durch eine Tabelle.
(2) Beschreibe diese Relation durch ein Verbindungsdiagramm.
(3) Beschreibe diese Relation durch Auflistung der zugehörigen Paare.
(4) Bestimme die Faser zum Rhein bezüglich dieser Relation.
(5) Bestimme die Faser zur Donau bezüglich dieser Relation.
(6) Bestimme die Faser zu Deutschland bezüglich dieser Relation.
(7) Untersuche die Begriffe Links- und Rechtseindeutigkeit, Links- und Rechtsvollständigkeit für diese Relation.

Aufgabe 37.5. Bestimme, ob die durch die Relationstabelle

	A	B	C
A		x	x
B	x	x	
C	x	x	x

beschriebene Relation auf der Menge $\{A, B, C\}$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch ist.

Aufgabe 37.6.*

Anna-Lena, Marie-Simone, Hans-Peter und Fritz-Franz gehen zur Farbberatung. Es ergibt sich folgende Empfehlung. Anna-Lena stehen die Farben grün, gelb und pink, Marie-Simone steht gelb und feuerrot, Hans-Peter steht grün, grau und graublau, Fritz-Franz stehen alle bisher genannten Farben außer graublau, dafür zusätzlich noch violett. Es sei P die Menge der vier Personen und F die Menge der erwähnten Farben zuzüglich blau.

(1) Erstelle eine Tabelle und ein Verbindungsdiagramm, die die Relation aus Personen und Farben wiedergibt.
(2) Bestimme die Fasern zu blau, zu grün und zu Marie-Simone.

Aufgabe 37.7. Es sei S die Menge der Städte und A die Menge der Autobahnen und $L \subseteq S \times A$ die in Beispiel 37.3 beschriebene Relation.

Beschreibe formal die Menge T derjenigen Städte, die an mindestens einer Autobahn liegen.

Beschreibe formal die Menge U derjenigen Städte, die an mindestens zwei Autobahnen liegen.

Interpretiere die Aussage

$$\forall s_1 \forall s_2 \exists a (s_1 La \wedge s_2 La) \,,$$

wobei s_1 und s_2 aus T seien. Ist die Aussage wahr?

Formuliere formal die Aussage, dass zwei Städte stets durch maximal zwei Autobahnen miteinander verbunden sind (man darf annehmen, dass jedes Autobahnkreuz an mindestens einer Stadt liegt).

Aufgabe 37.8. Skizziere den Graphen der Addition

$$+ \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ (x,y) \longmapsto x+y.$$

Aufgabe 37.9. Skizziere den Graphen der Multiplikation

$$\cdot \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ (x,y) \longmapsto x \cdot y.$$

Aufgabe 37.10. Wir betrachten in $\mathbb{Q}^2$ die Punkte $P = (0,0)$, $Q = (0,1)$, $R = (2,3)$ und $S = (6,7)$ und die Geraden $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die x-Achse, die y-Achse und die durch die Gleichung $-4x + 3y = 1$ gegebene Gerade H. Beschreibe die zugehörige Inzidenzrelation.

Aufgabe 37.11. Erstelle eine Tabelle für die Inzidenzrelation zu einer $0,1,2$ und 3-elementigen Menge.

Aufgabe 37.12. Es sei M eine n-elementige Menge. Bestimme die Anzahl der Elemente in der Inzidenzrelation zu M.

Aufgabe 37.13. Es sei M die Menge aller Geraden in der Ebene. Wir sagen, dass die Geraden G und H in Relation stehen, wenn sie (mindestens) einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Welche Relationseigenschaften treffen für diese Relation zu, welche nicht?

Aufgabe 37.14. Beschreibe, wie sich die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch einer Relation R auf einer Menge M in der Relationstabelle zu R widerspiegeln.

Aufgabe 37.15. Wir betrachten die Ländermenge

$$L = \{\text{Deutschland}, \text{Niederlande}, \text{Belgien}, \text{Schweiz}, \text{Frankreich}, \text{Italien}, \text{Österreich}, \text{Spanien}, \text{Portugal}, \text{Polen}, \text{Ungarn}\}$$

und die Relation „besitzt eine gemeinsame Grenze mit“.

(1) Untersuche diese Relation in Hinblick auf die Begriffe reflexiv, (anti-)symmetrisch, transitiv.
(2) Bestimme die Faser zu Deutschland in dieser Relation.
(3) Bestimme die Faser zu Frankreich in dieser Relation.
(4) Stelle die Relation durch ein Verbindungsdiagramm dar.

Aufgabe 37.16. Wir studieren die Relation „kann gut leiden“ in verschiedenen Dreier-WGs, die wir durch Relationstabellen ausdrücken, wobei in der Leitspalte das grammatische Subjekt steht. Untersuche die einzelnen Relationen hinsichtlich der Eigenschaften reflexiv, transitiv (anti-)symmetrisch.

	Andrea	Bernd	Heinz
Andrea	x		
Bernd		x	
Heinz			x

	Anja	Ben	Horst
Anja	x	x	x
Ben	x	x	x
Horst	x	x	x

	Hinz	Kunz	Schlonz
Hinz	x	x	x
Kunz		x	
Schlonz	x	x	x

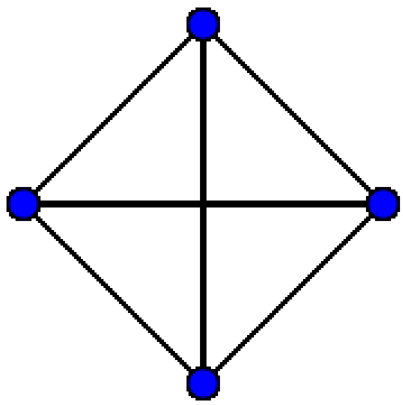
	Hänsel	Gretel	Hexe
Hänsel	x	x	
Gretel	x	x	
Hexe			x

	Oma	Wolf	Rotkäppchen
Oma	x		x
Wolf		x	
Rotkäppchen	x		x

	Jan	Jens	Jennifer
Jan			
Jens			
Jennifer			

	Hase	Fuchs	Igel
Hase		x	
Fuchs			x
Igel	x		

Aufgabe 37.17.*



Bei einem vollständigen ungerichteten Graphen mit 4 Ecken ist jede Ecke mit jeder (anderen) Ecke verbunden. Zeichne einen solchen Graphen in der Ebene ohne Überschneidungen.

Aufgabe 37.18.*

Wir betrachten das Spiel Schnick Schnack Schnuck mit den Objekten Schere, Stein, Papier und Brunnen als eine Gewinnrelation.

(1) Skizziere diese Gewinnrelation durch einen gerichteten Graphen (Pfeildiagramm).
(2) Ist die Gewinnrelation transitiv?
(3) Gibt es eine dreielementige Teilmenge der Objekte derart, dass die Relation transitiv wird?

Aufgabe 37.19. Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die diskrete Struktur einer Spielgruppe, die man durch einen gerichteten Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von A über B durch einen Pfeil von A nach B (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.

Definiere einen Isomorphiebegriff[1] für Spielgruppen und klassifiziere die Spielgruppen entlang geeigneter numerischer Invarianten. Wie viele Spielgruppen gibt es? Aus welchen Isomorphietypen lässt sich die Tabellenordnung ableiten, aus welchen nicht?

Aufgabe 37.20. Es seien M und N Mengen. Zeige, dass man jede Relation zwischen M und N als eine Relation auf der Menge $M \uplus N$ auffassen kann. Welche Relationen auf $M \uplus N$ treten in dieser Weise auf?

Aufgabe 37.21. Zeigen Sie, dass für Relationen die Konzepte Reflexivität, Symmetrie und Transitivität voneinander unabhängig sind (das heißt, dass zwei der Eigenschaften gelten können, ohne dass die dritte gelten muss).

Aufgabe 37.22.*

Es sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl der Relationen auf M, die

(1) reflexiv
(2) symmetrisch
(3) reflexiv und symmetrisch

sind.

Aufgabe 37.23.*

Es sei $M = \{a, b\}$ eine zweielementige Menge. Beschreibe vollständig (durch Auflistung aller zugehörigen Paare) die Relation auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$, die durch die Teilmengenbeziehung gegeben ist.

[1] Mit *Isomorphie* meint man in der Mathematik, dass die mathematische Struktur übereinstimmt. In diesem Beispiel sollten also die Pfeildiagramme der beiden Spielgruppen übereinstimmen, und das heißt, dass man sie zur Übereinstimmung bringen kann, indem man passende Mannschaften aufeinander bezieht.

Aufgabe 37.24.*

Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M. Betrachte die Relation T auf P, die durch

$$T(A,B) \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B$$

gegeben ist (dabei sind also A und B Teilmengen von M). Bestimme die Anzahl der Elemente dieser Relation, wenn M n Elemente besitzt.

Aufgabe 37.25. Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M. Betrachte die Relation D auf P, die durch

$$D(A,B) \text{ genau dann, wenn } A \cap B = \emptyset$$

gegeben ist (dabei sind also A und B Teilmengen von M). Bestimme die Anzahl der Elemente dieser Relation, wenn M n Elemente besitzt.

Aufgabe 37.26. Jedes Paket hat einen eindeutig bestimmten Absender und Empfänger. Modelliere diesen Sachverhalt mit Abbildungen bzw. Relationen. Welche Pfeildiagramme sind sinnvoll, um die Situation zu beschreiben?

Aufgabe 37.27. Es sei $R \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen M und N. Zeige, dass man eine Relation S zwischen N und M erhält, indem man

$$S = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$$

setzt. Sie heißt die *Umkehrrelation* zu R. Zeige ferner, dass bei $M = N$ die Relation R genau dann symmetrisch ist, wenn $R = S$ ist.

Aufgabe 37.28. Beim neutralgeschlechtlichen Speeddating treffen sich n Personen, und jede Person plaudert mit jeder von ihr verschiedenen Person fünf Minuten lang. Danach schreibt jede Person auf einen Zettel, welche Personen sie wiedersehen möchte. Die Moderatorin sammelt die Zettel ein und erstellt daraus eine Liste von Paaren, bei denen sich beide wiedersehen wollen.

(1) Beschreibe diese Situation mit einer Relation und einer Umkehrrelation.
(2) Es sei $n = 6$. Zeichne ein Diagramm mit sechs Punkten und verschiedenfarbigen Verbindungsstrecken zwischen den Punkten, das beschreibt, in welcher Reihenfolge die Personen miteinander plaudern (die erste Farbe soll die Gesprächspartner der ersten Runde angeben u.s.w.)

Aufgabe 37.29. Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}\,(M)$ die Potenzmenge davon. Zeige, dass durch

$$S \preccurlyeq T, \text{wenn es eine injektive Abbildung } S \rightarrow T \text{ gibt}\,,$$

eine reflexive und transitive Relation auf $\mathfrak{P}\,(M)$ definiert wird, die in aller Regel weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist.

Aufgabe 37.30. In einer Wohngemeinschaft wohnen Albert, Beowulf, Clara, Dora, Emil und Gundula. Dabei können Albert und Beowulf kochen, die anderen vier nicht. Emil findet Beowulf doof, Dora findet Albert und Clara doof, Clara und Gundula finden beide ebenfalls den Albert doof. Charakterisiere jede Person durch einen sprachlichen Ausdruck, in dem nur auf die Kochfähigkeit und das Dooffinden Bezug genommen wird (insbesondere dürfen in den Charakterisierungen keine Namen vorkommen).

Aufgaben zum Abgeben

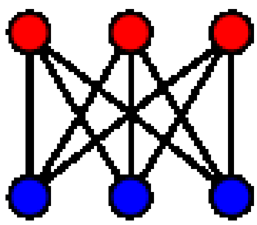
Aufgabe 37.31. (2 Punkte)

Bestimme, ob die durch die Relationstabelle

	A	B	C	D
A	$\times$		$\times$	
B	$\times$	$\times$		
C			$\times$	
D		$\times$		$\times$

beschriebene Relation auf der Menge $\{A, B, C, D\}$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch ist.

Aufgabe 37.32. (2 Punkte)



Es sollen drei Häuser jeweils mit Leitungen an Wasser, Gas und Elektrizität angeschlossen werden. Beschreibe eine Möglichkeit, bei der es nur eine Überschneidung gibt.

Aufgabe 37.33. (4 Punkte)

Beim Speeddating nehmen Anna, Berta, Clara, Dora und Elfriede und Richard, Stefan, Thomas, Uwe und Volkmar teil. Auf den Wiedersehwunschlisten schreibt Anna die Namen Richard und Thomas auf, Berta schreibt Richard und Volkmar auf, Clara schreibt alle Namen außer Uwe auf, Dora schreibt Stefan auf und Elfriede schreibt Stefan, Uwe und Volkmar auf. Richard und Thomas schreiben alle Namen auf, Stefan schreibt Dora auf, Uwe schreibt Anna, Berta und Clara auf und Volkmar gibt einen leeren Zettel ab.

(1) Stelle die Frauenwunschrelation[2] durch eine Tabelle dar.
(2) Stelle die Männerwunschrelation durch ein Verbindungsdiagramm dar.
(3) Was ist die Faser zu Stefan unter der Frauenwunschrelation?
(4) Was ist die Faser zu Volkmar unter der Männerwunschrelation?
(5) Was ist die Faser zu Berta unter der Männerwunschrelation?
(6) Diskutiere die Begriffe Links- und Rechtseindeutigkeit, Links- und Rechtsvollständigkeit für die beiden Wunschrelationen.
(7) Beschreibe die resultierende Wiedersehensrelation.

Aufgabe 37.34. (6 (1+1+2+1+1) Punkte)

Wir betrachten die Einheitskreisscheibe

$$\left\{ (x,y) | \, x^2+y^2 \leq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

als Relation auf $\mathbb{R}$.

(1) Gehört $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ zur Relation?
(2) Bestimme die Faser zu 0 in der ersten Komponente.
(3) Ist die Relation reflexiv, symmetrisch transitiv?
(4) Wenn (x,y) zur Relation gehört, gehört dann auch $(-y,-x)$ zur Relation?
(5) Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Wenn (x,y) zur Relation gehört, gehört dann auch $\varphi(x,y)$ zur Relation?

Aufgabe 37.35. (4 Punkte)

Es sei $M = \{a,b,c\}$ eine dreielementige Menge. Beschreibe vollständig (durch Auflistung aller zugehörigen Paare) die Relation auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}\,(M)$, die durch die Teilmengenbeziehung gegeben ist.

[2]Das ist diejenige Relation, die durch die Wünsche der Frauen festgelegt ist.

Aufgabe 37.36. (8 Punkte)

Klassifiziere (bis auf Isomorphie) die möglichen Gewinnstrukturen bei einer Vierergruppe (wie bei einer Fußballweltmeisterschaft).

(Bemerkung: Es wird also eine vollständige Liste aller möglichen Isomorphietypen verlangt. Die Liste muss systematisch sein und die Vollständigkeit begründet werden.)

Abbildungsverzeichnis