Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 15

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 15.1. Ein Obstverkäufer verkauft Äpfel, Birnen und Kirschen. Er kann sich nicht genau an seine Einkaufspreise erinnern, aber er weiß, dass er für 5 Kilo Äpfel so viel gezahlt hat wie für 3 Kilo Birnen und ein Kilo Kirschen zusammen. Ferner gilt natürlich die alte Obsthändlerregel 3 Kilo Äpfel entsprechen einem Kilo Birnen und einem Kilo Kirschen zusammen. Wie sieht der Orthogonalraum für diese Preisbedingungen aus? Was kostet ein Kilo Äpfel, wenn er ein Kilo Kirschen für 5 Euro verkauft?

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.2. Bestimme eine Basis zum Orthogonalraum zu $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 15.3. Erstelle ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum die Gerade $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 15.4. Es sei V ein K-Vektorraum mit Dualraum V^*. Zeige, dass der Orthogonalraum $U^\perp \subseteq V^*$ zu einem Untervektorraum $U \subseteq V$ und der Orthogonalraum $F^\perp \subseteq V$ zu einem Untervektorraum $F \subseteq V^*$ Untervektorräume sind.

Aufgabe 15.5. Es sei $U = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ ein Untervektorraum eines K-Vektorraumes. Zeige

$$U^\perp = \{f \in V^* \mid f(u_i) = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, r\}.$$

Aufgabe 15.6.*

Es sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ seien Untervektorräume. Zeige im Dualraum V^* die Gleichheit

$$(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}.$$

Aufgabe 15.7. Beweise Lemma 15.6 (4) mit Hilfe von Lemma 13.13 (1).

Aufgabe 15.8.*

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es Linearformen $L_1, \ldots, L_r$ auf V mit

$$U = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{kern} L_i$$

gibt.

b) Man folgere, dass jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ der Kern einer linearen Abbildung ist und dass jeder Untervektorraum des K^n der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems ist.

Aufgabe 15.9. Beschreibe den Raum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit Linearformen.

Aufgabe 15.10. Es sei K ein Körper.

a) Es sei L eine $\ell \times m$-Matrix und N eine $n \times p$-Matrix. Zeige, dass

$$\{M \mid M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K),\ L \circ M \circ N = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ ist.

b) Es sei V ein n-dimensionaler und W ein m-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ und $T \subseteq W$ Untervektorräume. Beschreibe den Untervektorraum

$$\{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \mid \varphi(U) \subseteq T\}$$

mit Hilfe von geeigneten Basen und Teil a).

Aufgabe 15.11. Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^2$$

und

$$T = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^2.$$

a) Beschreibe den Untervektorraum W der 2×2-Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.

c) Bestimme die Dimension von W.

Aufgabe 15.12.*

Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^3$$

und

$$T = \langle \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^3 .$$

a) Beschreibe den Untervektorraum W der 3×3-Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.

c) Bestimme die Dimension von W.

Aufgabe 15.13. Es sei V ein K-Vektorraum mit einer direkten Summenzerlegung

$$V = V_1 \oplus V_2 .$$

Zeige

$$V^* = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$$

und dass die Einschränkung der dualen Abbildung

$$V^* \longrightarrow {V_1}^*$$

auf $V_2^{\perp}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 15.14. Stelle die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi \colon K^3 \longrightarrow K^2$$

im Sinne von Lemma 15.10 mit der Standardbasis bzw. der Standarddualbasis dar.

Aufgabe 15.15. Es sei
$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W und es sei
$$\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$$
die duale Abbildung. Zeige
$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} \varphi^*.$$

Aufgabe 15.16. Es sei $\varphi\colon V \to W$ ein Isomorphismus zwischen den K-Vektorräumen V und W und es sei $\varphi^*\colon W^* \to V^*$ die duale Abbildung. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $T := \varphi(U) \subseteq W$ der entsprechende Untervektorraum in W. Zeige, dass sich in den Dualräumen die Orthogonalräume

$U^{\perp}$ und $T^{\perp}$ entsprechen.

Aufgabe 15.17. Es sei
$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W und es sei
$$\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$$
die duale Abbildung.

a) Zeige, dass für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ die Beziehung
$$\varphi^{*-1}(S^{\perp}) = (\varphi(S))^{\perp}$$
gilt.

b) Zeige, dass für einen Untervektorraum $T \subseteq W$ die Beziehung
$$\varphi^*(T^{\perp}) = (\varphi^{-1}(T))^{\perp}$$
gilt.

Aufgabe 15.18. Es sei
$$V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$
die abzählbar direkte Summe von $\mathbb{R}$ mit sich selbst mit der Basis e_n, $n \in \mathbb{N}$. Es seien p_k, $k \in \mathbb{N}$, die Projektionen
$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n \longmapsto a_k.$$

a) Zeige, dass
$$\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n,$$
eine Linearform auf V ist, die keine Linearkombination der Projektionen ist.

b) Zeige, dass die natürliche Abbildung von V in sein Bidual V^{**} nicht surjektiv ist.

Aufgabe 15.19.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*),\ \varphi \longmapsto \varphi^*,$$

die einer linearen Abbildung ihre duale Abbildung zuordnet, linear ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.20. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n, $f_1, \ldots, f_r \in V^*$ und

$$F = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subseteq V^*.$$

Zeige, dass diese Linearformen genau dann linear unabhängig sind, wenn

$$\dim\left(F^{\perp}\right) = n - r$$

ist.

Aufgabe 15.21. (6 (4+1+1) Punkte)

Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^3$$

und

$$T = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^3.$$

a) Beschreibe den Untervektorraum W der 3×3-Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.

c) Bestimme die Dimension von W.

Aufgabe 15.22. (3 Punkte)

Stelle die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^4 \longrightarrow K^3$$

im Sinne von Lemma 15.10 mit der Standardbasis bzw. der Standarddualbasis dar.

Aufgabe 15.23. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Dualraum V^* und Bidual V^{**}. Es sei $F \subseteq V^*$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die beiden Orthogonalräume $F^{\perp} \subseteq V$ (im Sinne von Definition 15.4) und $F^{\perp} \subseteq V^{**}$ (im Sinne von Definition 15.1) über die natürliche Identifizierung von Raum und Bidual gleich sind.