立體解析幾何學講義

佐賀高等學校教授
理學士
山崎榮作著

東京
內田老鶴圃刊行

緒　　言

本書ハ高等學校及ビ之ト同程度ノ諸學校ノ學生竝ビニ中等教員檢定試驗受驗者ノ參考書トシテ編纂セルモノニシテ嚮キニ編述シタル平面解析幾何學ノ姉妹編ヲナス。從ツテ其說ク所ハ專ラ初等的部門ニ限定スルト同時ニ勉メテ詳密ナランコトヲ期セリ。尙編者ハ次ノ諸點ニ注意セリ。

1. 讀者ノ了解ヲ助ケンガ爲ニ八十有餘ノ圖ヲ挿入セリ。
2. 獨習者ノ便宜ヲハカリ出來ルダケ多クノ例解(五十四個)ヲ試ミタリ。
3. 問題ハ徒ラニ奇ヲ好マズ多クハ古來有名ナルモノヨリ之ヲ撰ビ且ツ一々詳解ヲ附シタリ。其數ヲ擧グレバ次ノ如シ。

第一章	二十六題	第二章	二十題
第三章	二十七題	第四章	八題
第五章	二十九題	第六章	十七題
第七章	十六題	合計	百四十三題

4. 公式ヲ導キ且ツ其結果ヲ暗記スルニ好都合カト考ヘ多クハ行列式ヲ用フルコトトセリ。
5. 原書ヲ讀ムニ便ナラシメンガ爲ニ術語和英對照表ヲ添ヘタリ。
6. 重要ナル公式ハ一括シテ表ニ作製シ別冊トシテ

之ヲ卷頭ニ挿入セリ

本書ノ主眼トスル所ハ上ノ如シト雖モ余ノ淺學ヨリ到底所期ノ目的ヲ達スルコトヲ得ザルハ固ヨリ當然ナリ。之等ハ一ニ諸賢ノ叱正ヲ待ツテ訂正セントス。

昭和三年十一月

山崎榮作識

目次

第一章 點

第二章 直　　線

第三章 平　　面

第四章 坐標ノ變換

第五章 二次曲面

第六章　二次曲面ノ母線及ビ截面

第七章　徑面,切平面及ビ極面

第八章　二次曲面ノ分類

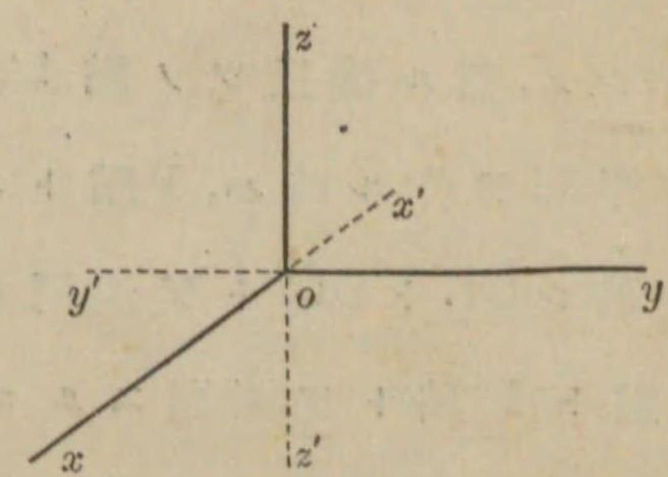
立體解析幾何學講義

第一章

點

1. 平面解析幾何學ニテハ,平面上ノ點ノ位置ヲ定ムルニ,一ツノ點ニ於テ會スル二ツノ軸ニ關スル坐標ヲ以テシタリ。コノ考ヲ擴張スレバ,空間ニ於ケル點ノ位置モ亦一ツノ點ニ於テ會スル三ツノ直線ニ關シテ定ムルコトヲ得ベシ。カヽル一組ノ直線ヲ坐標軸トイヒ,其交點ヲ原點トイフ。又三ツノ坐標軸ノ內,二ツ宛ニテ作ラレタル三ツノ平面ヲ坐標面トイフ。

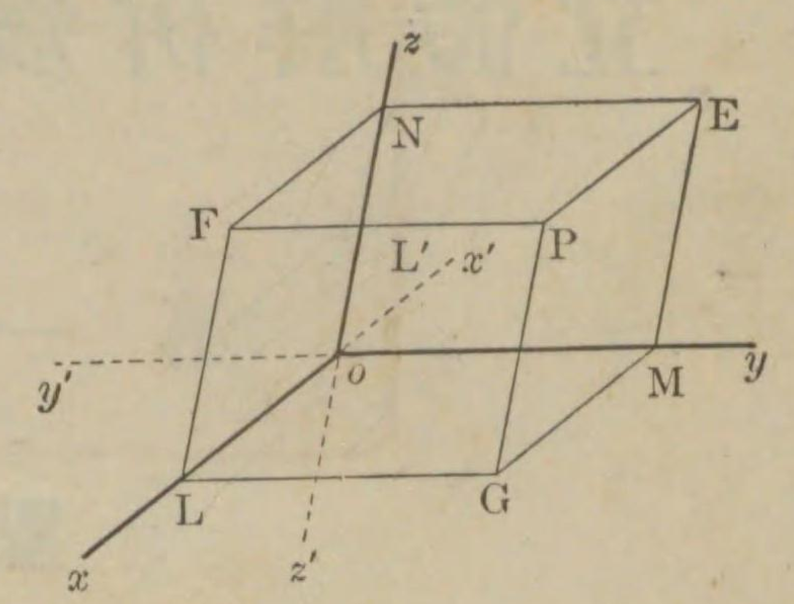
右圖ニ於テOヲ原點トシ,原點ニテ會スル三ツノ直線 $x'ox$, $y'oy$, $z'oz$ ヲ坐標軸トシ,夫々x軸, y軸, z軸トイフ。又x軸トy軸トノナス平面, y軸トz軸トノナス平面及ビz軸トx軸トノナス平面ハ所謂坐標面ニシテ夫々簡單ニ xy面, yz面及ビ zx面トイフ。



2. 點ノ坐標

Oヲ原點, $x'ox$, $y'oy$, $z'oz$ ヲ三ツノ坐標軸トシ,空間ニ於ケル任意ノ點ヲPトス。

Pヲ過リテ三ツノ坐標面ニ夫々平行ナル三ツノ平面ヲ作ル時ハ,一ツノ平行六面體OLGMENFPヲ得ベシ。而シテ常ニ次ノ關係アリ。



$$\left.\begin{aligned} OL&=EP\\ OM&=FP\\ ON&=GP \end{aligned}\right\}$$

故ニ點Pガ與ヘラルヽ時ハ, OL, OM及ビONノ長サガ定マルベシ。ヨツテOL, OM, ONノ長サヲ表ハス數値ヲP點ノ坐標トイヒ,普通夫々x, y, z又ハa, b, cナル文字ニテ表ハス。而シテ點Pヲ點(x, y, z)或ハ點(a, b, c)トイフ。

但シ此場合注意スベキ事ハ, LOヲOヲ超エテOx'ノ上ニ延長シ且ツ

$$OL=OL'$$

ナラシメ,然ル後三ツノ點L', M, Nヲ過リ坐標面ニ平行ナル三ツノ平面ヲ作ル時ハ, P點トハ異ル他ノ點P'ヲ得ベキ事ナリ。故ニ若シOLトOL'トヲ混同シテ相等シトスル時ハ,坐標ニヨリテP點トP'點トヲ區別スルコト能ハズ,從ツテ坐標ガ與ヘラレタリトスルモ,夫レニ對應スル點ハ一義ニ決定セザルベシ。故ニ此不備ヲ除カンガ爲ニ吾人ハ次ノ規約ヲ設ク。

1° 三ツノ軸ニ於テ, x', y', z'ヨリx, y, zヘノ方向ヲ夫々正ノ方向トシ反對ノ方向ヲ夫々負ノ方向トイフ。

2° L, M, Nハ原點ヨリ正ノ方向ニアル時ハ, OL, OM及ビON

$r=\sqrt{OL^2+OM^2+ON^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

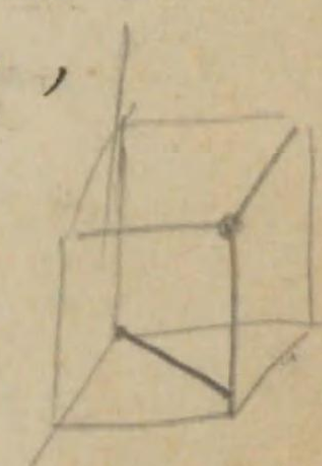
ノ長サヲ正トシ,負ノ方向ニアル時ハ夫等ノ長サヲ負トス。

以上ノ規約ニ從ヘバ,空間ニ一ツノ點ヲトル時ハ其點ノ坐標ガ定マリ,逆ニ坐標ガ與ヘラルヽ時ハ夫レニ應ズル點ガ確定スベシ。此事實ヲバ點ト其坐標トノ間ニ一々對應ガ存在ストイフ。

三ツノ坐標面ハ,二ツ宛互ニ垂直ナル時,從ツテ三ツノ軸ガ互ニ垂直ナル時ハ,其坐標軸ヲ直交軸トイヒ,然ラザル時ハ斜交軸トイフ。一般ニハ直交軸ニ就テ研究スル方ガ簡單ナリ。依リテ本書ニテハ特ニ斷リナケレバ凡テ直交軸ヲ用フルモノトス。

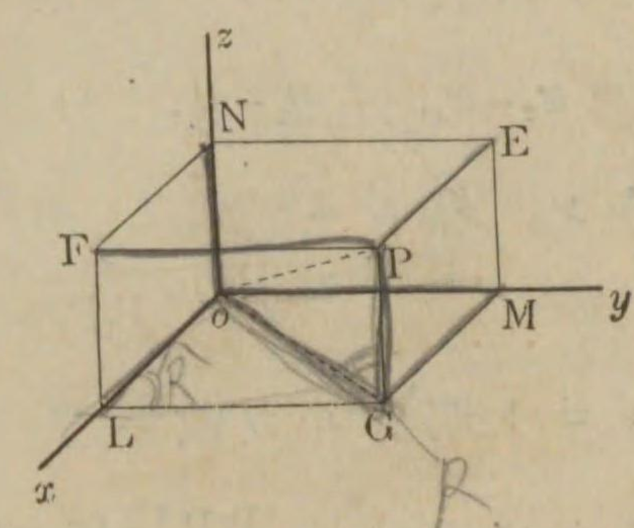
3. 三ツノ坐標面ハ空間ヲ八ツノ部分ニ分ツ

今a, b, cヲ正ノ數トスレバ,點(a, b, c), $(-a, b, c)$, $(-a, -b, c)$, $(a, -b, c)$, $(a, b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, -c)$, $(a, -b, -c)$ハ夫々部分$o-xyz$, $o-x'yz$, $o-x'y'z$, $o-xy'z$, $o-xyz'$, $o-x'yz'$, $o-x'y'z'$, $o-xy'z'$ノ中ニアルベシ。



4. 原點ト任意ノ點トノ距離

與點ヲ$P(x', y', z')$トシ, Pヲ過リ三ツノ軸ニ垂直ナル平面ヲ作ラバ,坐標面ト共ニ直六面體ヲ得ベク,線分OPハ其對角線ナリ。

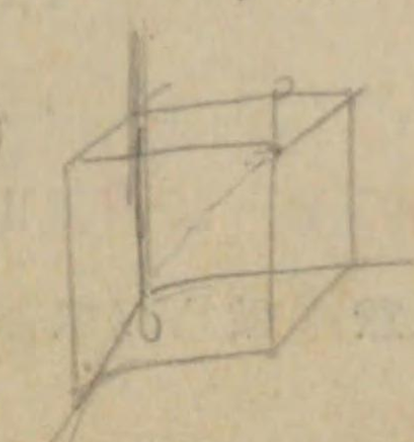


サテ三角形OPGニ於テ角PGOハ直角ナルガ故ニ

$$OP^2=OG^2+GP^2 \quad (ON^2)$$

又三角形OLGニ於テ

$$OG^2=OL^2+\underset{OM^2}{LG^2}$$



故ニ

$$OP^2=OL^2+LG^2+GP^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ

$$OL=x' \qquad LG=OM=y' \qquad GP=ON=z'$$

ナルガ故ニ(1)ニ代入スレバ

$$OP^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

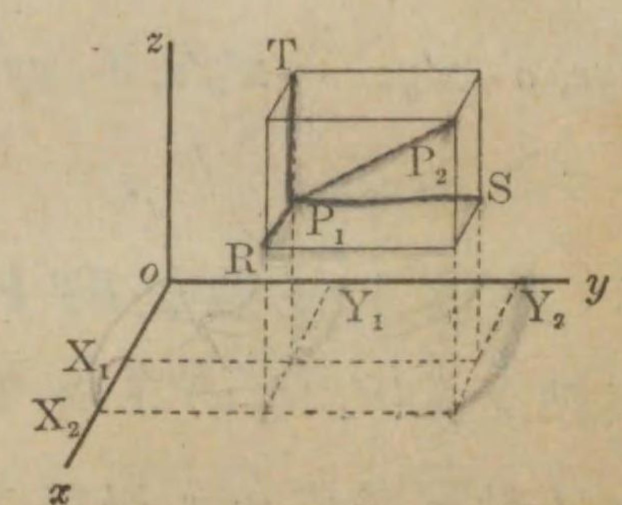
從ツテ

$$OP=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

5. 二點間ノ距離

$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ヲ二ツノ與ヘラレタル點トシ線分P_1P_2ノ長サヲ求メントス。

P_1及ビP_2ヲ過リ,坐標面ニ平行ナル平面ヲ作ラバ,直六面體ヲ得。而シテ三ツノ稜P_1R, P_1S及ビP_1Tハ夫々x軸, y軸, z軸ニ平行ニシテ且ツ其長サハ夫々



$$x_2-x_1, \qquad y_2-y_1, \qquad z_2-z_1$$

ニ等シ。然ルニ

$$P_1P_2^2=P_1R^2+P_1S^2+P_1T^2$$

ナルコト明ナルガ故ニ

$$P_1P_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

從ツテ

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

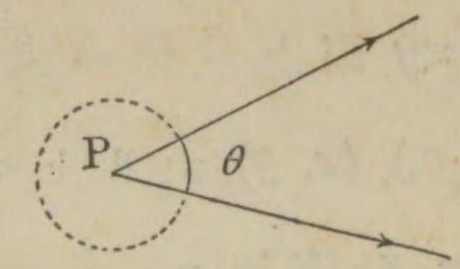
注意　點P_2ガ原點ニ重ル時ハ$x_2=y_2=z_2=0$ヨツテ上ノ公式ハ

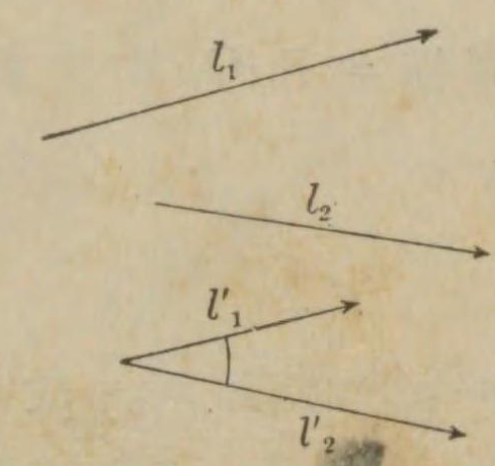
$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$トナル。コレ已ニ前節ニ於テ得タルモノナリ。

6. 有向直線及ビ夫等ノナス角

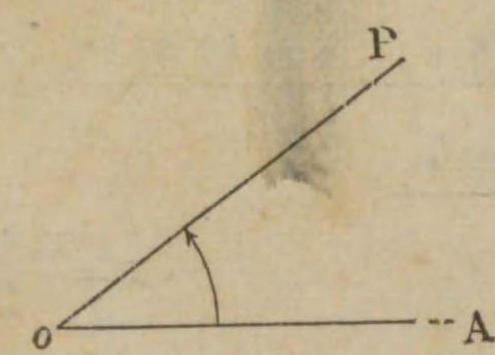
直線ニ於テ正ノ方向ト,負ノ方向トヲ設ケタル時ハ,其直線ヲ有向直線トイフ。

空間ニ相交ル二ツノ有向直線アル時夫等ノナス角トイフハ此二ツノ直線ノ正ノ方向ノ部分ノ夾ム角ノ中劣角ノ方ヲ指スモノトス。若シ二ツノ直線l_1, l_2ガ相交ラザル時ハ,任意ノ一點ヨリ各ニ平行ニ(向キヲモ考ヘニ入レテ)引キタル二ツノ直線l'_1, l'_2ノナス角ヲ夫等ノ交角ナリト規約ス。





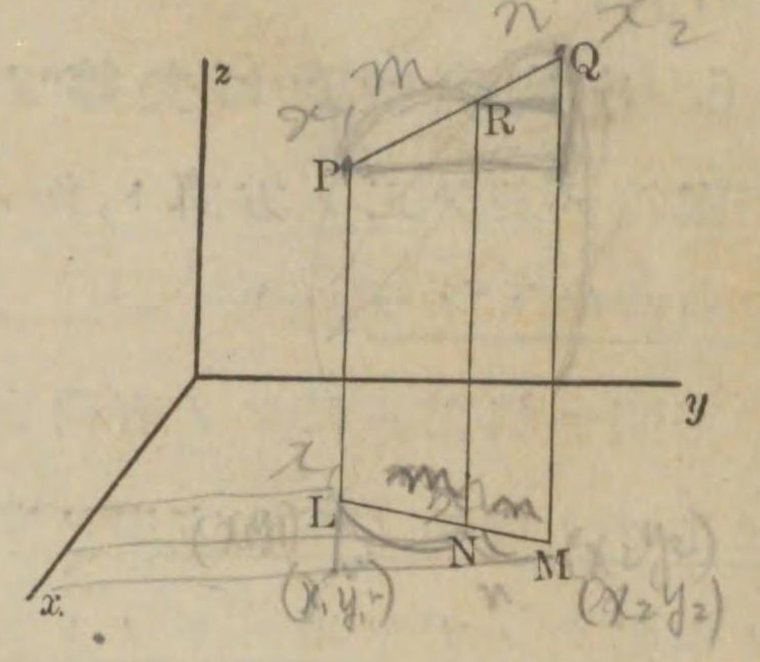
注意　平面幾何學ニ於テ二ツノ直線OA, OPノナス角AOPハ回轉直線OPガOAノ位置ヨリO點ノ周リニ時計ノ針ノ進ミニ反シテ廻ルカ,一致シテ廻ルカニ從ヒ,正角又ハ負角ト區別ヲナスト雖モ立體幾何學ニテハ此規約ハ全ク無意味ナリ。何トナレバ空間ニ於テハ平面ノ一ツノ側ニ於ケル廻轉ノ方向ハ,此平面ノ他ノ側ヨリ見ル時ハ正ニ之ニ反スルヲ以テナリ。



7. 線分ヲ定比ニ分ツ點ノ坐標

與ヘラレタル二ツノ點ヲ$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$トシ線分PQヲ定比$m:n$ニ分ツ點ヲRトシ其坐標ヲx, y, zトセヨ。

z軸ニ平行ニPL, QM, RNヲ引キxy面トノ交點ヲL, M, Nトスレバ,之等ハ一ツノ直線上ニアリテ且ツ



$$\mathrm{LN}:\mathrm{NM}=\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=m:n$$

ナル關係アリ。而シテL, M, Nハxy面上ニテハ夫々點(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)ナリトイフヲ得ベシ。故ニ平面解析幾何學第八節ニヨリ,直チニ

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n} \qquad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

同樣ニP, Q, Rヨリx軸又ハy軸ニ平行ニ直線ヲ引クコトニヨリテ

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

ナルコトヲ知ル。故ニ分點Rノ坐標ハ

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \qquad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}, \qquad z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

ナリ。

系i　Rハ線分PQノ中點ナル時ハ,$m=n$ナルガ故ニ分點Rノ坐標ハ

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

系ii　線分PQヲRニ於テ定比$m:n$ニ外分スル時ハPRニ對シテRQハ方向ヲ異ニスルガ故ニ,其坐標ハ

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \qquad y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}, \qquad z=\frac{mz_2-nz_1}{m-n}$$

ナリ。

注意　本節ノ諸公式ハ斜交軸ノ場合ニモ適用セラル。

例1　二ツノ點,(1, 2, 3), (−1, 4, −6)ヲ結ブ線分ハ三ツノ坐標面ニヨツテ如何ナル比ニ分タルヽカ。

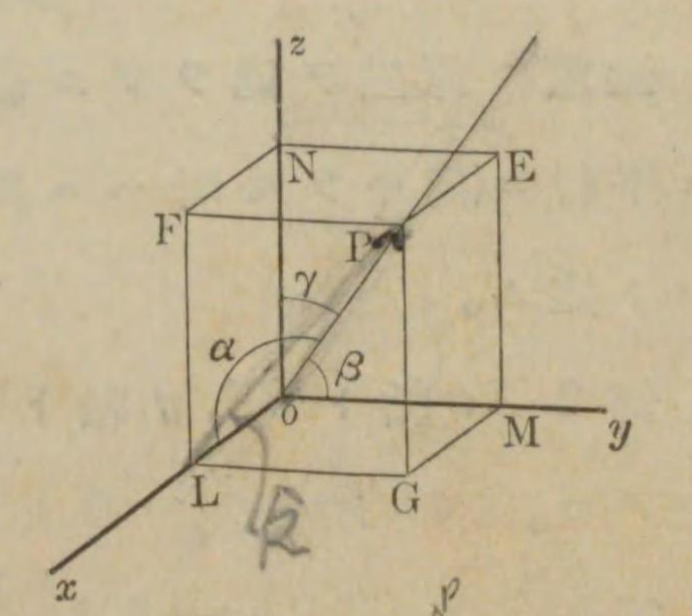
解　與ヘラレタル線分ヲyz面ガ$m:n$ニテ分ツモノトスレバ其點ノx坐標ハ公式ニヨリ$\frac{-m+n}{m+n}$ニシテ,而カモ其値ハ零ナルヲ知ル。故ニ

$$-m+n=0 \quad 卽チ \quad m:n=1:1$$

同樣ニzx面及ビxy面ガ夫々$1:-2$及ビ$1:2$ニ分ツコトヲ知ル。

8. 直線ノ方向餘弦

原點ヲ過ル任意ノ直線ヲOPトシOヨリ見テPノ方向ヲ其直線ノ正ノ方向トスル時,三ツノ軸ノ正ノ方向トナス角ヲ夫々α, β, γトスレバ三垂線ノ定理ニヨリ



$$\mathrm{O\hat{L}P}=\mathrm{O\hat{M}P}=\mathrm{O\hat{N}P}=\hat{\mathrm{R}}$$

故ニ,P點ノ坐標ヲx', y', z'トスレバ

$$\left.\begin{aligned} x'&=\mathrm{OL}=\mathrm{OP}\cos\alpha \\ y'&=\mathrm{OM}=\mathrm{OP}\cos\beta \\ z'&=\mathrm{ON}=\mathrm{OP}\cos\gamma \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊ヲ平方シテ加フレバ

$$x'^2+y'^2+z'^2=\mathrm{OP}^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

然ルニ第四節ニヨリ

$$x'^2+y'^2+z'^2=\mathrm{OP}^2$$

$\cos^2 60° + \cos^2 45° + \cos^2\gamma = 1$

$1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\cos\gamma$

ナルガ故ニ

$\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{2}}$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ハ原點ヲ過ル直線OPノ方向ヲ決定スル要素ナルガ故ニ之等ヲ有向直線OPノ方向餘弦トイヒ, 通常 l, m, n ニテ表ハスモノトス。故ニ此記號ヲ用フレバ

$$l^2+m^2+n^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

コレ甚ダ重要ナル公式ナリ。

但シ(2)又ハ(3)ヨリ明カナルガ如ク, 三ツノ方向餘弦 l, m, n ハ各々獨立ナルモノニアラズシテ, 其中ノ何レカ二ツガ定マル時ハ殘リノ一ツノ絶對値ガ確定ス。

注意 原點ヲ過ラザル直線ノ方向餘弦トハ, 原點ヨリ其直線ニ平行ニ(向キヲモ考ヘニ入レテ)引キタル直線ノ方向餘弦ニ等シト定ム。

例 2 x 軸ト $60°$, y 軸ト $45°$ トヲナス直線ガ z 軸トナス角ヲ求メヨ。

解 $l=\cos 60°=\frac{1}{2}$ $\quad m=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ナルガ故ニ

$$n=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\pm\frac{1}{2}$$

卽チ

$$\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$$

從ツテ z 軸トナス角ハ $60°$ ナルカ或ハ $120°$ ナリ。

例 3 方向餘弦ガ $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ナル線分 P_1P_2 ノ長サガ 12 ニシテ且ツ P_1 ガ點 $(-2, 1, 3)$ ナル時, 他ノ一ツノ點 P_2 ノ坐標ヲ求メヨ。

解 線分 P_1P_2 ハ P_1 ヨリ見テ P_2 ノ方ヲ正ノ方向トスレバ, 公式(1)ニヨリ

$$x_2-x_1=P_1P_2\cos\alpha, \quad y_2-y_1=P_1P_2\cos\beta$$

$$z_2-z_1=P_1P_2\cos\gamma$$

(坐標軸ノ方向ヲ變ヘズニ原點ヲ P_1 ニ移シテ考ヘヨ) 此等ニ與ヘラレタル條件ヲ代入スレバ,

$$x_2+2=12\times\left(-\frac{2}{3}\right) \qquad \therefore\ x_2=-10$$

$$y_2-1=12\times\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \therefore\ y_2=5$$

$$z_2-3=12\times\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \therefore\ z_2=11$$

故ニ P_2 ノ坐標ハ $-10, 5, 11$ ナリトス。

例 4 二ツノ點ヲ結ブ線分ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

解 二ツノ點ヲ $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ トシPヨリ見テQノ方ヲ正ノ方向トシ, 且ツ線分 PQ ノ長サヲ r トスレバ

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{r} \quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{r} \quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{r}$$

ナルコト明カナリ。玆ニ r ハ線分PQノ長サナルガ故ニ

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

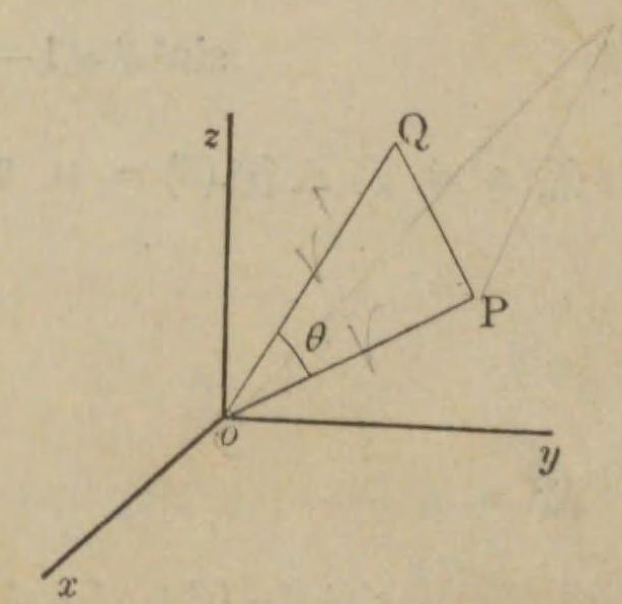
之ヲ上ノ式ニ代入スレバ所要ノ方向餘弦ヲ得。

9. 二ツノ直線ノナス角

原點ヲ過ル二ツノ直線 OP, OQ アリトシ, 其ナス角ヲ θ トス。今 OP, OQ ノ方向餘弦ヲ夫々

$$l, \quad m, \quad n$$

$$l', \quad m', \quad n'$$



トシ, OP 上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ x_1,

y_1, z_1, OQ上ノ任意ノ點Qノ坐標ヲ x_2, y_2, z_2 トスレバ,第五節ニヨリ

$$PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$
$$=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2) \cdots\cdots(1)$$

然ルニ第四節ニヨリ

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2+y_1^2+z_1^2=OP^2 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2=OQ^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots(2)$$

又第八節(1)ニヨレバ

$$x_1=l.OP \quad y_1=m.OP \quad z_1=n.OP$$
$$x_2=l'.OQ \quad y_2=m'.OQ \quad z_2=n'.OQ$$

故ニ

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=OP\cdot OQ(ll'+mm'+nn') \cdots\cdots(3)$$

(1)ニ(2)及ビ(3)ヲ代入スレバ

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP.OQ(ll'+mm'+nn') \cdots\cdots(4)$$

然ルニ三角法ニヨレバ

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP.OQ\cos\theta \cdots\cdots(5)$$

(4)ト(5)トヲ比較スレバ,

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn' \cdots\cdots(6)$$

此公式ハ卽チOP, OQノナス角ヲ與フルモノナリ。

注意i (6)ヨリ

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(ll'+mm'+nn')^2$$

然ルニ第八節(3)ニヨリ

$$l^2+m^2+n^2=1$$
$$l'^2+m'^2+n'^2=1$$

故ニ

$$\sin^2\theta=(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2$$

$$=(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2 \cdots\cdots(7)$$

注意ii 原點ヲ過ラザル二ツノ直線ノナス角ハ,原點ヨリ夫等ニ平行ニ引ケル直線ノナス角ニ等シ(第六節)キガ故ニ,公式(6)或ハ(7)ハ空間ニ於ケル任意ノ二ツノ直線ニ關シテ適用セラル。

注意iii 空間ニ於ケル二ツノ直線ノ方向餘弦ハ夫々 l, m, n 及ビ l', m', n' ナル時

$$ll'+mm'+nn'=0$$

ナラバ, $\cos\theta=0$ ナルガ故ニ $\theta=\frac{\pi}{2}$, 從ツテ此等ノ二ツノ直線ハ互ニ垂直ナリ。(垂直ナレバトテ必ズシモ相交ルニハアラズ。第六節參照)

注意iv

$$l=l' \quad m=m' \quad n=n'$$

ナルカ,或ハ

$$l=-l' \quad m=-m' \quad n=-n'$$

ナル時ハ,二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。何トナレバ初メノ場合ニハ

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn'=l^2+m^2+n^2=1$$

トナルガ故ニ

$$\theta=0$$

ニシテ,後ノ場合ニハ

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn'=-(l^2+m^2+n^2)=-1$$

トナルガ故ニ

$$\theta=\pi$$

トナルヲ以テナリ。

例5 原點ト二ツノ點(4, −2, −6), (−6, 3, 9)トハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ。

解 原點ヲOトシ, P, Q ヲ夫々點 $(4, -2, -6)$, $(-6, 3, 9)$ナリトスレバ, OP ノ方向餘弦ハ $\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{-1}{\sqrt{14}}, \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$ ニシテ, OQ ノ方向餘弦モ亦 $\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{-1}{\sqrt{14}}, \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$ ナリ。(例4參照)

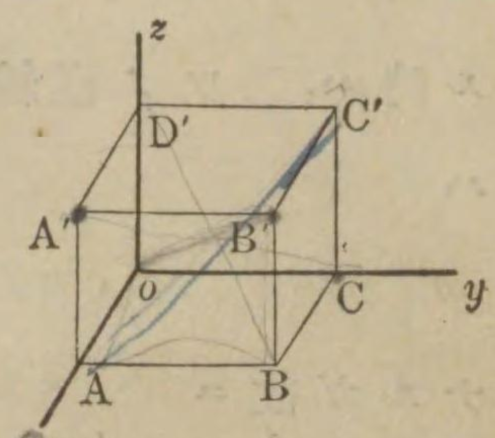
即チ二ツノ直線OP, OQ ノ方向餘弦ハ相等シク, 且ツ原點ヲ共有スルガ故ニ, 三ツノ點 O, P, Q ハ同一ノ直線上ニアリ。

例 6 一ツノ直線ガ立方體ノ四ツノ對角線トナス角ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=\frac{4}{3}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

解 圖ノ如ク立方體ノ三ツノ稜ヲ坐標軸ニトリ, 且ツ一邊ノ長サヲ a トスレバ, B′ハ點 (a, a, a) ナルヲ以テ原點ト結ブ對角線 OB′ ノ方向餘弦ハ前題ニヨリテ



$$\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},$$

又 A, C′ ハ夫々點 (a, o, o), (o, a, a) ナルヲ以テ對角線 AC′ ノ方向餘弦ハ

$$\frac{-1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

B(a.a o)

同樣ニ他ノ二ツノ對角線 BD′, CA′, ノ方向餘弦ハ

C(o a o)
A′(a o a)

$$\frac{-1}{\sqrt{3}},\quad \frac{-1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{-1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

サテ任意ノ直線ノ方向餘弦ヲ l, m, n トシ且此直線ガ, 四ツノ對角線 OB′, AC′, BD′, CA′ トナス角ヲ夫々 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ公式 (6) ニヨリテ

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}(l+m+n)\qquad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}(-l+m+n)$$

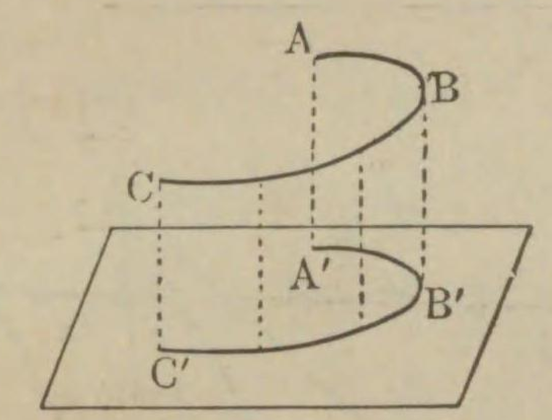
$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}(-l-m+n)\qquad \cos\delta=\frac{1}{\sqrt{3}}(l-m+n)$$

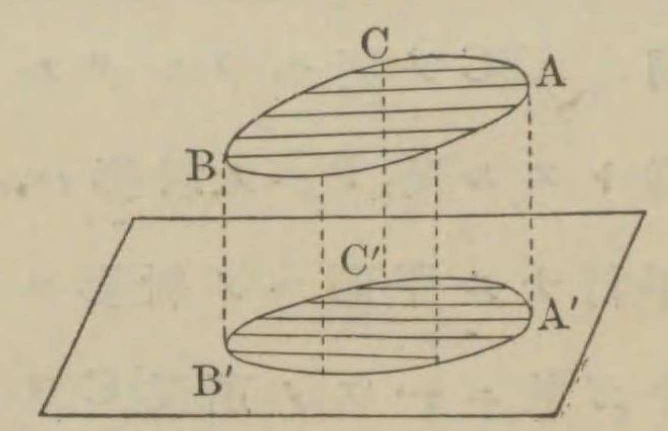
ヨツテ計算ヲ實行スルト

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=\frac{4}{3}(l^2+m^2+n^2)=\frac{4}{3}$$

10. 平面上ニ投ズル射影

一點ノ平面上ニ投ズル正射影トハ, 其點ヨリ其平面ニ下シタル垂線ノ足ヲイフ。 又平面上ニ投ズル曲線ノ正射影トハ此線上ノ凡テノ點ノ正射影ノ軌跡ナリ。 一般ニ或圖形ノ平面上ニ投ズル正射影トハ, 其圖形上ノ凡テノ點ノ正射影ノ軌跡ナリ。



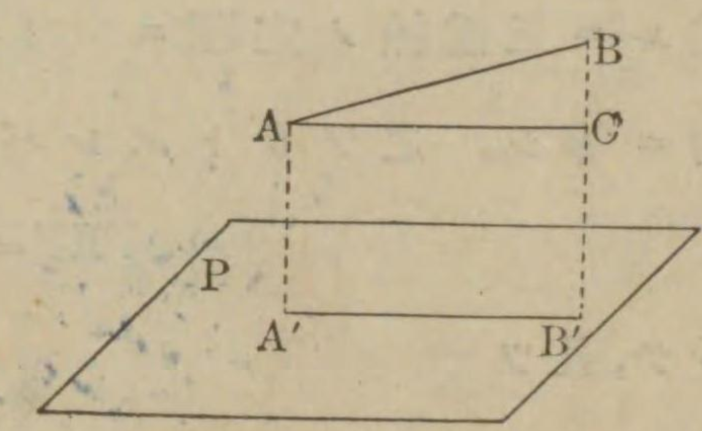


注意 i 上ノ左圖ニ於ケル曲線 A′B′C′ ハ曲線 ABC ノ正射影ニシテ, 右圖ニ於ケル圖形 A′B′C′ ハ圖形 ABC ノ正射影ナリ。

注意 ii 正射影ノ外ニ尙一般ニ斜射影トイフモノアレドモ, 本書ニテハ專ラ正射影ノミニ就キテ論ズルヲ以テ, 爾後正射影トイフベキヲ略シテ單ニ射影トイフベシ。

定理 線分ノ與ヘラレタル平面ニ投ズル射影ノ長サハ, 線分ノ長サニ, 其直線ガ平面トナス角ノ餘弦ヲ乘ジタルモノニ等シ。

證明 與ヘラレタル線分ヲ AB トシ, P ヲ平面トス。 AA′, BB′ ヲ P ヘノ垂線ナリトシ其足ヲ A′, B′ トス。 今 AC ヲ A′B′ ニ平行ニ



引ケバ

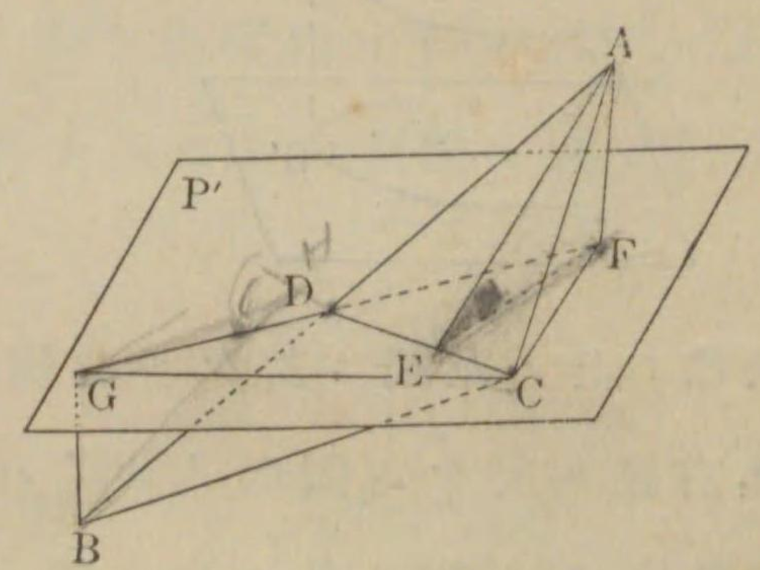
$$A'B'=AC=AB\cos BAC$$

而シテ角 BAC ハ直線 AB ハ平面 P トナス角ニ等シ。故ニ定理ハ證明セラレタリ。

系　角ノ餘弦ノ絕對値ハ常ニ1ヨリモ大ナラザルガ故ニ,線分ノ平面ヘノ射影ハ其線分ノ長サヨリモ大ナルコトナシ。

定理　三角形ノ一ツノ平面 P ニ投ズル射影ハ,其面積ニ三角形ノ平面ト P トノナス角ノ餘弦ヲ乘ジタルモノニ等シ。

證明　ABC ヲ與ヘラレタル三角形トスル時, P ヘノ射影ハ, P ニ平行ナル平面ヘノ射影ニ等シキガ故ニ一ツノ頂點 C ヲ過リ P ニ平行ナル平面 P′ ヲ作リ其上ニ於ケル射影ヲ考ヘントス。(P ガ三角形ノ一ツノ頂點ヲ過ル時ハ P′ ヲ作ル必要ナシ。)



邊 AB (或ハ其延長) ト P′ トノ交點ヲ D トシ, CD ニ垂線 AE ヲ引キ A, B ヨリ平面 P′ ニ垂線 AF, BG ヲ引ケバ △CFG ハ卽チ ABC ガ平面 P ニ投ズル射影ト全等形ナリ。

然ルニ三垂線ノ定理ニヨリ,角 AEF ハ平面 ABC ト平面 P′ トノ角ニ等シ。之ヲ θ トスレバ

$$EF=AE\cos\theta$$

ニシテ,且ツ

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}AE\cdot DC$$

$$\triangle CDF=\frac{1}{2}EF\cdot DC$$

ナルガ故ニ

$$\triangle CDF=\triangle ACD\cos\theta \quad\cdots\cdots(1)$$

同樣ニ B, G ヨリ DC ニ垂線 BH, GH ヲ引ク時ハ

$$\triangle BCD=\frac{1}{2}BH.DC$$

$$\triangle CDG=\frac{1}{2}GH.DC$$

ニシテ,且ツ BH, GH ノナス角ハ θ ニ等シキヲ以テ

$$GH=BH\cos\theta$$

ナリ。故ニ前ト同樣ニ

$$\triangle GCD=\triangle BCD\cos\theta \quad\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トヲ邊々相加フレバ

$$\triangle CFG=\triangle ABC.\cos\theta$$

ヨツテ定理ハ證明セラレタリ。

系　任意ノ平面圖形ノ一ツノ平面ニ投ズル射影ハ,其面積ニ二ツノ平面ノナス角ノ餘弦ヲ乘ジタルモノニ等シ。(平面圖形ハ無數ノ三角形ノ和ナリト考フベシ)

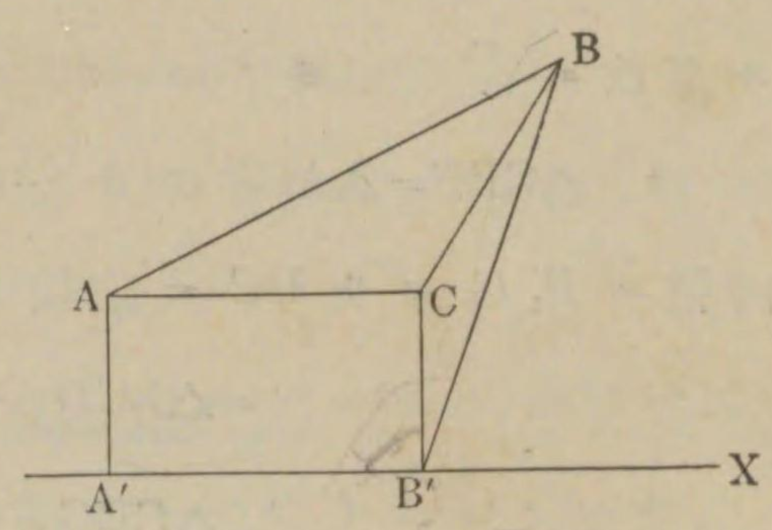
11. 直線ニ投ズル射影

一ツノ點 A ヨリ一ツノ直線 X ニ垂線 AA′ ヲ下ス時,點 A′ ヲ點 A ノ直線 X 上ニ投ズル射影トイフ。又線分 AB ノ兩端ノ點 A, B ヨリ垂線 AA′, BB′ ヲ下ス時,線分 A′B′ ヲ線分 AB ノ直線 X 上ニ投ズル射影トイフ。

定理　線分 AB ノ直線 X 上ヘノ射影 A′B′ ノ長サハ AB ノ長サニ AB ガ X トナス角ノ餘弦ヲ乘ジタルモノニ等シ。

證明　AB ト X トハ同一平面上ニアラザルモノトシ,(同一ノ

平面上ニアラバ甚ダ容易ナリ)



A ヨリ X ニ平行ニ AC ヲ引キ AC=A′B′ ナラシムル時ハ AA′B′C ハ平行四邊形ナリ。而シテ二ツノ角 CB′A′, BB′A′ ハ直角ナルガ故ニ平面 BB′C ハ A′B′ ニ垂直ナリ。從ツテ之ニ平行ナル直線 AC ニモ垂直ナリ

$$\therefore \qquad B\hat{C}A = \hat{R}$$

從ツテ三角形 ABC ハ直角三角形ナリ。故ニ

$$AC = A'B' = AB \cos BAC$$

而シテ角 BAC ハ直線 AB ガ X トナス角ニ等シ。ヨツテ定理ハ證明セラレタリ。

注意　射影ノ長サニ正,負ノ符號ヲ附スル時ハ研究上多クノ便アリ。卽チ有向線分 AB ヲ直線 X 上ニ射影スルニ A ヨリ B ニ至ル方向ガ X ノ正ノ方向ト一致スル時線分 AB ノ射影ヲ正トシ,然ラザル時ハ負ナリトス。故ニ X ノ正ノ方向ト, A ヨリ B ニ至ル方向トノナス角ヲ θ トスレバ,常ニ

$$A'B' = AB \cos \theta$$

ナル關係ガ成立ス。

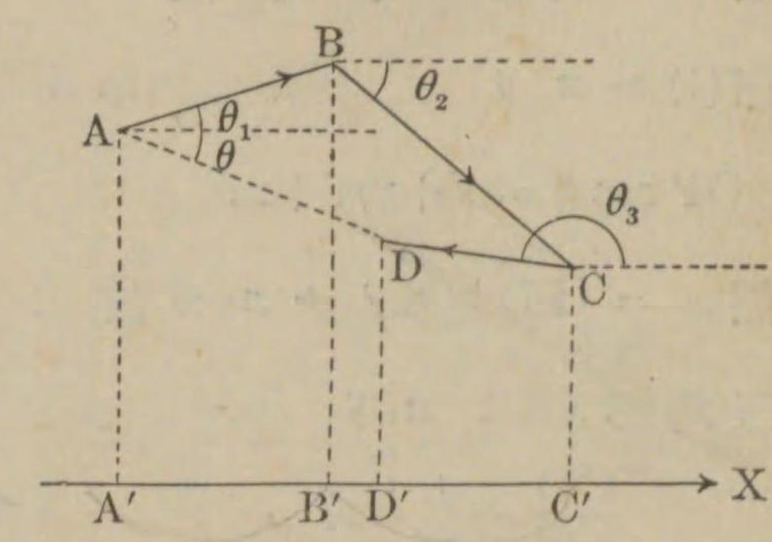
12. 折線ノ射影

圖ニ於テ ABCD ヲ一ツノ折線トシ,點 A, B, C, D ノ直線 X ノ上ニ投ズル射影ヲ夫々 A′, B′, C′, D′ トス。

サテ折線及ビ直線 X ノ正ノ方向ヲ矢ヲ以テ表ハス時ハ, AB,

BC ノ射影 A′B′, B′C′ ハ正ニシテ CD ノ射影 C′D′ ハ負ナリ。故ニ

$$A'B' + B'C' + C'D' = A'D' \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$



又 AB, BC, CD ノ X トナス角ヲ θ_1, θ_2 及ビ θ_3 (方向ヲ考ヘテ) トシ,折線ノ兩端ヲ結ブ直線 AD ガ X トナス角ヲ θ トスレバ(1) ナル關係ハ次ノ如シ。

$$AB \cos \theta_1 + BC \cos \theta_2 + CD \cos \theta_3 = AD \cos \theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ次ノ諸定理ヲ得。

定理　折線 ABCDEF …… ノ一ツノ直線ニ投ズル射影ハ線分 AB, BC, CD, EF, …… ノ射影ノ代數和ニ等シ。

定理　一ツノ直線ニ投ズル折線ノ射影ノ長サハ,其兩端ヲ結ブ線分ノ射影ノ長サニ等シ。

定理　多角形(一般ニ閉曲線)ノ一ツノ直線ニ投ズル射影ノ長サノ代數和ハ零ナリ。

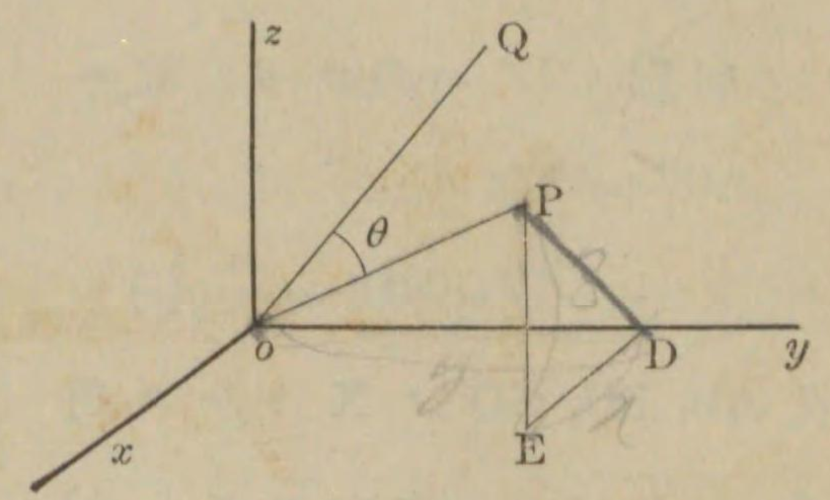
13. 射影ノ理論ヲ應用シテ二ツノ直線ノナス角ヲ求ムル事ヲ得ベシ。

與ヘラレタル二ツノ直線ニ平行ニ原點ヨリ OP, OQ ヲ引ケバ夫等ノナス角ハ求ムル角ニ等シ。故ニ其方向餘弦ヲ夫々 l, m, n 及ビ l', m', n' トシ, OP 上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ x, y, z トシ平面 xy 及ビ y 軸ニ投ズル射影ヲ E, D トスレバ,

$$DE = x, \qquad OD = y, \qquad EP = z$$

然ルニ折線 ODEP ノ直線 OQ 上ニ投ズル射影ハ, OP ガ OQ 上

ニ投ズル射影ニ等シ。故ニ



前節(1)ニヨリ

$$OP\cos\theta = xl'+ym'+zn'$$

然ルニ PD⊥OD ナルガ故ニ三角形 ODP ヨリ

$$\frac{OD}{OP}=\frac{y}{OP}=m$$

同様ニ $\frac{x}{OP}=l$ $\frac{z}{OP}=n$

ナルガ故ニ之等ヲ上ノ等式ニ代入スレバ,

$$\cos\theta = ll'+mm'+nn'$$

コレ已ニ第九節ニ得タル公式ニ一致ス。

例 7. 任意ノ平面ノ面積ノ平方ハ,其平面ガ三ツノ坐標面ニ投ズル射影ノ平方ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ。

解 與ヘラレタル平面ノ面積ヲ A トシ,其面ノ垂線ガ x, y, z 軸トナス角ヲ夫々 α, β, γ トスレバ, yz, zx, xy 面ニ投ズル射影ノ面積ハ夫々 $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$ ナリ。故ニ夫等ノ平方ノ和ハ

$$A^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=A^2$$

ナリ。

14. 點ト直線トノ距離

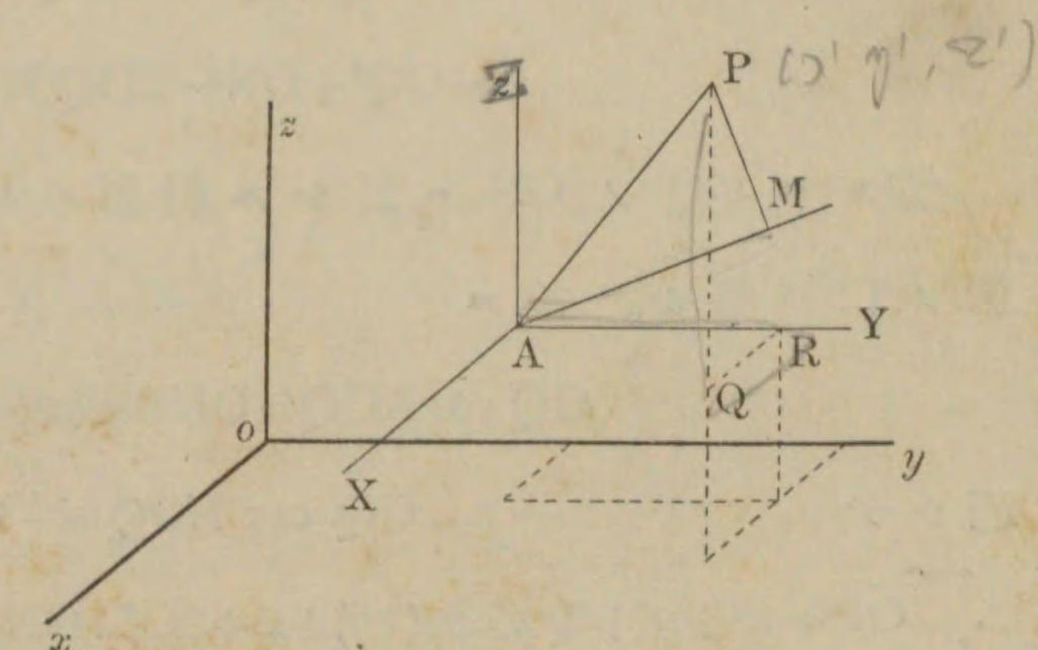
與ヘラレタル點ヲ $P(x', y', z')$, 與直線ヲ AM トシ,其上ノ點 A ヲ (a, b, c) トシ且ツ其直線ノ方向餘弦ヲ l, m, n トス。

今 PM ヲ直線ヘノ垂線ナリトスレバ,線分 AP ノ射影ハ AM ナリ。サテ三ツノ坐標軸ニ平行ニ AX, AY, AZ ヲ引ク時ハ,

$$QR=x'-a,\qquad AR=y'-b,\qquad QP=z'-c$$

次ニ AP ノ AM 上ヘノ射影ハ AR, RQ, QP ノ射影ノ和ニ等シ

キヲ以テ,



$$AM=l(x'-a)+m(y'-b)+n(z'-c)$$

然ルニ

$$MP^2=AP^2-AM^2$$

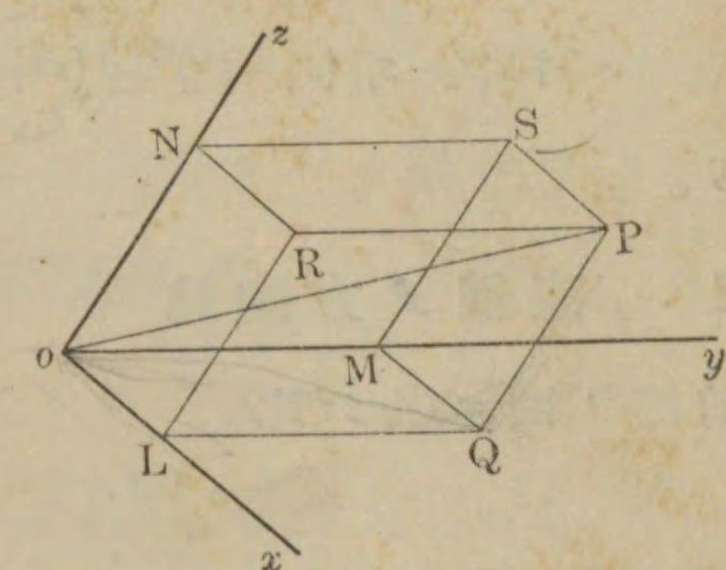
ナルガ故ニ

$$MP^2=(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2-\{l(x'-a)+m(y'-b)+n(z'-c)\}^2$$

ナリ。

15. 斜交軸ニ於ケル二點間ノ距離

ox, oy, oz ヲ一組ノ斜交軸トシ,空間ノ一點ヲ $P(x, y, z)$ トス。然ル時,先ヅ原點トPトヲ結ブ線分OPノ長サヲ求メントス。



今P點ヲ過リ三ツノ坐標面ニ平行ナル平面ヲ作ラバ坐標面ト共ニ平行六面體ヲナス。又 y 軸ト z 軸トノナス角ヲ (yz) ニテ, z 軸ト x 軸トノナス角ヲ (zx) ニテ, x 軸ト y 軸トノナス角ヲ (xy) ニテ表ハスモノトスレバ,三角形 OLQ ヨリ

$$\begin{aligned}OQ^2&=OL^2+LQ^2-2OL.LQ\cos OLQ\\&=OL^2+OM^2+2OL.OM\cos xoy\\&=x^2+y^2+2xy\cos(xy)\end{aligned}$$

又 三角形 OPQ ヨリ

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2 - 2OQ.QP\cos OQP$$
$$= OQ^2 + ON^2 - 2OQ.ON\cos OQP$$

然ルニ OQ ノ ON ニ於ケル射影ハ OL, LQ ノ ON ニ於ケル射影ノ和ニ等シ。故ニ

$$OQ\cos NOQ = OL\cos(zx) + LQ\cos(yz)$$

而シテ $$OQ\cos NOQ = -OQ\cos OQP$$

$$\therefore\ OP^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos(xy) + z^2 + 2OL.ON\cos(zx) + 2LQ.ON.\cos(yz)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz) + 2zx\cos(zx) + 2xy\cos(xy) \cdots\cdots(1)$$

系．二ツノ點 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ ガ原點ト異ル時，其距離ハ

$$PQ^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 + 2(y_2-y_1)(z_2-z_1)\cos(yz)$$
$$+ 2(z_2-z_1)(x_2-x_1)\cos(zx) + 2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos(xy) \cdots\cdots(2)$$

ナリ。

16. 直線ノ方向比

前節ノ圖ニ於テ比

$$\frac{OL}{OP},\quad \frac{OM}{OP},\quad \frac{ON}{OP}$$

ハ直線 OP 上ニ於ケル點 P ノ位置ノ如何ニ關セズ一定ナリ。之等ノ比ヲ斜交軸ニ就キテ直線 OP ノ方向比トイヒ，p, q, r ニテ表ハス。然ル時ハ P 點ノ坐標 x, y, z ハ夫々

$$x = p.OP,\quad y = q.OP,\quad z = r.OP$$

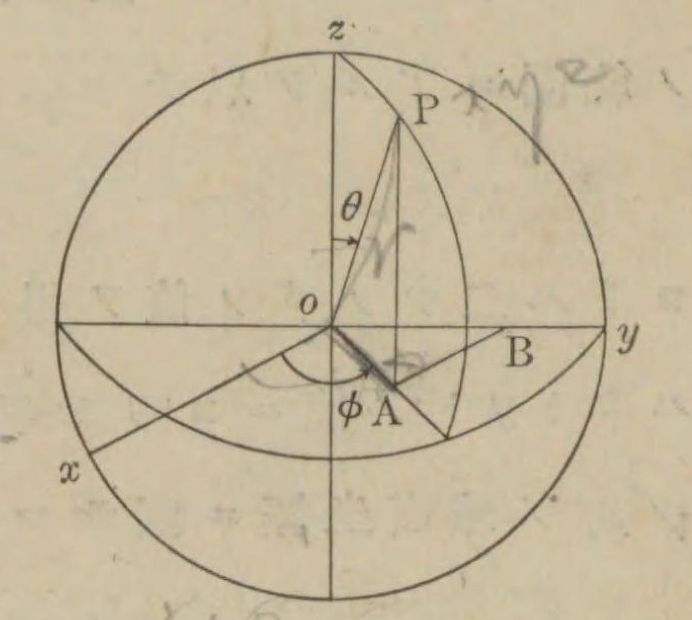
ナルヲ以テ，前節(1)ニ代入スレバ，

$$p^2 + q^2 + r^2 + 2qr\cos(yz) + 2rp\cos(zx) + 2pq\cos(xy) = 1$$

ナル關係ヲ得。

17. 球面坐標

空間ノ點ノ位置ヲ示スニ坐標 x, y, z ヲ用フル外ニ尙他ニ種々ノ方法アリ，本節ヨリ以下四節ニ亘リテ其二ツヲ說明スベシ。



ox, oy, oz ヲ直交軸トシ，P ヲ空間ノ任意ノ點トス。OP ト z 軸トガナス平面ト xy 面トノ交線ヲ OA トシ

$$OP = r,\quad z\hat{O}P = \theta,\quad x\hat{O}A = \phi$$

トスル時ハ，r, θ, ϕ ニヨリテ點 P ノ位置ガ定マル。故ニ之等ノ三ツヲ點 P ノ球面坐標トイヒ，點 (r, θ, ϕ) ト記ス。

但シ r ヲ常ニ正ナリトシ，θ ハ OP ト z 軸ノ正ノ方向トノナス劣角ナリトシ，φ ハ OA ト x 軸ノ正ノ方向トノナス角ニシテ矢ノ如ク測ルモノトス。而シテ零ヨリ 360° マデニ限ルモノトス。

18. 球面坐標ト直角坐標トノ關係

P點(前圖)ノ直角座標ヲ x, y, z トスレバ

$$\left.\begin{aligned} x &= BA = OA\cos\phi = r\sin\theta\cos\phi \\ y &= OB = OA\sin\phi = r\sin\theta\sin\phi \\ z &= AP = OP\cos\theta = r\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\theta &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\phi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$$

ノ關係アリ。(r ハ正ナリト假定スルコトニ注意スベシ。)

玆ニ θ ハ 180° ヨリ小ナル正角ヲトルガ故ニ

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

ヨリハ唯一ツノθノ値ヲ得ベシト雖モ,ϕハ零度ヨリ 360° マデノ範圍ニアルヲ以テ

$$\tan\phi=\frac{y}{x}$$

ヨリハ二ツノϕノ値ヲ得ベシ。ソノ何レガ果シテ適合スルヤハxトyトノ値ニヨリテ判斷セザルベカラズ。例ヘバ點$(2,\ -2\sqrt{8})$ヲ球面坐標ニ直サンニ,

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{2^2+(-2)^2}}{\sqrt{8}}=1$$

ナルヲ以テθガ45°ナレドモ

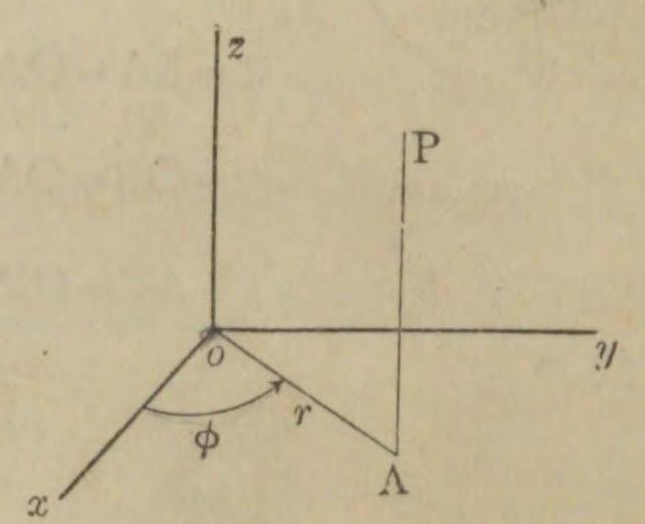
$$\tan\phi=\frac{-2}{2}=-1$$

ナルガ故ニϕノ値トシテ 135° 及ビ 315° ノ二ツヲ得ベシ。然レドモxガ正ニシテyハ負ナルガ故ニxy面ニ於テ第四象限ノ角即チ 315° ヲノミ採用スベキガ如シ。

19. 圓壔座標

Pヲ空間ノ一點トシ,Pヨリxy面ニ垂線PAヲ下シ其足ヲAトス。次ニOAヲ作リ

$$OA=r,\quad x\hat{O}A=\phi,\quad AP=z$$



トスレバ,$r,\ \phi,\ z$ニヨリテ點Pノ位置ハ確定セラル。故ニ之等ノ三ツヲ點Pノ圓壔坐標トイヒ,點$(r,\ \phi,\ z)$ト記ス。

注意　以上述ベタル二ツノ方法ヲ總稱シテ極坐標トイフ。然レドモ普通極坐標トイフハ球面坐標ヲ意味ス。故ニ本書ニ於テモ此習慣ニ從フベシ。

20. 圓壔坐標ト直角坐標トノ關係

點Pノ直角坐標ヲ$x,\ y,\ z$トシ圓壔坐標ヲ$r,\ \phi,\ z$トスレバ

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\phi\\y&=r\sin\phi\\z&=Z\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

ニシテ,從ツテ逆ニ

$$\left.\begin{aligned}r&=\sqrt{x^2+y^2}\\\tan\phi&=\frac{y}{x}\\Z&=z\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

ナル關係アリ。

21. 方程式ノ軌跡

第二節ニ於テ空間ノ點ノ位置ハ$x=a,\ y=b,\ z=c$ノ如キ三ツノ方程式ニテ定メラレタリ。今之等ノ内ノ一ツ例ヘバ$x=a$ノミガ與ヘラレタル時,幾何學的ニ何ヲ表ハスカヲ考ヘンニ,aガ正ナル時ハx軸ニ沿ヒテ原點ヨリ其正ノ方向ニ長サノ單位ノa倍ニ等シキ距離ニ點Mヲトリ(aガ負ナラバ之ト反對ノ方向ニトル)Mヲ過リテyz面ニ平行ナル平面Pヲ作ラバ,其上ノ凡テノ點ノx坐標ハaニシテ此平面以外ノ凡テノ點ノx坐標ハaナラザルガ故ニ方程式$x=a$ハ平面Pヲ表ハスモノニシテ,x坐標ガaナル凡テノ點ノ軌跡ナリト解スルコトヲ得。

又方程式$y=b$ノミガ與ヘラレタリトセヨ。b若シ正ナラバ,y軸ニ沿ヒテ原點ヨリ其正ノ方向ニ長サノ單位ノb倍ニ等シキ距離ニ點Nヲトリ,(bガ負ナラバ其反對ノ方向ニトル)Nヲ過リzx面ニ平行ナル平面Qヲ作ラバ此平面上ノ凡テノ點ノy坐

標ハbニシテ,此平面外ノ凡テノ點ノy坐標ハbナラザルガ故ニ,方程式 $y=b$ ハ平面Qヲ表ハスモノニシテ,y坐標ガbナル凡テノ點ノ軌跡ナリト解スルコトヲ得。

全ク同樣ニシテ $z=c$ ナル方程式ハxy面ニ平行ナル一ツノ平面ヲ表ハスベシ。

又與ヘラレタル方程式ハ二ツノ文字例ヘバxトyトヲ含ム時ハ如何ニトイフニ,先ヅxy面上ニテ其方程式ヲ滿足セシムベキ軌跡ヲ求ムレバ一般ニハ一ツノ曲線Kヲ得ベシ。次ニK上ノ任意ノ一點Pヲ過リz軸ニ平行ナル無限直線PQヲ引ク時ハ,PQ上ノ凡テノ點ノ坐標ハ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スベシ。何トナレバPQ上ノ凡テノ點ノ坐標トP點ノ坐標トヲ考フルニ單ニz坐標ダケガ異ルノミニシテ而カモ方程式ニハzナル文字ヲ有セザルガ故ナリ。サテPハ曲線Kニ沿ヒテ動ク時,直線PQモz軸ニ平行シナガラ動キ從ツテ空間ニ於テ一ツノ曲面ヲ作ルベシ。此曲面ハ卽チ與ヘラレタル方程式ガ表ハス軌跡ナリ。而シテ曲線Kヲ曲面ノ導線,無限直線PQヲ曲面ノ母線トイフ。

最後ニ三ツノ文字x, y, zヲ悉ク含ム方程式ハ,幾何學的ニ如何ナルモノヲ表ハスカヲ見ントス。ソレニハ先ヅ任意ノ數cヲトリ,與ヘラレタル方程式ニ $z=c$ ト置クベシ。然ル時ハ其方程式ハ二ツノ文字x, yノミヲ含ムモノニ變ズベシ。而シテ夫レハ平面 $z=c$ ノ上ニ於テ一ツノ平面曲線ヲ作ルベシ。茲ニ於テcノ値ヲ連續的ニ變化セシムレバ,平面 $z=c$ ハz軸ニ沿ヒテ上下スベク,其都度一ツノ平面曲線ヲ畫クベシ。從ツテ與ヘラ

レタル方程式ハ,此等ノ平面曲線ノ軌跡ニシテ,一般ニハ曲面ヲ表ハスベシ。

例 8 $x^2+y^2=4$ ハ如何ナル曲面ヲ表ハスカ。

解 $z=0$ ナル平面(卽チxy面)ヲ考フルニ,此平面上ニテハ $x^2+y^2=4$ ハ原點ヲ中心トシ半徑 2 ナル圓周ヲ表ハス。從ツテ空間ニテハz軸ヲ軸トスル半徑2ナル圓柱ヲ表ハス。

例 9 $x^2+y^2+z^2=r^2$ ハ如何ナル曲面ヲ表ハスカ。

解 與ヘラレタル方程式ニ $z=c$ ト置ケバ

$$x^2+y^2=r^2-c^2$$

故ニ平面 $z=c$ ノ上ニテハ一ツノ圓周ヲ表ハシ,其半徑ハ $\sqrt{r^2-c^2}$ ナリ。茲ニ於テcヲoヨリ $\pm r$ マデ變ゼシムル時ハ,夫等ノ平面上ニ於ケル圓ノ半徑ハ r ヨリ次第ニ減少シテ零トナルベシ。故ニ $z=0$ ノ上ニテノ圓ハ最モ大キク,ソレヨリ平面ハ上下スルニ從ヒ次第ニ小トナルベシ。故ニ與ヘラレタル方程式ノ表ハス曲面ハ形ヲ變ズル圓ヲ積ミ重ネ生ズルモノ卽チ球面ナリ。

第一章

問題

1. 三ツノ點 P (1, 2, 3), Q (2, 3, 1), R (3, 1, 2) ハ正三角形ノ頂點ナルコトヲ示セ。

解　第五章ニヨラバ

$$PQ=\sqrt{(1-2)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6} \qquad QR=\sqrt{(2-3)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}$$

$$RP=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6}$$

ヨッテ三角形 PQR ハ正三角形ナリ。

2. 三ツノ點 (1, 3, −5), (3, 4, −7), (2, 5, −3) ハ直角二等邊三角形ノ頂點ナルコトヲ證セヨ。

3. 三ツノ點 (−3, 2, −7), (2, 2, −3) 及ビ (−3, 6, −2) ハ二等邊三角形ヲ作ルコトヲ示セ。

4. 三ツノ點 $P\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}, 0\right)$, Q (2, 5, 2), R (3, 7, 5) ハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ。

解　第八節例四ニヨリ PQ ノ方向餘弦ヲ l, m, n トスレバ

$$l=\frac{2-\frac{4}{3}}{\sqrt{\left(2-\frac{4}{3}\right)^2+\left(5-\frac{11}{3}\right)^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}},$$

同樣ニ

$$m=\frac{2}{\sqrt{14}} \qquad n=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

又 PR ノ方向餘弦ヲ l', m', n' トスレバ

$$l'=\frac{3-\frac{4}{3}}{\sqrt{\left(3-\frac{4}{3}\right)^2+\left(7-\frac{11}{3}\right)^2+(5-0)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

同樣ニ

$$m'=\frac{2}{\sqrt{14}} \qquad n'=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

即チ PQ, PR ノ方向餘弦ハ相等シ,故ニ R ハ直線 PQ ノ上ニアラザ

ルベカラズ。從ツテ三點ハ一直線上ニアルナリ。

5. 原點ト二ツノ點 (4, −2, 6), (6, −3, 9) トハ一直線上ニアルコトヲ示セ。

6. 原點ト二ツノ點 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ トハ一直線上ニアル爲ノ條件ヲ求メヨ。

解　原點ヲ O トスレバ直線 OP ノ方向餘弦ハ

$$l=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \qquad m=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

$$n=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

ニシテ, OQ ノ方向餘弦ハ

$$l'=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad m'=\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$n'=\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

然ルニ OP ト OQ トハ同一ノ直線上ニアル爲ニハ

$$l=l' \qquad m=m' \qquad n=n'$$

ナラザルベカラズ。故ニ求ムル條件ハ

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

ナリ。

7. z 軸ニ平行ニシテ且ツ其向キヲ同ジクスル直線ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

解　此直線ハ x 軸及ビ y 軸ト垂直ニシテ, z 軸トノ交角ハ零ナリ。故ニ其方向餘弦ハ

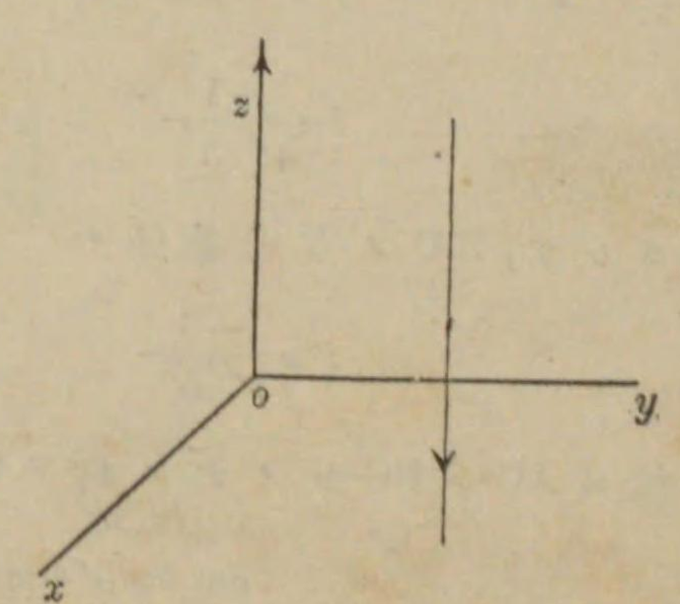
$$l=m=\cos 90^\circ=0 \qquad n=\cos 0^\circ=1$$

ナリ。

注意　若シ直線ガ z 軸ト平行ナルモ向キヲ異ニスル時ハ, z 軸トノ交角ハ零ニアラズシテ 180° ナリ。故ニ

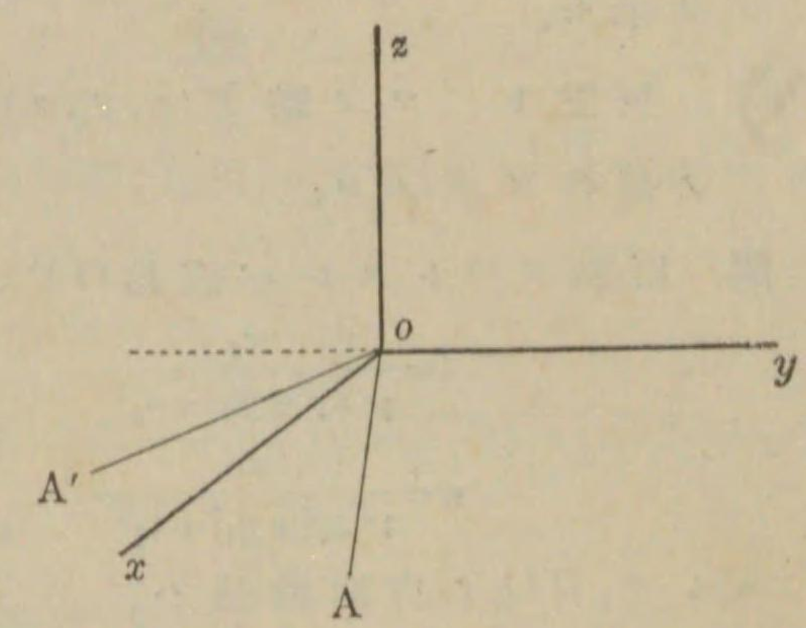
$$n=\cos 180^\circ=-1$$

トセザルベカラズ。



8. xy 面ニアリテ, x 軸ト 30° ヲナス直線ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

解 xy 面上ニアリテ x 軸ト 30° ヲナス直線ヲ OA, OA′ トスレバ,之等ハ何レモ z 軸トハ垂直ナルモ, y 軸トノ交角ハ一ツハ 60° ニシテ,他ノ一ツハ 120° ナリ。故ニ OA, ノ方向餘弦ハ次ノ如シ。



$l=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad m=\cos 60°=\frac{1}{2}$

$n=\cos 90°=0$

又 OA′ ノ方向余弦ハ

$l'=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$m'=\cos 120°=-\frac{1}{2}$ $\quad n'=\cos 90°=0$,

9. 直線ノ方向餘弦ハ夫々 1, 2, 3 ニ比例スル時,其直線ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

解 方向餘弦ヲ l, m, n, トスレバ,第八節ニヨリ

$$l^2+m^2+n^2=1$$

故ニ與ヘラレタル直線ノ方向餘弦ハ夫々

$$l=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} \qquad m=\pm\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} \qquad n=\pm\frac{3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}$$

ナリトス。

10. 二ツノ點 (2, 3, 4), (5, 4, 3) ガ第三ノ點 (1, 2, 3) ニ對シテ張ル角ヲ求メヨ。

解 點 (2, 3, 4) ヲ A, (5, 4, 3) ヲ B, (1, 2, 3) ヲ C トスレバ AC ノ方向餘弦ハ

$$l=\frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad m=\frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad n=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

ニシテ, BC ノ方向餘弦ハ

$$l'=\frac{-2}{\sqrt{5}} \qquad m'=\frac{-1}{\sqrt{5}} \qquad n'=0$$

故ニ AC ト BC トノナス角ヲ θ トスレバ,

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn'=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

從ツテ $\theta=\cos^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}$ ナリ。

11. 次ニ示スガ如キ方向餘弦ヲ有スル三ツノ直線ハ互ニ垂直ナルコトヲ示セ。

$$l=\frac{12}{13} \qquad m=-\frac{3}{13} \qquad n=-\frac{4}{13}$$

$$l'=\frac{4}{13} \qquad m'=\frac{12}{13} \qquad n'=\frac{3}{13}$$

$$l''=\frac{3}{13} \qquad m''=-\frac{4}{13} \qquad n''=\frac{12}{13}$$

12. 四ツノ點 A, B, C, D ノ坐標ハ夫々 (3, 4, 2),(1, 6, 2), (3, 5, 1), (4, 5, 0) ナル時 BC, CD ガ A 點ニ對シテ張ル角ノ和ガ BD ノ A 點ニ對シテ張ル角ニ等シキコトヲ示シ,以テ之等ノ點ハ同一ノ平面上ニアルコトヲ證セヨ。

解 BA ノ方向餘弦ガ

$$l_1=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad m_1=\frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad n_1=0$$

CA ノ方向餘弦ガ

$$l_2=0 \qquad m_2=\frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad n_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

又 DA ノ方向餘弦ガ

$$l_3=\frac{-1}{\sqrt{6}} \qquad m_3=\frac{-1}{\sqrt{6}} \qquad n_3=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

ヨツテ BA, CA ノナス角ヲ θ_1 トスレバ

$\cos\theta_1=\frac{1}{2}$ 從ツテ $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

又 CA, DA ノナス角ヲ θ_2 トスレバ,

$\cos\theta_2=\frac{3}{\sqrt{12}}$ 從ツテ $\sin\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

サテ

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=0$$

又 BA, DA ノナス角ヲ θ_3 トスレバ

$$\cos\theta_3=0$$

故ニ

$$\theta_1+\theta_2=\theta_3$$

從ツテ又四ツノ點A, B, C, Dガ同一ノ平面ニアリ。

13. 互ニ垂直ナル三ツノ直線AB, CD, EFノ方向餘弦ガ,夫々 l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 及ビ $l_3, m_3 n_3$ ナル時ハ, $l_1+l_2+l_3$, $m_1+m_2+m_3$, $n_1+n_2+n_3$ ナル方向餘弦ヲ有スル直線GHハ之等ト等角ヲナス事ヲ證セヨ。

解 GHトAB, CD, EFトナス角ヲ夫々$\theta_1, \theta_2, \theta_3$トスレバ

$$\cos\theta_1=l_1(l_1+l_2+l_3)+m_1(m_1+m_2+m_3)+n_1(n_1+n_2+n_3)$$
$$=1+l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2+l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3$$

同樣ニ

$$\cos\theta_2=1+l_2l_1+m_2m_1+n_2n_1+l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3$$
$$\cos\theta_3=1+l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1+l_3l_2+m_3m_2+n_3n_2$$

然ルニAB, CD, EFハ互ニ垂直ナルガ故ニ第九節系iiiニヨリ

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$
$$l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0$$
$$l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0$$

故ニ

$$\cos\theta_1=\cos\theta_2=\cos\theta_3=1$$

ヨツテ $\theta_1=\theta_2=\theta_3$

14. 三角形ノ三ツノ頂點ノ坐標ハ夫々$A(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, \cancel{y_2})$ z_2, $C(x_3, y_3, z_3)$ナル時,其三角形ノ重心ノ坐標ヲ求メヨ。

解 先ヅ邊BCノ中點Dノ坐標ヲ求メンニ,第七節ニヨリ

$$\frac{x_2+x_3}{2},\quad \frac{y_2+y_3}{2},\quad \frac{z_2+z_3}{2}$$

ナリ。然シテ重心ヲGトスレバ

$$AG:GD=2:1$$

ナルガ故ニ,其坐標ヲx, y, zトスレバ

$$x=\frac{x_1+\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)\times 2}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

同樣ニ

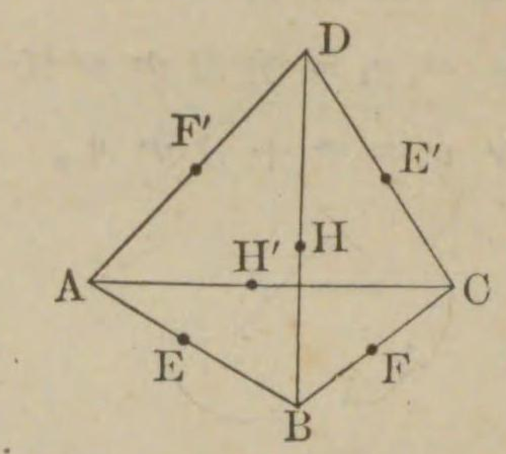
$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\qquad z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

ナリ。

15. 四面體ノ三組ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ中點ハ同一ノ點ナルコトヲ證セヨ。

解 四ツノ頂點ヲ$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ $D(x_4, y_4, z_4)$トスレバ, ABノ中點Eノ坐標ハ

$$\frac{x_1+x_2}{2}\qquad \frac{y_1+y_2}{2}\qquad \frac{z_1+z_2}{2}$$



DCノ中點E'ノ座標ハ

$$\frac{x_3+x_4}{2}\qquad \frac{y_3+y_4}{2}\qquad \frac{z_3+z_4}{2}$$

故ニ相對スル稜AB, DCノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ中點Gノ坐標ハ

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\qquad z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}$$

同樣ニシテ他ノ二組ノ對稜ノ中點ヲ結ブ線分FF', HH'ノ中點ノ坐標ガGノ坐標ニ等シキヲ知ル。故ニ本題ハ證明セラレタリ。

16. 正方形ノ三ツノ頂點ハ(2, 3, 0), (4, 5, −1) (3, 7, 1,)ナル時,第四ノ頂點ノ坐標ヲ求メヨ。

解 A, B, Cヲ夫々(2, 3, 0) (4, 5, −1), (3, 7, 1)トシ求ムル點Dノ坐標ヲx, y, zトスレバ

$$AB=BC=3$$

ナルガ故ニ

$$AD^2=(x-2)^2+(y-3)^2+z^2=3^2\ \cdots\cdots(1)$$
$$CD^2=(x-3)^2+(y-7)^2+(z-1)^2=3^2\ \cdots\cdots(2)$$

又 $$BD^2=(x-4)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3^2+3^2\ \cdots\cdots(3)$$

ナラザルベカラス。(1), (2)ヨリ

$$x+4y+z=23$$

(1), (3)ヨリ

$$2x+2y-z=10$$

ヨツテ $y=6-\frac{z}{2}$　$x=z-1$,

コレヲ(1)ニ代入スルコトニヨリテ

$$\frac{9}{4}z^2-9z+9=0 \qquad \text{即チ} \qquad z=2$$

從ツテ求ムル點ハ(1, 5, 2)ナリ。

17. 原點ヨリ出ヅル三ツノ直線g_1, g_2, g_3ノ方向餘弦ヲl_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2及ビl_3, m_3, n_3トスル時ハ之等ガ同一平面上ニアル爲ノ條件ヲ求メヨ。

解　g_1, g_2, g_3ハ同一ノ點ヨリ出ヅルガ故ニ,之等ハ同一平面ニアル爲ニハ,g_1 ~~ニ垂直ナル任意ノ直線~~~~g_4~~~~ハ~~ g_2, g_3 ニ~~モ垂直ナルヲ~~要シ而カモソレニテ十分ナリ。故ニ今g_4ノ方向餘弦ヲl, m, nトスレバ
其ノ上ナル直線g_4ガ存在ルヲ

$$ll_1+mm_1+nn_1=0$$
$$ll_2+mm_2+nn_2=0$$
$$ll_3+mm_3+nn_3=0$$

ナル關係ガ同時ニ成立スベキ筈ナリ。ソレガ爲ニハ與ヘラレタル方向餘弦ノ間ニ

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=0$$

ナル等式ガ成立スルヲ要ス。コレ求ムル條件ナリ。

18. 二ツノ直線g_1, g_2ノ方向餘弦ハ夫々1, 1, 0及ビ0, 1, −1ニ比例スルトイフ。g_1ニ垂直ニシテg_2ト30°ノ角度ヲナス直線ノ方向餘弦ハ1, −1, 2ニ比例スルコトヲ證セヨ。

解　題意ニヨリ,g_1ノ方向餘弦ハ$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0$ニシテ,$g_2$ノ方向餘弦ハ$0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$或ハ$0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ナリ今$g_1$ニ垂直ニシテ,$g_2$ニ30°ヲナス直線ノ方向餘弦ヲ$l, m, n$トスレバ,題意ニヨリ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}l+\frac{1}{\sqrt{2}}m=\cos 90^\circ=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}m+\frac{1}{\sqrt{2}}n=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \cdots\cdots(2)$$

而シテ又

$$l^2+m^2+n^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル關係アルベキナリ,コレ等ヨリ$l:m:n$ヲ求ムレバ1, −1, 2ナルコト

ヲ知ル。

19. 三角形ノ三ツノ頂點ガ(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)及ビ(x_3, y_3, z_3)ナル時其面積ヲ求メヨ。

解　三角形ノ面積ヲAトシ,三ツノ坐標面yz, zx及ビxy面ニ投ズル射影ノ面積ヲ夫々A_{yz}, A_{xz}, A_{xz}トスレバ,A_{yz}ノ三ツノ頂點ハyz面ノ上ニアルヲ以テ其面積ハ平面ノ場合ニ於ケル三ツノ點(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_3),ノナス三角形ノ面積ニ等シ。故ニ

$$A_{xy}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{同様ニ} \qquad A_{zx}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{zy}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

ナリ。ヨツテ第十三節例七ニヨリテ,所要ノ面積Aハ

$$\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1, & z_1 & 1 \\ y_2, & z_2 & 1 \\ y_3, & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1, & z_1 & 1 \\ x_2, & z_2 & 1 \\ x_3, & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1, & y_1 & 1 \\ x_2, & y_2 & 1 \\ x_3, & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}\,.$$

ナリ。

20. 極坐標3, 30°, 60°ナル點ヲ直角坐標ニテ表ハセ。

解　$r=3,\ \theta=30^\circ\ \varphi=60^\circ$ナルガ故ニ,第十八節ニヨラバ

$$x=r\sin\theta\cos\varphi=\frac{3}{4} \qquad y=r\sin\theta\sin\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad z=r\cos\varphi=\frac{3}{2}$$

ヨツテ點$\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{2}\right)$ナリ。

21. 直角坐標ニテ(3, 4, 5)ナル點ヲ極坐標ニテ示セ。

解　第十八節ニヨリ

$$r=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{5}=1 \qquad \therefore\ \theta=45^\circ, \qquad (225^\circ\text{ヲ捨テル})$$

又　$\tan\varphi=\frac{4}{3}$　　從ツテ　$\varphi=\tan^{-1}\frac{4}{3}$

即チ點　$\left(5\sqrt{2},\ 45^\circ\ \ \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$ナリ。

注意　與ヘラレタル點ハ$(-3, -4, 5)$ナル時ハ$\tan\varphi=\dfrac{4}{3}$ナルモφヲ$(\pi+\tan\dfrac{4}{3}$トセザルベカラズ。(拙著高等平面三角法參照)

22.　極坐標ニ於ケル二ツノ點(r, θ, φ), (r', θ', φ')ノ間ノ距離ハ

$$\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\{\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\}}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　二ツノ點ノ直角座標ヲ(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)ト假定スレバ,夫等ノ距離ハ

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ナリ。

然ルニ

$$\left.\begin{array}{l} x_1=r\sin\theta\cos\varphi \\ y_1=r\sin\theta\sin\varphi \\ z_1=r\cos\varphi \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x_2=r'\sin\theta'\cos\varphi' \\ y_2=r'\sin\theta'\sin\varphi' \\ z_2=r'\cos\varphi' \end{array}$$

ナルガ故ニ上ノ公式ニ代入スレバ

$$\left\{(r'\sin\theta'\cos\varphi'-r\sin\theta\cos\varphi)^2+(r'\sin\theta'\sin\varphi'-r\sin\theta\sin\varphi)^2+(r'\cos\varphi'-r\cos\varphi)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

實際計算ヲ行ヒ且ツ

$$\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'=\cos(\varphi-\varphi')$$

ナル事ニ注意スレバ,容易ニ求ムル結果ヲ得ベシ。

23.　方程式$y=x$ハ如何ナル表面ヲ表ハスカ。

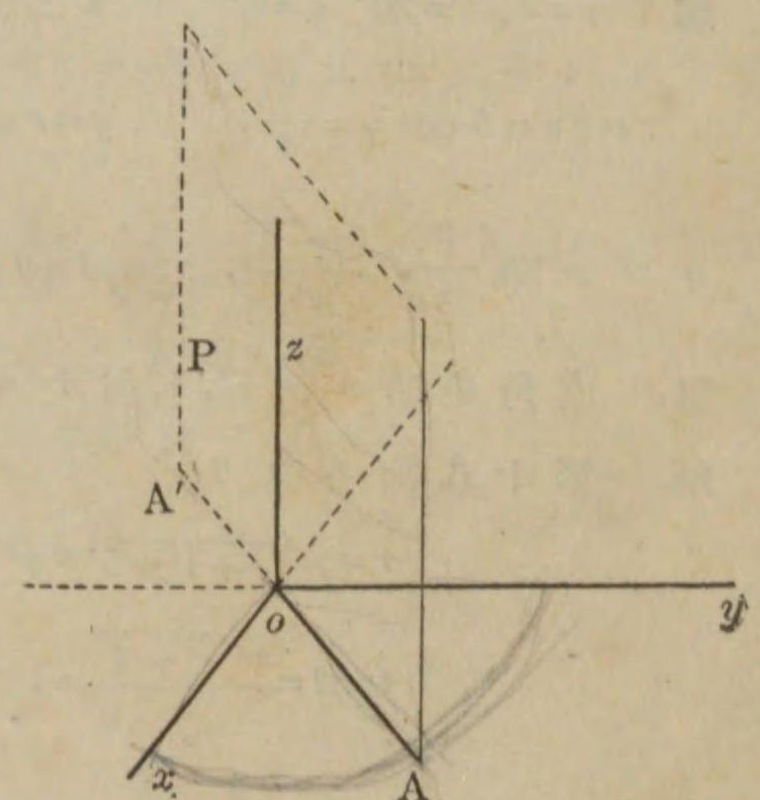
解　xy面ニ於テ,曲線

$$y=x$$

ヲ畫ケバ角xoyヲ二等分スル直線AOA′ヲ得。

今AA′ヲ含ミxy面ニ垂直ナル平面Pヲ作ラバ,Pノ上ノ點ノy坐標トx坐標トノ間ニハ,常ニ

$$y=x$$



ナル關係アリ。逆ニコノ平面外ノ何レノ點モ$y=x$ヲ滿足スルコトナシ。ヨツテ與ヘラレタル方程式ハ平面Pヲ表ハス。

24.　方程式$x^2-a^2=0$ハ如何ナル表面ヲ表ハスカ。

解　與ヘラレタル方程式ハ二ツノ方程式

$$x-a=0, \qquad x+a=0$$

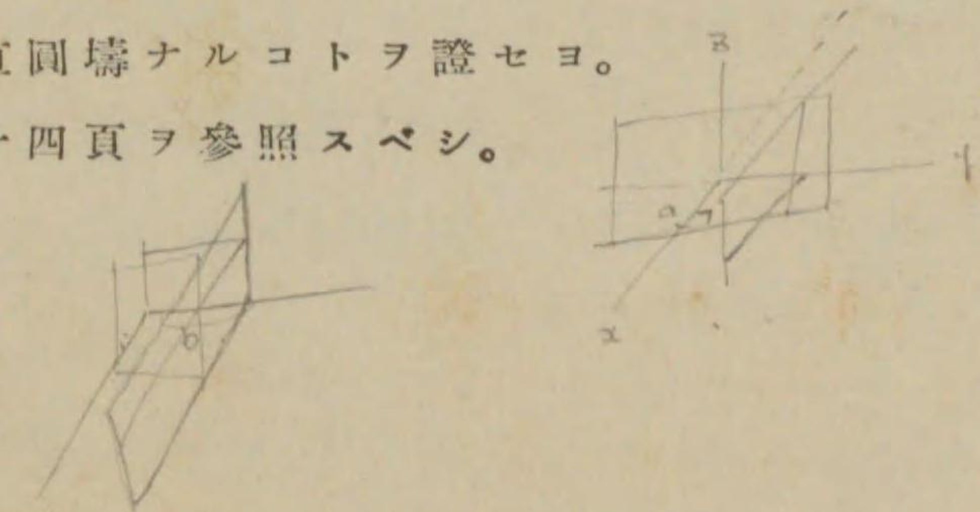
ニ分解セラル。故ニ求ムル表面ハx軸上ニ於テ,原點ヨリa及ビ$-a$ノ距離ニアル點ヲ過リ,x軸ニ垂直ナル二ツノ平行平面ヲ表ハス。

25.　$\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array}\right\}$ハ一ツノ直線ヲ表ハスコトヲ示セ。

解　$x=a$ハx軸上ニ於テ原點ヨリaノ距離ニアル點ヲ過リ且ツ之ニ垂直ナル平面ヲ表ハシ,$y=b$ハy軸上ニ於テ原點ヨリbノ距離ニアル點ヲ過リ且ツ之ニ垂直ナル平面ヲ表ハス。而シテ題意ニヨレバ$x=a$, $y=b$ヲ同時ニ滿足スルモノタルヲ要スルガ故ニ,之等ノ二平面ノ交リハ求ムル表面ナリ。然ルニ之等ノ平面ハ互ニ垂直ナルガ故ニ一直線(z軸ニ平行ナル)ニ於テ交ル。ヨツテ證明セラレタリ。

26.　$y^2+z^2=r^2$ハyz面ニ垂直ナル直圓壔ニシテ,$x^2+z^2=r^2$ハzx面ニ垂直ナル直圓壔ナルコトヲ證セヨ。

解　第二十四頁ヲ參照スベシ。



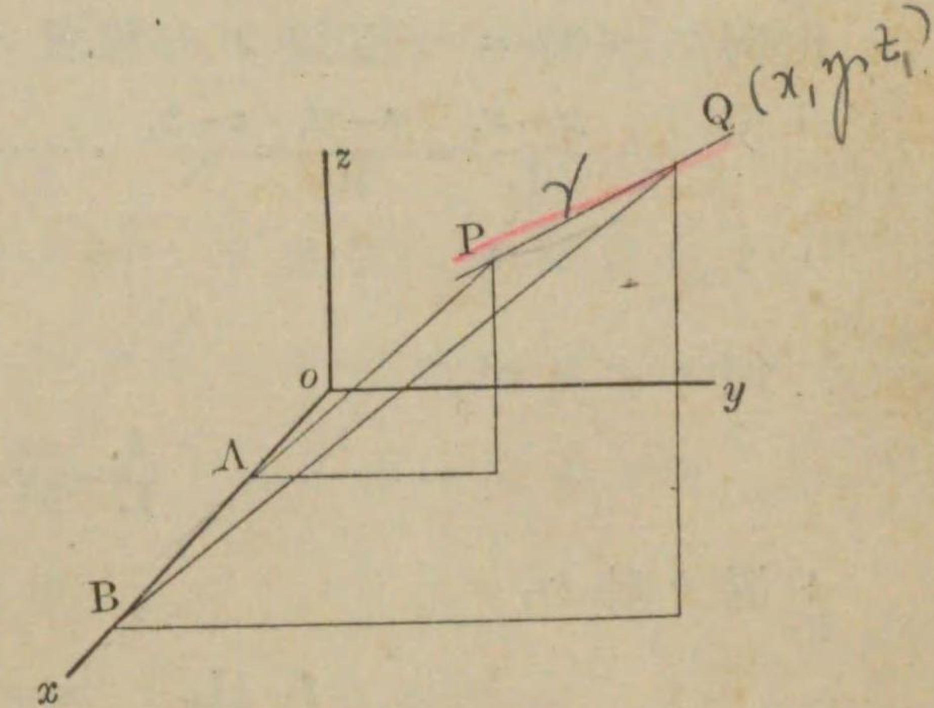
第二章

直　線

22. 表面ノ中最モ簡單ナルモノハ平面ニシテ,曲線ノ中最モ簡單ナルモノハ直線ナリ。而シテ直線ハ二ツノ平面ノ交線トシテ生ズルモノナルガ故ニ,理論的ニイヘバ,直線ニ先ダチテ平面ヲ研究スベキ筈ナレドモ,實際上ノ便宜ノ爲メ直線ヨリ論議シ初メントス。

23. 直線ノ方向餘弦ガ與ヘラレ且ツ一定點ヲ過ル直線ノ方程式。

直線PQノ方向餘弦ヲ l, m, n トシ,定點ヲ $P(x_1, y_1, z_1)$ トセヨ。然ル時ハ直線PQノ位置ハ確定スベシ。吾人ハ先ヅ此直線ノ方程式ヲ求メントス。



PQ上ニ任意ノ點Qヲトリ,其坐標ヲ x, y, z トシPQノ長サヲ r トセヨ。(Q點ガ變レバ r ノ値ガ變ズルモノナリ。) 今線分PQノ x 軸ヘノ射影ヲABトスレバ,

第十一節定理ニヨリテ

$$AB = lr$$

而シテ又

$$AB = x - x_1$$

ナルガ故ニ　　　$$x - x_1 = lr$$

同樣ニ線分PQヲ y 軸及ビ z 軸ニ射影スル事ニヨリテ

$$y-y_1=mr \qquad z-z_1=nr$$

之等ノ方程式ヨリ不定常數 r ヲ消去スレバ

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレPQ上ニ任意ノ點Qヲトル時,其點ノ坐標 x, y, z ノ間ニ存在セザルベカラザル關係ナリ。ヨツテ求ムル直線ノ方程式トナス。

注意 i 方程式(1)ヲ直線ノ對稱方程式トイフ。而シテ斜交軸ノ時ニモ其形ハ變ラズ。然レドモ其場合ニハ l, m, n ハ方向餘弦ニアラズシテ方向比ナリ。

注意 ii 定點 $P(x_1, y_1, z_1)$ ヲ過リ且ツ其方向餘弦ハ L, M, N ニ比例スル時ニモ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。

何トナレバ

$$\frac{l}{L}=\frac{m}{M}=\frac{n}{N}=k$$

ト置ク時ハ,

$$l=kL, \qquad m=kM, \qquad n=kN$$

ナルガ故ニ

$$l^2+m^2+n^2=k^2(L^2+M^2+N^2)$$

ヨツテ

$$k=\pm\sqrt{\frac{l^2+m^2+n^2}{L^2+M^2+N^2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{L^2+M^2+N^2}}$$

從ツテ

$$L=\pm l\sqrt{L^2+M^2+N^2} \qquad M=\pm m\sqrt{L^2+M^2+N^2}$$

$$N=\pm n\sqrt{L^2+M^2+N^2}$$

ナリ。之等ヲ方程式(2)ニ代入シテ後共通因數 $\pm\sqrt{L^2+M^2+N^2}$ ヲ取リ去ル時ハ方程式(1)ヲ得ルヲ以テナリ。

例 1 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{0}$ ハ如何ナル直線ナルカ。

解 公式(1)ト比較スレバ,此直線ハ點(2, −1, 3)ヲ過ルコト明カナリ。次ニ方向餘弦ヲ求メンニ, 3, 4, 0 ハ l, m, n ナルカ又ハ夫等ニ比例スベキガ故ニ

$$\frac{3}{l}=\frac{4}{m}=\frac{0}{n}$$

今之等ノ分數ノ値ヲ k ト置キ $l^2+m^2+n^2=1$ ナルコトニ注意スレバ

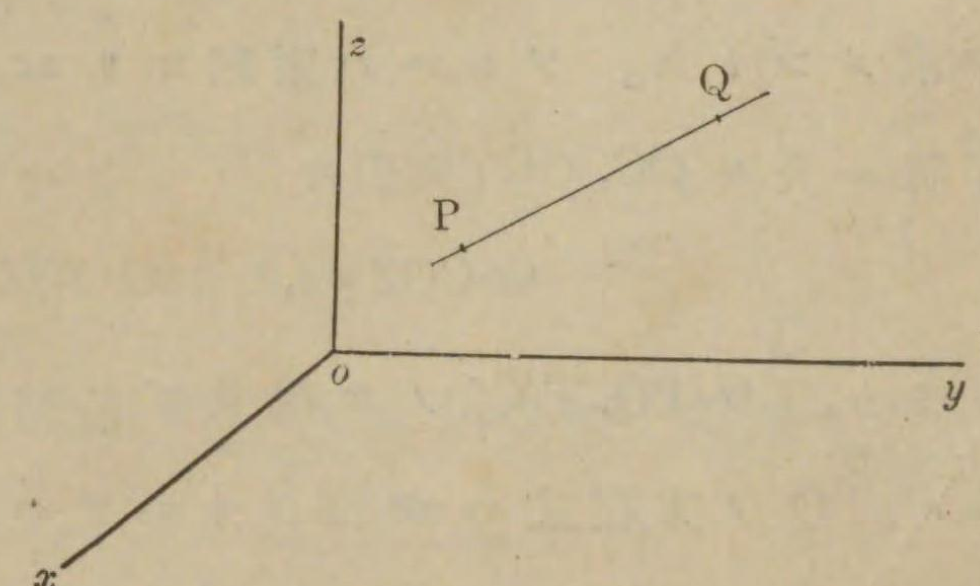
$$l=\pm\frac{3}{5} \qquad m=\pm\frac{4}{5} \qquad n=0$$

ナルコトヲ知ル。故ニ此直線ハ點(2, −1, 3)ヲ過リ方向餘弦ガ $\pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}$, 0ナル直線ナリ。

注意 上ノ方向餘弦ノ値ハ,複號ノ何レヲ採用スルモ可ナリ。其複號ノ出ヅル所以ハ直線PQニ於テPヨリ見テQノ方向ヲ直線ノ正ノ方向トスルカ,或ハ負ノ方向トスルカニ依ルナリ。

24. 二點ヲ過ル直線ノ方程式

二ツノ點ヲ $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ トシ,直線PQノ方向餘弦ヲ l, m, n ト假定スレバ,其方程式ハ,



$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

サテ此直線ガQ點ヲ

過ル爲ニハ

$$\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=\frac{z_2-z_1}{n}$$

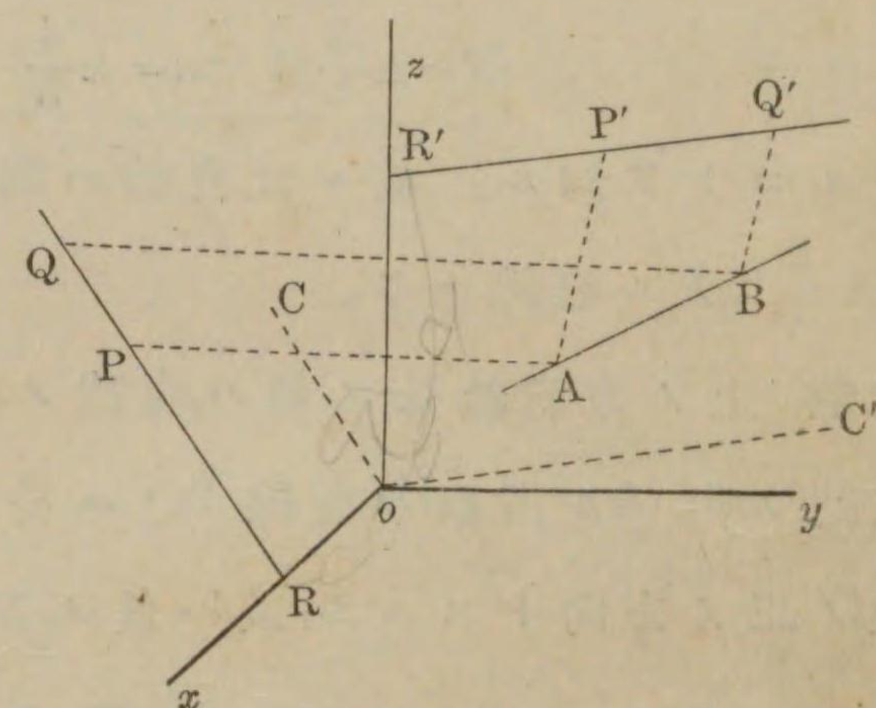
即チ其方向餘弦ハ x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 ニ比例ス。故ニ前節(2)ニヨリ求ムル直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

ナリ。

25. 射影ヲ知リテ直線ノ方程式ヲ求ムルコト

空間ニ於ケル直線ノ位置ハ,其直線ガ任意ノ二ツノ坐標面ニ投ズル射影ニヨリテ之ヲ知ル事ヲ得。何トナレバ



PQ, P'Q' ヲ空間ニ於ケル一ツノ直線ABノ二ツノ坐標面例ヘバ zx 面及ビ yz 面ニ投ジタル射影ナリトセヨ。然ル時ハ AB ハ PQ ヲ含ミ zx 面ニ垂直ナル平面ト, P'Q' ヲ含ミ yz 面ニ垂直ナル平面トノ交線トシテ得ラルベケレバナリ。吾人ハ其見地ニ立チテ直線 AB ノ方程式ヲ求メントス。ソレニハ原點ヨリ zx 面及ビ yz 面ニ PQ, P'Q' ニ平行ニ夫々 OC, OC' ヲ引キ

$$\tan \mathrm{COZ}=a,\qquad \tan \mathrm{C'OZ}=b$$

ナリトシ,且ツ PQ. P'Q' ノ x 軸及ビ y 軸上ノ截片ヲ夫々 c, d トスレバ, PQ ノ方程式ハ zx 面ノ上ニテハ

$$x=az+c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ, P'Q' ノ方程式ハ yz 面ノ上ニテハ

$$y=bz+d \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。然ルニ(1)ハ又直線 PQ ヲ含ミ且ツ zx 面ニ垂直ナル平面ナリト解セラルベク,(2)ハ又 P'Q' ヲ含ミ yz 面ニ垂直ナル平面ナリト解セラルベシ。故ニ(1), (2)ヲ一緒ニシタルモノ,即チ

$$\left.\begin{array}{l}x=az+c\\ y=bz+d\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ハ二ツノ平面ノ交線 AB ノ方程式ナリトス。

注意 i 以上ハ空間ニ於ケル直線ノ射影ハ直線トナル場合ニ就キテ論ゼリ。然レドモ若シ一ツノ坐標面ヘノ射影ハ點トナル時,例ヘバ xy 面ヘノ射影ハ單ニ點(a, b, o)トナリタル時ニハ,其直線ハ實ハ xy 面ニ垂直ナルガ故ニ,其方程式ハ直チニ

$$\left.\begin{array}{l}x=a\\ y=b\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ニテ表ハサルベシ。

注意 ii 方程式(3)ニ於テ $z=o$ ト置ケバ, $x=c$, $y=d$ トナル。故ニ直線 AB ト xy 面トノ交點ハ點 (c, d, o) ナリ。同樣ニ yz 面トノ交點ハ點 $\left(o, \frac{ad-bc}{a}, -\frac{c}{a}\right)$ ナリ。

注意 iii 方程式(3)ヨリ z ヲ消去スレバ

$$y-d=\frac{b}{a}(x-c)$$

コレ直線 AB ノ上ノ點ノ x 坐標及ビ y 坐標ノ關係ヲ示スモノニシテ, xy 面ヘノ射影ノ方程式ニ外ナラズ。

注意 iv 直線ガ若シ原點ヲ過ル時ハ,其方程式ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=az \\ y&=bz \end{aligned}\right\}$$

ナル形ヲナス。

26. 二ツノ直線ノナス角

二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$\frac{x-x_2}{l'}=\frac{y-y_2}{m'}=\frac{z-z_2}{n'}$$

ナリトシ,之等ノナス角ヲ θ トス。(第六節定義參照)サテ l, m, n 及ビ l', m', n' ガ夫等ノ直線ノ方向餘弦ナル時ハ,第九節ニ得タル公式

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn' \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヨリ θ ヲ求ムルコトヲ得ベシ。

注意 i $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(ll'+mm'+nn')^2}$

而シテ $(l^2+m^2+n^2)\,(l'^2+m'^2+n'^2)=1$ ナルコトニ注意スレバ

$$\sin\theta=\sqrt{(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2}$$

ナルガ故ニ

$$mn'-m'n=nl'-n'l=lm'-l'm=0$$

即チ

$$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'} \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナル時ハ互ニ平行ナリ。

若シ二ツノ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}$$

$$\frac{x-x_2}{L'}=\frac{y-y_2}{M'}=\frac{z-z_2}{N'}$$

ナル時ハ先ヅ夫等ノ方向餘弦ヲ求メタル後,公式(1)ニ代入スベシ。然ル時ハ

$$\cos\theta=\frac{LL'+MM'+NN'}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2}} \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。

注意 ii $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{(MN'-M'N)^2+(NL'-N'L)^2+(LM'-L'M)^2}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2}}$

ナルガ故ニ

$$LL'+MM'+NN'=0 \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

ナル時ハ,二ツノ直線ハ互ニ垂直ニシテ,

$$MN'-M'N=NL'-N'L=LM'-L'M=0$$

ナル時,即チ

$$\frac{L}{L'}=\frac{M}{M'}=\frac{N}{N'} \quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

ナル時ハ互ニ平行ナリ。

若シ又與ヘラレタル直線ノ方程式ガ

$$\left.\begin{aligned} x&=az+c \\ y&=bz+d \end{aligned}\right\}$$

及ビ

$$\left.\begin{aligned} x&=a'z+c' \\ y&=b'z+d' \end{aligned}\right\}$$

ナル時ハ,先ヅ之等ヲ變形シテ

$$\frac{x-c}{a}=\frac{y-d}{b}=\frac{z}{1}$$

$$\frac{x-c'}{a'}=\frac{y-d'}{b'}=\frac{z}{1}$$

トナス時ハ,之等ノ直線ノ方向餘弦ハ

$$l=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \qquad m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

$$n=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

及ビ

$$l'=\pm\frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}\qquad m'=\pm\frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$$

$$n'=\pm\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$$

トナルヲ知ルガ故ニ

$$\cos\theta=\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{(ab'-a'b)^2+(a-a')^2+(b-b')^2}}{\sqrt{a^2+a^2+1}\sqrt{b'^2+b'^2+1}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

従ッテ $aa'+bb'+1=0$ ……………………(8)

ナル時ハ二ツノ直線ハ互ニ垂直ニシテ

$$ab'-a'b=0\qquad a-a'=0\qquad b-b'=0$$

卽チ

$$a=a'\qquad b=b'\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ナル時ハ互ニ平行ナリ。

例 2 原點ヲ點(2, 1, 1)ニ結ビ付ケル直線ト二ツノ點(3, 7, −1)(5, 3, −1)ヲ過ル直線トハ互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ。

解 原點ト點(2, 1, 1)トヲ結ブ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

故ニ此直線ノ方向餘弦ハ

$$l=\pm\frac{2}{\sqrt{6}},\qquad m=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\qquad n=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},$$

又二ツノ點(3, 7, −1), (5, 3, −1)ヲ結ブ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-3}{3-5}=\frac{y-7}{7-3}=\frac{z+1}{0}$$

故ニ此直線ノ方向餘弦ハ

$2(3-5)+1(7-3)+1(0)=0$

$$l'=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad m'=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\qquad n'=0$$

$x=az+c$
$x=a'z+c'$

ヨッテ此二ツノ直線ノナス角ヲ θ トスレバ,

$c'-c=z(a-a')$
$z=\frac{c'-c}{a-a'}$

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn'=0$$

従ッテ $\theta=\frac{\pi}{2}$ ヨッテ互ニ垂直ナリ。

$\begin{cases}x-c=az\\y-d=az\end{cases}$ $y=az+d$
$\begin{cases}x-c'=a'z\\y-d'=a'z\end{cases}$ $y=a'z+d'$

例 3 二ツノ直線

$$\frac{x+1}{p}=\frac{y-1}{2p+1}=\frac{z-3}{5}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+2}{p-2}$$

$bz+d=a'z+d'$
$z(b-a')=d'-d$

$\frac{x-c}{a}=\frac{x-c'}{a'}$
$a'x-a'c=ax-ac'$
$x(a-a')=a'c-ac'$
$x=\frac{a'c-ac'}{a-a'}$

ハ互ニ垂直ナル時ハ p ノ値如何。

解 公式(4)ニヨレバ,垂直ナル條件ハ

$$LL'+MM'+NN'=2p+(2p+1)+5(p-2)=9p-9=0$$

ナル事ナリ。故ニ $p=1$ ナリトス。

27. 二直線ガ相交ル條件

$\begin{vmatrix}1&0&-a&-c\\0&1&-b&-d\\1&0&-a'&-c'\\0&1&-b'&-d'\end{vmatrix}=0$

二ツノ與ヘラレタル直線ヲ

$$\begin{cases}x=az+c\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\y=bz+d\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=a'z+c'\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\y=a'z+d'\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

ナリトシ,之等ガ相交ル爲ノ條件ヲ求メンニ,若シ交點ガ存在スル時ハ,其點ノ坐標ガ方程式ヲ同時ニ滿足セシメザルベカラズ換言スレバ三ツノ未知數 x, y, z ニ對シテ四ツノ方程式ガ同時ニ成立スルヲ要ス。ヨッテ求ムル條件ハ之等ノ方程式ヨリ三ツノ未知數ヲ消去スルコトニヨリテ得ラル。

ソレガ爲ニハ(1)ト(3)及ビ(2)ト(4)トヨリ

$$z=\frac{c'-c}{a-a'}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$z=\frac{d'-d}{b-b'}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ヨツテ相交ル爲ノ條件ハ

$$\frac{c'-c}{a-a'}=\frac{d'-d}{b-b'}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ナルコトナリ。

若シ與ヘラレタル直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}$$

及ビ

$$\frac{x-x_2}{L'}=\frac{y-y_2}{M'}=\frac{z-z_2}{N'}$$

ナル時ハ,方程式ヲ變形シテ

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{L}{N}z+\frac{1}{N}(Nx_1-Lz_1)\\ y&=\frac{M}{N}z+\frac{1}{N}(Ny_1-Mz_1)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{L'}{N'}z+\frac{1}{N'}(N'x_2-L'z_2)\\ y&=\frac{M'}{N'}z+\frac{1}{N'}(N'y_2-M'z_2)\end{aligned}\right\}$$

トシタル後,公式(7)ヲ用フレバ,相交ルベキ條件トシテ

$$(x_1-x_2)(MN'-M'N)+(y_1-y_2)(NL'-N'L)+$$
$$(z_1-z_2)(LM'-L'M)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ヲ得ベシ。

23. 上ノ條件ハ又次ノ如クニシテモ算出スルヲ得ベシ。

假リニ其交點ノ坐標ヲ α, β, γ トスレバ,與ヘラレタル直線ノ方程式ハ,其坐標ニテ滿足セラルベシ。

卽チ

$$\frac{\alpha-x_1}{L}=\frac{\beta-y_1}{M}=\frac{\gamma-z_1}{N}$$

$$\frac{\alpha-x_2}{L'}=\frac{\beta-y_2}{M'}=\frac{\gamma-z_2}{N'}$$

之等ノ分數ノ値ヲ夫々 k, k' ト置ケバ,

$$\alpha-x_1=Lk \qquad \beta-y_1=Mk \qquad \gamma-z_1=Nk$$

$$\alpha-x_2=L'k' \qquad \beta-y_2=M'k' \qquad \gamma-z_2=N'k'$$

故ニ

$$x_1-x_2=L'k'-Lk \qquad y_1-y_2=M'k'-Mk$$

$$z_1-z_2=N'k'-Nk$$

茲ニ於テ k 及ビ k' ヲ消去スレバ,前ト同ジ結果ヲ得。

注意 行列式ノ理論ニ從ヘバ,k, k' ヲ消去セル結果ヲ直チニ次ノ如ク記スルコトヲ得。

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2, & L', & L \\ y_1-y_2, & M', & M \\ z_1-z_2, & N', & N \end{vmatrix}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

例 4 二ツノ直線

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}$$

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-6}{2}$$

ガ相交ルコトヲ示セ。

解 $x_1=2, \quad y_1=3, \quad z_1=1,$

$x_2=-2 \quad y_2=1 \quad z_2=6$

$L=-5 \quad M=2 \quad N=3,$

$L'=1 \quad M'=-4 \quad N'=2$

コレヲ公式(9)ニ代入スレバ

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ヨツテ之等ノ二ツノ直線ハ相交ル。

29. 二ツノ直線ノ交點

二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$\begin{cases} x = az + c & \cdots\cdots(1) \\ y = bz + d & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a'z + c' & \cdots\cdots(3) \\ y = b'z + d' & \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

ナリトシ且ツ夫等ノ係數間ニ

$$\frac{c'-c}{a-a'} = \frac{d'-d}{b-b'} \quad \cdots\cdots(5)$$

ナル關係アリトセヨ。然ルトキハ上ノ二ツノ直線ハ相交ルベシ(前節公式 7)。今交點ノ坐標ヲ x, y, z トスレバ,前節ニヨリテ

$$z = \frac{c'-c}{a-a'} \quad \cdots\cdots(6)$$

或ハ

$$z = \frac{d'-d}{b-b'} \quad \cdots\cdots(7)$$

ニシテ,(6) ヲ (1) 又ハ (3) ニ代入スレバ

$$x = \frac{ac'-a'c}{a-a'}$$

(7) ヲ (2) 又ハ (4) ニ代入スレバ

$$y = \frac{bd'-b'd}{b-b'}$$

ヲ得ベシ。

30. 二ツノ直線ニ垂直ナル直線ノ方向餘弦

二ツノ直線ノ方向餘弦ヲ l, m, n 及ビ l', m', n' ナリトシ,求ムル直線ノ方向餘弦ヲ λ, μ, ν トスレバ,第九節系 iii ニヨリテ

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

$$l'\lambda + m'\mu + n'\nu = 0$$

ナル關係アルヲ要ス。故ニ之等ヨリ比 $\lambda:\mu:\nu$ ヲ求ムレバ

$$\frac{\lambda}{mn'-m'n} = \frac{\mu}{nl'-n'l} = \frac{\nu}{lm'-l'm}$$

故ニ

$$\lambda = \frac{mn'-m'n}{\varDelta}, \qquad \mu = \frac{nl'-n'l}{\varDelta}$$

$$\nu = \frac{lm'-l'm}{\varDelta}$$

但シ

$$\varDelta = \sqrt{(mn'-m'n)^2 + (nl'-n'l)^2 + (lm'-l'm)^2}$$

ナリトス。

31. 一點ヲ過リ,一ツノ直線ニ交リ且ツ之ニ垂直ナル直線ノ方程式

與ヘラレタル點ヲ $A(x_1, y_1, z_1)$ トシ,與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n} \quad \cdots\cdots(1)$$

ナリトス。

サテ定點 $A(x_1, y_1, z_1)$ ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{\mathrm{L}} = \frac{y-y_1}{\mathrm{M}} = \frac{z-z_1}{\mathrm{N}} \quad \cdots\cdots(2)$$

ナリト假定スレバ,此直線ガ直線(1)ニ垂直ナル爲ニハ

$$l\mathrm{L} + m\mathrm{M} + n\mathrm{N} = 0 \quad \cdots\cdots(3)$$

又(2)ガ(1)ト交ル爲ニハ第二十八節注意ニヨリ

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2, & l, & \mathrm{L} \\ y_1-y_2, & m, & \mathrm{M} \\ z_1-z_2, & n, & \mathrm{N} \end{vmatrix} = 0$$

卽チ

$$(x_1-x_2)(m\mathrm{N}-n\mathrm{M})+(y_1-y_2)(n\mathrm{L}-l\mathrm{N})+(z_1-z_2)$$
$$(l\mathrm{M}-m\mathrm{L})=0 \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ヨツテ(3),(4)ヨリ L:M:N ヲ求ムレバ直線(2)ノ方程式ハ確定スベシ。

32. 一點ヲ過リ二ツノ直線ニ交ル直線ノ方程式

一ツノ點ヲ$(a,\ b,\ c)$トシ,與ヘラレタル二ツノ直線ヲ

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x-x_2}{l'}=\frac{y-y_2}{m'}=\frac{z-z_2}{n'} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリトス。

然ル時,點$(a,\ b,\ c)$ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-a}{\mathrm{L}}=\frac{y-b}{\mathrm{M}}=\frac{z-c}{\mathrm{N}} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ト假定ス。但シ L:M:N ハ與ヘラレタル二ツノ直線ニ交ルベキ條件

$$(a-x')(m\mathrm{N}-n\mathrm{M})+(b-y')(n\mathrm{L}-l\mathrm{N})+(c-z')(l\mathrm{M}-m\mathrm{L})=0$$

及ビ

$$(a-x'')(m'\mathrm{N}-n'\mathrm{M})+(b-y'')(n'\mathrm{L}-{}'l\mathrm{N})$$
$$+(c-z'')(l'\mathrm{M}-m'\mathrm{L})=0$$

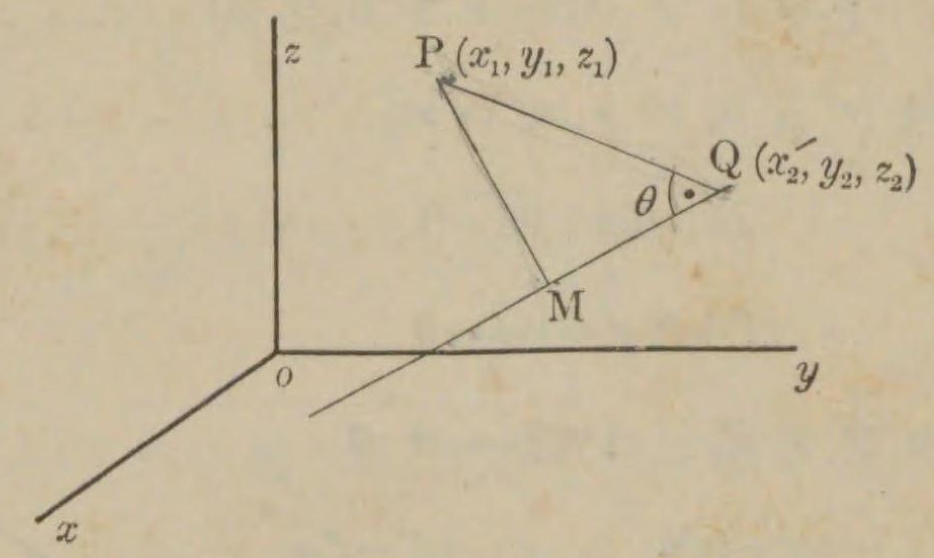
ヨリ得ラルベク,從ツテ直線(3)ノ方程式ハ確定ス。

33. 定點ヨリ定直線ニ至ル距離

定點ヲ $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ トシ定直線 MQ ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

トスル時,P ヨリ此直線ニ下ス垂線 PM ノ長サヲ求メントス。



サテ PQ ガ直線トナス角ヲ θ トスレバ,

$$\mathrm{PM}=\mathrm{PQ}\sin\theta$$

又 PQ ノ長サハ

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

次ニ PQ ノ方向餘弦ハ

$$\frac{x_1-x_2}{\varDelta},\quad \frac{y_1-y_2}{\varDelta}\quad \frac{z_1-z_2}{\varDelta}$$

但シ　$\varDelta=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ ナリトス。

又　$$\cos\theta=\frac{l(x_1-x_2)+m(y_1-y_2)+n'z_1-z_2)}{\varDelta}$$

從ツテ

$$\mathrm{PM}=\mathrm{PQ}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-\{l(x_1-x_2)+m(y_1-y_2)+n(z_1-z_2)\}^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots(2)$$

コレ已ニ第十四節ニテ得ラレタリト雖モ,再ビ玆ニ研究セリ。

34. 二直線ノ間ノ最短距離

同一ノ平面上ニアラザル二ツノ與ヘラレタル直線ヲ AC, BD トシ其方程式ヲ夫々

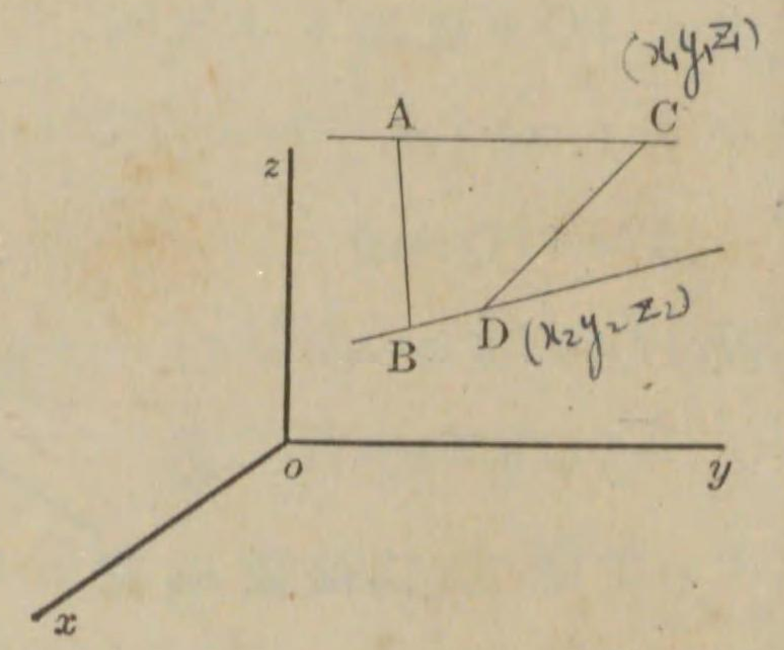
$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$\frac{x-x_2}{l'}=\frac{y-y_2}{m'}=\frac{z-z_2}{n'}$$

トス。

サテ初等幾何學ニヨルト同一ノ平面上ニアラザル二ツノ直線ニ共通ナル垂線ガ唯一ツアリ,而カモ二直線間ノ最短距離ナ

リ。今コレヲ AB トシ其方向餘弦ヲ λ, μ, ν トスレバ,



$$\lambda l+\mu m+\nu n=0$$

$$\lambda l'+\mu m'+\nu n'=0$$

ヨツテ第三十節ニヨリ

$$\lambda=\frac{mn'-m'n}{\varDelta} \qquad \mu=\frac{nl'-l'n}{\varDelta}$$

$$\nu=\frac{lm'-l'm}{\varDelta}$$

但シ　$\varDelta=\sqrt{(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2}$

次ニ線分 CD ノ方向餘弦ハ

$$\lambda'=\frac{x_1-x_2}{\varDelta'} \qquad \mu'=\frac{y_1-y_2}{\varDelta'} \qquad \nu'=\frac{z_1-z_2}{\varDelta'}$$

但シ　$\varDelta'=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

故ニ AB ト CD ノナス角ヲ θ トスレバ

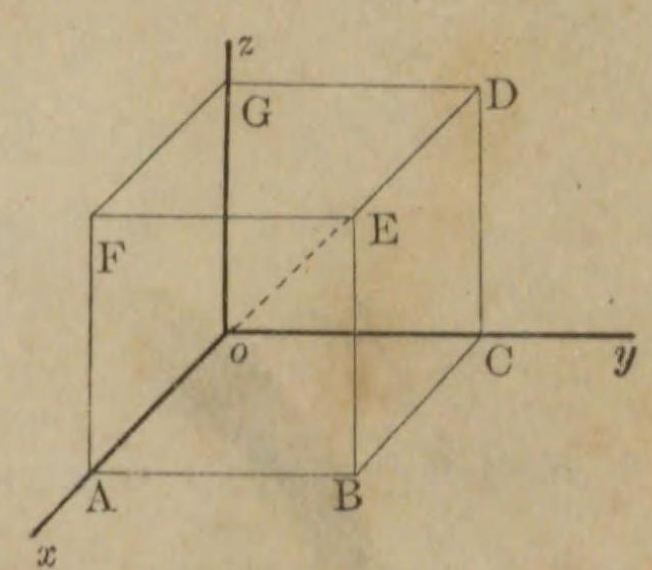
$$\cos\theta=\frac{(x_1-x_2)(m'n-m'n)+(y_1-y_2)(nl'-n'l)+(z_1-z)(lm'-l'm)}{\varDelta\varDelta'}$$

然ル時ハ AB=CD $\cos\theta$ ナルヲ以テ

$$AB=\frac{(x_1-x_2)(mn'-m'n)+(y_1-y_2)(nl'-n'l)+(z_1-z_2)(lm'-l'm)}{\sqrt{(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2}}$$

ナリ。

例 5　立方體ノ對角線ト之ニ交ラザル任意ノ稜ノ間ノ最短距離ヲ求メヨ。



解　圖ノ如ク,三ツノ稜ヲ坐標軸ニトリ,一邊ノ長サヲ a トスレバ,一ツノ對角線 OE ノ方程式ハ

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y-a}{a}=\frac{z-a}{a}$$

ニシテ其方向餘弦ハ

$$l=m=n=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ナリ。

又コノ對角線ニ交ラザル一ツノ稜 AB ハ點 A(a, a, a)ヲ過リ且ツ x 軸及ビ z 軸ニハ垂直ニシテ, y 軸トハ平行ナルガ故ニ其方程式ハ

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$$

ヨツテ　　$x_1=y_1=z_1=a, \qquad l=m=n=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$

$$x_2=a \quad y_2=z_2=0, \quad l'=n'=0 \quad m'=1$$

ヲ上ノ公式ニ代入スレバ, OE ト AB トノ最短距離ハ $\frac{a}{\sqrt{2}}$ トナル。(其他ノ稜ニ就キテモ同樣ナリ)

35. 共通垂線ノ方程式

同一ノ平面上ニアラザル二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\frac{x-x_2}{l'}=\frac{y-y_2}{m'}=\frac{z-z_2}{n'} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トシ,之等ノ共通垂線ノ上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ (a, b, c) ト假定シ其直線ノ方向餘弦ヲ λ, μ, ν トスレバ,共通垂線ノ方程式ハ

$$\frac{x-a}{\lambda}=\frac{y-b}{\mu}=\frac{z-c}{\nu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但シ λ, μ, ν ハ第三十節ニ於テ知ラレタルガ如ク

$$\lambda=\frac{mn'-m'n}{\varDelta} \qquad \mu=\frac{nl'-n'l}{\varDelta}$$

$$\nu=\frac{lm'-l'm}{\varDelta}$$

但シ $\Delta=\sqrt{(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2}$

又(3)ハ(1)及ビ(2)ト交ルベキガ故ニ,次ノ二ツノ條件アリ。

$$(a-x_1)(\nu m-\mu n)+(b-y_1)(\lambda n-\nu l)+(c-z_1)(\mu l-\lambda m)=0\cdots\cdots\cdots(4)$$

及ビ

$$(a-x_2)(\nu m'-\mu n')+(b-y_2)(\lambda n'-\nu l')+(c-z_2)(\mu l'-\lambda m')=0\cdots\cdots(5)$$

然ルニ(4)及ビ(5)ニ於ケル a, b, c ハ共通垂線ABノ上ノ任意ノ點ノ坐標ナリト假定セルガ故ニ,求ムル直線ABノ方程式ハ之等ヲ流通坐標 x, y, z ニ化シタルモノ卽チ次ノ二ツノ方程式ヲ聯立セシメタルモノナリ。

$$(x-x_1)(\nu m-\mu n)+(y-y_1)(\lambda n-\nu l)+(z-z_1)(\mu l-\lambda m)=0\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$(x-x_2)(\nu m'-\mu n')+(y-y_2)(\lambda n'-\nu l')+(z-z_2)(\mu l'-\lambda m')=0\cdots\cdots(7)$$

或ハ行列式ニテ之ヲ示スト(6)ハ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ニシテ,(7)ハ

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l' & m' & n' \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ナリ。故ニ(8)ト(9)トヲ一緒ニシタルモノハ又求ムル共通垂線ヲ表ハスモノナリ。

注意 實ハ(6)及ビ(7)ハ共ニ平面ノ方程式ナリ。故ニ之等ヲ聯立セシムル事ハ,ツマリ平面ト平面トノ交線ヲ表ハスモノト知ルベシ。尙詳細ハ次章ニ於テ述ブベシ。

第二章

問 題

1. 二ツノ點(1, 2, 3), (4, 5, 6)ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 第二十四節公式ニヨレバ,求ムル直線ノ方程式ハ,

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z-3}{6-3}$$

卽チ

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{3} \qquad \text{或ハ}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$$

ナリ。

2. 直線ノ zx 面及ビ yz 面ニ投ズル射影ノ方程式ハ,夫々 $x=z+3$, $2y=z-5$ ナル時,其直線ノ xy 面ニ投ズル射影ノ方程式ヲ求メヨ。

解 第二十五節ニヨレバ,コノ直線ノ方程式ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=z+3 \\ 2y&=z-5 \end{aligned}\right\}$$

ヨツテ此直線ノ xy 面ニ投ズル射影ハ z ヲ消去シタルモノ卽チ

$$x-2y=8$$

3. 四ツノ點ノ坐標ガ夫々 $(a-b, a-c, a-d)$, $(b-c, b-d, b-a)$, $(c-d, c-a, c-b)$, 及ビ $(d-a, d-b, d-c)$ ナラバ,之等ノ點ヲ結ビ付ケテ成ル四面體ノ任意ノ相對スル二ツノ稜ノ中點ヲ結ビ付クル四ツノ直線ハ悉ク原點ヲ過ルコトヲ示セ。

解 $(a-b, a-c, a-d)$ ヲA, $(b-c, b-d, b-a)$ ヲB, $(c-d, c-a, c-b)$ ヲC $(d-a, d-b, d-c)$ ヲDトス。今一組ノ對稜AD, BCノ中點ヲ夫々E, Fトスレバ,Eノ坐標ハ

$\left(\frac{d-b}{2}, \frac{a+d-b-c}{2}, \frac{a-c}{2}\right)$ ニシテFノ坐標ハ $\left(\frac{b-d}{2}, \frac{b+c-a-d}{2}, \frac{c-a}{2}\right)$ ナリ。

故ニ直線EFノ方程式ハ

$$\frac{x-\frac{d-b}{2}}{\frac{d-b}{2}-\frac{b-d}{2}}=\frac{y-\frac{a+d-b-c}{2}}{\frac{a+d-b-c}{2}-\frac{b+c-a-d}{2}}=\frac{z-\frac{a-c}{2}}{\frac{a-c}{2}-\frac{c-a}{2}}$$

此方程式ニx, y, zノ代リニ0ト置クモ滿足スベシ。故ニ原點ヲ通過ス。同樣ニシテ他ノ對稜ノ中點ヲ結ブ直線モ亦原點ヲ通過スベシ。

4. 三ツノ點(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)ガ一直線上ニアル條件ヲ求メヨ。

解 二ツノ點(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)ヲ通過スル直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

此直線ノ上ニ第三ノ點ガノリ居ル爲ニハ

$$\frac{x_3-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z_3-z_1}{z_1-z_2}$$

コレ求ムル條件ナリ。

5. 四ツノ點$(1, 0, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 6, 0)$及ビ$(0, -3, 3)$ハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ。

解 前題ニ得タル條件ニ初メノ三ツノ點ノ坐標ヲ代入スレバ

$$\frac{3-1}{1-2}=\frac{6-0}{0-3}=\frac{0-2}{2-1}=-2$$

トナリテ成立スルガ故ニ,之等ハ一直線ノ上ニアリ。次ニ同樣ニシテ第一,第二,第四ノ點ガ又一直線ノ上ニアルコトヲ知ル而シテ之等ノ二ツノ直線ハ二個ノ點$(1, 0, 2)$, $(2, 3, 1)$ヲ共有ス。故ニ四ツノ點ハ結局一ツノ直線上ニアリ。

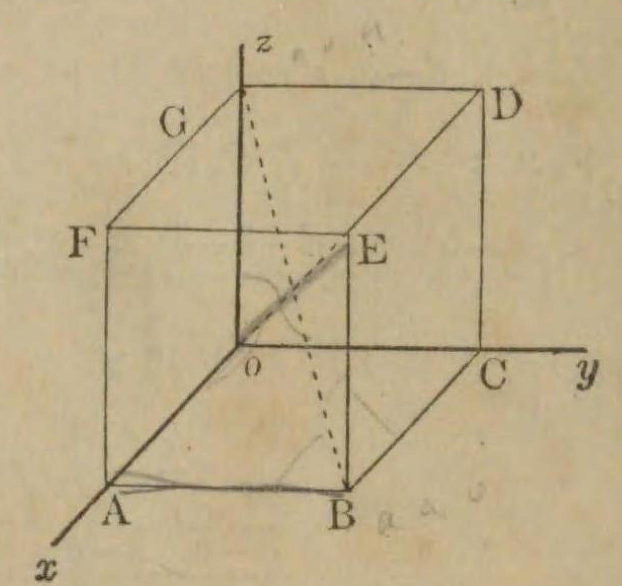
6. 立方體ノ二ツノ對角線ノナス角ヲ求メヨ。

解 立方體ノ三ツノ稜ヲ坐標軸ニトリ,且ツ其一邊ノ長サヲaトスレバ,對角線OEノ方程式ハ

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y-a}{a}=\frac{z-a}{a}$$

ニシテ對角線BGノ方程式ハ

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y-a}{a}=\frac{z}{-a}$$



故ニOEノ方向餘弦(Oヨリ見テEノ方ヲ正ノ方向トスレバ)ハ

$$l=m=n=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ニシテ,BGノ方向餘弦(Gヨリ見テBノ方ヲ正ノ方向トスレバ)ハ

$$l'=m'=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad n'=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ヨツテ求ムル角ヲθトスレバ

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn'=\frac{1}{3}$$

故ニ

$\theta=\cos^{-1}\frac{1}{3}$ニシテ殆ンド$70°30'$ナリ。

7. 三角形ノ三ツノ頂點ハ夫々(a, b, c) (b, c, a) (c, a, b)ナル時,各邊ハ原點ト各邊ノ中點トヲ結ブ直線ニ垂直ナリ。

解 點(a, b, c), $(b, c, a,)$, (c, a, b)ヲ夫々ニA, B, Cトスレバ,邊ABノ方程式ハ

$$\frac{x-a}{a-b}=\frac{y-b}{b-c}=\frac{z-c}{c-a} \cdots\cdots(1)$$

又A, Bノ中點Mノ坐標ハ$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right)$ナルガ故ニ,原點トMトヲ結ブ直線ハ

$$\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{y-\frac{b+c}{2}}{\frac{b+c}{2}}=\frac{z-\frac{c+a}{2}}{\frac{c+a}{2}} \cdots\cdots(2)$$

ナリ。故ニ(1)ノ方向餘弦ハ

$$l=\frac{a-b}{\varDelta} \qquad m=\frac{b-c}{\varDelta} \qquad n=\frac{c-a}{\varDelta}$$

ニシテ,(2)ノ方向餘弦ハ

$$l'=\frac{a+b}{\varDelta'} \qquad m'=\frac{b+c}{\varDelta'} \qquad n'=\frac{c+a}{\varDelta'}$$

ナリ。但シ

$$\varDelta=\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

ニシテ

$$\varDelta'=\sqrt{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}$$

ナリ。

58
10

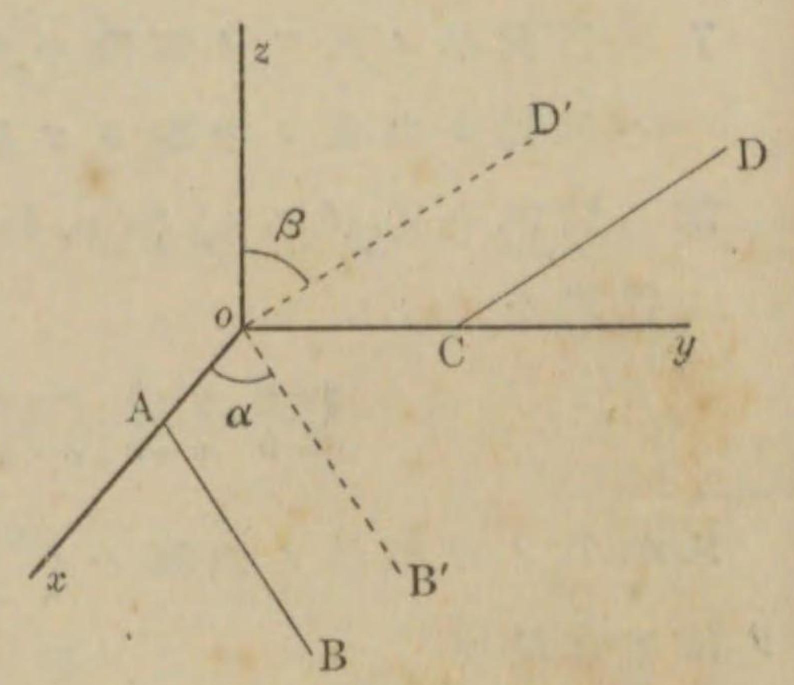
然ル時ハ(1)ト(2)トノナス角ヲθトスレバ

$$\cos\theta=\frac{(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)}{\triangle\triangle'}=0$$

ナルヲ以テ$\theta=\frac{\pi}{2}$,從ツテ二ツノ直線ハ互ニ垂直ナリ。

8. 二ツノ直線アリ,一ツハxy面ニアリテx軸ト角αヲナシ,他ノ一ツハyz面ニアリテ,z軸ト角βヲナストイフ。此二ツノ直線ニ垂直ナル直線ノ方向餘弦ハ$\tan\alpha$, -1, $\tan\beta$ニ比例スルコトヲ證セヨ。

解　xy面ニアル直線ヲAB, yz面ニアル直線ヲCDトシ,夫等ノ方向餘弦ヲl, m, n及ビ$l'\,m'\,n'$トスレバ



$$l=\cos\alpha \qquad m=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$n=\cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad l'=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$m'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta \qquad n'=\cos\beta$$

(コレ等ヲ求メンニハ夫々平行線OB′ OD′ヲ引キテ考ヘヨ)

次ニ之等ニ垂直ナル直線ノ方向餘弦ヲλ, μ, νトスレバ

$$\lambda\cos\alpha+\mu\sin\alpha \qquad =0$$

$$\mu\sin\beta+\nu\cos\beta=0$$

故ニ

$$\frac{\lambda}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\mu}{-\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\nu}{\cos\alpha\sin\beta}$$

即チ

$$\frac{\lambda}{\tan\alpha}=\frac{\mu}{-1}=\frac{\nu}{\tan\beta}$$

ヨツテ方向餘弦ハ$\tan\alpha$, -1, $\tan\beta$ニ比例スルコト明カナリ。

9. 一ツノ點(a, b, c)ヲ過ギ且ツ直線

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　一ツノ點ヲ過ル直線ハ無數ニアレドモ,其方向餘弦ガ與ヘラレレバ確定ス。然ルニ本題ニ於テハ求ムル直線ハ

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

ニ平行ナルベキガ故ニ,其方向餘弦ハl, m, nナリ。ヨツテ求ムル直線ノ方程式ハ明カニ,

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

ナリ。

10. 直線$x=ay+b$, $z=cy+d$ガ二ツノ點$(3, 2, -4)$ $(5, 4, -6)$ヲ過ル~~爲ニ~~樣ニ,a, b, c, dヲ定メヨ。

解　與ヘラレタル直線ガ$(3, 2, -4)$ヲ過ル爲ニハ

$$3=2a+b \qquad -4=2c+d$$

又他ノ點$(5, 4, -6)$ヲ過ル爲ニハ

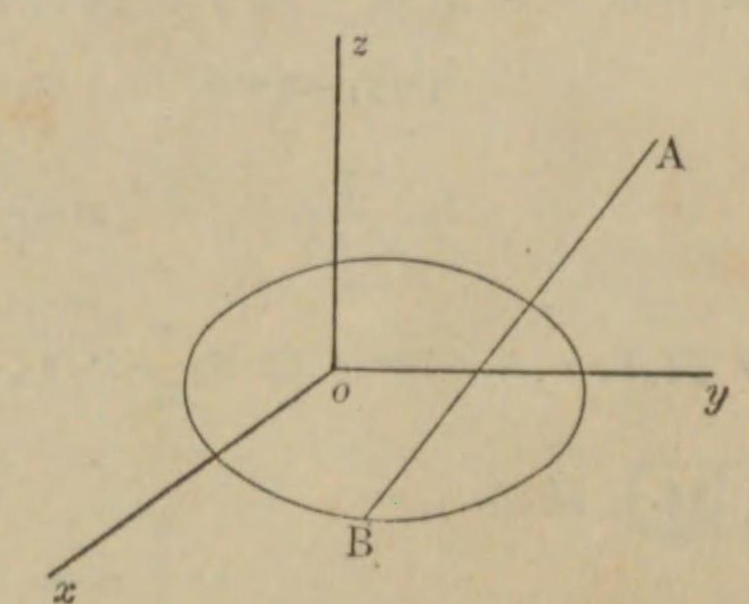
$$5=4a+b \qquad -6=4c+d$$

ヨツテ$a=b=1$, $c=-1$, $d=-2$ナルコトヲ知ル。

11. 直線$x=pz+q$　$y=rz+s$ガ,xy面ニアル楕圓$ax^2+by^2=1$ニ交ル爲ノ條件ヲ求メヨ。

解　直線ノ方程式ニ$z=0$ト置クトキハ,其直線ガxy面ト交ル點Bヲ得ベシ。即チ$(q, s, 0)$ナリ。

サテ直線ハ楕圓ト交ル爲ニハ,B點ハ楕圓ノ上ニアルヲ要ス。從ツテ求ムル條件ハ



$$aq^2+bs^2=1$$

ナリ。

12. 點$(1, 2, 3)$ヲ過リy軸ニ垂直ニ交ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　先ヅy軸ハ原點ヲ過リ,x軸及ビz軸ニ垂直ニシテy軸自身ニハ平行ナルヲ以テ,其方程式ハ

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

次ニ求ムル直線ガ點(1, 2, 3)ヲ過ルガ故ニ其方程式ヲ

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{n} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

トスレバ,(1), (2)ハ互ニ垂直ナルベキニヨリ

$$m=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

又第二十七節公式(8)ニヨリ,相交ルベキ條件ハ

$$n-3l=0 \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)ト(4)トヨリ

$$l:m:n=1:0:3$$

ヨツテ求ムル直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{3}$$

ナリ。

13. 原點ヨリ直線

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$$

ニ至ル距離ヲ求メヨ。

解　先ヅ與ヘラレタル直線ノ方向餘弦ハ$\frac{2}{\sqrt{45}}$, $\frac{4}{\sqrt{45}}$, $\frac{5}{\sqrt{45}}$ナリ。故ニ求ムル距離ハ三十三節公式(2)ニ

$$x_1=y_1=z_1=0 \qquad x_2=1 \qquad y_2=2 \qquad z_2=3$$

$$l=\frac{2}{\sqrt{45}} \qquad m=\frac{4}{\sqrt{45}} \qquad n=\frac{5}{\sqrt{45}}$$

ヲ代入シタルモノ,即チ$\frac{1}{3}$ナリ。

採 **14.** 直線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

ト各坐標軸トノ間ノ最短距離ヲ求メヨ。

解　先ヅx軸トノ間ノ最短距離ヲ求メンニ,x軸自身ノ方程式ハ

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$$

ナルヲ以テ第三十四節公式ニ

$$x_1=a \qquad y_1=b \qquad z_1=c \qquad x_2=y_2=z_2=0 \qquad l'=1 \qquad m'=n'=0$$

ト置ケバ$\frac{(bn-cm)}{\sqrt{m^2+n^2}}$トナル。$y$軸及ビ$z$軸トノ最短距離モ又同様ニ算出セラル。

15. 二ツノ平行線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

$$\frac{x-a'}{l}=\frac{y-b'}{m}=\frac{z-c'}{n}$$

ノ間ノ距離ヲ求メヨ。

解　二ツノ直線ハ平行ナルガ故ニ,直線上ノ何レノ點ヨリシテモ共通垂線ヲ引クコトヲ得。故ニ本題ハ一ツノ直線上ノ點(a, b, c)ヨリ他ノ直線

$$\frac{x-a'}{l}=\frac{y-b'}{m}=\frac{z-c'}{n}$$

ニ至ル距離或ハ第二ノ直線上ノ點(a', b', c')ヨリ第一ノ直線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

ニ至ル距離ヲ求ムルコトニ歸ス。コレ已ニ第三十三節ニ於テ研究セシ所ナリ。

16. 原點ヨリ直線

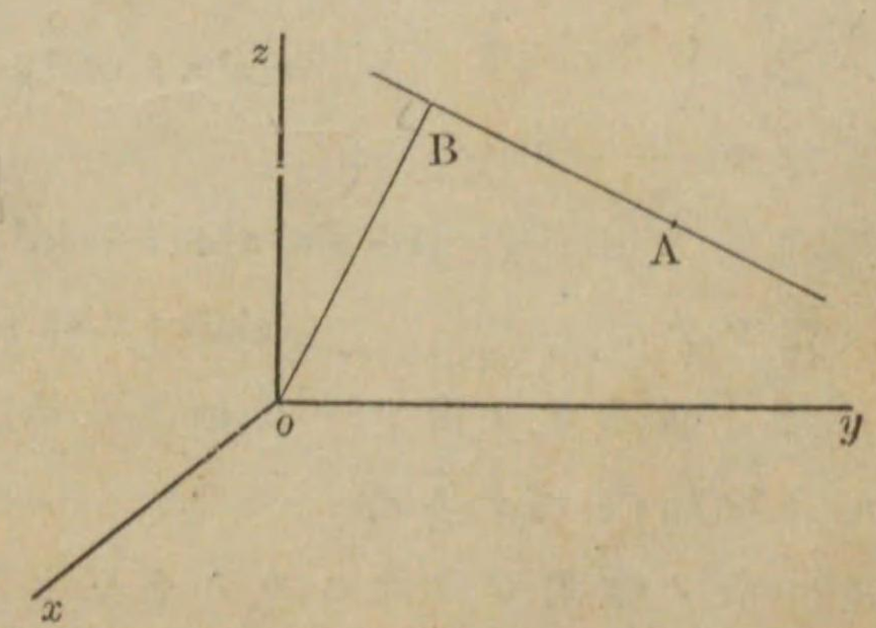
$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

4/16 ニ垂直ニ引ク直線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　與ヘラレタル直線ヲABトシ,原點ヨリ之ニ垂線OBヲ引キ,其交點ヲBトス。今OBノ方向餘弦ヲλ, μ, νトスレバ,其方程式ハ

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ且ツAB OBトハ垂直ナルベキガ故ニ



$$l\lambda+m\mu+n\nu=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又(1)ガABニ交ルベキ條件ハ

$$a(\mu n-\nu m)+b(\nu l-\lambda n)+c(\lambda m-\mu l)=0$$

即チ

$$\lambda(cm-bn)+\mu(an-cl)+\nu(bl-am)=0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2), (3)ヨリλ:μ:νヲ求ムレバ

$$m(bl-am)-n(an-cl):n(cm-bn)-l(bl-am):l(an-cl)-m(cm-bn)$$

少シク變形スレバ

$$\frac{am^2+an^2-blm-cln}{l^2+m^2+n^2}:\frac{bl^2+bn^2-cmn-alm}{l^2+m^2+n^2}:\frac{cl^2+cm^2-aln-bmn}{l^2+m^2+u^2}$$

今

$$t=\frac{al+bm+cn}{l^2+m^2+n^2}$$

ト置ケバ

$$\lambda:\mu:\nu=a-lt:b-mt:c-nt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

故ニ求ムル直線ハ(1), (4)ヨリ

$$\frac{x}{a-lt}=\frac{y}{b-mt}=\frac{z}{c-nt}$$

17. 一ツノ直線ノ三ツノ坐標軸トナス角ヲ夫々α, β, γトスレバ

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 與ヘラタル直線ノ方向餘弦ハ

$$l=\cos\alpha \qquad m=\cos\beta \qquad n=\cos\gamma$$

ニシテ且ツ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

即チ

$$(1-\sin^2\alpha)+(1-\sin^2\beta)+(1-\sin^2\gamma)=1$$

從ツテ

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$$

18. 原點ヨリ出ヅル三ツノ直線ノ方向餘弦ガ夫々$l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2$及ビ$l_3, m_3, n_3$ナル時

次ノ等式ガ成立スルナラバ,之等ノ三ツノ直線ハ同一ノ平面上

ニアルコトヲ證セヨ。

$$\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}=0$$

解 三ツノ直線ハ同一ノ點ヨリ出ヅルガ故ニ,之等ハ同一ノ平面上ニアル爲ニハ,之等ノ何レニモ垂直ナル直線ガ存在スルコトガ必要ニシテ且ツ充分ナリ。今假リニ其方向余弦ヲλ, μ, νトスレバ

$$l_1\lambda+m_1\mu+n_1\nu=0$$

$$l_2\lambda+m_2\mu+n_2\nu=0$$

$$l_3\lambda+m_3\mu+n_3\nu=0$$

ナラザルベカラズ。コレヨリλ, μ, νヲ消去スレバ,所要ノ條件

$$\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}=0$$

ヲ得ベシ。

19. 原點ヲ通ル二ツノ直線ノ方向餘弦ガ夫々l, m, n,及ビl', m', n'ナル時,此二ツノ直線ノナス角ヲ二等分スル直線ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

解 先ヅ二ツノ直線ヲg_1, g_2トシ二等分線ヲg_3トシ其方向餘弦ヲλ, μ, νトス。

今g_1トg_3トノナス角ヲθトスレバ,g_2トg_3トノナス角モ亦θナルガ故ニ,

$$\cos\theta=l\lambda+m\mu+n\nu=l'\lambda+m'\mu+n'\nu$$

即チ

$$(l-l')\lambda+(m-m')\mu+(n-n')\nu=0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

サテg_1, g_2ノ決定スル平面ノ法線ノ方向餘弦ヲλ', μ', ν'トスレバg_1, g_2ニモ垂直ナルガ故ニ,

$$l\lambda'+m\mu'+n\nu'=0$$

$$l'\lambda'+m'\mu'+n'\nu'=0$$

故ニ

$$\lambda':\mu':\nu'=mn'-nm':nl'-n'l:lm'-l'm$$

然ルニ此法線ハ g_3 トモ垂直ナルベキガ故ニ,

$$(mn'-nm')\lambda+(nl'-n'l)\mu+(lm'-l'm)\nu=0,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ

$$\lambda:\mu:\nu=(m-m')(lm'-l'm)-(n-n')(nl'-n'l):(n-n')(mn'-nm')$$
$$-(l-l')(lm'-l'm):(l-l')(nl'-n'l)-(m-m')(mn'-nm')$$

然ルニ

$$(m-m')(lm'-l'm)-(n-n')(nl'-n'l)=lmm'-lm'^2-m^2l'+ml'm'-n^2l'+l'nn'$$
$$+nln'-ln'^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

玆ニ於テ $n^2=1-l^2-m^2$, $n'^2=1-l'^2-m'^2$ ヲ代入スレバ, (3)ハ

$$(l+l')(ll'+mm'+nn'-1)$$

トナル。又

$$(n-n')(mn'-nm')-(l-l')(ln'-l'm)=mnn'-mn'^2-n^2m'+nm'n'-l^2m'+ll'm'$$
$$+lml'-ml'^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此式ニ $l^2=1-m^2-n^2$ 　$n'^2=1-l'^2-m'^2$ ヲ代入スレバ(4)ハ

$$(m+m')\ (ll'+mm'+nn'-1)$$

同様ニシテ

$$(l-l')(nl'-n'l)-(m-m')(mn'-m'n)=(n+n')(ll'\times mm'+nn'-1)$$

故ニ

$$\lambda:\mu:\nu=l+l':m+m':n+n'$$

從ツテ

$$\lambda=\frac{l+l'}{\Delta}\qquad\mu=\frac{m+m'}{\Delta}\qquad\nu=\frac{n+n'}{\Delta}$$

但シ　$$\Delta=\sqrt{(l+l')^2+(m+m')^2+(n+n')^2}$$

次ニ g_1 ト g_2 トノナス角ノ外角ノ二等分線ノ方向餘弦ヲ λ, μ, ν トスレバ,前ト殆ンド同様ニシテ

$$\lambda:\mu:\nu=l-l':m-m':n-n'$$

從ツテ

$$\lambda=\frac{l-l'}{\Delta'}\qquad\mu=\frac{m-m'}{\Delta'}\qquad\nu=\frac{n-n'}{\Delta'}$$

但シ　$$\Delta'=\sqrt{(l-l')^2+(m-m')^2+(n-n')^2}$$

ナルヲ知ル。

別解 g_1, g_2 上ニ夫々點 P (x_1, y_1, z_1), Q (x_2, y_2, z_2) ヲトリ OP=OQ ナラシム。而シテ其長サヲ r トスレバ

$$x_1=lr\qquad y_1=mr\qquad z_1=nr$$
$$x_2=l'r\qquad y_2=m'r\qquad z_2=n'r$$

サテ二等分線上ノ點ハ線分 PQ ノ中點ノ軌跡ナルヲ以テ其上ノ點ハ凡テ

$$x=\frac{r(l+l')}{2}\qquad y=\frac{r(m+m')}{2}\qquad z=\frac{r(n+n')}{2}$$

ト書カルベシ。ヨツテ二等分線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{l+l'}=\frac{y}{m+m'}=\frac{z}{n+n'}$$

ナルヲ以テ　$\lambda:\mu:\nu=l+l':m+m':n+n'$

從ツテ

$$\lambda=\frac{l+l'}{\Delta}\qquad\mu=\frac{m+m'}{\Delta}\qquad\nu=\frac{n+n'}{\Delta}$$

但シ　$$\Delta=\sqrt{(l+l')^2+(m+m')^2+(n+n')^2}$$

次ニ g_1 ト g_2 トノ外二等分線ノ方向餘弦モ同様ニ求ムルコトヲ得。

20. 二ツノ直線ノ方向餘弦ハ方程式

$$Al+Bm+Cn=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$Pl^2+Qm^2+Rn^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ニテ與ヘラルヽ時,其直線ガ互ニ直交スル爲ノ條件ヲ求メヨ。

解 二ツノ直線ノ方向餘弦ヲ l_1, m_1 n_1 及ビ l_2, m_2, n_2 トスレバ,垂直條件ハ

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

卽チ　$$\frac{l_1l_2}{n_1n_2}+\frac{m_1m_2}{n_1n_2}+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

サテ (1),(2)ヨリ

$$A\frac{l}{n}+B\frac{m}{n}+C=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$P\frac{l^2}{n^2}+Q\frac{m^2}{n^2}+R=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4), (5) ヨリ $\frac{m}{n}$ ヲ消去シテ、

$$P\frac{l^2}{n^2}+\frac{Q}{B^2}\left(A^2\left(\frac{l}{n}\right)^2+2AC\frac{l}{n}+C^2\right)+R=0$$

$\frac{l}{n}$ ニ關スル此方程式ノ二ツノ根ノ積ハ

$$\frac{l_1l_2}{n_1n_2}=\frac{C^2Q+B^2R}{A^2Q+B^2P}$$

同様ニ

$$\frac{m_1m_2}{n_1n_2}=\frac{C^2P+A^2R}{A^2Q+B^2P}$$

之等ヲ (3) ニ代入スレバ

$$P(B^2+C^2)+Q(C^2+A^2)+R(A^2+B^2)=0$$

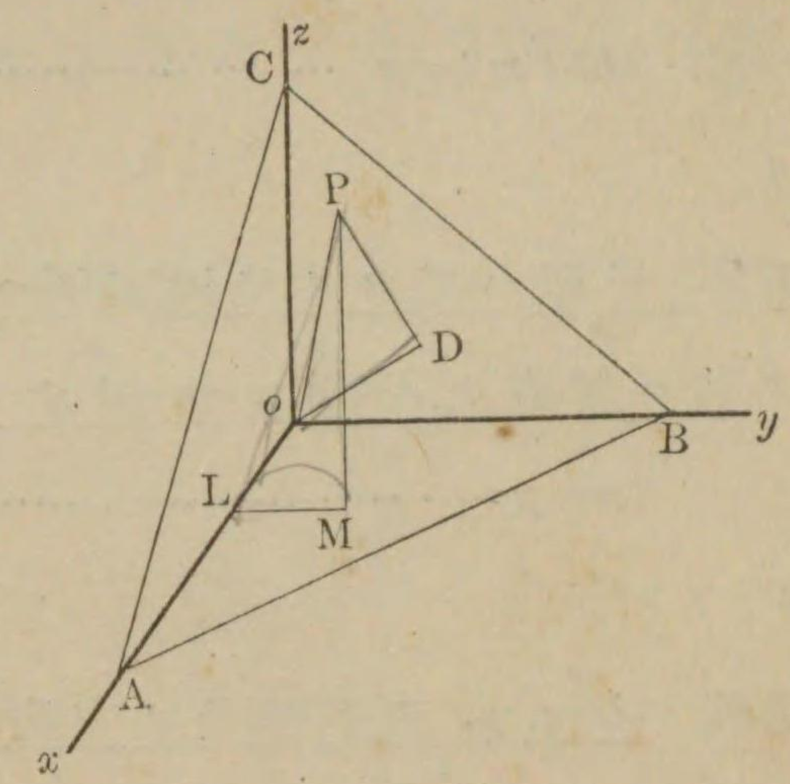
コレ求ムル條件ナリ。

第三章

平　面

36. 原點ヨリ平面ニ至ル垂線ノ長サト其方向餘弦トヲ知リテ平面ノ方程式ヲ求ムルコト。

一ツノ平面ヲ ABC トシ原點ヨリ之ニ至ル距離 OD ノ長サヲ p トシ, OD ノ方向餘弦ヲ l, m, n トス。又 P ヲ平面上ニ於ケル任意ノ點トシ, 其坐標ヲ x, y, z トス。



今 P ヨリ xy 面ニ垂線 PM ヲ引キ, 其足 M ヨリ x 軸ニ垂線 ML ヲ引クトキハ

$$OL=x,\quad LM=y,\quad MP=z$$

ナリ。而シテ之等ガ垂線 OD トナス角ノ餘弦ハ卽チ l, m, n ニ外ナラズ。

サテ折線 OLMP ガ直線 OD 上ニ投ズル射影ハ OL, LM, MP ノ射影ノ和ナルガ故ニ

$$lx+my+nz$$

ニシテ, コハ OP ガ OD 上ニ投ズル射影卽チ OD ソノモノニ等シカルベキ筈ナリ。(第十二節) 故ニ P ガ平面 ABC ノ上ノ點ナル時ハ, 其坐標 x, y, z ノ間ニ常ニ

$$lx+my+nz=p \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル關係ガ成立ス。

然ルニPガ此平面上ニアラザル時ハ折線OLMPノOD上ニ投ズル射影ハOD卽チpニ等シカラズ。故ニ(1)ハ求ムル平面ノ方程式ナリ。

系 i 平面ハ一ツノ坐標面例ヘバxy面ニ垂直ナル時ハ(卽チz軸ニ平行ナル時)$n=0$ナルガ故ニ,其方程式ハ

$$lx+my=p \quad \cdots\cdots(2)$$

ナリ。

系 ii 平面ハ二ツノ坐標面例ヘバxy, xz面ニ垂直ナル時ハ(卽チx軸ニ垂直ナル時)$m=n=0$ナルガ故ニ,其方程式ハ

$$x=p \quad \cdots\cdots(3)$$

ナリ。

定義 $l, m, n,$ヲ平面(1)ノ方向餘弦トイフ。

37. 三ツノ軸ノ截片ヲ知リテ平面ノ方程式ヲ求ムルコト

前圖ニ於テ平面ガ三ツノ軸ノ上ニ作ル截片ヲOA, OB, OCトシ其長サヲ夫々a, b, cトス。

サテODガ平面ヘノ垂線ナルガ故ニOAノOD上ニ投ズル射影ハODソレ自身ナリ。故ニ

$$al=p$$

同様ニ

$$bm=p, \quad nc=p$$

從ツテ

$$l=\frac{p}{a}, \quad m=\frac{p}{b}, \quad n=\frac{p}{c},$$

之等ノ値ヲ前節ノ方程式(1)ニ代入スル時ハ,平面ABCノ方程式トシテ

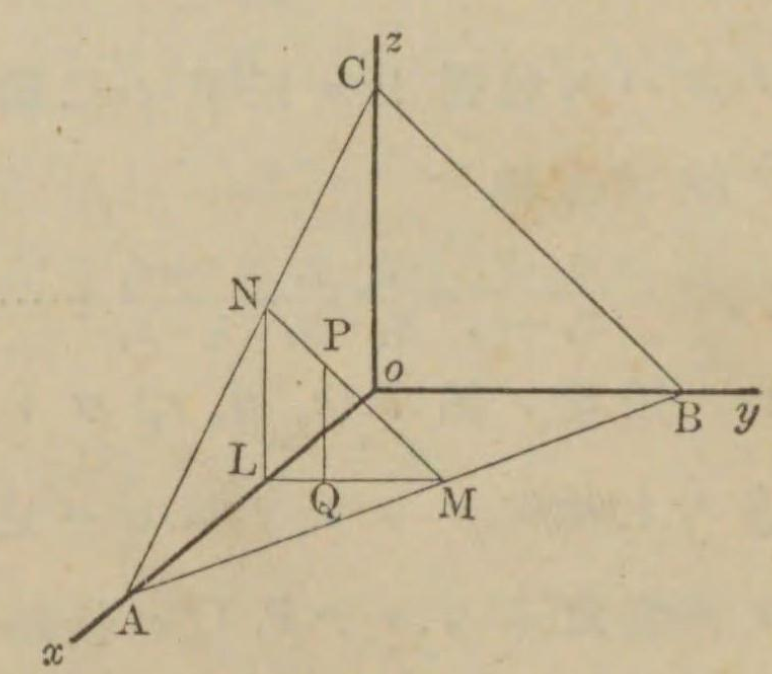
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \cdots\cdots(1)$$

ヲ得。

注意 此場合OA, OB, OCニ正負ノ符號ヲ考フルコト勿論ナリ。

38. 前二節ニ得タル結果ハ,又次ノ如ク獨立ニ證明スルコトヲ得ベシ。

平面ABCノ上ノ任意ノ點P(x, y, z)ヲ通リテyz面ニ平行ナル平面LMNヲ作リ,xy面トノ交リヲLM, xz面トノ交リヲLNトス。又Pヨリxy面ニ垂線PQヲ引ケバ



$$OL=x, \quad LQ=y, \quad QP=z$$

ナリ。而シテ

$$\frac{QP}{LN}=\frac{QM}{LM}=1-\frac{LQ}{LM} \cdots(1)$$

而シテP點ガ平面ABCノ上ニアラザル時ハ,(1)ハ決シテ成立セズ。

又

$$\frac{LN}{OC}=\frac{LA}{OA}=\frac{LM}{OB} \quad \cdots\cdots(2)$$

(1), (2)ヨリ

$$\frac{QP}{LN}\frac{LN}{OC}=\frac{LA}{OA}-\frac{LQ}{LM}\frac{LM}{OB}$$

卽チ

$$\frac{QP}{OC}=\frac{LA}{OA}-\frac{LQ}{OB}=1-\frac{OL}{OA}-\frac{LQ}{OB}$$

從ツテ

$$\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OA}}+\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{OB}}+\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OC}}=1$$

換言スレバ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad\cdots\cdots(3)$$

39. 一次方程式ハ平面ヲ表ハス。

前三節ニ於テ平面ノ方程式ハ, x, y, z ニ就キテ一次方程式ナルコトヲ知リタリ。本節ニ於テハ逆ニ x, y, z ニ關スル一次方程式

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ハ必ズ一ツノ平面ヲ表ハスコトヲ證セントス。ソレガ爲ニハ(1)ノ表ハス軌跡上ニ任意ノ二點 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ ヲトリ之等ヲ結ブ直線

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2} \quad\cdots\cdots(2)$$

ノ上ニ任意ノ點 $\mathrm{R}(x_3, y_3, z_3)$ ヲトル時, R モ亦(1)ニテ表ハサルル軌跡ノ上ニアルコトヲ示セバ足ル。

サテ假定ニヨリテ P, Q ハ軌跡ノ上ニアルガ故ニ, 共坐標ハ方程式(1)ヲ滿足セシムベシ。即チ

$$\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}z_1+\mathrm{D}=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

$$\mathrm{A}x_2+\mathrm{B}y_2+\mathrm{C}z_2+\mathrm{D}=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

從ツテ

$$\mathrm{A}(x_1-x_2)+\mathrm{B}(y_1-y_2)+\mathrm{C}(z_1-z_2)=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

ナル關係アリ。

次ニ R ガ直線(2)ノ上ニアルガ故ニ

$$\frac{x_3-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z_3-z_1}{z_1-z_2} \quad\cdots\cdots(6)$$

ナル關係ガ成立ス。

ソコデ(6)ヲ(5)ニ代入スレバ

$$\mathrm{A}(x_3-x_1)+\mathrm{B}(y_3-y_1)+\mathrm{C}(z_3-z_1)=0$$

即チ

$$\mathrm{A}x_3+\mathrm{B}y_3+\mathrm{C}z_3-(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}z_1)=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

(3)ト(7)トヨリ

$$\mathrm{A}x_3+\mathrm{B}y_3+\mathrm{C}z_3+\mathrm{D}=0$$

コレ即チ點 R ハ(1)ナル表面上ニアルコトヲ知ル。故ニ(1)ニテ表ハス軌跡ハ平面ナルコト明カナリ。

注意 i 上ノ證明ニ於テハ A, B, C ヲ共ニ零ナラズトセリ。然レドモ之等ノ中何レカ一ツ又ハ二ツハ零トナルコトアリト雖モ結論ハ變ルコトナシ。

注意 ii 上ノ定理ヲ用フレバ,第三十七節ニ於ケル結果ハ容易ニ得ラルベシ。

何トナレバ求ムル平面ノ方程式ヲ

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

即チ

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}x+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}y+\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}z+1=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

トス。

コノ平面上ニ三ツノ點

$$\mathrm{A}(a, 0, 0) \qquad \mathrm{B}(0, b, 0) \qquad \mathrm{C}(0, 0, c)$$

ガアルベキニヨリ,

$$\mathrm{A}a+\mathrm{D}=0 \qquad \mathrm{B}b+\mathrm{D}=0 \qquad \mathrm{C}c+\mathrm{D}=0$$

從ツテ

$$\frac{A}{D}=-\frac{1}{a},\quad \frac{B}{D}=-\frac{1}{b},\quad \frac{C}{D}=-\frac{1}{c}$$

之等ヲ(9)ニ代入スレバ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

トナルベケレバナリ。

40. 一般ノ一次方程式

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ヲ第三十六節公式(1)ニ變形セントス。ソレニハ先ヅ與ヘラレタル方程式ヲ變形スレバ,

$$\frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad\cdots\cdots(2)$$

サテ此式ニ於テ, x, y, z ノ係數ノ平方ノ和ガ1トナルガ故ニ之等ノ係數ハ平面ノ方向餘弦 l, m, n ノ役目ヲナスベシ。故ニ若シ $\dfrac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ガ正,即チDガ負ナラバ,之ヲ p ト置クヲ得ベク;從ツテ(2)ハ其儘所要ノ方程式ナリ。又Dガ正ナラバ(2)ヲ書キカヘテ

$$\frac{-Ax-By-Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

トスレバ,コレ又所要ノ方程式トナル。

41. 種々ノ平面ノ方程式

(i) 一ツノ定點 (a, b, c) ヲ過ル平面ノ方程式

平面ノ方程式ヲ

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ト假定ス。然ル時,此平面ハ一ツノ定點 (a, b, c) ヲ過ルベキガ故ニ

$$Aa+Bb+Cc+D=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

ナル關係ナカルベカラズ。

(1),(2)ヲ邊々相減ズレバ

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

コレ求ムル方程式ナリ。何トナレバ,此方程式ハ與點 (a, b, c) ノ坐標ニヨリテ滿足セラルルガ故ニ,(3)ニテ表ハス平面ハ與點ヲ通過スベク,且ツ此方程式ハ x, y, z ニ就キテ一次式ナルガ故ニ平面ヲ表ハスベケレバナリ。

但シ玆ニ比 A:B:C ハ不定ナリ。然レドモ更ニ他ノ條件ヲ加フルコトニヨリテ確定スベシ。

(ii) 二ツノ定點 (a, b, c), (a', b', c') ヲ過ル平面ノ方程式

一ツノ定點 (a, b, c) ヲ過ル平面ノ方程式ハ(1)ニヨリ

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

此平面ハ第二ノ定點 (a', b', c') ヲ通ル爲ニハ

$$A(a'-a)+B(b'-b)+C(c'-c)=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

(5)ヨリ A, B, C ノ何レカ一ツヲ他ノ二ツノ文字ニ就キテ表ハシ,(4)ニ代入スレバ,求ムル方程式ヲ得ベシ。

(iii) 三ツノ定點 (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') ヲ過ル平面ノ方程式

先ヅ一ツノ定點 (a, b, c) ヲ過ル平面ノ方程式ヲ作ル時ハ,

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

此平面ハ他ノ二ツノ點ヲ通過スベキガ故ニ,夫々

$$A(a'-a)+B(b'-b)+C(c'-c)=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

$$A(a''-a)+B(b''-b)+C(c''-c)=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

ナル關係アルベシ。故ニ所要ノ方程式ハ之等ヨリ A, B, C ヲ消去シタルモノ即チ

$$(x-a)\{(b'-b)(c''-c)-(c'-c)(b''-b)\}$$

$$+(y-b)\{(c'-c)(a''-a)-(a'-a)(c''-c)\}$$

$$+(z-c)\{(a'-a)(b''-b)-(b'-b)(a''-a)\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ナリ。

此方程式ハ又次ノ如ク書クコトヲ得。

$$(x-a)\{b(c'-c'')+b'(c''-c)+b''(c-c')\}$$

$$+(y-b)\{c(a'-a'')+c'(a''-a)+c''(a-a')\}$$

$$+(z-c)\{a(b'-b'')+a'(b''-b)+a''(b-b')\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

或ハ行列式ヲ用フル時ハ, (6), (7), (8) ヨリ A, B, C ヲ消去スルコト容易ナリ。卽チ所要ノ方程式トシテ

$$\begin{vmatrix} x-a, & y-b, & z-c \\ a'-a, & b'-b, & c'-c \\ a''-a, & b''-b, & c''-c \end{vmatrix}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

ヲ得。

例 1　四ツノ點$(k, 2, 3)$, $(1, -1, k)$, $(2, 0, 3)$及ビ$(7, 1, 3)$ガ同一ノ平面上ニアル爲ニハ, kノ値ヲ如何ニトルベキカ。

解　先ヅ三ツノ點$(k, 2, 3)$, $(1, -1, k)$及ビ$(2, 0, 3)$ヲ通過スル平面ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x-k & y-2 & z-3 \\ 1-k & -3 & k-3 \\ 2-k & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

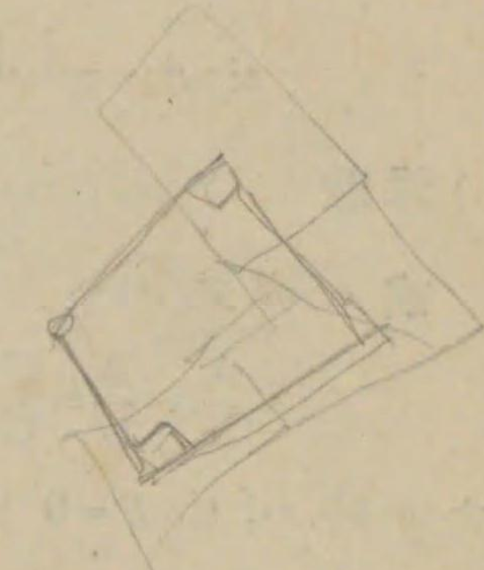
コノ平面ノ上ニ, 第四ノ點$(7, 1, 3)$ガアル爲ニハ, x, y, zノ代リニ夫々 7, 1, 3 ト置クモ滿足セザルベカラズ。

卽チ
$$\begin{vmatrix} 7-k & 1-2 & 3-3 \\ 1-k & -3 & k-3 \\ 2-k & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

故ニ

$$k^2-15k+36=0$$

ヨツテkノ値ハ 3 或ハ 12 ナリトス。



42. 二ツノ平面ノナス角

二ツノ與ヘラレタル平面ノ方程式ヲ

$$lx+my+nz=p$$

$$l'x+m'y+n'z=p'$$

トスレバ, 第三十六節ニヨリ, l, m, n 及ビ l', m', n' ハ夫々二ツノ平面ノ法線ノ方向餘弦ナリ。

サテ二ツノ平面ノナス角ハ, 夫等ノ法線ノナス角ニ等シキガ故ニ, 求ムル角ヲθトスレバ

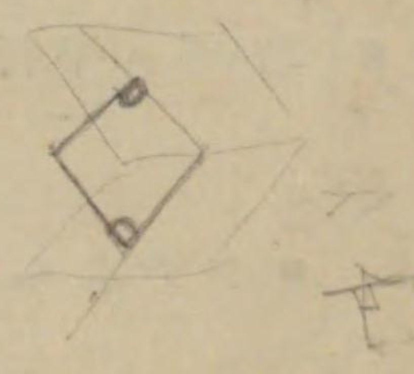
$$\cos\theta=ll'+mm'+nn' \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或ハ

$$\sin\theta=\sqrt{(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。

若シ與ヘラレタル平面ノ方程式ハ



$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

ナル時ハ, 其法線ノ方向餘弦ハ

$$l=\pm\frac{A}{\varDelta}\qquad m=\pm\frac{B}{\varDelta}\qquad n=\pm\frac{C}{\varDelta}$$

$$l'=\pm\frac{A'}{\varDelta'}\qquad m=\pm\frac{B'}{\varDelta'}\qquad n'=\pm\frac{C'}{\varDelta'}$$

但シ $\varDelta=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ ニシテ, $\varDelta'=\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}$ ナリ。

故ニ

$$\cos\theta=\pm\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

或ハ

$$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\quad\cdots\cdots(4)$$

注意 $l=\pm l',\quad m=\pm m',\quad n=\pm n'$ ……(5)

或ハ

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\quad\cdots\cdots(6)$$

ナル時ハ, $\sin\theta=0$ トナルガ故ニ,二ツノ平面ハ互ニ平行ニシテ,

$$ll'+mm'+nn'=0$$

或ハ

$$AA'+BB'+CC'=0$$

ナル時ハ $\cos\theta=0$ トナルガ故ニ互ニ垂直ナリ。

例 2 原點ヲ通過シ,平面 $x+2y=6$ ニ平行ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 原點ヲ通過スル平面ノ方程式ヲ,

$$Ax+By+Cz=0$$

ト假定ス。(常數項ガナキコトニ注意セヨ)而シテ之ハ平面 $x+2y=6$ ニ平行ナルベキガ故ニ

$$A:B:C=1:2:0$$

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$x+2y=0$$

ナリ。

43. 直線ト平面トノ交角。

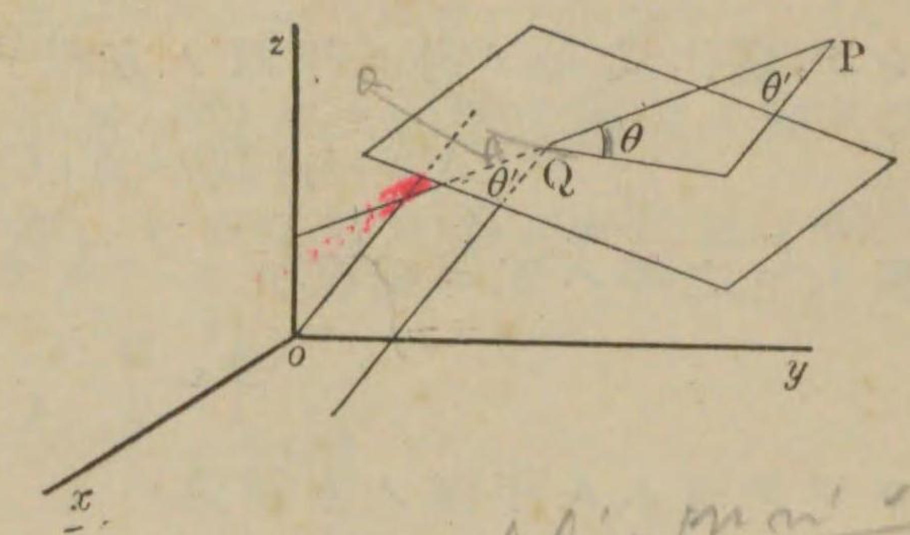
直線 PQ ノ方程式ヲ

$$\frac{x-a}{L}=\frac{y-b}{M}=\frac{z-c}{N}\quad\cdots\cdots(1)$$

平面ノ方程式ヲ

$Ax+By+Cz+D=0\cdots(2)$

トシ夫等ガナス角ヲ θ トス。



今原點ヨリ平面ニ垂線ヲ下ス時ハ,之ト與ヘラレタル直線PQトナス角ハ, θ ノ餘角 θ' ニ等シ。

然ルニ平面ノ垂線ノ方向餘弦ハ

$$l=\pm\frac{A}{\varDelta}\qquad m=\pm\frac{B}{\varDelta}\qquad n=\pm\frac{C}{\varDelta}$$

ニシテ直線 PQ ノ方向餘弦ハ

$$l'=\pm\frac{L}{\varDelta'}\qquad m'=\pm\frac{M}{\varDelta'}\qquad n'=\pm\frac{N}{\varDelta'}$$

ナリ。但シ $\varDelta=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ ニシテ $\varDelta'=\sqrt{L^2+M^2+N^2}$ ナリトス。

ヨツテ

$$\cos\theta'=\sin\theta=\pm\frac{AL+BM+CN}{\varDelta\varDelta'}\quad\cdots\cdots(3)$$

ニシテ

$$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{(BN-CM)^2+(CL-AN)^2+(AM-BL)^2}}{\varDelta\varDelta'}\quad\cdots\cdots(4)$$

ナリ。從ツテ

$$AL+BM+CN=0\quad\cdots\cdots(5)$$

ナル時ハ直線ト平面トハ互ニ平行ニシテ,

$$\frac{A}{L}=\frac{B}{M}=\frac{C}{N}\quad\cdots\cdots(6)$$

ナル時ハ,直線ト平面トハ互ニ垂直ナリ。

例 3 原點ヨリ平面ニ至ル垂線ノ足ノ坐標ガ(1, 2, 4)ナリトイフ。此平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 原點ト點(1, 2, 4)トヲ結ブ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$$

ニシテ,點(1, 2, 4)ヲ過ル平面ノ方程式ハ

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-4)=0$$

然ルニ之等ハ互ニ垂直ナルベキガ故ニ公式(6)ニヨリ

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{4}$$

ヨツテ求ムル平面ノ方程式ハ

$$(x-1)+2(y-2)+4(z-4)=0,$$

ナリ。

44. 一點ヨリ平面ニ至ル距離

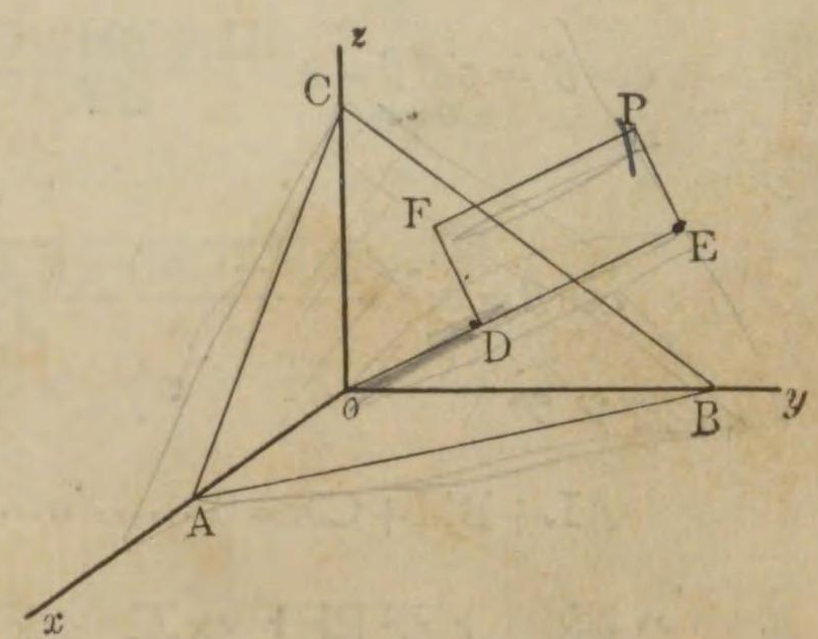
與ヘラレタル點ヲ P(x', y', z') トシ,平面 ABC ノ方程式ヲ

$$lx+my+nz=p \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリトス。

今 P ヲ過リテ ABC ニ平行ナル平面ヲ作リ,O ヨリ ABC ニ至ル垂線 OD ノ延長トEニテ交ルモノトス。然ル時ハ今作リタル平面ノ方程式ハ

$$lx+my+nz=q \cdots\cdots\cdots(2)$$



玆ニ q ハ OE ノ長ヲ表ハス。

次ニ P ヨリ平面 ABC ニ垂線 PF ヲ下ストキハ,四邊形 PEDF ハ矩形ナリ。故ニ

$$PF=DE=OE-OD$$

然ルニ P ハ平面(2)ノ上ニアルヲ以テ

$$lx'+my'+nz'=q$$

ナル關係ガ成立ス。ヨツテ求ムル距離 PF ノ長サハ,

$$PF=lx'+my'+nz'-p \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

注意 公式(3)ハ點 P ガ平面ニ關シテ原點ト反對ノ側ニアル場合ニ得タルモノナリ。若シ P ガ平面ニ關シテ原點ト同ジ側ニアル場合ニハ,其距離ヲ

$$p-(lx'+my'+nz')$$

トセザルベカラズ。

然リト雖モ,距離ノ公式トシテ恒ニ

$$p-(lx'+my'+nz')$$

ヲ用ヒントスレバ,與點 P ガ平面ニ關シテ原點ト同ジ側ニアル時ハ,距離ハ正ニシテ,反對ノ側ニアル時ハ負ナリ。

系 若シ平面ノ方程式ハ

$$Ax+By+Cz+D=0$$

ニテ與ヘラレタル時ハ,P點ヨリノ距離ハ

$$\pm\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ナリ。但シ P ハ平面ニ關シテ原點ト同ジ側ニアル時,距離ヲ正ナリト規定スレバ,上ノ公式ニ於ケル複符號ハ D ガ正或ハ負ナルニ從ヒテ+或ハ−ヲトラザルベカラズ。

例 4 點$(3, -1, 2)$ヨリ平面 $2x-y+z+1=0$ ニ至ル距離ヲ求メ,次ニ與點ハ原點ト平面ノ何レノ側ニアルカヲ決定セヨ。

解 公式ニヨレバ求ムル距離ハ

$$\pm\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\frac{6+1+2+1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

然ルニ此場合 D ガ正ナルガ故ニ,求ムル距離ハ $\frac{10}{\sqrt{6}}$ ナリ。

又其値ハ正ナルガ故ニ,點$(3, -1, 2)$ハ平面ニ關シテ,原點ト同

ジ側ニアリ。

45. 平面ノ交リ

二ツノ平面ハ一般ニハ相交ルヲ以テ,夫等ノ方程式ヲ次ノ如ク一緒ニ組合シタルモノハ,一ツノ直線ヲ表ハスベシ。

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0\\ \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'z+\mathrm{D}'=0\end{array}\right\}$$

今上ノ如ク定義セラレタル直線ノ方向餘弦 l, m, n ヲ求メンニ,平面ノ法線トハ互ニ垂直ナルベキガ故ニ,第四十三節(5)ニヨリテ

$$\mathrm{A}l+\mathrm{B}m+\mathrm{C}n=0$$

$$\mathrm{A}'l+\mathrm{B}'m+\mathrm{C}'n=0$$

故ニ

$$l=\pm\frac{\mathrm{BC}'-\mathrm{B}'\mathrm{C}}{\varDelta}\qquad m=\pm\frac{\mathrm{CA}'-\mathrm{C}'\mathrm{A}}{\varDelta}\qquad n=\pm\frac{\mathrm{AB}'-\mathrm{A}'\mathrm{B}}{\varDelta}$$

但シ $\Delta=\sqrt{(\mathrm{BC}'-\mathrm{B}'\mathrm{C})^2+(\mathrm{CA}'-\mathrm{C}'\mathrm{A})^2+(\mathrm{AB}'-\mathrm{A}'\mathrm{B})^2}$

トス。

46. 一直線ヲ共有スル平面

u, v ヲ共ニ x, y, z ニ關スル一次式ナリトス。今 k ヲ零ニアラザル常數トスル時,方程式

$$u+kv=0$$

ヲ考フルニ,此方程式ハ x, y, z ニ就キテ一次方程式ニシテ且ツ $u=0$, $v=0$ ヲ同時ニ滿足スル點ノ坐標ニヨリテ滿足セラルルガ故ニ,二ツノ平面 $u=0$, $v=0$ ノ交線ヲ含ム一ツノ平面ヲ表ハス。而シテ k ノ値ヲ連續的ニ變化セシムル時ハ,平面ハ其直線ノ周リヲ廻轉スベシ。

例 5 二ツノ平面 $2x-3y+z+9=0$, $5x+2y+4z-3=0$ ノ交線ト原點トヲ過ル平面ノ方程式ヲ求ム。

解 二ツノ平面ノ交線ヲ過ル平面ノ一般ノ方程式ハ

$$2x-3y+z+9+k(5x+2y+4z-3)=0$$

今コノ平面ヲシテ原點ヲ過ラシメンニハ, x, y, z ノ代リニ零ト置キテモ滿足スベシ。即チ $9-3k=0$

即チ k ノ値ヲシテ3ナラシムルヲ要ス。故ニ求ムル方程式ハ

$$2x-3y+z+9+3(5x+2y+4z-3)=0$$

整頓シテ

$$17x+3y+13z=0$$

$x=kl+x'$
$y=km+y'$
$z=kn+z'$

47. 相交ル二直線ヲ含ム平面ノ方程式

$Ax+By+Cz=D$
$k(Al+Bm+Cn)+k(A'l'\ldots)$

一點 (x', y', z') ニテ交ル二ツノ直線

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}$$

$$\frac{x-x'}{l'}=\frac{y-y'}{m'}=\frac{z-z'}{n'}$$

$Al+Bm+Cn=0$
$Ax'+By'+Cz'=D$

$Al+Bm+Cn=0$
$Al'+Bm'+Cn'=0$

ヲ含ム平面ハ又點 (x', y', z') ヲ含ムガ故ニ其方程式ハ

$$\mathrm{A}(x-x')+\mathrm{B}(y-y')+\mathrm{C}(z-z')=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ノ形ヲナス。次ニコノ平面ノ法線ハ二ツノ直線ト垂直ナルベキヲ以テ

$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$

$$\mathrm{A}l+\mathrm{B}m+\mathrm{C}n=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\mathrm{A}l'+\mathrm{B}m'+\mathrm{C}n'=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ求ムル平面ハ(1), (2)及ビ(3)ヨリ不定係數A, B, Cヲ消去シタルモノ即チ

$$\begin{vmatrix} x-x', & y-y', & z-z' \\ l, & m, & n \\ l', & m', & n' \end{vmatrix}=0$$

ナリ。

48. 三ツノ平面ハ(ガ)共通ノ直線ヲ有スル條件

三ツノ平面ノ方程式ヲ

$$u=ax+by+cz+d=0 \cdots\cdots(1)$$

$$u'=a'x+b'y+c'z+d'=0 \cdots\cdots(2)$$

$$u''=a''x+b''y+c''z+d''=0 \cdots\cdots(3)$$

トス。然ル時,此等ノ三ツノ平面ノ内(1),(2)ノ交線ヲ過ル平面ノ方程式ハ,

$$u+\lambda u'=(ax+by+cz+d)+\lambda(a'x+b'y+c'z+d')=0 \cdots\cdots(4)$$

若シ三ツノ平面ガ一ツノ直線ヲ共有スルナラバ,λノ値ヲ適當ニ定ムレバ(4)ハ(3)ト全ク同一ノ平面ヲ表ハスベキナリ。換言スレバ

$$\frac{a+\lambda a'}{a''}=\frac{b+\lambda b'}{b''}=\frac{c+\lambda c'}{c''}=\frac{d+\lambda d'}{d''}$$

ヲ滿足スルλノ値ヲ定ムルコトヲ得ベキ筈ナリ。今之等ノ値ヲkト置ケバ

$$a+\lambda a'=ka''$$
$$b+\lambda b'=kb''$$
$$c+\lambda c'=kc''$$
$$d+\lambda d'=kd''$$

之等ノ四ツノ關係式ガ同時ニ成立スル爲ニハ,四ツノ行列式

$$\begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ b, & d', & d'' \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ c, & c', & c'' \\ d, & d', & d'', \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \\ d, & d', & d'' \end{vmatrix}=0$$

ガ同時ニ成立スルコトヲ要ス。コレ求ムル條件ナリ。

注意　上ノ四ツノ行列式ガ同時ニ成立スルコトヲ簡單ニ記述セン爲ニハ,次ノ記號ヲ用フルモノトス。

$$\left\|\begin{matrix} a, & b, & c, & d \\ a', & b', & c', & d' \\ a'', & b'', & c'', & d'' \end{matrix}\right\|=0$$

例 6　三ツノ平面

$$x+ay+(b+c)z+d=0$$
$$x+by+(c+a)z+d=0$$
$$x+cy+(a+b)z+d=0$$

ガ一直線ニテ會スルコトヲ證セヨ。

解　次ノ四ツノ行列式ヲ考フベシ。

(i) $$\begin{vmatrix} 1, & a, & b+c \\ 1, & b, & c+a \\ 1, & c, & a+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1, & a, & a+b+c \\ 1, & b, & a+b+c \\ 1, & c, & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1, & a, & 1 \\ 1, & b, & 1 \\ 1, & c, & 1 \end{vmatrix}=0$$

(ii) $$\begin{vmatrix} 1, & a, & d \\ 1, & b, & d \\ 1, & c, & d \end{vmatrix}=d\begin{vmatrix} 1, & a, & 1 \\ 1, & b, & 1 \\ 1, & c, & 1 \end{vmatrix}=0$$

(iii) $$\begin{vmatrix} 1, & b+c, & d \\ 1, & c+a, & d \\ 1, & a+b, & d \end{vmatrix}=d\begin{vmatrix} 1, & b+c, & 1 \\ 1, & c+a, & 1 \\ 1, & a+b, & 1 \end{vmatrix}=0$$

(iv) $$\begin{vmatrix} a, & b+c, & d \\ b, & c+a, & d \\ c, & a+b, & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a, & a+b+c, & d \\ b, & a+b+c, & d \\ c, & a+b+c, & d \end{vmatrix}$$

$$=d(a+b+c)\begin{vmatrix} a, & 1, & 1 \\ b, & 1, & 1 \\ c, & 1, & 1 \end{vmatrix}=0$$

卽チ何レノ行列式モ其値ガ零ナリ。ヨツテ與ヘラレタル三ツノ平面ハ一ツノ直線ヲ共有ス。

49. 二ツノ平面ノナス角ノ二等分面ノ方程式

二ツノ平面ノ方程式ヲ

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

ナリトス。

然ル時ハ二等分面ヲ P, Q トスレバ, 之等ノ平面上ノ點ヨリ與ヘラレタル二ツノ平面ニ至ル距離ハ相等シカルベシ。然ルニ P 面上ノ點ハ二ツノ平面ニ關シ原點ト同ジ側ニアルカ, 又ハ反對ノ側ニアル時ハ, Q 面上ノ點ハ一ツノ平面ト原點ノ同ジ側ニアリ他ノ平面ト反對ノ側ニアルベシ。故ニ求ムル平面ノ方程式ハ第四十四節ニヨリテ

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

及ビ

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

ナリ。(拙著平面解析幾何學四十五頁參照)

50. 四面體ノ體積

四面體ノ四ツノ頂點ヲ $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ 及ビ $S(x_4, y_4, z_4)$ トスレバ, 其體積ハ底面積ニ高サヲ乘ジタル積ノ $\frac{1}{3}$ ニ

等シ。

今底面ヲ PQR トスル時ハ, 第四十一節ニヨリテ其方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

之ヲ展開スレバ

$$Ax+By+Cz+D=0$$

但シ

$$A=\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_2, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \qquad D=-\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

故ニ平面 PQR ノ方程式ニ於ケル x, y, z ノ係數ハ, yz 面, zx 面及ビ xy 面ニ投ズル其射影ノ二倍ニ等シ。然ルニ平面 PQR ノ法線ト x 軸トナス角ハ其平面ガ yz 面トナス角ニ等シ。故ニ法線ノ方向餘弦ヲ l, m, n トシ, PQR ノ面積ヲ S ニテ表ハセバ,

$$A=2lS,$$

同樣ニ

$$B=2mS, \qquad C=2nS$$

從ツテ

$$4S^2=A^2+B^2+C^2$$

卽チ

$$S=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{2}$$

サテ $S(x_4, y_4, z_4)$ ヨリ底面 PQR ニ下シタル垂線ノ長サヲ p トスレバ,第四十四節系ニヨリ

$$p=\pm\frac{Ax_4+By_4+Cz_4+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

故ニ求ムル四面體ノ體積ハ

$$V=\pm\frac{1}{3}pS=\pm\frac{1}{6}(Ax_4+By_4+Cz_4+D)$$

$$=\pm\frac{1}{6}\left\{x_4\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}+y_4\begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+z_4\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}\right\}$$

ナリ。而シテコレヲ纏ムレバ

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix}$$

ナリ。但シ複符號ハ體積ガ正トナルヤウニトルモノトス。

系 若シ一ツノ頂點例ヘバ S ハ原點ニアル時ハ, x_4, y_4, z_4 ハ共ニ零ナルガ故ニ,

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

トナル。

第三章

問題

1. 三ツノ平面

$2x+5y+3z=0.$ $x-y+4z-2=0.$

$7y-5z+4=0.$

ハ一直線ヲ共有スルコトヲ示セ。

解 第四十八節ニヨル條件ニ照ス。即チ

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-(1\times2) & 1 & 0 \\ 5-(-1\times2) & -1 & 7 \\ 3-(4\times2) & 4 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 7 \\ -5 & 4 & -5 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-(1\times2) & 1 & 0 \\ 5-(-1\times2) & -1 & 7 \\ 0-(-2\times2) & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-(1\times2) & 1 & 0 \\ 3-(4\times2) & 4 & -5 \\ 0-(-2\times2) & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5-(-1\times2) & -1 & 7 \\ 3-(4\times2) & 4 & -5 \\ 0-(-2\times2) & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & -1 & 7 \\ -5 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

ヨツテ與ヘラレタル三ツノ平面ハ一ツノ直線ヲ共有ス。

2. 四ツノ點(1,1,4), (−1,2,4), (0,1,3)及ビ(2,−1,1)ハ同一ノ平面上ニアルコトヲ證セヨ。

解 四ツノ點ガ同一ノ平面上ニアルコトヲ證センニハ,之等ノ點ヲ頂點トスル四面體ノ體積ハ零ナルコトヲ示セバ可ナリ。故ニ第五十節ニ於ケル公式ヲ適用スレバ

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1+(1\times2) & 1 & 4-1 & 1 \\ -1+(2\times2) & 2 & 4-1 & 1 \\ 0+(1\times2) & 1 & 3-1 & 1 \\ 2+(-1\times2) & -1 & 1-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3&1&3&1\\3&2&3&1\\2&1&2&1\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=0$$

ヨツテ證セラレタリ。

3. 二ツノ點(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)ヲ過リ且ツ平面

$$lx+my+nz=p$$

ニ垂直ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 一ツノ點(x_1,y_1,z_1)ヲ過ル平面ノ方程式ハ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0\cdots\cdots(1)$$

(1)ハ第二ノ點(x_2,y_2,z_2)ヲ過ル爲ニハ

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0\cdots\cdots(2)$$

サテ求ムル平面ハ,平面$lx+my+nz=p$ニ垂直ナルベキガ故ニ之等ノ平面ノ法線ハ互ニ垂直ナルベキ筈ナリ。故ニ

$$Al+Bm+Cn=0\cdots\cdots(3)$$

(1),(2)及ビ(3)ヨリ不定係數A,B,Cヲ消去スレバ,

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0$$

コレ求ムル方程式ナリ。

4. 一ツノ點(x_1,y_1,z_1)ヲ過リ,且ツ平面$ax+by+cz+d=0$ニ平行ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 一ツノ點(x_1,y_1,z_1)ヲ過ル平面ノ方程式ハ,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0\cdots\cdots(1)$$

サテ求ムル平面ハ與ヘラレタル平面ニ平行ナルベキニヨリ,之等ノ法線ハ互ニ平行ナラザルベカラズ。即チ

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}\cdots\cdots(2)$$

(2)ノ關係ヲ(1)ニ代入スレバ,求ムル方程式ヲ得。即チ

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

5. 一ツノ點(x_1,y_1,z_1)ヲ過リ且ツ二ツノ平面

$$lx+my+nz=p$$

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$
$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=k$

$$l'x+m'y+n'z=p'$$

ノ何レニモ垂直ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 點(x_1,y_1,z_1)ヲ通ズル平面ノ方程式ハ,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0\cdots\cdots(1)$$

次ニ此平面ハ與ヘラレタル二ツノ平面ニ垂直ナル爲ニハ,夫等ノ法線ガ互ニ垂直ナルベキガ故ニ,

$$Al+Bm+Cn=0\cdots\cdots(2)$$

$$Al'+Bm'+Cn'=0\cdots\cdots(3)$$

(1)(2)及ビ(3)ヨリ未定係數A,B,Cヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix}x-x_1, & y-y_1, & z-z_1\\ l, & m, & n\\ l', & m', & n'\end{vmatrix}=0$$

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$
$Al+Bm+Cn=0$
$Al'+Bm'+Cn'=0$

コレ求ムル方程式ナリ。

5. 一ツノ點(x_1,y_1,z_1)ヲ過リ,直線

$$\frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}$$

ヲ含ム平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 點(x_1,y_1,z_1)ヲ過ル平面ノ方程式ハ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0\cdots\cdots(1)$$

然ルニ此平面ハ與ヘラレタル直線ヲ含ムガ故ニ,其直線上ノ點(x_2,y_2,z_2)ヲ含ムベク,且ツ平面ノ法線ト與ヘラレタル直線トハ垂直ナルベキニヨリ,

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0\cdots\cdots(2)$$

$$Al\quad+Bm\quad+Cn\quad=0\cdots\cdots(3)$$

ナラザルベカラズ。故ニ求ムル方程式ハ,之等ノ三ツノ方程式ヨリ未定係數A,B,Cヲ消去シタルモノ,即チ

$$\begin{vmatrix}x-x_1, & y-y_1, & z-z_1\\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1\\ l, & m, & n,\end{vmatrix}=0$$

6. 直線

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{n-n_1}{n}$$

ヲ含ミ且ツ他ノ一ツノ直線

$$\frac{x-x_2}{l'}=\frac{y-y_2}{m'}=\frac{z-z_2}{n'}$$

ニ平行ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解　求ムル平面ハ直線

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

ヲ含ムベキガ故ニ,點(x_1,y_1,z)ヲモ含ムコトヽトナル。故ニ其方程式ハ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ノ形ヲナス。次ニソノ法線ハ二ツノ直線トハ垂直ナルガ故ニ

$$Al+Bm+Cn=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$Al'+Bm'+Cn'=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ之等ノ三ツヨリA,B,Cヲ消去スレバ,所要ノ方程式ヲ得。卽チ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0$$

7.　一ツノ點(x_1,y_1,z_1)ヲ過リ,二ツノ直線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

$$\frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'}$$

ニ平行ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解　一ツノ點(x_1,y_1,z_1)ヲ過ル平面ノ方程式ハ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

次ニ二ツノ直線ニ平行ナルベキガ故ニ,平面ノ法線ハ二ツノ直線ニ垂直ナリ。故ニ

$$Al+Bm+Cn=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$Al'+Bm'+Cn'=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

(1),(2)及ビ(3)ヨリA,B,Cヲ消去スレバ,求ムル方程式ヲ得。卽チ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0$$

8.　二ツノ平行線

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$\frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}$$

ヲ含ム平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解　第一ノ平面ハ點(x_1,y_1,z_1)ヲ含ムガ故ニ,求ムル平面ノ方程式ヲ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ト置ク。コレハ又第二ノ平行線ヲ含ムガ故ニ點(x_2,y_2,z_2)ヲ過ルコトヽナル,ヨツテ

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

ナラザルベカラズ。又此平面ノ法線ハ平行線ニ垂直ナルベキガ故ニ

$$Al+Bm+Cn=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ求ムル方程式ハ(1),(2),(3)ヨリA,B,Cヲ消去シタルモノ卽チ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

9.　直線$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ヲ含ミ且ツ二ツノ直線

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{l} \qquad \frac{x}{n}=\frac{y}{l}=\frac{z}{m}$$

ヲ含ム平面ニ垂直ナル平面ノ方程式ハ

$$x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)=0$$

ナルコトヲ證セヨ

解　先ヅ原點ニテ交ル二直線

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{l}$$

$$\frac{x}{n}=\frac{y}{l}=\frac{z}{m}$$

ヲ含ム平面ノ方程式ハ第四十七節ニヨリ

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}=0$$

卽チ

$$x(mn-l^2)+y(ln-m^2)+z(ml-n^2)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

然ルニ平面

$$x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ハ原點ヲ含ミ且ツ第一ノ直線トノ間ニ

$$l(m-n)+m(n-l)+n(l-m)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル關係アルヲ以テ其直線ヲ含ム。次ニ平面(1)トノ間ニ

$$(m-n)(mn-l^2)+(n-l)(ln-m^2)+(l-m)(lm-n^2)=0 \quad \cdots(4)$$

ナル關係アルヲ以テ(1)ト(2)トハ互ニ垂直ナリ。ヨツテ證セラレタリ。

10. 三ツノ直線

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma} \qquad \frac{x}{a\alpha}=\frac{y}{b\beta}=\frac{z}{c\gamma}$$

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

ガ同一ノ平面上ニアル爲ニハ

$$\frac{l}{\alpha}(b-c)+\frac{m}{\beta}(c-a)+\frac{n}{\gamma}(a-b)=0$$

ナラザルベカラザルコトヲ證セヨ。

解 何レノ直線モ原點ヲ過ルガ故ニ,之等ヲ含ム平面ノ方程式ハ

$$Ax+By+Cz=0$$

ノ形ヲナス。而シテ此平面ハ三ツノ直線ヲ含ム爲ニハ,其法線ハ直線ト垂直ナラザルベカラズ。故ニ

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=0$$

$$Aa\alpha+Bb\beta+Cc\gamma=0$$

$$Al+Bm+Cn=0$$

ヨツテ所要ノ條件ハ

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

$\alpha\beta\gamma$ ニテ除スル時ハ,

$$\frac{l}{\alpha}(b-c)+\frac{m}{\beta}(c-a)+\frac{n}{\gamma}(a-b)=0$$

11. 平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

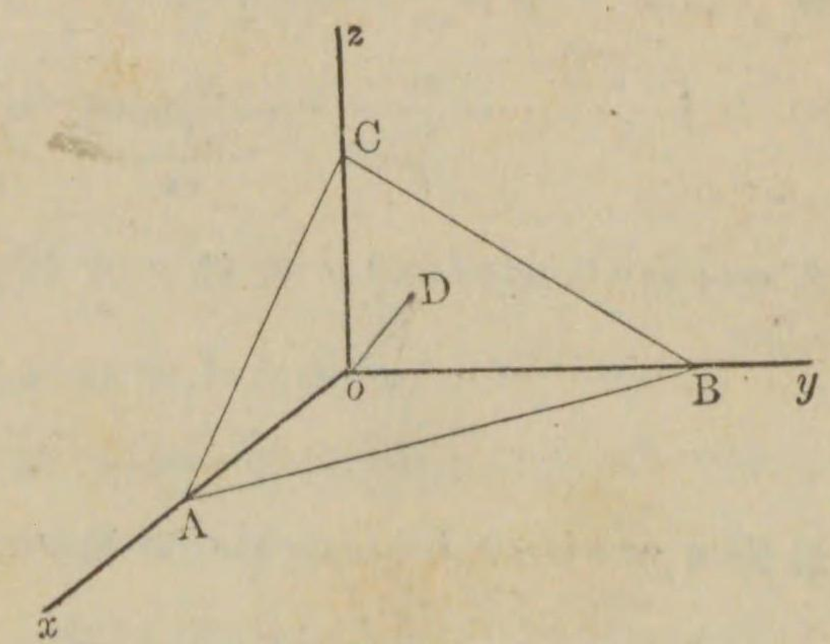
ガ軸ヲ截ル三ツノ點ヲ結ビ付ケテ生ズル三角形ノ面債ガ

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

ナルコトヲ證セヨ

解 與ヘラレタル方程式ヲ書キ換フレバ

$$bcx+cay+abz=abc$$



故ニ原點ヨリ此平面ニ至ル垂線ノ長サヲ OD トスレバ

$$OD=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

サテ三角形 ABC 及ビ OAB ノ面積ヲ夫々 s_1, s_2 トスレバ,四面體 O−ABC ノ體積 V ハ

$$V=\frac{OD\times s_1}{3}=\frac{OC\times s_2}{3}$$

而シテ $s_2=\frac{ab}{2}$ ナルガ故ニ

$$s_1=\frac{OC\times s_2}{OD}=\frac{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}{2}$$

12. 原點ヨリ平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

ニ下セル垂線ノ長サヲ p トスレバ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 與ヘラレタル方程式ヲ第三十六節公式(1)ノ如ク書キ換フル時ハ,其絶對項ハ卽チ p ナリ。故ニ

$$p=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p^2}=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

ヨツテ證明セラレタリ。

13. 四ツノ平面

$$my+nz=0 \qquad nz+lx=0$$

$$lx+my=0 \qquad lx+my+nz=p$$

ハ一ツノ四面體ヲナシ且ツ其體積ハ$\dfrac{2p^3}{3lmm}$ナルコトヲ證セヨ。

解 二ツノ平面$lx+my=0$, $my+nz=0$ノ交線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{\dfrac{1}{l}}=\frac{y}{-\dfrac{1}{m}}=\frac{z}{\dfrac{1}{n}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又$my+nz=0$, $nz+lx=0$ノ交線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{-\dfrac{1}{l}}=\frac{y}{-\dfrac{1}{m}}=\frac{z}{\dfrac{1}{n}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

最後ニ$nz+lx=0$, $lx+my=0$ノ交線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{\dfrac{1}{l}}=\frac{y}{-\dfrac{1}{m}}=\frac{z}{-\dfrac{1}{n}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。(1),(2),(3)ト第四ノ平面$lx+my+nz=p$トノ交點ノ座標ハ夫々

$$\left(\frac{p}{l},\ -\frac{p}{m},\ \frac{p}{n}\right) \quad \left(\frac{p}{l},\ \frac{p}{m},\ -\frac{p}{n}\right) \quad \left(-\frac{p}{l},\ \frac{p}{m},\ \frac{p}{n}\right)$$

ナリ。而シテ初メノ三ツノ平面ハ原點ヲ共有スルガ故ニ與ヘラレタル四ツノ平面ハ上ニ記シタル三ツノ點ト原點トヲ頂點トスル四面體ヲ作ル。

次ニ其體積ハ第五十節系ニヨリテ

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \dfrac{p}{l}, & -\dfrac{p}{m}, & \dfrac{p}{n} \\ \dfrac{p}{l}, & \dfrac{p}{m}, & -\dfrac{p}{n} \\ -\dfrac{p}{l}, & \dfrac{p}{m}, & \dfrac{p}{n} \end{vmatrix}=\frac{p^3}{6lmn}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{2\,p^3}{3lmn}$$

ナリ。

14 二ツノ直線

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-4z&=0 \\ 3x-4y+z&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 5x-y-3z+12&=0 \\ x-7y+5z-6&=0 \end{aligned}\right\}$$

ガ互ニ平行ナルコトヲ證セヨ。

解 二ツノ平面ノ交リトシテ定義セラレタル直線ノ方向餘弦ハ

第四十五節ニヨリ夫々共ニ

$$\frac{13}{\sqrt{654}},\quad \frac{14}{\sqrt{654}},\quad \frac{17}{\sqrt{654}}$$

ナリ。卽チ二ツノ方向餘弦ハ全ク相等シ。故ニ互ニ平行ナリ。

15 二ツノ直線

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$\frac{x-x_2}{l'}=\frac{y-y_2}{m'}=\frac{z-z_2}{n'}$$

ガ同一ノ平面上ニアル爲ノ條件ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル二ツノ直線ハ夫々點(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2)ヲ含ム。ソコデ先ヅ一點(x_1,y_1,z_1)ヲ通ズル平面ノ方程式ハ

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレガ第二ノ點ヲ通過スルガ爲ニハ

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナラザルベカラズ。サテ二ツノ直線ハ(1)ナル平面上ニアル爲ニハ之等ノ直線ハ何レモ其法線ト垂直ナルコトガ必要ニシテ且ツ充分ナリ。卽チ

$$Al+Bm+Cn=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$Al'+Bm'+Cn'=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヨツテ求ムル條件ハ(2),(3),(4)ガ同時ニ成立スルコトナリ。故ニ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0$$

ナリ。

16 二ツノ直線

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz+d&=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'&=0 \end{aligned}\right\}$$

ガ同一ノ平面上ニアル爲ノ條件ヲ求メヨ。

解 第二ノ直線ノ方程式ヲ書キ換フレバ

$$\frac{x}{1}=\frac{(b'c-bc')y-(c'd-cd')}{ac'-a'c}=\frac{(bc'-b'c)z-(b'd-bd')}{ab'-a'b}$$

即チ

$$\frac{x}{1}=\frac{y-\dfrac{c'd-cd'}{b'c-bc'}}{\dfrac{(ac'-a'c)}{b'c-bc'}}=\frac{z-\dfrac{b'd-bd'}{bc'-b'c}}{\dfrac{ab'-a'b}{bc'-b'c}}$$

ヨツテ此直線ハ點$\left(0,\ \dfrac{c'd-cd'}{b'c-bc'},\ \dfrac{b'd-bd'}{bc'-b'c}\right)$ヲ通過ス。故ニ求ムル條件ハ

$$\begin{vmatrix} 0-x' & \dfrac{c'd-cd'}{b'c-bc'}-y', & \dfrac{b'd-bd'}{bc'-b'c}-z' \\ l, & m, & n, \\ 1, & \dfrac{ac'-a'c}{b'c-bc'} & \dfrac{ab'-a'b}{bc'-b'c} \end{vmatrix}=0$$

ナリ。

17. 方程式

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$$

ガ二ツノ平面ヲ表ハス爲ノ條件ヲ求メヨ。

解　與ヘラレタル方程式ヲxノ降羃ニ配列スル時ハ，

$$ax^2+(2hy+2gz)x+by^2+2fyz+cz^2=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)ガ二ツノ平面ヲ表ハス爲ニハ，此式ノ左邊ガ二ツノ一次ノ因數ニ分解セラルヽ事ハ必要ニシテ且ツ充分ナリ。換言スレバ，與ヘラレタル方程式ヲxニ就キテ解ク時ハ實根ヲ得ル事ナリ。而シテ(1)ヲxニ就キテ解クトキハ，

$$x=\frac{-(hy+gz)\pm\sqrt{(hy+gz)^2-a(by^2+2fyz+cz^2)}}{a},$$

ナリ。而シテ實根ナル爲ニハ，根號内即チ

$$(h^2-ab)y^2+(2gh-2af)yz+(g^2-ac)z^2,$$

ハ平方式ナラザルベカラズ。即チ其判別式

$$(gh-af)^2-(h^2-ab)(g^2-ac)=0$$

從ツテ

$$a(af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc)=0$$

ナラザルベカラズ。而シテaガ零ニアラザルガ故ニ，所要ノ條件ハ

$$af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc=0,$$

18. 二ツノ定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ，之等ヲ結ビ付クル線分ノ垂直二等分面ナルコトヲ證セヨ。

解　二ツノ定點ヲA,Bトシ其長サヲ$2a$トス。今其線分ヲx軸ニトリAヲ原點トスレバ，二ツノ點A.Bノ坐標ハ夫々$(0,0,0),(2a,0,0)$ナリ。

次ニ要件ニ適スル點ヲ$P(x,y,z)$トスレバ，

$$PA^2=x^2+y^2+z^2,\qquad PB^2=(x-2a)^2+y^2+z^2,$$

然ルニ假定ニヨリテPA=PB.ヨツテ

$$x^2+y^2+z^2=(x-2a)^2+y^2+z^2$$

整頓スレバ

$$x=a$$

コレ即チ求ムル軌跡ニシテ，線分ABノ垂直二等分面ニ外ナラズ。

19. 三ツノ平面　$x=z,\ x-2y+z=0$　及ビ　$x+y+z=0$　ヨリ距離ノ平方ノ和ガ12ナルガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　條件ニ適スル點ヲPトシ，其坐標ヲx,y,zトスレバ，コノ點ヨリ平面$x=z$至ル距離ハ$\left|\dfrac{x-z}{\sqrt{2}}\right|$ナリ。同様ニ　$x-2y+z=0,x+y+z=0$　ニ至ル距離ハ夫々

$$\left|\frac{x-2y+z}{\sqrt{6}}\right|\qquad\left|\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right|$$

ヨツテ之等ノ平方ノ和ヲ12ニ等シト置ケバ，

$$x^2+y^2+z^2=12$$

ヲ得。コレ求ムル軌跡ナリ。

20. A,B,Cヲ三ツノ點$(4,2,1),\ (-2,0,-4),\ (0,0,-1)$ナリトシ，四面體ABCDノ體積ガ8ナルガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　軌跡ノ一點ヲPトシ其坐標ヲx,y,zトスレバ，第五十節ニヨリテ

$$8=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{6}\left\{x\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right\}=\pm\frac{1}{6}(-6x+8y+4z-4)$$

故ニ求ムル軌跡ハ二ツノ平面

$$6x-8y-4z+52=0$$

$$6x-8y-4z-44=0$$

ナリ。

21. 平面ガ三ツノ軸ヨリ截リトル截片ガ夫々 a,b,c ニシテ且ツ原點ヨリノ距離ガ p ナル時

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　三ツノ坐標軸ヨリ截リトル截片ガ a,b,c ナルガ如キ平面ノ方程式ハ

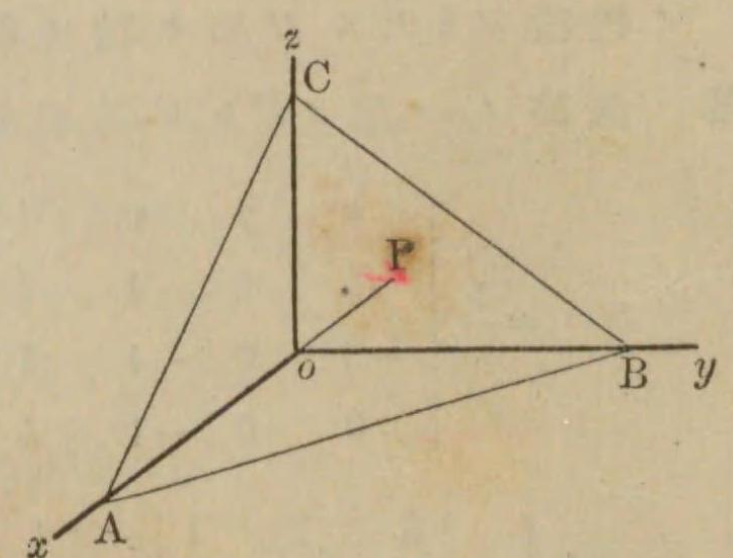
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

ヨツテ本題ハ問題十二ニ歸ス。

22. 三ツノ坐標軸ト等角ヲナス直線上ノ定點ヲ通ズル任意ノ平面ガ三ツノ軸ヲ截リトル截片ノ逆數ノ和ガ一定ナルコトヲ證セヨ。

解　三ツノ軸ト等角ヲナス直線ヲ OP トシ, P ヲ定點トス。今 OP ノ長サヲ r トスレバ, P 點ノ坐標ハ

$$\left(\frac{r}{\sqrt{3}},\ \frac{r}{\sqrt{3}},\ \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$$ナリ。



然ル時ハ, P 點ヲ過ル任意ノ平面ノ方程式ハ

$$A\left(x-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)+B\left(y-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)+C\left(z-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)=0$$

故ニ x 軸ヲ截リトル截片 OA ハ, 上ノ方程式ニ於テ $y=z=0$ ト置ケバ得ラル。卽チ

$$OA=\frac{r}{\sqrt{3}}\ \frac{(A+B+C)}{A}$$

同樣ニ

$$OB=\frac{r}{\sqrt{3}}\ \frac{(A+B+C)}{B}\qquad OC=\frac{r}{\sqrt{3}}\ \frac{(A+B+C)}{C}$$

ヨツテ

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{r}$$

卽チ一定ナリ。

23. u_1,u_2,v_1,v_2 ガ何レモ x,y,z ニ就キテ一次式ナル時二ツノ直線

$$\left.\begin{matrix}u_1=0\\ v_1=0\end{matrix}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \left.\begin{matrix}u_2=0\\ v_2=0\end{matrix}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ノ何レニモ出會フ直線ノ方程式ハ

$$\left.\begin{matrix}u_1+k_1v_1=0\\ u_2+k_2v_2=0\end{matrix}\right\}$$

ナルコトヲ證セヨ。但シ k_1, k_2 ハ何レモ零ニアラザル常數ナリトス。

解　$$u_1+k_1,v_1=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ハ x,y,z ニ就キテ一次ノ方程式ナルヲ以テ平面ヲ表ハシ, 且ツ $u_1=0$, $v_1=0$ ヲ同時ニ滿足スル點ノ坐標ニテ滿足セラルヽガ故ニ, 直線 $u_1=v_1=0$ ヲ含ム。同樣ニ

$$u_2+k_2,v_2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ハ直線 $u_2=v_2=0$ ヲ含ム。故ニ平面(3),(4)ノ交線ハ直線(1), (2)ノ何レニモ交ル直線ナリ。

24. 互ニ平行ナラザル三ツノ平面 $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$ ガ同一ノ直線ニ於テ交ル爲ニ必要ニシテ, 且ツ十分ナル條件ハ, x, y, z ノ値ノ如何ニ關セズ,

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=0$$

ナラシムル三ツノ常數 k_1, k_2 及ビ k_3 ノ存在スルコトナリ。之ヲ證セヨ。

解　方程式ヲ書キ換フレバ

$$k_1u_1+k_2u_2=-k_3u_3$$

サテ

$$k_1u_1+k_2u_2=0$$

ハ二ツノ平面$u_1=0$, $u_2=0$ノ交線ヲ含ム平面ニシテ,$k_3u_3=0$ハ第三ノ平面ナリ。故ニ與ヘラレタル條件

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=0$$

ハ第一ト第二ノ平面ノ交線ハ又第三ノ平面ニモ含マルヽコトヲ示スモノナリ。ヨリテ證明セラレタリ。

25.

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$$

ガ二ツノ平面ヲ表ハス時ハ,夫等ノ平面ノ交角ヲθトスル時

$$\tan\theta=\pm\frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab}}{a+b+c}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　與ヘラレタル方程式ヲxニ就キテ解キ以テ二ツノ因數ニ分解スル時ハ,

$$ax+hy+gz+\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)yz+(g^2-ac)z^2}=0$$

$$ax+hy+gz-\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)yz+(g^2-ac)z^2}=0$$

然ルニ之等ハ共ニ平面ヲ表ハス爲ニハ,根號内ハ平方式ナラザルベカラズ。從ツテ

$$(hg-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac)$$

ナル條件アリ。從ツテ二ツノ平面ノ方程式ハ夫々次ノ如シ。

$$ax+hy+gz+(\sqrt{h^2-ab}\,y+\sqrt{g^2-ac}\,z)=0$$

$$ax+hy+gz-(\sqrt{h^2-ab}\,y+\sqrt{g^2-ac}\,z)=0$$

即チ

$$ax+(h+\sqrt{h^2-ab})y+(g+\sqrt{g^2-ac})z=0$$

$$ax+(h-\sqrt{h^2-ab})y+(g-\sqrt{g^2-ac})z=0$$

從ツテ第四十二節公式(3)ニヨリテ

$$\cos\theta=\pm\frac{a^2+(h+\sqrt{h^2-ab})(h-\sqrt{h^2-ab})+(g+\sqrt{g^2-ac})(g-\sqrt{g^2-ac})}{\sqrt{a^2+(h+\sqrt{h^2-ab})^2+(g+\sqrt{g^2-ac})^2}\sqrt{a^2+(h-\sqrt{h^2-ab})^2+(g-\sqrt{g^2-ac})^2}}$$

而シテ $\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$

ナルガ故ニ實際計算ヲ施スト

$$\tan^2\theta=\frac{4\{(g\sqrt{h^2-ab}-h\sqrt{g^2-ac})^2+(a\sqrt{g^2-ac})^2+(-a\sqrt{h^2-ab})^2\}}{(a^2+ab+ac)^2}$$

然ルニ此分子ハ

$$4\{2g^2h^2-abg^2-ach^2+a^2g^2-a^3c+a^2h^2-a^3b-2gh\sqrt{h^2-ab}\sqrt{g^2-ac}\}$$

之ニ二ツノ平面ヲ表ハス爲ノ條件

$$hg-af=\sqrt{h^2-ab}\sqrt{g^2-ac}$$

及ビ之ヲ平方スルコトニヨリテ得ラルヽ條件

$$af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc=0$$

ヲ代入スレバ

$$4a^2(f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab)$$

ヨツテ

$$\tan^2\theta=\frac{4a^2(f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab)}{(a^2+ab+ac)^2}$$

從ツテ

$$\tan\theta=\pm\frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab}}{a+b+c}$$

26.　平面ヲ極方程式ニテ表ハセ。

解　平面ノ方程式ヲ

$$ax+by+cz+d=0$$

トシ,直角坐標x,y,zノ代リニ,極坐標

$$x=r\cos\varphi\sin\theta$$

$$y=r\sin\varphi\sin\theta$$

$$z=r\cos\theta$$

ヲ入ルレバ,平面ノ極方程式ハ

$$a\cos\varphi\sin\theta+b\sin\varphi\sin\theta+c\cos\theta+\frac{d}{r}=0$$

トナル。

27.　平面鏡ガ三ツノ坐標軸ト等角ヲナシテ傾ケル時,λ,μ,νナル方向餘弦ヲ有スル光線ガ之ニ當ル時其反射光線ノ方向餘弦ハ

$$\frac{1}{3}(2\mu+2\nu-\lambda),\quad \frac{1}{3}(2\nu+2\lambda-\mu),\quad \frac{1}{3}(2\lambda+2\mu-\nu)$$

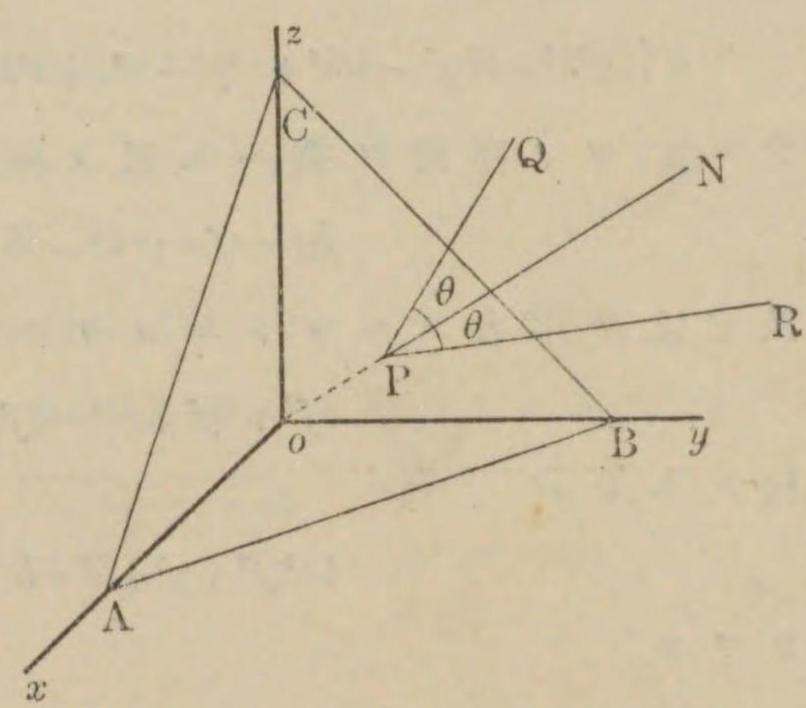
ナルコトヲ證セヨ。

解 鏡ノ方程式ヲ

$$x+y+z=a$$

ナリトシ,原點ヨリノ垂線ヲOPN トス。今光線ガ QP ヨリ入リテ PR ノ方向ニ反射スルモノト假定セン。

(光線ガ P 點以外ノ所ニ當ル時ト雖モ P 點ノ所ニ平行移動シテ考フレバ凡テ同一ノ結果ヲ得)



サテ PN ノ方向餘弦ハ凡テ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナルガ故ニ PQ ト PN トノナス角ハ

$$\cos QPN=\cos\theta=\frac{\lambda+\mu+\nu}{\sqrt{3}}$$

ナリ。今反射光線 PR ノ方向餘弦ヲ l,m,n トスレバ

$$\cos NPR=\cos\theta=\frac{l+m+n}{\sqrt{3}}$$

ヨツテ先ヅ

$$l+m+n=\lambda+\mu+\nu \quad\cdots\cdots(1)$$

次ニ

$$\cos QPR=l\lambda+m\mu+n\nu=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$=\frac{2}{3}(\lambda+\mu+\nu)^2-1 \quad\cdots\cdots(2)$$

又

$$l^2+m^2+n^2=\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1 \quad\cdots\cdots(3)$$

(1),(2)及ビ(3)ヨリ l,m,n ヲ求ムレバ

$$l=\frac{1}{3}(2\mu+2\nu-\lambda)\qquad m=\frac{1}{3}(2\nu+2\lambda-\mu)$$

$$n=\frac{1}{3}(2\lambda+2\mu-\nu)$$

ヲ得。

第四章

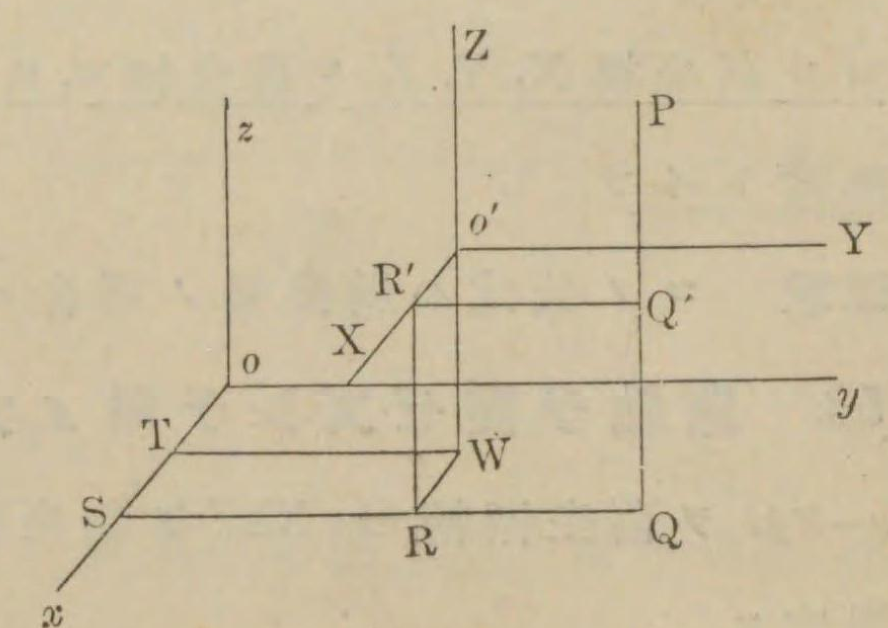
坐標ノ變換

51. 平面解析幾何學ニ於テ,坐標軸ヲ適當ニ選ブ時ハ,幾何學的問題ハ簡單ナル方程式ニテ表ハサレ,爲ニ運算ガ簡約セラレ從ツテ容易ニ目的ヲ達スルコトヲ得ル事ヲ述ベタリ。立體解析學幾何ニ於テモ亦カヽル目的ノ爲ニ坐標軸ノ變換ヲ行フ。

52. 軸ノ平行移動

平行移動法トハ,軸ノ方向ヲ變ゼズシテ,原點ノミヲ他ニ移スコトヲイフ。

今 $O-xyz$ ヲ舊坐標軸トシ, $O'-XYZ$ ヲ新坐標軸トシ,新原點 O' ノ舊坐標軸ニ關スル坐標ヲ a, b, c トス。



P ヲ空間ニアル任意ノ一ツノ點トシ,舊坐標軸ニ關スル坐標ヲ x, y, z トシ,新坐標軸ニ關スル坐標ヲ X, Y, Z トス。

サテ直線 $O'Z$ ト xy 面トノ交點ヲ W トシ, W ヨリ y 軸ニ平行ニ WT ヲ引キ x 軸トノ交點ヲ T トスレバ,

$$OT=a,\qquad TW=b,\qquad WO'=c$$

ナリ。次ニ P ヲ過リ $O'Z$ 軸ニ平行線ヲ引キ XY 面, xy 面ト交ル點ヲ Q', Q トシ夫等ノ點ヨリ y 軸ニ平行ニ $Q'R'$, QRS ヲ引キタリトスレバ

$$OS=x,\quad SQ=y,\quad QP=z$$

$$O'R'=X,\quad R'Q'=Y,\quad Q'P=Z'$$

然ルニ

$$OS=OT+O'R'$$

$$SQ=TW+R'Q'$$

$$QP=WO'+Q'P$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned} x&=a+X\\ y&=b+Y\\ z&=c+Z \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレ新坐標 X, Y, Z ト舊坐標 x, y, z トノ間ノ關係ニシテ,之ヲ變換式トイフ。

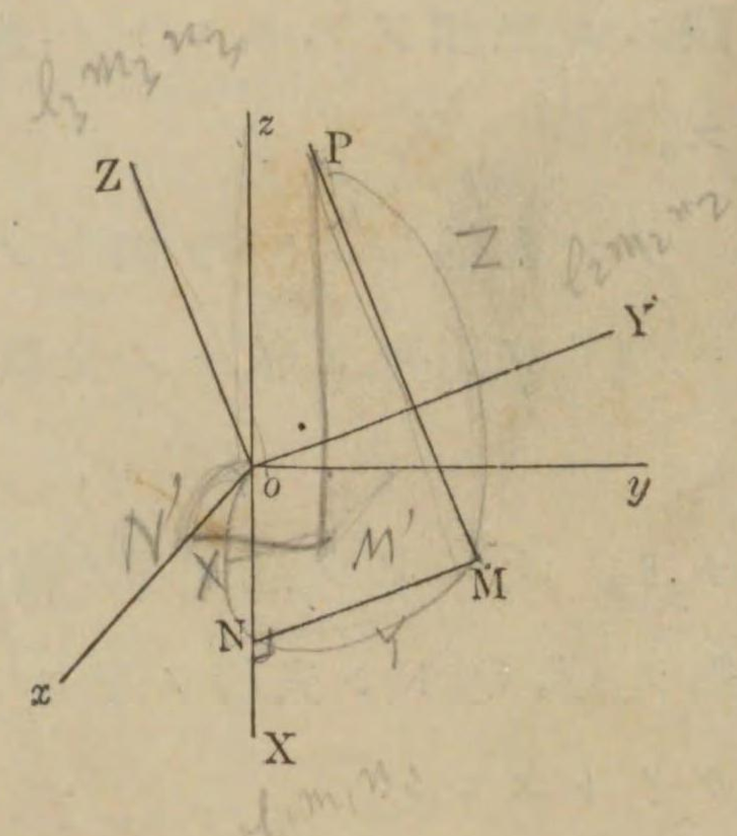
注意　コノ公式ハ斜交軸ノ場合ニモ適用セラル。

53. 原點ヲ變ゼズシテ軸ノ方向ヲ變ズル場合

$o-xyz$ ヲ舊坐標軸, O-XYZ ヲ新坐標軸トシ何レモ直交軸ナリト假定ス。

x, y, z ヲ舊軸ニ關スル空間ノ點 P ノ坐標トシ, X, Y, Z ヲ新軸ニ關スル坐標トス。

今 l_1, m_1, n_1 ヲ ox, oy, oz ニ關スル OX ノ方向餘弦, l_2, m_2, n_2 ヲ OY ノ方向餘弦, l_3, m_3, n_3 ヲ OZ ノ方向餘弦トセヨ。



P ヨリ OZ ニ平行ニ PM ヲ引キ

平面 XY ニ交ル點ヲ M トシ, M ヨリ OX ニ垂線 MN ヲ引キ其足ヲ N トスレバ

$$ON=X\qquad NM=Y\qquad MP=Z$$

サテ ox ト ON, NM, MP トナス角ノ餘弦ハ夫々 l_1, l_2, l_3 ナルガ故ニ ON, NM, MP ガ ox 上ニ投ズル射影ハ夫々 l_1X, l_2Y, l_3Z ナルガ故ニ其和ハ

$$l_1X+l_2Y+l_3Z$$

ニシテ,ソハ亦屈折線 ONMP ノ兩端ヲ結ベル線分 OP ノ ox 上ニ投ズル射影卽チ x ニ等シ。故ニ

$$x=l_1X+l_2Y+l_3Z$$

同様ニ

$$\left.\begin{aligned} y&=m_1X+m_2Y+m_3Z\\ z&=n_1X+n_2Y+n_3Z \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ得。コレ求ムル變換式ナリ。

系 i　軸ヲ廻轉スルト同時ニ,原點ヲ點 (a, b, c) ニ移ス時ハ,其變換式トシテ

$$\left.\begin{aligned} x&=a+l_1X+l_2Y+l_3Z\\ y&=b+m_1X+m_2Y+m_3Z\\ z&=c+n_1X+n_2Y+n_3Z \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ得。

系 ii　新軸ニ關スル坐標 X, Y, Z ヲ舊軸ニ關スル坐標 x, y, z ニテ表ハサンニハ, P ヨリ平面 xy ニ垂線 PM′ ヲ下シ其足ヨリ ox ニ垂線 M′N′ ヲ立テ, OP 及ビ屈折線 ON′M′P ヲ OX 上ニ射影スルコトニヨリテ得ラル。卽チ

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1x+m_1y+n_1z \\ Y &= l_2x+m_2y+n_2z \\ Z &= l_3x+m_3y+n_3z \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。

注意 公式(1)及ビ(3)ヲ暗記スル爲ニ便利ナル表ヲ下ニ掲ゲン。學者各自ニ其方法ヲ會得スベシ。

	X	Y	Z
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

54. 九ツノ變數 $l_1, m_1, n_1,\ l_2, m_2, n_2$ 及ビ l_3, m_3, n_3 ハ互ニ無關係ナリトイフベカラズ。何トナレバ, l_1, m_1, n_1 ハ OX ノ舊坐標軸ニ關スル方向餘弦ナルガ故ニ

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同様ニ

$$l_2^2+m_2^2+n_2^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$l_3^2+m_3^2+n_3^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又 OY, OZ ノナス角ノ餘弦ハ

$$l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3$$

ニシテ, 且ツ之等ハ直交スルガ故ニ其値ハ零ナリ。即チ

$$l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同様ニ

$$l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

之等ノ六ツノ關係式ハ次ノ六ツノ關係式ト置キ換フルコトヲ得ベシ。

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)'$$

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)'$$

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)'$$

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)'$$

$$n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)'$$

$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)'$$

何レニシテモ九ツノ數 l_1, m_1, n_1 等ハ全々獨立ノモノニアラズシテ, 六ツノ關係式ニヨリテ結バレ居ルコトヲ知ル。

吾人ハ(1)ヨリ(6)ニ至ル等式ヨリ(1)′ヨリ(6)′ニ至ル公式ニ移リ得ル所以ヲ代數的ニ説明スベシ。ソレニハ先ヅ

$$l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0$$

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

ヨリ $l_1:m_1:n_1$ ヲ求ムレバ,

$$\frac{l_1}{m_2n_3-m_3n_2}=\frac{m_1}{n_2l_2-n_3l_2}=\frac{n_1}{l_2m_3-l_3m_2}$$

$$=\frac{l_1^2+m_1^2+n_1^2}{l_1(m_2n_3-m_3n_2)+m_1(n_2l_3-n_3l_2)+n_1(l_2m_3-l_3m_2)}$$

$$=\frac{l_1^2+m_1^2+n_1^2}{\begin{vmatrix} l_1, & l_2, & l_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} l_1, & l_2, & l_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{vmatrix}}$$

今最後ノ項ニ於ケル分母ノ行列式ヲ $\varDelta$ ニテ表ハセバ

$$\varDelta l_1=(m_2n_3-m_3n_2) \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\varDelta m_1=(n_2l_3-n_3l_2) \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\Delta n_1=(l_2m_3-l_3m_2) \quad\cdots\cdots(9)$$

同様ニ

$$\Delta l_2=(m_3n_1-m_1n_3) \quad\cdots\cdots(10)$$

$$\Delta m_2=(n_3l_1-n_1l_3) \quad\cdots\cdots(11)$$

$$\Delta n_2=(l_3m_1-l_1m_3) \quad\cdots\cdots(12)$$

$$\Delta l_3=(m_1n_2-m_2n_1) \quad\cdots\cdots(13)$$

$$\Delta m_3=(n_1l_2-n_2l_1) \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\Delta n_3=(l_1m_2-l_2m_1) \quad\cdots\cdots(15)$$

故ニ(7),(10)及ビ(13)ヨリ

$$\Delta(l_1^2+l_2^2+l_3^2)=\{l_1(m_2n_3-m_3n_2)+l_2(m_3n_1-m_1n_3)+l_3(m_1n_2-m_2n_1)\}$$

$$=\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}=\Delta$$

ヨツテ

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1,$$

同様ニ

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=1$$

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

又(8),(11)及ビ(14)ニ夫々 n_1, n_2, n_3 ヲ乘ジテ相加フレバ

$$\Delta(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3)=\begin{vmatrix} n_1, & n_2, & n_3 \\ l_1, & l_2, & l_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{vmatrix}=0$$

故ニ $\qquad m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0$

同様ニ $\qquad l_1n_1+l_2n_2+l_3n_3=0$

$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0$$

ヲ得ベシ。

注意 Δ^2 ノ値ヲ見ンニ之等ノ二ツノ行列式ノ列ト列トノ乘法ヲナス時ハ,1ナルコトヲ知ル何トナレバ

$$\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} l_1^2+m_1^2+n_1^2, & l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2, & l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3 \\ l_2l_1+m_2m_1+n_2n_1, & l_2^2+m_2^2+n_2^2, & l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3 \\ l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1 & l_3l_2+m_3m_2+n_3n_2, & l_3^2+m_3^2+n_3^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1 & 0, \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}=1,$$

上ニ述ベタル代數的證明ハ,其理論稍複雜ナリ。然レドモ之ヲ幾何學的ニ考フレバ容易ニ證セラル。何トナレバ l_1, m_1, n_1 ハ OX ト ox, oy, oz ノ間ノ角ノ餘弦ニシテ, l_2, m_2, n_2 ハ OY ト ox, oy, oz ノ間ノ角ノ餘弦ナリ。又 l_3, m_3, n_3 ハ OZ ト ox, oy, oz ノ間ノ角ノ餘弦ナリ。換言スレバ OX, OY, OZ ニ關シテ ox ノ方向餘弦ハ l_1, l_2, l_3 ニシテ oy ノ方向餘弦ハ m_1, m_2, m_3 又 oz ノ方向餘弦ハ n_1, n_2, n_3 ナリ。

故ニ先ヅ

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1$$

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=1$$

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

又 ox, oy ; oy, oz 及ビ oz, oy ナル三組ノ直線ハ何レモ互ニ垂直

ナルガ故ニ,

$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0$$

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0$$

$$n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0$$

ナリ。

注意 前數節ニ於テ述ベタル變換式ハ何レモ要用ニシテ而カモ對稱ノ形ニナリ居ルガ故ニ記憶スルニ便ナリ。然レドモ其中ニ含マレタル九ツノ常數 $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2$ 等ハ六ツノ等式ニヨリテ結ビ付ケラレ居ルガ故ニ實際ニ要スルハ三ツノ數ナリ。換言スレバ,變換式ニハ三ツノ常數アレバ足ル。コノ見地ヨリセルおいらーノ變換式ハアリト雖モ,今ハ之ニ觸レザルベシ。

55. 方程式ノ次數ハ坐標ノ變換ニヨリテ增減セズ。 一ツノ坐標軸ニ關シテ表ハサレタル n 次ノ方程式ヲ

$$f(x, y, z)=0$$

ナリトス。

然ル時任意ニ他ノ新ラシキ坐標軸ヲトリ,之ニ關シテ上ノ方程式ヲ變換センニ,變換式ノ最モ一般ナルモノハ

$$x=l_1X+l_2Y+l_3Z+a$$

$$y=m_1X+m_2Y+m_3Z+b$$

$$z=n_1X+n_2Y+n_3Z+c$$

ナルヲ以テ,方程式ニ於ケル任意ノ項例ヘバ $kx^py^qz^r$ ノ如キハ變換ノ結果

$$k(l_1X+l_2Y+l_3Z+a)^p(m_1X+m_2Y+m_3Z+b)^q(n_1X+n_2Y+n_3Z+c)^r$$

トナル。而シテ之ハ矢張 x, y, z ニ就キテ $p+q+r$ 次ナリ。故ニ

方程式ノ全體ヨリ見ル時モ尙其次數ヲ增スコトナシ。

次ニ變換ノ結果次數ヲ減ズルコトモナシ, 何トナレバ若シカヽル事アラバ,之ヲ元ノ坐標軸ニ戾ス時ハ原方程式ニ還元スベク,從ツテ變換ノ爲ニ次數ハ增加シタルコトニナルベシ。コレ上段ニ述ベタル結論ニ反スルコトヽナルベケレバナリ。

第四章

問題

1. 原點ヲ(1,−1, 2)ニ移ス時ハ

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z=2$$

ハ如何ニ變換セラルヽカ

解. 第五十二節公式(1)ニヨレバ,變換式ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=X+1\\ y&=Y-1\\ z&=Z+2 \end{aligned}\right\}$$

ナルガ故ニ,之等ヲ原式ニ代入スレバ

$$(X+1)^2+(Y-1)^2+(Z+2)^2-2(X+1)+2(Y-1)-4(Z+2)=2$$

即チ

$$X^2+Y^2+Z^2=8$$

トナル。

2. 新軸ノ舊軸ニ關スル方向餘弦ハ夫々

$$-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\qquad \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\qquad \frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}$$

ナル時ノ變換式ヲ求メヨ。

解. 第五十三節公式(1)ニヨリ,直チニ

$$x=\frac{1}{3}(-X+2Y+2Z)$$

$$y=\frac{1}{3}(2X-Y+2Z)$$

$$z=\frac{1}{3}(2X+2Y-Z)$$

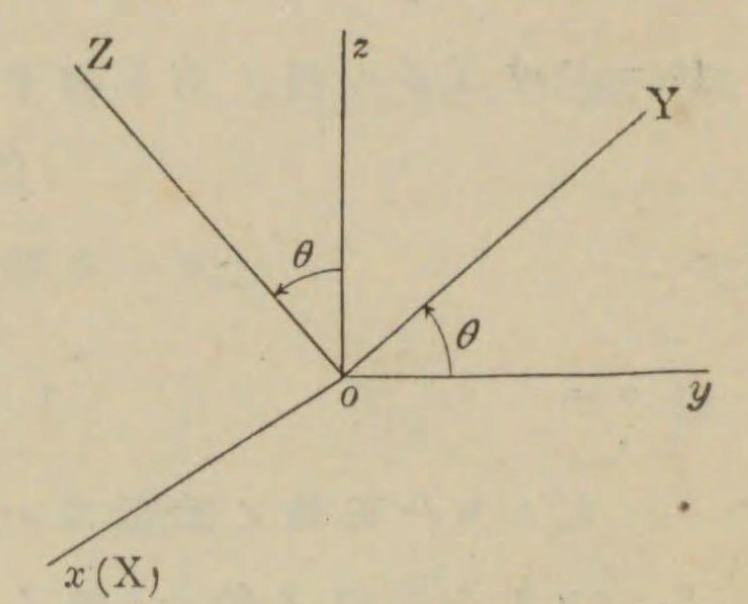
ナルコトヲ知ル。

3. x軸ノ周リニy軸トz軸トヲ廻轉シタル時ノ變換式ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=X\\ y&=Y\cos\theta-Z\sin\theta\\ z&=Y\sin\theta+Z\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

ナル形トナルコトヲ示セ。

解. 圖ノ如ク軸ノ正ノ方向ヨリ見テ左廻リニθダケ廻轉スル時ノ變換式ヲ求メンニ,x軸トX軸トハ一致スルガ故其ナス角ハ零,又x軸トY軸及ビZ軸トノナス角ハ共ニ直角ナルヲ以テ



$$l_1=\cos 0=1\quad l_2=l_3=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

ヨツテ先ヅ

$$x=X$$

次ニy軸トX軸トハ垂直,y軸トY軸トナス角ガθ,y軸トZ軸トハ$\frac{\pi}{2}+\theta$ナルガ故ニ

$$m_1=\cos\frac{\pi}{2}=0,\qquad m_2=\cos\theta\qquad m_3=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

ヨツテ

$$y=Y\cos\theta-Z\sin\theta$$

$n_3=\cos\theta$

同様ニシテ

$n_1=0\quad n_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$z=Y\sin\theta+Z\cos\theta$$

ナルヲ知ル。

4. 上ノ變換ニヨリテ方程式

$$x^2-y^2-z^2+xy+2yz+2x-8=0$$

ノyzノ項ヲ消去センニハ,θヲ如何ニトルベキカ。

解. 原式ニ前題ニ於ケル變換式ヲ施セバ,

$$X^2-(Y\cos\theta-Z\sin\theta)^2-(Y\sin\theta+Z\cos\theta)^2+X(Y\cos\theta-Z\sin\theta)$$
$$+2(Y\cos\theta-Z\sin\theta)(Y\sin\theta+Z\cos\theta)+2X-8=0$$

整頓スレバ

$$X^2-Y^2(1-2\sin\theta\cos\theta)-Z^2(1+2\sin\theta\cos\theta)+XY\cos\theta$$
$$+2YZ(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-ZX\sin\theta+2X-8=0$$

即チ

$$X^2-Y^2(1-\sin 2\theta)-Z^2(1+\sin 2\theta)+XY\cos\theta+2YZ\cos 2\theta$$
$$-ZX\sin\theta+2X-8=0$$

玆ニ於テYZノ項ヲ消失センガ爲ニハ

$$\cos 2\theta=0$$

$$\therefore \qquad 2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

從ツテ
$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

ナリ。但シnハ正,負ノ整數又ハ零ナリトス。

5. x,yナル二ツノ軸ハz軸ノ正ノ方向ヨリ見テ右周リニ45度宛廻轉スル時,方程式

$$x^2-y^2=2mz$$

ハ如何ニ變換セラルヽカ。

解. 新x軸ノ舊軸ニ關スル方向餘弦ヲl_1, m_1, n_1トスレバ

$$l_1=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad m_1=\cos 135^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad n_1=\cos 90^\circ=0$$

ニシテ,新y軸ノ舊軸ニ關スル方向餘弦ヲl_2, m_2, n_2トスレバ

$$l_2=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad m_2=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad n_2=\cos 90^\circ=0$$

又z軸ハ少シモ變化セザルヲ以テ,其方向餘弦l_3, m_3, n_3ハ

$$l_3=\cos 90^\circ=0\qquad m_3=\cos 90^\circ=0\qquad n_3=\cos 0^\circ=1$$

ヨツテ其變換式ハ

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\qquad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$$
$$z=Z$$

從ツテ求ムル方程式ハ

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2-\frac{1}{2}(X-Y)^2=2mZ$$

即チ

$$XY=mZ$$

ナリ。

6. 一ツノ點ノ坐標ハ1, 2, 3, ナリ。方程式

$$x=y=z\qquad \frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{\frac{1}{2}}\ \text{及ビ}$$
$$x=-z,\qquad y=0$$

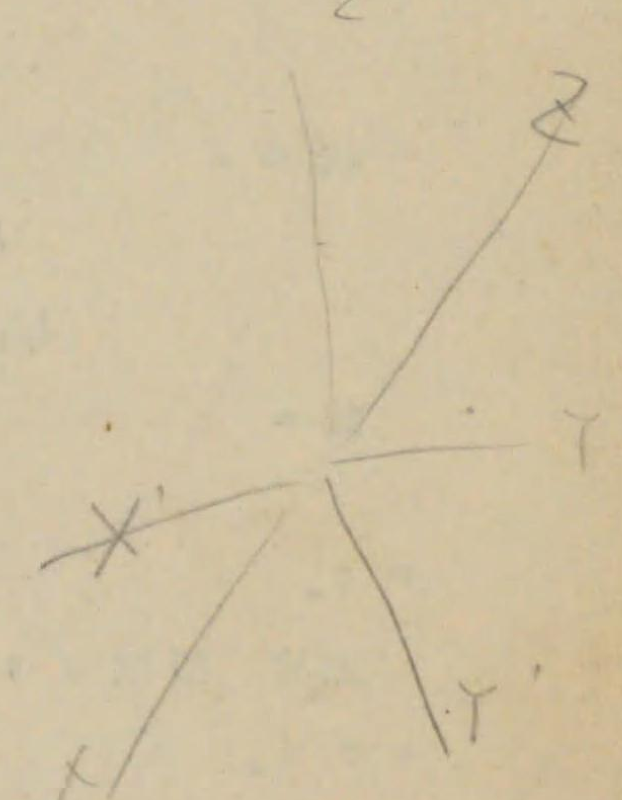
ニテ表ハサレタル三ツノ直線ヲ軸トスル時,此點ノ坐標ヲ求メヨ。

解. 先ヅ初メニ二ツノ直線ノ方向餘弦ハ夫々

$$l_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad m_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad n_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$l_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\qquad m_2=\frac{-2}{\sqrt{6}}\qquad n_2=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

ニシテ,最後ノ直線ハ書キ直スト

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}$$



トナルガ故ニ,其方向餘弦ハ

$$l_3=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad m_3=0\qquad n_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ナリ。故ニ新坐標X, Y, Zハ夫々

$$X=l_1x+m_1y+n_1z=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$
$$Y=l_2x+m_2y+n_2z=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{4}{\sqrt{6}}+\frac{3}{\sqrt{6}}=0,$$
$$Z=l_3x+m_3y+n_3z=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

即チ點$(1, 2, 3)$ハ此變換ノ爲ニ,點$(2\sqrt{3}, 0, -\sqrt{2})$トナル。

7. 原點ヲ變ゼズシテ一ツノ直交軸ヨリ,他ノ直交軸ニ變換スル時ハ

$$x^2+y^2+z^2$$

ハ不易ナルコトヲ證セヨ。

解. 變換式ハ

$$x=l_1X+l_2Y+l_3Z$$
$$y=m_1X+m_2Y+m_3Z$$
$$z=n_1X+n_2Y+n_3Z$$

故ニ

$$x^2+y^2+z^2=(l_1X+l_2Y+l_3Z)^2+(m_1X+m_2Y+m_3Z)^2$$
$$+(n_1X+n_2Y+n_3Z)^2$$
$$=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)X^2+(l_2^2+m_2^2+n_2^2)Y^2+(l_3^2+m_3^2+n_3^2)Z^2$$
$$+2(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)YZ+2\cancel{XY}(l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1)ZX$$
$$+2XY(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)$$

然ルニ

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=l_2^2+m_2^2+n_2^2=l_3^2+m_3^2+n_3^2=1$$
$$l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

故ニ

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2$$

ナリ。

注意 原點ヨリ一點ニ至ル距離ハ不變ナルヨリシテモ容易ニ證セラル。

8. 原點ヲ同ジクスル二組ノ直角坐標軸アリ。一ツノ平面ガ之等ノ軸ヲ原點ヨリノ距離 a, b, c 及ビ a', b', c' ニ於テ截ル時,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}$$

ナル關係ガ成立スルコトヲ證セヨ。

解. 平面ガ一方ノ直交軸ヲ原點ヨリ距離 a, b, c ニ於テ截ルガ故ニ其坐標軸ニ關シテノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

ナリ。書キ換フレバ

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}$$

ヨツテ原點ヨリ此平面ヘノ距離ヲ p トスレバ

$$p=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}$$

即チ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

同樣ニ他ノ一組ノ直交軸ヨリ

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}=\frac{1}{p^2}$$

故ニ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}$$

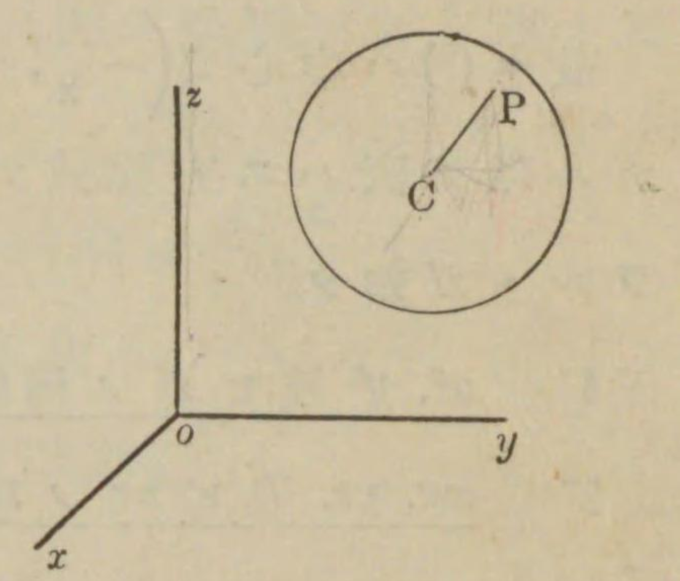
ナリ。(原點ガ變ラヌ故平面ニ至ル垂線ノ長サハ同一ナルコトニ注意スベシ)

第五章

二次曲面

56. 球ノ方程式

直交軸ニ關シテ,球ノ中心ヲ點(a, b, c)トシ,其半徑ヲrトセヨ。球面上ノ任意ノ點ヲPトシ其坐標ヲx, y, zトスレバ



$$CP^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

而シテ又　$CP=r$

ナルガ故ニ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\cdots\cdots(1)$$

此關係ハ球面上ニ於ケルP點ノ位置ノ如何ニ關セズ成立シ,球面外ノ點ノ位置ノ如何ニ關セズ決シテ成立セザルガ故ニ,(1)ハ球ノ方程式ナリ。

系　球ノ中心ニ原點ヲ措クトキハ

$$a=b=c=0$$

ナルガ故ニ,球ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \cdots\cdots(2)$$

トナル。

注意 i　(1)及ビ(2)ヲ球ノ方程式トイフモ,實ハ球面ノ方程式ナリ。然レドモ解析幾何學ニテハ球面ノコトヲ單ニ球トモイフ。

注意 ii　x, y, zニ關シテ二次ナル方程式ニテ表ハサレタル曲面ヲ二次曲面ト稱ス。

57. 球ノ方程式ノ特長

一般ナル球ノ方程式(1)ヲ展開スレバ,

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ノ如キ形トナル。逆ニ方程式(3)ノ如キハ球面ヲ表ハストイフヲ得ベシ。如何トナレバ之ヲ書キ換フルト

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}+\frac{C^2}{4}-D$$

故ニ(3)ハ中心ガ$\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$, 半徑ガ$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$ナル球ヲ表ハス方程式ナリ。要スルニ球ノ特長ハ(3)ヲ見テ知ラルヽガ如ク

1° x^2, y^2 及ビ z^2 ノ係數ハ相等シキコト

2° xy, yz, 及ビ zx ノ項ノ存在セザルコト。

コレナリ。

注意　$A^2+B^2+C^2-4D=0$ ナル時ハ,半徑ガ零ナルガ故ニ球ニアラズシテ點ナリ。然レドモコノ場合尚吾人ハ半徑ガ零ナル球叉ハ略シテ點球トイフ。叉 $A^2+B^2+C^2-4D<0$ ナル時ハ,半徑ガ虛數トナルガ故ニ,球トハイヒ難シ.然レドモ解析幾何學ニテハ半徑ガ虛數ナル虛球ナリトイフ。(平面解析幾何學八十頁參照)

例1　點(5, 3, −1)ヲ中心トシ半徑ガ8ナル球ノ方程式ヲ求メヨ。

解　第五十六節公式(1)ニ代入スレバ

$$(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=8^2$$

卽チ

$$x^2+y^2+z^2-10x-6y+2z=29$$

コレ求ムル球ノ方程式ナリ。

例2　$$x^2+y^2+z^2+4x+6y-2z=2$$

ハ如何ナル球ナルカ

解　與ヘラレタル方程式ヲ書キカフレバ,

$$(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=16$$

ヨツテ點(−2, −3, 1)ヲ中心トシ半徑ガ4ナル球ヲ表ハス。

例3　二ツノ點(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2)ヲ直徑ノ兩端トスル球ノ方程式ヲ求メヨ。

解　中心ノ坐標ハ明カニ $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$ 及ビ $\frac{z_1+z_2}{2}$ ニシテ,半徑ノ長サハ直徑ノ半分ナルガ故ニ,

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

ヨツテ其方程式ハ

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\}$$

整頓スレバ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0.$$

58. 種々ノ條件ニ適スル球ノ方程式

(1) 一ツノ定點(a, b, c)ヲ過ル球ノ方程式

球ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

ナリト假定スレバ,コノ球ハ點(a, b, c)ヲ過ル爲ニハ,

$$a^2+b^2+c^2+Aa+Bb+Cc+D=0$$

ナル關係アラザルベカラズ。邊々相減ズレバ,

$$x^2+y^2+z^2+A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=a^2+b^2+c^2 \cdots\cdots(1)$$

コレ求ムル方程式ナリ。實ニモ(4)ハ球ノ特長ヲ具ヘ且ツ點(a, b, b)ノ坐標ニヨツテ滿足セラルヽヲ以テナリ。

注意 (1)ハ三ツノ未定係數A, B, Cヲ含メリ,コハ球ハ一ツノ點(a, b, c)ノ外ニ尙三ツノ點ヲ過ラシムルコトヲ意味スルモノナリ。

(2) 二ツノ點(a, b, c), (a', b', c')ヲ過ル球ノ方程式

一點(a, b, c)ヲ過ル球ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2+A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=a^2+b^2+c^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

此球ガ他ノ點(a', b', c')ヲ過ル爲ニハ,

$$a'^2+b'^2+c'^2+A(a'-a)+B(b'-b)+C(c'-c)=a^2+b^2+c^2$$

此式ニ於テA, B, Cノ中何レカ一ツ例ヘバCヲA及ビBニテ表ハシ,(2)ニ代入スレバ

$$x^2+y^2+z^2+A(x-a)+B(y-b)+\frac{a^2+b^2+c^2-\{a'^2+b'^2+c'^2+A(a'-a)+B(b'-b)\}}{c'-c}(z-c)=a^3+b^2+c^3 \quad \cdots\cdots(2)'$$

コレ求ムル方程式ナリ。

注意 コノ方程式ニハ任意ノ常數A, Bヲ含ム。コレ尙他ノ二ツノ點ヲ過ラシムルコトヲ示スモノナリ。

(3) 三ツノ點或ハ四ツノ點ヲ過ル球ノ方程式

上ト同樣ノ方法ニテ求ムルコトヲ得

(4) 坐標面ニ切スル球ノ方程式

三ツノ坐標面ノ中ノ一ツ例ヘバxy面ニ切スル球ノ方程式ヲ求メンニ,此場合ニハ球ガxy面ト交ル點ハ(卽チ切點)唯一點ナリ,コノ點ヲ(a, b, c)トスレバ,所要ノ方程式ニ$z=0$ト置ク時ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0$$

トナラザルベカラズ。ヨツテxy面上ノ點(a, b, c)ニ於テ切スル球ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2+Cz=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

ノ形ヲナス。玆ニCハ任意ノ常數ナリトス。若シ此球ガ過ルベキ他ノ一ツノ點或ハ半徑ノ長サガ知ラルレバCノ値ハ決定セラルベシ。

(5) 坐標軸ニ切スル球ノ方程式

三ツノ軸ノ上ノ切點ヲ,原點ヨリ正ノ方向ニ,aナル距離ニアルモノトシ,球ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

ト假定スベシ。然ル時x軸上ノ切點ヲAトシ原點ヨリノ距離ヲaトスレバ,(4)ニ$y=z=0$ト置キタル方程式

$$x^2+Ax+D=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

ハ

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2=0$$

ト一致セザルベカラズ。故ニ

$$A=-2a \qquad D=a^2$$

同樣ニ$z=x=0$ト置キテ

$$B=-2a$$

ヲ得ベク,$x=y=0$ト置キテ

$$C=-2a$$

ヲ得ベシ。ヨツテ求ムル球ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2-2a(x+y+z)+a^2=0$$

ナリ。

注意 上ノ方程式ハ三ツノ切點ガ原點ヨリ正ノ方向ニアル場合ノモノナリ。若シ然ラザル時ニハ, x, y, z ノ係數ノ符號ヲ適當ニ定ムレバヨシ

例 4 四ツノ點$(0, 0, 0)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 2, -1)$及ビ$(2, 3, 0)$ヲ過ル球ノ方程式ヲ求メヨ。

解 球ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

ト假定ス。コノ球ヲシテ原點ヲ過ラシムル爲ニハ

$$D=0$$

次ニ點$(1, -1, 1)$ヲ過ラシムル爲ニハ

$$3+A-B+C+D=0$$

同樣ニ點$(1, 2, -1)$及ビ$(2, 3, 0)$ヲ過ラシムル爲ニハ夫々

$$6+A+2B-C+D=0$$

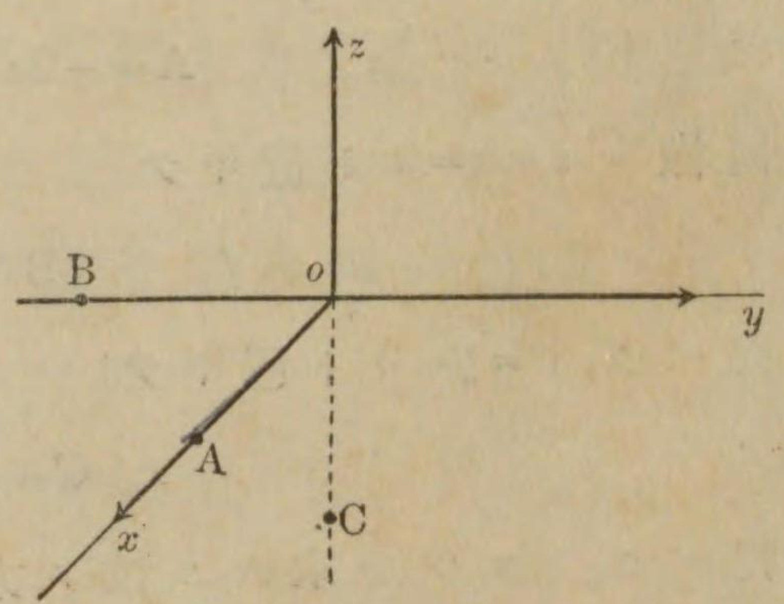
$$13+2A+3B\qquad +D=0$$

之等ヨリ $A=-\dfrac{7}{2}$, $B=-2$, $C=-\dfrac{3}{2}$ $D=0$,

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2-\frac{7}{2}x-2y-\frac{3}{2}z=0$$

例 5 圖ノ如ク x, y, z 軸ニテノ切點ヲ A, B, C トシ, 原點ヨリノ距離ガ共ニ a ナルガ如キ球ノ方程式ヲ求メヨ。



解 A ハ原點ヨリ正ノ方向ニアルガ故ニ

$$A=-2a \qquad D=a^2,$$

ナルモ, B, C ハ共ニ原點ヨリ負ノ方向ニアルガ故ニ

$$B=C=2a$$

トセザルベカラズ。ヨツテ求ムル方程式ハ

$$x^2+y^2+z-2ax+2ay+2az+a^2=0$$

ナリ。

例 6 點(x_1, y_1, z_1)ヲ過リ且ツ圓 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ ヲ含ム球ノ方程式ヲ求メヨ。

解 先ヅ圓 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ ヲ含ム球ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2+Az=a^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。實ニモ $z=0$ ナル平面ト(1)トノ交線ハ圓 $x^2+y^2=a^2$ ナレバナリ。

而シテ(1)ハ點(x_1, y_1, z_1)ヲ過ル爲ニハ

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+Az_1=a^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ(2)ヨリ

$$A=\frac{a^2-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}{z_1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ求ムル方程式ハ(3)ヲ(1)ニ代入セルモノ卽チ

$$z_1(x^2+y^2+z^2-a^2)=z(x_1^2+y_1^2+z_1^2-a^2)$$

ナリ。

59. 切平面ノ方程式

曲面上ノ一點ヲ過リ且ツ其點ニ於ケル法線ニ垂直ナル平面ヲ其點ニ於ケル切平面トイフ。特ニ球ニアリテハ, 半徑ハ法線トナル故ニ, 半徑ノ一ツノ端點ニ於テ之ニ垂直ナル平面ガ球ノ切平面トナル。

サテ球ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

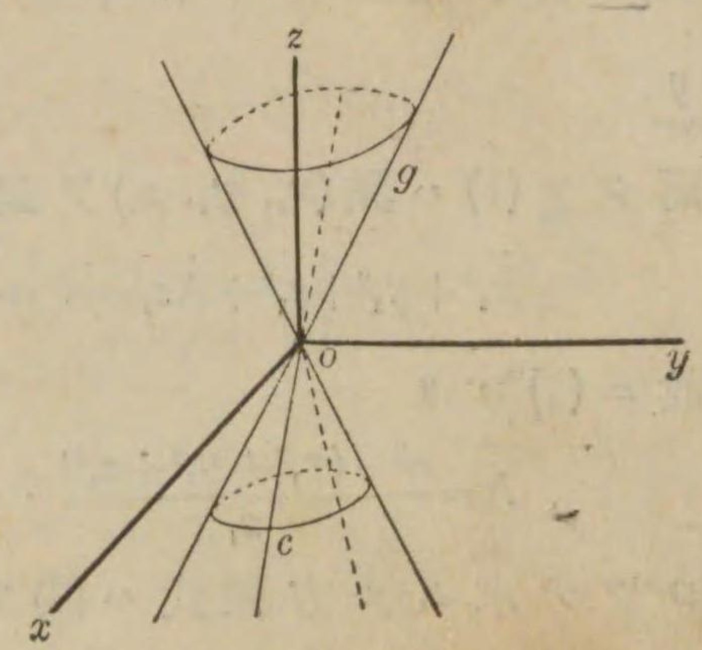
ナル時, 球面上ノ一ツノ點(x_1, y_1, z_1)ニ於ケル切平面ノ方程式ハ

$$(x-x_1)(x_1-a)+(y-y_1)(y_1-b)+(z-z_1)(z_1-c)=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

ナリ。何トナレバ(2)ハ x, y, z ニ就キテ一次ノ方程式ナルガ故ニ,一ツノ平面ヲ表ハシ且ツ點 (x_1, y_1, z_1) ヲ通過スルコト明カニシテ而カモ其法線ハ中心 (a, b, c) ト (x_1, y_1, z_1) トヲ結ブ半徑ニ一致スルヲ以テナリ。

60. 錐

錐トハ定點Oヲ過ル動直線 g ガ, O ヲ過ラザル一ツノ曲線 c ニ沿ヒテ動クトキ生ズル曲面ヲイフ。



O ヲ錐ノ頂點, g ヲ母線, c ヲ導曲線トイフ。故ニ母線ハ頂點ノ爲ニ二分セラレ,從ツテ其各ガ錐面ヲ作ル。特ニ g ガ圓周上ヲ動クトキ生ズル曲面ヲ圓錐トイヒ圓ノ中心トOトヲ結ブ直線ガ圓ノ平面ニ垂直ナル時ハ之ヲ直圓錐トイフ。

61. 錐ノ方程式

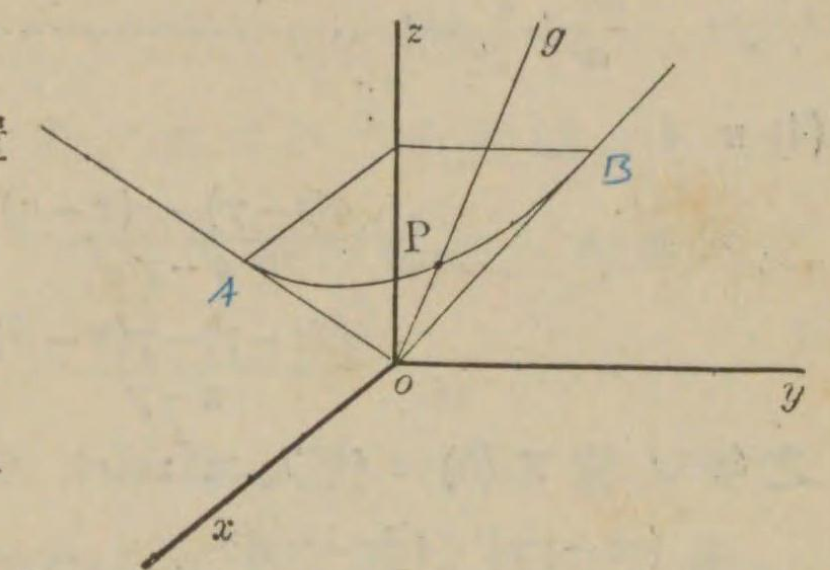
(1) 原點ヲ頂點トシ導曲線ヲ圓

$$\left.\begin{array}{l} z=c \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{array}\right\}$$

トスル時ノ方程式ヲ求メントス。

先ヅ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ハ直圓壔ニシテ $z=c$ ハ xy 面ニ平行ナル平面ナリ。故ニ之等ノ方程式ヲ同時ニ滿足スルモノハ平面 $z=c$ 上ノ一ツノ圓ナリ。

サテ導曲線上ノ一ツノ點ヲ P トシ,其坐標ヲ x', y', z' トスレバ,直線OP即チ一ツノ位置ニ於ケル導線 g ノ方程式ハ



$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'} \quad \cdots\cdots(1)$$

OP

ニシテ,且ツ P ハ導曲線ノ上ニアルガ故ニ,

$$\left.\begin{array}{l} (x'-a)^2+(y'-b)^2=r^2 \\ z'=c \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

ヲ滿足ス。(1)及ビ(2)ヨリ動點 P ノ坐標 x', y', z' ヲ消去スレバ

$$(cx-az)^2+(cy-bz)^2-r^2z^2=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

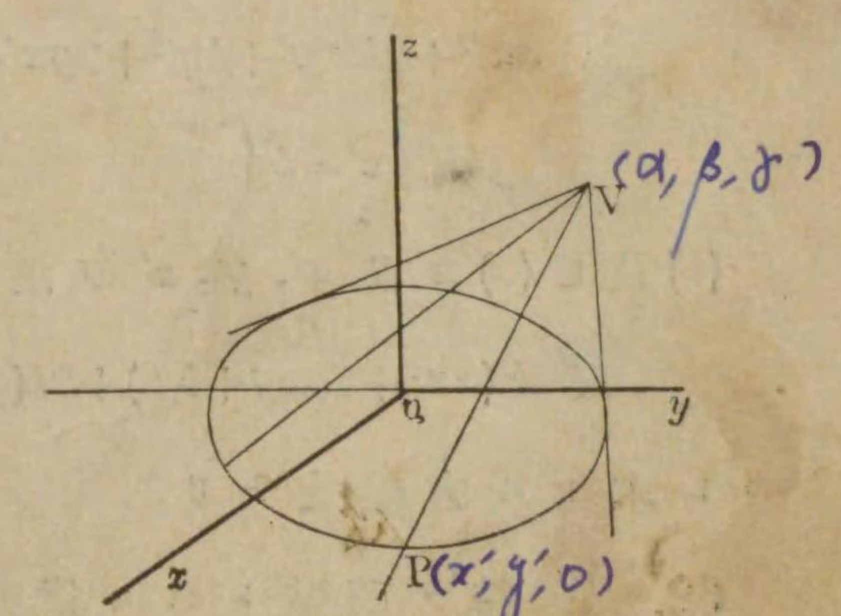
コレ即チ P 點ハ導曲線上ヲ動クトキ,動直線 g 上ノ任意ノ點ノ坐標 x, y, z ノ間ニ存在スベキ關係ナリ。從ツテ(3)ハ求ムル錐面ノ方程式ナリ。

(2) 頂點ヲ定點 (α, β, γ) ニ置キ,楕圓

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{array}\right\}$$

ヲ導曲線トスル錐ノ方程式ヲ求メントス。

圖ニ於テVヲ頂點トシ,Pヲ楕圓ノ上ノ任意ノ一點トシ,其坐標ヲ $x', y', 0$ トスレバ,母線VPノ方程式ハ



$$\frac{x-\alpha}{\alpha-x'}=\frac{y-\beta}{\beta-y'}=\frac{z-\gamma}{\gamma} \quad \cdots\cdots(4)$$

而シテPハ楕圓ノ上ノ點ナルガ故ニ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4)ヨリ

$$\frac{\alpha(z-\gamma)-\gamma(x-\alpha)}{z-\gamma}=\frac{\alpha z-\gamma x}{z-\gamma}=x'$$

$$\frac{\beta(z-\gamma)-\gamma(y-\beta)}{z-\gamma}=\frac{\beta z-\gamma y}{z-\gamma}=y'$$

之等ノ値ヲ(5)ニ代入スレバ,

$$\frac{(\alpha z-\gamma x)^2}{a^2}+\frac{(\beta z-\gamma y)^2}{b^2}=(z-\gamma)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

コレPハ楕圓ニ沿ヒテ動クトキ, 母線VPノ上ノ~~坐ノ~~坐標ノ間ニ存在スベキ關係ナリ。從ツテ(6)ハVPノ作ル錐面ノ方程式ナリ。

(3) 平面曲線

$$\left.\begin{aligned}&ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0\\&z=k\end{aligned}\right\}$$

ヲ導線トシ原點ヲ頂點トスル錐ノ方程式ヲ求ムルコト

與ヘラレタル平面曲線上ノ任意ノ點ヲ(x', y', z')トスレバ原點ト結ブ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ點(x', y', z')ハ曲線上ノ點ナルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned}&ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c=0\\&z'=k\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)及ビ(2)ヨリx', y', z'ヲ消去スレバ

$$k^2(ax^2+2hxy+by^2)+2k(gx+fy)z+cz^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

コレ求ムル方程式ナリ。

62. 原點ヲ頂點トスル錐面ノ方程式ハx, y, zニ就キテ同次

ノ方程式ナリシコト已ニ前節 i 及ビ iii ニ於テ見タリ。逆ニ同次ノ方程式ハ錐面ヲ表ハストイフヲ得ベシ。何トナレバ之ヲ一ツノ平面例ヘバ$z=c$ニテ截ル時ハ,截ロハ二次曲線ニシテ,且ツ其上ノ任意ヲ點ヲ$P(x', y', z')$トスレバ,其方程式ハ勿論x', y', z'ニテ滿足セラルベシ。

サテ原點トPトヲ結ブ直線上ノ任意ノ點ノ坐標ハkx', ky', kz'ト書カヽルベク;而シテ其方程式ハ又kノ値ノ如何ニ關セズ滿足スベシ。換言スレバ此方程式ガ表ハス表面ハ頂點ト截ロノ上ノ點トヲ結ブ直線ヲ含ム。故ニ錐面ナルコト明カナリ。

注意 上ノ定理ニヨリ原點ヲ過ル直線

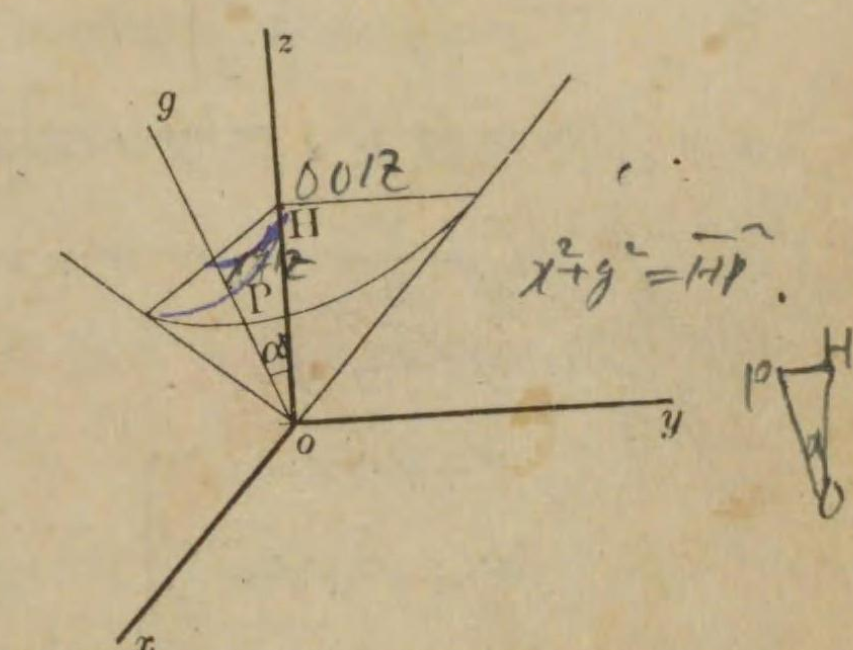
$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

ガ同次方程式$f(x, y, z)=0$ニヨリテ表ハサルヽ錐面ノ母線ナル時ハ,

$$f(l, m, n)=0$$

ナル關係アリ。

例 7 頂點ヲ原點ニ置キ,頂角ガ2αナルガ如キ錐面ノ方程式ヲ求メヨ。



解 一ツノ母線ノ上ノ任意ノ點Pノ坐標ヲx, y, zトシPヲ通リz軸ニ垂直ナル截面ヲ作リ交點ヲHトスレバ,

$$HP^2=x^2+y^2$$

又直角三角形OHPヨリ

$$\frac{PH}{OH}=\tan\alpha \quad 即チ \quad PH=z\tan\alpha$$

ヨツテ所要ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$$

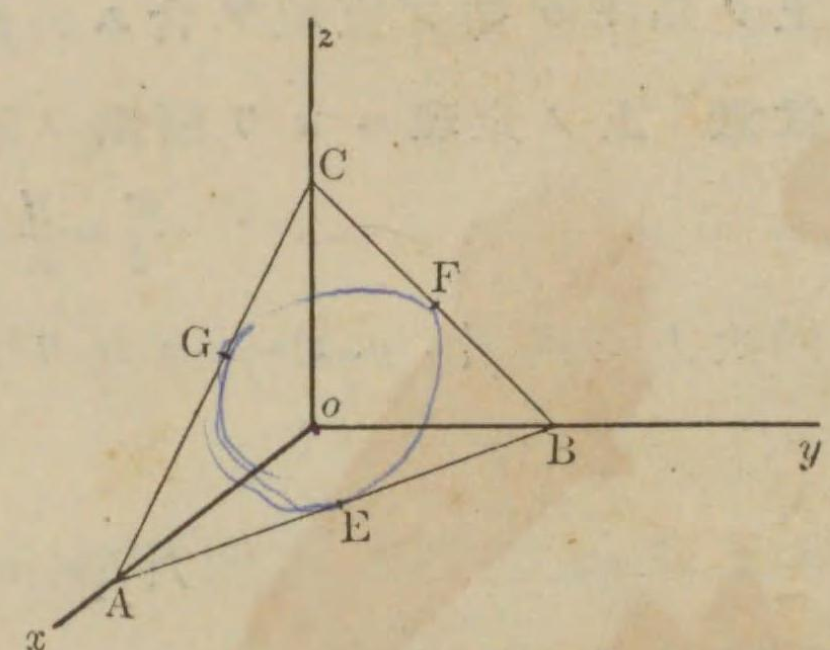
ナリ。

例 8 錐面ノ頂點ハ原點ニ置キ,其導線ハ平面

$$x+y+z=a$$

ノ上ニアリテ且ツ坐標面ニ切スル圓ナル時,此錐面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 平面 $x+y+z=a$ ハ圖ニ示スガ如クOA=OB=OC=aニトリタル三ツ點A, B, Cヲ過ル平面ナリ,又此上ニアリ坐標面ニ切スル圓トハ原點ヲ中心トシ AB, BC, CA ノ中點 E, F, G ヲ過ル球ガ此平面ニ截ラルル截口ニ外ナラズ。故ニ導線ノ方程式ハ



$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。今導線上ノ任意ノ點ヲ(x',y',z')トスレバ,母線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ニシテ且ツ(1)ヨリ

$$\left.\begin{array}{l} x'+y'+z'=a \\ x'^2+y'^2+z'^2=\dfrac{a^2}{2} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ滿足スベシ。故ニ所要ノ方程式ハ(2), (3)ヨリ x', y', z' ヲ消去

シタルモノ,卽チ

$$2(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z)^2$$

ナリ。

例 9 一定直線ト之ニ交ハル一定平面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 定平面ヲ xy ノ面ニ,定平面ト定直線トノ交點ヲ原點ニトルト,定直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

トナル。玆ニ l, m, n ハ此直線ノ方向餘弦ナリトス。

サテ軌跡ノ一點ヲ(X, Y, Z)トスレバ,其點ヨリ平面ニ至ル距離ハZニシテ,直線ニ至ル距離ハ第三十三節公式(2)ニヨリテ

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2-(lX+mY+nZ)^2}$$

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$X^2+Y^2+Z^2-(lX+mY+nZ)^2=Z^2$$

卽チ
$$X^2+Y^2=(lX+mY+nZ)^2$$

而シテコハX, Y, Zニ就キテ同次式ナルガ故ニ原點ヲ過ル一ツノ錐面ナリ。

例 10 三ツノ坐標軸ヲ含ム二次ノ錐面ノ方程式ハ

$$fyz+gzx+hxy=0$$

ノ形ヲナス事ヲ證セヨ。

解 三ツノ坐標軸ヲ含ム錐ガ原點ヲモ過ルガ故ニ其方程式ハ

$$ax^2+by^2+cz^2+fyz+gzx+hxy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ノ如ク二次ノ同次方程式ナラザルベカラズ。

而シテコレハ又 x 軸上ノ各點例ヘバ點 $(x', 0, 0)$ ヲ過ルベキニヨリ (1) ニ代入シテ

$$ax'^2=0$$

從ツテ $a=0$, 同様ニシテ $b=0$, $c=0$ ナラザルベカラズ。故ニ其錐面ノ方程式ハ

$$fyz+gzx+hxy=0$$

ノ如キ形ヲナス。

例 11 原點ヲ同ジクスル二組ノ直交軸ヲ過ルガ如キ二次ノ錐面ヲ作ルコトヲ得。之ヲ證セヨ。

解 一組ノ直交軸ニ關シテ他ノ一組ノ直交軸ノ方向餘弦ヲ l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 ; l_3, m_3, n_3 トシ前ノ一組ノ直交軸ヲ過ル二次ノ錐面ヲ

$$fyz+gzx+hxy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリトス。然ル時ハ此二次錐面ヲシテ後ノ直交軸ノ中,二ツヲ過ラシムルニハ本節注意ニヨリ

$$fm_1n_1+gn_1l_1+hl_1m_1=0$$
$$fm_2n_2+gn_2l_2+hl_2m_2=0$$

ナルガ如ク比 $f:g:h$ ヲ定メザルベカラズ。然ルニ

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0$$
$$n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0$$
$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0$$

ナル關係ヲ有スルガ故ニ,上ノ如ク定メタル f, g, h ニ對シテ又

$$fm_3n_3+gn_3l_3+hl_3m_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ナル關係アリ。コレ(1)ガ第二ノ直交軸ノ二ツヲ含ム時ハ,必ズ殘

リノ軸ヲモ含ムコトヲ示スモノナリ。ヨリテ證明セラレタリ。

63. 錐面ト平面トノ交線

原點ヲ過ル錐面及ビ平面ノ方程式ヲ夫々

$$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

及ビ

$$ux+vy+wz=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トシ,夫等ノ交線ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ナリト假定ス。(原點ヲ通ズルガ故)

然ル時ハ(3)ハ(1)及ビ(2)ノ上ニアル爲ニハ,

$$f(l,m,n)=al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm=0 \cdots\cdots\cdots (4)$$

及ビ

$$lu+mv+nw=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

之等ノ二ツヨリ比

$$l:m:n$$

ヲ求ムルニ一般ニハ二ツノ値ヲ得。故ニ其値ヲ(3)ニ代入スルコトニヨリテ二ツノ直線ヲ得ベシ。

例 12 平面 $2x+y-z=0$ ト錐面 $4x^2-y^2+3z^2=0$ トノ交線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 上ノ公式ニ(4)及ビ(5)ニ

$$a=4, \quad b=-1, \quad c=3, \quad f=g=h=0$$

及ビ $u=2 \quad v=1 \quad w=-1$

ト置キ,且ツ n ヲ消去スレバ

$$16l^2+12lm+2m^2=0$$

コレヨリ $l:m$ ノ二通ノ値卽チ

$$\frac{l_1}{m_1}=-\frac{1}{2}\qquad \frac{l_2}{m_2}=-\frac{1}{4}$$

ヲ得。同様ニ m ヲ消去スルコトニヨリ

$$\frac{n_1}{l_1}=0,\qquad \frac{n_2}{l_2}=-2$$

故ニ

$$l_1:m_1:n_1=1:-2:0$$

$$l_2:m_2:n_2=-1:4:2$$

ヨツテ求ムル交線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{0}$$

及ビ

$$\frac{x}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2}$$

ナリトス。

例 13 平面 $ux+vy+wz=0$ ト錐面 $yz+zx+xy=0$ トノ二ツノ交線ハ互ニ垂直ナル爲ニハ

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$$

ナルベキコトヲ證セヨ。

解 平面ト錐面トハ原點ヲ共有スルコト明カナルガ故ニ交線ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

トスベシ。此直線ガ與ヘラレタル平面及ビ錐面ノ上ニアル爲ニハ

$$\left.\begin{array}{r} ul+vm+wn=0\\ mn+nl+lm=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此二ツヨリ n ヲ消去スレバ

$$ul^2+lm(u+v-w)+vm^2=0$$

故ニ之ヲ $\frac{l}{m}$ ニ就キ解クトキハ其ニツノ根ノ積ハ

$$\frac{l_1l_2}{m_1m_2}=\frac{v}{u}$$

卽チ

$$l_1l_2:m_1m_2=\frac{1}{u}:\frac{1}{v}$$

又(1)ヨリ m ヲ消去スルコトニヨリ

$$l_1l_2:n_1n_2=\frac{1}{u}:\frac{1}{w}$$

故ニ

$$l_1l_2:m_1m_2:n_1n_2=\frac{1}{u}:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}$$

サテ二ツノ交線ガ互ニ垂直ナル爲ニハ

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

卽チ

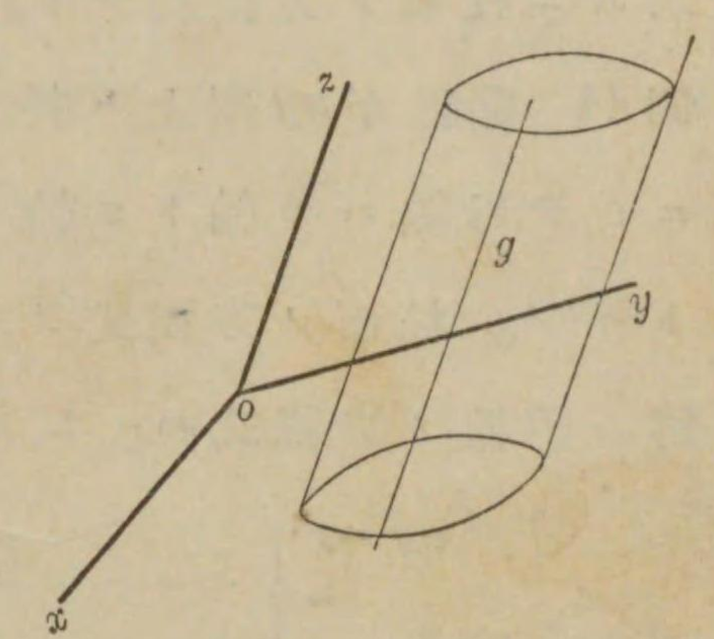
$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$$

ナラザルベカラズ。

64. 柱面ノ方程式

柱面トハ定直線ニ平行ナル母線ガ,或曲線上ニ沿ヒテ動ク時生ズル曲面ナリ。今其方程式ヲ求メントス。

(1) 母線ガ坐標軸ニ平行ナル柱面ノ方程式



圖ニ於テ導線ガ xy 面ニアリトシ,母線ガ z 軸ニ平行ナル時ハ,柱面ノ方程式ハ,其導線ノ方程式ヨリ直チニ得ラル。卽チ導線ノ方程式ヲ一般ニ

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y)=0\\ z=0\end{array}\right\}$$

トスレバ,柱面ノ方程式ハ

$$f(x,y)=0$$

ナリ。

注意 コノ結果ハ直交軸ニ限ラズ斜交軸ニモ適用セラル。

(2) 母線ガ坐標軸ニ平行ナラザル柱面ノ方程式

導線ガ xy 面ニアル曲線例ヘバ

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

ナル楕圓ナリトシ,母線ノ方向余弦ヲ l, m, n トス。今導線上ノ任意ノ點ヲ (α, β, o) トスレバ,母線ノ方程式ハ

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z}{n}\cdots\cdots(2)$$

故ニ

$$\alpha=\frac{nx-lz}{n}\qquad \beta=\frac{ny-mz}{n}$$

然ルニ α, β ハ與ヘラレタル楕圓ノ上ノ點ナルガ故ニ

$$\frac{(nx-lz)^2}{a^2}+\frac{(ny-mz)^2}{b^2}=n^2\cdots\cdots(3)$$

コレ母線ノ上ノ點ノ坐標ノ間ニ存在スベキ關係ナリ。從ツテ求ムル柱面ノ方程式ナリ。

例 14 導線ガ xy 面上ニ於テ原點ヲ中心トシ半徑ヲ r トスル圓ニシテ,母線ハ x 軸ト z 軸トニハ 60° ヲナシ, y 軸ニハ 45° ヲナストイフ。柱面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 導線ノ方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=r^2\\ z=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

ニシテ,且ツ $l=n=\frac{1}{2}$ $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルガ故ニ

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=x-z\\ \beta=y-\sqrt{2}z\end{array}\right\}\cdots\cdots(2)$$

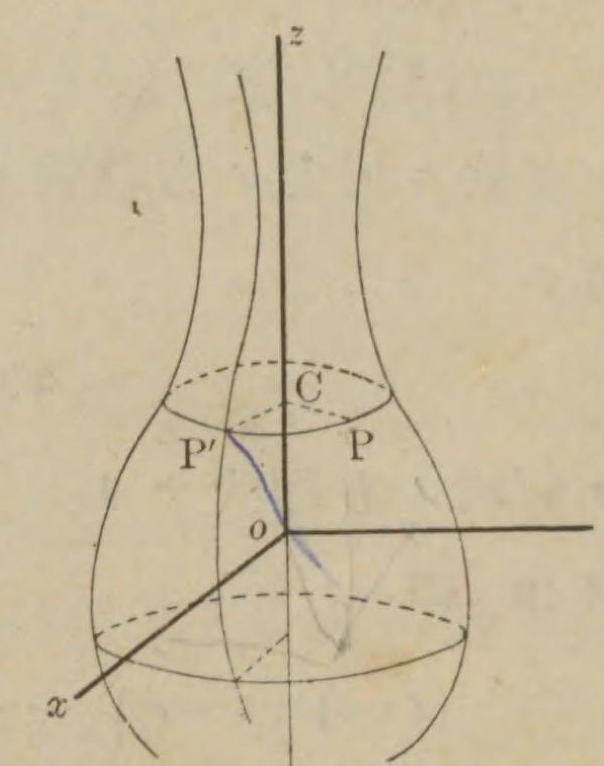
茲ニ於テ點 (α, β) ハ導線上ノ點ナリトノ條件ヲ入ルレバ柱面ノ方程式ヲ得即チ

$$(x-z)^2+(y-\sqrt{2}z)^2=r^2$$

ナリ。

65. 廻轉面

一ツノ平面曲線ガ,其平面上ニアル一ツノ直線ノ周リニ廻轉シテ生ズル曲面ヲ廻轉面トイヒ,コノ直線ヲ廻轉軸トイフ。故ニ曲線上ノ各點ハ,廻轉軸ノ上ニ中心ヲ有シ且ツソレニ垂直ナル圓ヲ畫ク。



今 zx 面ニ曲線

$$\left.\begin{array}{l}f(x,z)=0\\ y=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

アリトシ, z 軸ノ周リニ廻轉スルモノトス。然ル時(1)ニヨツテ作ラルル曲面ノ方程式ヲ求メントス。サテ P' ヲ(1)ノ上ノ任意ノ點ナリトシ其坐標ヲ x', o, z' トスレバ先ヅ

$$f(x',z')=0\cdots\cdots(2)$$

ナル關係アリ。次ニ P ヲ P' ガ畫ク圓ノ上ノ點ナリトシ,其坐標ヲ一般ニ x, y, z トスレバ,

$$z=z'\cdots\cdots(3)$$

ナリ。又圓ノ中心 c ノ坐標ガ o, o, z' ナルガ故ニ

$$CP'=x'=CP=\sqrt{x^2+y^2} \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

ナル關係アリ。(3)ト(4)トヲ(2)ニ代入スレバ求ムル方程式ヲ得。即チ

$$f(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

ナリトス。

例 15 圓 $x^2+y^2=25,\ z=0$ ガ x 軸ノ周リニ廻轉スル時ノ方程式ヲ求メヨ。

解 廻轉曲線ノ一ツノ位置ニ於ケル方程式ハ

$$\left.\begin{aligned} &f(x,y)=x^2+y^2-25=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)\\ &z=0 \quad\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right.$$

ナルガ故ニ,所要ノ方程式ハ(1)ニ y ノ代リニ $\sqrt{y^2+z^2}$ ト置ケルモノ即チ

$$x^2+y^2+z^2-25=0$$

コレ球ノ方程式ナリ。

例 16 圓

$$\left.\begin{aligned} &(x-a)^2+z^2=r^2 \quad\cdots\cdots\cdots(1)\\ &y=0 \quad\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right.$$

ガ z 軸ノ周リニ廻轉シテ生ズル曲面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 求ムル方程式ハ,(1)ニ x ノ代リニ $\sqrt{x^2+y^2}$ ト置キタルモノ,即チ

$$(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2$$

ナリ。之ヲ有理化スレバ,

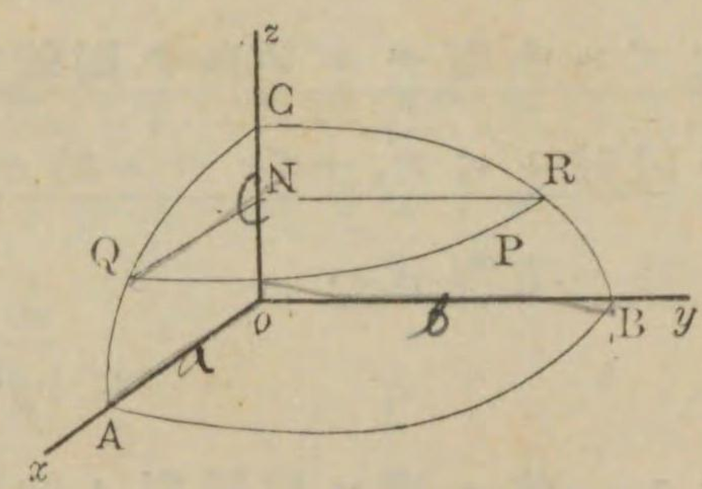
$$\{x^2+y^2+z^2+a^2-r^2\}^2=4a^2(x^2+y^2)$$

トナル。

66. 楕圓面

楕圓面(又ハ楕圓體)トハ平行ニ動ク楕圓ニヨツテ作ラルヽ曲面ナリ。但シ動楕圓ハ一ツノ徑ヲ共有シ,而カモ互ニ直交スル與ヘラレタル二ツノ楕圓ノ上ニ,其頂點ヲ有シ且ツ之等ノ楕圓ニ直交スルモノトス。

與ヘラレタル二ツノ楕圓 AC, BC ヲ夫々 zx 面, yz 面ニアリトシ,夫等ハ一ツノ徑 OC ヲ共有シ且ツ互ニ直交スルモノトス。



今二ツノ楕圓ノ他ノ半軸ヲ夫々 OA, OB トシ,動楕圓 PQR ハ共頂點ヲ夫々二ツノ與ヘラレタル楕圓 AC, BC ノ上ニ置キナガラ xy 面ニ平行ナル位置ヲ保チツヽ上下スルモノトス。

偖 $OA=a,\ OB=b,\ OC=c$ トシ動楕圓ノ上ノ任意ノ點 P ヲトリ共坐標ヲ x, y, z トス。然ル時ハ P ハ NQ, NR ヲ軸トスル動楕圓ノ上ニアルガ故ニ

$$\frac{x^2}{NQ^2}+\frac{y^2}{NR^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 Q ハ楕圓 AOC ノ上ニアルヲ以テ次ノ關係アルベシ

$$\frac{NQ^2}{a^2}+\frac{ON^2}{c^2}=1$$

同様ニ R ハ楕圓 BOC ノ上ニアルヲ以テ

$$\frac{NR^2}{b^2}+\frac{ON^2}{c^2}=1,$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned} NQ^2&=a^2\left(1-\frac{ON^2}{c^2}\right)=a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\\ NR^2&=b^2\left(1-\frac{ON^2}{c^2}\right)=b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ヲ (1) 代入スレバ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

コレ求ムル楕圓面ノ方程式ナリ。

(3) ニ於テ若シ a, b, c ノ中何レカ二ツガ相等シキ時,例ヘバ $a=b$ ナル時ハ,方程式ハ

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

トナル。コレ楕圓ヲ其長軸又ハ短軸ノ周リニ廻轉シタル場合ニ生ズル曲面ナルヲ以テ廻轉楕圓面トイフ。而シテ $a>c$ ナル時ハ扁球トイヒ, $a<c$ ナル時ハ長球トイフ。若シ特ニ $a=b=c$ ナル時ハ,方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

トナル。故ニ球ハ楕圓面ノ特別ナルモノナリ。

楕圓面ノ方程式ハ,三ツノ變數 x, y, z ノ平方ヲノミ含ムガ故ニ,坐標面,及ビ原點ニ關シテ對稱ナリ。又楕圓面ト x 軸トノ交點ハ$(\pm a, 0, 0)$, y 軸トノ交點ハ$(0, \pm b, 0)$又 z 軸トノ交點ハ$(0, 0, \pm c)$ナリ。之等ノ六ツノ交點ヲ楕圓面ノ頂點トイフ。又坐標軸ノ楕圓面ノ内部ニアル部分ノ長サハ夫々 $2a, 2b, 2c$ ニシテ之等ノ線分ヲ其軸トイフ。而シテ若シ $a>b>c$ ナル時ハ x 軸上ニアル軸ヲ長軸トイヒ, y 軸上ニアル軸ヲ中軸トイヒ, z 軸上ニアル軸ヲ短軸トイフ。

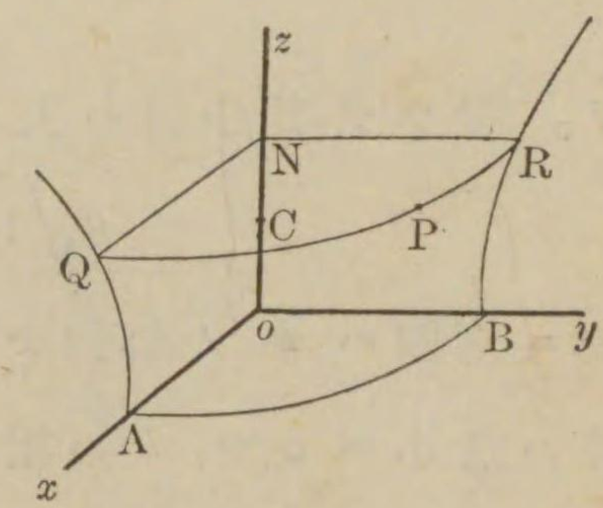
次ニ平面 $z=k$ ニテ楕圓面ヲ截ル時ハ其截口ハ楕圓

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}=1\\ &z=k\end{aligned}\right\}$$

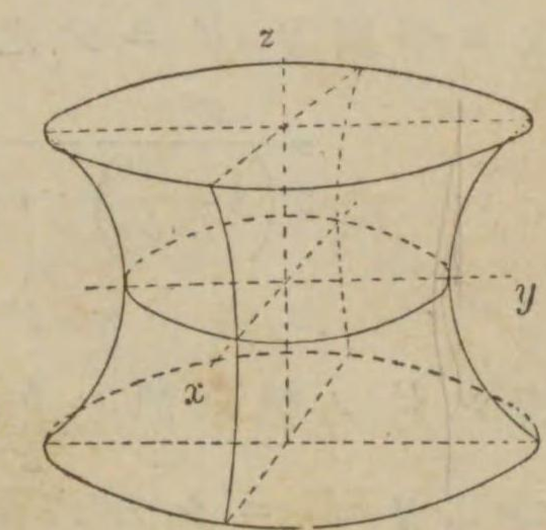
ニシテ,其半軸ノ長サハ夫々 $a\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}$ ナリ,故ニ k ノ絶對値ガ 0 ヨリ c ニ至ルニ從ヒ,之等ハ漸次減少ス。而シテ k ノ絶對値ガ c ヨリモ大トナラバ半軸ノ長サハ實數ナルコトヲ得ズ。ヨツテ曲面ハ z 軸ニ沿ヒテハ $-c$ ヨリ c マデニ限ラル。同様ニ x 軸上ニアリテハ $-a$ ヨリ a マデニ限ラレ, y 軸上ニアリテハ $-b$ ヨリ b マデニ限ラル。

67. 一葉双曲面

一葉双曲面モ亦平行ニ動ク楕圓ニヨリテ生ズル曲面ナリ。但シ動楕圓ハ,共軛軸ヲ共有シ而カモ互ニ直交スル與ヘラレタル二ツノ双曲線ノ上ニ,其頂點ヲ有シ且ツ之等ノ双曲線ニ直交スルモノトス。



圖ニ於テ AQ, BR ヲ互ニ直交スル二ツノ與ヘラレタル双曲線トシ夫等ノ平面ヲ zx 面及ビ yz 面ニトリ且ツ OC ヲ共通ノ共軛軸トシ之ヲ z 軸ニトル。而シテ他ノ軸ヲ夫々 x 軸, y 軸トス。



サテ QPR ヲ動楕圓ノ一ツノ位置トシ,其上ノ任意ノ點ヲ P トシ,其坐標ヲ x, y, z トスレバ

$$\frac{x^2}{NQ^2}+\frac{y^2}{NR^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ トスレバ, Q, R ハ夫々双曲線 AQ, BR ノ上ニアルコトヨリ

$$\frac{NQ^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{NR^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

卽チ

$$NQ^2=a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right),\quad NR^2=b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)\cdots\cdots(2)$$

ナル關係アリ。(1)ニ(2)ヲ代入スレバ,求ムル方程式トシテ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\cdots\cdots(3)$$

ヲ得。

一葉双曲面ハ坐標面及ビ原點ニ關シテ對稱ナリ。而シテ平面 $z=k$ ニテ之ヲ截ル時ハ,其截ロハ楕圓

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}=1\\ z=k\end{array}\right\}$$

ナリ。從ツテ其半軸ハ夫々

$$a\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}},\qquad b\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}$$

故ニ楕圓ハ k ノ如何ナル値ニ對シテモ實ナリ,而シテ $k=0$ ノ時ハ最小ニシテ,k ノ増加スルニ從ヒ限リナク大トナル。故ニ一葉双曲面ハ z 軸ニ沿ヒテ無限ニ擴ガリ居ルヲ知ル。

次ニ平面 $y=k'$ ニテ之ヲ截ル時ハ,其截ロハ双曲線

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k'^2}{b^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k'^2}{b^2}\right)}=1\\ y=k'\end{array}\right\}\cdots\cdots(4)$$

若シ k' ノ絶對値ハ b ヨリモ小ナル時ハ,此双曲線ノ横軸ハ直線 $z=0,\ y=k'$ ニシテ共軛軸ハ直線 $x=0,\ y=k'$ ナリ。而シテ半軸ノ長サハ夫々

$$a\sqrt{1-\frac{k'^2}{b^2}}\qquad c\sqrt{1-\frac{k'^2}{b^2}}$$

故ニ $|k'|$ ハ零ヨリ b マデ變ズルニ及ビ次第ニ小トナリ遂ニ零

ニ至ル。但シ $|k'|=b$ ナル時ハ(4)ナル方程式ハ無意義トナル。然レドモ此場合ハ直接ニ方程式(1)(3)ニ代入スレバ,截ロハ双曲線ニアラズシテ二ツノ直線,

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,\qquad y=b$$

及ビ

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,\qquad y=b$$

或ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,\qquad y=-b$$

及ビ

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,\qquad y=-b$$

ナルヲ知ル。

若シ $|k'|>b$ ナル時ハ,(4)ハ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{z^2}{c^2\left(\frac{k'^2}{b^2}-1\right)}-\dfrac{x^2}{a^2\left(\frac{k'^2}{b^2}-1\right)}=1\\ y=k'\end{array}\right\}$$

ナルヲ以テ其横軸ハ直線 $x=0,\ y=k'$ ニシテ共軛軸ハ直線 $z=0,\ y=k'$ ナリ。而シテ $|k'|$ ガ増加スルニ從ヒ,夫等ノ軸ノ長サハ限リナク増加ス。

最後ニ平面 $x=k''$ ニテ之ヲ截ル時ハ,截ロハ双曲線

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k''^2}{a^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k''^2}{a^2}\right)}=1\\ x=k''\end{array}\right\}$$

ニシテ,$|k''|<a$ ナル時ハ此双曲線ノ横軸ハ直線 $z=0,\ x=k''$ ニシテ,共軛軸ハ直線 $y=0,\ x=k''$ ナリ。又平面 $x=a$ ニテ之ヲ截ル時ハ,其截ロハ二ツノ直線

軸ヘノ射影ナリトス。然ル時ハ原點O及ビA,B,Cヲ過ル球ハ常ニ一ツノ定圓ヲ含ムコトヲ證セヨ。

解. 與ヘラレタル直線ヲ

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

此直線上ノ動點ヲ(x',y',z')トスレバ,A,B,Cノ坐標ハ夫々$(x',0,0)$,$(0,y',0)$,$(0,0,z')$ナルガ故ニ,四ツノ點O,A,B,Cヲ過ル球ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2-xx'-yy'-zz'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。然ルニ點Pハ與ヘラレタル直線上ニアルガ故ニ

$$\frac{x'-a}{l}=\frac{y'-b}{m}=\frac{z'-c}{n} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之等ノ値ヲkト置キテ,(1)ニ代入スレバ

$$x^2+y^2+z^2-x(a+kl)-y(b+km)-z(c+kn)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

而シテ(3)ナル球ハ常ニ次ニ示ス定球面ト定平面

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$$

$$lx+my+nz=0$$

ノ交線ナル定圓ヲ含ムコト明カナリ。

14. 原點ヲ頂點トシ二ツノ曲面

$$x^2+y^2+z^2+2ax+b=0$$

$$lx+my+nz=p$$

曲面上の点(x',y',z')を通り原点を通るstraight lineの式は

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{nz}{p-lx'-my'}$$

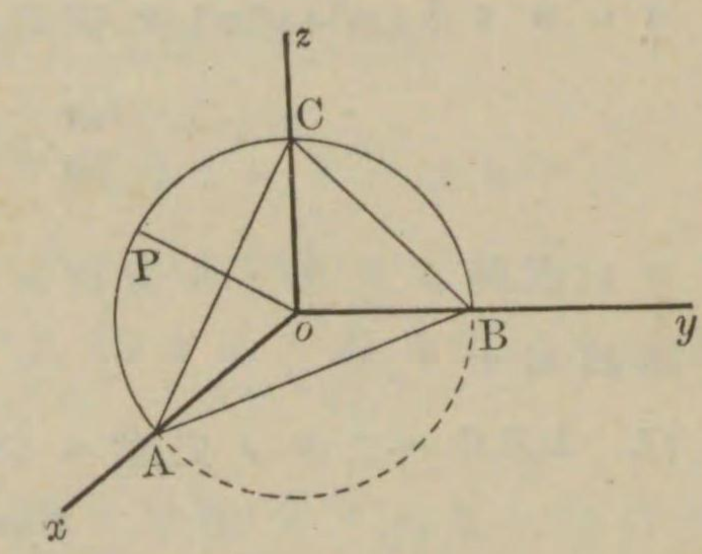
ノ交線ヲ含ム錐ノ方程式ヲ求メヨ。

解. 求ムル方程式ハ

$$(x^2+y^2+z^2)p^2+2apx(lx+my+nz)+b(lx+my+nz)^2=0$$

ナリ。何トナレバ之ハ原點ヲ過ル曲面ニシテ而カモ二次ノ同次式ナルガ故ニ錐面ナリ。而シテ又二ツノ曲面ノ方程式ヲ同時ニ滿足スル坐標ニヨリテ滿足セラルルガ故ニ此錐面ハ二ツノ曲面ノ交線ヲ過ルコト明カナリ。

15. 平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ガ坐標軸ト交ル點ヲA,B,Cトス。今原點Oト三角形ABCノ外接圓ノ周上ノ點トヲ結ブ直線ニヨリテ作ラルヽ圓錐ノ方程式ヲ求メヨ。



解. 先ヅ四ツノ點O,A,B,Cヲ過ル球ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$$

ナルガ故ニ,三角形ABCノ外接圓ノ方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。

今其周上ノ任意ノ點P(x',y',z')ヲトレバ母線OPノ方程式ハ

$$\frac{x-x'}{x'}=\frac{y-y'}{y'}=\frac{z-z'}{z'} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニP點ハ(1)ノ上ノ點ナルガ故ニ

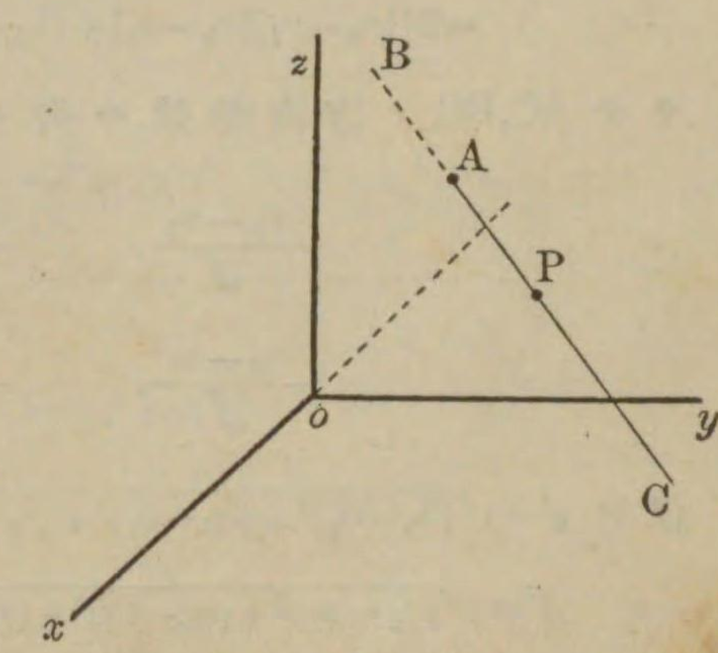
$$\left.\begin{array}{l} x'^2+y'^2+z'^2-ax'-by'-cz'=0 \\ \dfrac{x'}{a}+\dfrac{y'}{b}+\dfrac{z'}{c}=1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ滿足スベキ筈ナリ。ヨツテ所要ノ軌跡ハ(2),(3)ヨリx',y',z'ヲ消去スレバ

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$$

コレ求ムル軌跡ナリ。

16. 一ツノ直線ガ其ノ上ノ三ツノ定點ガ恒ニ坐標面ノ上ニアル樣ニ動クトキ,三ツノ點ヨリ夫々a,b,cノ距離ニアル直線中ノ第四ノ點Pノ軌跡ヲ求メヨ。



解. 直線ABCニ於テA,B,Cヲ定點トシ,夫々yz面,zx面,xy面上ニアルモノトス。Pノ坐標ヲx,y,zトシAP$=a$, BP$=b$, CP$=c$トス。今直線ノ方向餘弦ヲl,m,nトスレバ

$$x=al,\quad y=bm,\quad z=cn$$

コレヨリ $l^2+m^2+n^2=1$ ヲ利用シテ l,m,n ヲ消去スレバ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

コレ直線ガアラユル方向ニ動クトキ生ズルPノ軌跡ニシテ一ツノ楕圓面ナリ。

17. A,B,C ハ三ツノ定點ニシテPハ

$$PA^2+PB^2=PC^2$$

ニ適スル動點ナリトス。然ルトキ角ACBガ鋭角ナル時ハPノ軌跡ハ球ニシテ,直角ナル時ハ點ニシテ鈍角ナルトキハ虚球ナルコトヲ證セヨ。

解. A,B,C ノ坐標ヲ夫々 (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), (a_3,b_3,c_3) トシPノ坐標ヲ (x,y,z) トスレバ,題意ニヨリテ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2+(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2$$
$$=(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2$$

ナリ。之ヲ整頓スレバ

$$x^2+y^2+z^2-2x(a_1+a_2-a_3)-2y(b_1+b_2-b_3)-2z(c_1+c_2-c_3)$$
$$=a_3+b_3+c_3-(a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2)$$

書キ換フルトキハ

$$\{x-(a_1+a_2-a_3)\}^2+\{y-(b_1+b_2-b_3)\}^2+\{z-(c_1+c_2-c_3)\}^2$$
$$=2(a_3^2+a_1a_2-a_2a_3-a_3a_1)+2(b_3^2+b_1b_2-b_2b_3-b_3b_1)$$
$$+2(c_2^2+c_1c_2-c_2c_3-c_3c_1)$$
$$=2\{(a_3-a_1)(a_3-a_2)+(b_3-b_1)(b_3-b_2)+(c_3-c_1)(c_3-c_2)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

サテ AC,BC ノ方向餘弦ハ夫々

$$\frac{a_3-a_1}{\Delta},\quad \frac{b_3-b_1}{\Delta},\quad \frac{c_3-c_1}{\Delta}$$

$$\frac{a_3-a_2}{\Delta'},\quad \frac{b_3-b_2}{\Delta'},\quad \frac{c_3-c_2}{\Delta'}$$

但シ $\Delta=\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2+(c_3-c_1)^2}$

$\Delta'=\sqrt{(a_3-a_2)^2+(b_3-b_2)^2+(c_3-c_2)^2}$

ナリトス。故ニ

$$\cos A\hat{C}B=\frac{(a_3-a_1)(a_3-a_2)+(b_3-b_1)(b_3-b_2)+(c_3-c_1)(c_3-c_2)}{\cancel{AB}\ \Delta\Delta'}$$

ナルガ故ニ $A\hat{C}B$ ハ鋭角ナルカ,直角ナルカ,鈍角ナルカニ從ヒテ

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)+(b_3-b_1)(b_3-b_2)+(c_3-c_1)(c_3-c_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ガ正ナルカ,零ナルカ又ハ負ナリ。從ツテ (1) ガ示ス球ノ半徑ガ正,零又ハ虚數トナル。ヨツテ證セラレタリ。

18. 楕圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ノ中心(卽チ原點)ヨリ相互ニ垂直ナル三ツノ方向ニ計リタル曲面マデノ距離ヲ r_1,r_2,r_3 トスレバ

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ。

解. 先ヅ一ツノ直線ノ方向餘弦ヲ l_1,m_1,n_1 トスレバ其直線ト楕圓面トノ交點ノ座標 x,y,z ハ

$$x=r_1l_1 \qquad y=r_1m_1 \qquad z=r_1n_1$$

ノ關係アルガ故ニ楕圓面ノ方程式ニ代入スレバ

$$\frac{r_1^2l_1^2}{a^2}+\frac{r_1^2m_1^2}{b^2}+\frac{r_1^2n_1^2}{c^2}=1$$

卽チ

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{l_1^2}{a^2}+\frac{m_1^2}{b^2}+\frac{n_1^2}{c^2}$$

同樣ニ他ノ二ツノ直線ノ方向餘弦ヲ l_2,m_2,n_2 及ビ l_3,m_3,n_3 トスレバ

$$\frac{1}{r_2^2}=\frac{l_2^2}{a^2}+\frac{m_2^2}{b^2}+\frac{n_2^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{r_3^2}=\frac{l_3^2}{a^2}+\frac{m_3^2}{b^2}+\frac{n_3^2}{c^2}$$

ナルガ故ニ

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{l_1^2+l_2^2+l_3^2}{a^2}+\frac{m_1^2+m_2^2+m_3^2}{b^2}+\frac{n_1^2+n_2^2+n_3^2}{c^2}$$

然ルニ,

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

ヨツテ

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

19. 四ツノ點 (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), (a_3,b_3,c_3), (a_4,b_4,c_4) ヲ過ル球ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$a_4^2+b_4^2+c_4^2 \quad a_4 \quad b_4 \quad c_4 \quad 1$

ナルコトヲ證セヨ。

解. 球ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

ナリトス。コノ球ハ四ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル爲ニハ夫々

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+Aa_1+Bb_1+Cc_1+D=0$$

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2+Aa_2+Bb_2+Cc_2+D=0$$

$$a_3^2+b_3^2+c_3^2+Aa_3+Bb_3+Cc_3+D=0$$

$$a_4^2+b_4^2+c_4^2+Aa_4+Bb_4+Cc_4+D=0$$

ナルヲ要ス。ヨツテ求ムル方程式ハ之等ヨリ未定係數 A,B,C,D ヲ消去シタルモノ即チ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4^2+b_4^2+c_4^2 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

ナリ。

20. 二ツノ直線

$$\frac{x\pm a}{0}=\frac{\pm y}{\cos\alpha}=\frac{z}{\sin\alpha}$$

ガ x 軸ト交ル點ヲ A,A′ トシ xy 面ノ同ジ側ニ於テ此等ノ直線上ニ P,P′ ヲトリ AP.A′P′$=c^2$ ナラシム,然ルトキ直線 PP′ ニヨリテ空間ニ畫カルヽ面ハ双曲線面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2\cos^2\alpha}+\frac{z^2}{c^2\sin^2\alpha}=1$$

ナルコトヲ證セヨ。

解. AP ノ方程式ヲ

$$\frac{x-a}{0}=\frac{-y}{\cos\alpha}=\frac{z}{\sin\alpha}\quad\cdots\cdots(1)$$

A′P′ ノ方程式ヲ

$$\frac{x+a}{0}=\frac{y}{\cos\alpha}=\frac{z}{\sin\alpha}\quad\cdots\cdots(2)$$

トシ, AP, A′P′ ノ長サヲ夫々 l,l' トスレバ,P ト P′ ノ坐標ハ夫々

$(a,\ -l\cos\alpha,\ l\sin\alpha)$,　$(-a,\ l'\cos\alpha,\ l'\sin\alpha)$ トナル。從ツテ PP′ ノ方程式ハ

$$\frac{x-a}{-2a}=\frac{y+l\cos\alpha}{l\cos\alpha+l'\cos\alpha}=\frac{z-l\sin\alpha}{l'\sin\alpha-l\sin\alpha}\cdots\cdots(3)$$

又 AP.A′P′$=c^2$ ナルニヨリ $ll'=c^2$ ……(4)

(3), (4) ヨリ l,l' ヲ消去スレバ

$$a^2(z^2\cos^2\alpha-y^2\sin^2\alpha)=c^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(a^2-x^2)$$

兩邊ヲ $a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ ニテ除スレバ求ムル方程式ヲ得。

21. 相交ラザル二定直線ノ各ヲ含ミ相互ニ垂直ナル二ツノ平面ヲ作ルトキハ,其二平面ノ交リナル直線ハ一葉双曲面ヲ畫クコトヲ證明セヨ。若シ二直線ガ交ル時又ハ平行ナル時ハ如何。

解. 二定直線ノナス角ヲ 2α トシ,共通垂線ノ長サヲ $2d$ トシ且ツソレヲ z 軸ニ,其中點ヲ原點ニ,二直線ノナス角ノ二等分線ヲ x 軸, y 軸ニトル時ハ,二定直線ノ方程式ハ夫々

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\sin\alpha}=\frac{z-d}{0}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{-\sin\alpha}=\frac{z+d}{0}\quad\cdots\cdots(2)$$

トナル。今 (1), (2) ヲ含ム平面ヲ

$$ax+by+c(z-d)=0\quad\cdots\cdots(4)$$

$$a'x+b'y+c'(z+d)=0\quad\cdots\cdots(5)$$

トス。然ルトキハ

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=0\quad\cdots\cdots(6)$$

$$a'\cos\alpha-b'\sin\alpha=0\quad\cdots\cdots(7)$$

ナル關係アルコト明カナリ。然ルニ (4) ト (5) トノ二ツノ平面ハ假定

ニヨリテ互ニ垂直ナルガ故ニ

$$aa'+bb'+cc'=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

トナル。從ツテ求ムル軌跡ハ之等ヨリ $a,b,c,\ a',b',c'$ ヲ消去セルモノ即チ

$$y^2\cos^2\alpha+z^2\cos 2\alpha-x^2\sin^2\alpha=d^2\cos 2\alpha$$

ニシテ $\cos 2\alpha$ ノ正負ニ關セズ常ニ一葉双曲面トナル。

若シ二定直線ガ相交ル時ハ $d=0$ トナルガ故ニ

$$y^2\cos^2\alpha+z^2\cos 2\alpha-x^2\sin^2\alpha=0$$

ナル一ツノ錐面トナリ,二定直線ガ平行ナル時ハ $\alpha=0$ トナルガ故ニ

$$y^2+z^2=d^2$$

ナル一ツノ柱面ヲ得。

22. 空間ニ於テ相交ラザル二定直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解. 前題ノ如ク坐標軸ヲトラバ,二ツノ定直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\sin\alpha}=\frac{z-d}{0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{-\sin\alpha}=\frac{z+d}{0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今求ムル軌跡ノ點ヲ $P(x,y,z)$ トスレバ P ヨリ直線 (1) ニ至ル距離ハ

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2-(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}$$

又 P ヨリ直線 (2) ニ至ル距離ハ

$$\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2-(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2}$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ

$$x^2+y^2+(z-d)^2-(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2=x^2+y^2+(z+d)^2-(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2$$

即チ

$$4dz+2xy\sin 2\alpha=0,$$

ナリ。

23. 一定直線及ビ一定平面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解. 與ヘラレタル平面ヲ xy 面ニトリ,定直線トノ交點ヲ原點トス。然ル時,直線ノ方程式ヲ $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ トシ,軌跡ノ一點 P ノ坐標ヲ α,β,γ

トスレバ,P ヨリ直線ニ至ル距離ハ

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(l\alpha+m\beta+n\gamma)^2}$$

ニシテ,平面ニ至ル距離ハ γ ナリ。故ニ題意ニヨリ

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(l\alpha+m\beta+n\gamma)^2}=\gamma$$

故ニ求ムル軌跡ハ α,β,γ ヲ流通坐標ニ直シタルモノ

即チ

$$x^2+y^2+z^2-(lx+my+nz)^2=z^2$$

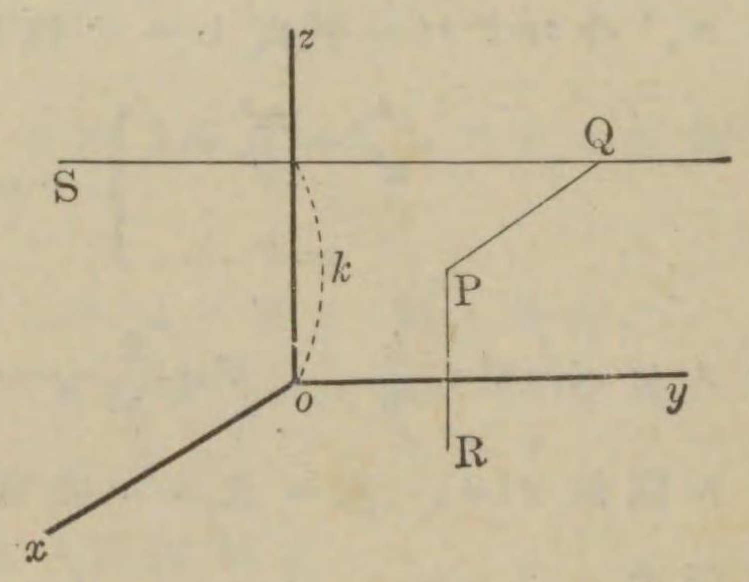
コレ原點ヲ頂點トスル一ツノ錐面ニシテ已ニ例題9ニ於テ示セリ。

若シ直線ト平面トハ平行ナル時ハ,其直線ヲ含ミ,與ヘラレタル平面ニ垂直ナル平面ヲ作リ之ヲ zy 面トスベシ。

然ルトキハ直線ノ方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=k \end{array}\right\}$$

トナル。



然ルトキハ P ヨリ直線 SQ ニ垂線 PQ ヲ下ストキハ Q ノ坐標ハ $(0,y,k)$ ナリ。故ニ

$$PQ=\sqrt{x^2+(z-k)^2}$$

$$PR=z$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ

$$z^2=x^2+(z-k)^2$$

即チ

$$x^2-2kz+k^2=0$$

トナル。玆ニ於テ原點ヲ $\left(0,0,\frac{k}{2}\right)$ ニ移セバ

$$x^2-2kz=0$$

トナル。コレ一ツノ壔面ナリ。

24. 楕圓抛物面ハ大サヲ變ジツヽ平行移動ヲナス楕圓ニヨリテ空間ニ畫カルヽ面ナリトノ考ヘヨリ其方程式ヲ求メヨ。

解. 楕圓ノ中心ヲ z 軸上ニ置キ且ツ xy 面ニ平行シナガラ動カスモノトス。今 $z=p>0$ ナル平面上ニ於テ $a\sqrt{p}$ ト $b\sqrt{p}$ トヲ夫々長軸,短軸

トスル楕圓ヲ作ルト,其方程式ハ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2p}+\frac{y^2}{b^2p}=1\\ z=p\end{aligned}\right\}$$

コレ等ヨリpヲ消去スル時ハ楕圓抛物面ノ方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

ヲ得。

25. 楕圓抛物面ハ又共通ノ軸ヲ有シ且ツ互ニ垂直ナル平面上ニアル二ツノ抛物線上ニ楕圓ノ長軸及ビ短軸ノ端點ヲ置キナガラ動カストキ生ズル曲面ナルコトヲ證セヨ。

解. z軸ヲ共通軸トスル二ツノ抛物線ノ方程式ヲ

$$z=px^2,\qquad z=qy^2$$

トス。今$z=k$ナル平面上ニテ條件ニ適スル楕圓ヲ作リ,其方程式ヲ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\\ z=k\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスレバ, $\alpha^2=\dfrac{k}{p},\qquad \beta^2=\dfrac{k}{q}$ ……………………(2)

ナル關係アリ。故ニ求ムル曲面ハ(1)及ビ(2)ヨリk,α,βヲ消去セルモノ卽チ

$$px^2+qy^2=z$$

コレ楕圓抛物面ナリトス。

26. 直線アリ恒ニ二ツノ抛物線

$$\left.\begin{aligned}y^2=a^2x\\ z=0\end{aligned}\right\}\quad 及ビ\quad \left.\begin{aligned}z^2=-b^2x\\ y=0\end{aligned}\right\}$$

ニ交リ且ツ二ツノ平面$b^2y^2=a^2z^2$ノ中ノ何レカ一ツニ平行ナル様ニ動クモノトス。然ル時ハ其直線ハ双曲抛物面

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=x$$

ヲ畫クコトヲ證セヨ。

解. 初メノ抛物線上ノ任意ノ點ハ$\left(\dfrac{y_1^2}{a^2},\ y_1,\ 0\right)$ニテ表ハサレ,後ノ抛物線上ノ任意ノ點ハ$\left(-\dfrac{z_1^2}{b^2},\ 0,\ z_1\right)$ニテ表ハサル。

サテ之等ノ二點ヲ結ブ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-\dfrac{y_1^2}{a^2}}{-\dfrac{z_1^2}{b^2}-\dfrac{y_1^2}{a^2}}=\frac{y-y_1}{-y_1}=\frac{z}{z_1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之ハ二平面$b^2y^2=a^2z^2$ノ中ノ何レカニ平行ナルガ故ニ

$$0\left(-\frac{z_1^2}{b^2}-\frac{y_1^2}{a^2}\right)+b(-y_1)+(\mp a)z_1=0$$

ナル關係アルベシ。之ヲ整頓スレバ

$$-by_1\mp az_1=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ求ムルモノハ(1), (2)ヨリy_1, z_1ヲ消去シタルモノ卽チ

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=x$$

27. 一ツノ定點Aヲ過リ,二ツノ定平面トB及ビCニテ交ル直線アリ,線分BCノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解. 二ツノ定平面ノ交線ヲz軸ニトリ, Aヲ過リz軸ニ垂直ナル平面ヲxy面ニトリ,而カモ二ツノ平面ガ$y=px$, $y=-px$デ表ハサルル様ニx軸トy軸トヲトルモノトス。

又A點ヲ(a,b,o)トシ,其點ヲ通ル任意ノ直線BCヲ

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z}{n}$$

トス。然ル時ハ此直線ト二ツノ平面トノ交點B,Cノ坐標ハ夫々

$$\left(a+l\frac{pa-b}{m-pl},\qquad b+m\frac{pa-b}{m-pl},\qquad n\frac{pa-b}{m-pl}\right)$$

$$\left(a-l\frac{pa+b}{m+pl},\qquad b-m\frac{pa+b}{m+pl},\qquad -n\frac{pa+b}{m+pl}\right)$$

從ツテ線分BCノ中點ノ坐標ヲX,Y,Zトスレバ

$$X=a+l\frac{p^2al-bm}{m^2-p^2l^2},\qquad Y=b+m\frac{p^2al-bm}{m^2-p^2l^2},\qquad Z=n\frac{p^2al-bm}{m^2-p^2l^2}$$

玆ニ於テl,m,nヲ消去スレバ

$$(Y-b)^2-p^2(X-a)^2=(X-a)p^2a-b(Y-b)$$

トナル,コレ双曲線柱面ナリ。

28. 二ツノ双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1 \cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ一ツノ錐面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ同一ノ平面$z=k$ニテ截ル時ハ,其截口ノ面積ノ比ハ,kガ大トナルニ從ヒテ限リナク1ニ近ヅクコトヲ示セ。

解. $z=k$ニテ截リシ截口ノ方程式ハ夫々

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}\pm 1 \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2} \cdots\cdots\cdots(4)$$

何レニシテモ截口ハ楕圓ニシ其長軸ノ比ハ

$$\frac{a^2(k^2\pm c^2)}{c^2}\div\frac{a^2k^2}{c^2}$$

$$=\frac{k^2\pm c^2}{k^2}$$

ヨツテkノ絶對値ガ増加スルニ從ヒ其比ハ1ニ近ヅキ且ツ

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2\pm c^2}{k^2}=1$$

短軸ニ於テノ比モ同樣ナリ。從ツテ面積ノ比ハ漸次1ニ近ヅク。

注意　(2)ナル錐面ヲ双曲面(1)ノ漸近錐面トイフ。

29. 極坐標ニ於テ

$$r=a\sin\theta\cos\varphi$$

ハ如何ナル曲面ヲ表ハスカ

解. 與ヘラレタル方程式ノ兩邊ニrヲ乘ズレバ

$$r^2=ar\sin\theta\cos\varphi$$

之ヲ直角坐標ニ直スト

$$x^2+y^2+z^2=ax$$

即チ

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

コレ$\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ヲ中心トシ,半徑ヲ$\frac{a}{2}$トスル一ツノ球面ナリ。

第六章

二次曲面ノ母線及ビ截面

72. 錐面及ビ柱面ハ,母線ト稱セラルヽ直線ノ運動ニヨリテ生ズルコト已ニ第六十節及ビ第六十四節ニ於テ述ベタリ。本章ニ於テハ一葉双曲面及ビ双曲拋物面モ亦直線ノ運動ニヨリテ作ラルル曲面ナルコトヲ説明セントス

73. 一葉双曲面ノ母線

一葉双曲面ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

變形スレバ

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

故ニ一葉双曲面ハ,λ及ビμヲ任意ノ常數トスル次ノ二組ノ直線

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ滿足スル點ノ坐標ニヨリテ滿足セラルベシ。換言スレバ,一葉双曲線ハ(1)或ハ(2)ナル直線ノ軌跡ナリトイフヲ得ベク,從ツテ一葉双曲面中ニハ二組ノ直線群ヲ含ムベシ。カクノ如キ直線ヲ元曲面ノ母線ト稱ス。吾人ハ更ニ進ンデ(1)ト(2)トノ母線

ハ必ズ互ニ相交ルト雖モ,同種類ノ母線ハ決シテ交ラザルコトヲ證明セントス。先ヅ異種類ノ母線ノ任意ノ二ツノ方程式ヲ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

トセヨ。然ル時ハ之等ヲ解クコトニヨリテ,交點ノ坐標

$$x=a\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}\qquad y=b\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\qquad z=c\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}\cdots\cdots(3)$$

ヲ得ベシ。故ニ異種類ノ母線ハ必ズ相交ル。

逆ニ一葉双曲面ノ上ノ任意ノ點(α,β,γ)ヲ通リ全ク其曲面ノ中ニ含マルヽガ如キ二本ノ直線ヲ引クコトヲ得。何トナレバ(3)ニ於テx, y, zノ代リニα, β, γヲ入ルヽ時ハλ, μヲ定ムルコトヲ得ベク,從ツテ(1)及ビ(2)ノ如キ母線ヲ各一ツ宛得ラルベケレバナリ。

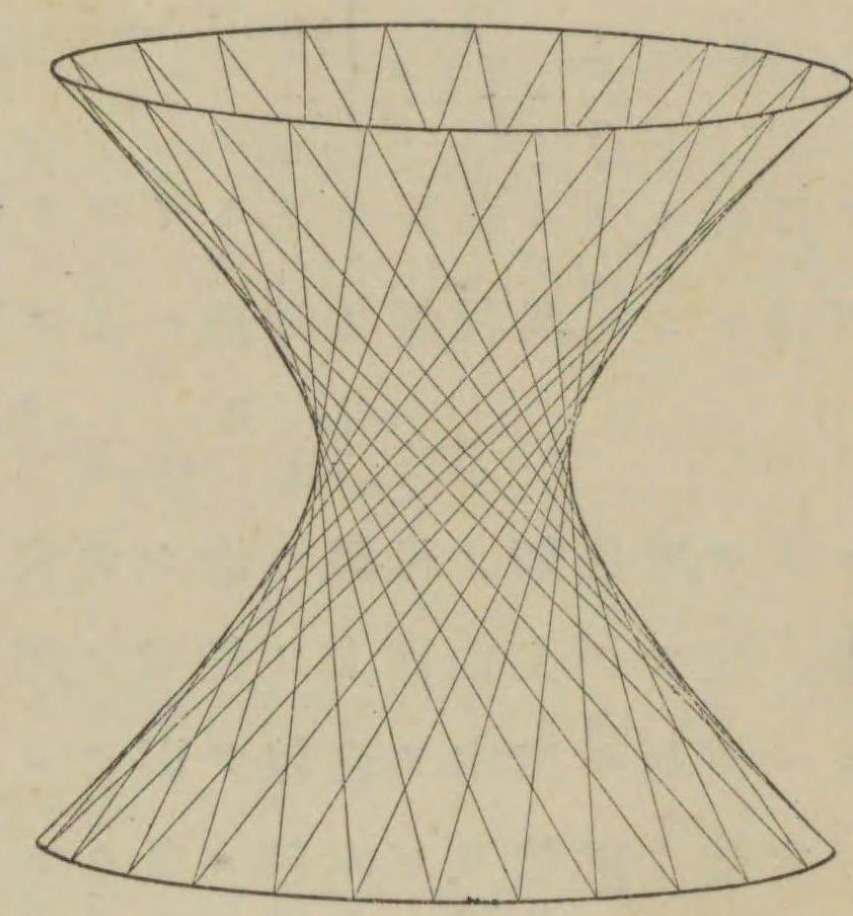
次ニ同種類ノ母線ハ決シテ交ラザルコトヲ證明センニ,先ヅ(1)ニ屬スル任意ノ二ツノ方程式ヲ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\lambda'\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda'}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

トセヨ。第一ト第三ノ方程式ヨリ

$$(\lambda-\lambda')\left(1-\frac{y}{b}\right)=0$$



故ニ

$\lambda=\lambda'$ 或ハ $y=b$

又第二ト第四ノ方程式ヨリ

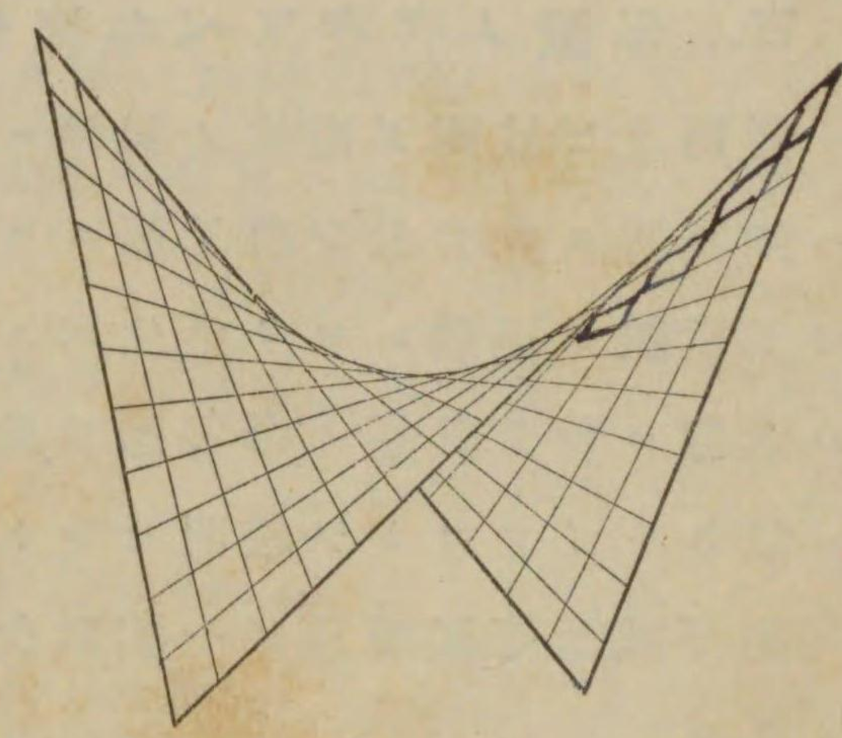
$$\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)=0$$

故ニ

$\lambda=\lambda'$ 或ハ $y=-b$

yハbニ等シク而カモ又$-b$ニ等シキコト能ハズ。故ニ$\lambda=\lambda'$ナラザルベカラズ。然ル時ハ(4)ト(5)トハ實ハ同一ノ直線トナルベシ。故ニ同種類ノ母線ハ決シテ交ラズ。

74. 双曲拋物面ノ母線



双曲拋物面ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

トスレバ,之ハλ, μヲ任意ノ數トスル次ノ二組ノ直線

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\lambda\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\frac{z}{\lambda}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\mu\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\frac{z}{\mu}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

ヲ母線トスル曲面ナリトイフヲ得ベシ。而シテ前節ノ證明ト同様ニシテ異種類ノ母線ハ必ズ相交リ,其交點ノ坐標ハ

$$x=\frac{a(\mu+\lambda)}{2}\qquad y=\frac{b(\mu-\lambda)}{2},\quad z=\lambda\mu$$

ニシテ,同種類ノ母線ハ決シテ交ラザルコトヲ證明スルコトヲ得。從ツテ叉曲面上ノ任意ノ點ヲ過リ全ク其曲面ノ中ニ含マルヽガ如キ二本ノ直線ヲ引クコトヲ得。

定義　前節及ビ本節ニ於ケル母線(1)ヲλ系ノ母線トイヒ,(2)ヲμ系ノ母線トイフ。

注意　平面ハ直線ノ軌跡ナレドモ,逆ニ直線ノ軌跡ハ平面ニ限ラザルナリ。コレ初學者ノ往々ニシテ謬ル所ナリ。

75. 母線ノ存在スベキ條件

錐面及ビ柱面ガ直線ノ廻轉ニヨリテ生ズル曲面ナルコト已ニ知ル所ニシテ且ツ前二節ニヨリ一葉双曲面及ビ双曲拋物面モ叉直線ノ運動ニヨリテ生ズル曲面ナルコトヲ見タリ。吾人ハ本節ニ於テ其逆ノ命題卽チ母線ヲ有スルモノハ夫等ノ曲面ニ限ルトイフコトヲ證明セントス。

先ヅ球面,楕圓面及ビ一葉双曲面並ビニ二葉双曲面ノ方程式ハ凡テ

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2=1\cdots\cdots(1)$$

ニテ表ハサル。玆ニ A, B, C ハ共ニ零ナラザル數ナリトス。叉直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}=r\cdots\cdots(2)$$

トスレバ

$$x=a+lr,\quad y=b+mr,\quad z=c+nr\cdots\cdots(3)$$

玆ニ r ハ點 (a, b, c) ヨリ直線(2)ノ上ノ任意ノ點 (x, y, z) マデノ距離ヲ示スモノナリ。故ニ(2)ハ全ク(1)ノ上ニアル爲ニハ,(3)ヲ(1)ニ代入シタル等式

$$\mathrm{A}(a+lr)^2+\mathrm{B}(b+mr)^2+\mathrm{C}(c+nr)^2=1$$

卽チ

$$r^2(\mathrm{A}l^2+\mathrm{B}m^2+\mathrm{C}n^2)+2r(\mathrm{A}al+\mathrm{B}bm+\mathrm{C}cn)$$
$$+\mathrm{A}a^2+\mathrm{B}b^2+\mathrm{C}c^2-1=0$$

ハ r ノ凡テノ値ニ對シテ成立スルヲ要ス。故ニ

$$\mathrm{A}l^2+\mathrm{B}m^2+\mathrm{C}n^2=0\cdots\cdots(4)$$
$$\mathrm{A}al+\mathrm{B}bm+\mathrm{C}cn=0\cdots\cdots(5)$$
$$\mathrm{A}a^2+\mathrm{B}b^2+\mathrm{C}c^2-1=0\cdots\cdots(6)$$

ナルヲ要ス。然ルニ(6)ハ點 (a, b, c) ハ曲面上ニアルベキコトヲ表ハス條件ニシテ,(4) (5)ハ直線(2)ガ曲面ノ上ニアル爲ノ比 $l:m:n$ ヲ與フルモノナリ。

サテ(6)ニヨリテ a, b, c ハ同時ニハ零ナルコト能ハザルガ故ニ,$a\fallingdotseq 0$ ナリト假定スレバ(5)ヨリ

$$l=-\frac{\mathrm{B}bm+\mathrm{C}cn}{\mathrm{A}a}$$

之ヲ(4)ニ代入シテ l ヲ消去スレバ

$$(\mathrm{AB}a^2+\mathrm{B}^2b^2)m^2+2\mathrm{BC}bcmn+(\mathrm{AC}a^2+\mathrm{C}^2c^2)n^2=0$$

故ニ $m:n$ ガ實數ナル爲ニハ($m:n$ ガ虚數ナル時ハ要件ニ適スルガ如キ直線ハ實在セザルナリ。)

$$\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2b^2c^2-(\mathrm{AB}a^2+\mathrm{B}^2b^2)(\mathrm{AC}a^2+\mathrm{C}^2c^2)\geqq 0$$

卽チ

$$-ABCa^2(Aa^2+Bb^2+Cc^2)\geqq 0$$

コレ＝(6)ヲ代入スレバ

$$-ABCa^3\geqq 0$$

從ツテ

$$ABC\leqq 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ナルコトヲ要ス。

(7)ハ $a\fallingdotseq 0$ ナリトシテ出シタレドモ, $b\fallingdotseq 0$ 或ハ $c\fallingdotseq 0$ ナル時モ同ジ結果ヲ得。

サテ(1)ヨリ A, B, C ハ同時＝負ナラザルガ故＝(7)ガ成立スル爲＝ハ, A, B, C ノ内何レカ一ツハ負＝シテ他ノ二ツハ正ナルコトヲ要ス。而シテカヽルモノハ一葉双曲面ナリ。故＝球楕圓面及ビ二ツノ双曲面ノ中＝テ母線ヲ有スルモノハ一葉双曲面＝限ル。

次＝楕圓抛物面及ビ双曲抛物面＝就キテ研究セン＝夫等ハ共＝方程式

$$Ax^2+By^2=z$$

＝テ表ハスコトヲ得。玆＝ A, B ハ何レモ零ナラザル正又ハ負ノ數ナリトス。コノ場合＝ハ前ノ(4) (5) (6)＝相當スルモノハ

$$Al^2+Bm^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$2(Aal+Bbm)=n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$Aa^2+Bb^2=c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

(10)ハ點 $(a,\ b,\ c)$ ハ曲面ノ上＝アルベキコトヲ示シ, (9)ヨリ l, m ハ同時＝零トナルコト能ハザルヲ以テ,結局(8)＝ヨリテ A ト B トハ反對ノ符號ヲ有スベキコトヲ知ル。從ツテ二ツノ抛物面ノ中＝テ母線ヲ有スルハ双曲抛物面＝限ルナリ。

例 1　一葉双曲面

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

ノ上ノ點(2, 3, 4)ヲ通ル母線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　求ムル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y-3}{m}=\frac{z-4}{n}$$

トスル時ハ,(4)及ビ(5)＝ヨリ

$$36l^2-16m^2-9n^2=0$$

$$6l+4m-3n=0$$

之等ノ二ツヨリ n ヲ消去スレバ $lm=0$, 故＝若シ $l=0$ ナル時ハ $m:n=3:4$ 又 $m=0$ ナル時ハ $l:n=1:2$

故＝求ムル母線ノ方程式ハ

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{4}$$

及ビ

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-4}{2}$$

ナリ。

例 2　一葉双曲~~線~~面ノ互＝垂直ナル母線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　一ツノ母線

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ノ方向餘弦ノ比ハ

$$l:m:n=\frac{a(1-\lambda^2)}{\lambda}:2b:\frac{c(1+\lambda^2)}{\lambda}$$

＝シテ,他ノ一組ノ母線

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ノ方向餘弦ノ比ハ

$$l':m':n'=\frac{a(1-\mu^2)}{\mu}:-2b:\frac{c(1+\mu^2)}{\mu}$$

ヨツテ之等ハ互ニ垂直ナル爲ニハ

$$\frac{a^2(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}{\lambda\mu}-4b^2+\frac{c^2(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}{\lambda\mu}=0$$

分母ヲ拂ヒ變形スレバ

$$a^2(1+\lambda\mu)^2+b^2(\lambda-\mu)^2+c^2(1-\lambda\mu)^2=(\lambda+\mu)^2(a^2+b^2-c^2)$$

然ルニ母線ノ交點ノ坐標ハ一般ニ

$$x=\frac{a(1+\lambda\mu)}{\lambda+\mu}\qquad y=\frac{b(\lambda-\mu)}{\lambda+\mu}\qquad z=\frac{c(1-\lambda\mu)}{\lambda+\mu}$$

ナルガ故ニ上ノ條件式ニ代入スルトキハ

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ得。ヨツテ求ムル軌跡ハ(3)ナル球ト原曲面トノ交線ナリ。

例 3　双曲拋物面ノ互ニ垂直ナル母線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　一組ノ母線ノ方程式ヲ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\lambda\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\frac{z}{\lambda}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスレバ,其方向餘弦ノ比ハ

$$l:m:n=\frac{a}{2}:\frac{b}{2}:\lambda$$

又他ノ母線

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\mu\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\frac{z}{\mu}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ノ方向餘弦ノ比ハ

$$l':m':n'=\frac{a}{2}:\frac{-b}{2}:\mu$$

故ニ垂直條件ハ

$$\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+\lambda\mu=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ二ツノ母線ノ交點ノ坐標ハ

$$x=\frac{a(\mu+\lambda)}{2}\qquad y=\frac{b(\mu-\lambda)}{2}\qquad z=\lambda\mu$$

ナルガ故ニ(3)ノ條件ハ

$$4z+a^2-b^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヨツテ求ムル交點ノ軌跡ハ(4)ナル平面ト原曲面トノ交線ナリ。

76. 二次曲面ノ截面ガ圓ナルトキ,之ヲ圓截面トイフ

之ニ就キテ研究スル前ニ次ノ重要ナル定理ヲ證明スベシ。

平行ナル平面ニテ截ラルル二次曲面ノ截ロハ互ニ相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニアリ。

截面ニ平行ニ xy 面ヲトリタリトシ,其方程式ヲ

$$\begin{aligned}&Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy\\&\qquad+2A''x+2B''y+2C''z+D=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

トセヨ。此表面ガ xy 面ニ平行ナル平面

$$z=k\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ニテ截ラレタリトスレバ,其截面ノ方程式ハ

$$\begin{aligned}&Ax^2+By^2+2C'xy+(2B'k+2A'')x+(2A'k+2B'')y\\&\qquad+Ck^2+2C''k+D=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}$$

ナリ。而シテ k ノ値ノ如何ニ關セズ,(3)ハ常ニ $z=0$ ナル平面ニテ截ラレタル截面

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \qquad x=a$$

及ビ

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0 \qquad x=a$$

ニシテ,平面 $x=-a$ ニテ之ヲ截ル時ハ其截口ハ二ツノ直線

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \qquad x=-a$$

及ビ

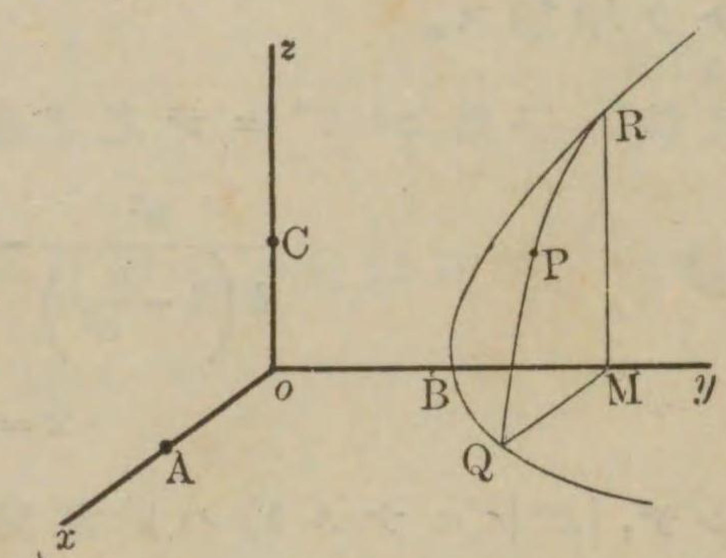
$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0 \qquad x=-a$$

ナリ。又若シ $|k''|>a$ ナル時ノ截口ハ直線 $y=0$, $x=k''$ 及ビ $z=0$ $x=k''$ ヲ二ツノ軸トスル双曲線ニシテ, $|k''|$ ガ増加スルニ從ヒ其半軸ハ限リナク増加ス。

68. 二葉双曲面

二葉双曲面モ亦ソレ自身ニ平行ニ動ク楕圓ニヨリテ生ズル曲面ナリ。但シ動楕圓ハ,横軸ヲ共有シ而カモ互ニ直交スル與ヘラレタル二ツノ双曲線ノ上ニ其頂點ヲ有シ且ツ之等ノ双曲線ニ直交スルモノトス。

圖ニ於テ BQ, BR ヲ互ニ直交スル二ツノ與ヘラレタル双曲線ナルトシ,夫々ノ平面ヲ xy 面及ビ yz 面ニトリ,共通ノ横軸ヲ OB トシ他ノ共軛軸ヲ夫々 OA, OC トス。



今 PQR ヲ動楕圓ノ任意ノ一ツノ位置トシ,其上ノ點Pノ坐標ヲ x, y, z トス。然ル時ハ楕圓ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{\mathrm{MQ}^2}+\frac{z^2}{\mathrm{MR}^2}=1 \cdots\cdots(1)$$

又 $\mathrm{OA}=a$, $\mathrm{OB}=b$, $\mathrm{OC}=c$ トスレバ, Q ハ双曲線 BQ ノ上ニアルコトヨリ

$$\frac{\mathrm{OM}^2}{b^2}-\frac{\mathrm{MQ}^2}{a^2}=1$$

卽チ

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{\mathrm{MQ}^2}{a^2}=1$$

ヨツテ

$$\mathrm{MQ}^2=a^2\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right) \cdots\cdots(2)$$

又 R ハ双曲線 BR ノ上ニアルコトヨリ

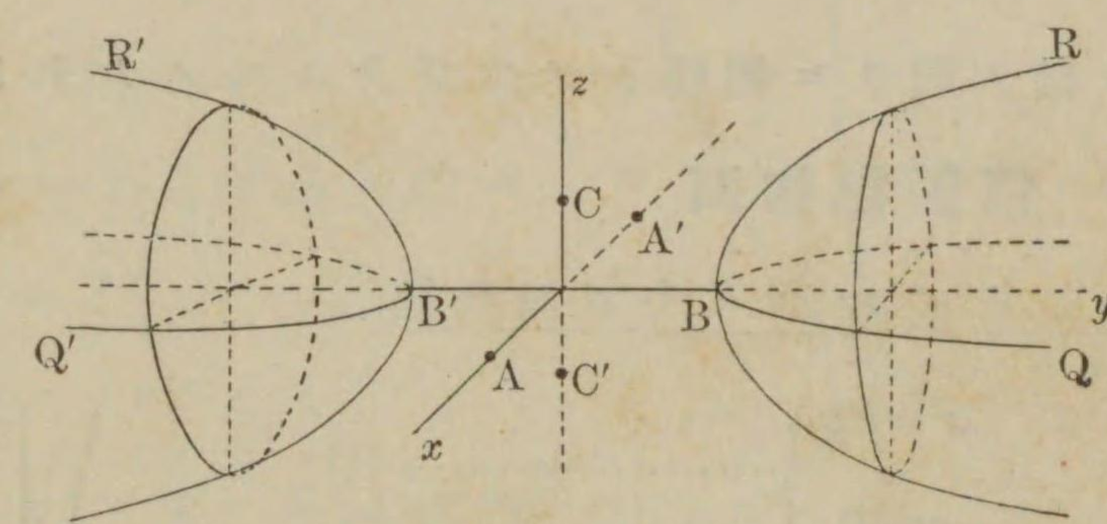
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{\mathrm{MR}^2}{c^2}=1$$

ヨツテ

$$\mathrm{MR}^2=c^2\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right) \cdots\cdots(3)$$

(2), (3) ヲ (1) ニ代入スレバ,求ムル方程式ヲ得。卽チ

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$



二葉双曲面ハ二ツノ枝ヨリ成リ,坐標面及ビ原點ニ關シテ對稱ナリ。今平面 $z=k$ ニテ之ヲ截ル時ハ,截口ハ k ノ凡テノ値ニ對シテ實ナル双曲線

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)}-\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)}=1\\ x=k\end{array}\right\}$$

z

$$Ax^2+By^2+2C'xy+2A''x+2B''y+D=0$$

ト相似＝シテ相似ノ位置＝アリ。(平面解析幾何學三百三十七頁)故＝定理ハ證セラレタリ。

77. 楕圓面ノ圓截面

楕圓面ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ナリトス。但シ $a>b>c$ ナリト假定ス。(他ノ場合＝モ同様＝研究スルコトヲ得。)

與ヘラレタル方程式ヲ變形スレバ,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}-1+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0 \cdots\cdots(1)$$

又ハ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)+x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0 \cdots\cdots(2)$$

或ハ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}-1+x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0 \cdots\cdots(3)$$

トナスコトヲ得。故＝平面

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0 \cdots\cdots(4)$$

又ハ

$$z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)+x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0 \cdots\cdots(5)$$

或ハ

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0 \cdots\cdots(6)$$

＝テ楕圓面ヲ截ル時ハ,其截面ハ夫々半徑 a, b, c ナル圓周トナルベシ。然レドモ $a>b>c$ ナリト假定セルガ故＝(5)ハ二ツノ平面

$$\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}\pm\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}=0 \cdots\cdots(7)$$

ヲ表ハスト雖モ(4)及ビ(6)ハ夫々

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}\pm\frac{iz}{c}\sqrt{a^2-c^2} \cdots\cdots(8)$$

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-c^2}\pm\frac{iy}{b}\sqrt{b^2-c^2} \cdots\cdots(9)$$

トナルヲ以テ實在スル平面群＝ハアラズ。要スル＝ $a>b>c$ ナル時ハ(7)＝テ表ハサルヽ二ツノ平面＝截ラルヽ時＝限リ圓截面トナル。

從ツテ前節＝ヨリテ證明セラレタルガ如ク,其二ツノ平面＝平行ナル平面卽チ

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=\lambda$$

又ハ

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=\mu$$

＝テ截ラルヽ截口ハ何レモ圓トナル。

例 4 楕圓面

$$x^2+6y^2+2z^2=8$$

ノ圓截面ノ方程式ヲ求メヨ

解 楕圓面ノ方程式ヲ書キカフレバ

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}+\frac{z^2}{4}=1$$

故＝

$$a^2=8,\ b^2=\frac{4}{3},\ c^2=4$$

從ツテ $a>c>b$

サテ與ヘラレタル楕圓面ノ方程式ハ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{4}-1+x^2\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)+y^2\left(\frac{1}{\frac{4}{3}}-\frac{1}{4}\right)=0$$

ト書カルヽガ故ニ,二ツノ平面群

$$x^2\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)+y^2\left(\frac{1}{\frac{4}{3}}-\frac{1}{4}\right)=0$$

即チ

$$x-2y=0,\qquad x+2y=0$$

ニテノ截口ハ圓ニシテ其半徑ハ2ナリ。

78. 双曲面ノ圓截面

一葉双曲面ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トシ,且ツ $a>b>c$ ナリト假定スル時ハ,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}-1+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)=0$$

又ハ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1+x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0$$

或ハ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}-1+x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{2z^2}{c^2}=0$$

ト變形スルコトヲ得。然ル時ハ平面群

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)=0$$

即チ

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

及ビ

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル二ツノ平面ニテノ截口ハ確カニ半徑 a ナル圓ナリ。然レドモ $a>b>c$ ナル時ハ,他ノ平面群

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0$$

及ビ

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{2z^2}{c^2}=0$$

ハ實在セズ。從ツテ原點ヲ過ル圓截面ハ(2)及ビ(3)ニ限ルガ故ニ求ムル截面ハ(2),(3)又ハ夫等ノ平行面ナリ。

次ニ二葉双曲線面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\qquad(a>b>c)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヲ考フベシ。コノ場合ニモ前ト同様ニスル時ハ求ムル平面ハ

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0$$

ナルコトヲ知ル。然レドモ此等ノ平面ハ(4)ト實點ニ於テハ交ラズ。只此平面ニ平行ニ引キタル截面ガ(4)ト交リタル時圓トナルトイフノ意ナリ。

79. 二次曲面ノ中心

定義 中心ヲ有スル曲面トハ,坐標軸ノ原點ヲ其點ニ移ス時點 (x', y', z') ガ其曲面上ニアル時ハ,點 $(-x', -y', -z')$ モ亦コノ曲面上ノ點ナルガ如キ曲面ナリ。

今與ヘラレタル二次曲面ガ方程式

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy$$
$$+2A''x+2B''y+2C''z+D=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニテ表ハサレタル時,中心ヲ有スルヤ否ヤヲ研究セントス。

ソレニハ先ヅ坐標軸ヲ平行ニ移動シテ原點ヲ點 (x', y', z') ニ移サントス。即チ變換式

$$\left.\begin{aligned}x&=X+x'\\y&=Y+y'\\z&=Z+z'\end{aligned}\right\}$$

ヲ以テスレバ與ヘラレタル方程式ハ

$$AX^2+BY^2+CZ^2+2A'YZ+2B'ZX+2C'XY$$
$$+2PX+2QY+2RZ+D'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トナル。但シ

$$\begin{cases} P=Ax'+C'y'+B'z'+A'' \\ Q=C'x'+By'+A'z'+B'' \\ R=B'x'+A'y'+Cz'+C'' \end{cases}$$
$$D'=Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2A'y'z'+2B'z'x'+2C'x'y'$$
$$+2A''x'+2B''y'+2C''z'+D$$

故ニ若シ點(x', y', z')ヲ三ツノ方程式

$$\left.\begin{aligned} P=Ax'+C'y'+B'z'+A''=0 \\ Q=C'x'+By'+A'z'+B''=0 \\ R=B'x'+A'y'+Cz'+C''=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ニヨツテ定メタリトスレバ,(2)ハ

$$AX^2+BY^2+CZ^2+2A'YZ+2B'ZX+2C'XY+D'=0 \cdots\cdots (4)$$

トナル。

要スルニ(3)ナル方程式ヲ滿足セシムルx', y', z'ノ値ガ存在スル時ハ,與ヘラレタル曲面ノ方程式ハ(4)トナル。然ルニ(4)ニ於テハX, Y, Zノ一次ノ項ナキガ故ニ,若シX, Y, Zノアル値,例ヘバx_0, y_0, z_0ガ其方程式ヲ滿足スルナラバ必ズヤ$-x_0, -y_0, -z_0$モ亦其方程式ヲ滿足ス。

故ニ(3)ヲ滿足スル點(x', y', z')ガ存在スルナラバ,ソハ曲面ノ中心ニシテ,其點ヲ原點トスル時ハ方程式ハ恒ニ(4)ノ如キ形ヲトル。カヽル二次曲面ヲ有心二次曲面トイヒ,然ラザルモノヲ

無心二次曲面トイフ。

故ニ今二次曲面

$$Ax^2+By^2+CZ^2+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ノ中心ヲ求メンニ,公式(3)ヲ用フル時ハ,

$$Ax'=0 \quad By'=0 \quad Cz'=0$$

ナルガ故ニ,原點(0, 0, 0)ハ卽チ其中心ナリ。從ツテ球,錐面,楕圓面及ビ二種ノ双曲面ハ中心ヲ有スル曲面ナリ。

若シ(5)ニ於テA, B, Cノ中何レカ一ツガ零ナル時ハ,曲面ガ一ツノ柱面ニシテ,中心ノ軌跡ハ一ツノ直線トナリ, 又何レカ二ツガ零ナル時ハ,曲面ガ二ツノ平面トナリ中心ノ軌跡ハ平面ナリ。又

$$Ax^2+By^2+C''Z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

ニテ表ハサルルガ如キ種類ノ曲面ノ中心ハ,

$$Ax'=0 \quad By'=0 \quad C''=0$$

ヨツテC''ガ零ナラザル限リハ中心ガ存在セズ。故ニ拋物面ハ中心ヲ有セズ。尙(6)ニ於テA, Bノ中何レカ一ツガ零ナル時ハ曲面ガ拋物線柱面トナル。而シテ此場合ニモ亦中心ヲ有セズ。最後ニC''ガ零ナル時ハ曲面ガ實又ハ虛ナル二ツノ平面トナリ,其中心ノ軌跡ハZ軸トナル。

80. 有心二次曲面ノ圓截面

已ニ圓截面ニ就キテ一通リ說明シタリト雖モ尙本節ニ於テ有心二次曲面ノ最モ一般ナル形ニ就キテ論ゼントス。先ヅ中心ヲ原點ニ置クトキハ其方程式ハ,

$$Ax^2+By^2+CZ^2+2A'YZ+2B'ZX+2C'XY=D \cdots\cdots\cdots (1)$$

今之ヲ變形シテ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy-k(x^2+y^2+z^2)$$
$$+k(x^2+y^2+Z^2-\frac{D}{k})=0$$

故ニ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy-k(x^2+y^2+z^2)=0$$

即チ

$$(A-k)x^2+(B-k)y^2+(C-k)z^2+2A'yz+2B'zx$$
$$+2C'xy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ガ二ツノ平面ヲ表ハスヤウニ k ノ値ヲ定ムル時ハ,此平面ト原曲面(1)トノ交線ハ此平面ト球 $x^2+y^2+z^2-\frac{D}{k}=0$ トノ交リニ外ナラザルヲ以テ,半徑ガ $\sqrt{\frac{D}{k}}$ ナル圓トナル。

サテ斯ノ如クニ k ノ値ヲ定メンニハ(2)ノ各項ヲ z^2 ニテ除シタル後(x^2 又ハ y^2 ニテ除スルモ可ナリ。) $\frac{x}{z}=X$, $\frac{y}{z}=Y$ トシテ,平面解析幾何學第三章第四十一節ノ理論ヲ適用スレバ, k ノ値ハ結局次ノ三次方程式ノ根トシテ得ラル。

$$\begin{vmatrix} A-k, & C' & B' \\ C', & B-k, & A' \\ B', & A' & C-k \end{vmatrix}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

而シテ此方程式ヨリ得ラルル k ノ三ツノ値ハ何レモ實數ナレドモ,圓截面ヲ與フル値ハ夫等ノ中央ノ根ニ限ル。

定義 方程式(3)ノ左邊ヲ二次曲面ノ判別三次式トイフ。

81. 前節ニ於テ判別三次式ハ常ニ三ツノ實根ヲ有スルコト及ビ圓截面ヲ得ルニハ其中央ノ根ヲ以テスベキコトヲ述ベタリ。本節ニ於テハ其理由ヲ詳述セントス。

今

$$f(k)=\begin{vmatrix} A-k & C' & B' \\ C' & B-k & A' \\ B' & A' & C-k \end{vmatrix}=0$$

トスレバ,計算ノ結果

$f(k)=(k-A)\{(k-B)(k-C)-A'^2\}-\{B'^2(k-B)+C'^2(k-C)+2A'B'C'\}=0$ トナル。今補助ノ函數トシテ

$$y=\varphi(k)=(k-B)(k-C)-A'^2$$

ヲ考フベシ。又 $A>B>C$ ナリト假定ス。

然ルトキハ

k	$-\infty$	C	B	∞
$\varphi(k)$	$+\infty$	$-$	$-$	∞

ナルガ故ニ $\varphi(k)=0$ ノ二ツノ根ヲ α, β $(\alpha>\beta)$ トスレバ,

$$\alpha>B>C>\beta$$

ナル關係アリ。次ニ $k=-\infty$ ナル時ハ $f(k)=-\infty$ ニシテ, $k=\infty$ ナル時ハ $f(k)=\infty$ ナリ。又 $k=\alpha$, $k=\beta$ ナル時ハ $\varphi(k)=0$ ナルコトニ注意スレバ,

$$f(\alpha)=-\{B'^2(\alpha-B)+C'^2(\alpha-C)\pm2B'C'\sqrt{(\alpha-B)(\alpha-C)}\}$$
$$=-(B'\sqrt{\alpha-B}\pm C'\sqrt{\alpha-C})^2<0$$
$$f(\beta)=(B'\sqrt{B-\beta}\pm C'\sqrt{C-\beta})^2>0$$

ヨツテ $f(k)=0$ ノ三ツノ根ヲ k_1, k_2, k_3 トスレバ夫等ハ

$$k_3<\beta<k_2<\alpha<k_1$$

ナル關係ヲ滿足スル實根ナリ。

以上ノ説明ニ於テハ

$$y=\varphi(k)=0$$

ノ二ツノ根 α, β ハ相異ルモノトセリ。

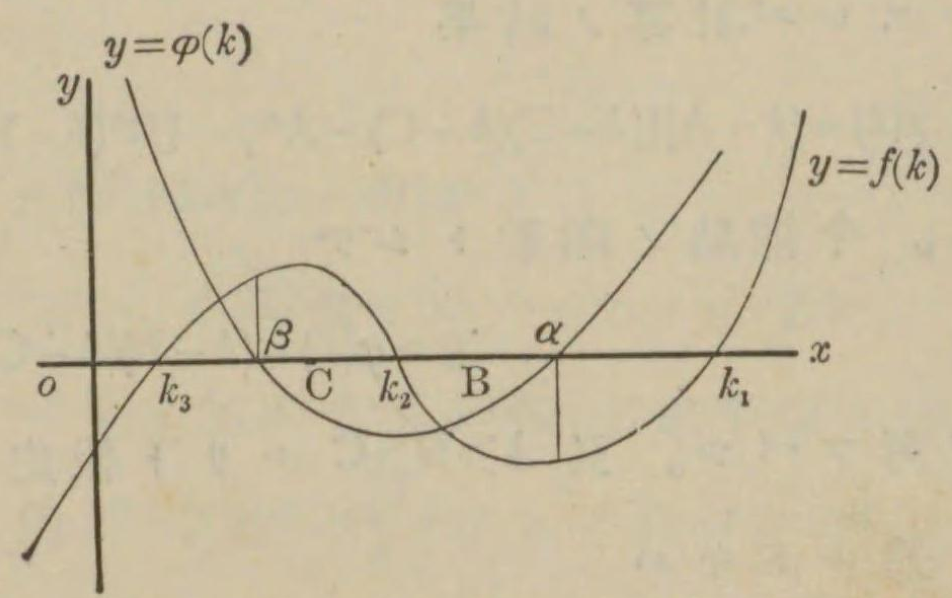
然レドモ之等ハ相等シキ時ハ如何ニトイフニ,其場合ニハ $\varphi(k)=0$ ノ判別式

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C})^2+4\mathrm{A}'^2=0$$

ナルコトヨリ

$$\mathrm{B}=\mathrm{C}=0, \quad \mathrm{A}'=0$$

ナルベキニヨリ,判別三次方程式ハ



$$(k-\mathrm{B})\{(k-\mathrm{A})(k-\mathrm{B})-\mathrm{B}'^2-\mathrm{C}'\}=0$$

トナル。ヨツテ此場合ニモ又三ツノ實根アルコトヲ知ル。

次ニ圓截面ヲ與フル k ノ値ハ其三ツノ中ノ中央値ナルコトヲ示サントス。

サテ

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2+2\mathrm{A}'yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{C}'xy-k(x^2+y^2+z^2)$$

$$=(\mathrm{A}-k)x^2+(\mathrm{B}-k)y^2+(\mathrm{C}-k)z^2+2\mathrm{A}'yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{C}'xy$$

$$=\frac{1}{\mathrm{B}-k}\left\{[\mathrm{C}'x+(\mathrm{B}-k)y+\mathrm{A}'z]^2+\frac{1}{\varphi(k)}[z\varphi(k)-\{\mathrm{C}'\mathrm{A}'-(\mathrm{B}-k)\mathrm{B}'\}x]^2\right\}$$

ソコデ

$$\mathrm{C}'x+(\mathrm{B}-k)y+\mathrm{A}'z=u$$

$$z\varphi(k)-\{\mathrm{C}'\mathrm{A}'-(\mathrm{B}-k)\mathrm{B}'\}x=v$$

ト置クトキハ上ノ式ハ

$$\frac{1}{\mathrm{B}-k}\left[u^2+\frac{v^2}{\varphi(k)}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トナル。然ルニ前ノぐらふヲ見テモ知ラルル如ク, $\mathrm{B}-k$ ト $\varphi(k)$ トガ k ノ三ツノ値ニ對シテハ次ノ表ノ如クナル。即チ

	$\mathrm{B}-k$	$\varphi(k)$
k_1 ノ時	$-$	$+$
k_2 ノ時	$\pm$	$-$
k_3 ノ時	$+$	$+$

ヨツテ k_1 ノ時及ビ k_3 ノ時ハ(1)ハ夫々

$$-\mathrm{L}^2u^2-\mathrm{M}^2v^2 \qquad \mathrm{L}^2u^2+\mathrm{M}^2v^2$$

ノ形トナリ二ツノ因數ニ分解スルコトヲ得ズト雖モ, k_2 ノ時ハ

$$\mathrm{L}^2u^2-\mathrm{M}^2u^2$$

ノ如キ形トナリ爲ニ二ツノ因數ニ分解セラル。故ニ圓截面ヲ與フルハ k ノ三ツノ値ノ中央ノモノナリ。

82. 拋物面ノ圓截面

拋物面ノ方程式ヲ

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2=\mathrm{C}''z$$

ナリトセヨ。

然ル時之ヲ書キ換フル時ハ,

$$\mathrm{A}\left(x^2+y^2+z^2-\frac{\mathrm{C}''z}{\mathrm{A}}\right)-y^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\mathrm{A}\mathrm{Z}^2=0$$

或ハ

$$\mathrm{B}\left(x^2+y^2+z^2-\frac{\mathrm{C}''\mathrm{Z}}{\mathrm{B}}\right)-x^2(\mathrm{B}-\mathrm{A})-\mathrm{B}z^2=0$$

ソコデ先ヅ楕圓拋物面ニ就キテ考ヘンニ,此場合ニハ A, B ハ同ジ符號ナルヲ以テ之等ヲ共ニ正ナリト假定スルモ差支ヘナシ

故ニ

$$A>B>0$$

ナル時ハ,二ツノ平面

$$(A-B)x^2-Bz^2=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

ニテノ截面ハ圓トナルコト明カナリ。從ツテ之等ニ平行ナル二ツノ平面

$$x\sqrt{A-B}+z\sqrt{B}=\lambda \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$x\sqrt{A-B}-z\sqrt{B}=\mu \cdots\cdots\cdots(3)$$

ニテノ截面ハ恒ニ圓トナル。(第七十六節);次ニ

$$B>A>0$$

ナル時ハ二ツノ平面

$$(B-A)y^2-Az^2=0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

ニテノ截面ハ圓トナルコト明カナリ。從ツテ之等ニ平行ナル二ツノ平面

$$\sqrt{B-A}\,y+\sqrt{A}\,z=\lambda \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\sqrt{B-A}\,y-\sqrt{A}\,z=\mu \cdots\cdots\cdots(6)$$

ニテノ截面ハ何レモ圓トナル。

然ルニ双曲抛物面ニ於テハAヌハBノ中何レカ一ツハ負ナルガ故ニ(1)及ビ(4)ハ何レモ實ナル平面ナラズ。故ニ此場合ニハ圓截面ヲ得ルコトナシ。

例 5 楕圓抛物面

$$x^2+5z^2=3y$$

ノ圓截面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル方程式ヲ書キ換フレバ,

$$(x^2+y^2+z^2-3y)-(y^2-4z^2)=0$$

ヨツテ平面

$$y^2-4z^2=0$$

卽チ

$$y-2z=0,\quad 或ハ\quad y+2z=0$$

或ハ叉夫等ニ平行ナル平面

$$y-2z=\lambda,\qquad y+2z=\mu$$

ニテノ截面ハ凡テ圓トナル。

例 6 有心二次曲面

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=0$$

ノ圓截面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル方程式ヨリ

$$A=B=C=0$$

$$A'=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)\qquad B'=\frac{1}{2}\left(\frac{c^2+a^2}{ca}\right)\qquad C'=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)$$

故ニkヲ求ムル判別三次方程式ハ

$$\begin{vmatrix} -k, & \dfrac{a^2+b^2}{2ab} & \dfrac{c^2+a^3}{2ca} \\ \dfrac{a^2+b^2}{2ab} & -k & \dfrac{b^2+c^2}{2bc} \\ \dfrac{c^2+a^2}{2ca} & \dfrac{b^2+c^2}{2bc} & -k \end{vmatrix}$$

卽チ

$$-k^3+\frac{k}{4}\left\{\frac{(b^2+c^2)^2}{b^2c^2}+\frac{(c^2+a^2)^2}{c^2a^2}+\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}\right\}+\frac{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}{4a^2b^2c^2}=0$$

コレヨリkノ中央ノ値トシテ-1ヲ得。ヨツテ求ムル平面ノ方程式ハ七十九節(2)ニヨリ

$$x^2+y^2+z^2+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)yz+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)zx+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)xy=0$$

ナリ。而シテ直線 $x=0,\ z=k$ ガ共横軸ニシテ,直線 $y=0,\ z=k$ ガ共軛軸ナリ。又平面 $x=k'$ ニテ截ル時モ亦截ロハ双曲線

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k'^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{k'^2}{a^2}\right)}&=1\\ x&=k'\end{aligned}\right\}$$

ニシテ,直線 $z=0,\ x=k'$ ガ共横軸,直線 $y=0,\ x=k'$ ガ共共軛軸ナリ。

次ニ平面 $y=k''$ ニテ截ル時ハ,其截ロハ楕圓

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2\left(\frac{k''^2}{b^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{k''^2}{b^2}-1\right)}&=1\\ y&=k''\end{aligned}\right\}$$

ナリ。若シ $|k''|<b$ ナル時ハ楕圓ハ實ナラズ。即チ平面 $y=-b$ ヨリ $y=b$ ニ至ル間ニ曲面ノ部分ガ存在セズ。

最後ニ $a=c$ ナル時ハ,二葉双曲面ハ双曲線

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\}$$

ガ, y 軸ノ周リニ廻轉シテ生ジタルモノナリトイフヲ得ベシ。

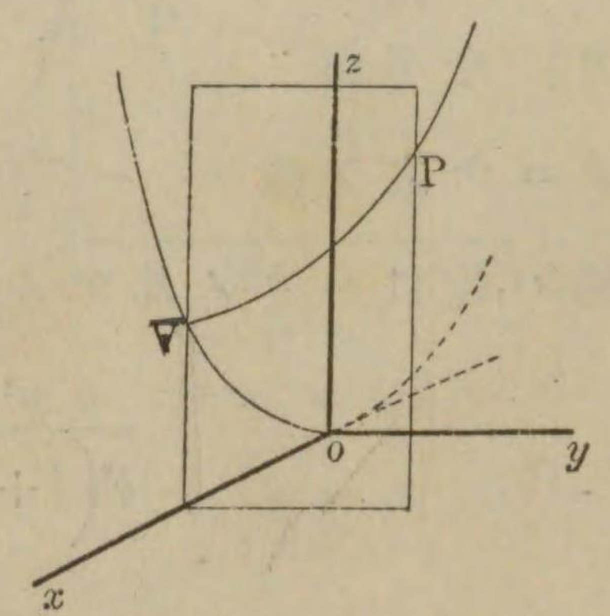
69. 楕圓拋物面

xz 面及ビ yz 面ニ夫々拋物線

$$\left.\begin{aligned}x^2&=a^2z\\ y&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\left.\begin{aligned}y^2&=b^2z\\ x&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



アリトシ,(1)ハ固定シ(2)ハソレ自身

ニ平行ニ且ツ其頂點Vガ(1)ノ上ニアルヤウニ動ク時,(2)ニヨツテ生ズル曲面ヲ楕圓拋物面トイフ。

圖ノ如ク(2)ノ頂點ノ一ツノ位置ヲ $V(x',\ o,\ z')$ トシ,曲線上ノ一點ヲ $P(x,\ y,\ z)$ トスル時ハ, V ハ拋物線 OV ノ上ニアルガ故ニ

$$x'^2=a^2z'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又拋物線 VP ノ方程式ハ

$$y^2=b^2(z-z')\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

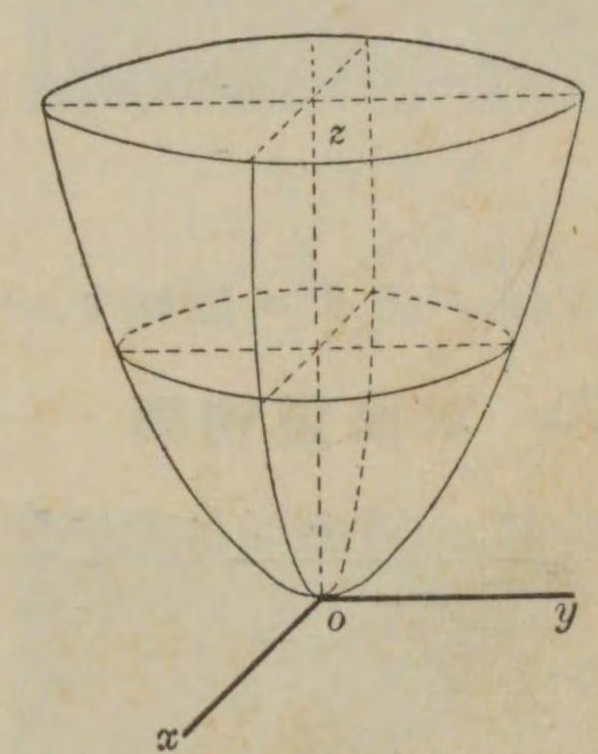
ニシテ且ツ

$$x=x'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ナリ。ヨツテ求ムル方程式ハ(3), (4)及ビ(5)ヨリ x', z' ヲ消去セルモノ即チ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

ナリ。



楕圓拋物面ハ坐標面 $x=0$, 及ビ $y=0$ ニ關シテハ對稱ナルモ, $z=0$ ニ關シテハ對稱ナラズ。

次ニ平面 $z=k$ ニテ之ヲ截ル時ハ其截ロハ楕圓ニシテ

$$a\sqrt{k},\qquad b\sqrt{k}$$

ハ二ツノ半軸ナリ。故ニ k ノ値ハ増加スレバ,楕圓ハ如何ホドニテモ大トナル。

又平面 $y=k'$ ニテ之ヲ截ル時ハ,其截ロハ拋物線

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}&=z-\frac{k'^2}{b^2}\\ y&=k'\end{aligned}\right\}$$

ヲ得。而カモ k' ノ値ノ如何ニ關セズ之等ノ抛物線ハ相等シ。即チ k' ノ値ガ増加スルニ從ヒテ頂點ハ抛物線

$$\left.\begin{array}{l} y^2=l^2z \\ x=0 \end{array}\right\}$$

ニ沿ヒテ平面 $y=0$ ヨリ遠カル。又平面 $x=k''$ ニテ之ヲ截ル時ハ,其截口ハ抛物線

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y^2}{b^2}=z-\dfrac{k''^2}{a^2} \\ x=k'' \end{array}\right\}$$

ヲ得。而シテ k'' ガ變化スルニ從ヒ其頂點ハ抛物線

$$\left.\begin{array}{l} x^2=a^2z \\ y=0 \end{array}\right\}$$

ノ上ヲ動クベシ。最後ニ若シ $a=b$ ナル時ハ楕圓抛物面ハ抛物線

$$\left.\begin{array}{l} x^2=a^2z \\ y=0 \end{array}\right\}$$

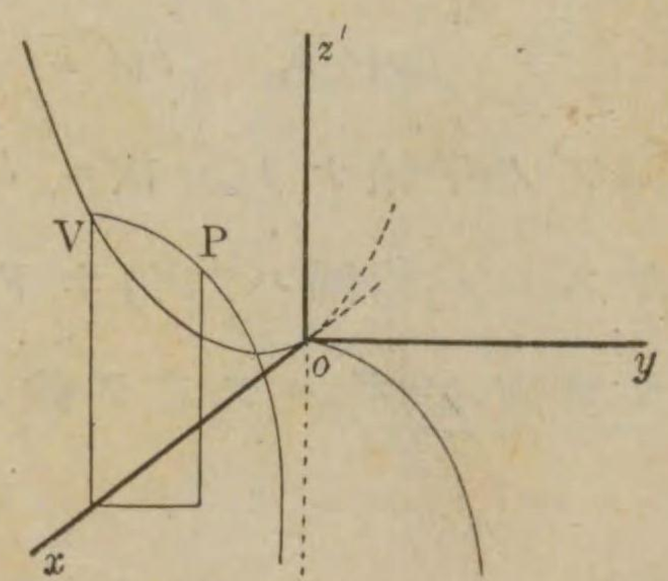
ガ z 軸ノ周リニ廻轉シテ生ズル廻轉面トナル。

70. 双曲抛物面

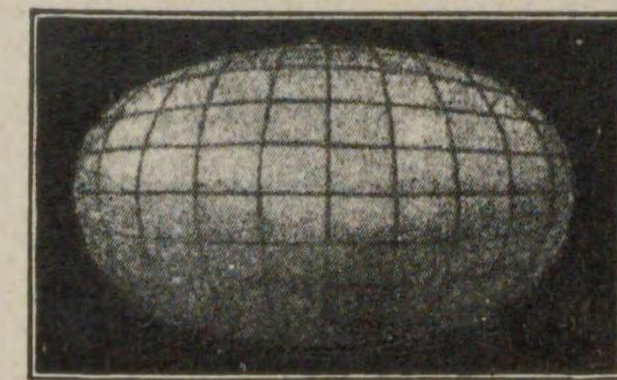
前節ニ於テ(2)ノ代リニ抛物線

$$\left.\begin{array}{l} y^2=-b^2z \\ x=0 \end{array}\right\}$$

ヲ用ヒテ生ズル曲面ヲ双曲抛物面トイフ。

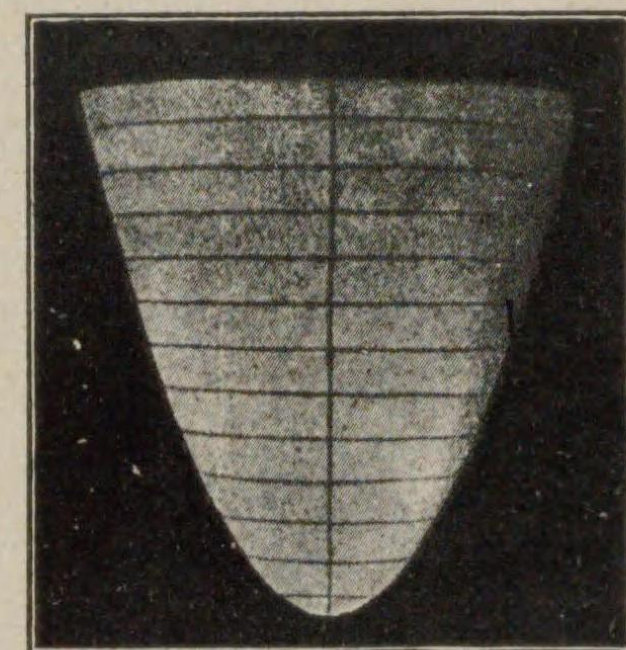


今其方程式ヲ前節ニ倣ヒテ求ムレバ



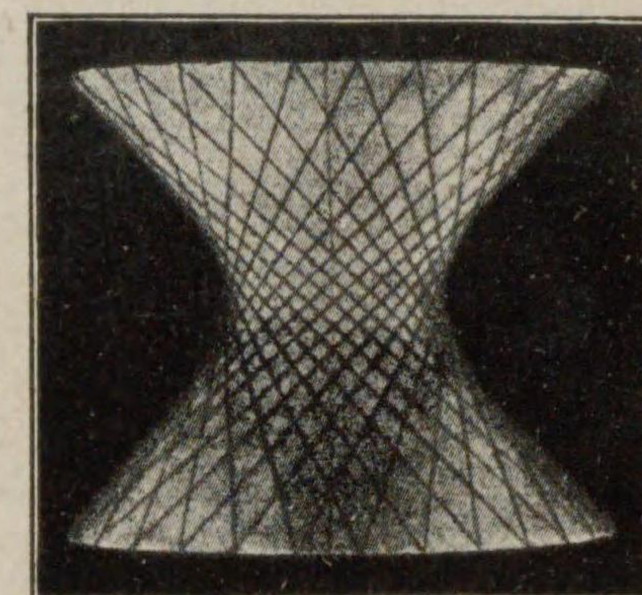
(楕圓面)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



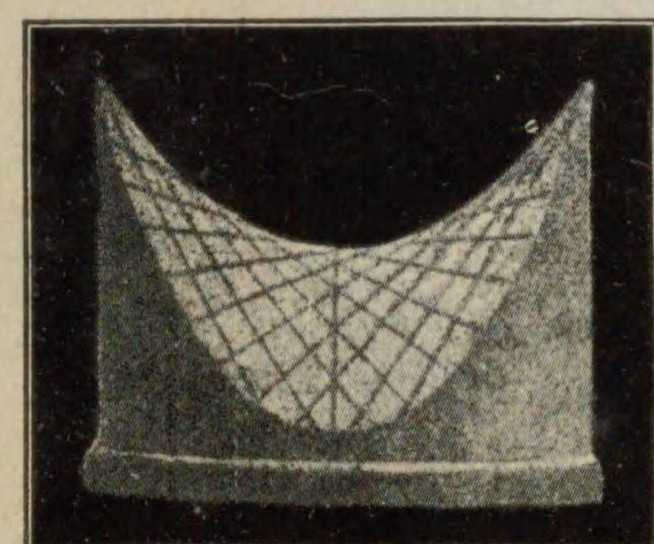
(楕圓抛物面)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$



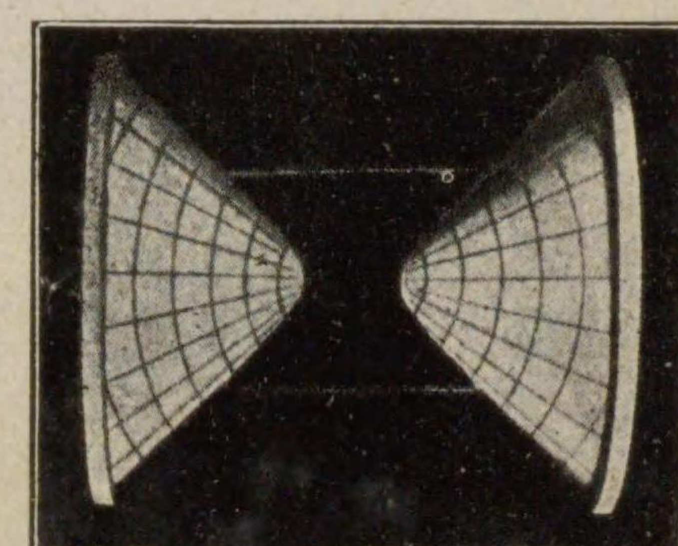
(一葉双曲面)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



(双曲抛物面)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



(二葉双曲面)

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ得。

コノ曲面ハ平面 $x=0$ 及ビ $y=0$ ニ關シテ對稱ナルガ $z=0$ ニ關シテハ對稱ナラズ。今平面 $z=k$ ニテ之ヲ截ル時ハ,其截ロハ双曲線

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2k}-\dfrac{y^2}{b^2k}=1\\ z=k\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ $k>0$ ナラバ直線 $y=0$, $z=k$ ハ横軸ニシテ, $x=0$, $z=k$ ハ共軛軸ナリ,若シ $k<0$ ナラバ之等ノ軸ハ互ニ交換セラルベシ。又若シ $k=0$ ナラバ直接(1)ニ代入スレバ截ロハ二ツノ直線

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0\\ z=0\end{array}\right\} \quad 及ビ \quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0\\ z=0\end{array}\right\}$$

トナル。

双曲拋物面ノ性質ハ略上ノ如シト雖モ其形狀ヲ想像スルコト誠ニ困難ナリ,サレド原點ノ附近ニ於テハ馬ノ鞍ノ如キ形ヲナスト考フレバ宜シカラン。(別紙實物寫眞參照)

71. 概　括

球,錐,楕圓面及ビ二種ノ双曲面ノ方程式ハ凡テ

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D$$

ナル形ヲトル。即チ A, B, C ガ相等シキ時ハ球ニシテ, D ガ零ナル時ハ錐面ナリ。又 A, B, C ハ同符號ニシテ悉クハ相等シカラザル時ハ楕圓面ヲ表ハシ,異符號ナル時ハ何レカ一ツノ双曲面ヲ表ハス。

若シ A, B, C ノ中何レカ一ツガ零ナル時ハ導線ガ楕圓或ハ双

曲線ナル柱面ヲ表ハシ二ツガ零ナル時ハ二ツノ平面ヲ表ハス。

次ニ二種ノ抛物面ノ方程式モ

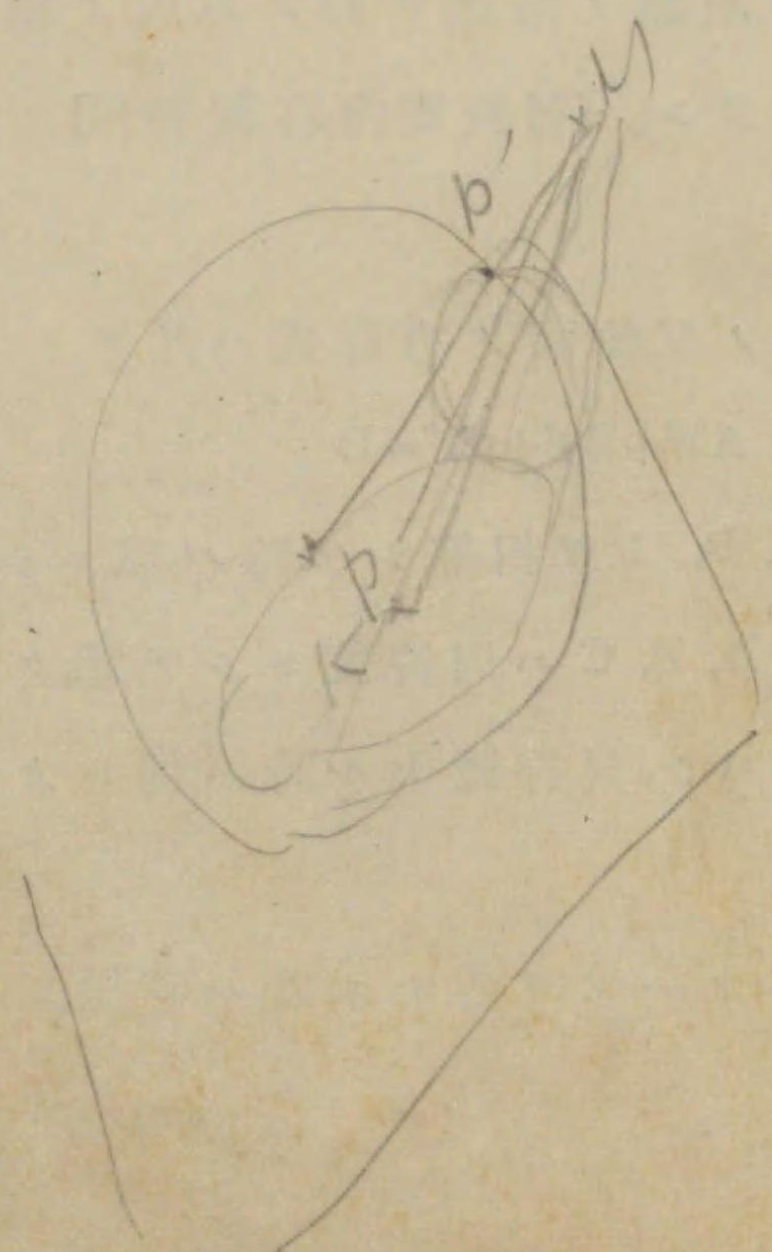
$$Ax^2+By^2=Cz$$

ナル形ニ纒ムルコトヲ得。コノ場合A又ハBガ零ナル時ハ導線ガ抛物線ナル柱面ヲ表ハス。

一般ナル二次曲面ノ方程式ハ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy$$
$$+2A''x+2B''y+2C''z+D=0$$

ナレドモ,平面解析幾何學第十章ニ研究セルガ如ク,坐標ノ變換ニヨリテ標準形ニ直ストキハ,二ツノ平面ニナラザル限リハ必ズ本章ニ述ベタル曲面ノ中何レカ一ツトナルベキコト後章更ニ論議スル所アルベシ。

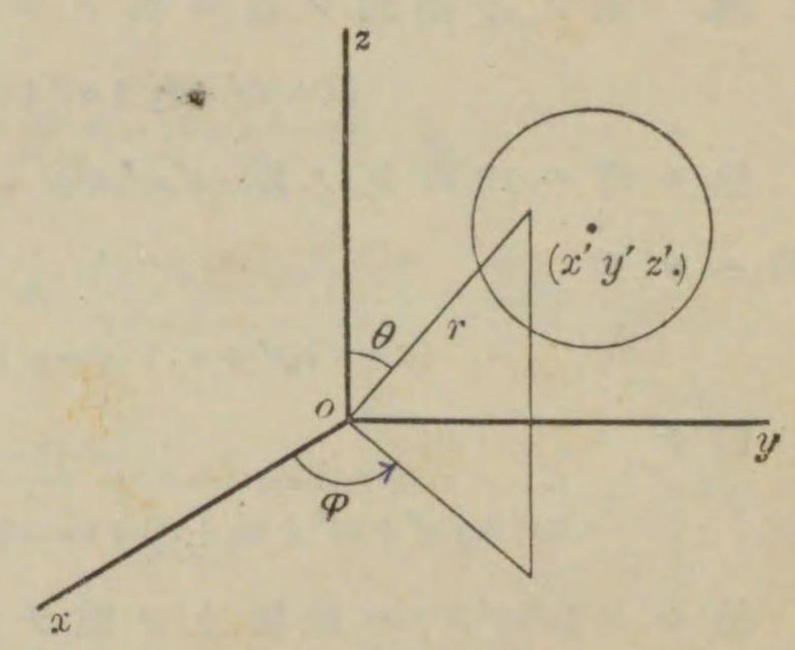


第五章

問題

1. 中心ニアラザル任意ノ點ヲ原點トシテ球ノ極方程式ヲ求メヨ。

解. 球ノ中心ノ直角坐標ヲ (x', y', z') トシ半徑ヲ r' トスレバ,球ノ方程式ハ



$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r'^2$$

此方程式ニ於テ流通坐標 x, y, z ノ代リニ其極坐標

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=r\cos\theta$$

ヲ入ルレバ

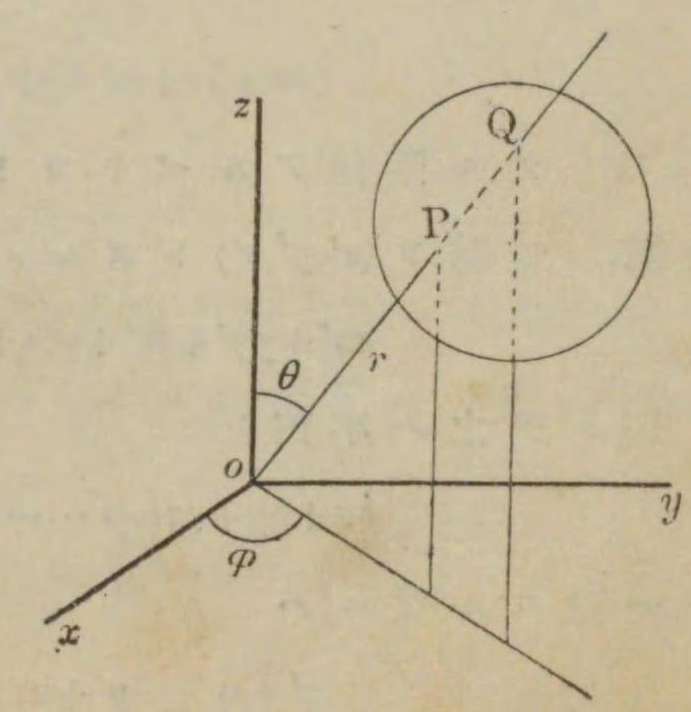
$$(r\sin\theta\cos\varphi-x')^2+(r\sin\theta\sin\varphi-y')^2+(r\cos\theta-z')^2=r'^2$$

コレヲ整頓スレバ

$$r^2-2r(x'\sin\theta\cos\varphi+y'\sin\theta\sin\varphi+z'\cos\theta)+x'^2+y'^2+z'^2-r'^2=0$$

コレ求ムル球ノ極方程式ナリ。

2. 定點Oヨリ一ツノ球ニ任意ノ直線OPQヲ引キ,P,Qニテ球ニ出會ハシムレバ矩形OP. OQノ面積ハ一定ナルコトヲ證セヨ。



解. 定點Oヲ原點トスレバ球ノ極方程式ハ前題ヨリ

$$r^2-2r(x'\sin\theta\cos\varphi+y'\sin\theta\sin\varphi$$
$$+z'\cos\theta)+(x'^2+y'^2+z'^2-r'^2)=0$$