Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 8

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1. Zeige, dass die folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke allgemeingültig sind.

(1)
$$\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z) .$$

(2)
$$(\forall x \alpha) \rightarrow \alpha$$
(wobei α ein Ausdruck ist).

(3)
$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \rightarrow \beta ,$$
wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Gruppenaxiome sind und
$$\beta := \forall z (\forall x (zx = x \wedge xz = x) \rightarrow z = e)$$
ist.

Aufgabe 8.2. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet und $f \in S$ ein n-stelliges Funktionssymbol. Zeige, dass der Ausdruck
$$\exists y \, ((f x_1 \ldots x_n = y) \wedge \forall z \, ((f x_1 \ldots x_n = z) \rightarrow y = z))$$
allgemeingültig ist.

Aufgabe 8.3. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet und $f \in S$ ein 2-stelliges Funktionssymbol. Zeige, dass der Ausdruck
$$(\forall x \forall y \forall z (ffxyz = fxfyz)) \rightarrow (\forall x \forall y \forall z \forall w (fffxyzw = fxfyfzw))$$
allgemeingültig ist.

Aufgabe 8.4. Es seien $p_1, \ldots, p_n$ Aussagenvariablen und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ prädikatenlogische Ausdrücke. Zeige, dass man, wenn man in einer allgemeingültigen aussagenlogischen Aussage α, in dem keine weiteren Aussagenvariablen vorkommen, jedes Vorkommen von p_i durch β_i ersetzt, einen allgemeingültigen prädikatenlogischen Ausdruck erhält.

AUFGABE 8.5. Formuliere ein Axiomensystem für das Konzept Äquivalenzrelation in einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe.

AUFGABE 8.6. Axiomatisiere den Körperbegriff in einer geeigneten Sprache erster Stufe.

Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
  (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
  (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
  (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
  (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
(2) Axiome der Multiplikation
  (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
  (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
  (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

AUFGABE 8.7. Axiomatisiere den Begriff eines angeordneten Körpers in einer geeigneten Sprache erster Stufe.

Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften

(1) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$),
(2) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$),

erfüllt.

AUFGABE 8.8. Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper. Zeige

$$\mathbb{R} \vDash \forall x \forall y \left(x \geq y \leftrightarrow \exists z \left(x - y = z^2 \right) \right)$$

und

$$\mathbb{Q} \vDash \neg \left(\forall x \forall y \left(x \geq y \leftrightarrow \exists z (x - y = z^2) \right) \right) .$$

Über den reellen Zahlen kann man also das Symbol $\geq$ mit anderen Symbolen ausdrücken.

Aufgabe 8.9. Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\} \cup V$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper und f ein einstelliges Funktionssymbol. Formuliere über $S' = S \cup \{f\}$ folgende Eigenschaften.

(1) Die Stetigkeit von f.
(2) Die gleichmäßige Stetigkeit von f.
(3) Die Differenzierbarkeit von f.

Gesucht ist also ein Ausdruck α aus $L^{S'}$ mit der Eigenschaft, dass α in einer Interpretation von S' (gegeben durch einen angeordneten Körper K und eine Funktion $f\colon K \to K$) genau dann gilt, wenn f stetig ist.

Aufgabe 8.10. Zeige, dass die Polynomfunktionen in einer Variablen über einem angeordneten Körper stetig sind. Formuliere diese Aussage über dem Symbolalphabet $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ für Polynome eines festes Grades.

Aufgabe 8.11. Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\} \cup V$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper und f ein einstelliges Funktionssymbol. Formuliere über $S' = S \cup \{f\}$ die Aussage des Zwischenwertsatzes.

Aufgabe 8.12. Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\} \cup V$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper. Formuliere über S die Aussage des Zwischenwertsatzes für Polynome vom Grad d.

In welchem Zusammenhang stehen die beiden vorstehenden Formulierungen?

Aufgabe 8.13. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Gruppenaxiome und

$$\alpha := \forall x(\forall y(\forall z(\mu yx = e \wedge \mu xy = e \wedge \mu zx = e \wedge \mu xz = e \rightarrow y = z))),$$

also die Aussage, dass das inverse Element eindeutig bestimmt ist. Zeige, dass α aus keiner echten Teilmenge $\Gamma \subset \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ folgt.

Aufgabe 8.14. Zeige, dass der prädikatenlogische Ausdruck

$$\exists x(\forall y(x = y))$$

erfüllbar ist.

Aufgabe 8.15. Es sei Γ eine Ausdrucksmenge und α ein Ausdruck in einer Sprache erster Stufe. Zeige, dass $\Gamma \vDash \alpha$ genau dann gilt, wenn $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ nicht erfüllbar ist.

Aufgabe 8.16.*

Formuliere die Injektivität für eine Abbildung

$$f\colon D \longrightarrow Z$$

prädikatenlogisch mit Hilfe der Verwendung von Sorten.

Aufgabe 8.17. Formalisiere mit dem Symbolalphabet $S = \{f, g\} \cup V$, wobei f, g einstellige Funktionssymbole sind, die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von injektiven Abbildungen zwischen Mengen wieder injektiv ist.

Häufig sind in mathematische Strukturen gewisse Teilmengen wichtig, die Bezug auf die umgebende Struktur nehmen. Eine solche Teilmenge wird prädikatenlogisch durch eine einstellige Relation mit zusätzlichen Eigenschaften wiedergegeben.

Aufgabe 8.18.*

Formalisiere prädikatenlogisch mit einem geeigneten Symbolalphabet S, dass ein Untervektorraum in einem Vektorraum über einem Körper vorliegt.

Aufgabe 8.19. Formalisiere prädikatenlogisch mit einem geeigneten Symbolalphabet S den Sachverhalt, dass der Durchschnitt von zwei Untervektorräumen in einem Vektorraum über einem Körper wieder ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 8.20. Formalisiere prädikatenlogisch mit einem geeigneten Symbolalphabet S, dass ein Ideal in einem kommutativen Ring vorliegt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.21. (2 Punkte)

Formalisiere in der prädikatenlogischen Sprache, dass die Hintereinanderschaltung von surjektiven Abbildungen zwischen Mengen wieder surjektiv ist.

Aufgabe 8.22. (2 Punkte)

Welche der folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke sind allgemeingültig (x, y seien Variablen)?

(1) $\forall x(\exists y(x = y))$,
(2) $\forall x(\forall y(x = y))$,

(3) $\exists x(\forall y(x = y))$,
(4) $\exists x(\exists y(x = y))$.

Aufgabe 8.23. (5 (2+2+1) Punkte)

Es seien $\alpha, \beta \in L^S$.

a) Zeige, dass
$$(\exists x\,(\alpha \to \beta)) \to (\exists x\alpha \to \exists x\beta)$$
nicht allgemeingültig ist.

b) Zeige, dass
$$(\exists x\alpha \to \exists x\beta) \to (\exists x\,(\alpha \to \beta))$$
allgemeingültig ist.

c) Zeige, dass
$$(\exists x\alpha \to \exists x\beta) \to (\exists x\,(\alpha \to \beta))$$
nicht allgemeingültig wäre, wenn man auch leere Grundmengen zulassen würde.

Aufgabe 8.24. (3 Punkte)

Es sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Bestimme, welche der folgenden Ausdrücke untereinander äquivalent[1] sind.

(1) $\forall x \exists y(fx = y)$,
(2) $\forall x \exists x(fx = x)$,
(3) $\exists x(fx = x)$.

Aufgabe 8.25. (5 Punkte)

Es seien u, x, y, z Variablen und f, g einstellige Funktionssymbole. Bestimme, welche der folgenden Ausdrücke untereinander äquivalent sind.

a)

(1) $\forall x \forall y((fx = fy \to x = y) \wedge (gx = gy \to x = y))$,
(2) $\forall x \forall y(fx = fy \to x = y) \wedge \forall x \forall y(gx = gy \to x = y)$,
(3) $\forall x \forall y \forall u \forall z((fx = fy \to x = y) \wedge (gu = gz \to u = z))$.

b)

(1) $\forall x \exists y(fy = x) \wedge \forall x \exists y(gy = x)$,
(2) $\forall x \exists y\,(fy = x \wedge gy = x)$,
(3) $\forall x \exists y \forall u \exists z(fy = x \wedge gz = u)$,
(4) $\forall x \forall u \exists y \exists z(fy = x \wedge gz = u)$.

[1] Zwei Ausdrücke α und β heißen äquivalent, wenn $\alpha \leftrightarrow \beta$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 8.26. (2 Punkte)

Zeige, dass die Kommutativität der Addition aus den übrigen Körperaxiomen folgt.

Tipp: Zeige zuerst, dass $0x = 0$ ist.

Aufgabe 8.27. (2 Punkte)

Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\} \cup V$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper und f, g zwei einstellige Funktionssymbole. Formuliere über $S' = S \cup \{f, g\}$ die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von zwei stetigen Funktionen wieder stetig ist.

Aufgabe 8.28. (3 Punkte)

Formuliere ein prädikatenlogisches Axiomensystem für einen metrischen Raum über einem angeordneten Körper mit Hilfe von Sortenprädikaten.

Aufgabe 8.29. (3 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Formalisiere prädikatenlogisch mit einem geeigneten Symbolalphabet S den Sachverhalt, dass k Elemente eines kommutativen Ringes ein gegebenes Ideal erzeugen.