第五章　线性系统理论引论

第六章　最佳泸波戻理

§5－2 线性系统的最佳设计

5－2－1 最佳设计问题的提出

为了说明最佳设计问题，首先让我们讨论一个如图5－2－1所示的雷达跟踪系统的实际问题。

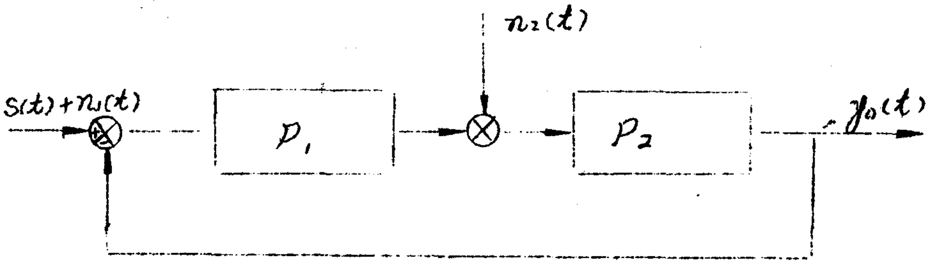

图 5－2－1 雷达跟踪系统结构图

图5－2－1中，S（t）为雷达应该跟踪的信号，n_1（t）为与信号混合一起的干扰（或噪音），n_2（t）是输出端的扰动，例如风力对雷达天线的扰动。可见对于这样一个系统，如果不很好设计P_1和P_2，显然，雷达天线就不会正确地跟踪目标。因此为了提高雷达对目标的跟踪精度，就提出了这样一个问题：如何设计系统的P_1和P_2，使得系统的输出最正确地与信号S（t）保持一致。由于

$$y_0(t)=P_2\{P_1[S(t)+n_1(t)]+n_2(t)\}$$
$$=P_2P_1[S(t)+n_1(t)]+P_2n_2(t)$$

因此

$$y_0(t)=\frac{P_2\cdot P_1}{1+P_2\cdot P_1}\cdot S(t)+\frac{P_2\cdot P_1}{1+P_2\cdot P_1}n_1(t)+\frac{P_2}{1+P_2\cdot P_1}n_2(t) \quad (5-2-1)$$

由（5－2－1）式，可将雷达跟踪系统的结构图改变成图5—2—2

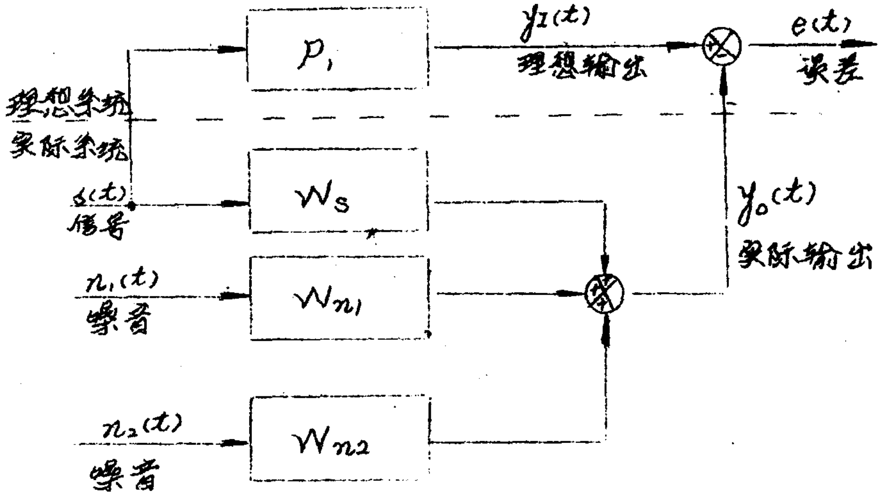

图5－2－2　另一种形式的雷达跟踪

系统结构图

图中P_I是理想运算子，$W_S=\dfrac{P_2\cdot P_1}{1+P_2\cdot P_1}$，$W_{n1}=\dfrac{P_2\cdot P_1}{1+P_2\cdot P_1}$，

$W_{n2}=\dfrac{P_2}{1+P_2\cdot P_1}$。这样，上面提出的问题便可这样叙述：根据给定的$P_I$的形式和S（t）、$n_1$（t）、$n_2$（t）的特性，确定$W_S$和$W_{n_1}$、$W_{n_2}$（即$P_1$和$P_2$）使得其均方误差$\epsilon^2$（t）达到最小。这就是雷达跟踪系统的最佳设计问题。

上述雷达跟踪系统的最佳设计问题，可推广到如图5－2－3所示的更一般的情况。这时，系统最佳设计问题可叙述为：根据给定的P

的形式和信号 S (t)、噪音 n (t) 的特性，确定 W_S 和 W_n ，使得 ϵ^2 (t) 达到最小。这就是一般控制系统的最佳设计问题。

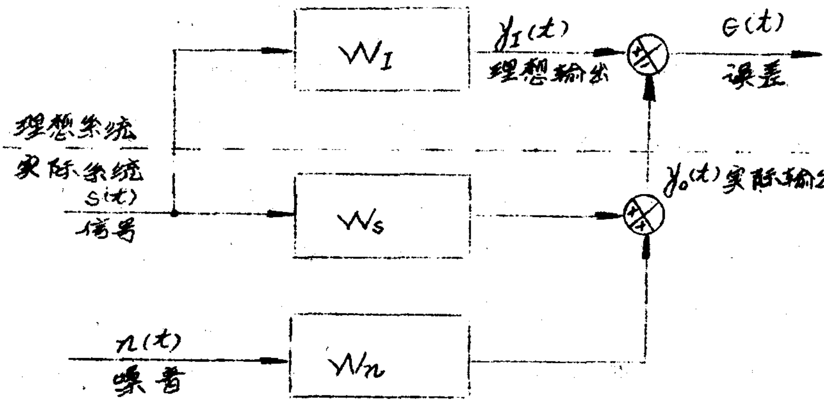

图 5－2－3 一般系统结构图

上述控制系统的最佳设计问题中，理想运算子是根据需要予先给定的，例如，若我们要求系统的轨出复现信号，则 $P_I = 1$ ，而其相应的脉冲过渡函数就是 δ (t)；而使 ϵ^2 (t) 达到最小称为最佳准则， ϵ^2 (t) 称为性能指标或损失函数。显然，所要求的 W_S 和 W_n 的形式必然与最佳准则或性能指标有关，因此在进行最佳设计时，选择合理的性能指标是很重要的；另外，在进行控制系统的最佳设计时信号 S(t) 和 n (t) 的特性要予先给出；还有，一般说来所设计出来的最佳控制系统只能使 ϵ^2 (t) 最小，但不能使 ϵ (t) $= 0$ ，这就是最佳控制系统与理想系统的差别，也就是说，最佳控制系统是可实现的，而理想系统是无法实现的。

控制系统的最佳设计是随着科学技术的飞速发展，对控制系统的精度和快速性的要求越来越高的情况下提出来的。例如在二次大战前，由于飞机的飞行高度和机动性越来越高，武器的射程也越来越远，因此就要求设计出高精度快速的火力控制系统。在这种情况下，再加上当时数学上的成就，就出现了维纳最佳滤波原理，并且根据这个原理设计出了由自动雷达，指挥仪，火炮随动系统组成的全自动的火力控制系统，大大提高了火炮的射击精度；又如在本世纪五十年代末到六十年代初，由于空间技术的飞速发展，要求对在复杂轨迹上运动的飞船作姿态控制，由于需控制的状态（位置、速度、姿态角等）多，精度要求高，因此，在近代数学取得的成果的条件下，六十年代初期便出现了建立在状态空间分析法基础上的卡尔曼最佳滤波原理，根据这个原理成功地设计了飞船的姿态控制系统，才使飞船登月成为可能。

5－2－2 最佳设计的性能指标

由于最佳控制准则或性能指标在很大的程度上确定了最佳控制的性能，因此性能指标的选择是很重要的。也就是说，所得的控制可能是线性的或非线性的，定常的或时变的，这些在很大程度上取决于性能指标的形式。因此，控制工程人员，常常需要根据具体问题的要求选择合适的性能指标。那么怎样来选择性能指标呢？这在很大程度上又取决于系统的性质和对系统的要求。具体地说，性能指标应具有两个条件：

(1)性能指标应该尽可能真实地反映系统的工作性能；

(2)性能指标应该是一个用现有方法可以计算得出的量。

例如，对于一个通讯系统，一个合适的性能指标可以是在标准信号输入时，在输出端信号功率对噪音功率之比，即所谓输出信噪比。显然，

对于线性系统，在知道了轨入信号与噪音的频谱分布和系统的参数之后，这个比值便可以算出来。并且，当其他条件相同时，高比值要比低比值具有更良好的性能，因此，这个指标和我们对系统性能的直觉理解之间是有联系的。但是，若要进一步研究时，也许还要计及信号的失真，在随机选定的信号中，各种频率出现的概率，以及将系统的轨出译成意义时人耳和人脑的反映特性等。由此可知，一个性能指标，可以是相当简单的量，也可以是十分复杂的量或中等复杂程度的量。而其最终的选择，主要还应该看采用的是什么数据和设计者认为对问题的分析需要深入到什么程度？同时，还需建立在工程判断上。实际上，我们常用一类系统误差的凸函数作为性能指标：

$$L(0)=0$$

$$L(X_2)>L(X_1)\geq 0 \qquad \text{当} X_2>X_1\geq 0 \qquad (5-2-2)$$

$$L(X)=L(-X)$$

式中系统误差可以是标量（对单轨入单轨出系统）或矢量（对多轨入多轨出系统）。在X是标量的特况下，满足（5－2－2）式的性能指标可以是：

$$L(X)=aX^2\;; \quad L(X)=aX^4\;;$$

$$L(X)=a|X|\;; \quad L(X)=a(1-e^{-X^2})$$

等等，其中X为系统的误差。在大多数场合，又常常采用均方误差来作为性能指标。例如，上面我们用到的最佳准则，就是采用均方误差作为性能指标的。显然，系统的均方误差是满足上述性能指标性质（5－2－2）式的特殊特况。它被广泛采用的理由是：

(1)服从正态分布的随机变量的全部统计特性，可以根据其均方误差和平均值来求出；

(2)当一个随机变量的其他统计特性不能被计算出来时，而其均方误差却仍然可以求出；

(3)计算上的方便。

在讨论多轨入多轨出的复杂系统时，系统的误差是用矢量来表示的，这时，常采用一种二次型性能指标：

$$J=\int_0^{\infty}[\xi(t)-X(t)]^{*}Q[\xi(t)-X(t)]dt \qquad (5-2-3)$$

式中

$\xi(t)$——表示所希望的状态；

$X(t)$——表示系统的真实状态；

Q —— 对称正定（或正半定）加权矩阵；

$[\cdot]^{*}$ —— 矩阵$[\cdot]$的共轭转置符号。

如果除了要考虑到系统的误差之外，还要注意到对控制作用所需的能量，而控制作用一般是力和力矩的因次，因此控制能量正比于$[u(t)]^2$的积分，这样系统的性能指标在$\xi(t)=0$和$X(t)$是实数矢量时，就应为：

$$J=\int_0^{\infty}[X^T(t)QX(t)+u^T(t)Ru(t)]dt \qquad (5-2-4)$$

式中R是对称正定加权矩阵。在这个问题中，$u(t)$仍然是不受约束的，因为上式只表示在选取控制矢量$u(t)$时，使其能量不要太大，而没有任何具体大小的限制。如果除了要考虑控制过程中系统的误差和所需的控制能量外，还要考虑控制系统的终端误差，这时性能指标在$\xi(t)=0$和$X(t)$是实数矢量的情况下，就应为：

$$J = X^T(T)SX(T) + \int_0^T [X^T(t)QX(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{5-2-5}$$

式中S是对称正定（或正半定）加权矩阵。

在随机情况下，一般的二次型性能指标为：

$$\bar{J} = E\{X^T(T)SX(T) + \int_0^T [X^T(t)QX(t) + u^T(t)Ru(t)]dt\} \tag{5-2-6}$$

在随机情况下，最佳估计性能指标是：

$$\bar{J} = E\{\tilde{X}^T(t)Q\tilde{X}(t)\} \tag{5-2-7}$$

上两式中E{·}是{·}的期望。式（5－2－7）是求对X（t）的最佳估计时用的，X（t）一般是矢量$\tilde{X}$（t）是X（t）的真正值和X（t）的估计值之差，即估计误差，都是随机变量。

5－2－3 最佳泸波原理

一、维纳最佳泸波原理

维纳最佳泸波问题的提法是：

设S（t）是随时间变化的信号，它是轨入系统的有用信号；而设$g(t) = S(t) + n(t)$为总的系统轨入信号（$n(t)$为干扰信号），则在理想条件下，我们需要设计一个系统，使其轨出为S（t+T）

上述维纳泸波问题，当$T=0$，这时称为泸波问题；当$n(t)=0$，而且$T>0$，这时称为予测问题；当$n(t)\neq 0$，而且$T>0$，这时称为泸波、予测问题。

维纳泸波问题是建立在以下四个假定的基础之上的：

(1)信号 $S(t)$ 和噪音 $n(t)$ 均为平稳随机过程，并且它们之间存在着一些不同的性质；

(2)系统是线性系统；并且是常系数系统；

(3)系统是物理上可实现的，即其脉冲过渡函数在 $t<0$ 时必需为零，也就是 $k(\tau)=0$，当 $\tau<0$；

(4)最佳准则，是实际轨出与理想轨出之间的偏差的均方值最小。

以上假定就确定了维纳泸波器的应用范围。由于维纳泸波问题所研究的信号与噪音都是标量形式、因此只适用于单轨入单轨出系统的设计。这样，维纳泸波问题的求解，可以用经典理论解决。

根据上述假定，要找到维纳泸波问题的解，首先要找到物理系统的误差表示式。当物理系统的特性用脉冲过渡函数来描述时，系统轨出误差的表示式为：

$$\epsilon(t)=S(t+T)-\int_0^\infty [S(t-\tau)+n(t-\tau)]k(\tau)d\tau \tag{5-2-8}$$

由此得到其均方误差为

$$\overline{\epsilon^2}=\Phi_{ss}(0)-2\int_0^\infty \Psi(T+\tau)k(\tau)d\tau$$

$$+\int_0^\infty k(\tau_1)d\tau_1\int_0^\infty k(\tau_2)\Phi(\tau_2-\tau_1)d\tau_2 \tag{5-2-9}$$

式中

$$\Psi(\tau)=\Phi_{ss}(\tau)+\Phi_{ns}(\tau)$$

$$\Phi(\tau)=\Phi_{ss}(\tau)+\Phi_{ns}(\tau)+\Phi_{sn}(\tau)+\Phi_{nn}(\tau)$$

当物理系统的特性用频率特性来描述时，可找到系统的均方误差的表示式为：

$$\overline{\epsilon^2}=\int_0^\infty\{|Y(j\omega)|^2G_{nn}(\omega)+[Y(j\omega)-e^{j\omega T}]Y(-j\omega)G_{ns}(\omega)$$

$$+[Y(-j\omega)-e^{-j\omega T}]Y(j\omega)G_{sn}(\omega)$$

$$+|Y(j\omega)-e^{j\omega T}|^2G_{ss}(\omega)\}d\omega \qquad (5-2-10)$$

式中

$Y(j\omega)$ —— 系统的频率特性；

$G_{nn}(\omega)$ —— 噪音的自频谱密度；

$G_{ss}(\omega)$ —— 信号的自频谱密度；

$G_{ns}(\omega)$ —— 噪音与信号的互频谱密度；

$G_{sn}(\omega)$ —— 信号与噪音的互频谱密度；

$e^{j\omega T}$ 理想予测特性。

这样，求（５－２－９）式和（５－２－10）式的极小值，便可得到所要求的最佳系统的脉冲过渡函数和频率特性。

由方程式（５－２－９），采用变分法原理可得到$\overline{\epsilon^2}$达到最小时，$k(\tau)$所需满足的充要条件为：

$$\Psi(t+T)=\int_0^\infty k(\tau)\Phi(t-\tau)d\tau \qquad 当\ t\geq 0 \quad (5-2-11)$$

方程式（５－２－11），称为维纳——何甫方程。在维纳推得了上述方程（５－２－11）之后，所谓维纳最佳泸波问题，就是怎样由方程（５－２－11）求得系统的最佳脉冲过渡函数的问题。

在维纳以后，有人采用复变函数的方法，求得了维纳——何甫方程

的解。这时，物理上可实现的最佳频率特性的表示式为：

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi H_1(\omega)}\int_0^{\infty}e^{-j\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty}H_3(u)e^{ju(t+T)}du$$

(5—2—12)

式中

$G_1(\omega)=H_1(\omega)、H_2(\omega)$　（$H_1(\omega)$在复数平面的下半平面是解析、有界的，并且无零点和极点；$H_2(\omega)$在复数平面的上半平面是解析、有界的，并且没有零点和极点）。

$$G_1(\omega)=G_{ss}(\omega)+G_{sn}(\omega)+G_{ns}(\omega)+G_{nn}(\omega)\ ;$$

$$H_3(\omega)=\frac{\pi G_2(\omega)}{H_2(\omega)}\ ;$$

$$G_2(\omega)=G_{ss}(\omega)+G_{sn}(\omega)\ .$$

还有，保德——香农直接求（5－2－10）式的极值，找到了在物理上可实现的最佳传递函数为：

$$Y_4(S)=Y_1^{-1}(S)\cdot Y_3(S) \qquad (5—2—13)$$

式中

$$Y_3(S)=\int_0^{\infty}k_3(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$k_3(\tau)=\begin{cases}k_2(\tau) & \tau\geqq 0\\ 0 & \tau<0\end{cases}$$

$$k_2(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y_2(z\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$Y_2(S)=Y(S)\,Y_1(S)$$

$$Y(j\omega)=\frac{G_{ss}(\omega)+G_{ns}(\omega)}{G_{ss}(\omega)+G_{sn}(\omega)+G_{ns}(\omega)+G_{nn}(\omega)}\cdot e^{j\omega T}$$

$Y_1(S)$ —— 在白噪音作用下，形成$S(t)+n(t)$的形成滤波器

上述两种形式的在物理上可实现的最佳频率特性和最佳传递函数的详细推导，以及另外一些在特殊情况下的最佳传递函数的形式，可参考：

J. H. Laning, R. H. Battin 《Random Processes in Automatic Control》. 1956.（有中译本）。

根据前述四个假定所得到的维纳最佳滤波器有时也称为平稳过程的最佳线性最小二乘方滤波器。

综上所述，维纳滤波的特点是：

(1)由（5－2－10）式和（5－2－11）式求最佳滤波器的频率特性和传递函数时，需要详细地知道信号与噪音的统计特性：相关函数或频谱密度；

(2)在讨论整个最佳滤波问题时，我们只涉及到系统输入、输出之间的关系，而丝毫没有与系统内部的特性联系起来，因此，被设计出来的最佳滤波器的内部特性并不十分清楚，有时可能会出现一些予计不到的现象；

(3)在整个维纳问题的求解过程中，我们所取的积分限是无穷大，也就是说，我们要知道了系统输入作用的无限长历史后，才能知道其输出的无限长历史。因此，上述滤波器实际上是一个无限记忆滤波器；

(4)在本世纪四十到五十年代，由于控制系统的经典理论广泛采用频率法，因此滤波器的解也大都是频率域的形式。这种形式虽然比较简单，但是，它与系统的结构的联系并不十分清楚，因此，在求得了系统的最

佳传递函数后，要设计一个实际系统来实现它，仍是比较困难的；

(5)由方程式（5－2－13）求最佳传递函数的困难是由于要使系统必需是物理上可实现造成的；而用方成式（5－2－12）求最传递函数的困难在于频谱密度函数 $G_1(\omega)=G_{ss}(\omega)+G_{sn}(\omega)+G_{ns}(\omega)+G_{nn}(\omega)$ 的可分解性问题，但是，如果它们是有理函数的话，那显然是可分解的，并且，如果 $G_1(\omega)$ 是有理函数，那么 H_1 $H_1(\omega)$（因而也是 $H_2(\omega)$ 和 $H_3(\omega)$）只要观察一下 $G_1(\omega)$ 的极点与另点就可被求出，而当 $H_3(\omega)$ 也是有理函数的话，那它可分解成分项分式；

(6)维纳滤波器只适用于常系数单轨入单轨出的线性系统。

下面举一个例子，说明怎样用（5－2－13）式来设计最佳传递函数，从而结束对维纳滤波问题的叙述。

设轨入系统的信号 $S(t)$ 与噪音 $n(t)$ 是不相关的，并且有

$$G_{ss}(\omega)=\frac{6}{\pi}\frac{1}{\omega^2+9/4}\quad ;\quad G_{nn}(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}$$

求最佳滤波器传递函数。

显然可用（5－2－13）式求得一个予测器。由于

$$G_{ss}(\omega)+G_{nn}(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{4\cdot\omega^4+(17/4)\cdot\omega^2+33/2}{(\omega^2+9/4)(\omega^4+4)}$$

由此可得到

$$jY_1(j\omega)=\frac{2\sqrt{2}\,(\omega-c)(\omega+c^*)}{(\omega-b)(\omega-a)(\omega+a^*)}$$

式中

$a=1+j$ ； $b=j1.5$ ； $C=0.8658+j1.1318$ ，

（ $*$ 代表复共轭）

根据 $Y(j\omega)$ 的表示式可得到：

$$Y(j\omega)=\frac{3(\omega^4+4)}{4\omega^4+\frac{17}{4}\omega^2+\frac{33}{2}}e^{j\omega T}$$

因此有：

$$jY_2(j\omega)=\frac{3(\omega-a)(\omega-a^*)(\omega+a)(\omega+a^*)}{4(\omega-c)(\omega-c^*)(\omega+c)(\omega+c^*)}$$

$$\cdot e^{j\omega T}\cdot\frac{2\sqrt{2}(\omega-c)(\omega+c^*)}{(\omega-b)(\omega-a)(\omega+a^*)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{(\omega-a^*)(\omega+a)}{(\omega-b)(\omega-c^*)(\omega+c)}\cdot e^{j\omega T}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{A}{\omega-b}+\frac{B}{\omega-c^*}+\frac{C}{\omega+c}\right)e^{j\omega T}$$

式中A、B、C为待定常数。由上式根据 $k_2(\tau)$ 的表示式可直接求得 $k_2(\tau)$ 。但是，由于我们要求 $k_2(\tau)$ 是物理上可实现的，因此，上式中中只是一个项可用，而在计算 $k_2(\tau)$ 时可舍去带系数B和C的两项，从而得：

$$jk_2(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{Ae^{j\omega T}}{\omega-b}e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{3Aj}{\sqrt{2}}e^{-3(T+\tau)/2}\qquad \text{对}\ T+\tau>0$$

$$5-2-13$$

所以

$$Y_3(j\omega)=\int_0^\infty k_2(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau=\frac{1}{j}\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{A}{\omega-b}e^{-3T/2}$$

不难求出A为：

$$A=\frac{(b+a)(b-a^*)}{(b+c)(b-c^*)}=0.9445$$

因此得

$$Y_4(j\omega)=\frac{3}{4}\cdot A\cdot\frac{(\omega-a)(\omega+a^*)}{(\omega-c)(\omega+c^*)}e^{-3T/2}$$

$$=0.708\cdot\frac{\omega^2-2j\omega-2}{\omega^2-2.2636j\omega-2.0306}e^{-3T/2}$$

这样，最佳滤波予测器的传递函数为：

$$Y_4(S)=0.708\frac{S^2+2S+2}{S^2+2.2636S+2.0306}e^{-3T/2}$$

上面所以要较详细地讨论维纳滤波问题，一方面是因为以后不再讨论，另一方面是为了深入理解后面要详细讨论的卡尔曼滤波原理。

二、卡尔曼滤波原理

维纳滤波原理虽然在理论上解决了平稳随机过程的最优线性滤波问题，但是，由于它仅适用于单轨入单轨出的常系数线性系统的最佳滤波并且它是一种无限记忆滤波，不便于实时计算；所得结果的物理上的实现也相当困难，因此，由于现代复杂、高精度，非平稳系统最佳设计的需要，产生了所谓卡尔曼滤波原理。

卡尔曼最佳滤波问题的提法是：

设有离散随机线性系统模型

$$\begin{cases} X(k+1)=\Phi(k+1,k)X(k)+W(k+1) \\ Y(k)=C(k)X(k)+V(k) \end{cases} \tag{5-2-14}$$

并且已知

$$EW(k)=0 \quad , \quad COV[W(k)W(j)]=E[W(k)W^T(j)]=Q(k)\delta(k-j);$$

$$EV(k)=0 \quad , \quad COV[V(k)V(j)]=E[V(k)V^T(j)]=R(k)\delta(k-j);$$

$$COV[W(k)V(j)]=0 \quad ; \quad COV[X(0)W(k)]=0 \quad ;$$

$$COV[X(0)V(k)]=0 \quad ; \quad E[X(0)]=\overline{X}(0)=\mu_0 \quad ;$$

$$COV[X(0)X(0)]=Var[X(0)]=P(0)$$

在已经测得了$y_1, y_2, \cdots, y_k$ 的情况下，求使下列性能指标

$$\overline{J}=E\{[X(j)-\hat{X}(j|k)]^T[X(j)-\hat{X}(j|k)]\} \tag{5-2-15}$$

达到最小时的状态矢量$X(j)$的最佳估计$\hat{X}(j|k)$.

根据j与k的关系，我们分别把$j=k$时的最佳估计$\hat{X}(j|k)$称为滤波；$j=k$ 时的最佳估计$\hat{X}(j|k)$称为予测；$j<k$ 时的最佳估计$\hat{X}(j|k)$称为平滑.

上述卡尔曼滤波问题的假设是很清楚的：

(1)系统干扰和观察噪音是彼此不相关的白噪音序列，即当它们均是

高斯分布时，是彼此不相关的独立序列，它们可以是非平稳的；

(2)系统是多轨入多轨出的线性随机系统，由于它可以是时变系统，因此，随机状态矢量 $X(t)$ 可能是非平稳的；

(3)最佳滤波的准则是误差方差最小。

上述假设条件使卡尔曼滤波的应用范围要比维纳滤波的应用范围广得多，从理论上解决了现代系统的最佳滤波问题。

上述卡尔曼滤波问题在线性估计情况下的解是：

$$\hat{X}(k|k)=\wedge(k|k-1)+K(k)[Y(k)-C(k)\hat{X}(k|k-1)] \tag{5-2-16}$$

$$\hat{X}(k|k-1)=\Phi(k,k-1)\hat{X}(k-1|k-1) \tag{5-2-17}$$

$$K(k)=P(k|k-1)C^T(k)[C(k)P(k|k-1)C^T(k)+R(k)]^{-1} \tag{5-2-18}$$

$$P(k|k-1)=\Phi(k,k-1)P(k-1|k-1)\Phi^T(k,k-1)+Q(k-1) \tag{5-2-19}$$

$$P(k|k)=[I-K(k)C(k)]P(k|k-1) \tag{5-2-20}$$

式中

$\hat{X}(k|k)$　　$t=t_k$ 时刻系统状态矢量的最佳估计；

$\hat{X}(k|k-1)$　　$t=t_k$ 时刻系统状态矢量的最佳予测；

$K(k)$　　$t=t_k$ 时刻的最佳滤波器的增益矩阵；

$P(k|k-1)=COV\{[X(k)-\hat{X}(k|k-1)][X(k)-\hat{X}(k|k-1)]\}$；

$P(k|k)=COV\{[X(k)-\hat{X}(k|k)][X(k)-\hat{X}(k|k)]\}$。

方程（5－2－16）～（5－2－20）称为卡尔曼滤波器的递推方程组，其详细的数学推导，将在第六章内讨论。

由卡尔曼滤波器的递推方程组可知：

(1)由于滤波方程是递推形式，因此求解时不用贮存大量数据，大大减小了计算机的存贮量，便于实时计算，与维纳滤波相比，这是它突出的优点；

(2)它适用于多轨入多轨出的时变系统的最佳滤波，这是维纳滤波所无能为力的；

(3)在滤波方程的解算过程中，同时得到了滤波器精度（或性能）的度量 $P(k|k)$。并且 $P(k|k)$ 自成封闭方程形式，它可予先离线算出。

由于卡尔曼滤波具有上述突出的优点，因此它在飞船的控制，舰船的导航与定位和许多工业系统的最佳控制中得到了广泛的应用。

上述卡尔曼滤波问题是离散系统的卡尔曼滤波问题。连续型卡尔曼滤波问题的提法是：

设有连续随机系统模型

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=A(t)X(t)+F(t)w(t) \\ Y(t)=C(t)X(t)+V(t) \end{cases} \tag{5-2-21}$$

并且已知

$$E\{w(t)\}=0, \quad COV\{w(t)w(\tau)\}=E\{w(t)w(\tau)^T\}=Q(t)\delta(t-\tau);$$

$$E\{V(t)\}=0, \quad COV\{V(t)V(\tau)\}=E\{V(t)V(\tau)^T\}=R(t)\delta(t-\tau);$$

$$\mathrm{COV}\{w(t)V(\tau)\}=0 \quad ; \mathrm{COV}\{X(0)w(t)\}=0 \quad ;$$

$$\mathrm{COV}\{X(0)V(t)\}=0 \quad ; \quad E\{X(0)\}=\overline{X}(0)=\mu_0 \quad ;$$

$$\mathrm{COV}\{X(0)X(0)\}=Var\{X(0)\}=P(0)$$

在已测得了$Y(\tau)$，$(t_0 \leqq \tau \leqq t)$的情况下，求使下列性能指标

$$\overline{J}=E\{\widetilde{X}(t)^T\widetilde{X}(t)\}$$

$$=E\{[X(t)-\hat{X}(t|t)]^T[X(t)-\hat{X}(t|t)]\} \qquad (5\text{—}2\text{—}22)$$

达到最小时的状态矢量$X(t)$的最佳估计$\hat{X}(t|t)$。

此连续型随机线性系统的卡尔曼滤波方程是：

$$\dot{\hat{X}}(t|t)=A(t)\hat{X}(t|t)+K(t)[Y(t)-C(t)\hat{X}(t|t)] \qquad (5\text{—}2\text{—}23)$$

$$K(t)=P(t|t)C^T(t)R^{-1}(t) \qquad (5\text{—}2\text{—}24)$$

$$\dot{P}(t|t)=A(t)P(t|t)+P(t|t)$$

$$-P(t|t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t|t)$$

$$+F(t)Q(t)F^T(t) \qquad (5\text{—}2\text{—}25)$$

$$P(0|0)=P(0) \qquad (5\text{—}2\text{—}26)$$

$$\hat{X}(0|0)=E\{X(0)\}=\overline{X}(0)=\mu_0 \qquad (5\text{—}2\text{—}27)$$

式中

$$P(t|t)=\mathrm{COV}[\widetilde{X}(t)\widetilde{X}(t)]=E[\widetilde{X}(t)X^T(t)]$$

$$=E[(X(t)-\hat{X}(t|t))(X(t)-\hat{X}(t|t))^T]$$

上述连续型卡尔曼滤波方程的详细推导，也将在第六章内讨论。

5－2－4　最佳控制原理

一、确定性系统最佳控制原理

对于连续线性系统，确定性最佳控制问题的提法是：

设有连续线性系统模型

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)u(t) \\ Y(t)=C(t)X(t) \end{cases} \qquad (5-2-28)$$

求使下列二次型性能指标

$$J=X^{T}(T)S(T)+\int_{t_0}^{T}\left[X^{T}(t)Q(t)+u^{T}(t)R(t)u(t)\right]dt \qquad (5-2-29)$$

达到最小的控制矢量 $u^{*}(t)$，$t\in[t_0,T]$

这个问题称为线性、二次型问题。可用极大值原理，动态规划等方法来解。求得的解是反馈控制形式：

$$u^{*}(t)=-\Lambda(t)X(t) \qquad (5-2-30)$$

$$\Lambda(t)=R^{-1}(t)B(t)P(t) \qquad (5-2-31)$$

$$\dot{P}(t)=-P(t)A(t)-A^{T}(t)P(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)-Q(t) \qquad (5-2-33)$$

$$P(T)=S(T) \qquad (5-2-33)$$

对于离散线性系统，确定性最佳控制问题的提法是：

设有线性、离散系统模型

$$\begin{cases} X(k+1)=\Phi(k+1,k)X(k)+H(k)u(k) \\ Y(k)=C(k)X(k) \end{cases} \qquad (5-2-34)$$

求使下列二次型性能指标

$$J_N=\sum_{j=1}^{N}\left(X^T(j)Q(j)X(j)\right.$$

$$\left.+u^T(j-1)R(j-1)u(j-1)\right) \qquad (5-2-35)$$

达到最小的控制矢量 $u^*(j-1)$，$j=1，2，\ldots，N$。

这个问题属于离散的线性、二次型问题。二次型性能指标（5－2－35）是（5－2－29）式的离散形式。其求解的方法很多，一种比较常用的方法是从最后一步求起，逐步倒退，可求得第 k 步的最佳控制矢量 $u^*(N-k-1)$ 的表示式为：

$$u^*(N-k-1)=-\Lambda(N-k)\Phi(N-k,N-k-1)X(N-k-1)$$

$$(k=0，1，2，\ldots，N-1) \qquad (5-2-36)$$

$$\Lambda(N-k)=\left[H^T(N-k-1)\Pi'(N-k)H(N-k-1)\right.$$

$$\left.+R(N-k-1)\right]^{-1}H^T(N-k-1)\Pi'(N-k)$$

$$(5-2-37)$$

$$\Pi'(N-k)=\Phi^T(N-k+1,N-k)\Pi(N-k+1)\Phi(N-k+1,N-k)$$

$$+Q(N-k) \qquad (5-2-38)$$

$$\Pi(N-k)=\Pi'(N-k)-\Pi'(N-k)H(N-k-1)\Lambda(N-k)$$

$$(5-2-39)$$

$$\Pi'(N)=Q(N), \quad (\text{即} \quad \Pi(N+1)=0) \qquad (5-2-40)$$

此时性能指标的最小值最后为

$$J_N^*=X^T(0)\Phi^T(1,0)\Pi(1)\Phi(1,0)X(0) \qquad (5-2-41)$$

二、随机性系统最佳控制原理

对于线性、连续、随机系统的最佳控制问题的提法是：

设有线性、连续、随机系统的数学模型

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)u(t)+F(t)w(t)\\ Y(t)=C(t)X(t)+V(t)\end{cases} \qquad (5-2-42)$$

在已测得了$Y(\sigma)$（$0\leqq\sigma\leqq t$）的条件下，求使二次型性能指标

$$\begin{aligned}\overline{J}&=E\{J\,|\,Y(\sigma);0\leqq\sigma\leqq t\}\\ &=E\{[X^T(T)S(T)X(T)+\int_0^T(X^T(t)Q(t)X(t)\\ &\quad+u^T(t)R(t)u(t))dt]\,|\,Y(\sigma);0\leqq\sigma\leqq t\}\end{aligned}$$

$$(5-2-43)$$

达到最小的控制矢量$u^*(t)$。在系统噪音$w(t)$和观察噪音$V(t)$均是高斯白噪音的情况下，这个问题称为高斯·线性·二次型问题。可求得这个问题的解为

$$u^*(t)=-\Lambda(t)\hat{X}(t) \qquad (5-2-44)$$

式中$\Lambda(t)$的形式同（5－2－31）式，$\hat{X}(t)$是状态矢量$X(t)$的最佳估计，它由相应于方程（5－2－42）的连续型卡尔曼滤波方程求得。

对于离散型线性随机系统的最佳控制问题的提法是：

设有离散线性随机系统的数学模型

$$\begin{cases} X(k+1)=\Phi(k+1,k)+H(k)u(k)+W(t) \\ Y(k)=C(k)X(k)+V(k) \end{cases} \qquad (5-2-45)$$

在已经测得了 $Y(0)$，$Y(1)$，…，$Y(N)$ 的情况下，求使下列二次型性能指标

$$\bar{J}=E\{\sum_{j=1}^{N}[X^T(j)Q(j)X(j)+u^T(j-1)R(j-1)u(j-1)]\} \qquad (5-2-46)$$

达到极小的控制矢量 $u^*(0)$，$u^*(1)$，…，$u^*(N-1)$。

在系统噪音和观察噪音是高斯白噪音序列的情况下，这个问题是离散型高斯、线性、二次型问题。而性能指标（5－2－46）是连续型二次型性能指标（5－2－43）的离散形式。此问题的解法很多，一种比较简单的方法是，从最后一步开始，逐步倒退可求得第 k 步的最佳控制矢量 $u^*(N-k-1)$ 为：

$$u^*(N-k-1)=-\Lambda(N-k)\Phi(N-k,N-k-1)\hat{X}(N-k-1) \qquad (5-2-47)$$

式中 $\Lambda(N-k-1)$ 由式（5－2－37）、（5－2－38）、（5－2－39）和（5－2－40）求得，$\hat{X}(N-k-1)$ 的最佳估计，它由相应于方程（5－2－45）的离散型卡尔曼滤波方程求得。

上述各种类型系统最佳控制问题解的推导，将在以后详细讨论，故这里不再推导。

三、随机线性系统最佳控制问题的分解原理

由上述随机线性系统的最佳控制问题及其解的形式，可以得到下述重要分解原理：

由（5－2－42）和（5－2－43）式或（5－3－45）和（5－2－46）式所描述的一个随机线性系统的最佳控制问题，在系统干扰和观察噪音是互不相关的高斯白噪音的情况下，可以分解为一个随机线性系统的状态矢量的最佳估计（卡尔曼泸波）问题和一个确定性线性系统的最佳控制问题。

上述分解原理意味着：一个高斯、线性、二次型最佳控制问题可以分解为一个线性、二次型最佳控制问题和一个线性、高斯最佳估计（卡尔曼泸波）问题。其物理意义，就是一个随机线性系统的最佳控制器由一个状态矢量的最佳估计器和一个确定性最佳线性控制器组成。有时我们也说，状态矢量的最佳估计器和确定性线性最佳控制器组成了随机最佳线性系统的新型校正装置。

有时也将上述分解原理称为确定性等效原理，因为在随机线性系统的最佳控制器的设计中，只要将 $\hat{X}(t)$ 用 $X(t)$ 来代替，就可等效于一个确定性线性系统的最佳控制问题。

上述分解原理，是随机线性系统的最佳控制问题中最重要的原理，它可大大简化系统的最佳设计。