電氣工學講義第三卷

交流理論

社團法人 電氣協會中國支部編纂

電氣工學講義 第三卷

交流理論

社團法人 電氣協會中國支部編纂

序

電氣の應用はその出發點を直流に置きたれ共、其の後之れが電燈電力に利用せらるゝに及び電力の長距離輸送の必要を生ずるに到れり。然るに電力の長距離輸送は多大の電力損失と電壓降下とを伴ふを以つて高電壓送電の利益が痛感せられ、是がため電壓を容易に變成し得らるゝ交流が實用として使用せらるゝに到つた。然れ共此の交流は直流に比較してその理論に複雜したるものあり、直流の如く簡單に取扱ふを得ず。古來幾多の學者が是が理論に付、種々なる解法を考究し發表したる所にして、今日に於ては如何なる現象と雖容易に之れを解決し得るの域に達したり。特に米國のスタインメッツ博士の發見したる記號式ベクター法は交流回路の計算に一大紀元を劃したるものにして今日交流回路の計算が何人にも容易に行ひ得るに到りたるは實に此の方法の發見によるものと云ふべきなり。

抑も交流回路の理論は今日電氣關係の技術者に缺くべからざるものとなり、測定關係は勿論の事、電氣機械に送電に配電にあらゆる方面に渉り是が知識は必須のものとなりたり。然れ共此の理論の研究は比較的困難にしてその教科書の如きも平易に解說し廉價なるもの尠少なり。當支部は此の缺陷を除く目的を以つて價

額低廉にして詳細に解説したる獨習書の刊行を斷行し、電氣技術の知識を一般電氣事業從事員に普及せしめんとして本書を上梓せり。その解く所頗る平易にして然も如何なる回路の計算又は理論と雖本書に述ぶる所を理解する事により直ちに以つて應用せらるゝ樣編纂したり。

今や我國は長期聖戰を目標とし全國民擧つて是が目的を貫徹せざるべからざるの秋、我國生產力の擴充は要中の要事なり。然るに生產擴充の根源は電力にあり。かゝるが故に是が管理も亦國策として國家管理に移されたり。從つて電氣事業に從事する人々はその使命の重且大なるの所以を痛感し、益々勉學に勵み力を斯業の興隆に效し延いては國家產業の發展に貢獻せざるべからず。

希くは本書により交流の理論を完全に把握し以つて是が知識を實地に活用せられん事を。

昭和十四年三月十四日

社團法人電氣協會中國支部

支部長　鈴　川　貫　一

交流理論目次

第一章　交流の波形

第二章　交流の回路

第三章 ベクターの概念

第四章 交流回路とベクター

第五章 レゾナンス

第六章 ベクターの應用

第七章 三相交流とベクター

第八章 記號式ベクター

交流理論

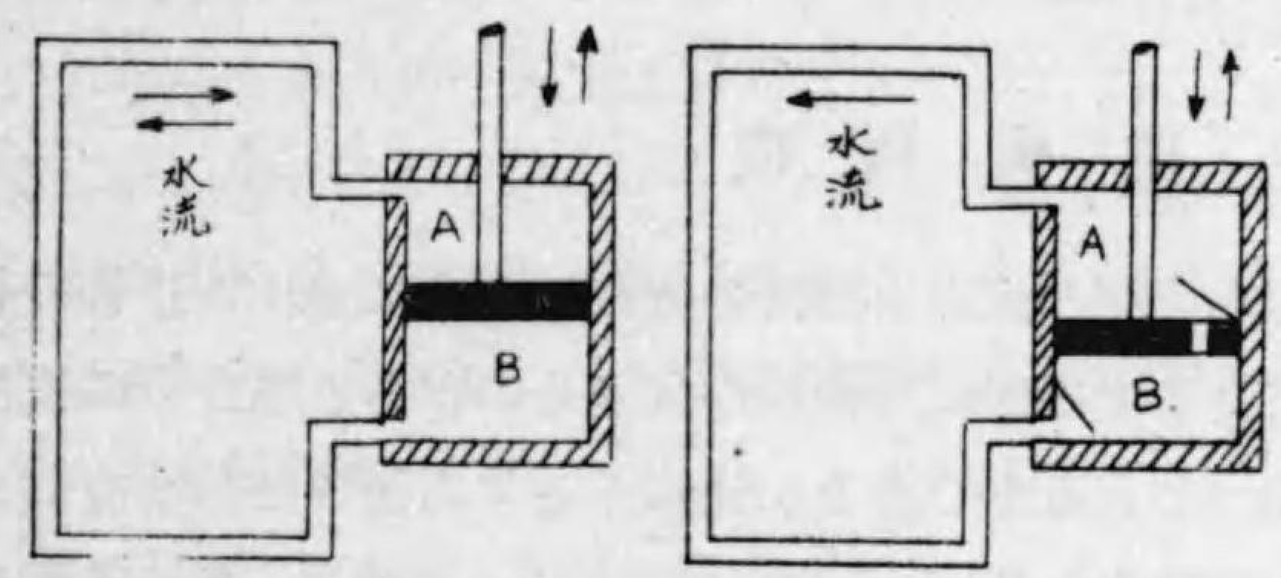
第一章 交流の波形

1. 交流電壓と電流

交流 (Aeternating current オルターネーヤング カーレント) と云ふのは電流の方向が一定の周期を以つて變化するもので流れる電流の大きさも時々變化するものである。

第 1 圖

例へば第1圖に於て初めはO點より少しづゝA の方向に流れ次第にその大きさを增して遂にA 點に達する。今度はその大きさが次第に小さくなつて遂にO點に來り電流は流れない狀態を示す、更にその次にはBの方向に流れ出し遂にBの所まで流れて今度は逆にその大きさを減少しO點に歸つて再び流れなくなる。斯くの如く交流はその方向を一定の時間每に變化するもので左に流れたり右



甲　乙

第 2 圖

に流れたりして左右に往復するのである。第2圖は之を水流に例へて說明したもので第2圖甲は交流の狀態を示し圖の如くピストンを上下に動かすと水流の回路には矢で示すが如く左に流れたり右に流れたりする水流が通り その方向は常に變つて居る。第2圖乙は之を直流に例へたもので是にはピストンに水の流れ得る穴が開けられ水の通路には二つの瓣が置かれて居る。ピストンを上下に動かした時此の瓣の作用により水はAよりパイプを通つてBに入りBよりAに入つて一定の方向にのみ循環するもので**直流**は是に似た作用によつて同一方向に流されるのである。交流は常に方向を變化するが、どんな時間毎にその方向を變へるかと云へば現在一般に使用されて居るのは1秒間に50回往復するものと60回往復するものとあつて是を夫々50サイクル及び60サイクルと呼んで居り1秒間に往復する數を**周波數**(Frequency　フレクエンシー)と呼んで居る。我々が日常使用する交流は今の通り僅か50サイクルか60サイクルかに過ぎないけれ共交流には未だ未だ高い周波數を有するものがあつて有線電話で聲や音を送るのは2000サイクル位を持ち無線電信電話になると數十萬サイクルから數百萬サイクルのものを使用して居る。

2. 位 相 角 度

交流と直流とが或る回路を流れる場合に流れる狀態の最も異る點はぐるぐる廻つた線輪の如きものがある場合等に電流の有様が違つて來る事である。此のぐるぐる廻つた線輪の如きものを**インダクタンス**(Inductance)と呼んで居る。交流電壓がインダクタンスの兩端にかけられると直流の場合と少し違つた狀態

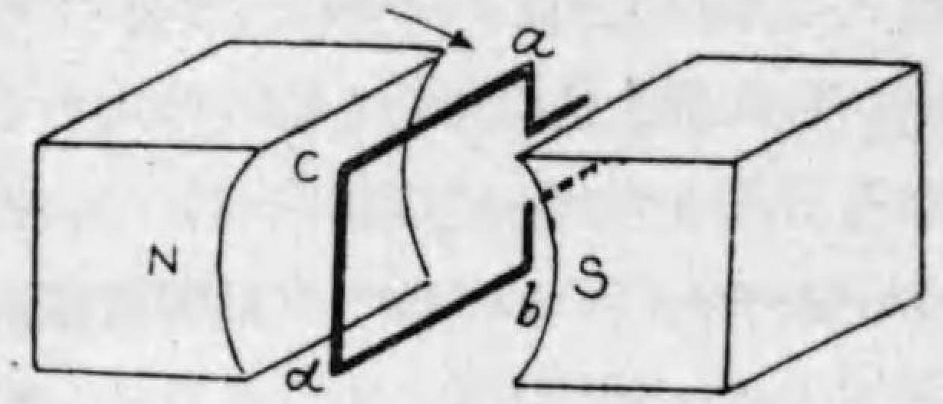
を生じる、直流をインダクタンスにかけたにした所で電流はインダクタンスの中にある抵抗で電壓を除した丈の電流しか流れないものでその抵抗が少ければその電流も大變大きなものとなつて來る。所が交流ではその有様が異り流れる電流がインダクタンス中の抵抗ばかりでなくインダクタンス自身に於ても制限せられるのである。從つてインダクタンスが少しの抵抗をも持つて居ない場合でもインダクタンスが抵抗と同じ作用をして電流の通過を拒むのである。又インダクタンスを電流が通過する場合に直流と異る點は電流が電壓より遲れる點であつて若し此のインダクタンスの中に抵抗が少しもなければ電流は電壓より90度即ち4分の1サイクル遲れるのである。

之と反對に今度は導體が切れて居る場所でその切れ目の面積が廣い様な所に電壓をかけた場合を考へて見る、直流では少しでも切れて居る場合には全然電流は流れないのであるが交流では少し位の切れ目は飛び越える事が出來るのであつて切れて居る場所の面積が廣ければ廣い程其處を通つて行く電流の大きさも大きな譯である。此の點も直流と交流との違ふ點であつて此の切れ目の様なものを**キャパシチー**(Capacitty)又は**靜電容量**と呼んで居る。交流がキャパシチーを通過する場合にはインダクタンスの場合と反對に電流が電壓よりも進んで來るものである、若し此の場合にキャパシチーばかりであれば電流の進みは90度と云ふ事になり云ひ換へれば4分の1サイクル電流の方が電壓よりも進むのである。此の電流が電壓より進んだり遲れたりする角度を**位相角**(Phase angle　フエーズ　アングル)と云ひ、電流が電壓より遲れる事を**ラッグ**(Lag)すると云ひ進む事を**リード**(Lead)すると云ふ。此の電流が進んだり遲れたり

又はインダクタンスによつて通過を拒まれたりキヤパシチーを飛び越えたりする事は計算を面倒にし直流のやうにオームの法則（Ohm's low オームス　ロー）で簡單に片づける事が出來ないのである。

3. 周期運動と其公式

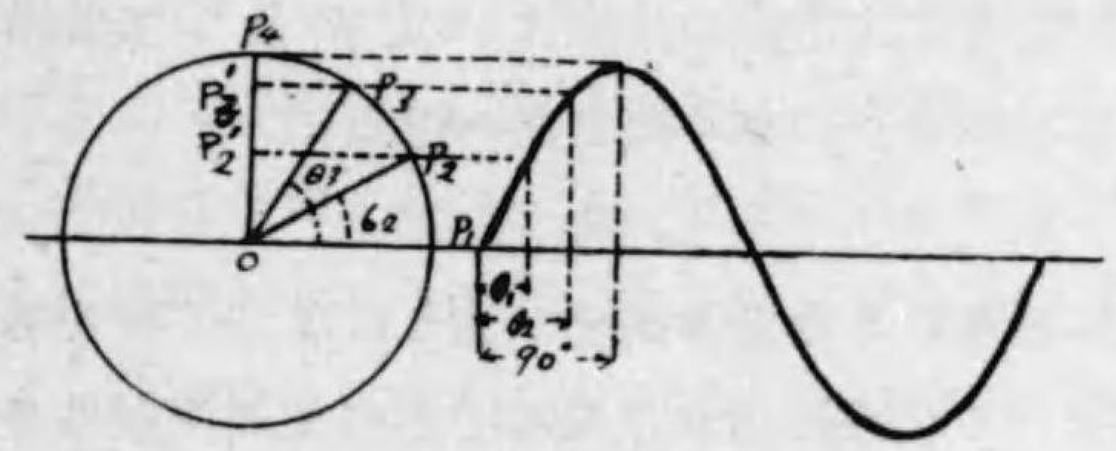
磁石の二極間に第3圖の如くａｂｃｄなる**線輪**（Coil コイル）を矢の方向に廻轉せしむるとする、圖の位置では殆んど磁束を切らないので餘り高い電壓も生じないのであるがコイルが廻轉するにつれて電壓は大きくなり此のコイルのａｃなる部分がＳ極の中央を通りｂｄなる部分がＮ極の中央を通る頃には切る磁束の數も多いのでコイルの中の電壓も最大になる。コイルが磁極の中央を離れるに從つてその電壓は減りａｃが圖のｂｄの位置に來りｂｄがａｃの位置に來た時には電壓は零となる。コイルが更に廻轉を續けるとその起電壓は反對となり段々その大きさを增して之が最大値となれば再び減少し始め元の第3圖の狀態となつて起電壓は又もや零となる。かくてコイルが磁極の中を何回も廻轉すれば電壓は一定の割合で增減し規則的にその方向を變へるのである。



第　3　圖

今此のコイルの中に起きた電壓を取出して見ると第4圖の如き交流電壓を得る事が出來る。此の第4圖の右側は此の電壓の增減を圖に引延べた有樣でコイルの位置が第3圖の如き位置にある場合には電壓の瞬時値は零で之を圖に示して見るとP_1の場

所に當るのである。次にコイルがθ_2丈廻轉したとすると電壓はP_1よりP_2の位置に來りその大きさはP'_2Oとなる。更にコイルがθ_3丈廻轉すると電壓はP_3の位置をとりその大きさはP'_3Oとなる。コイルが90度廻轉すると電壓はP_4の位置に來りその大きさはP_4Oとなるが此の價が電壓の最大値である。此の電壓が最大値に達すると次は段々とその電壓の瞬時値が小さくなり始め遂には零の値となる。更に此の點を過ぎると今度は逆の方向に瞬時値が增加を始め遂には逆の方向の最大値に達するが此の點を過ぎると再びその値を減少し始め1回轉して元のP_1なる場所に歸るのである。之を引き延べて見るとその右方の曲線のやうになるが此の曲線は橫に時間又は廻轉の角度を取つたもので右方に幾らでも續いて延びて行くのである。交流電壓や電流は此の波形を辿つて變化するが此のコイルが1回轉即ち360度廻轉する時間を**周期**（Period ピリオッド）と呼び第4圖の右の曲線全部を終る時間が1周期である。又1秒間にコイルが廻轉して磁石の兩極を通過する回數を**周波數**（Frequency フレクエンシー）と云ふ、即ち1秒間の間に完全な周期を終る回數であつてその數を云ひ表すに**サイクル**（Cycle）と云ふ言葉を使用する、周波數と周期との關係は次の式で表すことが出來る。



第　4　圖

$$T=\frac{1}{f}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但　Tは秒で表した周期、ｆは1秒間の周波數

又此の波の進む時に於て1周期の間に進むべき長さを**波長**（Wave length ウエーヴ レングス）と云ひ此の波長と周波數との關係は次の式で表すのである。

$$\lambda=\frac{v}{f}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但 λ は波長、v は電波の速度、f は周波數

此の場合に於ける電流又は電波の速度は一定であつて普通 3×10^8 米に取つて居るので次の如く書き換へ得る。

$$\lambda=\frac{3\times10^8}{f}\text{米}$$

周波數はコイルが廻轉する速度と磁極の數とによつて變るもので同じ速度で廻轉しても磁極が多くなればそれ丈周波數は多くなる。例へば第1圖の場合は磁極が二つであつたが之を四極にすれば同じ速度で廻轉しても周波數は倍となる、周波數は次の式から決定せられるのである。

$$f=\frac{p\times n}{120}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但 f は周波數、p は磁極の數、n は1分間の廻轉數

4. 正 弦 波 形

運動が連續的に第4圖の如き波形を形成して行く事を**單調運動**（Simple hamonic motion シンプル ハーモニツク モーション）と云ひ總て交流は此の運動を繼續して行くものである。第4圖の曲線は**正弦曲線**（Sine curve サイン カーブ）を形成して居る。普通交流の電壓電流は此のサイン曲線に近いもので又之に近い程望ましいものである。波形の最大値即ち第4圖の P_4O の如きを**最大値**（Maximum value マクシマムヴアリウ）と云ひ是が波形の**振幅**（Amplitude アンプリチユード）となるのである。或る瞬間に於ける電壓なり電流なりの値を求めやうと

思へば此の最大値にその角のサインを乘ずれば良いのである。即ち第4圖の P'_2O なる値を求めると次の如くになる。

$$P'_2O=P_4O\sin\theta_2$$

同樣にして P'_3O の値も求める事が出來るのである。一般に電壓の**瞬時値**を求めるには次の式で表す事が出來る。

$$e=E_{max}\sin\theta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

但 e は電壓の瞬時値、E_{max} は電壓の最大値、θ は角度。

然し此の角度 θ は計算に不便であるから一般に計算を行ふ場合には幾何的の角度で表はさないで角速度を使用するのである。角速度を以て角を表すにはその速度に時間を乘ずれば良い譯で從つて角度は次の式で表はされる。（θはシーターと讀む）

$$\theta=\omega t\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

但 θ は角度、ω は角速度、t は時間

此の**角速度**（Angular velocity アンギユラー ヴエロシチー）のω（オメガと讀む）なるものはインダクタンスやキヤパシチーに何時も出て來るもので交流理論では常に使用せられ、此のωは次の式によつて表はされるものである。此の式のπは3.1416なる價を持ち圓周率として知られて居るものである。

$$\omega=2\pi f\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

但 ω は角速度、f は周波數

θ は(5)式の如き値で表はされるのであるから(4)式を表はすに普通次の式を使用するのある。

$$e=E_{max}\sin\omega t\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

交流電壓をある回路に供給すると其處に電流が流れるが此の電流は電壓と同じやうにサイン曲線又は之に近い波形を成して進んで行くので或る瞬間の電流値は電壓と同樣に次の式を以て

表す事が出來る。

$$i = I_{max}\ \sin\ \omega t \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

但　i はある瞬間の電流、I_{max} は電流の最大値

ω は角速度、t は時間

此の電流の最大値は無論負荷の大小によつて定まるものである。

5. 電壓電流の平均値と最大値

直流では同じ量の電流が同じ方向に向つて流れるのであるからその大きさをそのまゝ測定すればよいが交流では絶えずその大きさと方向とを變化するからその最大値をそのまゝ電壓なり電流なりの値とは云ひ難いのである。交流も直流と同じく電燈を點じたり電動機を廻轉したりするのでその爲す仕事は全く直流と同じ效果をするものである。從つて交流に於ても直流と同じ效果をなす電壓又は電流の値を取つて交流の單位とすべきである。此の交流の電壓なり電流なりが直流の電壓なり電流なりと同じ效果をなし遂げる値を交流電流の**實效値**(Effective value エフエクテイヴ ヴアリユー）と云ふ。交流電壓及電流の實效値は夫々次の式を以て表はさる。

$$E_{eff} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

但　E_{eff} 及 I_{eff} は夫々電壓及電流の實效値

E_{max} 及 I_{max} は夫々電壓及電流の最大値

又交流に於ては**平均値**（Average value アヴアレーヂ ヴアリウ）と云ふのがあつて是は半分の周期に於ける平均の値である。此の平均値と云ふのは電壓や電流の效果には影響が無いので一般には必要のないものであるが今之を電壓の最大値と實效値とに比較して見ると次のやうになる。

$$E_{av} = \frac{2}{\pi} E_{max} \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$E_{eff} = 1.11\ E_{av} \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

但　E_{av} は電壓の平均値、E_{max} は電壓の最大値 E_{eff} は電壓の實效値

最後の(12)式に於ける 1.11なる値は正弦波の**波形率**（Form factor フオーム フアクター）と云ひ實效値と平均値との比を以て表はされるものである。電流の平均値も右の電壓の式と全く同樣でEの代りに I を置けば良いのである。若し電流が正弦波であればその波形率が 1.11なる事は勿論である。

交流の電壓や電流の單位を云ひ表すには皆實效値を使用するもので平均値や最大値を以て表す事は殆んどなく、電壓計の指示する電壓も電流計の表す電流も皆實效値である事は勿論である。故に電流計に 1 アンペア通つて居ても或る瞬間には少しも流れて居ない時もあるし最も大きな場合には 1.4 アンペアの電流が通つて居る瞬間もある。從つて電壓の方でも 100 ヴオルトの電壓がかゝつて居ても或る場合には電壓のない時がある代りに 140 ヴオルトの電壓がかゝつて居る瞬間もあるのである。

6. 例　　題

例 1. 或る放送局に於いては 353 米の波長によつて電波を放送し續けて居る、此の場合の電波の周波數は何サイクルなるか。

解　是は第 (2) 式を使用すれば簡單に出て來る、電流や電壓

の周波數も電波の周波數も別に變つたものでは無くそれに電波の走る速度も電流の速度も同じであるから次の如く見出さる。

$$\lambda=\frac{3\times10^8}{f}$$

$$f=\frac{3\times10^8}{353}=850000 \text{ サイクル}$$

即ち此の放送局の周波數は85萬サイクルである。

例 2. 50サイクルの發電機のコイルが完全にN, S二極の間の磁束を切る時間を求む。

解　(1)式を使用して次の如く答を得。

$$T=\frac{1}{50}\text{秒}$$

例 3. 周波數50サイクル、極數4箇の發電機は1分間何回轉の速度を以て運轉すれば良いか。

解　是も(3)式をそのまゝ使用すれば譯無く見出す事を得る。fに50をpに4を代入すれば次のやうになる。

$$50=\frac{4\times n}{120}$$

$$n=\frac{50\times120}{4}=1500$$

即ち1分間に1500回の速度を以て運轉すれば宜しい。

例 4. 50サイクルの周波數を有する交流の角速度を求む。

解　(6)式を使用すればよい。

$$\omega=2\pi\times50=314$$

例 5. 電壓の最大値100ヴォルトが零の位置から30度廻つた場合の瞬間に於ける電壓を求む。

解　これは(4)式を使用すれば直ちにその値を求める事が出

來るのである。

$$e=100\sin 30^\circ=100\times\frac{1}{2}$$

$$=50 \text{ ヴォルト}$$

例 6. 電流計で測つた電流20アンペアなる場合に此の電流の最大値は何程か又電壓計で測つた時100ヴォルトの電壓を得たとすれば此の電壓の最大値は何程か。

解　電流の最大値を見出すには(10)式を使用す。

$$20=\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{max}=\sqrt{2}\times20=28.28 \text{ アンペア}$$

電壓の最大値を見出すには(9)式を使用す。

$$100=\frac{E_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$E_{max}=\sqrt{2}\times100=141.4 \text{ ヴォルト}$$

第二章　交流の回路

1.　交流回路と抵抗

交流回路に抵抗のみを接續したる場合は之に流れる電流が電壓よりも遲れたり進んだりする樣な心配は更にないのである。此の場合には電流は全く電壓に依つて流れ此の二つは所謂**同相**(Same phase セーム フエース)にあるものである。電流と電壓とが同相にあるとすれば交流も直流と全く變りが無いと云ふ事になり計算も直流と同樣に計算する事が出來るのである。

つまり此の場合にはオームの法則をそのまゝ應用する事が出

來る。今電壓をV、電流をI、抵抗をRとすれば次の式を得。

$$I=\frac{V}{R} \quad 又は \quad V=IR \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

抵抗によつて生ずる**電壓降下**（Voltage drop ヴォルテーヂドロップ）等は此の式から直ちに求める事が出來るのである。交流回路に抵抗ばかりある場合には此の式によつて容易に解く事が出來るのであるが交流回路には多くの場合に抵抗の外にインダクタンスやキャパシチーがあるから此の簡單な式によつて計算する事は出來ない。

2. 自己誘導

電流の通る所には必ず磁束の生ずる事は當然である。又磁束の變化する所に導體があればその導體の中に起電壓を必ず誘起する事も誰しも知つて居る所である。磁束が變化する時に誘起せられる電壓は變化する磁束の量が多ければ多い程、又磁束の變化する割合、即ちその時間が速ければ速い程誘起する電壓も高いものである。今 $d\phi$ を變化する磁束の量、dt を磁束の變化する時とし、n をコイルの捲數とすれば起電力は次の式で表はさる。

$$e=\frac{d\phi}{dt}n\ 10^{-8}\ ヴォルト \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

今ソレノイドや其他のコイルが存在する時、之に電流が流れると其處に磁束が生ずる。即ち今迄無かつた所に急に磁束が生じたものであるから(14)式の如き大きさの逆起電力が生ずるのである。是が若し直流を流したのであると、流した瞬間丈磁束が變化するのであつて此の間丈けが逆の起電力を生ずるのである。所が一度電流が流れ出すとその後は電流は變化をせず從つて磁束も變化をしないから最早逆起電力は起きなくなり、電流が此の逆起電力のために抵抗せられる事がなくなるのである。

所が流れる電流が交流であれば絶えず電流の量とその方向とが變るのでコイルの中に生ずる磁束も變る事になる。磁束が絶えず變化すれば逆の起電力も絶えず生じて居て交流電流の通過を拒む事となるのである。つまり此の逆の起電力のために此のコイルはあたかも直流の場合に於ける抵抗と同じ樣に電壓降下を來し電流に對しても通過を拒むのであるが抵抗と異る所は此の中を電流が通つても中に抵抗さへなければ電力の損失を來す事はないと云ふ事と之を通過する場合に電流が電壓より遲れると云ふ事とである。

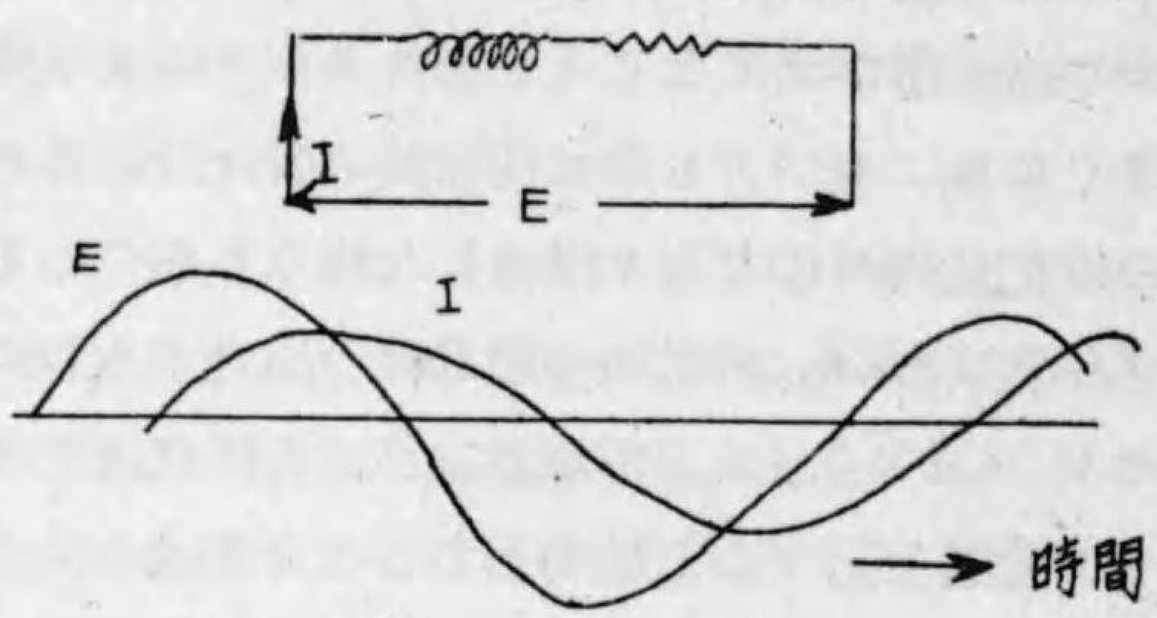
かう云ふ作用をするのはぐるぐる廻つて居るもの即ちソレノイドやコイル等が最も大きな影響を與へるもので是はコイルの中では磁束が出來易いからである。此のコイルはその捲數が多ければ多い程それに比例して此の作用が激しくなるものである。同じコイルにしても交流の周波數が多ければ多い程此の電流を拒む作用が大きくなるものでラヂオ電波の如き高周波になると少しの捲數を持つコイルに對してもその作用は甚大である。斯くの如き作用をするものを**インダクタンス**（Inductance）又は**自己誘導**と云つて居る。コイルの中に鐵心等を入れると磁束の通る事が樂になりインダクタンスによる此の作用が益々大きくなる。もつとも是は低周波の場合の話であつてラヂオ電波の如き高周波になると鐵心を入れてもちつともその作用が增す樣な事はない。送電線や配電線の出口や入口に**塞流線輪**（チョーク　コイル）と云ふのがあるが、これは雷や其他に原因するサーヂ電壓を防ぐのを目的とするので普通の周波數の電流は自由に此の間を通す事が出來るがサーヂ電壓の如き高周波は通す事

が出來なくなるのである。

インダクタンスは必ずしもぐるぐる廻つたコイルの樣なものに限つて存在するものではなく直線に張つてある電線も同じ作用をするものである。即ち1本の電線に電流が通ればその電線の廻りに磁束が生じ、此の生じた磁束のために電線の中に逆起電力を發生するものである。若し此の電線に流れる電流が交流であるとその大さとその方向とが常に變化し、之がために電線の廻りに絶えず磁束の變化を來たさしめる。此の變化が電線に誘起電壓を生ぜしめコイルを使用したと同じ結果を來さしめるものである。そのインダクタンスの大きさは長さが長い程大きなものであるがコイルやソレノイドに比較すると頗る小さなものである。

3. 電流の遲れ

インダクタンスの中を電流が流れるとその電流は電壓より遲れて所謂電壓と電流との間に**相差**を生ずると云ふ事は既に述べた通りである。インダクタンスが少しの抵抗も持たず又その中に於て起きる渦電流と云ふものを考へなかつたならば此のインダクタンスに流れる電流は電壓から完全に90度遲れるものである。所が普通はインダクタンスばかりで無く抵抗が直列に結ばれて居る事もあるし、インダクタンスを形成し



第　5　圖

て居るコイル自身の中にも抵抗もあれば又渦電流による影響もあるので電流が電壓に完全に90度遲れる樣な事は無いが90度近く遲れると云ふ事はあり得るのである。電流が電壓に遲れる角度はインダクタンスと抵抗との割合によつて異るものであつてインダクタンスの方が大きければ大きい程電流の遲れる角度は大きくなるものである。第5圖の上方はインダクタンスと抗抵とが直列に接續されて居る場合を示したもので之にかゝる電壓をＥ、電流をＩとすればＩとＥとの關係はその下の圖に示す曲線の樣になる。即ち電壓Ｅの方が電流Ｉよりも進んで居る。此の角度の事を位相角と呼ぶ事も既に述べた通りである。

4. インダクタンスによる電壓降下

インダクタンスは抵抗と同じ樣に電流の通過を阻止せんとする作用を持ち、之に電流が流れると電壓降下を來すものである。然らば此のインダクタンスが電流を阻止せんとする大きさはどの位かと云へば、これはかけられた電壓の周波數によつて異るものである。今その價を抵抗と同じオームの單位で表すべき式を求めて見よう。元來インダクタンスの單位は**ヘンリー**(Henry)と呼ぶ單位を使用して居る。ヘンリーなる單位は單に之丈けでは抵抗と同じ樣に取扱ふ事は出來ないもので之を抵抗と同じ單位のオームで表はさんとすればωなる角速度を乘じなければならない。此の價即ちωをインダクタンスの單位に乘じたものを**誘導リアクタンス**又は**インダクチヴ リアクタンス**(Inductive reactance) と云ふ。之を式で書くと次の通りである

$X_l = \omega L$ オーム…………………………(15)

但し　X_lは　誘導リアクタンス

Lは　ヘンリーで表はしたインダクタンス

ωは　角速度　即ち　$\omega=2\pi f$

次に抵抗を全然有しないインダクタンスに電壓を供給すると此のインダクタンスに流れる電流は次の式によつて表はされる。

$$I=\frac{E}{\omega L}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

但し　Iは流れる電流、Eは供給電壓

Lはインダクタンス　$\omega=2\pi f$

又Iなる電流が抵抗の無いインダクタンスを通過する場合に降下する電壓も同様にして求め得らる。

$$V=I\omega L\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

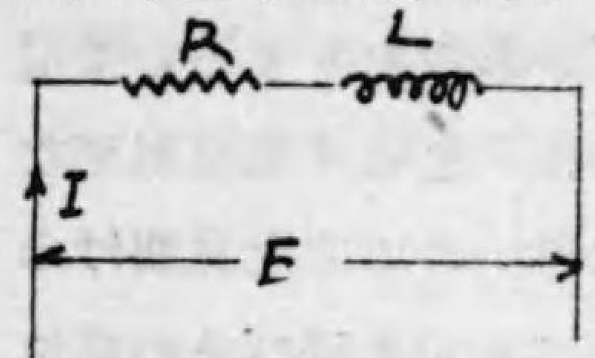
但しVは電壓降下、Iは電流、Lはインダクタンス、$\omega=2\pi f$

以上の式は何れもインダクタンスの單位をヘンリーで表はしたものであつてIはアンペアで表し、VやEはヴオルトで表はされて居る。所がインダクタンスは比較的小さなものが多いのでヘンリーで表すと大變に小さな數字となる事があるので更に小さな單位を取つて使用する事がある。此の單位を**ミリヘンリー**(Mili-henry)と呼び1ヘンリーの1000分の1を以て表して居る。故に1ミリヘンリーと云へば之を1000で割らなければ今迄通りの計算式で計算する事は出來ない。

5. 抵抗とインダクタンスの回路

今迄の計算はインダクタンスのみの計算であつたがインダクタンスのみの回路とか抵抗のみの回路とかと云ふものは殆んどあるものではない。インダクタンスにしても多少の抵抗はあるもので抵抗を電流が流れても其處にインダクタンスと見做すべきものがある筈である。唯抵抗やインダクタンスの何れかゞ餘

りに小さい場合には實際に抵抗やインダクタンスの影響が殆んど無く全く之を無視しても差支へない丈けの話である。インダクタンスに抵抗があつたり抵抗にインダクタンスがある樣な場合にはインダクタンスと抵抗とが別々に分かれて是が直列に存在するものと見做して良いのである。今抵抗とインダクタンスが直列に存在する場合の電流と電壓との關係を示すと次の通りである。此の場合の接續を示すと第6圖の通りでLはインダクタンス、Rは抵抗である。



第　6　圖

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

又は $E=I\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$

但し　Iは電流(アンペア)、Rは抵抗(オーム)、

Eは電壓(ヴオルト)、Lはインダクタンス(ヘンリー)

$\omega=2\pi f$（fは周波數）

此の式を使用すればインダクタンスと抵抗とが直列に存在する場合の電流又は電壓を直ちに求める事が出來るのである。

6. 力率と電力

インダクタンスに抵抗が全然ない場合にも之に電壓を與へると電流はインダクタンスのために阻止されて第16式に示されて居る樣な電流が流れる。然し此の場合には此の流れる電流によつて電力を損する樣な事は無いのである。即ち電流は流れても電力は失はれないので此の電流の事を**無效電流**（Wattless current ワツトレス カーレント）と呼んで居る。是は次にあるキヤパシチーを流れても同じく電力を失ふ事はないのであつて、電力が失はれるのは電流が抵抗を通過する場合に限つて居る。

直流では何時でも電壓に電流を乘じたものがそのまゝ電力損失になつて居たけれども交流では流れても損失にならない電流があつたり電力の損失にならない電壓降下があつたりするので電流と電壓との積を以てそのまゝ電力の損失を表す事は出來ない。電壓と電流との積は實際の電力では無いので之を**見掛けの電力**（Apparent Power アパーレント パワー）と呼びその單位をヴォルトアンペア又はその1000倍たるキロヴォルトアンペアで表して居る。此の見掛けの電力たるヴォルトアンペアと實際の電力との比の事を**力率**（Power factor パワー フアクター）と呼び電流が電壓より遲れたり進んだりする角度をθとすれば力率は次の式で表はさる。

$$力率=\cos\theta=\frac{VI}{P}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

但し　Iは電流（アンペア）、Vは電壓（ヴォルト）、Pは電力（ワット）

又之を書き換へると次の式となるが此の式は電力を求める式で第20式を變化したに過ぎない。

$$P=VI\cos\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

次に此の力率なるものを今少しく調査して見ると是れは電力とヴォルトアンペアとの比であるから此の二つの關係からして次の如く關係式を得るのである。元來交流に於ても失はれる電力は抵抗による電力損失のみであるから交流に於ても失はれる電力はI^2Rワットなる事は直流と變りがない。

$$P=I^2R\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

但　Pは電力（ワット）、Iは電流（アンペア）、Rは抵抗（オーム）

所が力率は此のPなる電力と見掛けの電力との比であるから

次の式が成立する。

$$力率=\cos\theta=\frac{I^2R}{VI}$$

然るにVなる電壓は第19式によつて書き換へる事が出來るので之を分母に代入すれば力率を簡單に表す事が出來る。

$$\cos\theta=\frac{I^2R}{I^2\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdots\cdots(23)$$

即ち此の式で力率を表す事が出來るが是は抵抗とインダクタンスのみの話でキャパシチーがある場合は次に出て來るやうな式になるのである。

7. インダクタンス回路の例題

例 1. 單相交流50サイクル、電壓200ヴォルトが全然抵抗のないインダクタンス0.2フアラッドのコイルにかゝる時流れる電流を求む。

解　第16式を使用すればよい。

$$I=\frac{E}{\omega L}$$

$E=200$ ヴォルト　$L=0.2$ ヘンリー

$\omega=2\pi f=2\pi\times50=314$

$$\therefore\ I=\frac{200}{0.2\times314}=3.18\ アンペア$$

例 2. インダクタンス20ミリヘンリーを有する場所に15アンペアの交流が流れる時その電壓降下を求む、但し交流の周波數を60サイクルとす。

解　第16式を變化した17式を使用すれば可なり。

$\omega=2\pi f=2\pi\times60=377$ オーム

$L=20$ ミリヘンリー$=0.02$ ヘンリー

$V=15\times377\times0.02=113$ ヴォルト

例 3. 抵抗20オームとインダクタンス25ミリヘンリーとが直

列に接續せられて居る回路に50サイクル、1000ヴォルトの交流電壓をかけると流れる電流は何程か。

解 第18式を使用する、Rは20オームLは25ミリヘンリー卽ち0.025 ヘンリーである。

$\omega=2\pi f=314 \quad E=1000$

$$\therefore \quad I=\frac{1000}{\sqrt{20^2+(314\times0.025)^2}}=\frac{1000}{\sqrt{400+61.5}}$$

$$=\frac{1000}{\sqrt{461.5}}=\frac{1000}{21.5}=46.5 \text{ アンペア}$$

例 4. インダクタンス 0.3ヘンリー、抵抗30オームが直列に接續せられて居る時に交流60サイクル電流5アンペアが流れるとすれば此の兩端に於ける電壓を求む。

解 第19式を使用する。電壓をVとすれば

$V=I\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$

$I=5$ アンペア　$R=30$ オーム　$\omega=2\pi f=377$

$V=5\sqrt{30^2+(377\times0.3)^2}=5\sqrt{900+12800}$

$=5\sqrt{13700}=585$ ヴォルト

例 5. 電壓100ヴォルトを力率70パーセントの負荷に接續した時8アンペアの電流が流れたとすれば負荷の取る電力は何程なるか。

解 第21式を使用すればよろしい。

$P=VI\cos\theta$

$V=100$ ヴォルト　$I=8$アンペア　$\cos\theta=0.7$

$P=100\times8\times0.7=560$ ワット

例 6. インダクタンス 0.2ヘンリー、抵抗50オームが直列に接續されて居る場合に交流50サイクルを與へた時此の回路の力率は何程か。

解 第23式を使用して解けばよろしい。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$R=50$ オーム　$L=0.2$ ヘンリー　$\omega=2\pi\times50=314$

$$\cos\theta=\frac{50}{\sqrt{50^2+(314\times0.2)^2}}=\frac{50}{\sqrt{2500+3940}}$$

$$=\frac{50}{\sqrt{6440}}=\frac{50}{80.3}=0.622$$

8. キャパシチー

直流では一寸切れた場所があつても電氣は殆んど流れないものであるが交流では少し位の切れ目があつても之を飛び越へて流れて行くと云ふ事は已に述べた通りである。之を**キャパシチー**（Capacity）又は**靜電容量**と云ひキャパシチーは切れ目が短い程又切れて居る部分の面積が廣ければ廣い程その大きさが大きいもので之に電壓を與へると流れる電流も大きくなる。キャパシチーはその大きさを**フアラツド**（Farad）と云ふ單位で云ひ表して居るが一般にはその大きさが甚だ小さいのでその100萬分の1卽ち10^{-6}倍である**マイクロフアラツド**（Micro-farad）と云ふ單位が用ひられる。然れ共實際の計算には例へマイクロフアラツドで表された單位と雖之をフアラツドに書き換へて計算しなければならない。抵抗やインダクタンスはその値が大きければ大きい程電流は通り難いものであるがキャパシチーの方はその大きさが大きい程電流が流れ易いものである。

此のキャパシチー卽ち容量とはどんなものかと云へば早い話がラヂオに用ふるコンデンサーの樣なものである。キャパシチーは線の切れて居る所に必ず存在するものであるから送電線や

配電線の電線と大地の間にも電線と電線との間にもキャパシチーが存在する譯である。

9. 電流の進み

前に述べたインダクタンスに交流電流が流れる場合には電流は電壓に遲れて居たのであるがキャパシチーを通る場合には之と反對になつて來るものである、卽ち氣の短い交流は少し位の切れ目があつても之を飛び越へて電壓よりも先に流れ込むものである。若しその回路に抵抗やインダクタンスが全然無いとすれば此の回路を流れる電流は完全に90度進む譯である。所がそのキャパシチーの回路に抵抗があればその抵抗の大小によつて進む程度が少くなり、反對の作用をするインダクタンスがあればその進む程度は非常に少くなり若しインダクタンスの値が大きければ却つて電流が電壓より遲れると云ふ結果を招くものである。かくの如き作用をなすものを一般に**コンデンサー** (Condenser) と云ふのであつて此の作用をなすものはあへて線の一部分が切れて居る様なものばかりでなく同期電動機も此の作用をするもので勵磁電流を多くすればする程その作用は著しくなる。普通の交流回路には變壓器等の如く多數のインダクタンスが並列に接續されて居るので遲れる電流が流れる、之を補ふために進む電流を取る様に設置するのが此の同期電動機を使用したコンデンサーで之を同期進相機（シンクロナス フエース アドヴアンサー）と呼んで居る。之に對して普通のコンデンサーをスタチック コンデンサー(Static condenser) と呼んで居る。

10. キャパシチーによる電壓降下

キャパシチーのある場所は交流が流れるのであるがその流れる電流は靜電容量の大きさに比例するものである、又同じ大きさのキャパシチーでも之にかゝる交流の周波數によつて流れる電流が異り周波數が多ければ多い程多量の電流が流れるのである。此の電流の通過を妨げる抵抗の事を**容量リアクタンス** (Capacitive reactance キャパシチヴ リアクタンス) と云ひ次の式を以て表す事が出來る。

$$X_c=\frac{1}{\omega C}\ \text{オーム} \cdots\cdots (24)$$

但　X_cは容量リアクタンス　$\omega=2\pi f$

　　Cはフアラッドで表したキャパシチー

此の場合抵抗とインダクタンスとを全然有しないキャパシチーを持つ回路に電壓を供給すると此のキャパシチーに流れる電流は次の式によつて表はされる。

$$I=E\omega C\ \text{アンペア} \cdots\cdots (25)$$

但　Iは電流　Eは電壓　$\omega=2\pi f$

　　Cはフアラッドで表したキャパシチー

又電流がキャパシチーを通過する場合に起きる電壓降下は同樣にして次の式で見出す事が出來る。

$$V=\frac{I}{\omega C} \cdots\cdots (26)$$

但　Vは電壓　Iは電流　Cはキャパシチー

11. 抵抗とキャパシチーの回路

キャパシチーと抵抗とが直列に接續されて居る場合を考へると之に流れる電流は次の如き式によつて表す事が出來る。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdots\cdots (27)$$

但　I は電流　　E は供給電壓　　$\omega=2\pi f$

　　R は抵抗　　C はキヤパシチー

又抵抗とキヤパシチーとが直列に接續されて居る場合に電流が流るれば其處に電壓降下を生ずる譯である。此の電壓降下は前式をそのまゝ變化すれば見出される譯で之を示して見ると次の通りである。

$$V=I\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

但　V は電壓降下　　I は電流

　　R は抵抗　　$\omega=2\pi f$

　　C はキヤパシチー

此の二つの式によつて抵抗とキヤパシチーとが直列に接續されて居る場合の電流も電壓降下も見出される譯で單位は電壓をヴオルト、電流をアンペア、抵抗をオーム、キヤパシチーをフアラッドで表して居る。若しもキヤパシチーが100萬分の1のマイクロフアラッドで表されて居る場合には之をフアラッドに換算しなければならない。

12. キヤパシチーとインダクタンスの回路

次にキヤパシチーとインダクタンスとが直列に接續されて居る場合の計算を示さう。元來キヤパシチーとインダクタンスとは互に反對の作用をするものであるから此の二つは互に打ち消す作用をするものである。今此の二つが直列に接續されて居る回路に電壓を供給した場合の電流を求めれば次の式の如くなる。

$$I=\frac{E}{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

但　I は電流　　E は供給電壓

　　L はインダクタンス　　C はキヤパシチー

此の式で見てもインダクタンスとキヤパシチーとが互に反對の作用をする事は明かでインダクタンスとキヤパシチーとが存在すればその何れかによる抵抗よりも小さくなるのである。若しも ωL と $\frac{1}{\omega C}$ とが相等しければ何物も無い場合と同じ事で電壓は短絡せられる事になり短絡電流が流れる。此の二つの値の差が大きければ大きい程電流は流れ難いものである。此の式の分母は ωL が $\frac{1}{\omega C}$ よりも大であれば分母は正であるが小であれば負となる。若し分母がプラスであれば之に流れる電流は電壓よりも遲れるけれ共マイナスとなればキヤパシチーの方が勝つ譯であるから電流は電壓よりも進むのである。

次にキヤパシチーとインダクタンスとが直列に接續されて居る回路へ電流が流れる場合の電壓降下を示すと次の通りとなる

$$V=I\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

但　I は電流　　V は電壓降下　　L はインダクタンス

　　C はキヤパシチー　　$\omega=2\pi f$

此の式も前の式を變化したまでの事でインダクタンスとキヤパシチーとの差が大なれば大なる程電壓降下は甚だしく、若し ωL と $\frac{1}{\omega C}$ とが全然等しければ分母は零となり電壓降下は全く無い譯である。

13. 力率と電力

回路に全然抵抗やインダクタンスが無くてキヤパシチーばかりの場合には電流は電壓よりも90度進むからして力率は零の筈である。即ち力率は $\cos\theta$ で表はされ電流が電壓より遲れたり

進んだりする角度θは90度であるから$\cos 90^\circ=0$となつて力率は零である。電力は第21式によつて表はされて居る通りであるから次の如く是もまた零となる。

$$P=VI\cos\theta=VI\cos 90^\circ=0$$

電力が零であれば電流が流れても全然電力の損失にはならない譯で此の電流の事をインダクタンスの場合と同様無効電流と稱へて居る。インダクタンスの場合とキヤパシチーの場合とによつて異る事は唯一方が遅れるのに一方は進むと云ふ丈の事である。從つてキヤパシチーはいくらあつてもその中を通る電流は損にならない譯で電流が流れて損失となるのは抵抗がある場合に限つた話である。

次にキヤパシチーと抵抗とが直列にある場合には力率はどんなになるかと云へば抵抗は電流を進ます力も遅らす力もないのでキヤパシチーのある以上は電流が進む事は當り前である。その力率は抵抗に比して容量リアクタンスが大きければ大きい程力率が悪くなる譯である。此の場合に於ける力率は次の式を以て表す事が出來る。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

但　$\cos\theta$は力率　　Rは抵抗

　　Cはキヤパシチー　　ωは$2\pi f$

卽ちCなるキヤパシチーが大きければ容量リアクタンスは小さくなり力率は1に近い値となるがCが小さくなれば容量リアクタンスが大きくなりキヤパシチーの兩端にかゝる電壓降下は増して力率は1より段々小さくなる。

次に此の場合の電力損失であるが電力の損失は抵抗が無ければ起きる譯が無いので此の場合に起きる損失はキヤパシチーの如何には關係がない。但しキヤパシチーが小さければ流れる電流も少くなり電力損失は少くなるがキヤパシチーが大きくなれば流れる電流も増して電力損失は増す、然しこれは電流の變化による電力損失の變化である。その電力損失の式はインダクタンスの場合と同様に次の式で表はさる。

$$P=I^2R$$

然らばキヤパシチーとインダクタンスとが直列に存在する場合にはどうなるかと云へば此の場合は力率は零である。此の場合に電流が電壓より進むか遅れるかと云ふとこれはキヤパシチーとインダクタンスとの大さの割合によつて違ふものである。元來キヤパシチーとインダクタンスとは互に反對の作用をするものでキヤパシチーは電流を進めようとするしインダクタンスは遅らせようとするのであるからその何れか大きなリアクタンスを持つ方に負かされてしまふのである。今インダクチヴリアクタンスの方が容量リアクタンスよりも大きなとすれば第29式に於てωLが$\frac{1}{\omega C}$よりも大となり分母が正數となる、此の場合には電流は電壓よりも遅れるのである、次に$\frac{1}{\omega C}$がωLよりも大となれば此の式の分母は負數となつて電流は電壓より進むのである。而して此の場合の電力損失は抵抗が無いから無論零である。

14. キヤパシチー回路の例題

例 1. 50萬サイクルのラヂオ電波が0.02マイクロフアラッドのバリヤブルコンデンサーを通過する場合にそのコンデンサーの容量リアクタンスは何程か。

解 これは第24式を使用しなければならない。

$C=0.02$ マイクロファラッド $=0.02\times10^{-6}$ ファラッド

$\omega=2\pi f=2\times3.14\times500000=3.14\times1000000$

$\omega C=0.02\times3.14\times1000000\times10^{-6}=0.0628$

$X_c=\dfrac{1}{0.0628}=15.9$ オーム

例 2. キャパシチー80マイクロファラッドとインダクタンス3ヘンリーとが直列に接續されて居る回路に50サイクル200ヴォルトの電壓をかけると何アンペアの電流が流れるか。

解 第29式を使用して解く

$$I=\frac{E}{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}$$

$E=200$ ヴォルト　$\omega=2\pi f=100\pi$

$C=0.00008$ ファラッド　$L=3$ ヘンリー

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=300\pi-\frac{1}{0.008\pi}=942-40=902$$

$$I=\frac{200}{902}=0.222 \text{ アンペア}$$

例 3. 抵抗40オームとキャパシチー85マイクロファラッドとが直列に接續されて居る場合の負荷の力率は何程か、但し周波數は50サイクルとす。

解 第31式を使用する。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ $R=40$ オーム　$\omega=2\pi f=100\pi$

$C=85$ マイクロファラッド $=0.000085$

$\omega C=100\pi\times0.000085=0.0085\times\pi=0.0267$

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{0.0267}=37.4$$

$$\cos\theta=\frac{40}{\sqrt{40^2+37.4^2}}=\frac{40}{\sqrt{3000}}=0.73$$

15. インピーダンス

インダクタンスとは如何なるものか、キャパシチーとは如何なるものかと云ふ事は已に前に述べた所であるが此處では抵抗、インダクタンス、キャパシチーの三つが直列に存在して居る場合の計算方法を示して見ようと思ふ。抵抗もインダクタンスもキャパシチーも皆電流を拒まんとする樣に働くのであるが是等全部の事を**インピーダンス**(Impedance)と稱へて居る。此のインピーダンスは直流で云へば抵抗と同じであつて此のインピーダンスと電壓とさへ知れればその回路を流れる電流は直ちに見つけられるのである。此のインピーダンスは普通Zなる文字で表されて居る。今電壓が知れ此のインピーダンスの大きさも計算出來たとするならば此の回路を流れる電流は直流に於けるオームの法則と同樣に次の式を以て表す事が出來る。

$$I=\frac{E}{Z}\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

但 I……………電流、　E……………電壓

Z……………インピーダンス

然らば此のインピーダンスは如何なる値を持つものかと云へば是は抵抗、インダクタンス、キャパシチーの三つから決定せられる、その式を示すと下の通りである。

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

但 Z……インピーダンス、　ω……………2πf

R……………抵抗、　L……インダクタンス

C………キャパシチー

此のインダクタンスの式を第32式のZに代入すると交流回路に於ける一般式を求め出す事が出來る。その式を求めて見ると次の通りである。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

但　I………………電流、　E………………電壓

R………………抵抗、　L……インダクタンス

C……キャパシチー、　ω……………2πf

此の第34式は交流回路に抵抗とインダクタンスとキャパシチーとが接續されて居る場合の一般式で此の式さへ諳記して居れば直列に接續されて居る回路に對する計算は直ちに行ふ事が出來る。今の場合は電壓が知れて居て電流を求めるのであつたが反對に電流が知られて居てインピーダンスを通る間に生ずる電壓降下を求めようと思へば電壓と電流との位置を變化して次の通りに求める事が出來る。

$$V=I\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

但　V…………電壓降下、　I………………電流

L……インダクタンス、　R………………抵抗

C……キャパシチー、　ω……………2πf

16. 第34式の應用

第34式を知つて居ればインダクタンスと抵抗のみの回路の計算や抵抗とキャパシチーのみの計算に使用する公式を直ちに見出す事が出來るのである。例へば今或る回路に抵抗Rとインダクタンス L とが直列に接續されて居るとする、此の公式は前に出て居るのであるが此の式を忘れてしまつたとする。然し第34式は幸にも記憶して居たとすると第32式を變化してその公式が見出される。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

所で今の場合にはキャパシチーたるCが存在しないので$\frac{1}{\omega C}$なるものを零と見做さなければならない、此の$\frac{1}{\omega C}$を零と見れば此の公式は次の如く見出す事が出來る。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

今度はインダクタンスが無くて抵抗とキャパシチーばかりが直列に接續されて居るとすれば第34式に於けるLを零と置けば宜しい、即ち次の如き式の變化をたどつて前に示した抵抗とキャパシチーとの回路の計算が出來る。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$L=0\qquad\therefore\quad \omega L=0$$

$$\therefore\quad I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

即ち $$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

又抵抗Rが無い場合、即ちインダクタンスとキャパシチーとが直列に接續されて居る場合の計算式も同樣に見出す事が出來るのである。此の場合は抵抗が無いのであるから第32式の抵抗Rを零と置けば良い事になり次の如き式の變化をたどる。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$R=0$

$$\therefore \quad I=\frac{E}{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}$$

此の式も前に出て來た公式であるが第34式のRを零としても見出す事が出來る。從つて交流の直列回路の計算をするにはどうしても此の式丈は記憶しなければならないのである。

17. リアクタンス

抵抗は電流を電壓より進めたり遅らせたりする事は出來ないがインダクタンスは電流を電壓より遅らしめキャパシチーは電流を電壓より進ましめる。此のインダクタンスとキャパシチーは互に反對の作用をするのであるが何れを通る場合にも電力の損失を來す事はない。此の電力の損失を來さないインダクタンスとキャパシチーのある項、云ひ換へればインピーダンス $\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ 中の $\omega L-\frac{1}{\omega C}$ なる項を**リアクタンス**(Reactance)と云ふ。此のリアクタンスは多く x なる文字によつて表はされる。此のリアクタンスを式にして示せば次の通りである。

$$x=\omega L-\frac{1}{\omega C} \quad \cdots\cdots(36)$$

但 x……リアクタンス、 L……インダクタンス

C……キャパシチー、 ω……$2\pi f$

又インピーダンスを表すに x なるリアクタンスを用ふれば次の如く表す事が出來る。

$$Z=\sqrt{R^2+x^2} \quad \cdots\cdots(37)$$

但 Z……インピーダンス、 R……抵抗

x……リアクタンス

リアクタンスは電力の損失とならない部分を云ひ表すものであつて之を**無效分**(Wattless Conponent ワットレスコンポーネント)又は**ワットレス分力**と云ふ。之に反して抵抗を電流が流れゝば必ず電力の損失を來すので此の部分を**有效分**(Watt Conponent ワットコンポーネント)又は**ワット分力**と云ふ。リアクタンスは元來インダクタンス又はキャパシチー或はその二つ共を持つて居るものを呼ぶ名であるからしてその値たる $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ の中、ωL を**誘導リアクタンス**(Inductive reactance インダクチヴ リアクタンス)と呼び $\frac{1}{\omega C}$ の部分を**容量リアクタンス**(Condensive reactance コンデンシヴ リアクタンス)と云ふ事は前に述べた通りである。

18. 回路の力率

此のリアクタンスは實際のインピーダンスを求めるに際して自乘せられなければならないのであるが自乘すれば負(マイナス)の符號であつても正(プラス)の符號であつて皆プラスとなるものである。從つて $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2$ は必ずプラスとなつて表れるが $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ は必ずしもプラスとはならない。若し $\frac{1}{\omega C}$ の方が ωL よりも大きければマイナスとなつて表れるのである。然らば此の $\frac{1}{\omega C}$ が ωL より大きくてマイナスとなつた場合はどんな時かと云へばこれはキャパシチーが小さい場合でキャパシチーが小さければ $\frac{1}{\omega C}$ が大となり此の間を電流が流れゝばその電壓降下も大となる。かう云ふ風に $\frac{1}{\omega C}$ が大となつてリアクタンスがマイナスとなつた場合は電流が電壓より進むのであ

る。反對に此のリアクタンスがプラスとなつた場合は ωL の方が大きな時であるが此の時は電流が電壓よりも遲れるのである。是によつて見ればリアクタンスがプラスとなれば電流が遲れ、マイナスとなれば電流が進むと云ふ事が知れるのである。その電流の進んだり遲れたりする程度はその開きの大きな程大でリアクタンスの大きさが抵抗に比較して大なれば大なる程力率は悪くなる。つまり力率はリアククンスの大きさによつて定まりその符號がプラスかマイナスかによつて進電流を取るか遲電流を取るかゞ定まるのである。その力率はどんな式で表はされるかと云ふと次の如き式で表す事が出來る。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

但 $\cos\theta$……………力率、 R………………抵抗

L……インダクタンス、 C……キヤパシチー

ω………………$2\pi f$

此の第38式は力率を表す一般の式であつて若しインダクタンスがなくて抵抗とキヤパシチーとのみである場合の力率を求めんとすれば此の式に $L=0$ と置いて解けば次の如く求められる。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

又反對に回路にキヤパシチーが無くて抵抗とインダクタンスのみの場合には $\frac{1}{\omega C}=0$ として計算すれば此の式から次の如く求める事が出來るのである。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

從つて此の第38式のみを知つて居れば如何なる場合の直列回

路の力率をも知る事が出來るのである。

19. アドミツタンス

インダクタンス、キヤパシチーの外にインピーダンス、リアクタンス等と云ふ言葉は既に述べた通りで了解せられた事と思ふ。交流理論を學ぶには已に是丈の言葉を知つて居れば大抵の場合に差支へはないのである。所が是等の術語より外に二三の術語があつて時には遞試等へ頭を出す事もあるし色々な本にも時々出て來るものであるから此處に一寸說明を加へて置かうと思ふ。先づ**コンダクタンス**(Conductance)について述べるとこれは抵抗をインピーダンスの自乘で除した形を取つたものである。單位は**モー** (Mho) なる言葉で表はされる、今之を式で表すと次の如くになる。

$$g=\frac{r}{Z^2}\quad 又は\quad g=\frac{r}{r^2+x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

但 g……コンダクタンス r………………抵抗

z……インピーダンス x………リアクタンス

次に**サスセプタンス** (Susceptance) なるものがあるがこれはリアクタンスをインピーダンスの自乘で除したもので單位は同じくモーを用ふ。之を式で表すと次の通りである。

$$b=\frac{x}{Z^2}\quad 又は\quad b=\frac{x}{r^2+x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

但 b……サスセプタンス x………リアクタンス

z……インピーダンス r………………抵抗

今一つ**アドミツタンス**(Admitance) と云ふのを紹介して置かう。此のアドミツタンスと云ふのはインピーダンスの逆數で

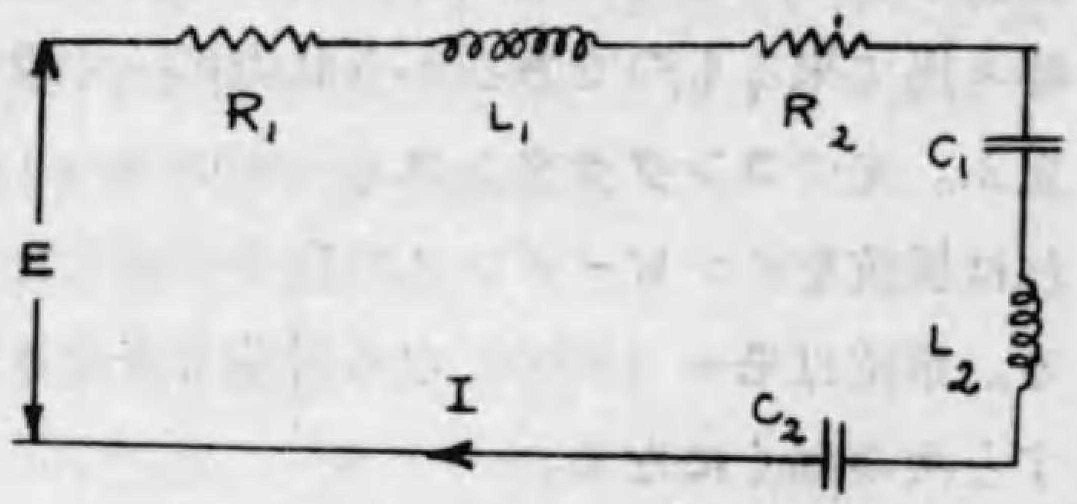
あつて之を式で表すと次の様になる。

$$y=\frac{1}{Z}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

但　y……アドミッタンス　　z……インピーダンス

20. R,L,C等が二つ以上ある場合

抵抗やインピーダンスやキャパシチー等が二つ以上直列にある場合にはどう云ふ風に處理したならば良いかと云へば此の場合にも抵抗は抵抗で全部一處に集めて計算するのである。例へば第7圖の如き回路にEヴォルトなる電壓を加へた場合は何アンペアの電流Iが流れるかと云ふ問題について解いて見る。その公式はやはり第34式を使用するのであつてRやLやCは夫々次の様に集めれば良いのである。



第　7　圖

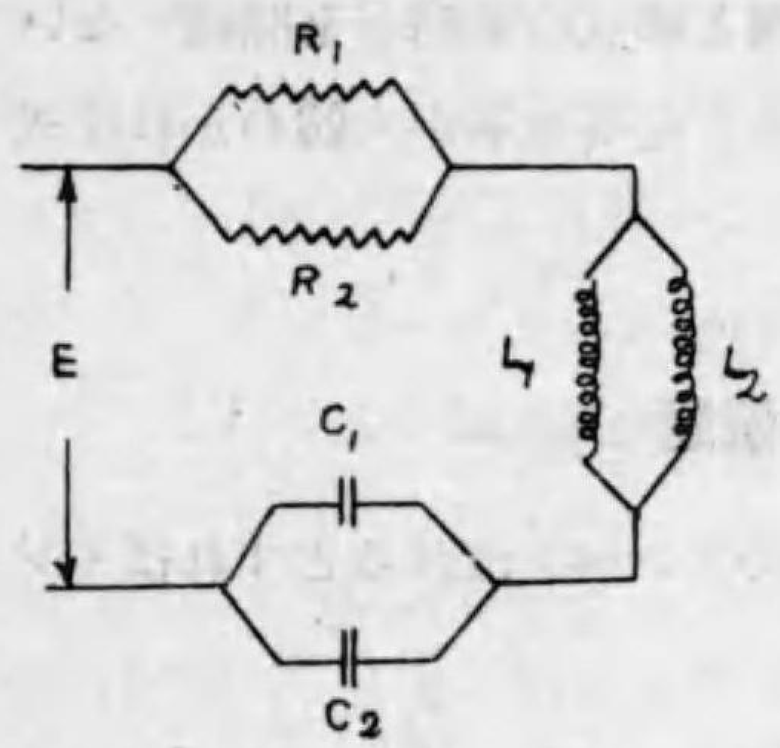
$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$R=R_1+R_2\qquad \omega L=\omega(L_1+L_2)\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

$$\therefore\quad I=\frac{E}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+\left\{\omega(L_1+L_2)-\left(\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}\right)\right\}^2}}$$

即ち抵抗、インダクタンス、キャパシチー等が直列に二つ以上ある場合には上の如くして解くのである。



第　8　圖

然らば第8圖の如く是等同じものが二つ以上並列にある場合にはどうすれば良いかと云へば是は抵抗やインダクタンスは直流でやつて居る様に逆數の和を求め、キャパシチーはそのまゝ加へ合せば良いのである。今この回路の電流Iを求めて見る。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\qquad \frac{1}{R}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$$

$$\therefore\quad R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

$$\frac{1}{\omega L}=\frac{1}{\omega L_1}+\frac{1}{\omega L_2}\qquad \frac{1}{\omega L}=\frac{\omega L_1+\omega L_2}{\omega L_1\times\omega L_2}$$

$$\therefore\quad \omega L=\frac{\omega^2L_1L_2}{\omega L_1+\omega L_2}=\frac{\omega L_1L_2}{L_1+L_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\omega C}}=\frac{1}{\frac{1}{\omega C_1}}+\frac{1}{\frac{1}{\omega C_2}}\qquad \omega C=\omega C_1+\omega C_2$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\omega C}=\frac{1}{\omega(C_1+C_2)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

$$\therefore\quad I=\frac{E}{\sqrt{\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^2+\left\{\frac{\omega^2L_1L_2}{\omega L_1+\omega L_2}-\frac{1}{\omega(C_1+C_2)}\right\}^2}}\cdots(47)$$

つまり上式の如く變化して見ればR, L, C等の一つ一つが並列に多數存在する時の計算も出來得るのである。此處で注意す

べきは43式のキャパシチーの直列と46式の並列とを間違へない様にしなければならない事である。是等の事が大體わかれば次に此の練習問題に移つて見よう。

21. インピーダンスの例題

例 1. 電壓3300ヴォルト電流30アンペア流れるとすればインピーダンスは何程か。

解 第32式を使用すれば宜しい。

$$Z=\frac{3300}{30}=110\text{オーム}$$

例 2. 抵抗20オーム、インダクタンス159ヘンリー、キャパシチー50マイクロフアラッドの回路がある、此の回路に周波數50サイクル、電壓100ヴォルトを加へた場合に流れる電流、力率、リアクタンス、インピーダンスを求む。

解 電流を求める式は第34式を使用するのである。所が順序として先づリアクタンス、インピーダンス等から求めて見る。リアクタンスは第36式によつて次の如く出て來る。

$$x=\omega L-\frac{1}{\omega C}$$

$$\omega=2\pi f=2\pi\times50=100\times3.14=314$$

$$L=159\text{ミリヘンリー}=0.159\text{ヘンリー}$$

$$C=50\text{マイクロフアラッド}=0.00005\text{フアラッド}$$

$$\therefore\quad x=314\times0.159-\frac{1}{314\times0.00005}$$

$$=50-63.8=-13.8\text{オーム}$$

即ち−13.8オームの値を持ち符合がマイナスであるから流れる電流は電壓よりも進むものである。

次にインピーダンスを求めるとこれは第33式又は第37式

によつて求められるので次の如く見出し得らる。

$$Z=\sqrt{R^2+x^2}$$

$$Z=\sqrt{20^2+13.8^2}=24.3\text{オーム}$$

インピーダンスが知れゝば第34式の分母が知れた事になるので次の如く電流は容易に見出し得らる。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$I=\frac{100}{24.3}=4.12\text{アンペア}$$

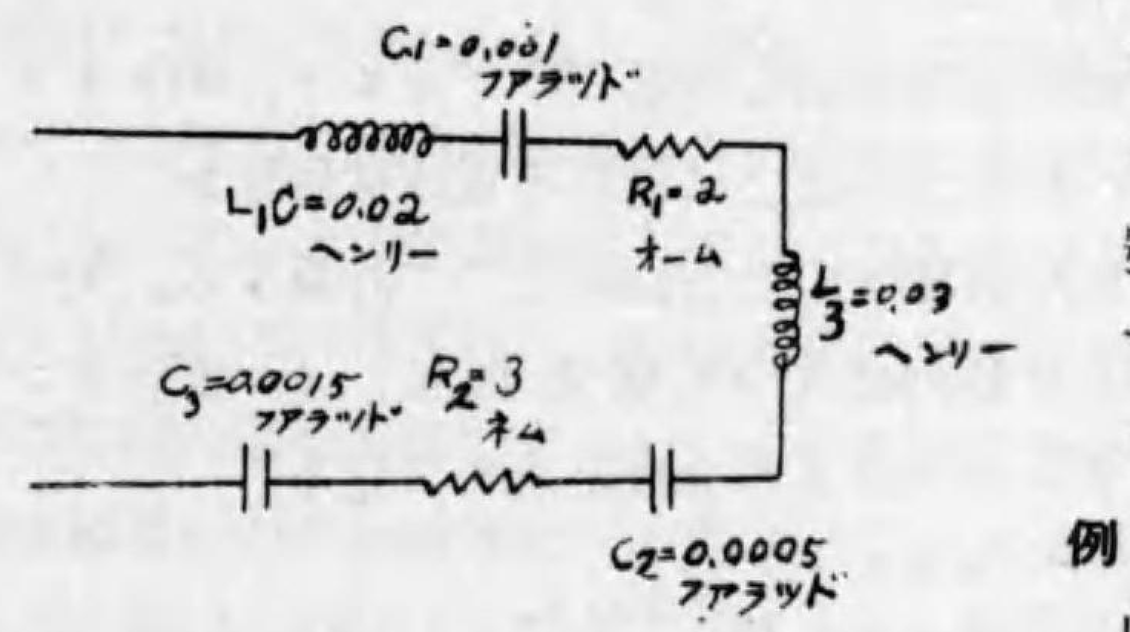
次に此の回路の力率はどうかと云へばこれは第38式を使用すればよろしい。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

此の式の分母は已にインピーダンスとして出て居るので直ちに求めらる。

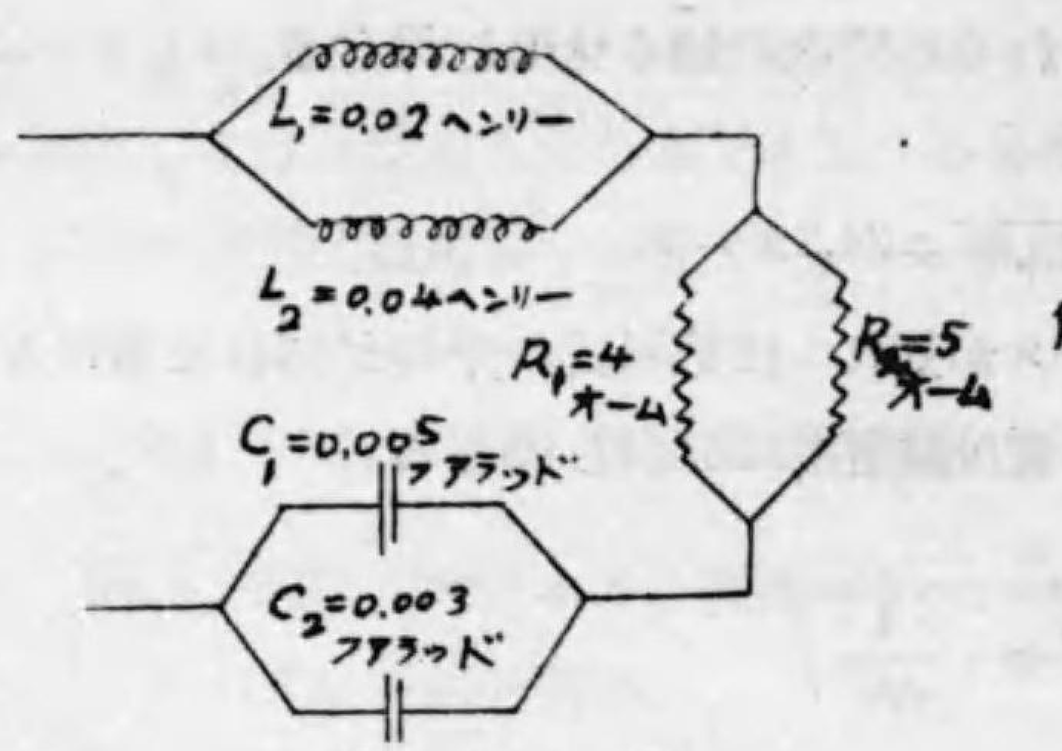
$$\cos\theta=\frac{20}{24.12}=0.825$$

即ち82.5パーセントでリアクタンスがマイナスの符號を持つて居るので電流は電壓よりも進むのである。



第 9 圖

例 3. 第9圖の如き回路がある、此の回路に電壓100ヴ



第10圖

オルト50サイクルをかけると何程の電流が流れるか。

解 これは此の前に出て居る例題に倣つてやればよいのである。その計算は下の如き順序による。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$R=2+3=5$オーム

$\omega L=2\pi f(0.02+0.03)=100\times3.14\times0.05$

$=314\times0.05=15.7$オーム

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}+\frac{1}{\omega C_3}=\frac{1}{314\times0.001}+\frac{1}{314\times0.005}$$

$$+\frac{1}{314\times0.0015}=0.319+0.159+0.212=0.69$$

$\therefore\quad I=\dfrac{100}{\sqrt{5^2+(15.7-0.69)^2}}=\dfrac{100}{15.8}=6.3$アンペア

例 4. 次に第10圖の如き回路に電壓200ヴォルト、60サイクルの電壓を加へたとすれば之に流れる電流は何程か。

解 是も前に示した方法と同じ方法によつて計算する。先づ第44, 45, 46式より並列に入つて居る抵抗、インダクタンス、キヤパシチーの大きさの合成を求めて見る。

$R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\dfrac{4\times5}{4+5}=2.22$オーム

$\omega=2\pi f=2\pi\times60=377$

$$\omega L=\frac{\omega^2L_1L_2}{\omega L_1+\omega L_2}=\frac{\omega L_1L_2}{L_1+L_2}=\frac{377\times0.02\times0.04}{0.02+0.04}=5.02$$

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{\omega(C_1+C_2)}=\frac{1}{377(0.005+0.003)}=3.32$$

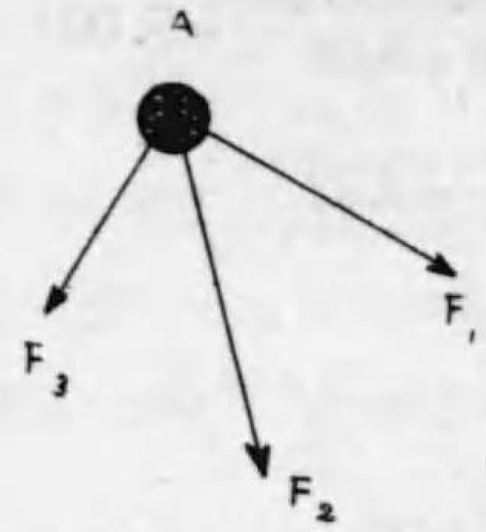
$$I=\frac{200}{\sqrt{2.22^2+(5.02-3.32)^2}}$$

$$=\frac{200}{\sqrt{4.93+2.89}}=\frac{200}{2.8}=71.4\text{アンペア}$$

第三章 ベクターの概念

1. ベクターとは如何なるものか

力には常に大きさと方向とが附き物で此の大きさと方向とがあつて始めて力なるものも存在する譯である。從つて力等と云ふものは數量ばかりで表したのでは意味をなささい場合がある。それで之を1本の線で表したならば都合が良からうと云ふ考へから應用力學の方では力を1本の線で表して居る。そして力の大きさは線の長さによつて代表せしめその方向は線の先に矢の印をつけ是で方向を示して居る、此の線の事を**ベクター**(Vector)と呼んで居る。何故此のベクターを使用した方が都合が良いかと云ふと力等と云ふものは二つも三つも同じものに作用してもその二つ分又は三つ分の力を出す事が出來ない場合が多いので此の觀念をはつきりせしめるためである。例へば今第11圖の如く一つの物體Aに F_1, F_2, F_3 なる力が働いたとした場合にAの受ける力は F_1, F_2, F_3 の三つの力を算術的に加へた和で働くものとは誰しも考へないであらう、又その全體の力の働



第 11 圖

く方向は F_2 の方向に限つたものでもなく、F_1, F_3 の方向でもない事は勿論である。然らばどんな大きさの力がどの方向にかゝつて居るかと云ふ問題であるが此の問題を解くのに最も簡單で最も都合の良いのが此のベクターである。その問題の解き方はこれから云はんとするベクターの和又は差の見出し方を應用すると何でも無く解決する事が出來るのである。力學の方では此のベクターが計算に随分役立ち直接ベクターを引いて計算するのである。

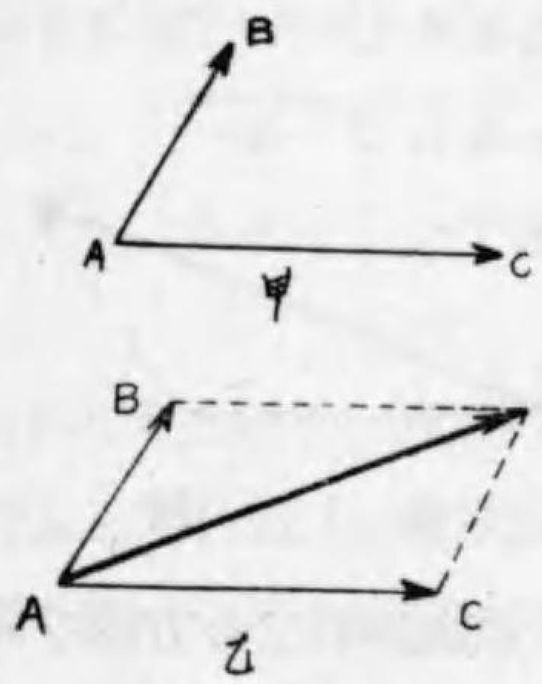
2. 交流への應用

直流では方向が一定で電流はプラスからマイナスの方に流れるものと定つて居るから別にベクター等を使用して方向等を考へる必要がない。處が交流になるとさうは行かない、交流には電壓にしても電流にしても大きさばかりで無く方向が存在するのである。これはインダクタンスやキヤパシチーの影響を受けて電流が電壓より進んだり遲れたりする事から起るもので電流電壓は一定の方向を向いては居らない。かう云ふ風な交流の電壓や電流を取扱ふにはベクターを使用するのが最も便利で是を使用すると最も樂に交流の理論を了解する事が出來るのである。元來此のベクターはベクター自身で種々な計算をなす事が出來、力學等では此の方法によつて多く計算して居る、これはベクターの大きさを直接數量の大きさとなしそのベクターを加へたり引いたりして最後にその答になるベクターを以つて計算するのである。處が交流理論に使用するベクターは此のベクタ

ーを直接測つて計算する事も出來、又ある場合には此の方法で計算して居るが多くの場合には理窟を考へる方便に使用するものである。此の場合には無論ベクターの長さを物尺で測つたりその方向を分度器で正確に定めたりするものではない。交流に於てベクターを表すものは電流と電壓が主であつて力率は電壓と電流との間の角度の餘弦で表はされる。

3. ベクターの加法

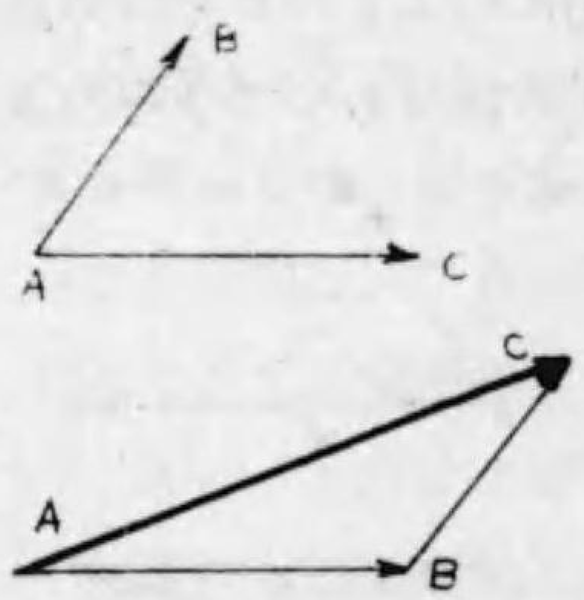
ベクターとベクターとを加へ合すのは算術の様に5と3とを加へ合すと8になると云ふ風に簡單ではない、算術的に加へ合す事が出來るならば何も苦しんでベクターを使用しなくてもよい。ベクターの加法や減法は全く幾何的に行ふものでその方法に二通りある。その第一は第12圖に示す方法であつて今その甲圖に於ける AB, AC なる二つの力を合成して見る。第12圖の乙圖に見るものはその合成の結果であつてB點よりAC ベクターに並行に BD を引きC點よりAB ベクターに並行に CD 線を引く、BD と CD との交點をDとしてAとDとを結べば AD は求むる AB, AC 兩ベクターの和である。かくして第12圖の如く平行四邊形を作りその對角線を結べば二つのベクターの和を得る事が出來るのである。今之を力學の方にたとへて見ればAなる物體を AB なる力と AC なる力とで引く場合に如何なる力がAに働くかと云ふ場合の有様である。今 AB の力を3貫 AC の力を5貫とするとAには8貫の力が働く様に思はれる



第 1 2 圖

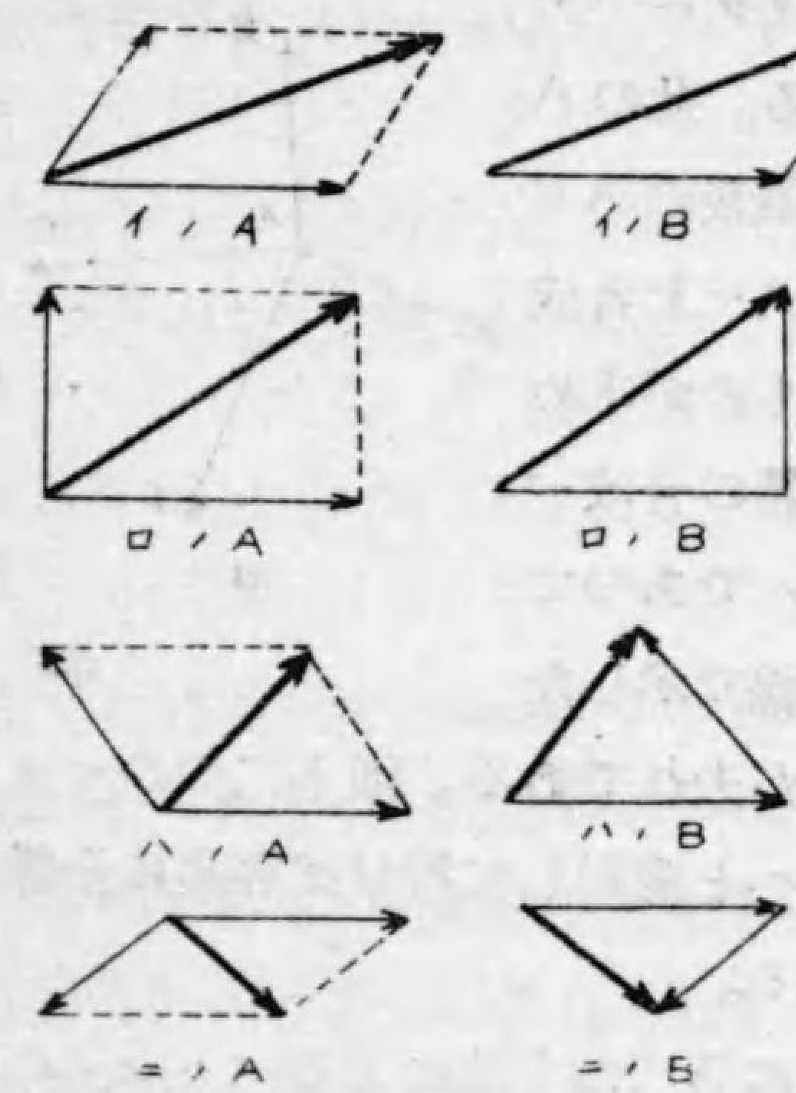
が實際はさうは行かない。此の場合の力を求めるにはABの長さを3寸なり3センチメートルなりの長さにとりACを5寸なり5センチメートルなりに取つて第12圖の乙の如く平行四邊形を作りADなる對角線を作る、此のADの對角線を同じ單位の物尺で測ると6寸なり6センチメートルなりの長さがあつたとすればAなる物體に働く力は6貫と云ふ事になるのである。かくてその力の大きさと同じ割合にベクターの長さを定めて置けば容易にその**合成値**（Resultant value レザルタント ヴアリユー）を求むる事が出來るのである。

次に第二の合成の方法を述べるとこれも第一の方法を變化して少し簡單にしたまでの話である。先づ第13圖上圖に示したAB, ACの二つのベクターを加へる方法を示して見る。下圖に於てACなるベクターに並行にABを引き、その長さをACの割合に取る、B點からABに平行にBCを引きABベクターを相當する長さにBCを定める。AとCとを結べば此のACが上圖のACとABとの二つのベクターの合成和である。此の方法が第二の方法で此の方が第一の方法よりも簡單なる事は簡單である。以上の二つの方法について三四の例を擧げて見ると第14圖の通りになる。是等の圖はAB, AC二つのベクターを加へた有樣を示すもので左側は第一の方法、卽ち平行四邊形を作つてその對角線にて合成ベクターを示す方法、右側は第二の方法を示すものである。イは第12圖及び第13圖に示すものと同じものを示しロは二つのベクターが直角をなして居る場合を示



第 1 3 圖

して居るが何れにしても合成ベクターが他の何れのベクターよりも大きい。處がハとかニとかの場合には合成ベクターの方が他のベクターよりも小さくなる、これはベクターの方向が著しく違つて居るからである。斯くの如くベクターで合成した和の事を**ベクター的和**（Vectorical sumベクトリカルサム）と云つて居る。若しベクターの方向が同じである場合にはベクター的の和と算術的の和とは相等しくなる。

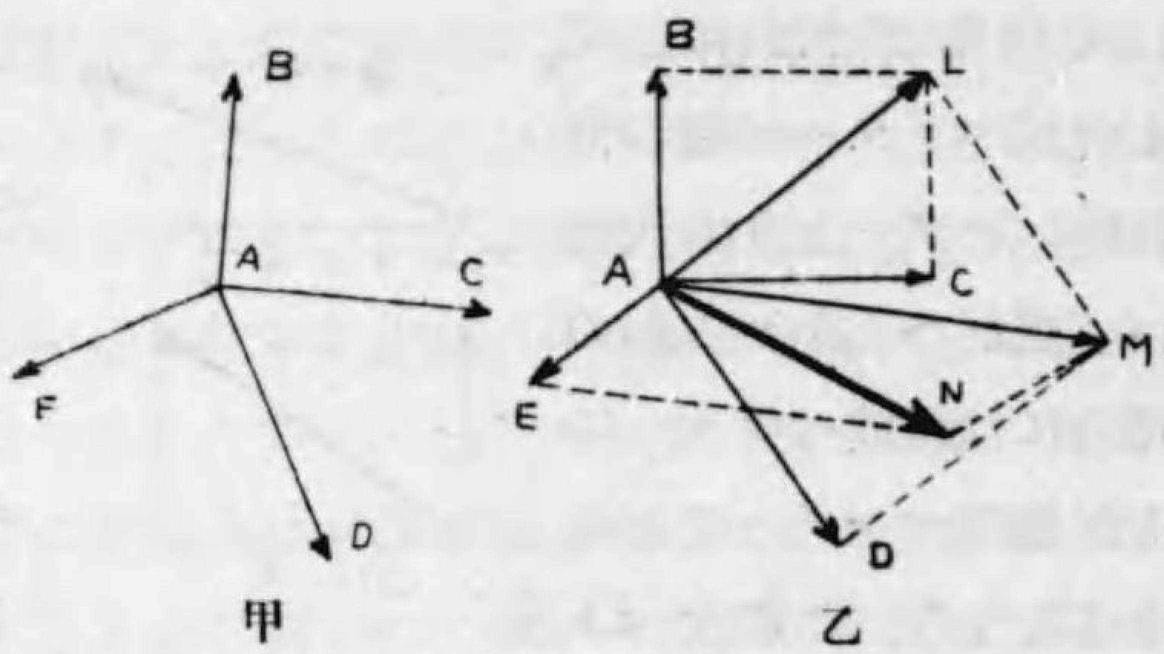


第 1 4 圖

4. 三つ以上のベクターの和

上の例は二つのベクターの和を示した例であるが三つ以上のベクターの和は如何にして求めるかと云ふとこれは上の方法を繰り返して行へば良いのである。これにも第一の平行四邊形を作つて求める方法と第二の方法を使用して求める方法とがある。先づ第一の方法を使用する場合を述べて見ると第15圖の甲に示したAB, AC, AD, AEの四つのベクターを合せて見る。第一にABとACとの合成をしなければならないが此の二つを平行四邊形の方法によつて圖の如く合成してALを求める。次には此のALにADを合成するのであつて同じ方法によつて合

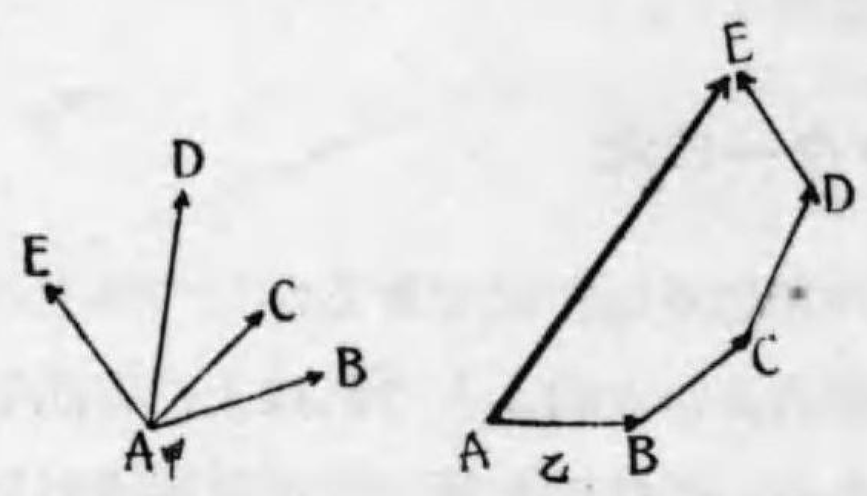
成ベクターAMを得る。此のAMに最後のAEベクターを合成したものが求める全體の合成ベクターであつて太き線で示したANが夫れである。



第15圖

即ち二つのベクターを合成する方法を次から次へと應用して行けば容易に全體のベクターを合成し得るのである。

次に第二の方法によるベクターの合成法を示して見る、此の方法も第二の方法を次から次へと應用して行けば良い譯で第16圖甲に示したAB, AC, AD, AEの四つのベクターを合成すると乙圖の如く求めらる。



第16圖

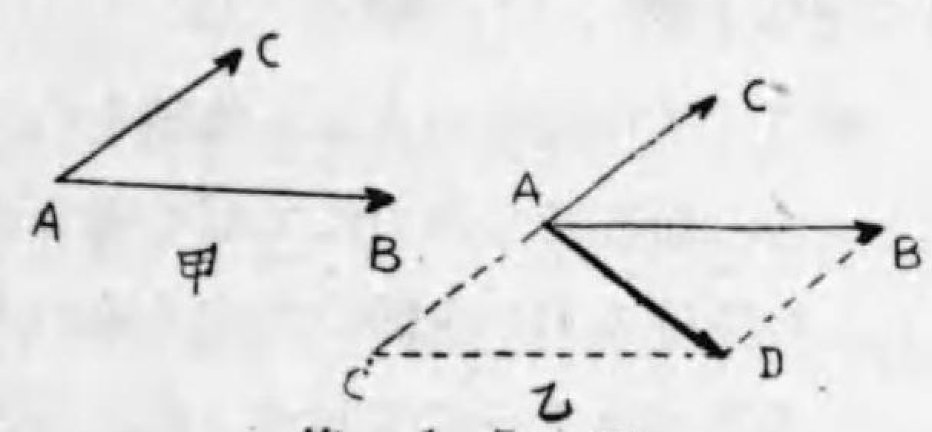
先づABの一端BからACに平行にBCを取りその長さをACの大きさに取る、ACを結べばAB, ACの合成となり之に再びAD, AEを合成せんとするにはC點よりADに平行にDを取りCDの長さをADの大きさに取る。AとDとを結べば三つのベクターの合成を得られるのである。更にAEベクターを合成すれば四つのベクター全部の合成が得られる、即ちD點よりAEに平行にDEを引きAEの大きさに等しくEDを取りAとEとを結べば第16圖

乙に於て太い線で表はして居る通りにAEなる合成ベクターが得られる。

以上の方法によると四つのベクターでも五つのベクターでも連續的に加へれば最後のベクター和を求むる事が出來るのである。

5. ベクターの差

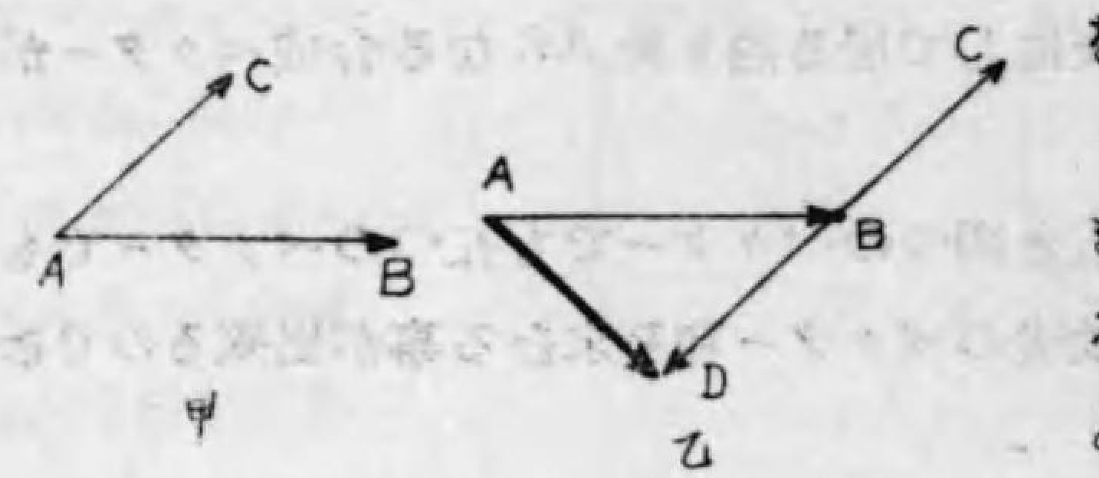
ベクターよりベクターを引くのは引かれるベクターを逆にして加へれば良いのである。云ひかへれば引かれるベクターの方向を反對にしてその和を求むるのである。此の方法も和を求むる場合の如く二通りの方法がある。その第一の方法は和を求むる場合と同樣に平行四邊形の對角線で表す方法で第二の方法も和の場合と同樣である。第一の方法を先づ示すと第17圖甲の如くABなるベクターよりACなるベクターを引かんとする場合を例に取つて見よう。此の場合は乙圖の如くABを引き之にACを移す。



第17圖

次にACを反對の方向に引き延ばして點線で示したAC′を作りACとAC′との長さを等しくする。此のAC′とABとの合成の和を平行四邊形の方法によつて求めるとADなるベクターを得るが此のADなるベクターがABベクターよりACベクターを引いた差なのである。

次に第二の方法を述べて見る。第18圖の甲の如くABなるベクターよりACなるベクターを引く方法はその乙圖に示された通りである。先づABを取り次に和の場合にはACと平行にBC



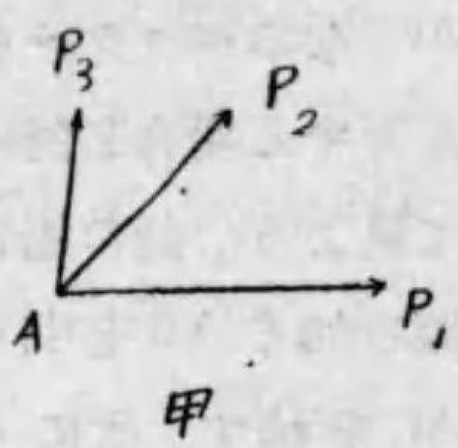
第 1 8 圖

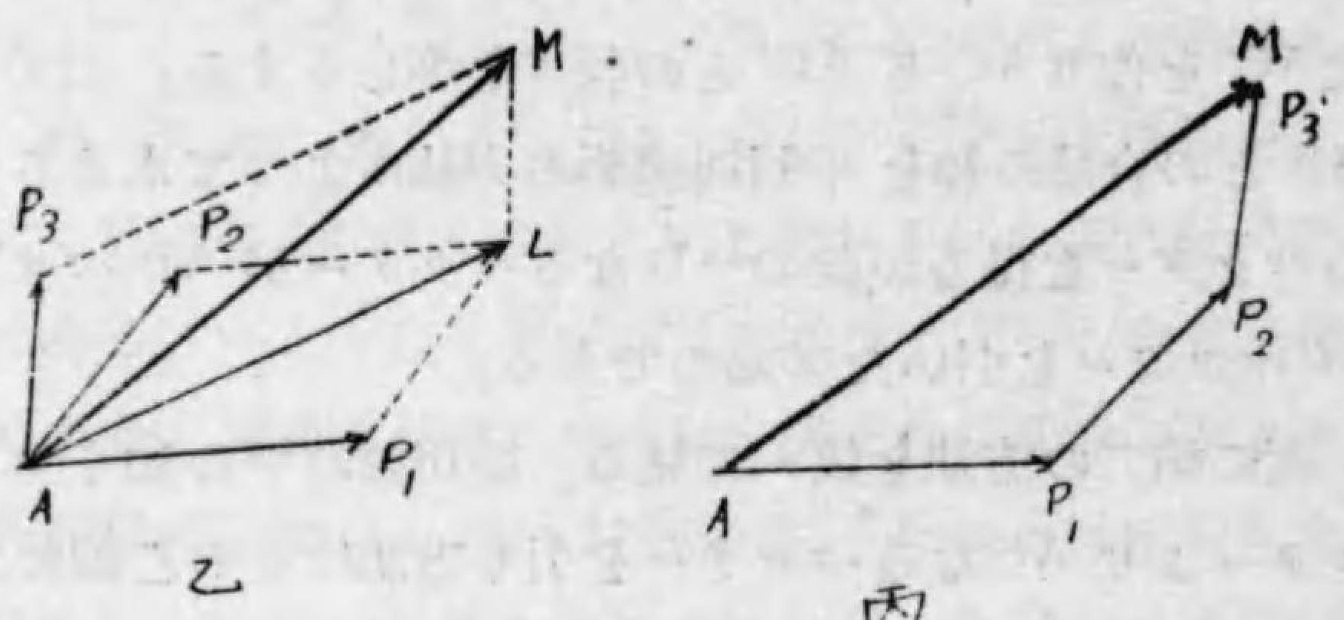
を引いてその長さをACに相當せしむべきであるが差を求むる場合には此のBCと反對の方向にBDを取りBDとBCとを等しくせしむるのである。然らばADはAB, BDの二つのベクターの和となり從つてABベクターよりBCベクターを引いた差となる。

三つ又は三つ以上のベクターの和とか差とかを求むる方法は以上の方法を連續して行へば良い譯で三つ以上のベクターの和を求める場合と同樣の方法で行へば良いのである。

6. 例 題

例 1. 第19圖甲のAなる物體をP_1, P_2, P_3なる三つの力にて引く場合にAの受ける力の全體の方向とその大きさをベクターにて示せ。但しP_1とP_2との方向は45°、P_2とP_3との方向は40°の角度を有しP_1は5貫、P_2は4貫、P_3は3貫とす。

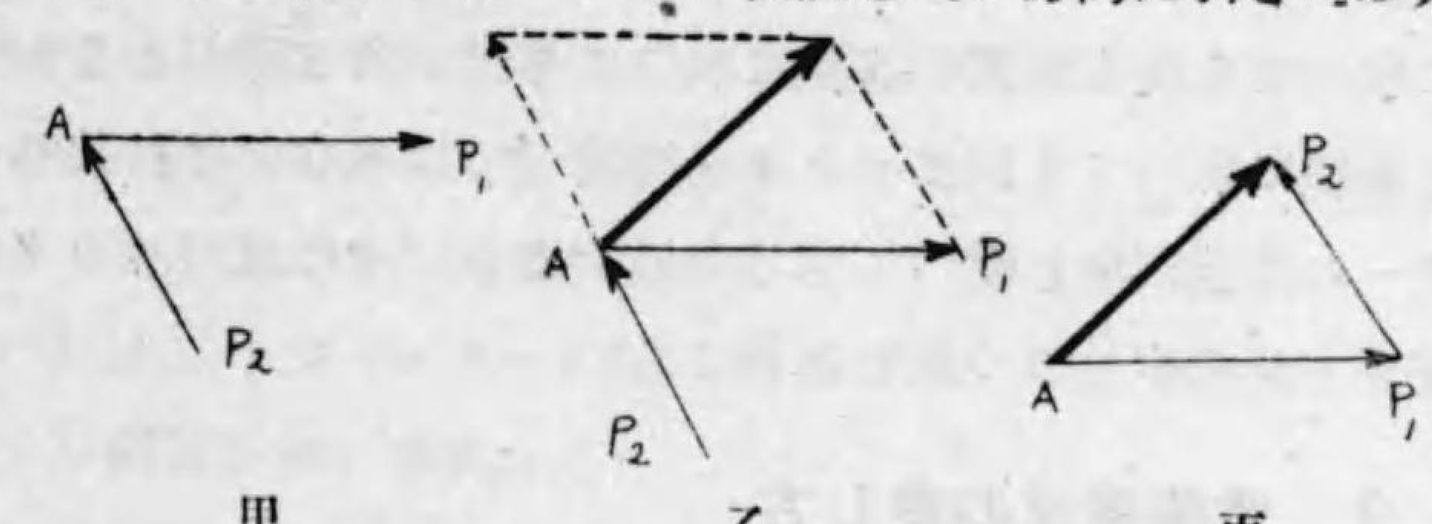




第 1 9 圖

解 今第一の方法によつて求めて見ると乙圖の如くなりAP_1, AP_2, AP_3等を夫々5, 4, 3貫に相當する寸法で作つて見るとAMなる合成力は約10貫となるのである。又第二の方法によつて求めると丙圖の如くなりその合成力AP_2も同じく約10貫となる。その合成力の方向はAM又はAP_3の如き方向を取るのである。

例 2. 第20圖甲に於てAなる物體をP_1の方向に引きP_2の方向に押せば如何なる力が如何なる方向にかゝるか。



第 2 0 圖

解 第20圖乙、丙に見る通りになるがこれはP_2なる力は引かれる反對であるからP_1の力からP_2の力を引けば良いのである。此の場合の乙は第一の方法、丙は第二の方法によつたものである。

第四章 交流回路とベクター

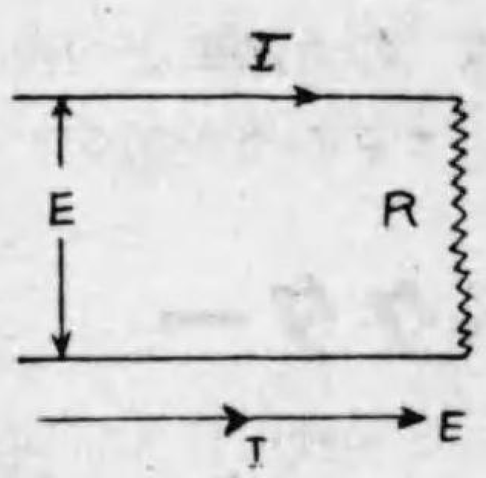
1. 電壓電流とベクター

交流では電壓電流が方向を持つて居るため之をベクターで表すと非常に好都合である。此のベクターを書き出すには先づその基準となるべき線即ち**基線**を決定して之を基として書き出す

のである。その基準となるべきものを決定する事が第一の問題で之を誤つたならばベクターを書くのに非常に骨が折れるし是によつて求める結果も容易に出て來なくなる。その基準になるべきものは電壓でも良ければ電流でも良い譯であるが之を決定する第一の條件はその値が定つて居るものを取る事でその第二は此の基準となるべき基線よりして容易に次のベクターを引き得るものでなくてはならない。その基線は一般に水平の軸に取り左より右の方向に向ふ矢を以て表す。或る場合には電壓を基線に取つても良く電流を基線に取つても良い樣な時があるが何れを基線に取つても別にベクターは異つては來ないけれ共唯ベクターの位置が少し變つて來るものである。次に此のベクターの書き方から少しづつ話を進めよう。

2. 電壓電流の表し方

回路に抵抗ばかりある場合にはその取扱ひも極く簡單で電壓と電流との間に何等の**相**（Phase フエース）の違ひがなく直流と同じ樣にオームの法則一點張りでやつて行く事が出來る。そのベクターは第21圖の如き回路ではその下圖の如く電壓と電流との相が一致し電流Ｉのベクターと電壓Ｅのベクターとは同一線上を同一の方向に向いて居る。そのベクターの大きさはオームの法則そのまゝを使用して次の如き式で表す事が出來る。



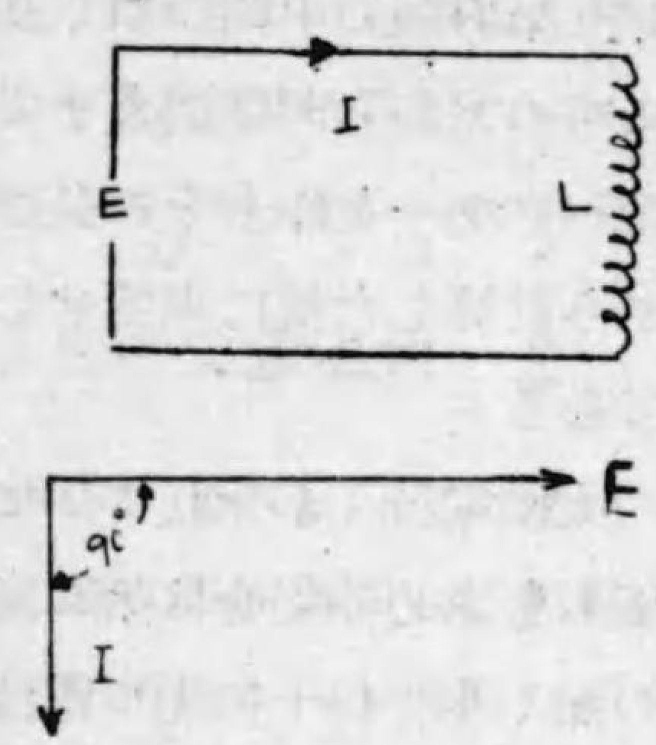
第21圖

$$E=IR$$

従つて電流なり抵抗なりが知れて居れば電壓のベクターが書

けるし電壓と抵抗とが知れて居れば電流のベクターも書く事が出來る。

次にインダクタンスのみの場合について云ふと此の場合には抵抗が全然無ければ電流は電壓より90度遅れるものである。その前に一寸ベクターの方向について述べて見よう、ベクターの廻轉する方向は一般に時計の廻轉と反對の方向に廻るものと定められて居る。今二つ以上のベクターが存在する時を考へると時計の針と反對の方向に進んで居るベクター程他のベクターよりも進んで居るものと考へる。その進む程度はベクターとベクターとの間の角度の大きな程多く進んで居る譯でその間の角度が小さければ二つのベクターの間には多くの**相差**が無い事になる。



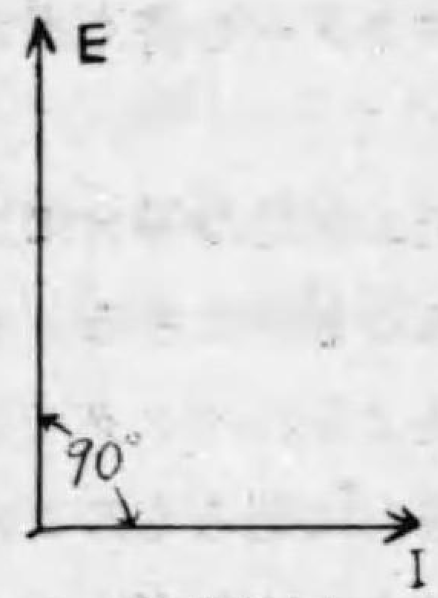
第22圖

今第22圖の上に示した樣な回路があつて之に電壓Ｅがかゝつて居る場合には下圖の如く先づＥのベクターを水平線上に取り之から90度遅らせて電流Ｉのベクターを引く。Ｉのベクターの長さは次の式より計算してその出た數字に相當した長さに取る。

$$I=\frac{E}{2\pi fL}$$

又反對に電流Ｉが知れて居て電壓Ｅを求める場合には先づ電流Ｉに相當した長さにＩを取り之を水平線上に第23圖の如く引く。此の場合に電壓は電流より90度進んで居る筈であるから90度進ませてＥのベクターを引きその長さを次の式によつて決定する。

$$E=I\times 2\pi fL$$



第23圖

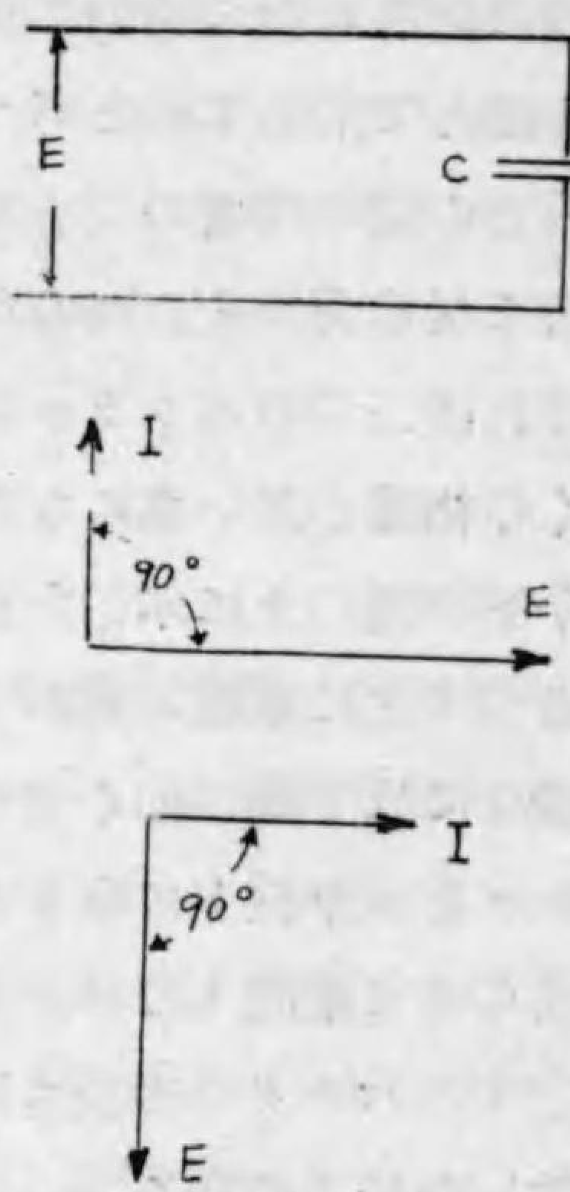
次はキヤパシチーのみの回路に於ける場合を述べて見ると此の場合は電流の方が電壓よりも90度進んで居るものである。今第24圖の上圖の如き回路に電壓Eがかゝつて居る場合を考へる。此の場合の電流は次の式から求める事が出來る。

$$I=E\times 2\pi fC$$

先づ電壓Eのベクターを基線に取り第24圖の中圖の如く水平線上に求め是から90度進ませて電流Iのベクターを作りその長さを上式から計算した價に相當せしむるのである。

次に電流Iが知れて居て電壓降下Eを求める場合は第24圖の下圖の如く水平線上に先づ電流Iを基線に取り之から90度遅らせて電壓Eのベクターを書く、此の場合のベクターEの大きさは次の式より計算した數字に相當せし大きさとなすのである。

$$E=\frac{I}{2\pi fC}$$



第24圖

3. 抵抗とインダクタンスを持つ回路

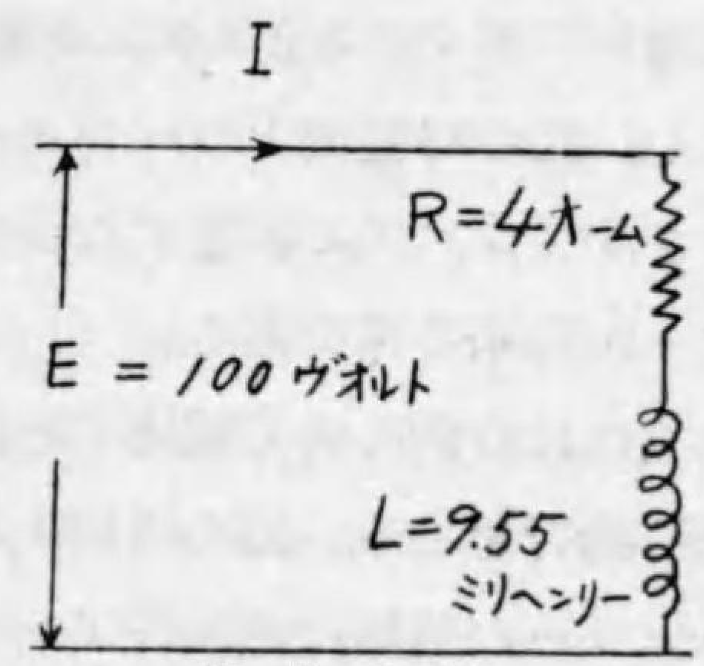
電壓や電流をベクターで表すのはどうするかと云ふ事を先づ

例を擧げて説明しよう。第25圖の如く抵抗4オーム、インダクタンス9.55ミリヘンリーの回路に交流50サイクル、100ヴォルトを加へた時の電壓電流をベクターで示さう。此の場合の計算は既に述べた通りで先づ電流の大きさを求めて見る。公式によつて電流の大きさは下の如くなる。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+(2\pi fL)^2}}$$

$$=\frac{100}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{100}{5}$$

$=20$アンペア



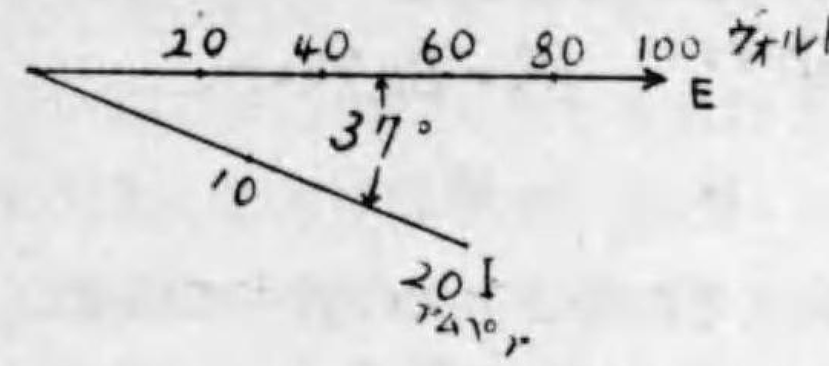
第25圖

是で電流の大きさは知れたけれ共力率が知れない、此の力率も前に示した公式からして求める事が出來る。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+(2\pi fL)^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}=0.8$$

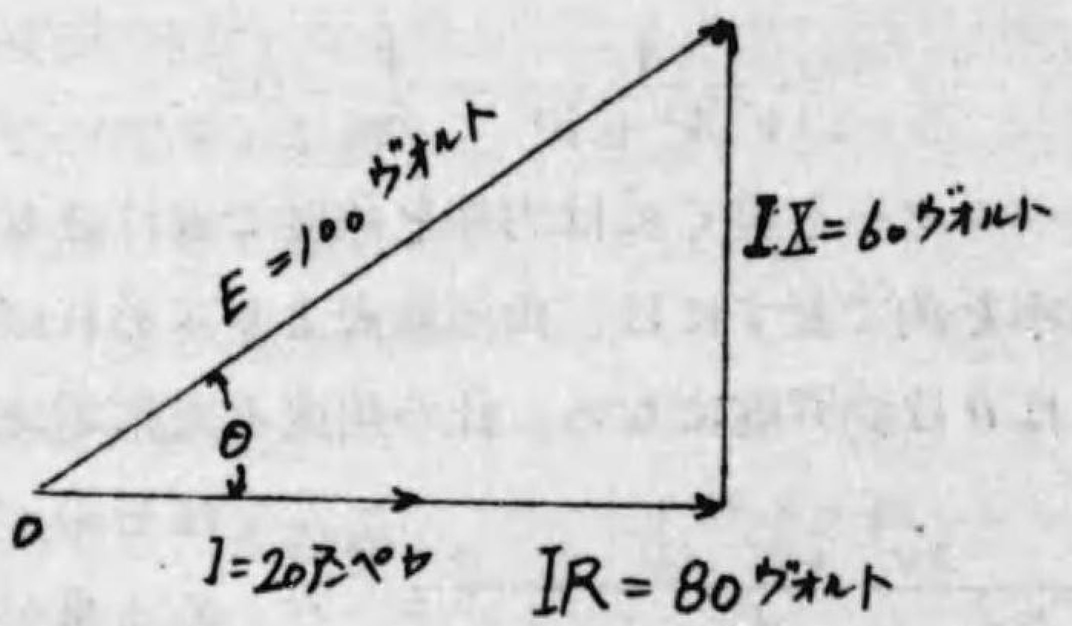
ベクターを畫くには力率を角度で表はさなければ出來ない。力率を角で表すには三角函數表より求めれば良いので此の場合にはθは約37度になる。此の角度と電壓電流の大きさがわかればそのベクターは直ちに求める事が出來るものである。此の例についてベクターの書き方を示すと先づ何を基線とすべきかを決定するのであるがこれは電壓が定つて居るのであるし之を基準とし



第26圖

てベクターが書けるのであるから先づ電壓を基線とすべきである。此のベクター圖は第26圖の如く先づ電壓100ヴォルトに相當する丈の長さEを水平の方向に引く、次に此の回路ではインダクタンスと抵抗のみであるから必然的に電流は電壓より遲れるのである。所がその電壓より電流が遲れる角度は先程計算した通り37度であるから此の角度丈遲らせて電流Iのベクターを引く。此の時電流Iのベクターの長さを前に計算した電流の大きさ20アンペアに相當する長さに取ればこれで此の回路のベクターが出來る譯である。

次に此の例に於て電流Iと抵抗及びインダクタンスが知れて居る場合をとる、即ち抵抗4オーム、インダクタンス9.55ミリヘンリーの場所に電流20アンペアが流れた場合に於ける電壓降下のベクターを示さう。此の場合は電流が知れて居るので此の電流のベクターを基線として書いて行かなければならない。先づ第27圖の如く水平に基線を取り之を20アンペアなる電流に相當した長さに取る。此の電流が抵抗Rを通る間に於ける電壓降下はその電流と同じ方向であるから電流のベクターと同一線上に此の抵抗による電壓降下を取りその長さを次の數字に相當した長さとする。



第２７圖

抵抗による電壓降下＝IR＝20×4＝80ヴォルト

次に電流がインダクタンスを通れば前にも述べた通り90度遲れるのであるから此のインダクタンスの中で起きる電壓降下のベクターは電流よりも90度進んで居らなければならない。電壓降下が90度進むならば此の電壓降下は抵抗による電壓降下と直角をなし然も時計の廻轉と反對の方向に進んで居らねばならない。今此の電壓降下を求めると抵抗による電壓降下IRの先端より90度進んだ直線IXを引き此のIXの長さを次の式より計算して出た數字に相當した長さとする。

インダクタンスによる電壓降下＝IX＝I×2πfL

＝20×2π×50×0.00955＝60ヴォルト

此のIXの先端と電流Iの初めの點Oとを結べば抵抗及びインダクタンスによる電壓降下のベクターが求められる。此の長さは次の式の如く計算によつて求められる。

$$E=\sqrt{(IR)^2+(IX)^2}=\sqrt{80^2+60^2}=100\text{ヴォルト}$$

斯の如く計算によつて求められた100ヴォルトは此のベクターの長さに相當するのである。かくして此の回路のベクターを完全に書き得た譯であるが力率は何を以て表はすかと云ふ事が一つの問題である。此の力率は基線即ち電流Iのベクターと最後の電壓のベクターEとの間の角度を以て表す事が出來る。今此の角を圖の如くθで表せば此の回路の力率は$\cos\theta$を以つて表す事が出來る。從つて此の角θが小さければ小さい程力率が良い譯で此の角が大きくなればなる程力率は惡くなる。此の角が大きくなる原因は第27圖のベクター圖によつて知られる通りインダクタンスによる電壓降下が抵抗による電壓降下に比して大きくなるためである。インダクタンスによる電壓降下が全然なければ此の角は無論零で$\cos\theta$は1となる。インダクタンス

による電壓降下が大きくなるにつれて θ は大きくなり力率の $\cos\theta$ は小さくなるのである。

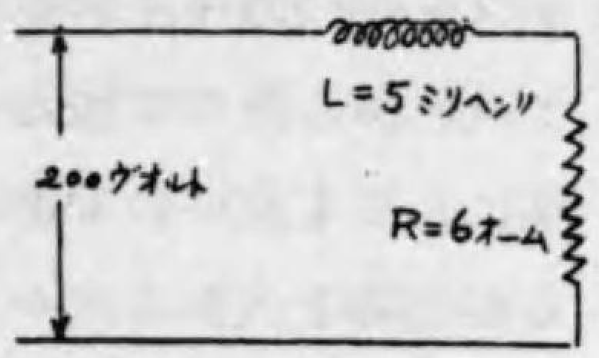
4. ベクターの使用法

ベクターを使用して電壓とか電流とかを表せば甚だ都合良くそれ等の關係を了解する事が出來るものであるがそれのみならずベクターのみを以ても種々な計算を行ふ事が出來る。從つてベクターは電壓や電流の相關係をはつきり了解するために計算の手段として畫く事もあるし場合によつては此のベクターのみで實際の計算をなす場合もある。交流理論の色々な關係をはつきり知るために計算の手段として此のベクターを畫く場合には別にベクターの長さを正確に或る寸法に切る必要は無く唯その大きさに近い寸法に取ればよい。所が此のベクターを以つて直接に計算しようとする場合にはさうは行かない、即ちベクターの長さは正確にその電壓なり電流なりの數量に正比例しなくてはならず相差を表す角度(θ)等も正確に分度器を以つて測らなければならない。

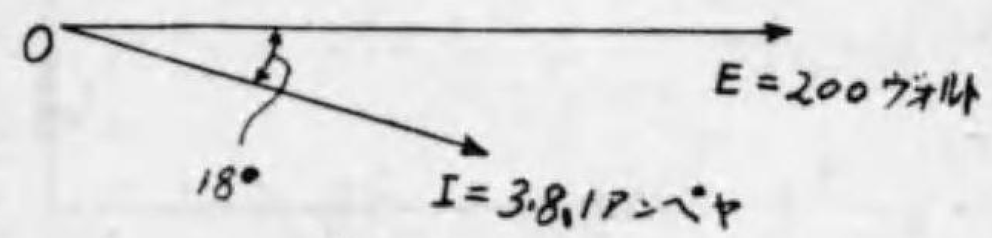
5. 簡單な回路の例題

例 1. 第28圖の如き回路があつて之に交流50サイクル、電壓200ヴォルトをかけると如何なる電流が流れるか、ベクターを以て表せ。

解 第29圖の如く先づ電壓200ヴォルトを基線に取り之を水平線上に畫く。次にインダクタンスと抵抗とによる合成インピーダンスZを計算によつて求めて見る。



第 2 8 圖



第 2 9 圖

此の計算は下の如くして計算し得らる。

$$\text{リアクタンス}X=2\pi fL=2\pi\times 50\times 0.005=1.57\text{オーム}$$

$$\text{合成インピーダンス}Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

$$=\sqrt{5^2+1.57^2}=5.25\text{オーム}$$

インピーダンスが知れゝば電流 I は次の如くして見出さる。

$$I=\frac{E}{Z}=\frac{200}{5.25}=38.1\text{アンペア}$$

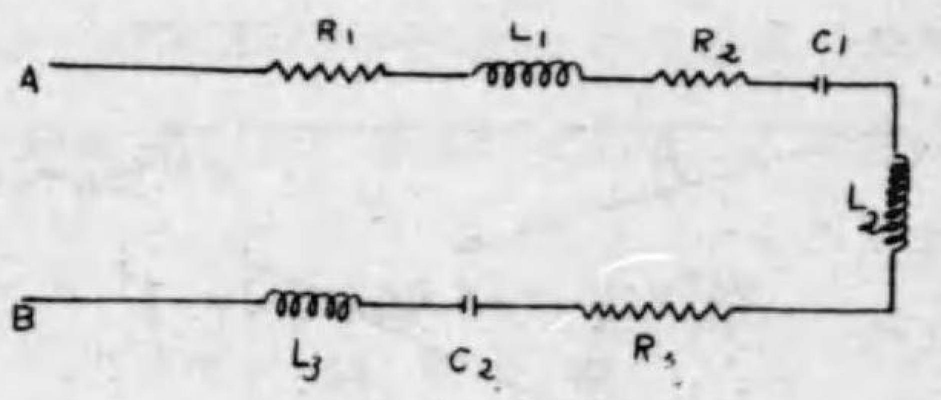
次に此の回路の力率であるがこれは公式により次の如くなる。

$$\cos\theta=\frac{R}{Z}=\frac{5}{5.25}=0.952$$

此の 0.952 なる數字を三角函數表の cos の行で見出すと約18度を得る。從つて第29圖に於てEの電壓より18度遲らせて電流のベクターを引き之を電流の大さ38.1アンペアに相當する長さに取ればベクターは出來上る。

6. 直列回路の電壓降下

次は抵抗とかインダクタンスとかキヤパシチーとかゞ多數存在する場合にはどう云ふ風に取扱つたならば良いかと云ふ問題である。是は初めに述べた計算の公式を用ふる方法に於ては各各抵抗なら抵抗をインダクタンスならばインダクタンスを合計して計算を行つたものである。ベクターを書く上に於ても同樣に各同じものを加へ合せて恰も一つの抵抗と一つのインダクタ



第 3 0 圖

ンスと一つのキャパシチーとから成つて居る樣にしても良いのであるが是等を次から次へと手當り次第にベクターで書いて行く方法もある。

先づ第30圖の如き回路について說明して見よう。今此の回路にＩなる電流が流れて居る場合を考へて見る、此の場合抵抗は抵抗で合計しインダクタンスはインダクタンスで合計して見ると抵抗による電壓降下、インダクタンスによる電壓降下は夫々次の式のやうになる。

$$\text{抵抗による電壓降下}=\mathrm{I}(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3)\ \text{ヴオルト}$$

$$\text{インダクタンスによる電壓降下}=\mathrm{I}\omega(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3)\ \text{オーム}$$

キャパッシチーが直列に接續されて居る場合を合計するには次の式によつて行ふ。

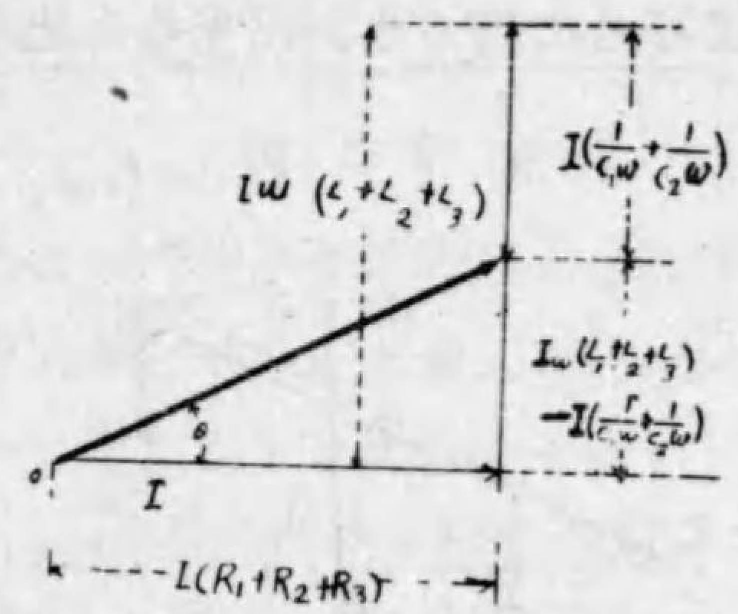
$$\frac{1}{\mathrm{C}}=\frac{1}{\mathrm{C}_1}+\frac{1}{\mathrm{C}_2}$$

從つてこの二つのキャパッシチーによる電壓降下は次式によつて表はさる。

$$\text{キャパッシチーによる電壓降下}=\mathrm{I}\left(\frac{1}{\mathrm{C}_1\omega}+\frac{1}{\mathrm{C}_2\omega}\right)\text{オーム}$$

是等の電壓降下が知れたならば直ちに全體の電壓降下のベクターを引く事が出來る、此の場合は電流が知れて居るのであるから此の電流をベクターの基線に取るのが至當である。此の電壓降下のベクターは第31圖の通りで電流のベクターと同樣に抵抗による電壓降下を取りその長さを$\mathrm{I}(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3)$の大きさに等しくする。次にインダクタンスによる電壓降下は電流が電壓

降下より90度遲れるのであるから抵抗による電壓降下よりも90度の角度丈進む、從つてそのベクターは抵抗による電壓降下の先端より時計の方向と反對方向に垂直線を立てその長さを$\mathrm{I}\omega(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3)$の大きさに相當せしむればよい。



第 3 1 圖

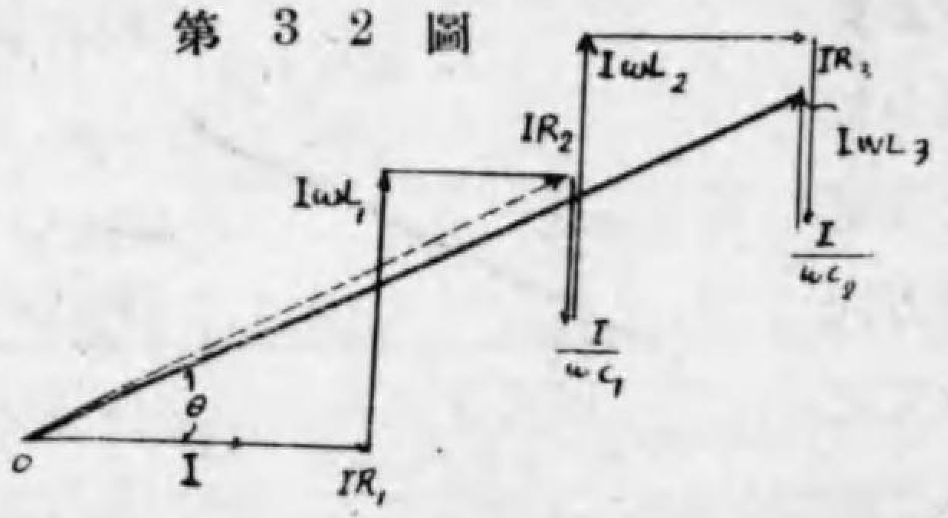
キャパシチーによる電壓降下は抵抗による電壓降下よりも90度遲れるものであるから丁度インダクタンスによる電壓降下の逆となる。從つて逆の方向に$\mathrm{I}\left(\frac{1}{\mathrm{C}_1\omega}+\frac{1}{\mathrm{C}_2\omega}\right)$の大きさ丈のベクターを引き去り此の點と起點Ｏとを結べば求むる全體の電壓降下のベクターを求め得た譯である。その電壓降下の大きさはベクターの長さで表はされその方向はベクターの方向で表はされる。今此のベクターと基線たる電流のベクターとの間の角度をθとすればその力率は$\cos\theta$を以つて表はされる。又此のベクターの長さを計算的に求めやうとすれば次の式のやうになる。

$$\text{電壓降下}=\mathrm{I}\sqrt{\left[\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3\right]^2+\left[\omega(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3)-\left(\frac{1}{\mathrm{C}_1\omega}+\frac{1}{\mathrm{C}_2\omega}\right)\right]^2}$$

今度は是等の電壓降下を抵抗なら抵抗と一つに集めないで別別に電壓降下のベクターを引いて見よう。卽ち第30圖に於て上方のR_1からL_1へと云ふ風に次から次へと電壓降下を求めやうと云ふのである。これは抵抗による電壓降下は IR で表はされインダクタンスによるものは$\mathrm{I}\omega\mathrm{L}$でキャパシチーによるものは$\frac{\mathrm{I}}{\omega\mathrm{C}}$で表はすと云ふ事と夫等のベクターの方向とを知つて居れ

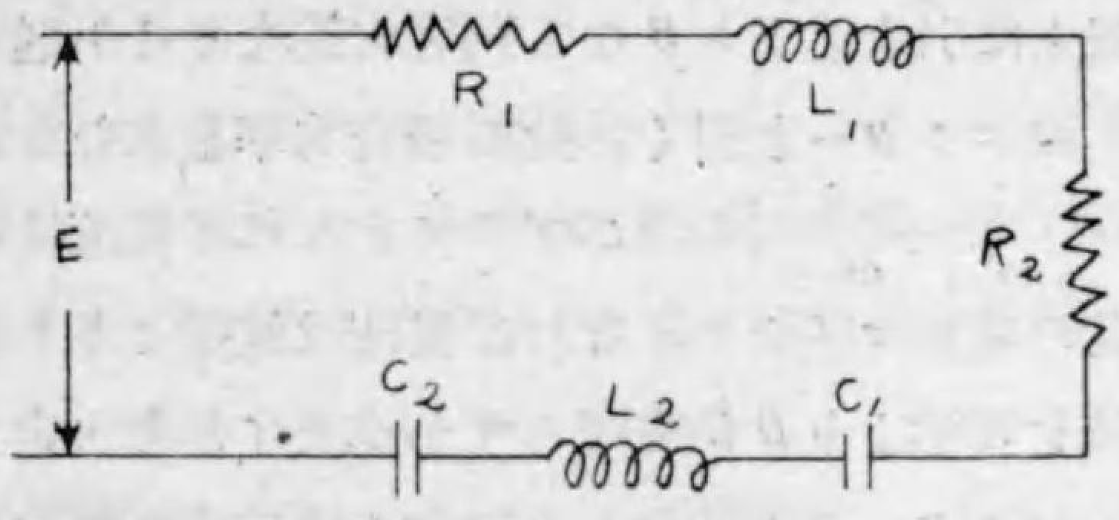
ば容易に書く事が出來ると思ふ。第32圖はAより $R_1L_1R_2C_1$ 等の順序に電壓降下のベクターを書いて行つたものである。先づ R_1 による電壓降下は電流のベクターと同一方向であるから圖の如くその方向に IR_1 の大きさに相當する長さに引く、次に L_1 による電壓降下は電流より90度進み云ひかへれば電流が電壓降下より90度遅れるからして圖の如く時計と反對の方向に $I\omega L_1$ に相當せしめた長さに取る。同樣にして IR_2 を電流に平行に取りキャパシチーの場合は電壓降下より電流が90度進むから $\frac{I}{\omega C_1}$ を電流より90度遅らせて取る、次に $\frac{I}{\omega C_1}$ と反對の方向に $I\omega L_2$ を取り、續いて電流に平行に IR_3 を書き是より $\frac{I}{\omega C_2}$ を書き之と反對の方向に $I\omega L_3$ を書く。最後に此の $I\omega L_3$ の先とO點とを結べば求むる全體の電壓降下が求められるのである。此の次から次へと書いて行く電壓降下は各所各所の電壓降下が知れるし、その上電壓降下を書く順序としても此の方法が適當である。今第30圖のA點と R_2 を通つた所との間の電壓をベクターで知らうと思へばO點と IR_2 の先とを點線で示した通りに結べば此の線がその間の電壓降下のベクターである。同樣にAと L_2 を通つた所の電壓降下のベクターを知らうと思へばOと $I\omega L_2$ の先とを結べば此のベクターを得る事が出來る。此の場合に於ける力率は合成した電壓降下のベクターと電流のベクターとの間の角度 θ を以て表す事が出來、$\cos\theta$ はその力率の値である。

第 3 2 圖



7. 電流を求むる場合

抵抗やキャパシチーやインダクタンス等が多數直列に存在する場合にその電壓を知つて電流や力率を求めると云ふ事は已に計算公式の所で示した通りであつて之をベクターで表すにしても比較的簡單である。今第33圖の如き回路にEなる電壓がかけられたとする、此の場合に此の回路を流れる電流は如何なる大きさと方向とを持つかと云ふ事をベクターで示して見る、此の電流のベクターを求めるにはやはり計算式から導かなければならない、その計算は前に示した樣に抵抗は抵抗、インダクタンスはインダタタンスと夫々同じものを集め之を公式に代入して電流の値を求める。此の電流の大きさを求めると次の通りになる。



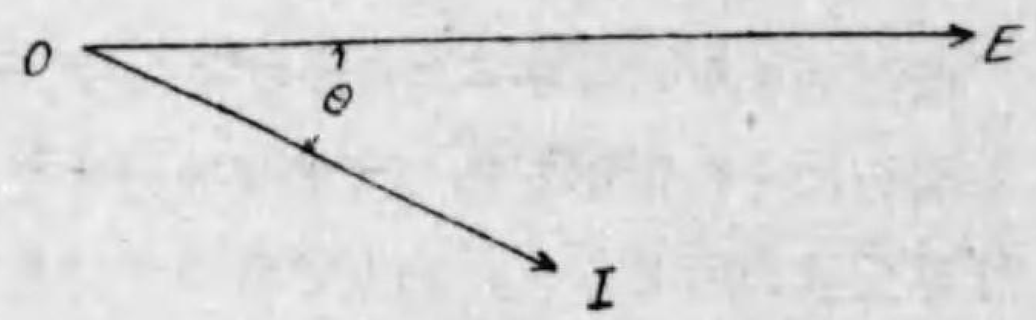
第 3 3 圖

$$I=\frac{E}{\sqrt{\left(R_1+R_2\right)^2+\left[\omega\left(L_1+L_2\right)-\left(\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}\right)\right]^2}}$$

此の式から電流は見出す事が出來るが今度はその方向を知る必要がある。是は力率を計算すれば位相角が知れ是からベクターを引く事が出來る。θ を位相角とすれば此の力率は次の通りに計算し得らる。

$$\cos\theta=\frac{R_1+R_2}{\sqrt{\left(R_1+R_2\right)^2+\left[\omega\left(L_1+L_2\right)-\left(\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}\right)\right]^2}}$$

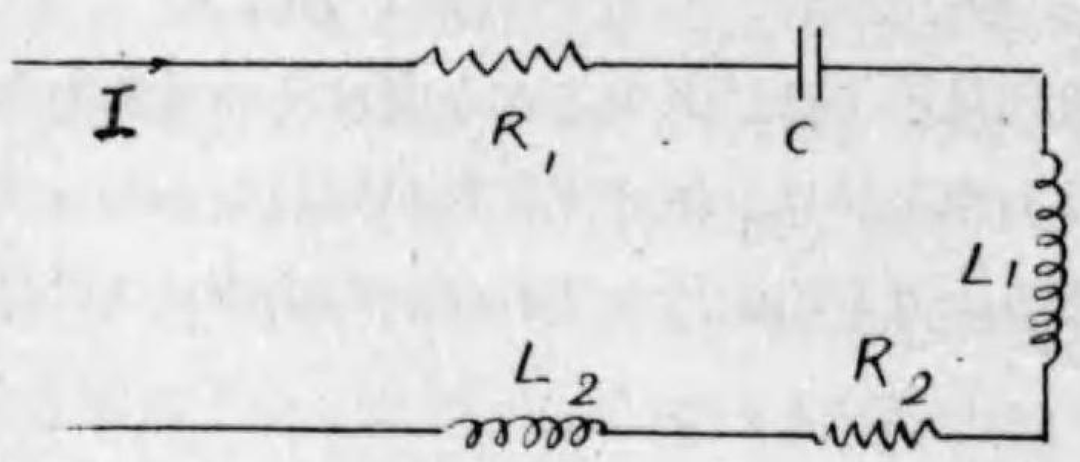
此の式から $\cos\theta$ なる力率を求め得たならば三角函數表からθの角度の大きさを見出し第34圖の如くベクターを引くのである、即ち電壓Eに相當する長さにEのベクターを水平線上に引き之よりθなる角度丈進ませるか遲らせるかして電流Iのベクターを引く。此の場合力率を求むる式中の$\omega(L_1+L_2)-\left(\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}\right)$の項がプラスとなれば電流は電壓よりも遲れ、此の項がマイナスとなれば電流は電壓よりも進むので是から電流を電壓よりθ角丈遲らすか進ますかを決定すればよい。電流のベクターの方向をかくの如く決定すれば次はベクターの長さであるが之は電流Iの長さに相當する長さに引けば宜しい。



第 3 4 圖

8. 直列回路の例題

例 1. 第35圖の如き直列回路があつて抵抗R_1は5オーム、R_2は3オーム、インダクタンスL_1は0.1ヘンリー、L_2は20ミリヘンリー、キャパシチーCは183マイクロフアラッドなる時5アンペアで50サイクルの交流電流が流れるとすればその電壓降下をベクターにて表せ。



第 3 5 圖

解 先づ最初にR_1, R_2, L_1, L_2, C等の各部分に於ける電壓降下

を求めて見る。

R_1による電壓降下$=IR_1=5\times5=25$ ヴォルト

R_2による電壓降下$=IR_2=5\times3=15$ ヴォルト

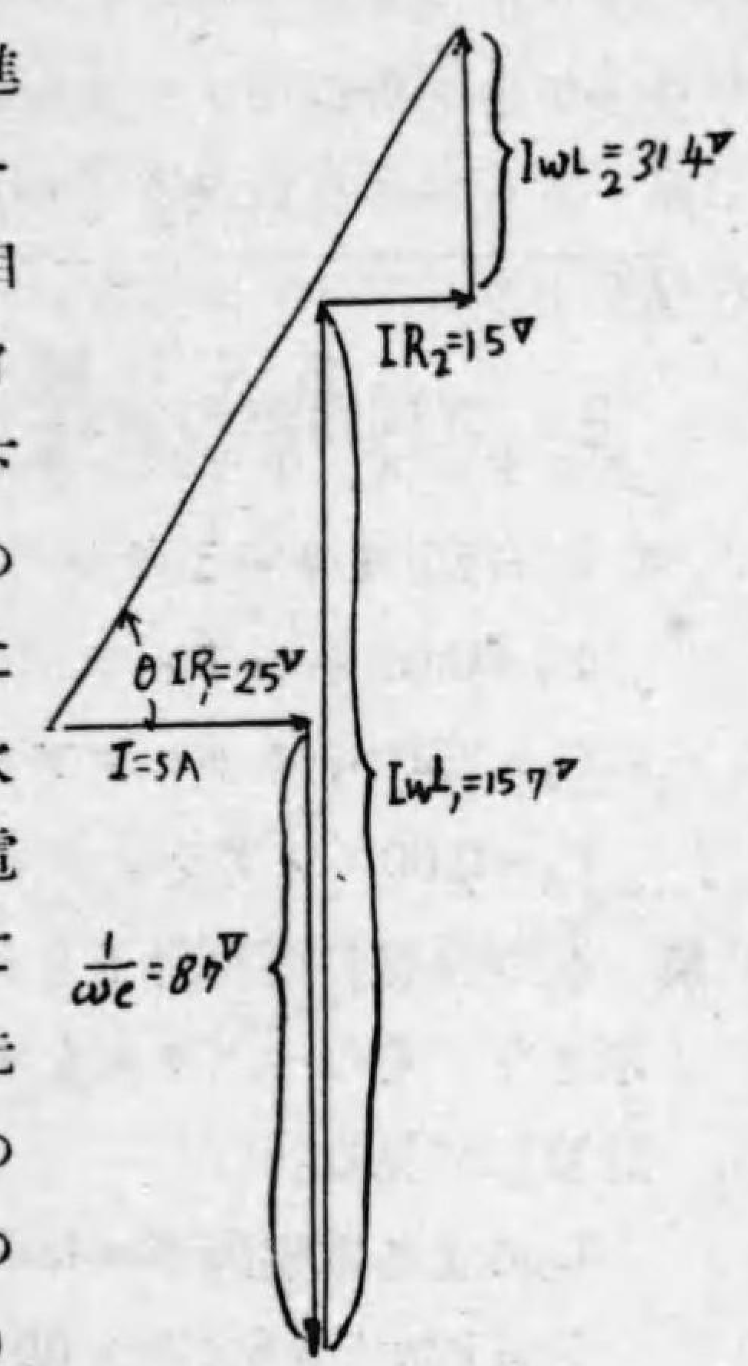
L_1による電壓降下$=I\omega L_1=5\times2\pi f\times0.1$

$=5\times2\pi\times50\times0.1=157$ ヴォルト

L_2による電壓降下$=I\omega L_2=5\times2\pi f\times0.02=31.4$ ヴォルト

Cによる電壓降下$=\frac{I}{\omega C}=\frac{5}{2\pi f\times0.000183}=87$ヴォルト

是から此の回路の電壓降下のベクターを畫き得る譯で先づ基線として電流Iを第36圖の如く水平線上に取る。此の電流線上にR_1による電壓降下IR_1を取りその長さを25ヴォルトに相當せしむ、次にキャパシチーCによる電壓降下は電流が是よりも90度進むものであるから電流のベクターより時計の方向に87ヴォルトに相當する長さの線を垂直に取る。インダクタンスL_1による電壓降下はキャパシチーによる電壓降下の反對であるからして反對の方向に157ヴォルトの電壓降下を取る次に電流に平行に抵抗R_2による電壓降下を畫き之より90度進ませてL_2による電壓降下を畫きその先と原點Oとを結べば求むる全體の電壓降下である。此の電壓降下の大きさはベクターより明かな通り下式の通りになる。



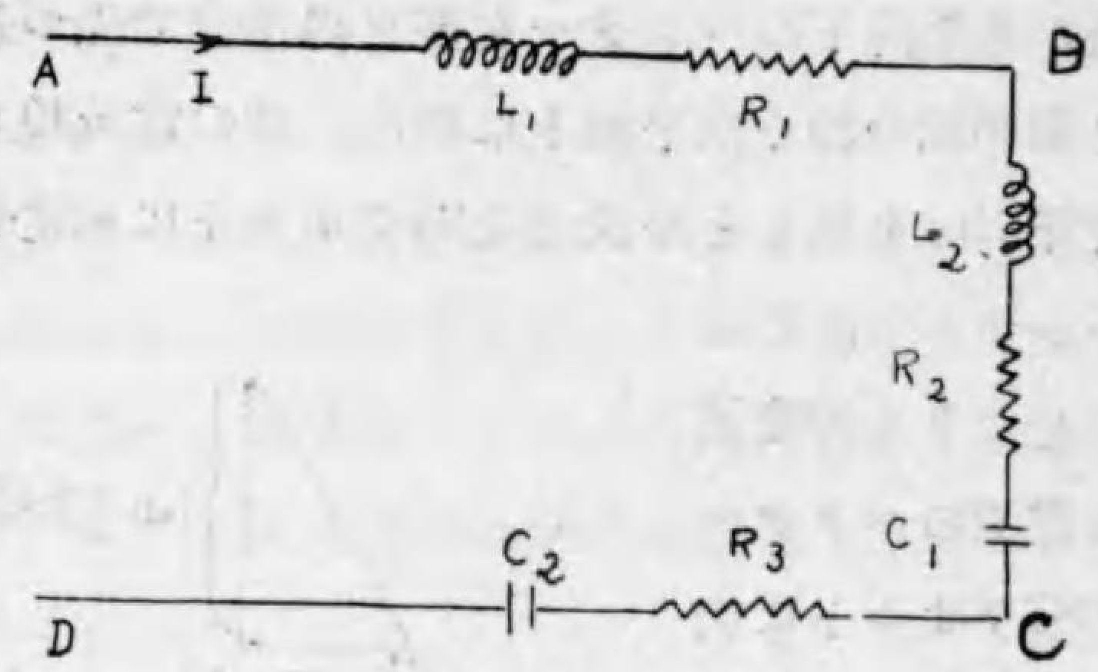
第 3 6 圖

$$V=\sqrt{(25+15)^2+(157+31.4-87)^2}=108 \text{ ヴオルト}$$

次に力率は電壓降下のベクターと電流のベクターとの間の角度をθとすれば$\cos\theta$で表はされる。cosは底邊を斜邊で割つたものであつて斜邊は108、底邊は(25+15)であるから次の如く見出し得。

$$\cos\theta=\frac{25+15}{108}=0.37$$

例 2. 第37圖の様な回路があつて之に交流60サイクルの電流が8アンペア流れて居るとする此の場合に於けるAB間AC間AD間及びBC間の電壓降下をベクターにて示せ但し抵抗、インダクタンス、キヤパシチーは各下記の如き値を有す。



第 3 7 圖

$L_1=15$ ミリヘンリー	$R_1=4$ オーム
$L_2=0.05$ ヘンリー	$R_2=20$ オーム
$C_1=250$ マイクロフアラッド	$R_3=6$ オーム
$C_2=0.001$ フアラッド	

解 先づ全體の電壓降下をABCDの順に畫いたベクターで示さう。そのベクターを引く前にL_1R_1等による電壓降下を計算して見る。

L_1による電壓降下$=I\omega L_1$

$=12\pi fL=8\times2\pi\times60\times0.015$

$=45.2$ ヴオルト

R_1による電壓降下$=IR_1=8\times4=32$ ヴオルト

L_2 〃 $=I\omega L_2=8\times2\pi\times60\times0.05$

$=150$ ヴオルト

R_2 〃 $=IR_2=8\times20=160$ ヴオルト

C_1 〃 $=\dfrac{I}{\omega C_1}=\dfrac{I}{2\pi fC_1}=\dfrac{8}{2\pi\times60\times0.00025}$

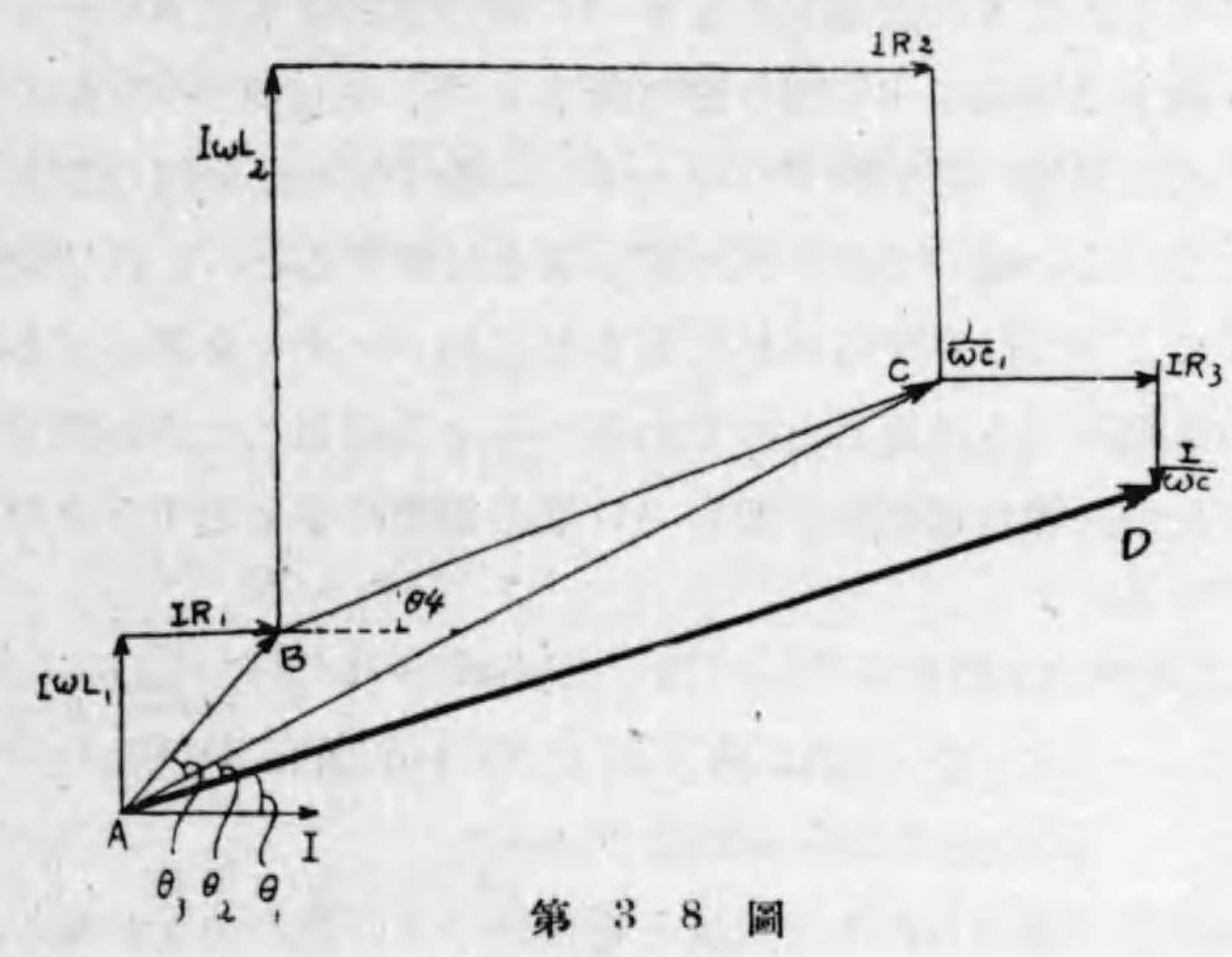
$=85$ヴオルト

R_3 〃 $=IR_3=8\times6=48$ ヴオルト

C_2 〃 $=\dfrac{I}{\omega C_2}=\dfrac{I}{2\pi fC_2}=\dfrac{8}{2\pi\times60\times0.001}$

$=21.2$ ヴオルト

各部分の電壓降下が知れたならば是から電壓降下のベクターを畫き始められる譯で先づ電流のベクターを基線に取り第38圖の如く之を水平線上に引く。此の基線より90度進ませて線を引きその長さを45.2ヴオルトに相當せしむれば此のベクターはL^1による電壓降下を表す、此の先から電流に平行に線を引きその



第 3 8 圖

長さを32ヴォルトに相當せしむれば此の線は R_1 による電壓降下を示す。

次に此の線から直角に進ませてその長さを 150 ヴォルトに相當せしむれば是は L_2 による電壓降下で R_2 による電壓降下は此の先より電流に平行な線を引きその長さを 160 ヴォルトに相當せしむれば良く、更に此の點より時計の方向に垂線を立て此の長さを85ヴォルトに相當せしむれば是がC_1による電壓降下のベクターである。R_1による電壓降下のベクターは此の點より電流に平行に48ヴォルトに相當する長さを取れば良く，C_2による電壓降下は此の點より時計の方向に垂線を立てその長さを 21.2ヴォルトに相當せしむればよい。此の最後のベクターの先と初めの點Aとを結べば全體の電壓降下のベクターとなる。

第37圖に示す A, B, C, D の各點の位置は第38圖のベクター圖に示した點の位置となり AB 間の電壓降下のベクターは第38圖の AB と表はされた通りになり AC 間の電壓降下は AC ベクターの通りで同様に BC 間の電壓降下も BC ベクターの如くなる。次に是等の電壓降下のベクターは數字的には如何なる大きさと方向とを持つて居るかと云ふ事を計算すると、これは前の公式によつて計算する事が出來るが折角ベクターを畫いて各部分の電壓降下も計算したのであるから之を利用した方が樂である。先づ全體の電壓降下卽ち AD 間の電壓降下を示すと次の通りである。

$$V_{AD}=\sqrt{(IR_1+IR_2+IR_3)^2+\left(I\omega L_1+I\omega L_2-\frac{I}{\omega C_1}-\frac{I}{\omega C_2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(32+160+48)^2+(45.2+150-85-21.2)^2}$$
$$=\sqrt{240^2+89^2}=256 \text{ ヴォルト}$$

回路の力率が知れゝば電流と電壓降下との間の角度が知られベクターの方向もはつきりする。今 θ_1 を電流と AD間の電壓降下のベクターとの間の角とすれば力率は $\cos\theta$ で表はされこれも公式から計算し得られるけれ共 $\cos\theta$ は斜邊で底邊を除したものであるから次の如く簡單に計算する事が出來る。

$$\cos\theta=\frac{32+160+48}{256}=\frac{240}{256}=0.937$$

次に A と C との間の電壓降下とそれ迄の力率とを調べて見る此の電壓降下と力率とは前と同じ方法によつて計算する事が出來、ベクターの長さと方向とを數字的に表す事が出來る。

$$V_{AC}=\sqrt{(IR_1+IR_2)^2+\left(I\omega L_1+I\omega L_2-\frac{I}{\omega C_1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(32+160)^2+(45.2+150-85)^2}=221 \text{ ヴォルト}$$

$$\cos\theta_2=\frac{32+190}{221}=0.868$$

次に A と B との間の電壓降下卽ち第38圖の AB ベクターの大きさは次の通りである。

$$V_{AB}=\sqrt{(IR_1)^2+(I\omega L_1)^2}=\sqrt{45.2^2+32^2}=60.3 \text{ ヴォルト}$$
$$\cos\theta_3=\frac{45.2}{60.3}=0.75$$

最後に B と C との間の電壓降下は第38圖の BC ベクターの通りになり之を數字的に表はすと次の如くになる。

$$V_{BC}=\sqrt{(IR_2)^2+\left(I\omega L_2-\frac{I}{\omega C_1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(160)^2+(150-85)^2}=172.8 \text{ ヴォルト}$$

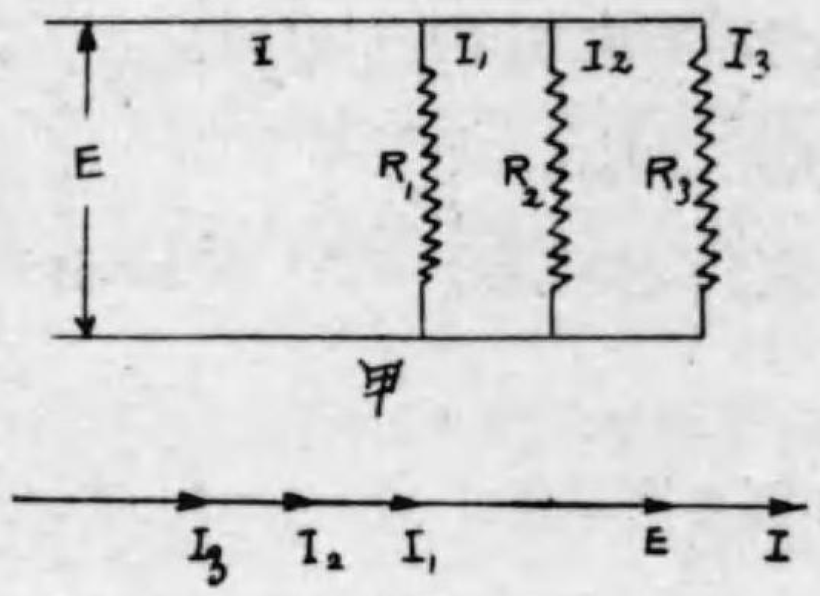
$$\text{co.}\,\theta_4=\frac{160}{172.8}=0.929$$

是等の場合に於て $\cos\theta$が求められゝば θ の角度は三角函數表より求め得らる。

9. 抵抗の並列回路

並列回路のベクターを書くに當つて何のベクターを基線に取つてベクターを書き始めるかゞ問題である。並列回路は各分岐回路に各々同じ電壓がかゝつて居るのであるから各分岐回路の電壓は一定で從つて電壓を基線に取つてベクターを書き始めなければならない。

先づ順序として抵抗のみが並列に接續されて居る回路の電流を調べて見よう。第39圖甲に於て $R_1R_2R_3$ が並列に接續されて居る回路にEなる電壓が加へられたとする、此の場合は回路にインダクタンスが無いので電壓と電流とは同相になり、電壓と電流との關係は全くオームの法則によつて解決する事が出來る。今Eを100ヴオルト、



第　39　圖

R_1 を5オーム、R_2 を8オーム、R_3 を10オームとすれば各回路に流るゝ電流は各々次の通りである。

$$I_1=\frac{E}{R_1}=\frac{100}{5}=20\text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{E}{R_2}=\frac{100}{8}=12.5\text{アンペア}$$

$$I_3=\frac{E}{R_3}=\frac{100}{10}=10\text{アンペア}$$

然るに電壓と電流とは抵抗ばかりの回路であるから同相になくてはならない、そのベクターは第39圖の如く先づ基線に電壓Eを取り此の上に I_1, I_2, I_3 を夫々 20, 12.5, 10 アンペアに相當する長さに取る、此の三つのベクターを合すとIのベクターを得その長さは下記の通りである。

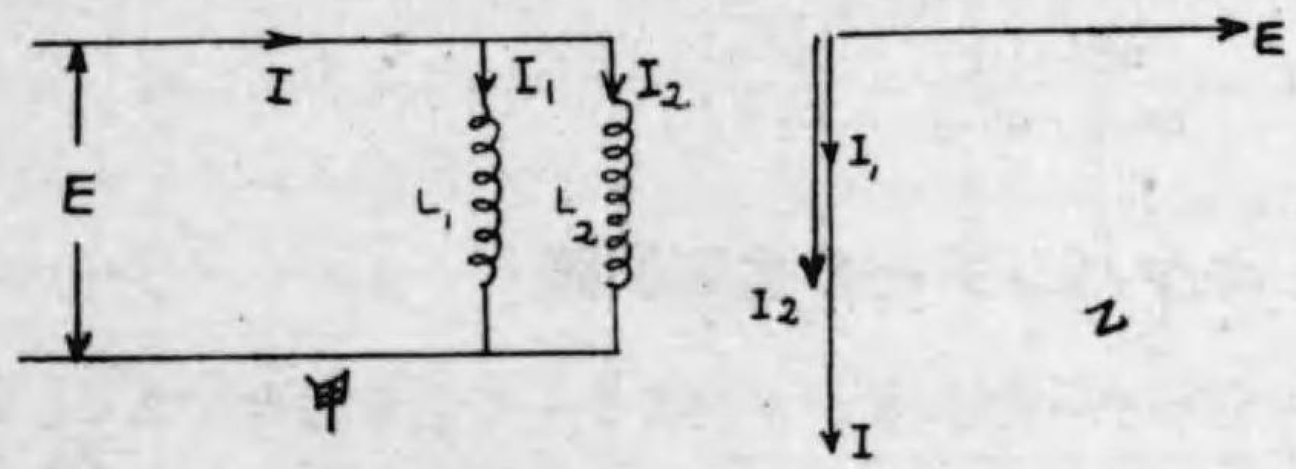
$$I=I_1+I_2+I_3=20+12.5+10=42.5\text{アンペア}$$

又抵抗 R_1, R_2, R_3 等を合成して合成抵抗Rを求むるならばオームの法則によつて次の通りになる。

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\qquad R=\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}$$

10. インダクタンスの並列回路

次にインダクタンスばかりの回路に於てはどうなるかと云ふ問題である、先づ第40圖甲に示した通りインダクタンス L_1, L_2 が並列に接續されて居る回路に電壓Eが加へられたとする。今Eを100ヴオルト50サイクル、L_1 を0.16ヘンリー、L_2 を80ミリヘンリーとすれば此の各分岐回路に流るゝ電流は I_1, I_2 で夫々下記の通りになる。



第　40　圖

$$I_1=\frac{E}{\omega L_1}=\frac{E}{2\pi fL_1}=\frac{100}{314\times0.16}=2\text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{E}{\omega L_2}=\frac{E}{2\pi fL_2}=\frac{100}{314\times0.08}=4\text{アンペア}$$

然るに回路にインダクタンスばかりで抵抗もなければキヤパシチーもないと云ふ場合には電流は電壓よりも90度遲れるものである。從つてそのベクターは第40圖乙の通りになり電壓Eを基線に取り之より90度遲らせて電流 I_1, I_2 を夫々2アンペア4アンペアに相當せしむる長さに取る。此の二つのベクターを合

成せしむるとＩなるベクターとなりその長さは下記の如く６アンペアに相當する長さとなる。

$$I=I_1+I_2=2+4=6\text{アンペア}$$

此の計算を合成リアクタンスによつて求めて見ると合成リアクタンス ωL は次の如くになる。

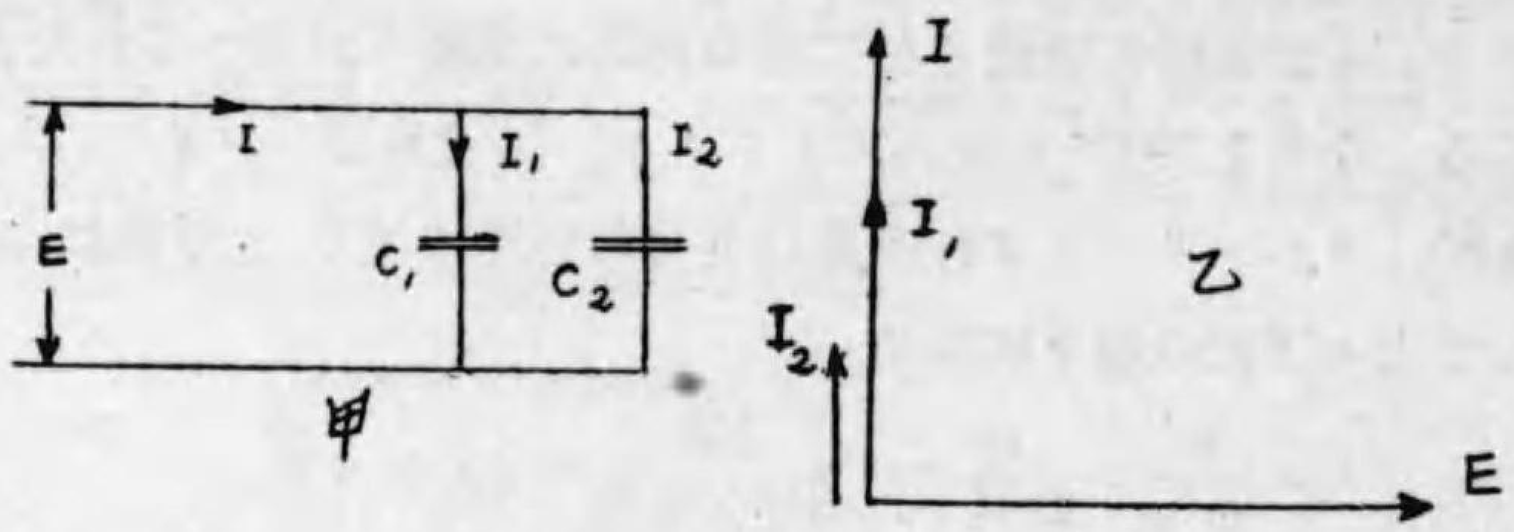
$$\frac{1}{\omega L}=\frac{1}{\omega L_1}+\frac{1}{\omega L_2}$$

$$\frac{1}{\omega L}=\frac{\omega L_1+\omega L_2}{\omega L_1\times\omega L_2}$$

$$\therefore\quad \omega L=\frac{\omega^2 L_1 L_2}{\omega L_1+\omega L_2}=\frac{\omega L_1 L_2}{L_1+L_2}$$

11. キャパシチーの並列回路

次はキャパシチーばかりが並列に並んで居る場合である。第41圖甲の如くキャパシチー C_1, C_2 が並列に接續されて居る回路



第　４　１　圖

に電壓Ｅがかけられたとする、此の場合にＥは100ヴオルト、60サイクル、C_1 は0.00016フアラツド、C_2 は80マイクロフアラツドとする。先づ C_1, C_2 に流れる電流 $I_1 I_2$ は下式の通りに夫々求めらる。

$$I_1=\frac{E}{\frac{1}{\omega C_1}}=E\omega C_1=100\times377\times0.00016=6\text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{E}{\frac{1}{\omega C_2}}=E\omega C_2=100\times377\times0.00008=3\text{アンペア}$$

是からそのベクターを書けば第41圖乙の如く先づ電壓のベクターを基線に取る。各分岐回路にはキャパシチーばかりがあるからその中を流れる電流は電壓よりも90度進むものである。從つてＥより90度進ませて I_1 I_2 の電流を夫々６アンペア、３アンペアの大きさに相當せしめた長さに取る、此の二つの電流を合成したベクターＩは次の大きさを有す。

$$I=I_1+I_2=6+3=9\text{アンペア}$$

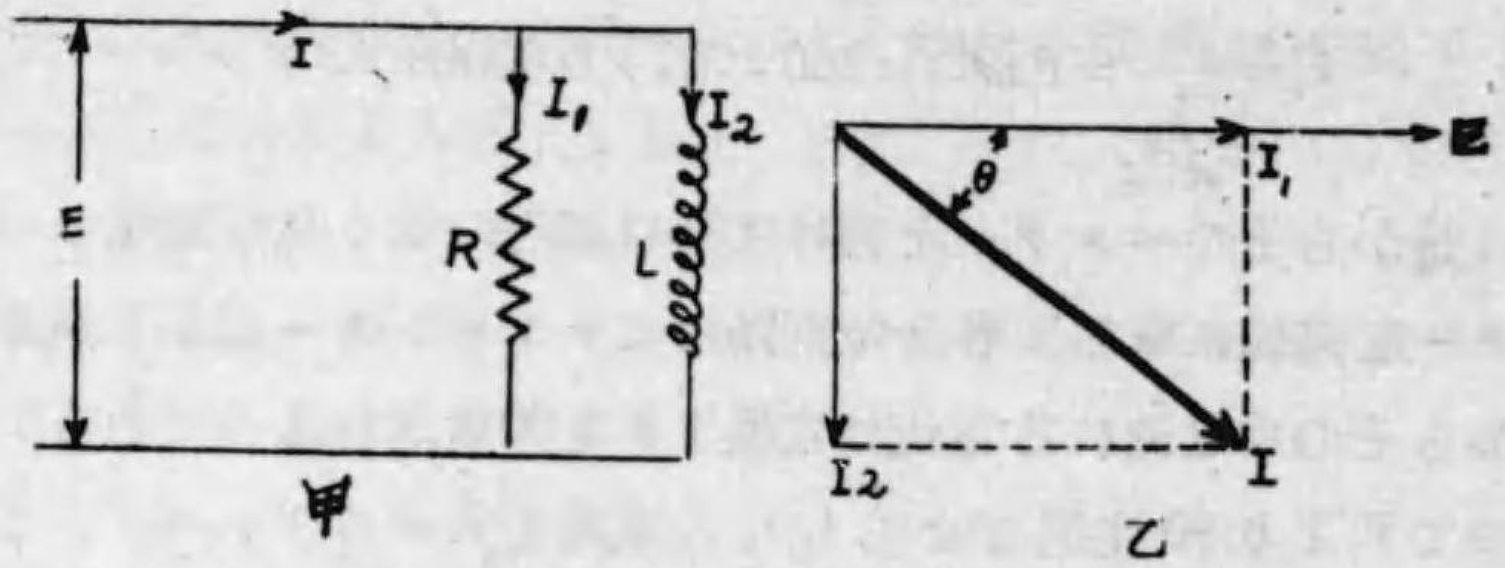
キャパシチーばかりより成るリアクタンスを合成するには第46式によつて合成する事が出來る。此のキャパシチーによるリアクタンスを合成したものは此の回路の全部のインピーダンスであるから電壓Ｅを此の合成リアクタンスで割れば前に計算した全電流と同じ大きさの電流が求めらる。而してその電流の方向は電壓Ｅよりも90度進んで居るものである。此の並列回路の合成リアクタンスを $\frac{1}{\omega C}$ とすれば

$$\frac{1}{\frac{1}{\omega C}}=\frac{1}{\frac{1}{\omega C_1}}+\frac{1}{\frac{1}{\omega C_2}}\qquad\therefore\quad \omega C=\omega C_1+\omega C_2$$

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{\omega(C_1+C_2)}$$

12. 抵抗とインダクタンスの並列

抵抗とインダクタンスとが並列に接續された回路の電流のベクターを調べて見る。第42圖甲圖の如き回路に電壓Ｅがかけられたとする。此の場合Ｅを100ヴオルト50サイクル、Ｒを12.5オーム、Ｌを60ミリヘンリーとし抵抗Ｒ及びインダクタンスＬ



第 4 2 圖

の回路に流れる電流を I_1 I_2 とする。今 I_1 及び I_2 を計算して見ると夫々次の通りになる。

$$I_1=\frac{E}{R}=\frac{100}{12.5}=8\text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{E}{\omega L}=\frac{100}{314\times0.06}=5.3\text{アンペア}$$

次にベクターは第42圖乙圖の通りに先づ電壓のベクターEを基線に引く、抵抗Rを流れる電流は電壓と同相にあるからE線上に8アンペアに相當する長さを取るとこれが抵抗を流れる電流 I_1 となる。インダクタンスLを流れる電流は電壓よりも90度遅れるからして電壓より90度遅らせその長さを5.3アンペアに相當せしめる、此のベクターがLを流れる電流 I_2 のベクターである。是で I_1 のベクターも I_2 のベクターモ書き得た譯で此の二つのベクターを合成すれば全體の電流Iのベクターが得られる。第42圖の乙圖は I_1 と I_2 とを平行四邊形の方法で合成してIのベクターを得たもので合成電流Iはピタゴラスの定理により次の通りになる。

$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

之に數値を入れると次の樣になる。

$$I=\sqrt{8^2+5.3^2}=9.6\text{アンペア}$$

此の回路の力率は電壓Eと此の合成電流Iのベクターの間の角度を θ とすれば $\cos\theta$ を以て表はされる。此の力率 $\cos\theta$ は I_1 の電流をIなる合成電流で除したものであるから次の式を以て與へられ R_1 を流れる電流 I_1 が多ければ多い程力率は良い譯である。

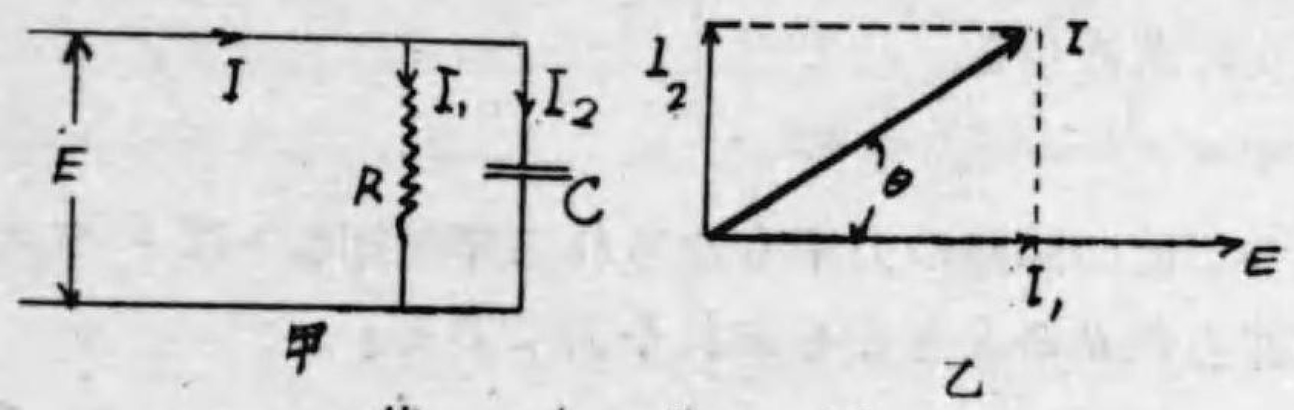
$$\text{力率}\cos\theta=\frac{I_1}{I}\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

之に數値を代入すると此の回路の力率が見出さる。

$$\cos\theta=\frac{I_1}{I}=\frac{8}{9.6}=0.834$$

13. 抵抗とキヤパシチーの並列

今度は抵抗とキヤパシチーとが、並列に接續されて居る場合の電流のベクターを示す、第43圖甲圖の如く抵抗RとキヤパシチーCとが並列に接續され之にEなる電壓が加へられたとする。此の場合に於て電壓Eを100ヴォルト60サイクル、抵抗Rを5オーム、キヤパシチーを0.0004ファラッドとし抵抗Rを流れる電流 I_1 とキヤパシチーを流れる電流 I_2 を調べて見る、此の二つの電流は次の計算によつて求められる。



第 4 3 圖

$$I_1=\frac{E}{R}=\frac{100}{5}=20\text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{E}{\frac{1}{\omega C}}=E\omega C=E\times2\pi fC=100\times377\times0.0004$$

$=15$アンペア

今此の I_1 及び I_2 をベクターに畫いて見ると第43圖乙圖の通りになり先づEを基線に引き此の線上に電流 I_1 のベクターを引きその長さを20アンペアに相當せしむ、次に I_2 は電壓より90度進むから此の線と直角丈進ませて電流 I_2 のベクターを引きその長さを15アンペアに相當せしむ。此の二つの電流 I_1 と I_2 とをベクター的に加へとる合成電流のベクターを得る事が出來る。その電流Iの大きさは次の式によつて求められる。

$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}$$

之に數値を代入すれば電流を計算する事が出來る。

$$I=\sqrt{20^2+15^2}=25\text{アンペア}$$

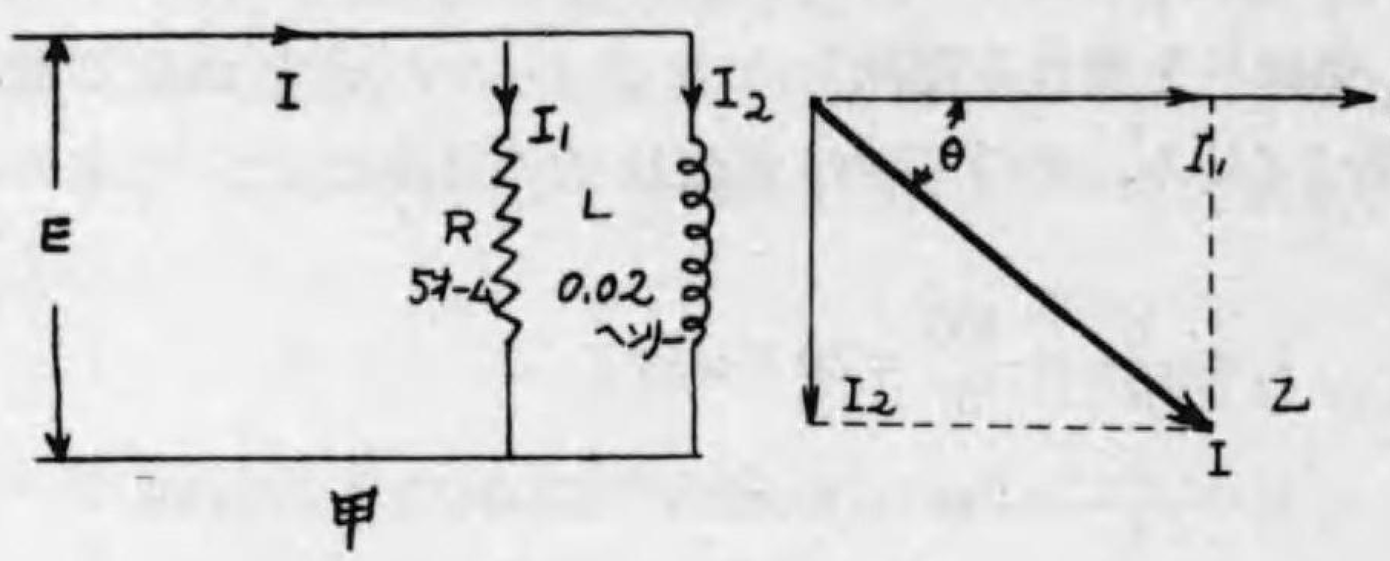
此の合成電流の方向を求むるに今合成電流Iと電壓Eのベクターの間の角度を θ とすれば力率は $\cos\theta$ で表はされ此の力率は次の通りに求めらる。

$$\cos\theta=\frac{I_1}{I}=\frac{20}{25}=0.8$$

是によつて此の回路の力率も知られ力率が知れゝばIベクターの方向即ち角 θ の大きさも知れる譯である。

14.　簡單な並列回路の例題

例 1. 第44圖甲の如き回路に交流60サイクル50ヴォルトをか



第　4　4　圖

けると如何なる電流が流れるか、ベクターにて示せ。

解　先づ電流 I_1 と I_2 との大きさを計算す。

$$I_1=\frac{E}{R}=\frac{50}{5}=10\text{アンペア}$$

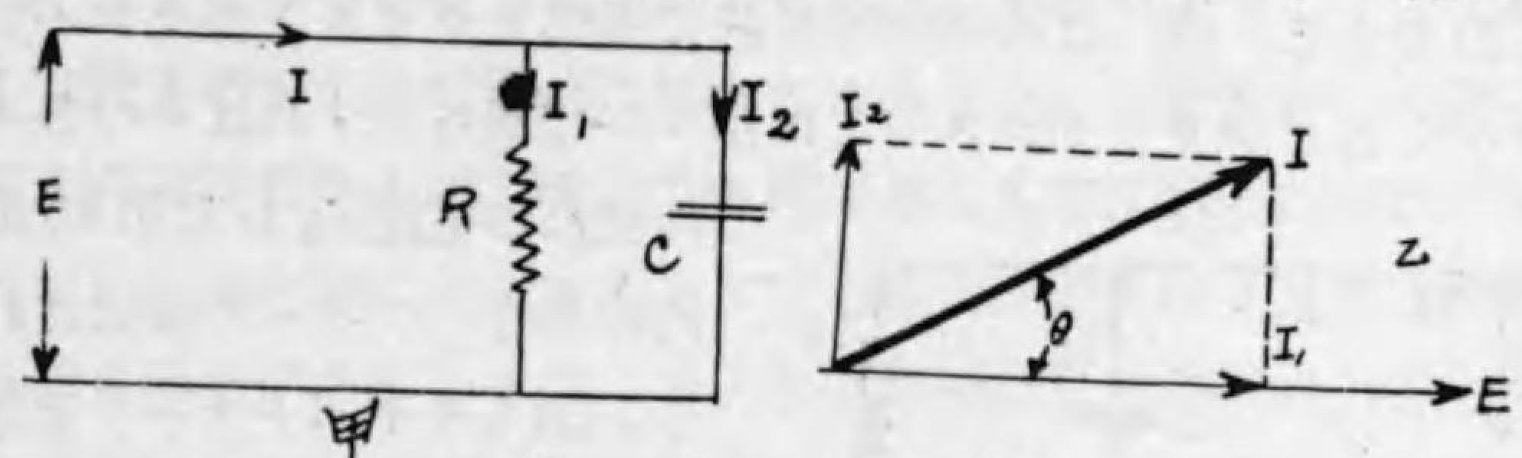
$$I_2=\frac{E}{\omega L}=\frac{50}{377\times0.02}=6.6\text{アンペア}$$

そのベクターは第44圖乙のやうになり合成電流Iと力率 $\cos\theta$ とは次の如き數値となる。

$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}=\sqrt{10^2+6.6^2}=12\text{アンペア}$$

$$\cos\theta=\frac{I_1}{I}=\frac{10}{12}=0.834$$

例 2. 第45圖甲の如き回路があつてRは50オーム、Cは20マ



第　4　5　圖

イクロフアラッドである、此の回路に電壓3300ヴォルトの60サイクルをかければ回路に流れる電流は何程か。

解　分岐電流 I_1 I_2 を下式の通りに求む、

$$I_1=\frac{E}{R}=\frac{3300}{50}=66\text{アンペア}$$

$$I_2=E\omega C=3300\times377\times0.00002=24.8\text{アンペア}$$

此の I_1 と I_2 とが知れたので之を乙圖の如くベクターで書くと合成電流Iのベクターを求むる事が出來る。合成電流Iの大きさは下記の通りである。

$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}=70.5\text{アンペア}$$

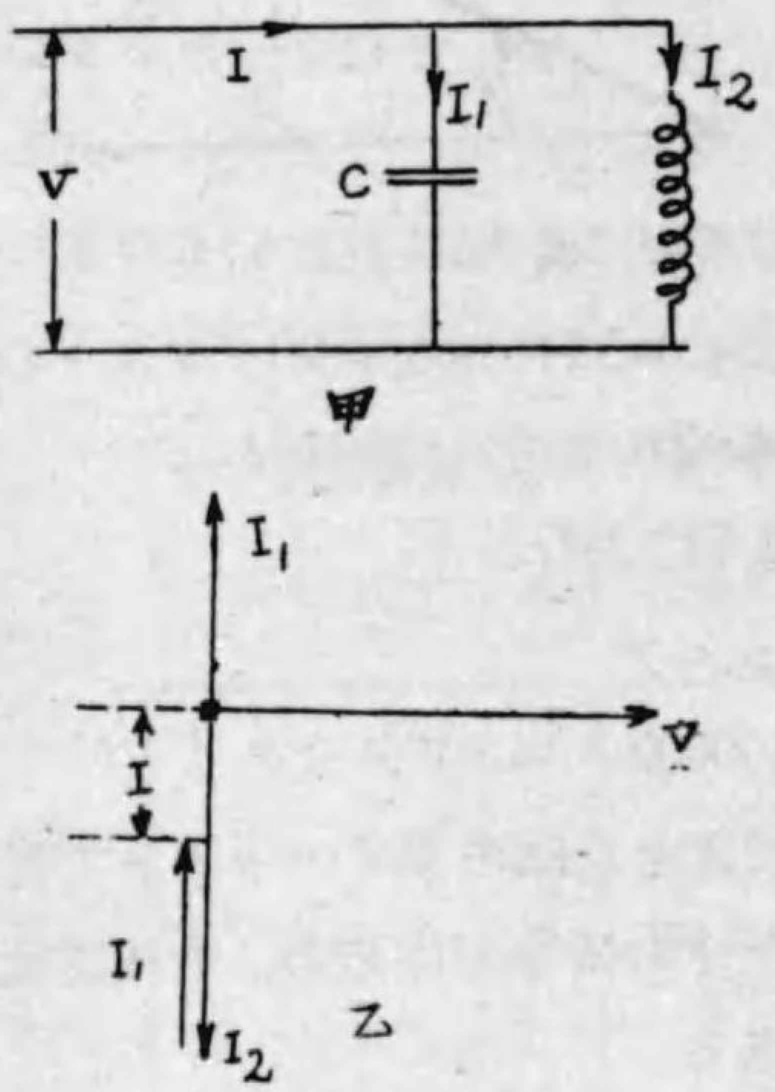
次に力率は次式で表はされるが此の場合はインダクタンス

がなくてキヤパシチーがあるのであるから力率は電流が電壓より進むものである。

$$\cos\theta = \frac{I_1}{I} = \frac{66}{70.5} = 0.936$$

15. キヤパシチー・インダクタンスの並列回路

キヤパシチーとインダクタンスとが並列に接續されて居る場合は電流の方向が互に逆になる。卽ちインダクタンスを電流が流れゝば電流は電壓よりも90度遲れるしキヤパシチーを電流が流れゝば90度進むからそれ等のベクターは互に逆の方向を取るものである。例へば第46圖甲に於て電壓 V ヴオルトがキヤパシチー C とインダクタンス L とにかゝつて居るとすればその各々に流れる電流 I_1, I_2 は第46圖乙の如きベクターで表はされる。卽ちキヤパシチー C を流れる電流 I_1は電壓 V より90度進みインダクタンス L を流れる電流 I_2は電壓 V より90度進む、その大きさは夫々下式によつて得られる大きさを取るものである。



第 4 6 圖

$$I_1 = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}} = VC\omega$$

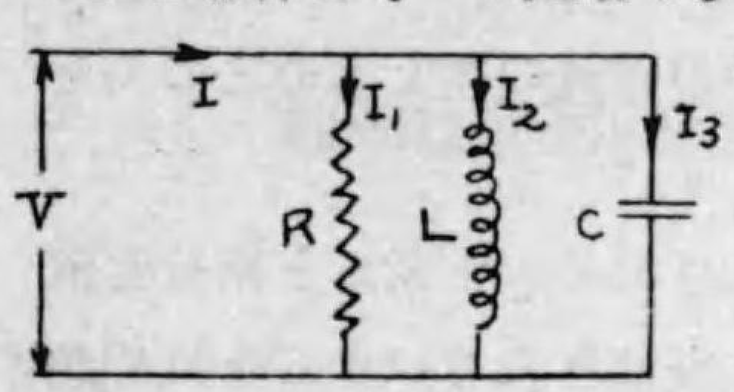
$$I_2 = \frac{V}{\omega L}$$

故に此の I_1 及び I_2 に相當する大きさを I_1 と I_2 のベクターに

與へて I_1, I_2 のベクターを書き二つのベクターの差を求めると全電流 I のベクターが得られる譯である。今 I_2 の方が I_1 より大きいとすれば I_2 より I_1 を差し引いた殘り卽ち I が求むる全電流である。此の場合に $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ であるならば I_1 と I_2 とは全く等しくなり合成電流は零となるべきである、卽ち I_1なる電流がキヤパシチーを流れ I_2なる電流がインダクタンスを流れてもその全電流は零になつてしまふものである。是が今日進相機等を用もないのにわざわざ運轉して居る理由で大きなキヤパシチーを有する進相機をして厭な無効遲電流を喰はしてしまひなるべく無効遲電流を無くしてしまふために外ならないのである。又インダクタンスを流れる電流よりもキヤパシチーを流れる電流の方が大きな場合には I_1より I_2を引くべきであつて此の場合には全電流 I は電壓よりも90度進むものである。何れの場合にしても力率は零となるものであるが實際にはインダクタンスにも抵抗があるしキヤパシチーにも接續場所等に抵抗があるものであるから全然今述べた樣な理窟にはならないものである。

16. 抵抗、インダクタンス、キヤパシチーの並列

次は抵抗とインダクタンスとキヤパシチーとの三つが、並列にある場合を考へて見よう。例へば電壓 V が抵抗 R、インダクタンス L、キヤパシチー C に第47圖の如くかゝつて居る時の電流を調べて見よう。此の場合に於ても抵抗、インダクタンス、キヤパシチーを流れる電流 I_1 I_2

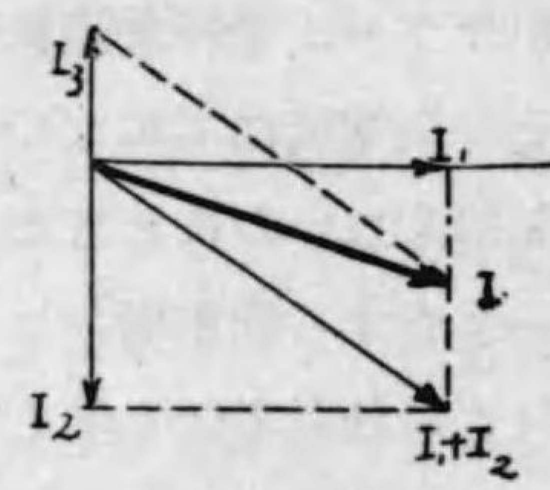


第 4 7 圖

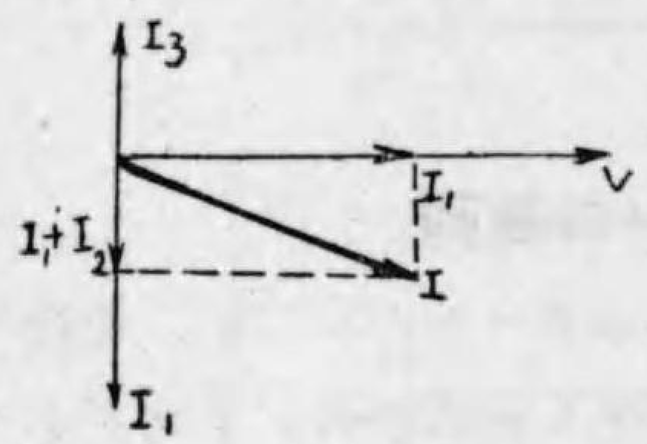
I_3 を先づ求めて見なければならない。此の $I_1I_2I_3$ は下式の通りに求め得らる。

$$I_1=\frac{V}{R} \qquad I_2=\frac{V}{\omega L} \qquad I_3=V\omega C$$

此の大きさが知れたならばベクターを書き始める事が出來るのであつて先づ電壓と同相に抵抗Rを流れる電流 I_1 を取り電壓より90度遲らせて電流 I_2 を、90度進ませて電流 I_3 を引く。此の三つの電流 I_1, I_2, I_3 を合成しさへすれば求むる合成電流が得られるのである。第48圖はその合成を示せるもので先づ I_1 と I_2 との合成を行つて I_1+I_2 のベクターを求めそのベクターと I_3 のベクターとを合成して合成電流 I のベクターを得る。此の例では先づ I_1 と I_2 とを合成して此の合成ベクターと I_3 との合成ベクターを求めて全電流のベクターを得て居るが反對に I_2 と I_3 との合成ベクターに I_1 を合成しても良く I_1 と I_3 を合成してそのベクターに I_2 のベクターを合成してもよい。第49圖は先づ I_2 と I_3 のベクターを合成し之に I_1 のベクターを合成したもので I_2 と I_3 とは互に反對の方向を取つて居るので第一に I_2 と I_3 の合成卽ち二つの電流の差を求め之に I_1 を合成すれば合成が容易である。



第 4 8 圖



第 4 9 圖

此の場合に於ける力率は何で表はされるかと云ふと抵抗を流れる電流 I_1 と全電流 I との比を以て表はされるべきで今位相角を θ とすれば力率は次の如くになる。

$$力率=\cos\theta=\frac{I_1}{I}$$

此の場合に電流 I_2 卽ちインダクタンスを流れる電流の方がキャパシチーを流れる電流 I_3 より大きければ電流は電壓より遲れ、反對にキャパシチーを流れる電流 I_3 の方が I_2 よりも大きければ電流は電壓より進むものである。又キャパシチーを流れる電流 I_3 とインダクタンスを流れる電流 I_2 とが相等しなければ全電流 I は I_1 に等しく力率は 1 となるものである。

次に此の例に數量を入れて計算して見る、今 V=3300ヴオルト、R=50 オーム、L=0.208 ヘンリー、C=20.9 マイクロフアラツド、周波數60サイクルとする。I_1, I_2, I_3 は夫々下式の通り計算し得られる。

$$I_1=\frac{V}{R}=\frac{3300}{50}=66 \text{ アンペア}$$

$$I_2=\frac{V}{L\omega}=\frac{3300}{2\pi\times60\times0.208}=42 \text{ アンペア}$$

$$I_3=VC\omega=2\pi\times60\times3300\times20.9\times10^{-6}=26 \text{ アンペア}$$

先づ I_2 と I_3 とを合成すると次の如く16アンペアとなる。

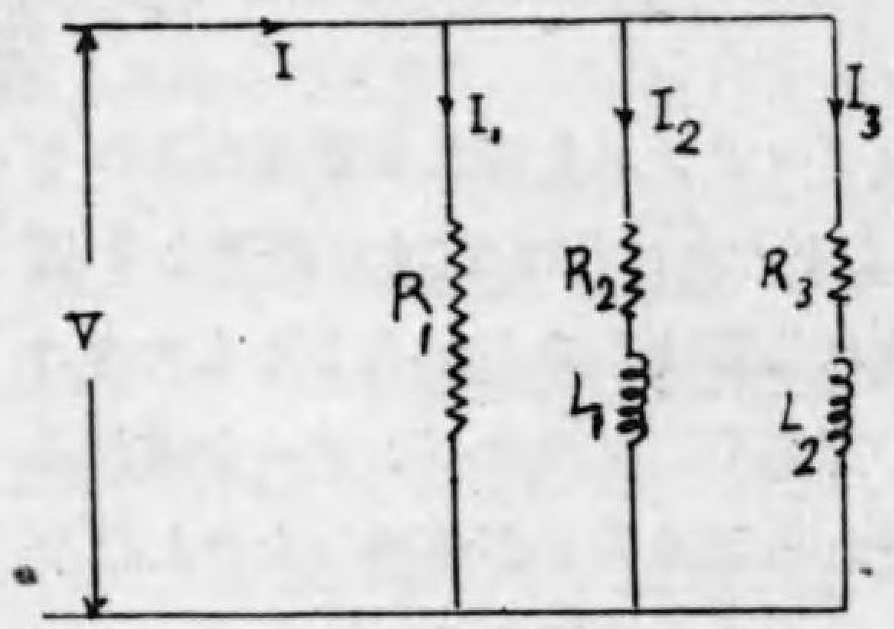
$$42-26=16 \text{ アンペア}$$

此の16アンペアと I_1 の電流66アンペアとを合成すると下の如く合成電流の大きさを知る事が出來る。

$$I=\sqrt{I_1^2+(I_2-I_3)^2}=\sqrt{66^2+16^2}=68 \text{ アンペア}$$

17. 複雜な並列回路

抵抗とインダクタンスとが直列に接續されて居る回路が二つ又は三つ並列に並んで居る場合を示さう。第50圖は抵抗 R_1 と抵抗 R_2、インダクタンス L_1 の直列回路と抵抗 R_3、インダ



第５０圖

クタンス L_2 の直列回路とが並列に接續されて居る場合の回路を示したもので此の場合のベクターを書いて見る。そのベクターを書く前に各回路に流れる電流を計算すると下記の通りである。

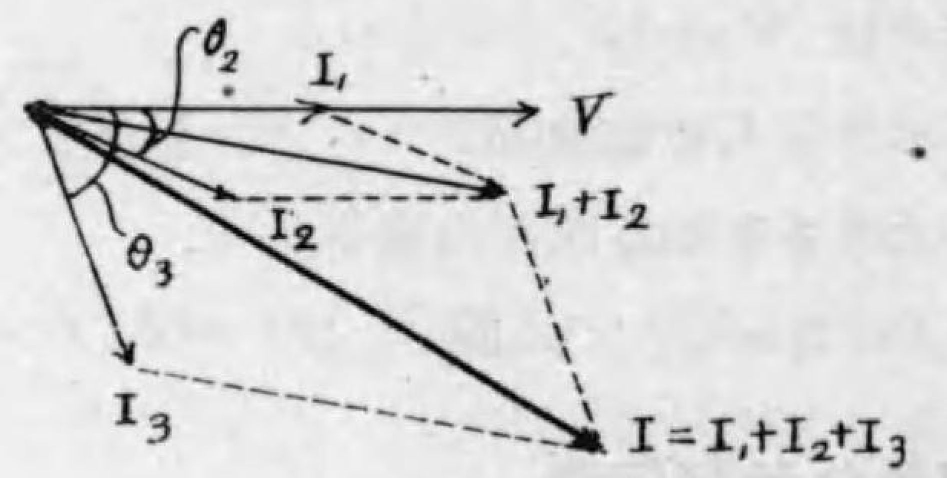
$$I_1=\frac{V}{R_1}\qquad I_2=\frac{V}{\sqrt{R_2{}^2+(\omega L_1)^2}}\qquad I_3=\frac{V}{\sqrt{R_3{}^2+(\omega L_2)^2}}$$

次に各回路の力率を計算すれば下式の通りになる、但し$\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$ 等は夫々 I_1, I_2, I_3 の流れる回路の力率である。

$$\cos\theta_1=1\qquad \cos\theta_2=\frac{R_2}{\sqrt{R_2{}^2+(\omega L_1)^2}}$$

$$\cos\theta_3=\frac{R_3}{\sqrt{R_3{}^2+(\omega L_2)^2}}$$

是で電流の大きさも知れその方向もわかつたので各回路に流れる電流のベクターを見出す事が出來る。第51圖はそのベクタ



第５１圖

ー圖を示すもので電壓Vと同相に電流 I_1 を引き電壓Vより θ_2 角丈遲らせて電流 I_2 を畫く、最後に電壓 V より θ_3 の角度丈遲らせて電流 I_3 を引けば I_1, I_2, I_3 の三つの電流のベクターが得られ

ある、此の場合 θ_2, θ_3 の角度は $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$ の力率から三角函數る譯で表より見出すものである。此の I_1, I_2, I_3 の三つのベクターが知れゝば之を圖の如く合成するのであつて先づ I_1 と I_2 とを合成すれば I_1+I_2 のベクターが得られる。次に此の I_1+I_2 のベクターと I_3 のベクターとを合成すれば全體の合成ベクターが得られ圖に示す I がその合成ベクターである。此の回路の全體の力率は下式によつて計算する事が出來る。

$$\text{力率}=\frac{I_1+I_2\cos\theta_2+I_3\cos\theta_3}{I}$$

今此の計算に數値を入れて實際の計算を行つて見よう。今電壓Vを 220 ヴオルト、抵抗 R_1 を８オーム、R_2 を７オーム、R_3 を６オーム、インダクタンス L_1 を15ミリヘンリー、L_2 を25ミリヘンリーとし周波數を50サイクルとする。此の場合に於ける電流は夫々次の通りになる。

$$I_1=\frac{V}{R}=\frac{220}{8}=27.5\ \text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{V}{\sqrt{R_2{}^2+(\omega L_1)^2}}=\frac{220}{\sqrt{7^2+(2\pi\times50\times0.015)^2}}$$

$$=\frac{220}{8.43}=26.1\ \text{アンペア}$$

$$I_3=\frac{V}{\sqrt{R_3{}^2+(\omega L_2)^2}}=\frac{220}{\sqrt{6^2+(2\pi\times50\times0.025)^2}}$$

$$=\frac{220}{9.88}=22.2\ \text{アンペア}$$

是で I_1 I_2 I_3 が知れたので此の三つを合成するには各電流の有效分力と無效分力とを合計し下の式により此の有效分力と無效分力との合成を求むれば最も簡單に計算する事が出來る。

$$合成電流=\sqrt{(有効分)^2+(無効分)^2}\cdots\cdots(49)$$

$$全電流の有効分=I_1+I_2\cos\theta_2+I_3\cos\theta_3$$

$$全電流の無効分=I_2\sin\theta_2+I_3\sin\theta_3$$

今 $\cos\theta_2$ と $\cos\theta_3$ の力率を求めて見る。

$$\cos\theta_2=\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+(\omega L_1)^2}}=\frac{7}{8.43}=0.83$$

$$\cos\theta_2=\frac{R_3}{\sqrt{R_3^2+(\omega L_2)^2}}=\frac{6}{9.88}=0.607$$

$$\therefore\quad 有効分=27.5+26.1\times0.83+22.2\times0.607$$

$$=27.5+21.6+13.5=62.6$$

$$又\quad \sin\theta_2=\sqrt{1-\cos^2\theta_2}=\sqrt{1-0.83^2}=0.557$$

$$\sin\theta_3=\sqrt{1-\cos^2\theta_3}=\sqrt{1-0.607^2}=0.795$$

$$\therefore\quad 無効分=26.1\times0.557+22.2\times0.795=14.55+17.65=32.2$$

$$\therefore\quad 全電流=\sqrt{(有効分)^2+(無効分)^2}=\sqrt{62.5^2+32.2^2}$$

$$=\sqrt{4948}=70.3\ アンペア$$

$$全體の力率=\frac{I_1+I_2\cos\theta_2+I_3\cos\theta_3}{I}=\frac{62.5}{70.3}=0.89$$

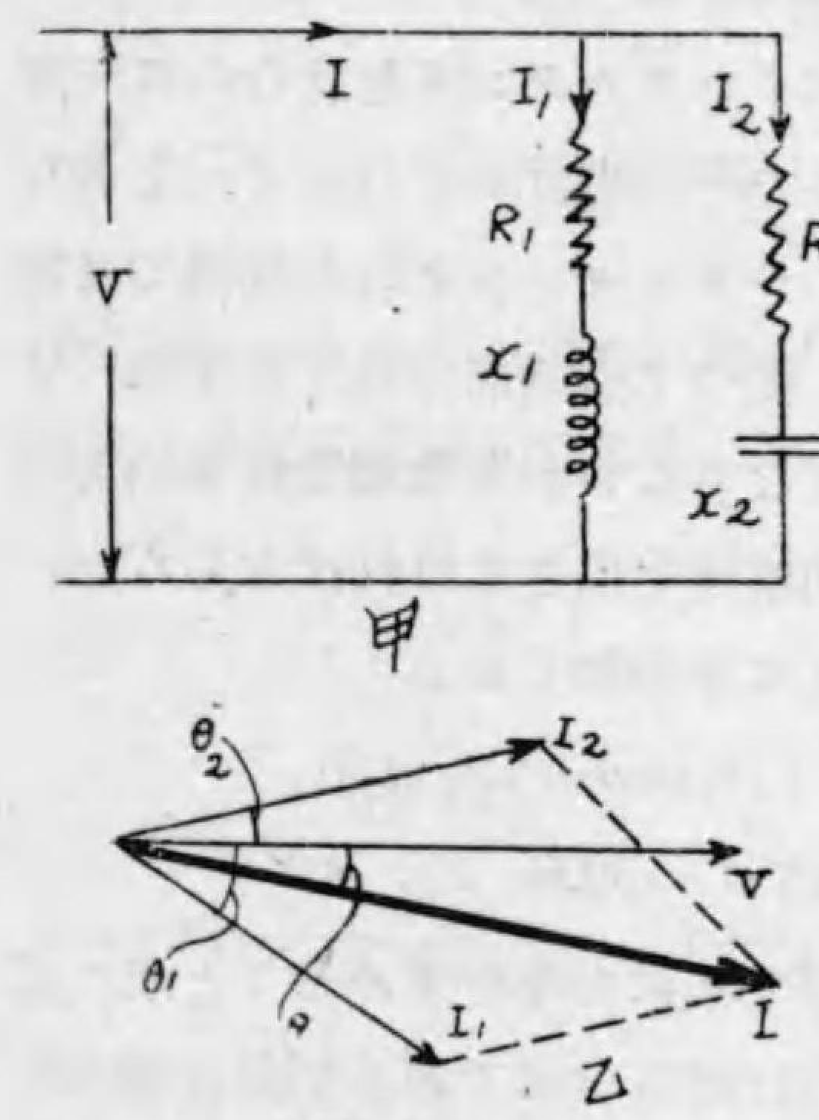
是で全電流のベクターの大きさもその方向も計算し得た譯であるが此の合成計算は三つのベクターを一度に計算したものである。

並列回路の何處かにキヤパシチーが存在してもその計算はやはり同じ事である。先づ第52圖の如き回路について考へて見る。先づ各回路に流れる電流 I_1I_2 を求めその力率を出して見よう。此の場合はインダクタンスによるリアクタンス ωL を x_1 で表はし、キヤパシチーによるリアクタンス $\frac{1}{\omega C}$ を x_2 で表はして見る。

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{R_1^2+x_1^2}}\qquad I_2=\frac{V}{\sqrt{R_2^2+x_2^2}}$$

$$\cos\theta_1=\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+x_1^2}}\qquad \cos\theta_2=\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+x_2^2}}$$

此の電流と力率とが知れゝば第52圖乙の如きベクターが畫き得られる。次に此の中に數字を當てはめて見る、R_1を20オーム、R_2を30オーム、x_1を15オーム、x_2を13.3オームとなし之に電壓500ヴォルトがかゝつたとする。此の場合の各回路の電流と力率は次の通りである。



第 5 2 圖

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{R_1^2+x_1^2}}$$

$$=\frac{500}{\sqrt{20^2+15^2}}$$

$$=\frac{500}{25}=20アンペア$$

$$I_2=\frac{V}{\sqrt{R_2^2+x_2^2}}$$

$$=\frac{500}{\sqrt{30^2+13.3^2}}$$

$$=\frac{500}{32.8}=15.3\ アンペア$$

$$\cos\theta_1=\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+x_1^2}}=\frac{20}{25}=0.8$$

$$\cos\theta_2=\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+x_2^2}}=\frac{30}{32.8}=0.915$$

此の場合に全體の電流 I の大きさを求めやうとすればI_1, I_2の電

流を有効部分と無効部分とに分けなければならない。

I_1の有効分$=I_1\cos\theta_1=20\times0.8=16$ アンペア

I_1の無効分$=I_1\sin\theta_1=I_1\sqrt{1-\cos^2\theta_1}$

$=20\times0.6=12$ アンペア

I_2の有効分$=I_2\cos\theta_2=15.3\times0.915=14$ アンペア

I_2の無効分$=I_2\sin\theta_2=I_1\sqrt{1-\cos^2\theta_2}$

$=15.3\times0.404=6.2$ アンペア

此の二つの回路に於ては一方がインダクタンスを含むのに一方はキヤパシチーを含んで居るのでその相はキヤパシチーを含む回路では電流が電壓より進みインダクタンスを含む回路では電流が電壓より遲れる事になる。從つて有効部分は互に相加へて全體の有効電流を出さなければならないが無効部分は多い方の電流から少い電流を引いて無効電流を出さなければならない。從つて全體の電流の大きさの式は下の如くなる。

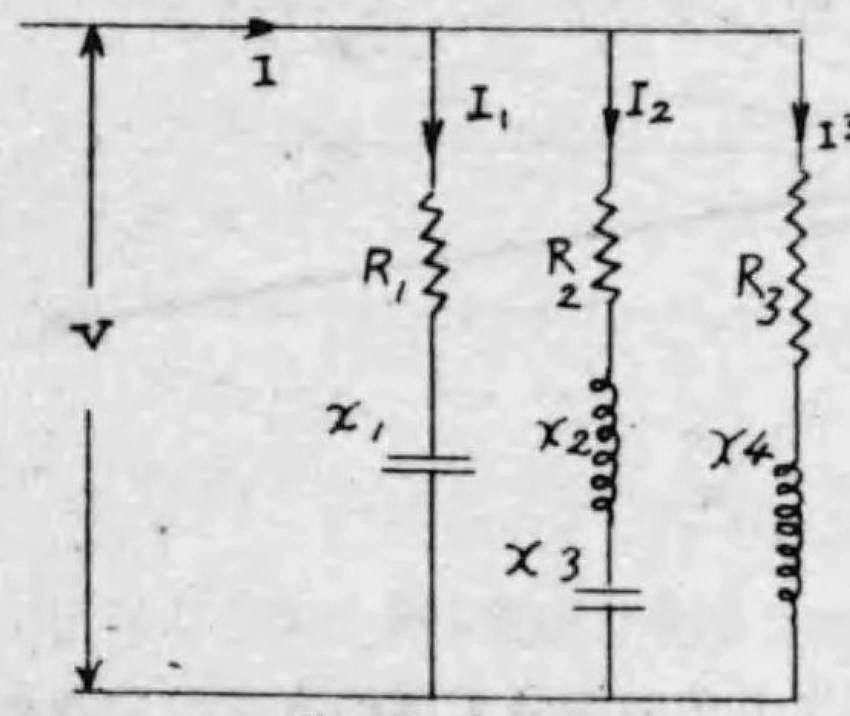
$$I=\sqrt{(I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2)^2+(I_1\sin\theta_1-I_2\sin\theta_2)^2}$$

$$=\sqrt{(16+14)^2+(12-6.2)^2}=30.65 \text{ アンペア}$$

是で全電流の大きさが出來た譯で次に力率を求めやうと思へば全體の有効電流を全電流 I で割れば良い譯であるが此の場合に若しキヤパシチーを含む回路の無効電流がインダクタンスを含む回路の無効電流よりも大きければ全電流は電壓より進む事になり反對であれば遲れる事になる。今の場合に於いてはインダクタンスを含む回路の無効電流はキヤパシチーを含む回路の無効電流よりも大きいから電流は電壓よりも遲れるのである。その力率は有効電流の合計を全電流で割ればよい。

$$\cos\theta=\frac{I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2}{I}=\frac{16+14}{30.65}=\frac{30}{30.65}=0.98$$

他の複雜なる並列回路の一二について說明して見よう。今第53圖の如く抵抗、インダクタンスによるリアクタンス、キヤパシチーによるリアクタンスが直列に接續された回路が並列に接續されて居るとする。是に電壓 V をかけた場合に於ける電流のベクターを求めて見る。



第 5 3 圖

此の場合に於て先づ求めなければならないものは各回路の電流と力率とであつて是が計算の方法は下式の通りである。

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{R_1^2+x_1^2}} \qquad I_2=\frac{V}{\sqrt{R_2^2+(x_2-x_3)^2}}$$

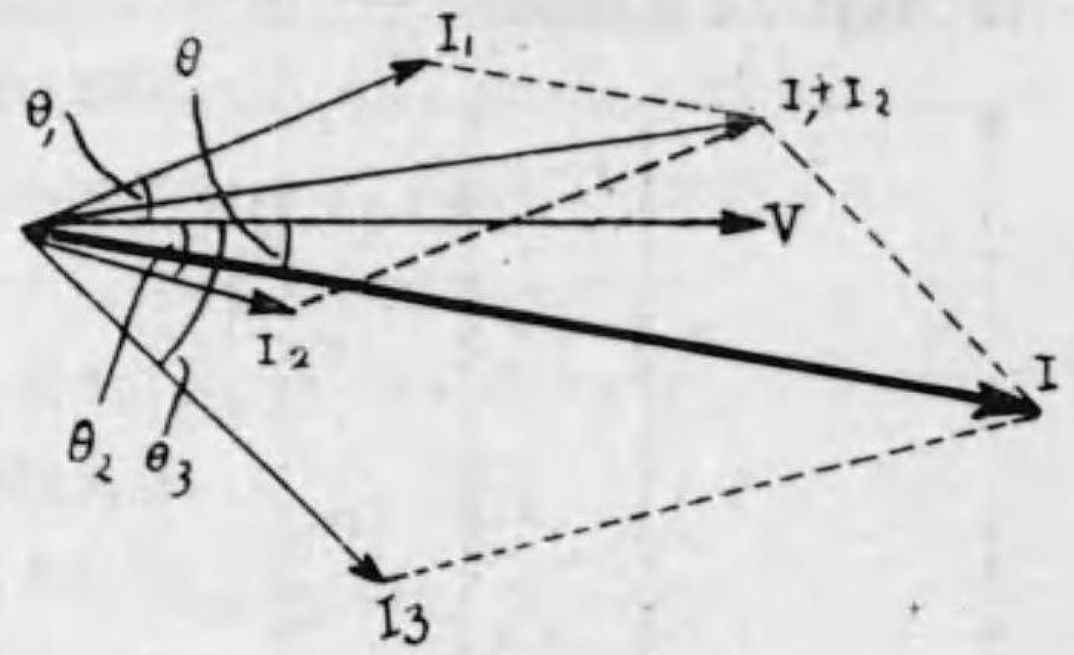
$$I_3=\frac{V}{\sqrt{R_3^2+x_4^2}}$$

$$\cos\theta_1=\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+x_1^2}} \qquad \cos\theta_2=\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+(x_2-x_3)^2}}$$

$$\cos\theta_3=\frac{R_3}{\sqrt{R_3^2+x_4^2}}$$

是丈の數値が知れゝば電流のベクターは書き得られるもので先づ電壓 V を基線に取り第54圖の順序に書いて行く、即ちI_1の流れる回路は抵抗とキヤパシチーのみであるから電流は電壓より進む譯でθ_1の角度丈進ませてI_1のベクターを引く。I_2の流れる回路は抵抗とインダクタンスとキヤパシチーとを含んで居るので若しインダクタンスの上の電壓降下がキヤパシチーの上の電壓降下よりも大きければ電流は電壓より遲れ反對であれば進

むものである。今假りにインダクタンスの電壓降下がキヤパシチーより大きいとして電流は電壓よりθ_2の位相角丈遅れると見てI_2なるベクターを書く。次にI_3の電流は電壓よりθ_3の角度丈遅れるものであるから是丈遅らせてI_3電流のベクターを引く。此のI_1 I_2 I_3の三つのベクターを合成すれば全電流が得られる譯で之を圖によつて合成すると先づI_1とI_2とを合成してI_1+I_2のベクターを得、更に之にI_3のベクターを合成してIのベクターを得るのである。



第 5 4 圖

今之に數値を與へて電流の大きさを計算して見よう。第53圖の抵抗 R_1 は40オーム、R_2 は60オーム、R_3 は20オームとしインダクタンスによるリアクタンス x_2 は80オーム、x_4 は60オームとしキヤパシチーによるリアクタンス x_1 は30オーム、x_3 は35オームとする。此の場合の各回路の電流と力率とは次の如くして求められる。

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{R_1^2+x_1^2}}=\frac{3000}{\sqrt{40^2+30^2}}$$

$$=\frac{3000}{50}=60\text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{V}{\sqrt{R_2^2+(x_2-x_3)^2}}=\frac{3000}{\sqrt{60^2+(80-35)^2}}$$

$$=\frac{3000}{\sqrt{5625}}=\frac{3000}{75}=40\text{アンペア}$$

$$I_3=\frac{V}{\sqrt{R_3^2+x_4^2}}=\frac{3000}{\sqrt{20^2+60^2}}=47.5\text{アンペア}$$

$$\cos\theta_1=\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+x_1^2}}=\frac{40}{50}=0.8$$

$$\cos\theta_2=\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+(x_2-x_3)^2}}=\frac{60}{75}=0.8$$

$$\cos\theta_3=\frac{R_3}{\sqrt{R_3^2+x_4^2}}=\frac{20}{63.2}=0.316$$

I_1, I_2, I_3 の三つの電流を有效と無效分とに分けると次の通りになる。

I_1の有效分$=I_1\cos\theta_1$
$=60\times0.8=48$アンペア

I_2の有效分$=I_2\cos\theta_2$
$=40\times0.8=32$アンペア

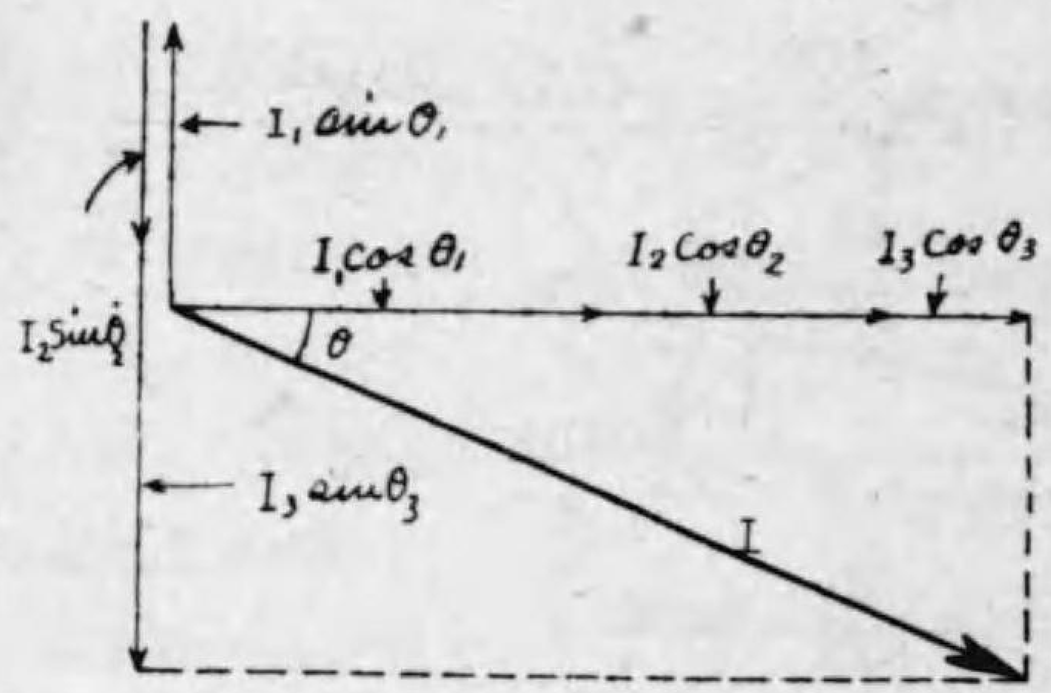
I_3の有效分$=I_3\cos\theta_3$
$=47.5\times0.316=15$アンペア

I_1の有效分$=I_1\sin\theta_1=I_1\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$=60\times0.6=36$アンペア

I_2の無效分$=I_2\sin\theta_2=I_2\sqrt{1-\cos^2\theta_2}$
$=40\times0.6=24$アンペア

I_3の無效分$=I_3\sin\theta_3=I_3\sqrt{1-\cos^2\theta_3}$
$=47.5\times0.948=45$アンペア

此の三つの電流を有效分と無效分とに分けたベクターを書いて見ると第55圖の通りになり cos のある有效分は水平に取り sin のある無效分は垂直に取つて居る。I_1の無效分は電流が90度進むものであるから90度進ませて$I_1\sin\theta_1$を取り、I_2とI_3の無



第　5　5　圖

效分は何れも電流が90度遲れるから此のベクターはI_1の無效分と反對方向に取るのである。斯くて全體の電流は無效分と有效分との合成和を取れば求められるのである。

$$I=\sqrt{(\text{有效分の和})^2+(\text{無效分の和})^2}$$
$$=\sqrt{(48+32+15)^2+(-36+24+45)^2}$$
$$=\sqrt{10114}=100.5\text{アンペア}$$

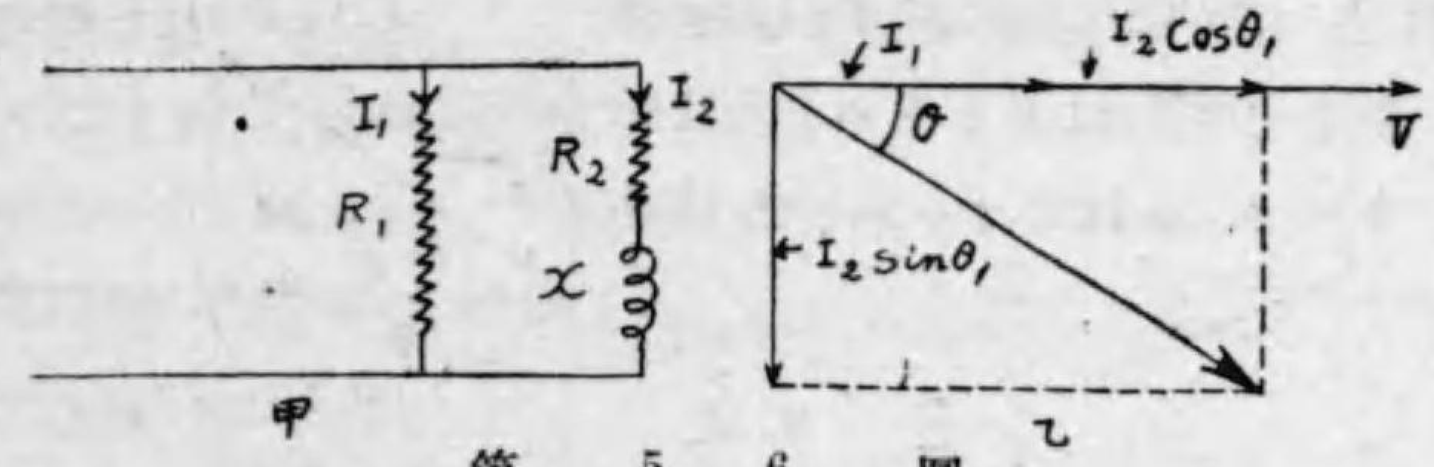
是で電流は知れたのであつて全體の力率は次のやうに求められる。

$$\cos\theta=\frac{I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2+I_3\cos\theta_3}{I}$$
$$=\frac{48+32+15}{100.5}=0.945$$

18.　複雜な並列回路の例題

例 1. 抵抗8オームの回路と抵抗3オーム、誘導リアクタンス4オームの直列回路とが並列に接續されて居る場合に電壓100ヴォルトの交流を供給すれば流れる電流とその回路の力率とを求む。

解　第56圖甲圖に於てR_1に流れる電流I_1とR_2及びxに流れる電流I_2とは次の式で求められる。



第　5　6　圖

$$I_1=\frac{V}{R_1}=\frac{100}{8}$$
$$=12.5\text{アンペア}$$
$$I_2=\frac{V}{\sqrt{R_2^2+x^2}}=\frac{100}{\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$=\frac{100}{5}=20\text{アンペア}$$

I_2の回路の力率を$\cos\theta_1$とすれば次の通りになる。

$$\cos\theta_1=\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+x^2}}$$
$$=\frac{3}{5}=0.6$$

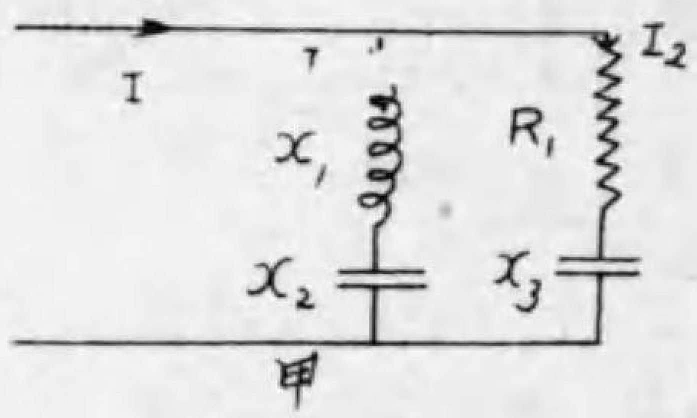
次にI_2を有效分と無效分とに分けて見る。

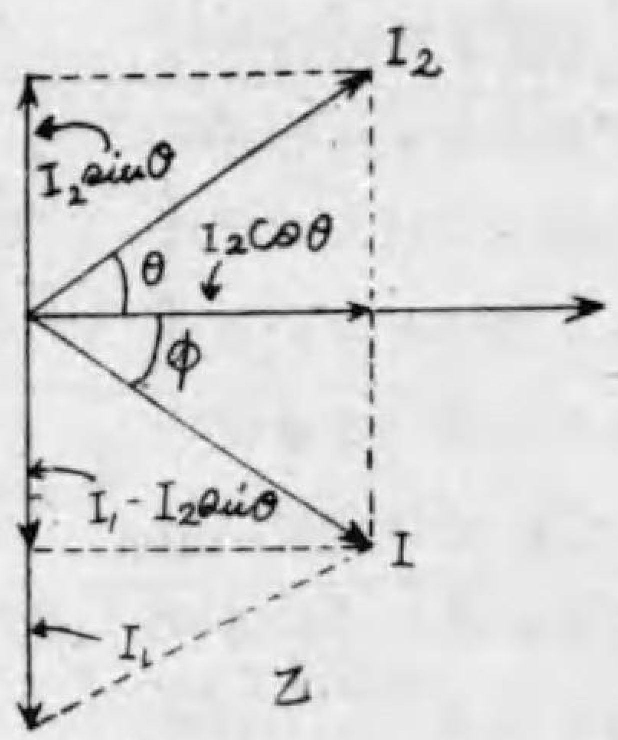
$$I_2\text{の有效分}=I_2\cos\theta_1$$
$$=20\times0.6=12\text{アンペア}$$
$$I_2\text{の無效分}=I_2\sin\theta_1=I_2\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=20\times0.8=16\text{アンペア}$$

是から全電流及び力率を求める事が出來そのベクターは第56圖乙圖の通りになる。

$$I=\sqrt{(\text{有效分の和})^2+(\text{無效分})^2}$$
$$=\sqrt{(I_1+I_2\cos\theta_1)^2+(I_2\sin\theta_1)^2}$$
$$=\sqrt{(12.5+12)^2+16^2}$$
$$=29.2\text{ アンペア}$$
$$\cos\theta=\frac{I_1+I_2\cos\theta_1}{I}=\frac{12.5+12}{29.2}=0.84$$

例 2. 第57圖甲圖に示すが如き回路ありて R_1 は8オーム、x_1 は10オーム、x_2 は2オーム、x_3 は6





第　5　7　圖

オームである。今此の回路に電壓100ヴオルトの交流をかければ流れる電流は何程なるか。

解　各回路に流れる電流を I_1 I_2 とすれば是は次の如く求め得られる。

$$I_1=\frac{V}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{100}{10-2}=12.5\text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{V}{\sqrt{R_1^2+x_3^2}}$$

$$=\frac{100}{\sqrt{8^2+6^2}}=10\text{アンペア}$$

次に I_2 の回路の力率を $\cos\theta$ とし I_2 を有效分と無效分とに分ける。

$$\cos\theta=\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+x_3^2}}=\frac{8}{10}=0.8$$

I_2の有效分 $=I_2\cos\theta$

$=10\times0.8=8$アンペア

I_2の無效分 $=I_2\sin\theta=I_2\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=10\times0.6=6$アンペア

I_1 の回路は誘導リアクタンスの方が容量リアクタンスより大きいので I_1 は電壓より90度遅れる。I_2 は電壓と同相に8アンペアが流れ、90度進んで6アンペア流れるので乙圖の如きベクターが出來上る。是から全電流 I を計算すれば次の通りである。

$$I=\sqrt{(I_2\cos\theta)^2+(I_1-I_2\sin\theta)^2}$$

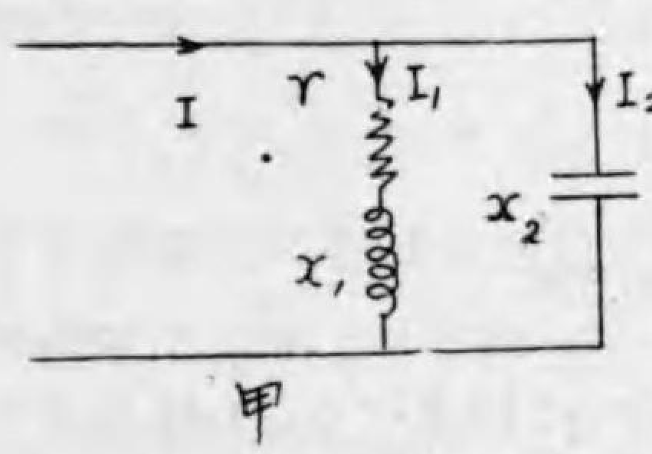
$$=\sqrt{8^2+(12.5-6)^2}$$

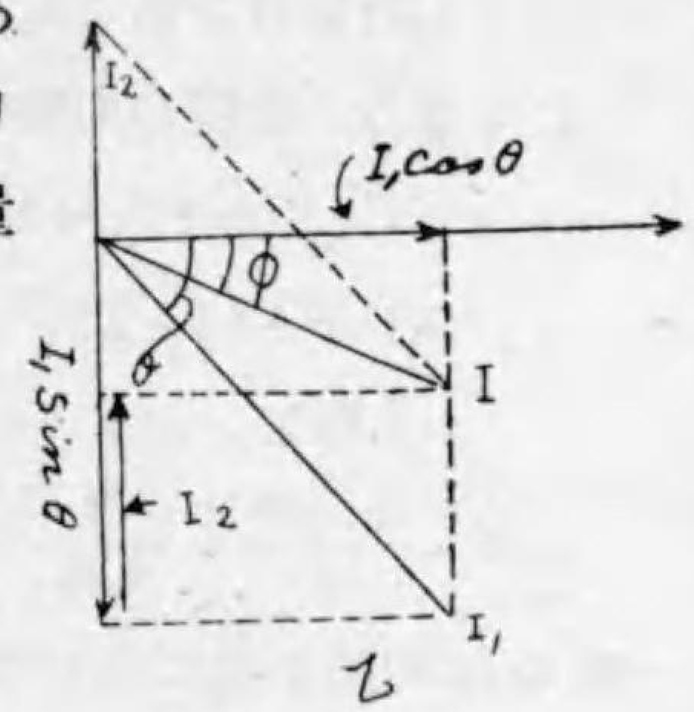
$$=10.3\text{アンペア}$$

力率を $\cos\phi$ とする。

$$\cos\phi=\frac{I_2\cos\theta}{I}=\frac{8}{10.3}=0.776$$

例 3. 第58圖甲圖の如き回路があつて抵抗 r は12オーム、誘導リアクタンス x_1 は16オーム、容量





第　5　8　圖

リアクタンス x_2 は40オームである。電壓を100ヴオルトとして電流を求む。

解　各回路の電流 I_1 及び I_2 は次の如くして見出さる。

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{r^2+x_1^2}}=\frac{100}{\sqrt{12^2+16^2}}$$

$$=\frac{100}{20}=5\text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{V}{x_2}=\frac{100}{40}=2.5\text{アンペア}$$

I_1回路の力率を $\cos\theta$ とす。

$$\cos\theta=\frac{r}{\sqrt{r^2+x_1^2}}=\frac{12}{20}=0.6$$

I_1の有效分$=I_1\cos\theta$

$=5\times0.6=3$アンペア

I_1の無效分$=I_1\sin\theta=I_1\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=5\times0.8=4$アンペア

是によつてベクター圖をかけば第58圖乙圖の通りになりI_2は電壓より90度進みI_1の無效分は電壓より90度遲れる。I_1とI_2とを合成したものが全電流 I であつて、是はI_1の有效分とI_1の無效分からI_2を引いたものとを合成したものと同じになる。全體の力率を $\cos\phi$ とする。

$$I=\sqrt{(I_1\cos\theta)^2+(I_1\sin\theta-I_2)^2}$$

$$=\sqrt{3^2+(4-2.5)^2}$$

$=3.35$アンペア

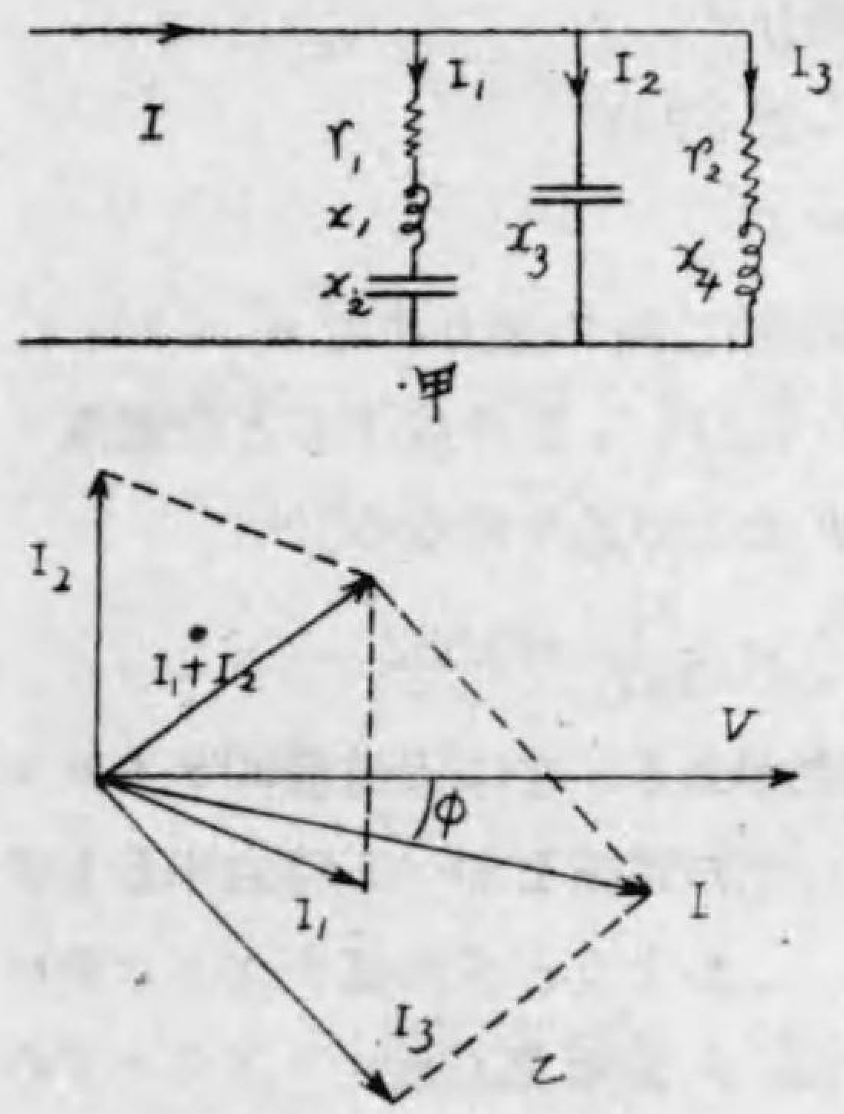
$$\cos\phi=\frac{I_1\cos\theta}{I}=\frac{3}{3.35}=0.896$$

例 4. 第59圖甲圖に於て抵抗r_1は12オーム、r_2は6オーム、誘導リアクタンスx_1は15オーム、x_4は6オーム、容量リアクタンスx_2は6オーム、x_3は12オームである。今此の回路に電壓300ヴォルトの交流を供給するとせば流れる電流は何程か。

解 各分岐回路に流れる電流 I_1 I_2 I_3 を求める。

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{r_1^2+(x_1-x_2)^2}}=\frac{300}{\sqrt{12^2+(15-6)^2}}$$

$$=\frac{300}{15}=20\text{アンペア}$$



第 5 9 圖

$$I_2=\frac{V}{x_3}=\frac{300}{12}$$

$=25$アンペア

$$I_3=\frac{V}{\sqrt{r_2^2+x_4^2}}$$

$$=\frac{300}{\sqrt{6^2+8^2}}$$

$$=\frac{300}{10}=30\text{アンペア}$$

次に各回路の力率を夫々$\cos\theta_1$ $\cos\theta_2$ $\cos\theta_3$ とすれば是等は次の通りになる。

$$\cos\theta_1=\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+(x_1-x_2)^2}}$$

$$=\frac{12}{15}=0.8$$

$\cos\theta_2=0$

$$\cos\theta_3=\frac{r_2}{\sqrt{r_2^2+x_4^2}}=\frac{6}{10}=0.6$$

是より各電流の有效分無效分を求めるのであるがI_2は全部無效電流で電壓より90度進むものである。

I_1の有效分$=I_1\cos\theta_1$

$=20\times0.8=16$アンペア

I_1の無效分$=I_1\sin\theta=I_1\sqrt{1-\cos^2\theta_1}$

$=20\times0.6=12$アンペア

I_3の有效分$=I_3\cos\theta_3$

$=30\times0.6=18$アンペア

I_3の無效分$=I_3\sin\theta_3=I_3\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=30\times0.8=24$アンペア

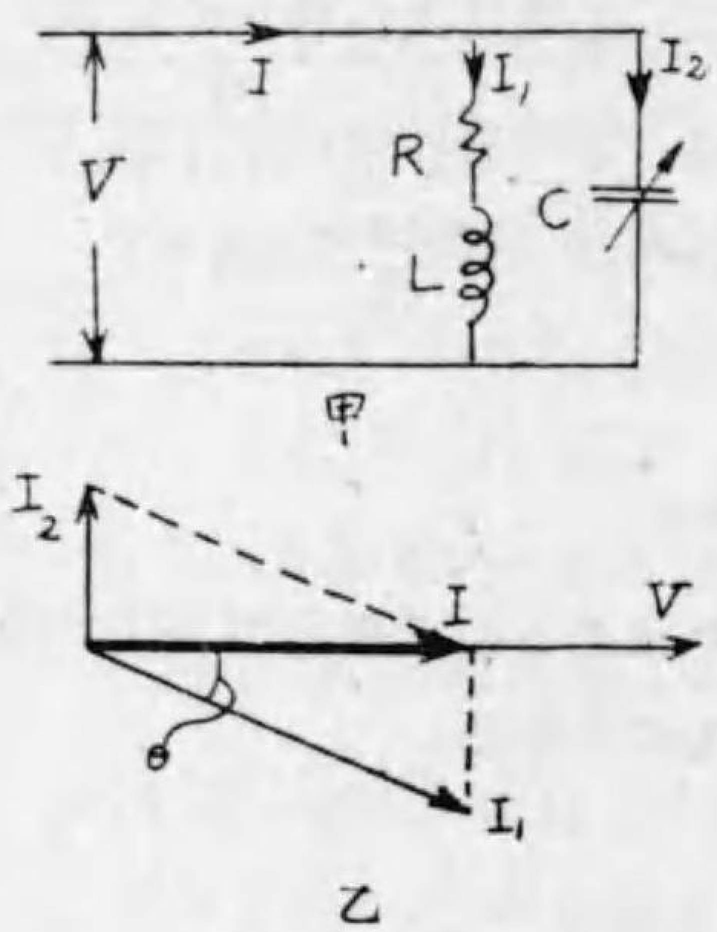
是から全電流を求むれば次の如し。

$$I=\sqrt{(\text{有效分})^2+(\text{無效分})^2}$$
$$=\sqrt{(16+18)^2+(12-25+24)^2}$$
$$=\sqrt{1277}=35.7\text{アンペア}$$

此のベクターをかけば第59圖乙圖の通りになり I_1+I_2 は I_1 と I_2 とを合成したもので之に I_3 を合成すると全電流 I が求められる。力率 $\cos\Phi$ は次の通りになる。

$$\cos\Phi=\frac{I_1\cos\theta_1+I_3\cos\theta_3}{I}=\frac{34}{35.7}=0.952$$

例 5. 第60圖甲圖の如き回路がある、之に周波數50サイクルの電壓を加へる時力率を1にしようとすればキャパシチーCに何マイクロフアラッドの容量を與ふべきか。但しRを6オーム、Lを0.0175ヘンリーとす。



第 6 0 圖

解 先づ二つの回路に流れる電流 I_1 と I_2 とを想像してベクターで表すと第60圖乙圖の通りになる、此の場合に力率を1にしようと思へば I_1 の無效部分を I_2 に等しくすればよい。今 I_1 の流れる回路の位相角を θ とすれば此の回路の無效電流は次の式で表はさる。

$$I_1\text{の無效電流}=I_1\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$$

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$$

$$\therefore\quad I_1\sin\theta=\frac{V}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\times\frac{L\omega}{\sqrt{R^2(+L\omega)^2}}=\frac{VL\omega}{R^2+(L\omega)^2}$$

$$I_2=\frac{V}{\frac{1}{C\omega}}=VC\omega$$

然るに $I_2=I_1\sin\theta$ なるべきを以て

$$VC\omega=\frac{VL\omega}{R^2+(L\omega)^2}$$

$$\therefore\quad C=\frac{L}{R^2+(L\omega)^2}=\frac{0.0175}{6^2+(2\pi\times50\times0.0175)^2}$$
$$=\frac{0.0175}{6^2+5.5^2}=\frac{0.0175}{66.2}=0.000265\text{マイクロフアラッド}$$

第五章 レゾナンス

1. 直 列 回 路

インダクタンスとキャパシチーとが直列にある場合にはその二つは互に打ち消す作用をなすと云ふ事は既に述べた所であるが此處に**共振**（Resonance レゾナンス）と云ふ作用を述ぶるに當つて今一度その關係を說明する。今第61圖に示したやうな一つの回路にかゝつて居る電壓を V とし、電流を I、抵抗を R、キャパシチーを C、インダクタンスを L とすれば、次の式があることは既に述べた通りである。

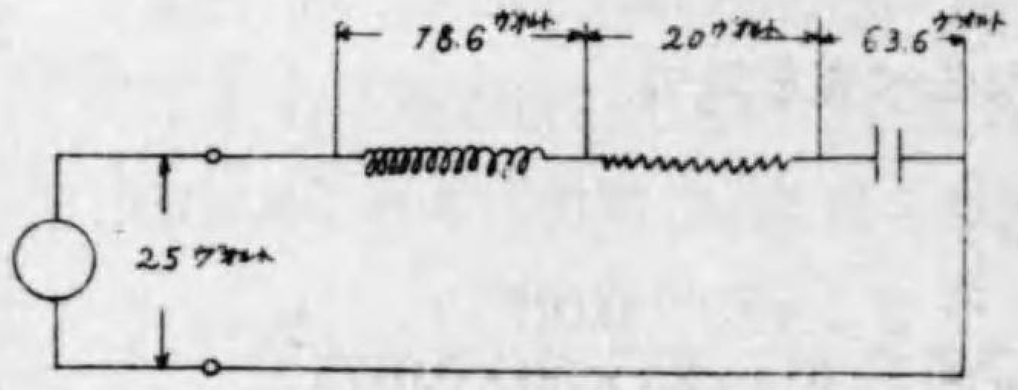
$$V=I\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

此の式に數字を入れて見る、今此の直列回路の抵抗を2オーム、インダクタンスを25ミリヘンリー、キャパシチーを500マイクロフアラッドとし、之に周波數50サイクル、電流10アンペアを流した場合の電壓を求めて見る。

IR＝10×2＝20 ヴォルト

IωL＝10×2π×50×25×10⁻³＝78.6 ヴォルト

$$I\times\frac{1}{\omega C}=\frac{10\times1000000}{2\pi\times50\times500}=63.6\ \text{ヴォルト}$$



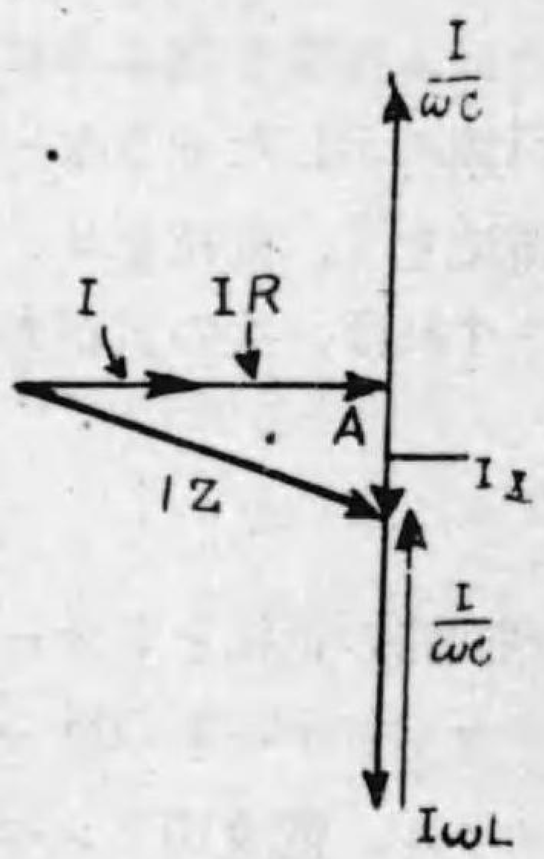
第61圖

此の價を第61圖に入れて見る、又此の直列回路全體にかゝる電壓を調べて見ると次の式で表はされた如く25ヴォルトとなる。

$$V=\sqrt{(IR)^2+\left(IL\,\omega-\frac{I}{C\omega}\right)^2}$$

$$=\sqrt{20^2+(78.6-63.6)^2}=25\ \text{ヴォルト}$$

是で見るとインダクタンスの上にかゝる電壓は78.6ヴォルトキヤパシチーの上にかゝる電壓は63.6ヴォルトで回路の兩端にかゝる電壓25ヴォルトよりも著しく大きい。此の現象はインダクタンスによる電壓降下とキヤパシチーによる電壓降下との差が少ければ少い程その程度が甚だしく、云ひ換へれば合成リアクタンスが小さければ小さい程回路の兩端の電壓は少くなる。今之をベクターで書いて見ると第62圖の通りになる、即ち IR は電流と同相に取つた抵抗による電壓降下、$\frac{I}{\omega C}$ はキヤパシチーによる電壓降下、IωL はインダクタンスによる電壓降下で、ILω から $\frac{I}{\omega C}$ を引いた IX が合成リアクタンスによる電壓降下である、此の IX と IR とを合成したIZが回路全體の電壓降下である。此の回路で全體の回



第62圖

路の電壓降下が一つのインダクタンスなりキヤパシチーなりの電壓降下に及ばないのは電壓降下をベクター的に求めたからであつて第61圖の如き電壓の分布を算術的に加へ合したならば決してかう云ふ結果にはならない。かう云ふ風にインダクタンスやキヤパシチーが直列にある場合は今のやうに全體の電壓降下が他のインダクタンスやキヤパシチーの電壓降下の一つよりも少くなる事が共振の原因となるものである。

2. 電　壓　共　振

今說明した通り第61圖の回路では回路全體の電壓が僅か25ヴォルトであるにかゝはらずインダクタンスの上では78.6ヴォルトとなりキヤパシチーの上でも63.6ヴォルトと云ふ高い電壓となる。此の場合に全體の電壓降下が他のものゝ電壓降下よりも比較的小さくなるのは二つの事が原因する、第一は IωL と $\frac{I}{\omega C}$ との差が極く小さい場合で第二は IωL や $\frac{I}{\omega C}$ が IR の價に比して大きな場合である。今 IωL と $\frac{I}{\omega C}$ との差か全く無いと假定すれば回路の兩端に於ける電壓降下は唯 IR の電壓降下、即ち抵抗による電壓降下のみとなる。此の場合が合成リアクタンスの最小なる場合で結局リアクタンスはインダクタンスとキヤパシチーとに打ち消されて零となり力率は100パーセントとなる。此の時リアクタンスの價が大きく抵抗の價が小さいとすればインダクタンスの上の電壓降下やキヤパシチーの上の電壓降下は全體の電壓降下に比して大變大きくなるものである。

かう云ふ具合に $I\omega L=\frac{I}{\omega C}$ の狀態にある場合は電流は全く抵抗のみが存在する場合と同樣に流れ $I=\frac{E}{R}$ となり直流に於け

るオームの法則そのまゝの狀態で流れる。かう云ふ風な場合を**電壓共振**（Voltage resonance ヴォルテーヂ レゾナンス）と呼んで居る。從つて電壓共振卽ちヴォルテーヂ レゾナンスを起す條件は次の式で示されて居る。

$$I\omega L=\frac{I}{\omega C}\qquad \text{又は}\ \omega L=\frac{1}{\omega C}\cdots\cdots\cdots(50)$$

但　I……電流　　　L………インダクタンス

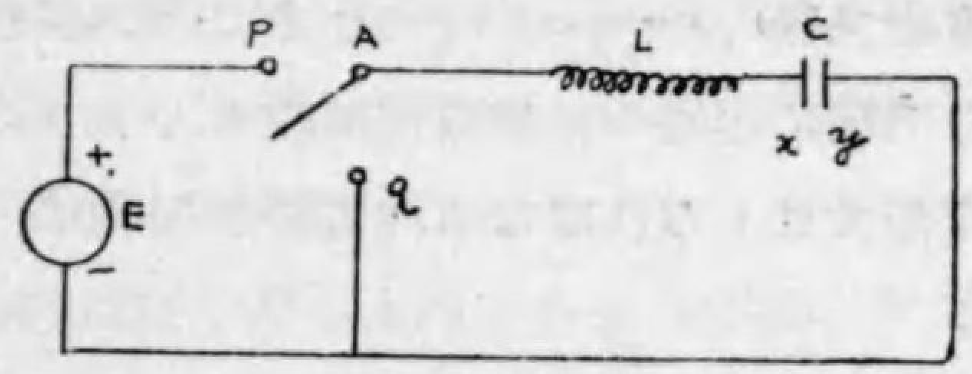
C……キヤパシチー　　ω……………………$2\pi f$

前に示した例に於ては $I\omega L$ が78.6ヴォルトで $\frac{I}{\omega C}$ が63.6ヴォルトであるから完全な共振、卽ちレゾナンスの狀態にあるものではないけれ共 $\frac{I}{\omega C}$ と $I\omega L$ との差が極く小さいから共振の狀態に近いものである。

3. 共振と云ふ理由

一つの直列回路に於けるインダクタンスによるリアクタンス卽ち誘導リアクタンスとキヤパシチーによるリアクタンス卽ち容量リアクタンスとが等しい場合を共振の狀態だと云ふのはどうした譯であらう。元來共振卽ちレゾナンスと云ふ言葉は物理學の方にもあるもので**共鳴**とも呼ばれて居る。今一つの音叉を打つて音を發せしめ別に之と同じ音叉を近くに置けば音を發して居る音叉を止めても別の音叉は前の音叉の影響を受けて鳴り續け此の音を再び元の音叉に與へるものである。此の作用と電氣の共振とが似通つて居るがその作用を說明するため一つの蓄電器卽ちコンデンサーを考へ此の蓄電器の一方に陽電位を與へたとする。此の時急に陽電位を有する側にインダクタンスを結合しその反對の側を蓄電器の反對の極に接續した時を考へて見よう。

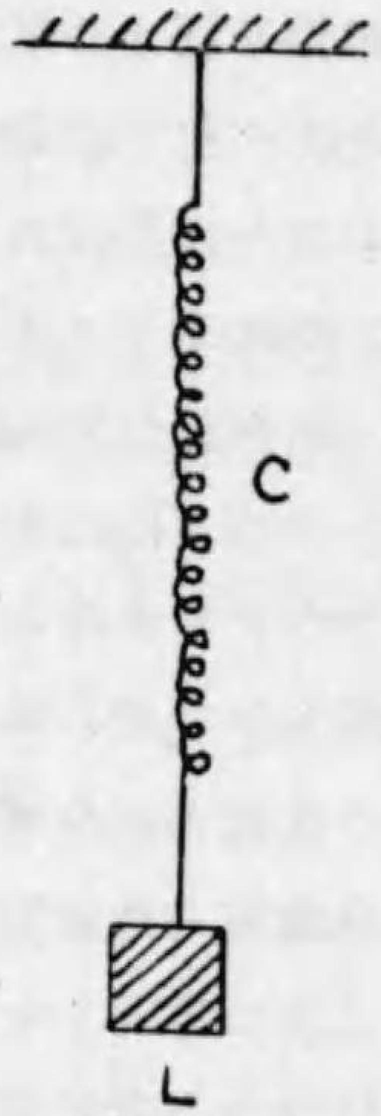
今此の關係を圖示して見ると第63圖の通りでCは蓄電器、卽ちコンデンサー、Lはインダクタンスである。今Cなるコンデンサーのxの方側に發電機Eより陽極の電位を與へてやるとする、卽ちAのスキッチをPの側に倒せばxの側には陽電位が與へられる譯である。此の時スキッチAをPの側からqの側に倒したとする、此の時インダクタンスLが無ければコンデンサーのx側の陽電位は直ちに反對のy側に走りxとyとの兩側の電位を中和してしまふものである。所が此の間にLなるインダクタンスがあればさうは行かない。先づx側にある陽電位は反對側のy側に進むためにインダクタンスLの中を通過する、此の電流はインダクタンスLの中に磁束を生ぜしめる、インダクタンスに磁束が生ずると此の中に逆起電力が生ずる事になる。此のインダクタンスの中に生じた逆起電力は最初に充電されて居たコンデンサー兩端の電壓と全く逆の方向を取る、從つてコンデンサーは放電された後に再び反對の方向に充電せられる事になる。此の逆方向の充電も次の瞬間には再び今と同じ作用を繰り返して之と反對の電壓を充電せしめかくして此の回路には何回も何回も電流の振動を繰り返すのである。此の時若し $I\omega L$ と $\frac{I}{\omega C}$ とが全く等しくその上振動電流の流れる回路に全く抵抗が無かつたならばコンデンサーの兩端に現れる電壓は何時迄經つても同じ大きさの電壓を交互に誘起し回路には此の振動電流が何時迄も續く譯である。所が如何なる回路にも抵抗は存在する譯で此の振動電流は抵抗を流れると段々勢力



第　6　3　圖

を減ぜられ遂にその勢力全部が熱損失となつて消えるものである。又$I\omega L$と$\frac{I}{\omega C}$との大きさに違ひがあるやうな場合は蓄電器の兩端に起きる振動電壓は段々と小さくなるもので此の二つの差が大きくなればなる程電壓の振動は早くなくなるものである。

此の理窟をもつと解り易く云へば一つのスプリングに例へて見れば良く了解する事が出來る。先づ第64圖の如きスプリングを想像して見る、即ちスプリングCの先にLなる重量が附けられて居るとする。此の時Lに下方の力を加へるとスプリングは伸びてLの位置は下つて來る、Lがある所まで下つた時に下方に加へた力を放すとスプリングの先にあるLは上つたり下つたりする上下運動を相當の間繰り返すのである。此の上下運動の振動は時間が經つと共に段々小さくなるのであるがこれはスプリングの抵抗の摩擦によつて小さくなるのである。從つて此の摩擦抵抗が大きければ大きい程早く振動も止まる譯で此の抵抗が非常に大きかつたならば振動も起らない譯である。此のスプリングの振動は今述べた共振即ちレゾナンスに大變良く似て居る。



第64圖

4. 共振と固有周波數

今のスプリングの問題で云つてもさうであるが振動するやうな物體は何によらず一定の**固有振動數**（Natural frequency ナチユラル フレクエンシー）を有して居る。例へば時計の振子に

しても長い振子はその振れる數が少いけれ共振子を短くすれば振れる數が多くなると同樣、スプリングにしても長いスプリングは短いスプリングに比較して振動數が少い。一般に第64圖の如きスプリングはLなる重量が輕くてCなるスプリングの力が强ければ强い程固有振動數は高くなるものである。今此のスプリングに絕えず一定の力を繼續的に加へるとする。此の力を加へる度數がスプリングの固有振動數と同じ割合で加へる時はスプリングの振れは最も大きくなるが力を加へる度數を固有振動數より違へれば違へる程その振れも小さくなるものである。

是と同じ現象が電氣回路にも存在する。一つの回路にインダクタンスやキヤパシチーが直列に接續されて居る場合は此の回路には今述べた固有振動數に似たものが存在する。電氣の方では之を**固有周波數**（Natural frequency ナチユラル フレクエンシー）と呼んで居る。此の回路に其の固有周波數と同じ周波數を有する電壓を加へると其處に共振即ちレゾナンスを生ずる譯である。此の固有周波數は電流計等では測定する事は出來ないけれ共計算を行へば容易に見出す事が出來る。今インダクタンスがLヘンリーでキヤパシチーがCフアラツドの價を有する回路がある場合の固有周波數の求め方を示さう。此の回路が共振を生ずる條件は次の式であるから此の式を變化すれば固有周波數は求めらる。

$$L\omega=\frac{1}{\omega C}$$

然るに　$\omega=2\pi f$ ………………… fは周波數

$$\therefore\quad 2\pi f L=\frac{1}{2\pi f C}\qquad (2\pi f)^2 LC=1$$

$$\therefore\quad f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\qquad\cdots\cdots(51)$$

即ち此の f が固有周波數である。

今一例として前に述べた第61圖の回路の固有周波數を求めて見る、即ち抵抗2オーム、インダクタンス25ミリヘンリー、キヤパシチー500マイクロファラッドが直列に接續されて居る回路の固有振動數を求めて見る。此の場合に於て抵抗は何等固有振動數に關係がないからLとCとより之を求む。

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$L=25\times10^{-3}\qquad C=500\times10^{-6}$$

$$\therefore\quad f=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.025\times0.0005}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\times0.00354}=\frac{1}{0.0222}=45$$

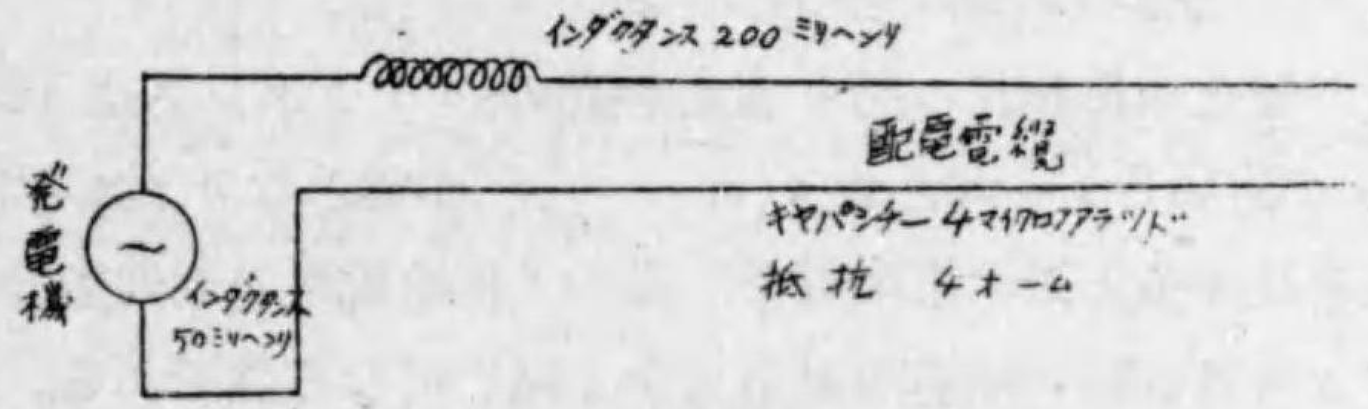
即ち此の回路の固有周波數は45サイクルである。今のスプリングの例と同じやうに電氣の回路に於てもその回路の固有周波數と同じ周波數の電壓を加へると共振を生じ振動電流も大きくなる。

5.　實際に於ける電壓共振

電壓共振と云ふ事は事實屢々起る事である。又無線電信やラヂオ等は全く此の共振を利用したに外ならない、即ち一つの回路に共振を起さしめ此の共振電流が空氣中のエーテルに刺戟を與へるのがラヂオの電波であつてスプリングが振動すれば附近の空氣に振動を與へるのと同じ理窟である、電波を受ける方では此の電波の周波數に共振が生ずる樣にインダクタンスとキヤパシチーとを調整して受信器の中に同調回路を作るのである。これは無線電信電話に此のレゾナンスを利用したと云ふ事を云

つた迄で話が少し本筋を離れたから また元の強電流の話に返る。

元來供給電壓の周波數と回路の固有周波數とが違へば違ふ程回路の振動電流は小さいものであるが若し回路の固有周波數と同じ周波數の電壓を加へたならば振動電流も大きくなり回路の一部分の電壓が大變高くなり絶縁に危險を生ずる事さへもある。今その實際の例を擧げて見ると第65圖の通りで交流發電機



第　6　5　圖

は100ヴォルト、159サイクルの電壓を出して居るとする、發電機のインダクタンスを50ミリヘンリー、配電線の出口にインダクタンス200ミリヘンリーがあるとし配電線の抵抗を4オーム、キヤパシチーを4マイクロファラッドとする。此の配電線に發電機より直流を供給すると配電線には全く負荷が無いので電流は流れない。處が之に交流を供給するとその狀態が全く變り配電線に負荷が無くても キヤパシチー を通つて 電流が流れる。此の回路に交流159サイクル100ヴォルトの電壓をかけた時の電流を計算して見よう。此の時配電線には全體に渉つて電流がキヤパシチーを流れるのであるから配電線の抵抗の影響は半分となる、即ち配電線の抵抗は½オームと見なければならない。

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$R=\frac{4}{2}\text{オーム}\qquad E=100\ \text{ヴォルト}$$

$$\omega=2\pi\times159\qquad C=0.000004\ \text{フアラッド}$$

$$L=(L_1+L_2)=0.05+0.2=0.25\ \text{ヘンリー}$$

$$\therefore\quad I=\frac{E}{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(2\pi\times150\times0.25-\frac{1}{2\pi\times159\times0.000004}\right)^2}}$$

$$=\frac{100}{\sqrt{2^2+(250-250)^2}}=\frac{100}{2}=50\ \text{アンペア}$$

上式の變化中に知れる通り此の回路のリアクタンスは（250-250）で結局0オームとなり$\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$が零となり此の回路は共振を生ずると云ふ事になる。從つて供給電壓の周波數の159サイクルは回路の固有周波數と全く同じになる譯である。此の回路に今の計算通り50アンペアの電流が流れるとどんな電壓の分布を生ずるかを見て見よう。先づ配電線の電纜の兩端に於ける電壓を計算して見る。

$$V=\frac{I}{\omega C}=\frac{50}{2\pi\times159\times0.000004}=12500\ \text{ヴォルト}$$

處が此の配電用の電纜は普通に100ヴォルトの電壓に耐へれば良い譯であるから200ヴォルトか300ヴォルト位までの電壓にしか耐へられない筈である。從つて今計算した樣に1萬ヴォルト以上の電壓がかゝつて來て呉れては忽ち絕緣は破壞せられるに定つて居る。だから電壓の共振が起る場合には電氣回路の或る部分は大變大きな電壓を受ける事になる。又200ミリヘンリーのインダクタンスの兩端も相當大きな電壓を受ける譯で之を計算して見ると次の通りである。

$V=\omega LI=2\pi\times159\times0.2\times50=10000$ヴォルト是亦1萬ヴォルトと云ふ電壓を受けてまことに危險である。

處が此の時周波數を半分に減じて見ると共振の程度はずつと少くなり振動電流も早く消失する、回路の中に起きる部分的の高電壓もずつと減少する事次に示す通りである。

$$I=\frac{100}{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(2\pi\times\frac{159}{2}\times0.2-\frac{1}{2\pi\times\frac{159}{2}\times0.000004}\right)^2}}$$

$$=\frac{100}{\sqrt{4+(375)^2}}=0.26\ \text{アンペア}$$

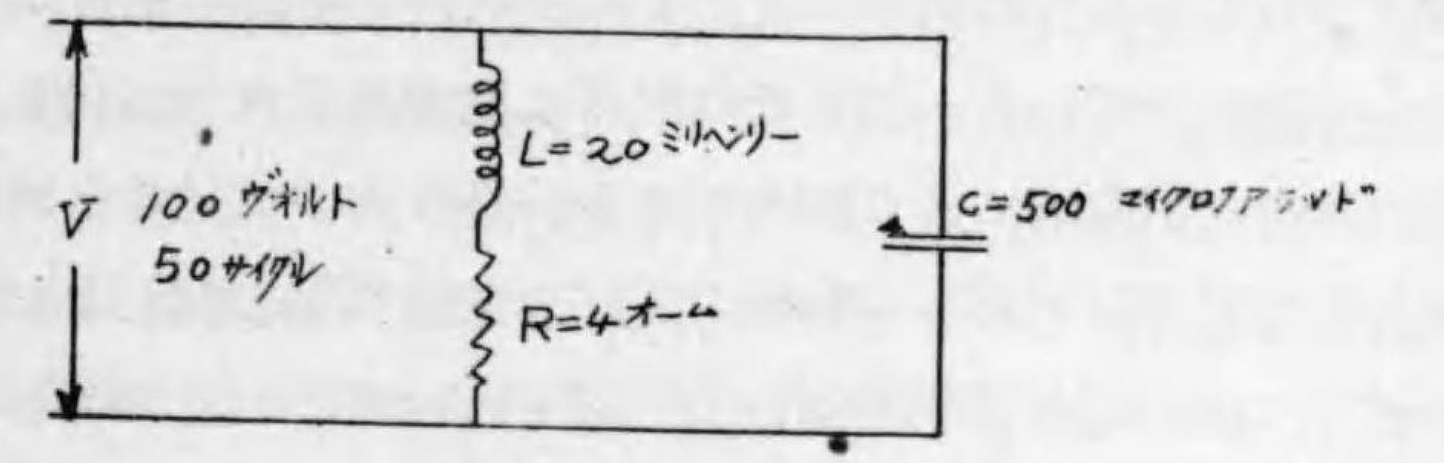
從つて電流は50アンペアから0.26アンペアに減じ電纜の全端にかゝる電壓も大變小さくなる。

$$E=\frac{I}{\omega C}=\frac{0.26}{2\pi\times\frac{159}{2}\times0.000004}=135.5\text{ヴォルト}$$

かくの如く周波數が半分になつて固有周波數と遠ければキヤパシチーの兩端にかゝる電壓も大變小さくなり12500ヴォルトから135.5ヴォルトと云ふ風に大變な減少の仕方である。

6. 電　流　共　振

今第66圖の如き回路があるとする、即ちキヤパシチー500マイクロフアラッドが抵抗4オーム、インダクダンス20ミリヘン



第　6　6　圖

リーと並列に接續され之に交流100ヴォルト、50サイクルがか

けられるとする。此の時二つの回路に流れる電流の大きさとその方向とを求めて見ると抵抗、インダクタンスを流れる電流 I_1 とキヤパシチーを流れる電流 I_2とは夫々次の通りである。

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$=\frac{100}{\sqrt{4^2+(2\pi\times50\times0.02)^2}}=13.4 \text{ アンペア}$$

$$I_2=\omega CV=2\pi\times50\times0.0005\times100=15.7 \text{ アンペア}$$

此の二つの電流 I_1と I_2とをベクターで表はして見ると第67圖の通りになり此の二つの分岐路を流れる電流を合成して見ると次の樣になる。

$$I=\sqrt{(I_1\cos\theta)^2+(I_2-I_1\sin\theta)^2}$$

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=\frac{4}{7.45}=0.536$$

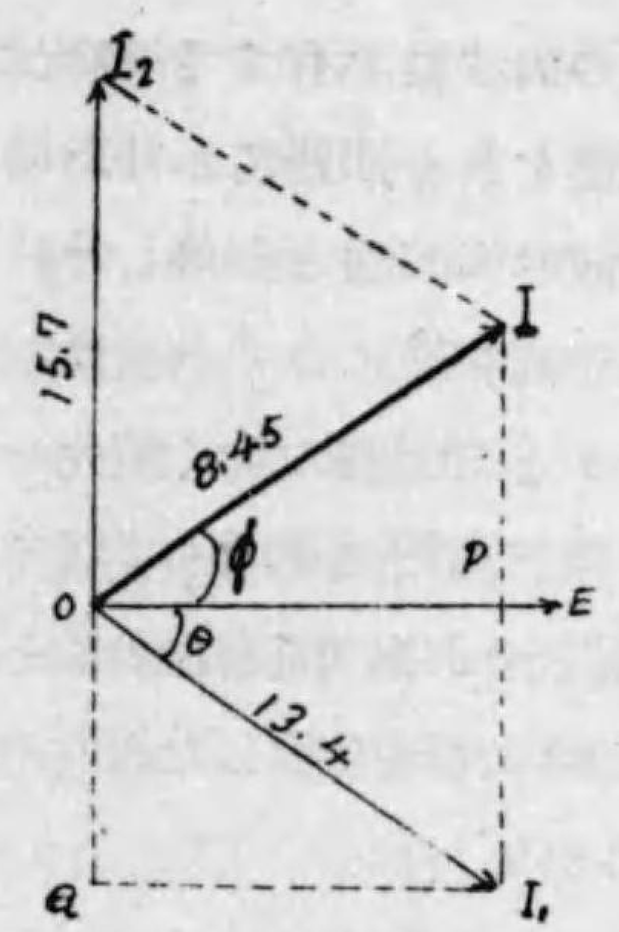
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-0.288}=0.845$$

$$\therefore\ I=\sqrt{(13.4\times0.536)^2+(15.7-13.4\times0.845)^2}=8.45 \text{ アンペア}$$

今全體の力率を $\cos\phi$ とすれば之は次の如し。

$$\cos\phi=\frac{I_1\cos\theta}{I}=\frac{13.4\times0.536}{8.45}=0.85$$

卽ち全體の力率は0.85であるがこれはキヤパシチーを流れる電流卽ち I_2が I_1の無効分力よりも大きいので電流は電壓よりも進んで居る譯である。卽ち此の回路は進電流を取つて居る譯で此の狀態は第67圖により明かである。是によつて見ると回路を流れる全電流はその一分岐路を流れる電流 I_1 I_2の何れよりも小である。此の場合に第67圖の OQ 卽ち $I_1\sin\theta$ と I_2とが等しければ全電流 I のベクターは OP となり回路には抵抗のみの存在と同じ電流が流れる譯である。若し此の場合に抵抗が無くて



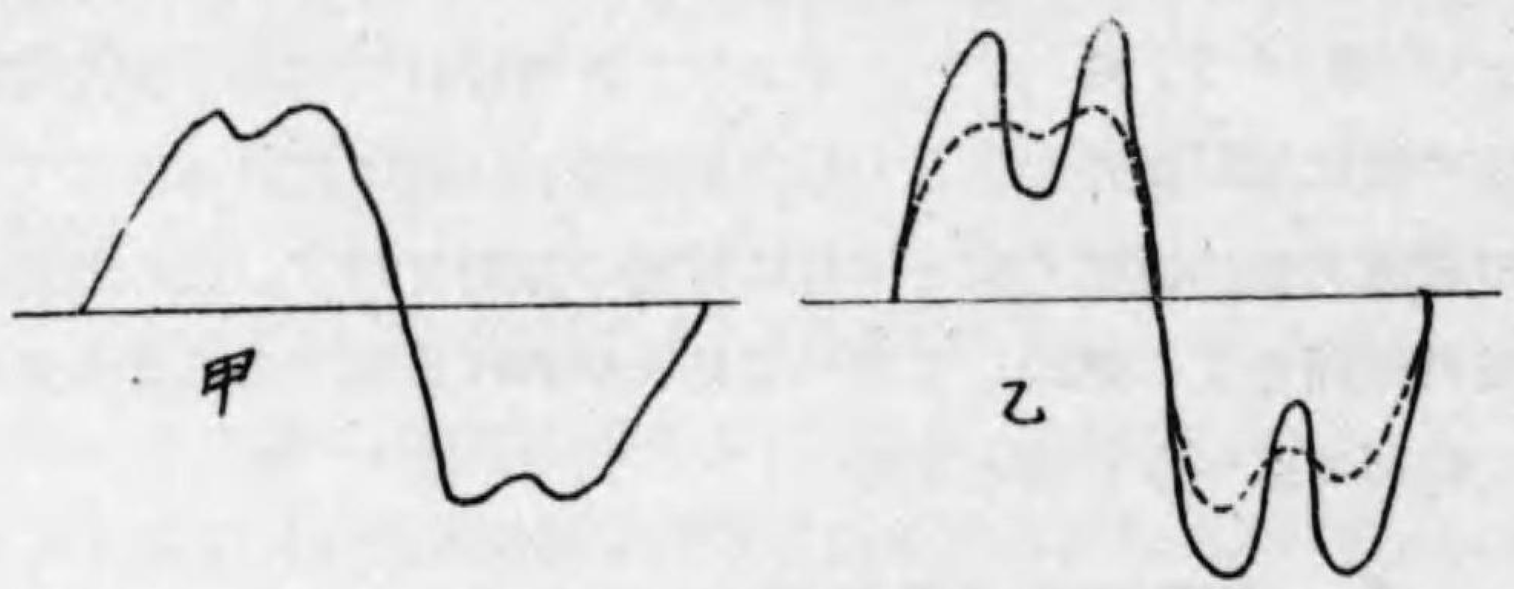
第67圖

$\omega L=\frac{1}{C\omega}$ なる關係がある場合には分岐回路に多量の電流が流れても回路全體には全く電流が流れない有樣となる。から云ふ具合にキヤパシチーとインダクタンスが並列に接續されて居る場合には分岐電流の合計が却つて各分岐電流よりも小さくなる事がある。此の狀態を**電流共振**(Current resonance カーレントレゾナンス）と呼ばれて居る。完全な電流共振は第67圖の OQ と OI_2 とが相等しい時に起きるもので此の電流共振は電壓共振と同樣に電流の振動を起す。此の狀態は並列回路をよく熟視して考へて見れば知れる事であるから此處では別に述べない事とする。

7. 高調波による共振

共振と云ふ事は基本の波形ばかりでなく高調波に於ても存在する譯である。元來發電機から出す電壓の波形は**サイン波形**(Sine wave サインウエイヴ又は Sinsoidal wave シンソイダルウエイヴ）の外に他の高調波を含んで居るので一般にサイン波形より幾分違つた波形を有して居る。我々の使用する電壓はサイン波形が望ましいので發電機の設計にしても出來る丈サイン波形を出す樣には設計されてあるけれ共一般に１種又は２種以上の高調波が存在するものである。此の高調波は２種以上の高調波が同時に存在する事もあるが今此の高調波による共振を説明して見よう。今發電機より出る電壓が第三高調波を含んで居る

とする、即ち基本波形の周波數の３倍の周波數を有する波形が基本波形に混じて居るとする。此の電壓をある回路にかけた場合に回路の固有周波數と此の第三高調波の周波數とが等しければ其處に共振が起る譯である。此の第三高調波による共振は電壓の波形を如何に變化せしむるかと云ふと第68圖の如く變化せしむる。第68圖の甲は基本波形の外に第三高調波を含んで居る電壓波形とする、此の波形の第三高調波が回路の固有振動數と等しければ第三高調波は共振を生じて圖の實線で示した通りの尖つた形を有する波形に變化するのである。



第　６　８　圖

此の第68圖の實線で示した波形は點線で示した元の波形に比較して著しく電壓が高く從つて此の電壓をかけられた回路はその絶縁が此の電壓に耐へ得なくなつて破壞したりする様な事に陥る。此の高調波の共振による高電壓は電壓計を持つて測定して見た所で元の電壓しか指示しないので高調波の共振による高電壓は全く外部には知られないのであるがその絶縁に及ぼす影響は基本波形に於ける高電壓と同じ事である。今此の高調波による共振の例を示して見る。今周波數50サイクルの電壓を抵抗１オーム、インダクタンス0.02ヘンリー、キヤパシチー556マイクロフアラッドの三つが直列に接續されて居る回路にかけた

場合を考へよう。此の回路の固有周波數は次の式で表はさる。

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{L\times C}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.02\times 6.000556}}=150 \text{ サイクル}$$

即ち150サイクルの固有周波數を有する事になる、此の回路が150サイクルの固有周波數を有するとすれば基本周波數が50サイクルであるから此の回路は此の電壓の第三高調波に對して共振を起す事になる。第三高調波が電壓共振を起せばインダクタンスの兩端又はキヤパシチーの兩端等には相當高い電壓を生ずる事になり絶縁等も危險を生ずる事になる。かう云ふ譯であるから電壓の波形は出來る丈けサイン波形に近い波形とする様に苦心が拂はれて居　がどうしても高周波を防ぐ事が出來ずどんな電壓にも一つや二つの高調波は含んで居る筈である。高調波が澤山含まれて居れば居る程高調波による電壓共振の可能性は多い譯で例へば第三高調波、第九高調波、第十三高調波、第二十一高調波を含んで居る電壓は電壓共振を引き起す可能性が５回もある譯である。實際に於ける電壓共振は基本波形の電壓共振よりも高調波の電壓共振の方が多く起る譯で昔から原因不明の絶縁破壞と云ふ事がよくあつたものであるがこれは高調波による電壓共振が多くの原因を作つて居た。

8.　例　　題

例１. 抵抗0.5オーム、インダクタンス6.7ミリヘンリー、キヤパシチー 8.9マイクロフアラッドの三つが直列に接續されて居る回路がある。此の回路に對して50サイクルの電壓をかけると第何番目の高調波に對して電壓共振が起きるものであるか。

解　先づ此の回路の固有振動數を計算して見る。

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{L\times C}}$$

L＝6.7 ミリヘンリー　　C＝8.9 マイクロフアラッド

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.0067\times0.0000089}}=650\ \text{サイクル}$$

然るに此の回路の周波數は50サイクルであるから此の回路の固有周波數を50で割れば次の如く第十三番目の高調波に對して共振を起す事になる。

$$650\div50=13$$

例 2. 周波數60サイクルの電壓が相當大きな第三高調波を含んで居る。此の電壓が抵抗2オーム、インダクタンス0.05ヘンリーとキヤパシチー幾らかとを直列に持つた回路にかかつた場合に共振を起したと云ふ。此の時キヤパシチーは何マイクロフアラッドなるか。

解　第三高調波が共振を起したのであるから次の式が成立して居なければならない。此の時の周波數は60×3＝180卽ち180サイクルでなければならない。

$$\omega L=\frac{1}{\omega C}$$

$$\omega=2\pi f=2\pi\times180 \qquad L=0.05\ \text{ヘンリー}$$

$$2\pi\times180\times0.05=\frac{1}{2\pi\times180\times C}$$

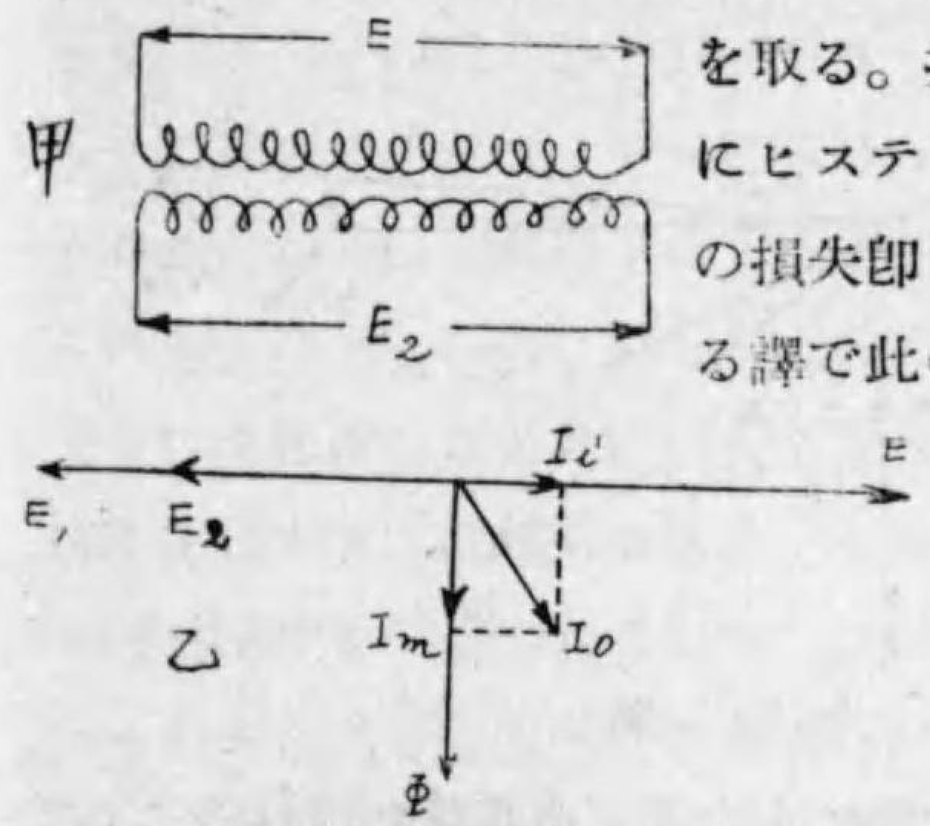
$$C=\frac{1}{(2\pi\times180)^2\times0.05}=\frac{1}{64000}=0.0000156\ \text{フアラッド}$$

卽ちキヤパシチーが15.6マイクロフアラッドの場合には第三高調波が電壓共振を起すのである。

第六章　ベクターの應用

1. 變壓器とベクター

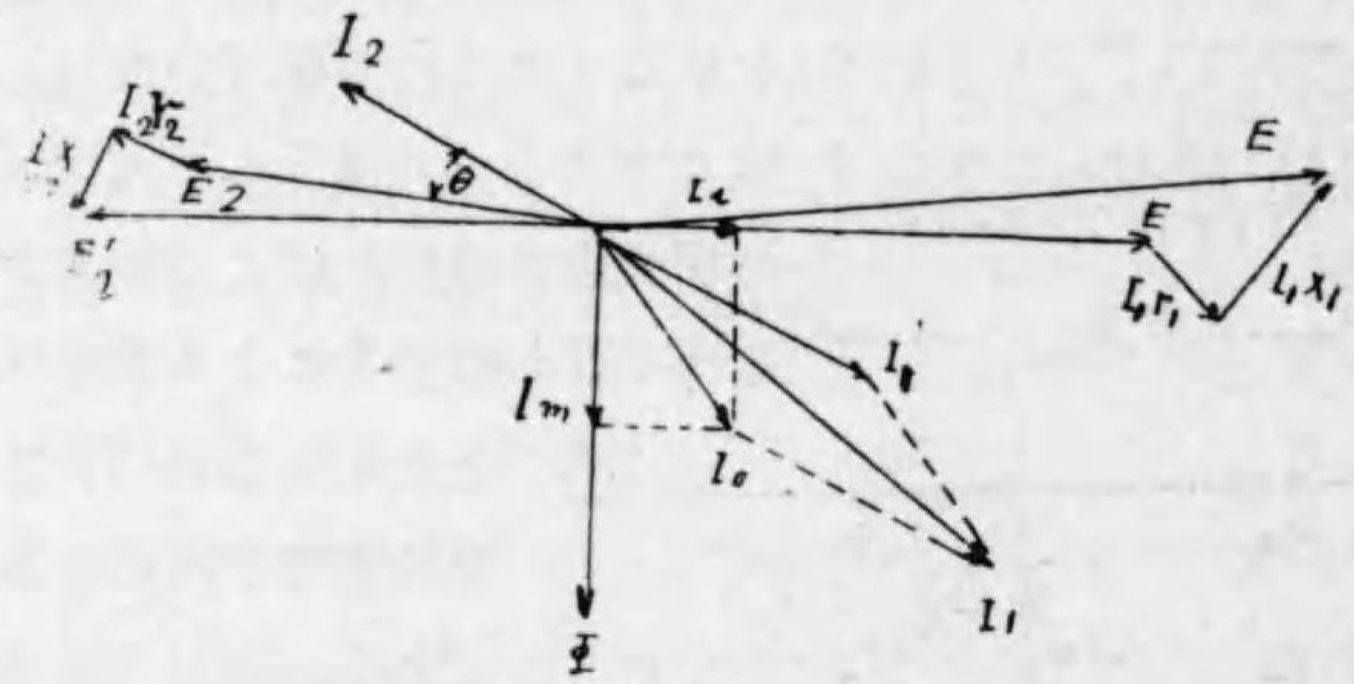
これからベクターを電氣機械に應用する二三の例を擧げて見る。先づ變壓器のベクターについて述べると今第69圖上圖の如き變壓器の一次側にEなる變壓をかけるとする、此の時一次側にはE_1なる反起電壓を生じ同時に二次側にもE_2なる起電壓を生ずるのである。今供給電壓のEを基線に取つてベクターを書く、一次側にEの供給電壓がかゝると鐵心を磁化する勵磁電流が流れるが此の勵磁電流は無效電流であつて供給電壓より90度遅れるから第69圖の下圖の如く90度遅らしめて勵磁電流 I_m を取る。次に此の電流が流れると共にヒステリシス損失と渦電流損失との損失卽ち鐵損失による電流が流れる譯で此の鐵損失による電流は全部損失になるのであるから供給電壓と同相にある譯である。從つて此の鐵損失の電流を I_l で表し之を供給電壓Eと同相に取る、此の勵磁電流 I_m と鐵損失電流 I_l とが無負荷電流となる譯で此の無負荷電流を求むるには I_m と I_l とをベクター的に加へた I_0 を求むれば良い譯である。次に勵磁電流 I_m による磁束は勵磁電流と同相にあるからして圖の如く I_m と同相に磁束 Φ を取れば



第 6 9 圖

良い譯で供給電壓 E より90度遲れる譯である。變壓器の一次側に電壓 E をかけるとその一次側に反起電壓 E_1 を二次側に起電壓 E_2 を發生するものであるが是等の起電壓は磁束 Φ によつて發生するものでその方向は Φ より90度遲れた方向を取り云ひ換へれば供給電壓より 180 度遲れた方向を取るものである。此の一次側反起電壓を E_1 とし二次側の起電壓を E_2 とすればそのベクターは第69圖の下圖の通りになり是で全く變壓器のベクター圖は出來上つた譯である。

今のベクター圖は變壓器が無負荷の場合のベクター圖であつたが次に變壓器に負荷がかゝつた場合はどうなるかと云ふ事を述べて見る。先づ第69圖に示した通り E_1 を供給電壓 E より電壓降下を引いた電壓として之を基準として書く、これは第70圖



第　７０　圖

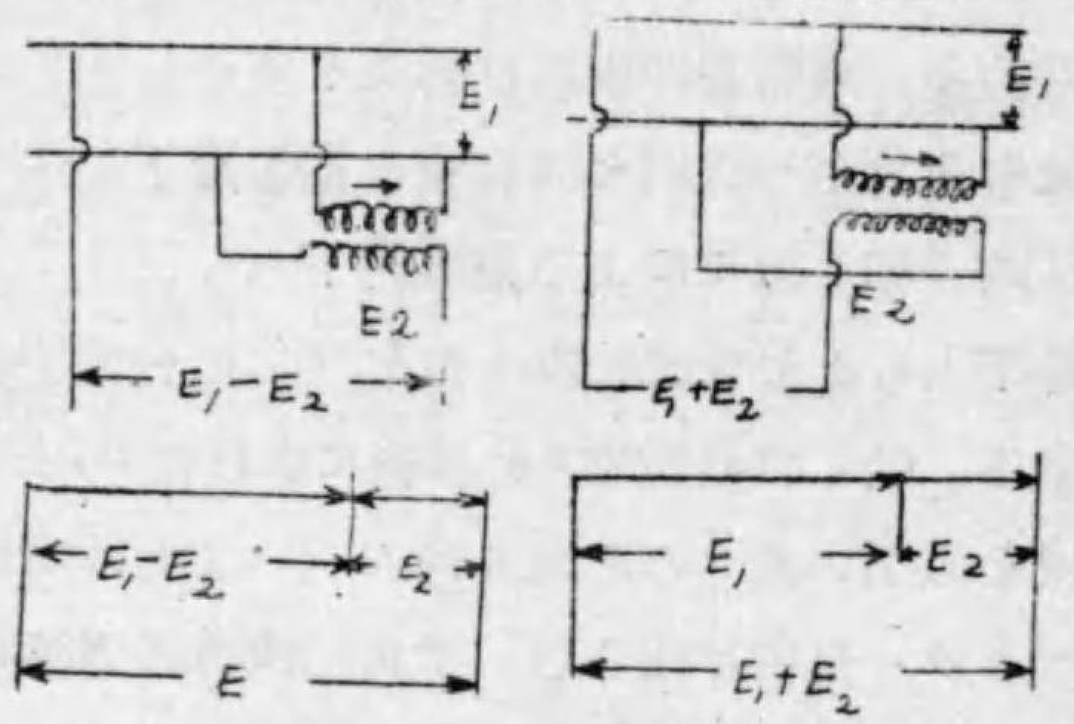
の通りで此の變壓器の二次側に I_2 なる二次電流が流れるとして此の二次電流は二次電壓より θ の角度丈遲れるとする。此の二次電流 I_2 を一次側の電流 I_1 に換算しなければならないが此の電流の換算は次の式によつて行はる。

$$I_1=\frac{n_2}{n_1}I_2$$

此の式で n_2 は二次側の捲數、n_1 は一次側の捲數であつて一次側の電壓が低くて二次側の電壓が高ければ一次側の電流は當然小さくなる譯である。所が今變壓器のベクター圖を書くに當つて便宜上變壓比を 1:1 とし一次電流と二次電流との大きさを相等しいものとする。此の二次電流を一次電流に直すには二次電流と反對側に I_1' を取りその大きさを I_2 に相當せしむ。一次電流は此の I_1' と無負荷電流 I_0 との合成であるからして I_1' と I_0 とを圖の如くして合成すると I_1 を得るが此の電流 I_1 は變壓器の一次側を流れる一次電流である。變壓器の中には抵抗もあるしリアクタンスもあるので此の電流が一次側を流れると電壓降下を生ずる。此の電壓降下は圖の如く抵抗による電壓降下 I_1r_1 とリアクタンスによる電壓降下 I_1x_1 とを合成したものを E_1 に合成すれば供給電壓 E を生ずる。若し供給電壓 E を基線に取れば E_1 は E より $I_1r_1I_1x_1$ の合成を差引いたものを取り此の E_1 より90度遲らせて I_m や Φ のベクターを書けばよい。次に二次側の電壓降下であるが此の電壓降下は二次電流 I_2 による抵抗とリアクタンスの電壓降下を合成したものである。E_1 を逆に引き延ばし此の大きさに相當した長さに E_2' を取れば此の E_2' は變壓器の二次側に誘起する二次電壓である。二次側の電壓は此の誘起電壓より電壓降下を引去つたもので二次側にも抵抗やリアクタンスがあるので是による電壓降下を引けばよい。即ち圖の如く二次電流 I_2 と直角な方向に I_2x_2 を取り I_2 と逆の方向に I_2r_2 を取ればその殘りの E_2 が二次側の電壓である。これで變壓器に負荷がかかつて居る場合も變壓器のベクター圖を書き上げる事が出來た譯である。

2. 昇壓器とベクター

線路が長くなつてその間に電壓降下が甚しいやうな場合には昇壓器即ちブースターと呼ぶものを使用して線路の電壓を上げる事があるがこれは全く普通の變壓器と同樣のものを使用するか又は變壓器そのものを使用するのであるからそのベクター圖も全く變壓器と同じである。前に述べた第69圖の變壓器のベクター圖に於て供給電壓は二次誘起電壓と、180度の相差を有するもので云ひ換へれば供給電壓と誘起電壓とはその方向が反對である。今その接續を示すと第71圖上圖の通りで左圖の如く接續すれば電壓は元の電壓よりも低くなる事になり右圖の如く接續すれば元の電壓よりも高くなるのである。

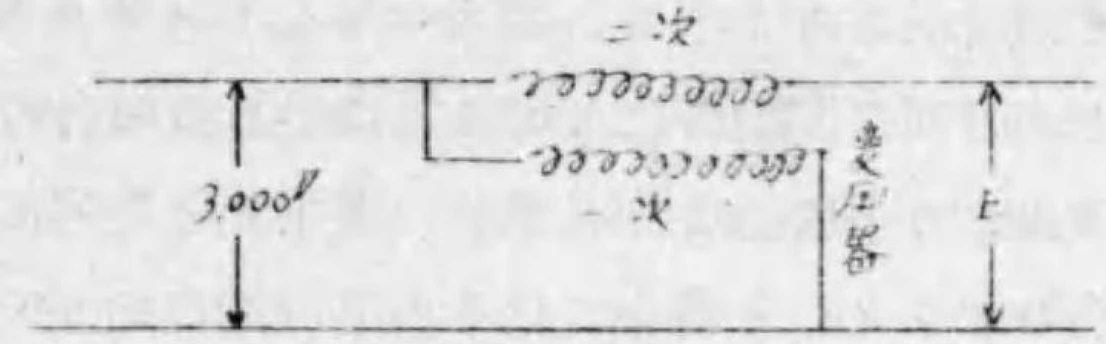


第71圖

即ち第71圖の下圖の如く左側では端子電壓は元の電壓 E_1 より變壓器の二次側に起る起電壓 E_2 を引いた電壓 E_1-E_2 となり右側では變壓器の二次側に於ける起電壓が元の電壓と同方向に起るから端子電壓は E_1+E_2 となるのである。これは單相無負荷の場合の話で負荷にかゝるとその電壓降下によつて多少電壓の方向と大きさとが異つて來るものであるがその違ひ方は極く僅かで事實上無視してもよい。

今例として一つの問題を出して見る、第72圖の如き接續をして電壓を上昇せしめやうとする場合に變壓器を使用するとする

變壓器の一次電壓は3300ヴォルト二次電壓は220ヴォルトとし線路の電壓が



第72圖

3000ヴォルトなる場合に此の昇壓器を出た場所の電壓を求めて見る。此の場合に於ける變壓器の二次誘起電壓は次の通りである。

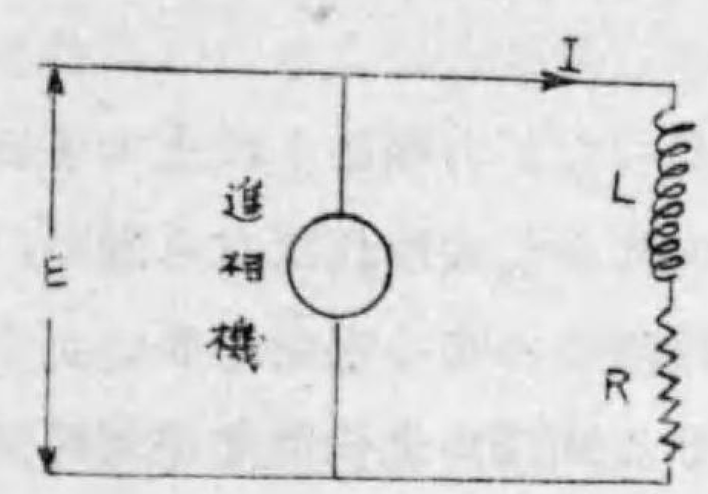
$$E_2 = 3000 \times \frac{220}{3300} \fallingdotseq 200 \text{ ヴォルト}$$

故に昇壓器を出た場所の電壓は二つの電壓の和となるから次の如く3200ヴォルトとなる。

$$E = E_1 + E_2 = 3000 + 200 = 3200 \text{ ヴォルト}$$

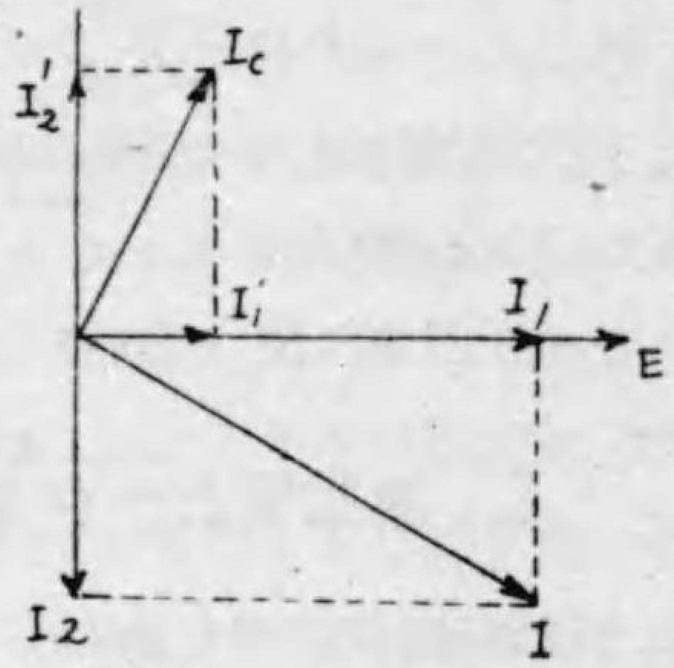
3. 進相機とベクター

負荷回路の力率を良くしようと云ふ目的で進相機と云ふものが使用され同期進相機、非同期進相機、靜電容量等が之に使用せられて居る。元來電氣回路には多くの場合にインダクタンスがあつて之がために回路の力率は惡くなり電流は電壓に遅れるものである。然るに遅れる電流の代りに進む電流を供給してやると遅れる電流と進む電流とが相殺して電流の遅れも少くなり力率も良くなる。此の作用をするものが**進相機**であつてその容量如何によつては力率を1にもする事が出來るし遅電流を全部相殺して却つて進電流を取らしめるやうにもする事も出來る。今第73圖の如



第73圖

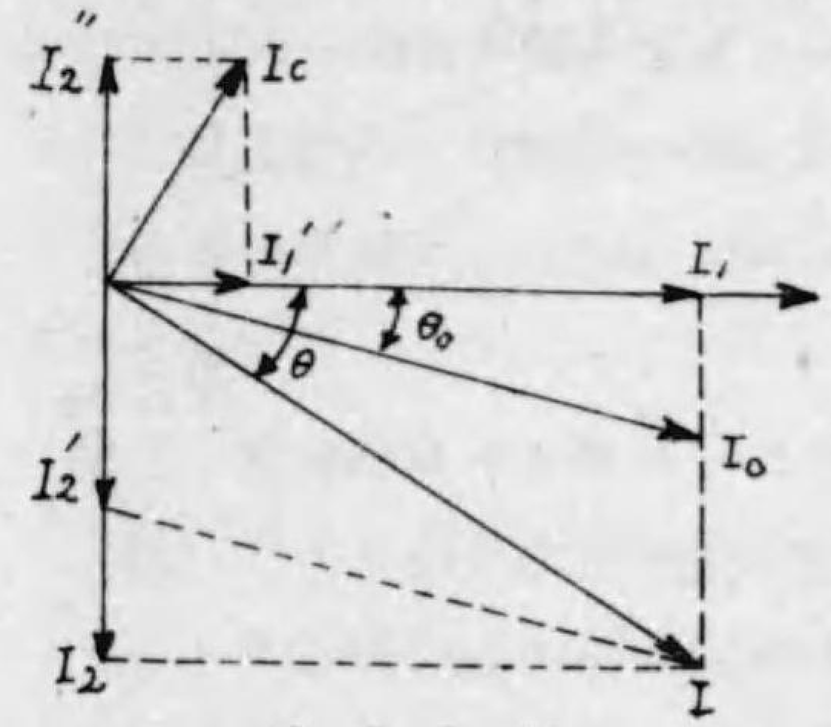
き回路があるとする、即ちLなるインダクタンスとRなる抵抗とが直列に接續されて居る負荷がある場合にその回路の力率を改善して1にしようと思ひ、進相機を並列に接續した。此の場合のベクターを書いて見ると第74圖の通りでLとRとの回路を流れるIは電壓より或る角度丈遅れる譯で之を有效電流I_1と無效電流I_2とに分けて見る。此の時回路の力率を1にしようと思へば無效電流I_2を消してしまふ丈の進電流を供給してやれば良い譯で第74圖の如く無效電流I_2に反對する電流I_2'を進相機が供給すれば良いのである。若し進相機がI_2の無效電流に等しきI_2'丈の進電流を供給し得たならば回路に流れる電流はI_1のみとなり此の電流は電壓Eの相と一致する。所が進相機を運轉しようと思へば其處に力を必要とするが此の運轉する力は有效電力であつて電壓と同相にあるものである、此の電力を得る電流をI_1'とすれば進相機の取る電流はI_2'とI_1'とを合成した電流I_cである。從つて此の場合に回路に流れる有效電流はI_1のみでなく之にI_1'を加へたI_1+I_1'であつて此の電流I_1+I_1'は電壓Eの相と一致するから力率はやはり1であるべきである。



第 7 4 圖

上は力率を1にする場合の話であつたが力率を1にまですると云ふ事は進相機の容量を非常に大きくしなければならないので一般には力率を0.9位にまで上げやうとする場合が多い。今度は第73圖の如くLとRが直列にある回路に進相機を並列に接續して力率を或る程度にまで良好にしようと云ふ場合を示して

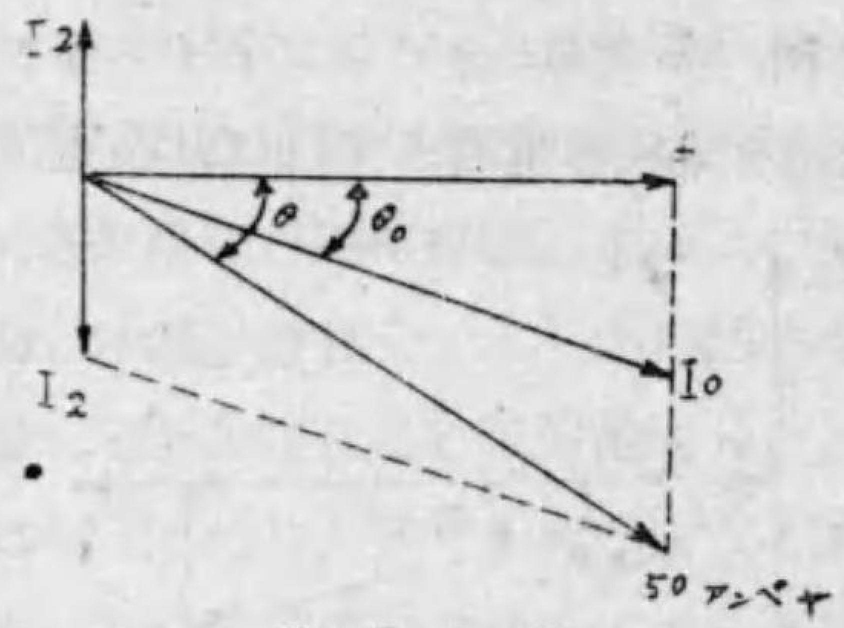
見る。第75圖に於て今IをインダクタンスLと抵抗Rとの直列回路を流れる電流とすれば此の電流は電壓より遅れるので之を有效分力I_1と無效分力I_2とに別ける。此の場合に力率$\cos\theta$を$\cos\theta_0$に改善しようとするのであるがそれに要する進電流の供給はどの位かと云ふ事を調べて見る。I_0は$\cos\theta_0$の力率の場合に流れる電流でIとI_0との差をベクトル的に求めて見ると第75圖の如くI_2'の遅電流がその差となる。從つてIの電流をI_0の電流に變へて力率を$\cos\theta$から$\cos\theta_0$に變へやうと思へばI_2'丈の大きさの進電流を加へてやれば良い譯である。此のI_2'に等しい進電流を加へる事は此の電流と方向反對にして大きさ相等しいI_2''の電流を加へれば良い譯で從つて此の場合は進相機がI_2''の進電流を出せば良いと云ふ事になる。所が前にも云つた通り進相機を運轉すればその運轉に電力を要しその電流は有效電流で第75圖のI_1'で表したのが此の電流である。從つて進相機の出す全電流はI_1'とI_2''との合成ベクターI_cで表はされる。此のI_1'の電流のために$\cos\theta_0$は少し大きくなりいくらか力率は良くなるもので回路の電流I_0もその價が少し大きくなるものである。



第 7 5 圖

今例として或る回路に50アンペアの電流が力率0.8の下に通つて居るとする、此の回路の力率を0.9にしようとすれば何アンペアの進電流を供給すれば良いかと云ふ問題について説明する。此の場合に於て電流のベクター圖を書けば第76圖の通りで

50アンペアは力率 0.8 で流れ之を I_0に減少して力率を 0.9 にしようと云ふのである。先づ50アンペアの有效電流と無效電流とを求めると次の通りである。



第 7 6 圖

$$有效電流=50\times\cos\theta$$
$$=50\times0.8=40\ アンペア$$
$$無效電流=50\times\sin\theta=50\times\sqrt{1-\cos^2\theta}=50\times0.6$$
$$=30\ アンペア$$

これは力率改善前の事であつて力率を 0.9 に改善したならばその回路に流れる電流は次の通りである。

$$力率\ 0.9\ の時の電流=\frac{40}{0.9}=44.4\ アンペア$$

力率 0.9 の時の無效電流を次の如く求む。

$$力率0.9の時の無效電流=44.4\times\sin\theta_0=44.4\sqrt{1-\cos^2\theta_0}$$
$$=44.4\sqrt{1-0.81}=19.4\ アンペア$$

初めの無效電流30アンペアを 19.4アンペアに減ずるのであるからその差を求め此の差丈の進電流を供給すると力率は 0.9 に改善する事が出來る。

$$30-19.4=10.6\ アンペア$$

4. 例　　題

例 1. 電壓3000ヴォルトの線路の電壓を一次側の電壓3300ヴォルトの變壓器を昇壓器として使用し3500ヴォルトに上昇せしめやうとする、此の場合變壓器の二次電壓は何ヴォルトにすべきか。

解 先づ何ヴォルト上昇せしむべきかを計算し此のその電壓を線路の電壓で割り之に變壓器の一次電壓をかければよい

$$3500-3000=500\ ヴォルト$$
$$變壓器の二次電壓=500\times\frac{3300}{3000}=550\ ヴォルト$$

即ち變壓器の二次側は 550 ヴォルトの電壓にすれば良い譯である。

例 2. 電力600 キロワットの負荷があつて力率 0.8 を以て運轉して居るが是に進相機を接續して力率を 0.9 に改善しようとする場合進相機は何キロヴォルトアンペアとなすべきか。但し進相機の電力損失を無視するものとす。

解 先づ力率0.8 の場合と 0.9の場合との全體のキロヴォルトアンペアを求めて見る。

$$力率0.8\ の時のキロヴォルトアンペア=\frac{600}{0.8}=750\text{k.V.A.}$$
$$力率0.9\ の時のキロヴォルトアンペア=\frac{600}{0.9}=666\text{k.V.A.}$$

次に力率 0.8 の場合と 0.9 の場合との無效電力を求める。

$$力率\ 0.8\ の無效電力=750\times\sin\theta_1=750\times\sqrt{1-\cos^2\theta_1}$$
$$=750\times\sqrt{1-0.8^2}=750\times0.6=450キロヴォルトアンペア$$
$$力率\ 0.9\ の無效電力=666\times\sin\theta_2=666\sqrt{1-\cos^2\theta_2}$$
$$=666\times\sqrt{1-0.9^2}=666\times0.436=290キロヴォルトアンペア$$

従つて力率 0.8 を 0.9 に進めんとする場合は此の無效電力の差丈の進電流の無效電流を供給すれば良い譯でその大さは次の通りである。

$$450-290=160\ キロヴォルトアンペア$$

例 3. 力率75パーセントにして60キロワツツトの電力を取る電動機あり。此の電動機は 200ヴォルトを供給せられて居

るが、今此の電動機の力率を95パーセントに改善するには何程の靜電容量を之と並列に接續すべきであるか。但し電動機の周波數は50サイクルとす。

解　先づ力率0.75に於ける見掛けの電力 W_3 を求める。

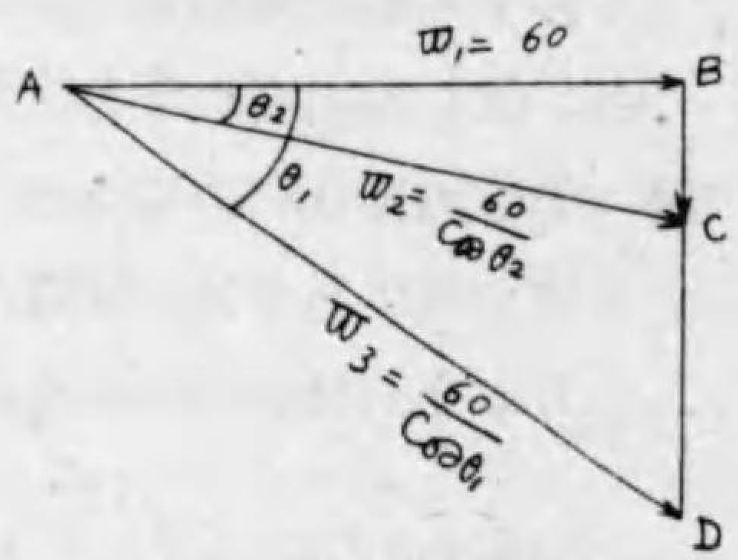
$$W_3=\frac{W_1}{\cos\theta_1}=\frac{60}{0.75}=80\text{キロヴオルトアンペア}$$

此の電力の無効電力を求める。

$$\text{無効電力}=80\sin\theta_1=80\sqrt{1-0.75^2}=80\times0.66$$
$$=52.8\text{ キロヴオルトアンペア}$$

次に力率0.95に於ける見掛けの電力 W_2 とその無効電力を求めると次の如し。

$$W_2=\frac{60}{\cos\theta_2}=\frac{60}{0.95}$$
$$=63.2\text{キロヴオルトアンペア}$$



第77圖

$$\text{無効電力}=63.2\times\sin\theta=63.2\sqrt{1-0.95^2}$$
$$=63.2\times0.313=19.8\text{ キロヴオルトアンペア}$$

是等のベクター圖を畫いて見ると第77圖の通りであつて今迄無効電力52.8キロヴオルトアンペア卽ちBDであつたものが19.8キロヴオルトアンペアとなりBCとなれば力率が0.95になる譯で是がためにはBDからBCを引いた丈の無効電力を供給すればよい。

$$\text{供給すべき無効電力}=52.8-19.8=33\text{キロヴオルトアンペア}$$

此の無効電力 W_0 は次の式で表はされる。

$$W_0=VI=V^2\omega C=(200)^2\times2\pi\times50\times C$$

$$\therefore\quad C=\frac{33000}{40000\times100\pi}=0.00263\text{ フアラッド}$$

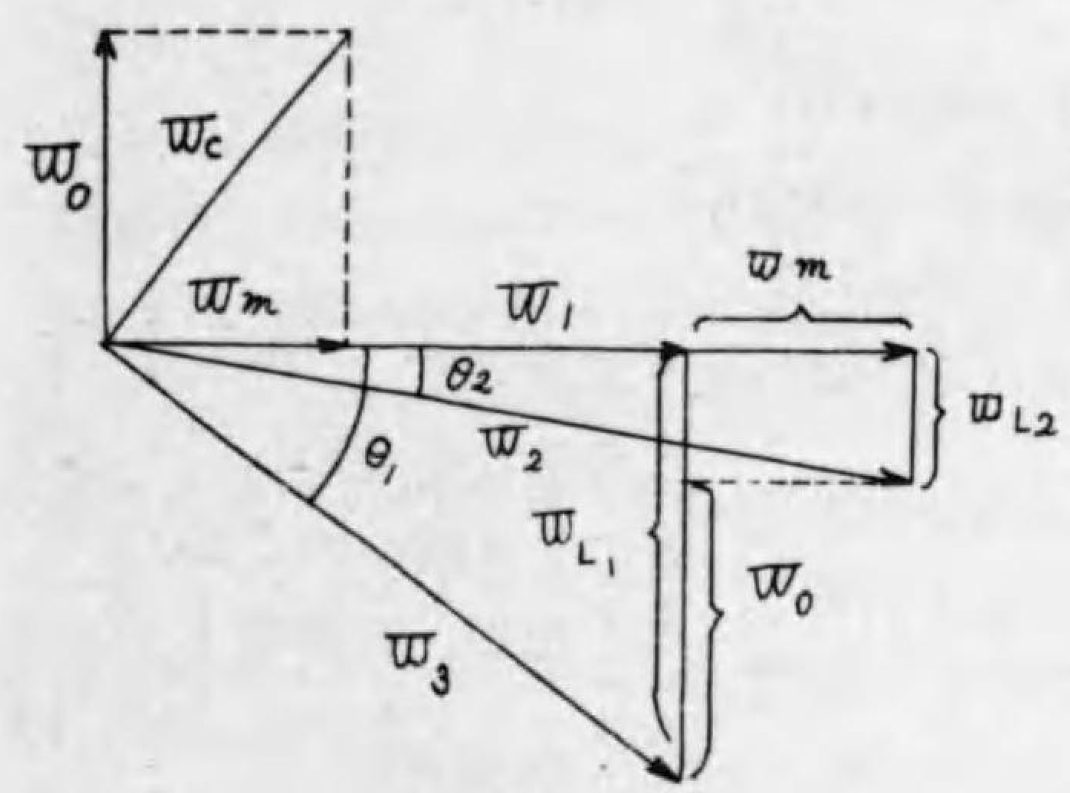
例 4. 或る工場に於て力率60パーセントを有する240キロワットの負荷がある。今此の負荷に並列に同期電動機を設置し之を進相機として力率を90パーセントに改善せんとす。今此の電動機が同時に30キロワットの負荷を負つて運轉せしむるとすれば此の同期電動機の容量は何程とすべきか。

解　負荷の見掛けの電力 W_3 を求めその無効分を求む。ベクター圖は第78圖の通りである。

$$W_3=\frac{240}{0.6}=400\text{キロヴオルトアンペア}$$

$$\text{無効分 }W_{L1}=400\times\sin\theta_1$$
$$=400\times\sqrt{1-0.6^2}=320\text{ k.V.A.}$$

此の無効電力は負荷の有効電力240キロワットに $\tan\theta_1$ 卽ち $\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta_1}}{\cos\theta_1}$ を乘じても求める事が出來る。次に力率が0.9となつた場合最後の電力は負荷の240キロワットに電動機の負荷30キロワットを加へた270キロワットである。之を0.9で割れば見掛けの電力 W_2 が求めらる。



第78圖

$$W_2=\frac{240+30}{0.9}=300\text{ k.V.A.}$$

$$W_2\text{の無効電力}=300\times\sin\theta_2=300\sqrt{1-0.9^2}$$

$$=300\times0.436=130.8 \text{ k.V.A.}$$

∴　必要とする無効電力 $W_0=W_{L1}-W_{L2}$

$$=320-130.8=189.2 \text{ k.V.A.}$$

之に30キロワットの有効分を合成すれば求むる電動機の容量 W_c が得られる。

$$W_c=\sqrt{189.2^2+30^2}=191.5 \text{ k.V.A.}$$

例 5.　力率0.6にて300キロワットを有する負荷と力率0.8にて400キロワットを有する負荷とあり。今此の負荷に供給する變壓器の容量を 1000 k.V.A. とし更に此の負荷に並列に500 k.V.A. の靜電容量を接續すれば力率1の負荷何キロワットをかけ得るか。

解　二つの負荷の有効電力と無効電力とを求むると次の如し。

負荷1の見掛けの電力 $=\dfrac{300}{0.6}=500$ k.V.A.

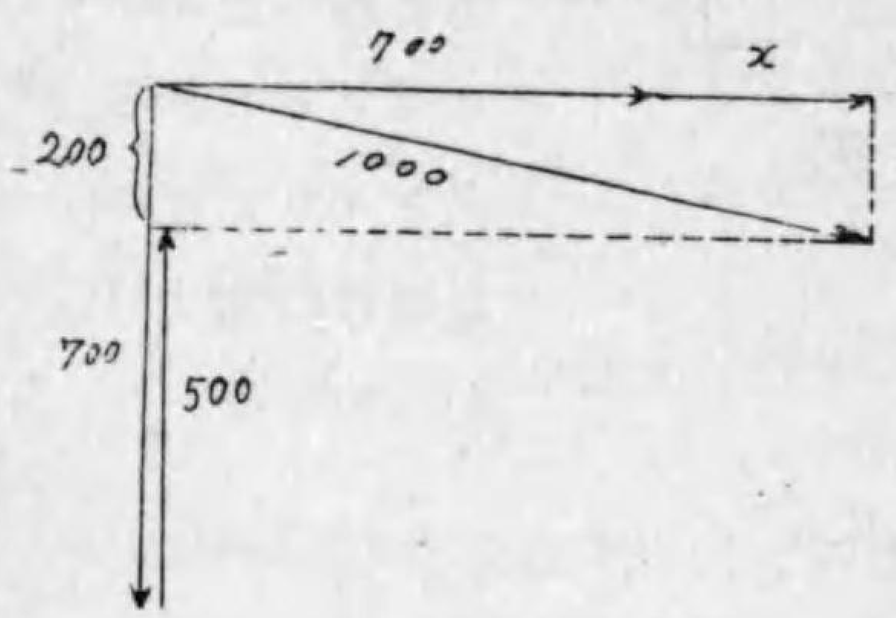
負荷2の　〃　$=\dfrac{400}{0.8}=500$ k.V.A.

有効電力 $=300+400=700$

無効電力 $=500\times0.8+500\times0.6$

$=400+300=700$

之をベクターで示せば第79圖の通りで無効電力 700 k.V.A.には靜電容量 500 k.V.A.の設置により圖の如く200 k.V.A.となる。有効電力 700キロワットと今から接續し得る電力200KVAとの和と今無効の電力 x とを合成したものが變壓器容量の 1000k.V.A.となれば良いのである



第79圖

から次の式が成立し之を解いて行けば求むる容量が得られる。

$$1000^2=\sqrt{(700+x)^2+200^2}$$

$$(700+x)^2=1000^2-200^2$$

$$x^2+1400x-4700=0$$

$$x=-700\pm\sqrt{700^2+4700}$$

$=280$ キロヴオルトアンペア

第七章　三相交流とベクター

1.　多相式交流

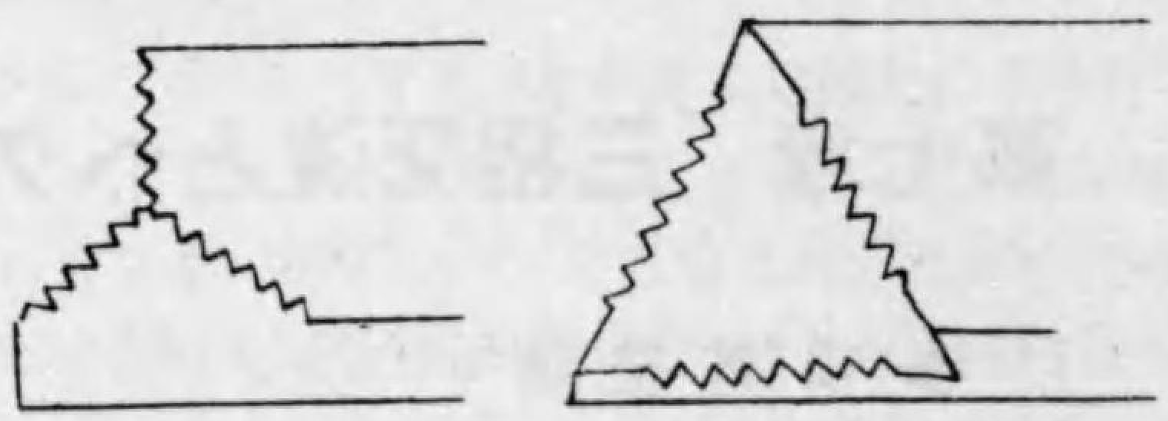
同一の發電子に二つ又はそれ以上の捲線を施し此の捲線を或る角度丈の間隔を持たしめるならば各捲線には夫々次の如き電壓を發生する事は明かである。

$$e_1=E_1\sin\omega t \quad e_2=E_2\sin(\omega t-\alpha) \quad e_3=E_3\sin(\omega t-\beta)$$

是等の式に於て $e_1e_2e_3$ は各捲線に於ける或る瞬間の電壓、$E_1E_2E_3$ は各捲線の最大電壓、ωtは角速度、$\alpha\beta$は各捲線との間の**相差角**（Phase angle フエース アングル）で是等の捲線は同一發電子に捲かれて居るのでその周波數は各捲線共同一である。かう云ふ風に互に位相が違ひ、周波數が同一である交流を**多相式交流**（Poliphase alternating current ポリフエイス オルターネーチング カーレント）と呼んで居る。此の多相式には**對稱多相式**（Symmetrical poliphase シンメトリカル ポリフエイス）と**非對稱多相式**（Unsymmetrical poliphase アンシンメトリカル ポリフエイス）とがあつて對稱式と云ふのは各捲線間に於ける相差の全く等しいもの、云ひ換へればn箇の捲線があれば一周期の$\dfrac{1}{n}$の相差を有するものを云ひ、さうでないものを

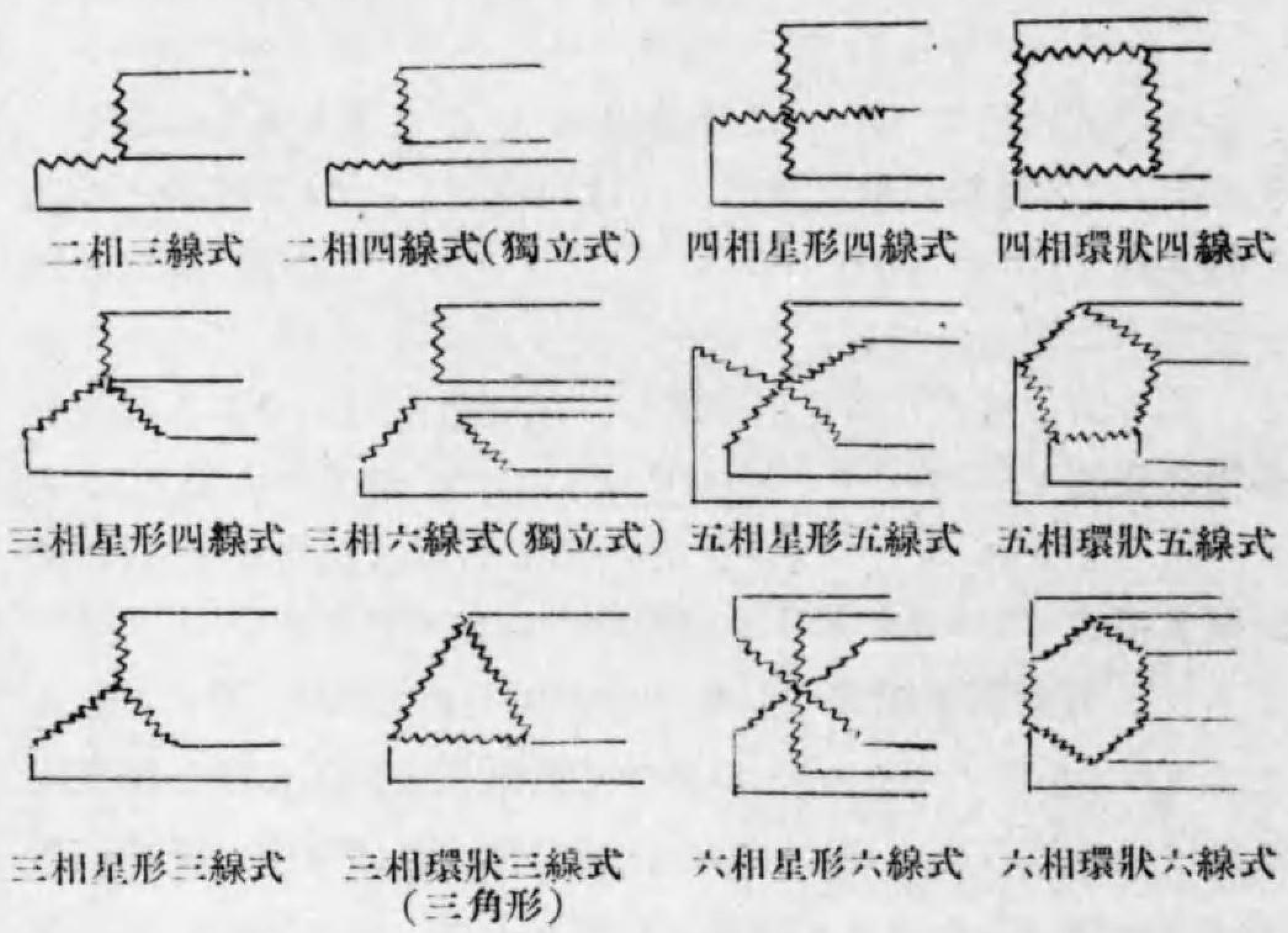
非對稱式と呼んで居る。

多相式では各捲線は獨立した回路を形成し得るものであるが之を各相毎に取り出す場合と各捲線の一箇所を結合する場合とがある。多相式を結合する場合には種々の方法があるけれ共一般に使用せられるものは**星形結線**（Star connection スター コンネクション）と**環狀結線**（Ring connection リング コンネクション）とである。星形結線と云ふのは各捲線の一端が一點に結ばれたものであつて第80圖の左側に示した通りの接續である。環狀結線と云ふのは各捲線の兩端が互に接續せられて丁度環狀の形をしたもの



星形結線　環狀形結線

第 8 0 圖

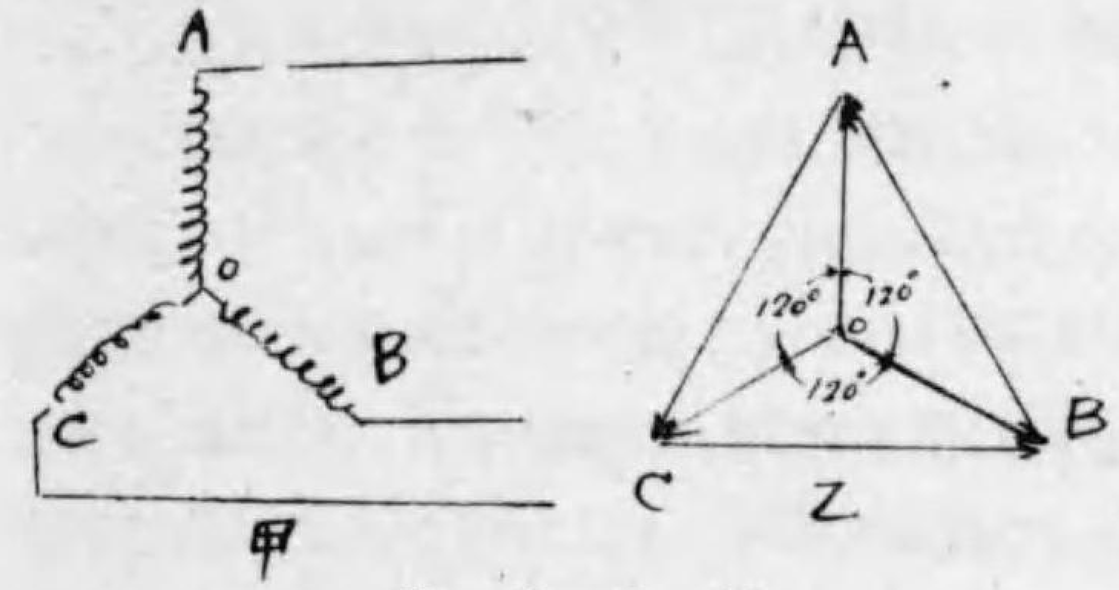


第 8 1 圖

で第80圖の右側が卽ち此の環狀結線を示したものである。此の星形、環狀形結線を二相式、三相式、四相式等について圖示して見ると第81圖の通りで三相結線の星形結線は**Y結線**（Y connection ワイコンネクション）とも呼ばれ、環狀結線は**三角形結線**（Delta connection デルタコンネクション）とも呼ばれて居る。

2. 相電壓と線間電壓

多相式交流の中で最も普通に用ひられて居るものは三相交流であつて發電せられる電壓は殆んど對稱式となつて居る。從つて各相の間の位相角は（360°÷3）卽ち120度の相差を有して居る。今此の三相交流の電壓をベクターで示して見る。先づ各相が星形に接續された場合の接續を示すと第82圖の甲圖の通りで此の電壓をベクターで示すと第82圖の乙圖の通りである。此の電壓のベクターは甲圖に於けるOAの相の電壓を乙圖ではOAベクターに取り甲圖のOB相の電壓を乙圖ではOBベクターに取り甲圖のOC相の電壓を乙圖でOCベクターに取つて居る。各相の電壓OA, OB, OCは120度づつの相差を有して居る。甲圖のOA間の電壓又はOB間、OC間の電壓を乙圖のOA, OB, OCの各ベクターで表し得ると云ふ事は今述べた通りであるが此の電壓の事を**相電壓**（Phase voltage フェーズ ヴオルテーヂ）と呼ん



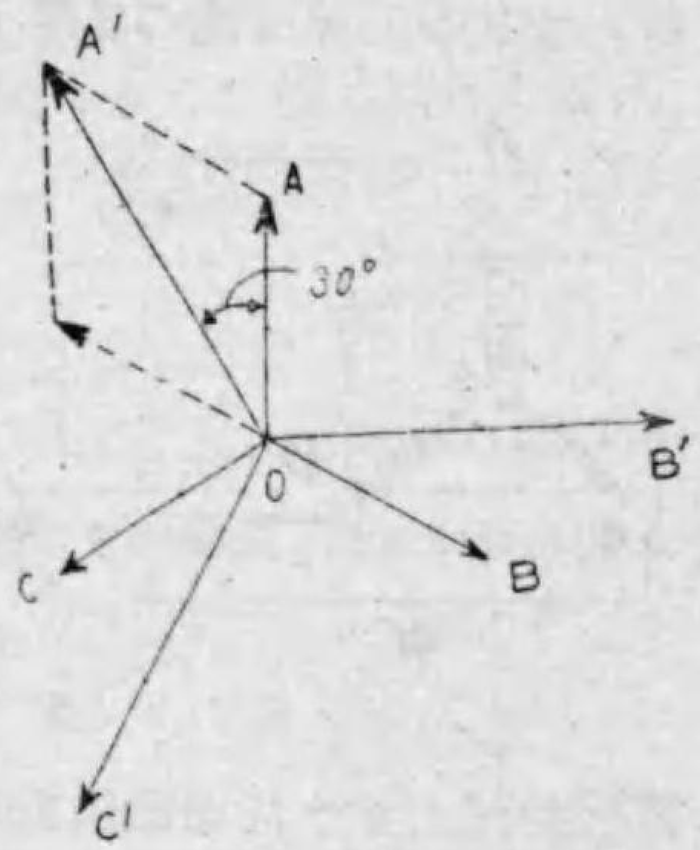
第 8 2 圖

で居る。三相式に於いて普通に電壓計で測つて居る電壓は此の相電壓では無くてAとBの間の電壓又はBとCとの間、AとCの間の電壓である。然らばAとBとの間の電壓はどんな大きさとどんな方向とを持つて居るかと云ふ問題であるがこれは第82圖の乙圖に於いて一つの相電壓のベクターより隣の相電壓のベクターを幾何學的に差引いたものである。例へばOBよりOAを幾何學的に差引いたならばABなるベクターとなり、結局AB間の電壓はABベクターで表はさる。此の電壓の事を**線間電壓**(Line voltage ライン ヴォルテイヂ)と云ひ相電壓の$\sqrt{3}$倍である、之を式で示すと次の通りである。

$$V=\sqrt{3}E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

例へば相電壓が2020ヴォルトの電壓を有する發電子の捲線を星形に接續するとその線間電壓は次の如く3500ヴォルトとなる。

$$V=\sqrt{3}E=1.732\times2020\doteqdot3500 \text{ ヴォルト}$$



第83圖

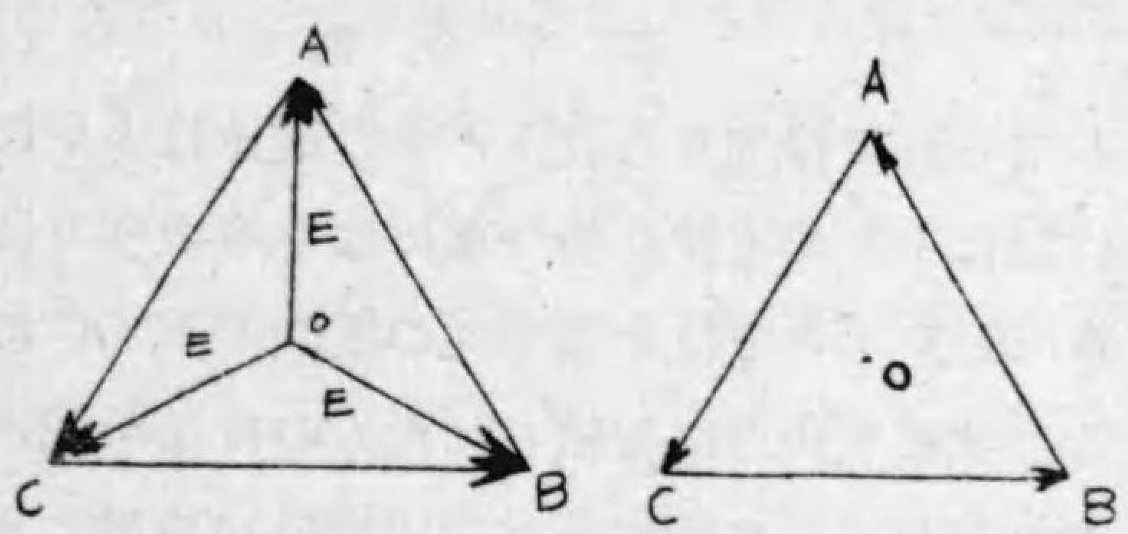
此の有様を圖示して見ると第83圖の通りでAB間の電壓は相電壓OAより相電壓OBを幾何的に、云ひ換へればベクター的に差引けば良い譯でOBを逆に引き延ばし其の長さをOBの長さと同じくしてOAと合成すれば良いのである。此の場合合成されたOA'ベクターはAB間の線間電壓を表すものである。同様の方法によつてAC間の線間電壓はOCよりOAを引いたOC'によつて表はされBC間の線間電壓はOBよりOCを引いたOB'によつて表はさ

れる譯である。従つて線間電壓と相電壓との間には圖に示した通り30度の**相差**(Phase difference フエース デイフアーレンス)を有する譯で線間電壓の方が相電壓よりも進むのである。

今の問題は星形に接續した場合の相電壓と線間電壓との關係であるが之を三角形に接續するとその狀態が異つて來る。即ち三角形に接續する場合には相電壓も線間電壓も全く同じでその方向も無論同方向である。唯電流の方は相電流と線電流とが違つて來る事次に述べる通りであるが電壓の方は相電壓も線間電壓も全く同じである。

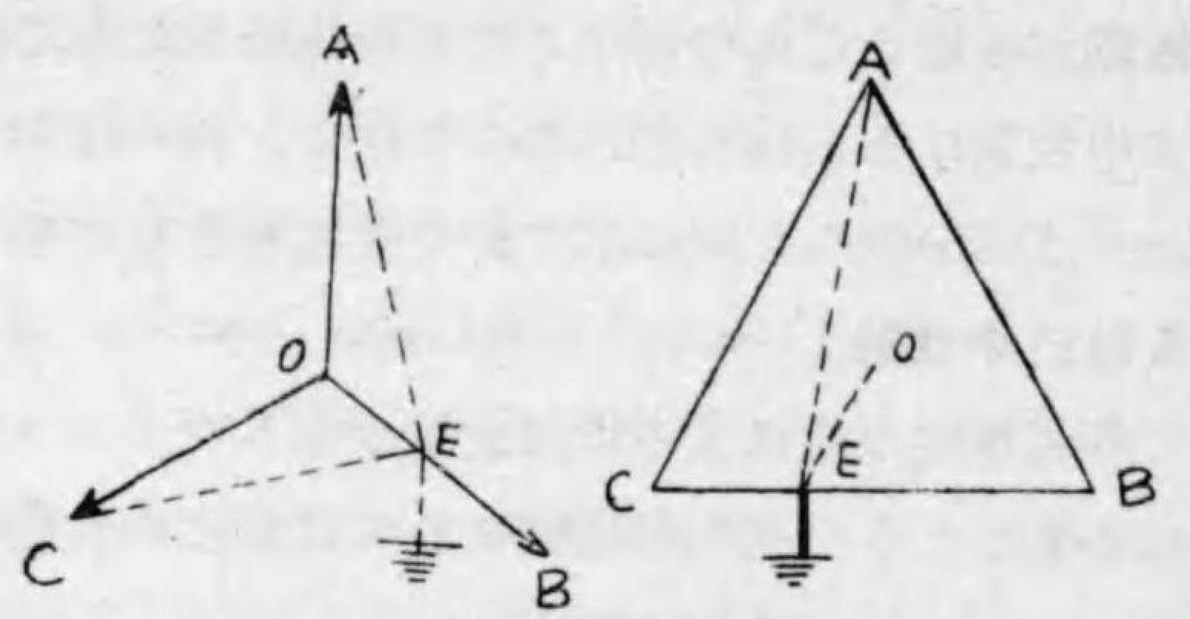
3. 大地に對する電位

變壓器の捲線や發電子の捲線が三角形又は星形に接續せられて居る時に**中性點**が接地せられて居なくても平衡狀態にある時には大地が常に中性點にある様な形となつて居る。例へば星形接續について云へば第84圖の左圖に示す如く相電壓を結び合せた點即ちOなる點が**中性點**(Neutral point ニユートラル ポイント)であつて各相電壓の端に當る所は大地よりEヴォルトの電位を有して居る事になる。三角形接續に於ては別に中性點となるべきものはないけれ共三角形の中心に中性點があるものと假定すべきであつて第84圖の右圖にOと示したものが即ち三角形接續の中性點である。



第84圖

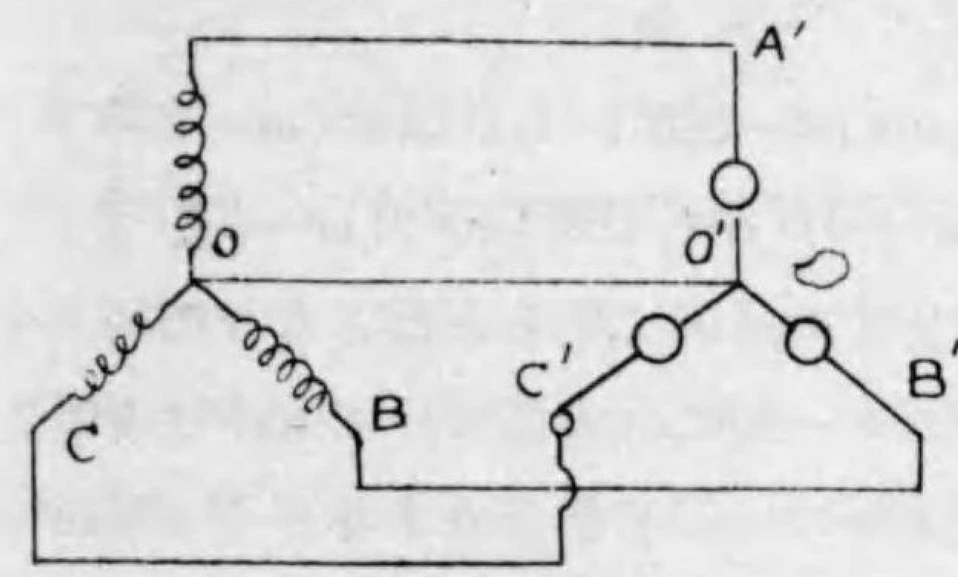
次に捲線の一部が接地された場合の電壓分布を述べる。星形に接續されたものはその中性點が接地し得るので送電線路等になると此の中性點を抵抗又はリアクタンスを以て接地する事が多い。中性點を接地すれば無論第84圖左圖のABCは大地よりEヴォルトの電位にある譯で從つて送電線の電力線は大地よりEヴォルト卽ち相電壓丈の電位があるのである。所が他の點を接地すると電位がどう變化するかと云へば先づ第84圖のABCの三點の何れかを接地して見る。例へばA點を接地すると中性點のOは大地よりEヴォルト卽ち相電壓丈の電位がある譯でAB兩點になると$\sqrt{3}$Eヴォルト卽ち相電壓の$\sqrt{3}$倍の電位がある譯である。然らば一相の途中で接地が起つたならばどうなるかと云ふ問題であるが此の時の各點の電位は第85圖に示す通りである。第85圖の左側の如く中性點が接地されて居ない星形三相交流の一相OBがその途中のEなる點で接地せられるとBの電位はEBに減少するけれ共中性點はOEの電位を持つ事になりA及びBは夫々點線で示したAE及びCEの電位を持ち元の電位OA, OCに比較して大きくなる。次に三角形に接續されたものは第85圖の右に示した通りで中性點OはEに移動し元の中性點は大地よりOEの電位を有するに到りAの電位は大地よりAE、Bの電位はBE、Cの電位はECとなるのである。



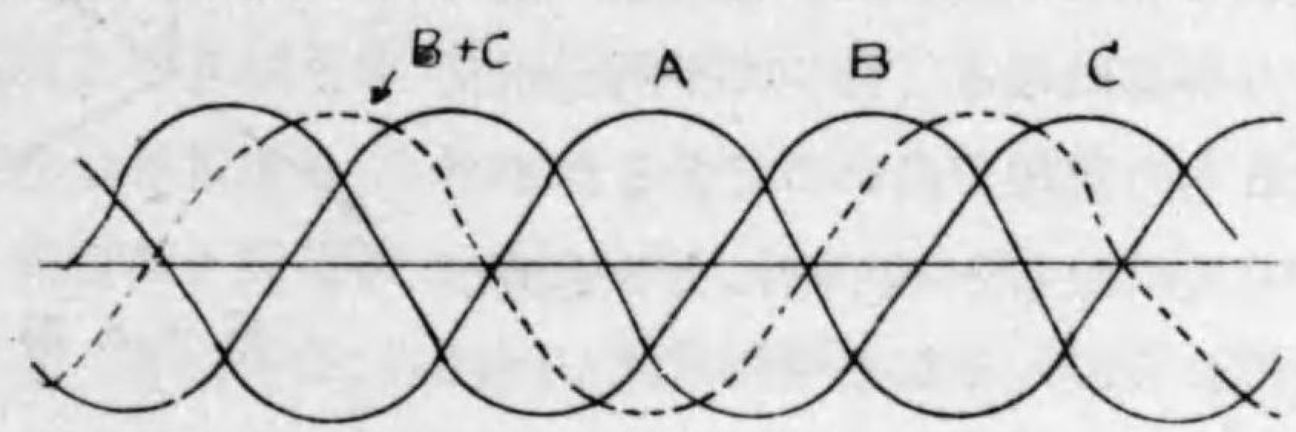
第85圖

4. 三相交流は何故三本て良いか

三相交流は一般に3本の線を使用して送電を行つて居る。勿論三相四線式と云つて三相交流に4本の線を使用する場合もあるけれ共これは多く特殊の場合である。三相交流は三つの單相電壓をつなぎ合せて之を星形又は三角形にしたまでであつて實際から云へば6本の線が必要な譯である。所が三相交流は各相の電壓が互に120度づゝの相差を有し從つて三相電流も120度づつの相差を持つて居る。此の120づゝの相差を持つて居る事が三相交流に於ける電線を3本で足りる事にした所以で今之を説明して見る。第86圖の如く發電子を星形に接續し之を三相星形負荷に接續して見る。今假に發電機の中性點Oと負荷の中性點O′とを連絡して見る。此の場合に發電機の電壓は完全に120度づつの相差を有しその相電壓も相等しく負荷の抵抗も三つが皆相等しいものと假定する。



第86圖



第87圖

之を波形的に説明すると第87圖の通りになりAはOAを流れる電流、BはOBを流れる電流、CはOCを流れる電流である。此

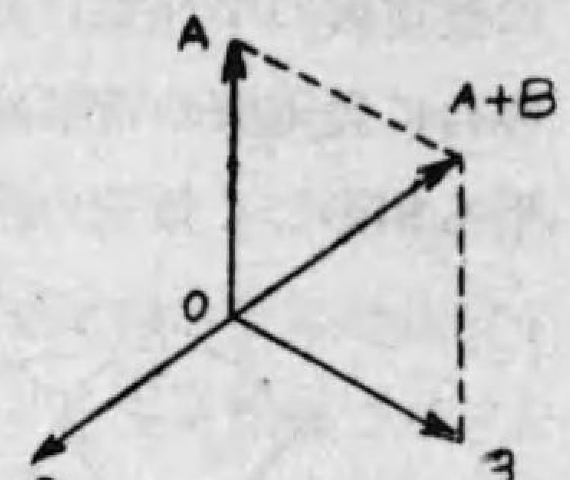
の場合に各相の電流は負荷の中性點C′に到つて合流するものであるから此の三つの電流を合成して見ると中性點OO′の間を流れる電流が知れる譯である。此の場合にBの電流とCの電流とを波形的に合成して見ると點線で示したB+Cの如き波形となり是は波形Aと全く反對の波形であつてB+CとAとを合成すれば零となる。云ひかへれば各相の電流は負荷の中性點O′に到つて零となり從つてOOの線には電流は流れない事になる。

又之を計算的に求めても同じ結果となる、卽ち各電流を i_1, i_2, i_3 とし負荷の力率を1とすれば i_1, i_2, i_3 は夫々次の通りになる。

$$i_1=I_m\sin\omega t \quad i_2=I_m\sin(\omega t-120^\circ) \quad i_3=I_m\sin(\omega t-240^\circ)$$

$$\therefore \quad i_1+i_2+i_3=I_m\{\sin\omega t+\sin(\omega t-120^\circ)+\sin(\omega t-240^\circ)\}$$

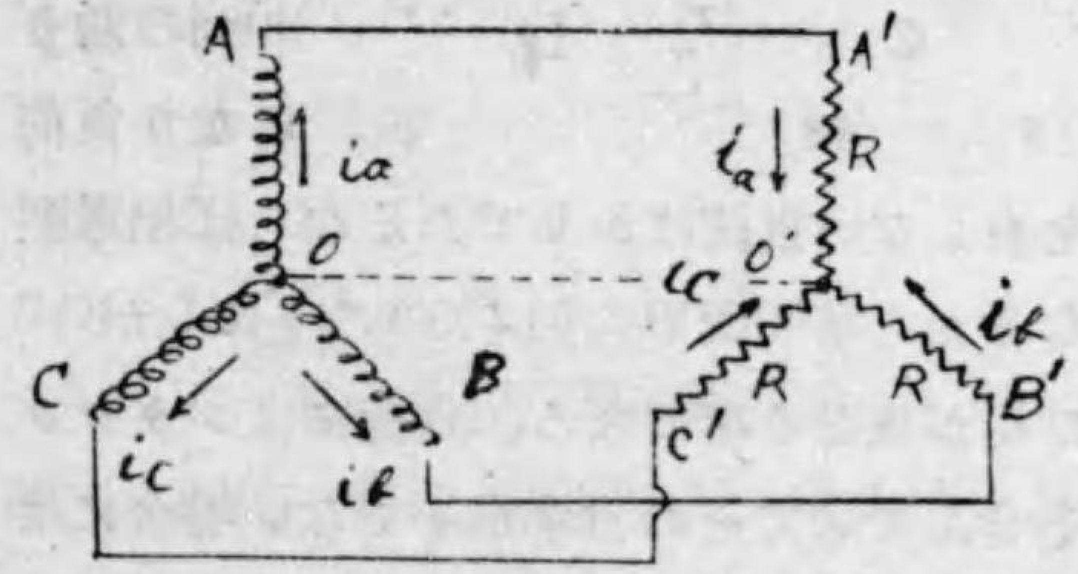
此の最後の項を三角の公式で解いて見ると零となり結局 $i_1+i_2+i_3$ は零となる。又ベクター的に合成して見てもやはり零となる事第88圖の通りで電流OAとOCとを合成するとA+Bのベクターを得るが此のA+BのベクターはOCベクターと正反對で同じ長さであるから此の二つを合成すると結局零となり云ひかへればOO′には電流が流れない事になり此の間を結ぶ電線は要らない事になる。從つて平衡三相交流では3本の電線で良いのであるが不平衡三相交流になると不平衡による電流がOO′を流れる、大きな不平衡電流が流れればOO′の線を使用して所謂三相四線式とする必要があるが僅かばかりの不平衡が負荷にあつたりする様な場合之を使用する必要がない。



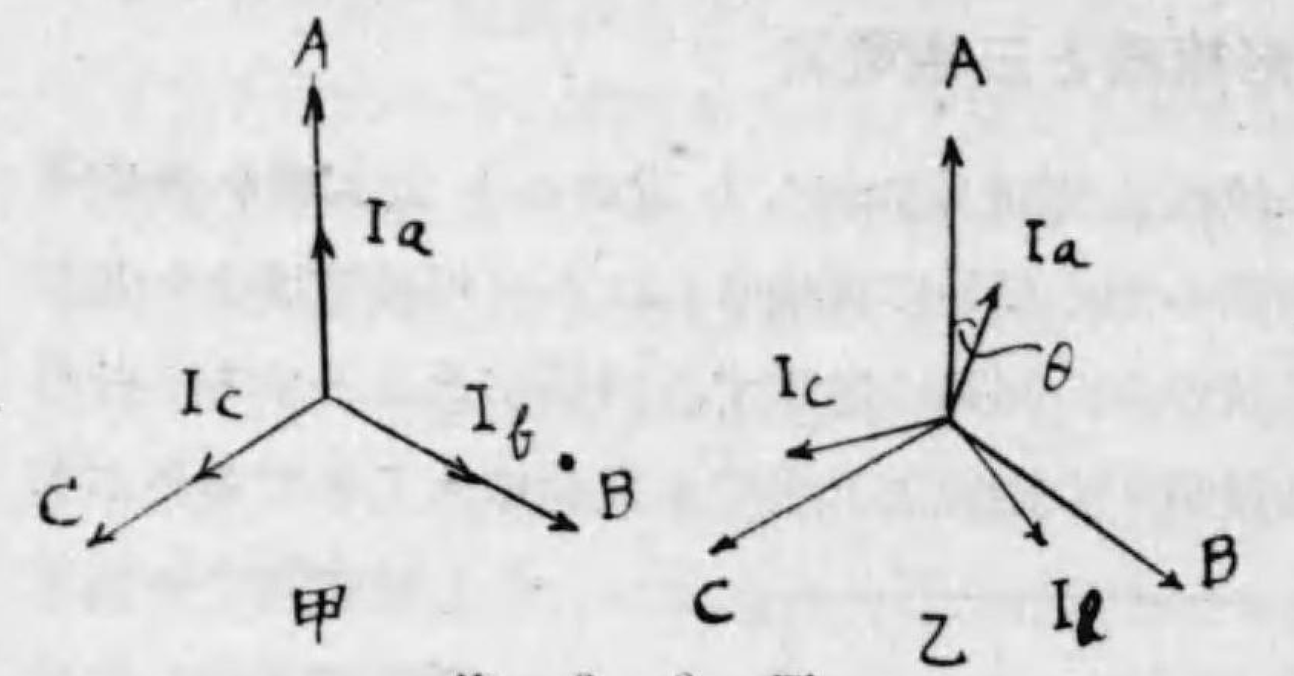
第８８圖

5. 星形接續と三相電流

三相回路に流れる電流は如何なる電流かと云ふ事を説明する、先づ第89圖の如く星形に接續せられた三相發電機より星形に接續した抵抗のみの回路に送電する回路があるとする。此の場合に電流は發電子の捲線より出でゝ負荷に入るのであるが若し發電機より出る電壓が平衡して居り負荷の狀態が平衡して居ればその中性點を結んだOOには電流が流れない事前に述べた通りである。捲線OAを流れる電流は電線AA′を通つて負荷の抵抗O′A′を流れて中性點O′に到つて他の捲線OB, OCより來る電流と合流する。此の場合にOAの捲線を流れる電流 i_a や負荷のOA′を流れる電流を**相電流**（Phase current フェーズカーレント）と云ひAAを流れる電流の事を**線電流**（Line current ラインカーレント）と呼んで居る。今星形接續に於ける線電流と相電流との有樣を調べて見ると第89圖でも知れる通りOA捲線を流れる相電流 i_a はそのまゝAA′を流れ負荷のO′A′を流れるから相電流と線電流とは全く等しいと云ふ事になる。從つて負荷が全く無誘導抵抗ばかりである場合には相電壓と線電流との相は全く一致する譯である。今第89圖の回路に流れる線電流を I_a, I_b, I_c とすれば i_a, i_b, i_c の相電流と I_a, I_b, I_c は夫々相等しくなり相電壓と同相にある事になる。今 I_a, I_b, I_c を線電流としOA,



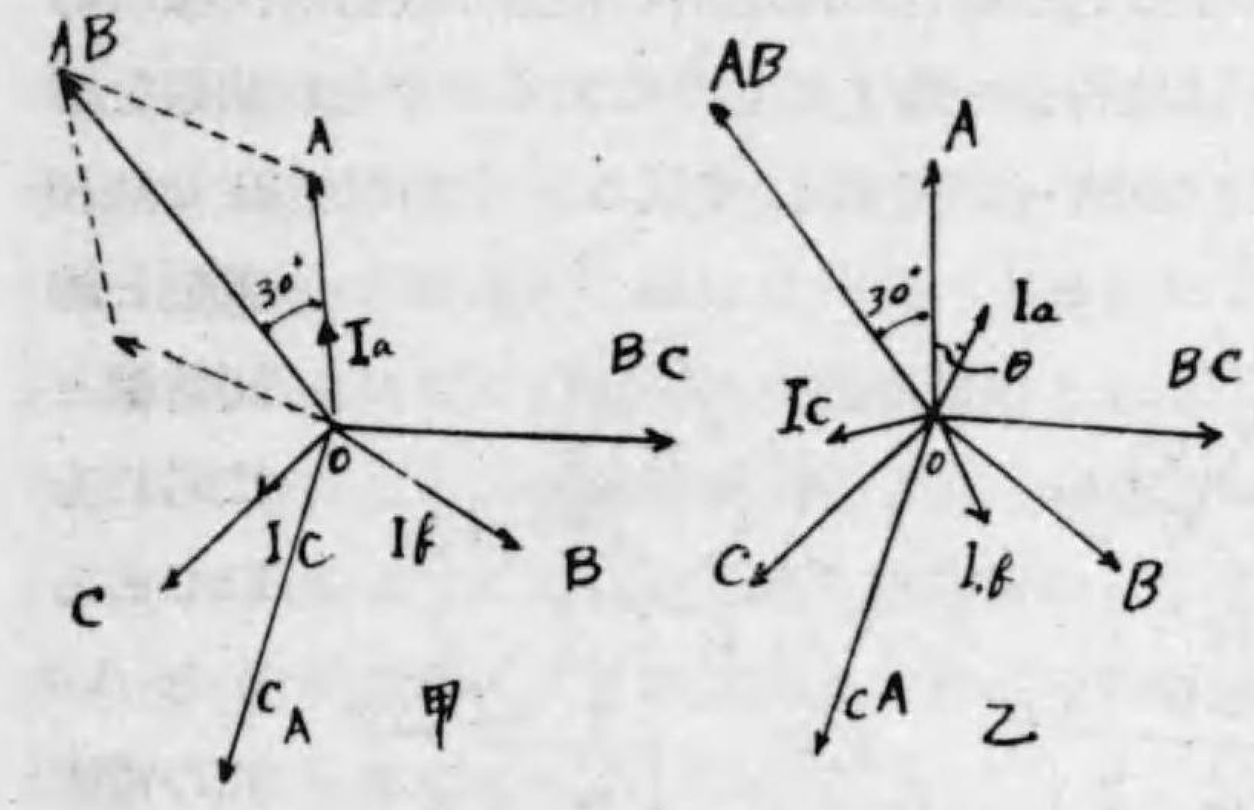
第８９圖



第 9 0 圖

OB, OC を相電壓としてその間の關係をベクターで示して見ると第90圖の通りになり負荷が全然リアクタンスを有しない抵抗ばかりであるならば相電壓と線電流とは同相となるから第90圖甲の如くOAの上にI_aがOBの上にI_bがOCの上にI_cが重なる事になる。負荷にインダクタンスやキヤパシチーを含んで居てその力率が1でない場合には相電壓と線電流との相も一致しない事になる、例へば負荷にインダクタンスがあつて線電流が相電壓よりも遲れる場合には相電壓と線電流との關係も第90圖の乙圖の如くなり線電流は何れも相電壓よりθ丈遲れると云ふ結果になる。

次に此の星形接續に於ける線間電壓と線電流との關係はどうなるかと云ふ事を示して見る。今第90圖甲圖の如く負荷の力率が1で相電壓と線電流との位相が一致する場合を取ると第91圖甲の如きベクター圖が得られる。此の第91圖甲は OAなる相電壓より OB なる相電壓をベクター的に引いてAB 間の線間電壓 AB を作つたもので此の線間電壓 AB と相電壓 OA 間には30度の相差があるから從つて線間電壓 AB と線電流I_aとの間にも30度の相差があるべき筈である。即ち圖の如く力率1の場合には線間電壓と線電流との間には位相角30度を有す。次に負荷の力率が1でなくて第91圖乙の如く相電壓と線電流との間にθなる

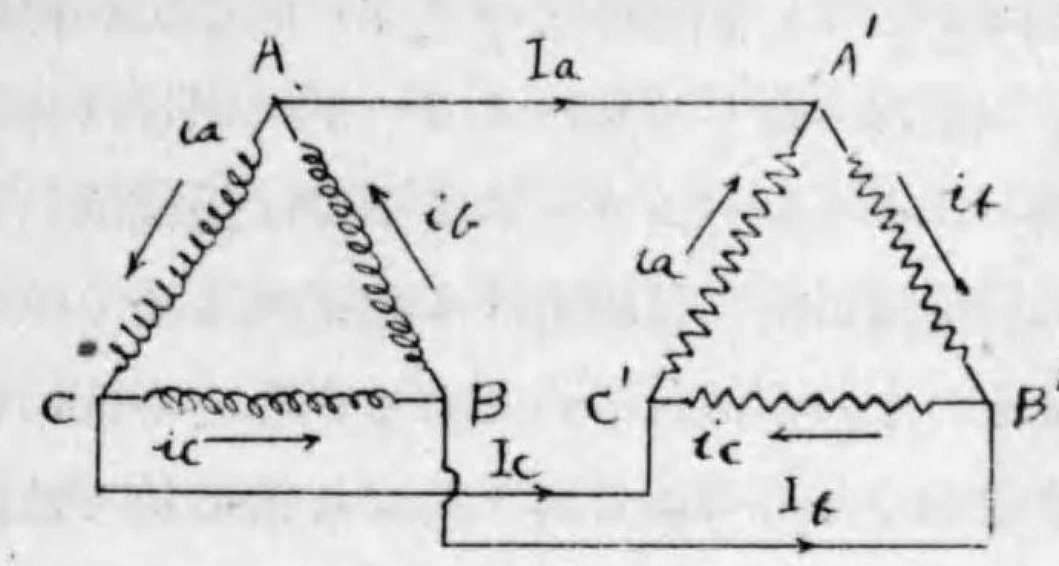


第 9 1 圖

位相角がある場合には線間電壓と線電流との間にはどんな關係があるかと云へば第91圖乙に示したベクター圖で知る事が出來る。ABのベクターはAB間の線間電壓を示したもので相電壓OAとの間には前述べた通り30度の相差を有す。然るにOAの相電壓とI_aの線電流との間には位相角θを持つて居るので線間電壓ABと線電流I_aとの間には是等の位相角の和たる$30^\circ+\theta$丈の位相角を有する事になる。

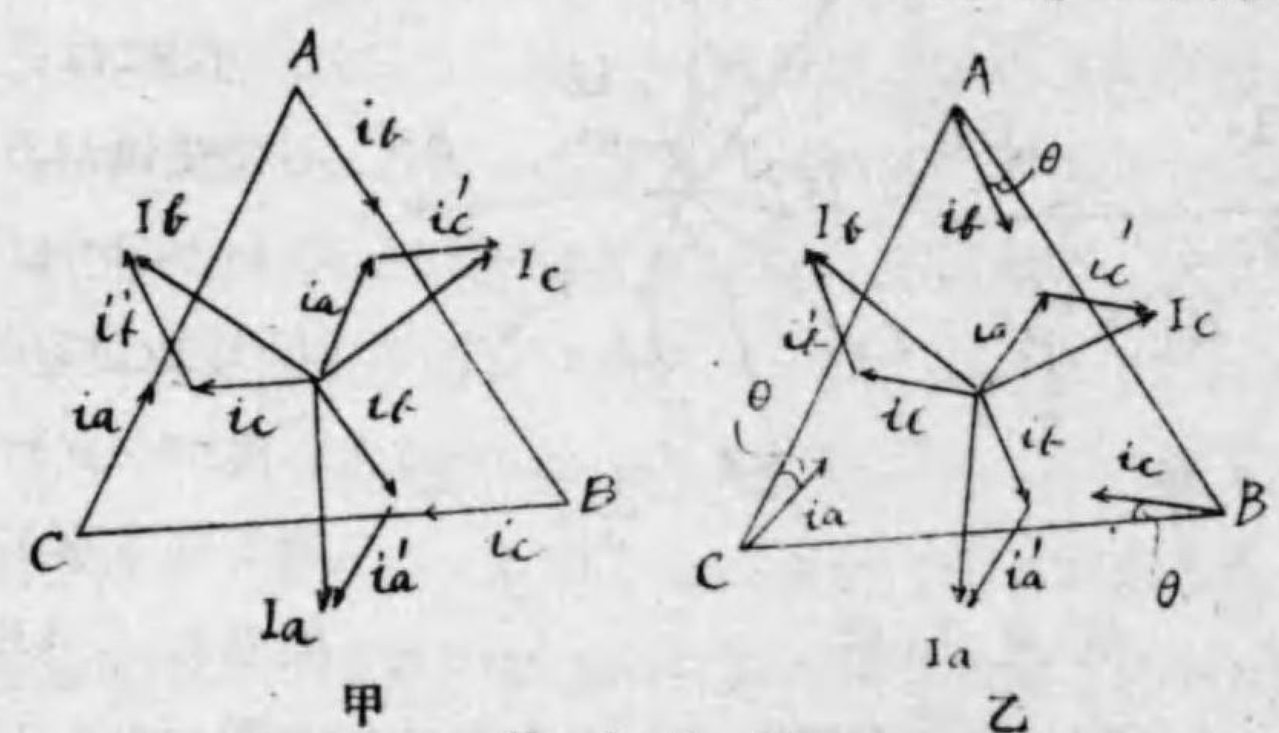
6. 三角形接續と三相電流

今度は三角形接續に於ける電流であるが今第92圖の如き三角形に結線した發電機の捲線より同じく三角形に結線した無誘導抵抗を有する結線に電流を供給するとする。此の場合に i_a, i_b, i_c を夫々三角形の相を流れる相電流とし I_a, I_b, I_c を發電子と負荷とを結ぶ線に流れる線電流とする。此の三角形の結線の場合に



第 9 2 圖

も負荷の力率が1である場合には星形の接續の場合と同様に線電流と相電壓とは位相が一致するものである。今その狀態を第93圖甲圖の如くベクターで表はして見る。三角形結線では相電壓と線間電壓とは同じものであるからAB間の電壓をABで、AC間の電壓をACで表して見るとAB間を流れる相電流i_bはABのベクターの上にあるしAC間を流れる相電流i_aはACベクターとその相が一致する。然るに第92圖に示されて居る線電流I_aは圖によつて明かなる如く相電流i_bより相電流i_aをベクター的に引いた差の電流である。從つて第93圖甲に於てi_bをABと同方向に取り之をi_bとし此の先からi_aと方向反對にして相等しき長さにi_a'を引く、此のi_a'の先と中心とを結んだならばその長さが線電流I_aを示すものである。云ひ換へるとI_aなる線電流はi_bの相電流からi_aの相電流をベクター的に引いた事になる。同様にして相電流i_aよりi_cをベクター的に引けば線電流I_cを得るし相電流i_cよりi_bをベクター的に引けば線電流I_bを得る事が出來る。星形接續に於ては線電流も相電流も全く相等しく線電流は相電流そのものが流れるのであるからその間に相差等があるべき筈はなかつたのであるが三角形接續に於ては圖に示す如く線電流と相電流とは大きさも違へば相差もあると云ふ事になる。



第 9 3 圖

第93圖甲に於てi_bとi_a'との間には120度の相差がある譯であるから圖の如く此の二つを合成したI_aのベクターはi_aとi_bとが相等しければi_bとの間に30度の相差がある事になる。云ひ換へれば線電流と相電流との間には負荷の力率が1であれば30度の相差がある事になり相電壓又は線間電壓とも同じく30度の相差を有する事になる。又線電流I_aの大きさは若しi_aとi_bとが相等しければ圖によつて知られる通り相電流の$\sqrt{3}$倍と云ふ事になる。今iを相電流、Iを線電流とすれば三角形結線では次の式が與へられる事になる。

$$I=\sqrt{3}\,i\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

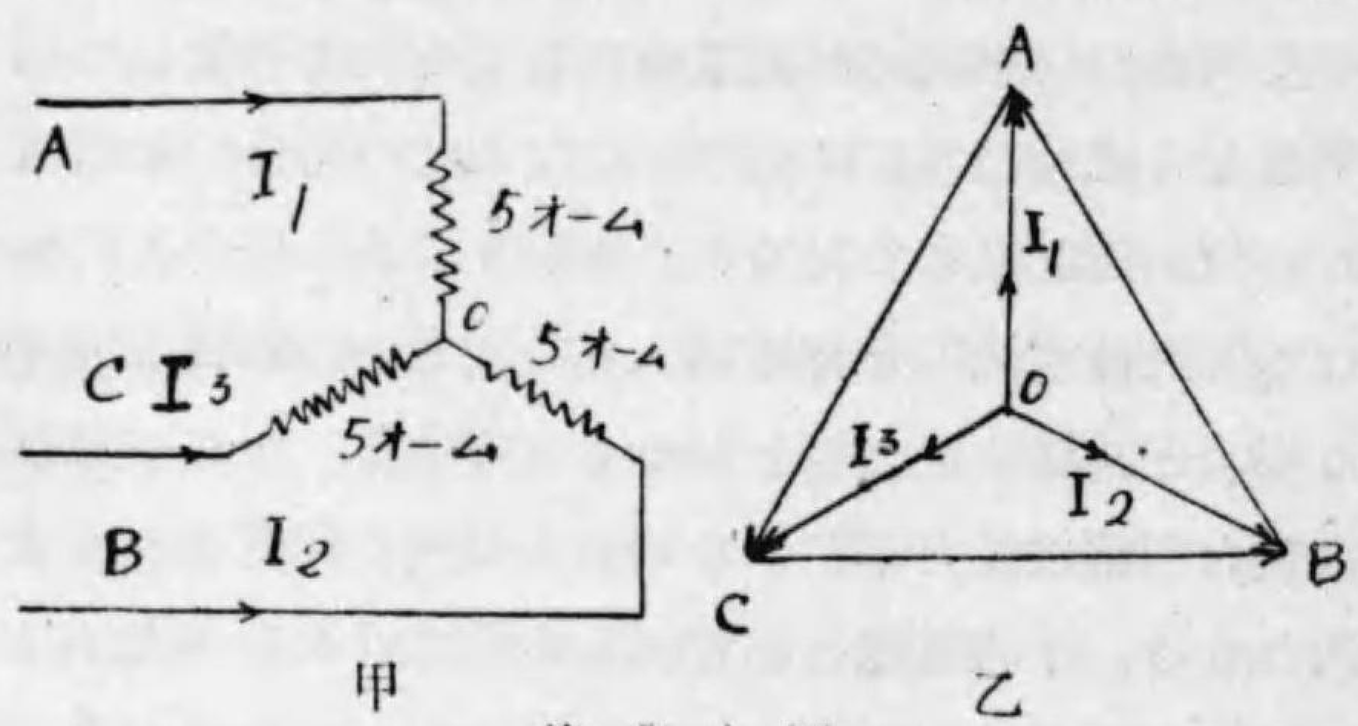
次に負荷にインダクタンスを含むとするならばその力率は小さくなり相電流は相電壓より遅れる事になり此の位相角を第93圖乙の如くθとする。此の場合に於ても線電流I_aを求めやうと思へば前と同じく相電流i_bよりi_aをベクター的に引けば良い譯で第93圖乙の如くi_bとi_aとのベクター的の差I_aが求むる線電流である。今三角形の三相回路が發電機も負荷も共に平衡して居るものとするならばi_aとi_bとは相等しくなり此の場合の相電流と線電流との位相角を求めて見ると力率が1である場合と同様に30度となる。又線電流I_aと相電流i_aとの大きさの關係も力率が1である場合と同様に$\sqrt{3}$倍となるものである。所が相電壓又は線間電壓との關係は力率が1の場合とは異り30度よりも大きな位相角となる。今相電壓と相電流との間にθ丈の相差があるとすれば線間電壓又は相電壓と線電流との位相角は此のθと30度との和卽ち$(30°+\theta)$丈の位相角を有する事になる。

以上は星形接續と三角形接續とについて別々にその三相電流を考へて來たのであるが以上の事柄を總合して見ると何れの場

合にも共通の點がある事を知る事が出來る。即ち負荷の力率が1の場合に於ては相電壓と相電流との位相が一致し線間電壓と、線電流との間には30度の相差がある事になる。又負荷の力率が1でなくして相電壓と相電流との間にθ丈の位相角があれば線間電壓と線電流との間には$(30°+\theta)$丈の位相角がある事になる。又以上の事柄はその三相結線が發電機であらうと負荷であらうと全く同じ譯で發電機の捲線を流れる相電流がi_aならば負荷を流れる相電流もi_aであるべきである。

7. 平衡負荷の計算

三相交流は三つの單相交流が互に120度づゝの位相角を以て結合せられて居るのであるから三相交流が對稱式でその負荷が各相共相等しき所謂**平衡負荷**(Ballanced load バランスト ロード)であるならば單相と同樣に取扱つてその計算を行ふ事が出來る。先づ第94圖の如く5オームの抵抗を星形に接續し之に三相交流100ヴォルトの電壓を加へ此の回路に流れる電流I_1, I_2 I_3を計算して見る。



第 9 4 圖

此の場合に星形負荷にかゝる電壓のベクターを書いて見ると第94圖の通りである。即ちOAはOとAの間の相電壓OBはOとBの間の相電壓、OCはOとCの間の相電壓のベクタ

ーである。三相100ヴォルトを此負荷にかけるとAB間の電壓BC間の電壓、CA間の電壓が皆100ヴォルトとなる譯であるからAB, BC, CAの三つのベクターは100ヴォルトの電壓を表して居る。是等のベクターが100ヴォルトであるためにはOA, OB, OCの各相電壓の大さは如何なる價を取るかと云へば前にも述べた通り$\frac{1}{\sqrt{3}}$であるから之を計算して見ると次の通りになる。

$$OA=\frac{100}{\sqrt{3}}=57.7 \text{ ヴォルト}$$

OBもOCも皆57.7ヴォルトとなるべきであるから相電流は次の如くして見出す事が出來る。

$$\text{相電流}=\frac{57.7}{5}=11.54 \text{ アンペア}$$

星形接續では相電流と線電流とは相等しいものであるから此11.54アンペアと云ふ電流はそのまゝ線電流となるべきである．又負荷の抵抗は皆5オームで平衡三相負荷であるから電源さへ平衡三相であるならば各線に流れる電流は相等しくなる譯で之を式にして見ると次の通りである。

$$I_1=I_2=I_3=11.54 \text{ アンペア}$$

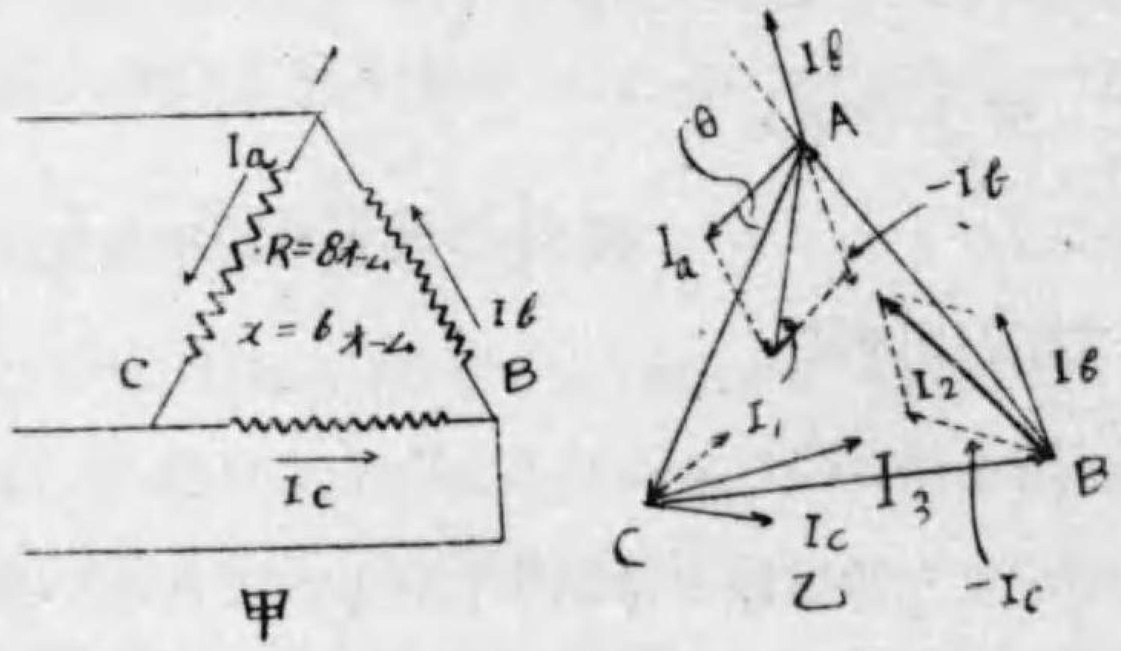
次に此の電流の位相角の關係であるが此の負荷は全部無誘導抵抗ばかりであるからして負荷の力率は1である。從つて之に流れる相電流は相電壓と同相にあるべきである。此の電流I_1, I_2 I_3をベクターで書けば第94圖の通りであつて相電壓とは相が一致して居るけれ共線間電壓とは30度の位相角を有して居る。次に此の場合の電力は如何になるかと云ふと相電壓と電流とを相乘じたものが全體の電力であるからして之を求めて見ると次の通りになる。

電力消費$=3\times\mathrm{E}\times\mathrm{I}_1=3\times57.7\times11.5=2000$ ワット

又三相式では線間電壓と線電流とばかりからも消費電流を計算する事が出來るもので此の方法で計算して見ると前に述べた公式から次の式が得られる。

電力消費$=\sqrt{3}\,\mathrm{VI}_1=\sqrt{3}\,100\times11.5=2000$ ワット

今述べたのは負荷の接續が星形に接續されて居る場合であつたが今度は三角形に接續されて居る場合を考へて見る先づ第95圖の如く抵抗8オームとリアクタンス6オームとを直列にしたものを三角形に結んだ負荷があるとする。此の負荷に對して三相交流100ヴォルトをかけて見ると如何なる電流が流れるかと云ふ事を調べて見る。此の回路の相電流を$\mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b, \mathrm{I}_c$ とし線電流を $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ とする。此の負荷にかゝつて居る電壓は線間電壓も相電壓も全く同じであるから是等の電壓をベクターで圖示すれば第95圖乙圖の AB, BC, CA の如きベクターが得られる。次に電流の大きさであるが此の電流の大きさを見るには先づ相電流を計算する必要がある。相電流は一相にかかる電壓が100ヴォルトであるから此の100ヴォルトをインピーダンスで割れば出て來る譯である。



第 9 5 圖

$$相電流=\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+x^2}}=\frac{100}{\sqrt{8^2+6^2}}=10\ アンペア$$

$$力\ 率=\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+x^2}}=\frac{8}{10}=0.8$$

是で相電流の大きさが知れた譯でその電流の方向はリアクタンスがあるために一定の位相角丈遲れる譯である。此の遲れる角度は力率から知る事が出來るもので此の相電流をベクター圖の上に書けば $\mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b, \mathrm{I}_c$ の如きベクターとなり各相電壓 AB, BC, CA よりも力率 0.8 に相當する位相角 θ 丈遲れて居る。次に第95圖甲に於てA點に入る電流を考へると線電流は相電流 I_a より相電流 I_b を引いた差の如き形となつてゐるので同乙圖に於て I_a より I_b をベクター的に差引いて見ると線電流 I_1 を求める事が出來る。即ち I_b を逆の方向に引き延し同じ大きさに取つたベクターと I_a のベクターとを合成すれば I_a から I_b を引いたベクターが得らるべきで此のベクターが I_1 である。次に此の I_1 のベクターの大きさを求めて見るとこれは前にも述べた通り三角形接續の場合の線電流は相電流の $\sqrt{3}$ 倍であるから結局 $\sqrt{3}\,\mathrm{I}_a$ となる。此の場合は負荷も同じで電源も平衡して居るのであるから各相に流れる電流も同じである。從つて次の如く線電流を求める事が出來る。

$\mathrm{I}_1=\sqrt{3}\,\mathrm{I}_a=\sqrt{3}\times10=17.32$ アンペア

同樣にして $\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ も亦 17.32 アンペアである事を知る。

次に此の三相負荷の取るべき電力であるが此の電力は相電壓と相電流を掛け合し之に力率を乘じた各相の電力消費を3倍したものを取ればよい。

電力消費$=3\times\mathrm{E}\times\mathrm{I}_a\cos\theta=3\times100\times10\times0.8=2400$ ワット

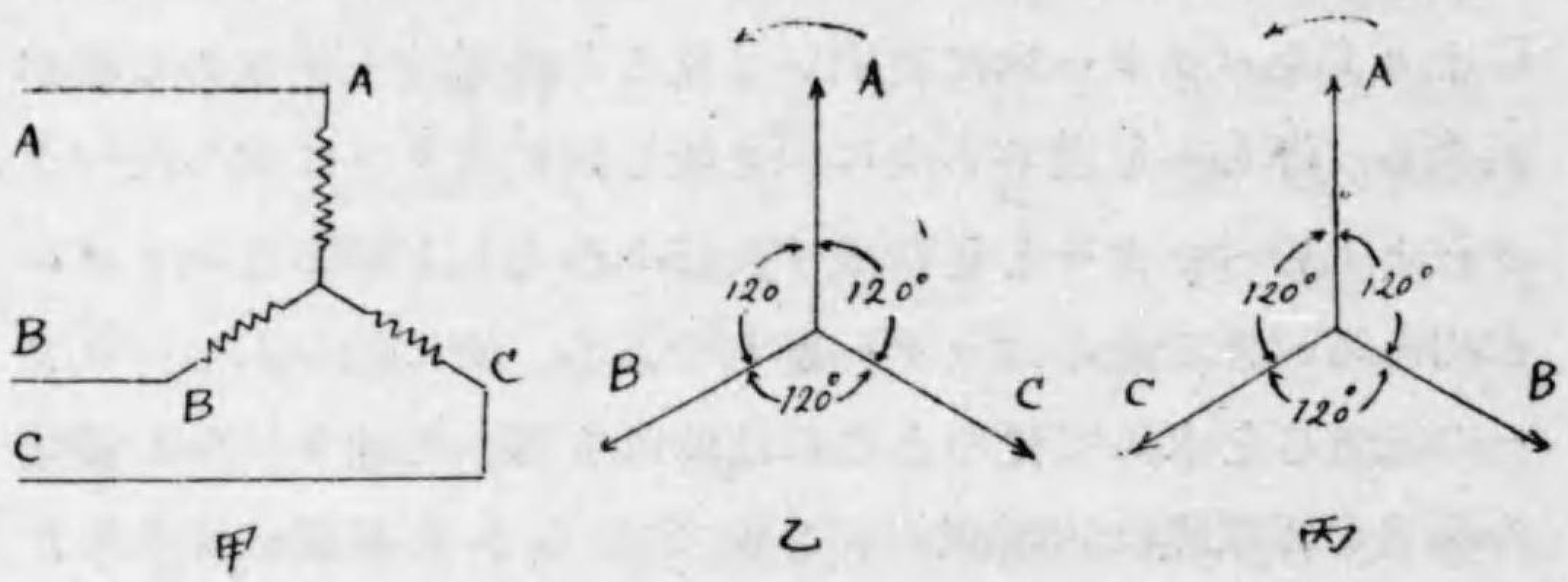
又三相式では電力消費を計算するのに線間電壓と線電流とばかりからも計算し得られるのであつて是から計算しても同じく

次の如くになる。

$$電力消費=\sqrt{3}\,VI_1\cos\theta=\sqrt{3}\times100\times17.32\times0.8$$
$$=2400 \text{ ワット}$$

8. 相の廻轉方向

三相交流は互に120度宛の相差を持つ三つの單相交流から成つて居るものであるから一つの相を基準に取ればその次の相は是より120度遲れ、更にその次の相は基準の相から240度遲れ



第96圖

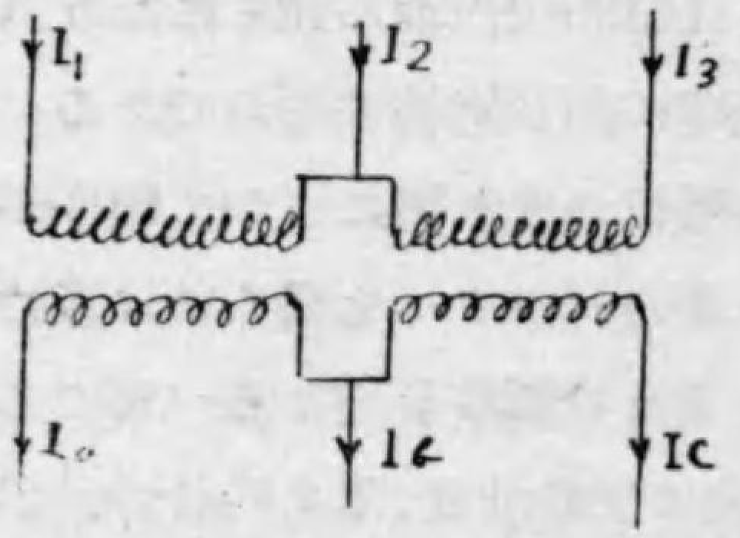
るものである。元來交流はその相がぐるぐる廻轉するのであつて三相交流では三つの相が互に120度づつの相差を保つたまゝ廻轉して居る。その廻轉の方向はベクターでは時計の方向と反對の方向に廻轉するものと定められて居る事は前に述べた通りで從つて時計の針の方向と反對の方向に進んだベクター程進んで居るベクターなのである。今第96圖甲圖の如き接續に於てＡＢＣから三相交流を供給するとする。此の場合にＢ相の電壓が最も進み次いでＡ相、その次がＣ相と云ふ順序となつて居るとすれば此の場合の電壓のベクター圖は同圖乙圖の通りになる。然るに若し甲圖に於ける相の廻轉方向をＡＢＣと云ふ順序

であるとするならばそのベクターは第96圖丙圖の通りになりＡ相からＢ相、次いでＣ相と云ふ順序に相が廻轉するのである。

此の各相のベクターはその相の順位の取り方によつて順序が變つて來るものである。從つて三相のベクターを書くには豫め相の順位を決定して之によりベクターの順序を定めるべきである。ベクターに於ては相の廻轉方向は反時計式、卽ち時計の針が廻る方向と反對の方向と定つて居る。然し接續圖の方は必ずしもベクターと同じ相の順位に書くとは定つて居らない。例へば第96圖に於て三相電壓のベクターを乙圖の如く書いた場合には甲圖に於ける相の廻轉順序はＡ相Ｃ相Ｂ相と云ふ順序であつて甲圖はその相廻轉が時計の針と反對方向に進むものであるが若し丙圖に示した電壓のベクターとなつて居れば電壓の相はＡ相からＢ相、次いでＣ相と云ふ順序になり前と反對に時計と同じ方向に相が廻轉して居るのである。此の相の廻轉方向は三相電動機の廻轉方向とも密接な關係があつて是がため三相のベクター圖を書くには豫め相の廻轉方向を定めてかゝらなければならない。實際の上に於て相の廻轉方向を變へようと思ふならば3本の線の中2本の線を交叉しさへすれば方向が變るのである。

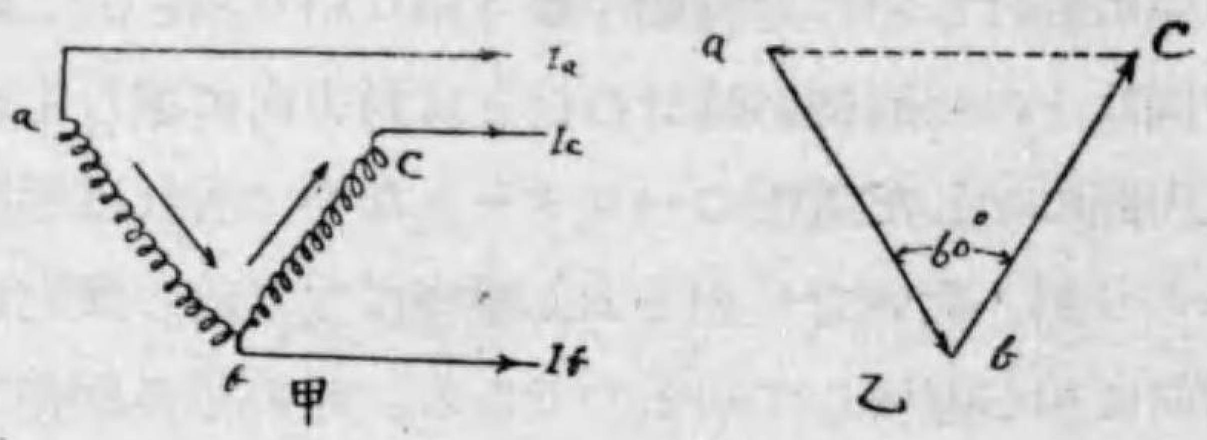
9. V結線の電壓

三角形の結線をし居る場合にその一相を取除けば**オープンデルタ**（Open delta）結線又は**V結線**（V con ection ヴィーコンネクション）となる。例へば單相變壓器を3臺三角形に接續して是より三相交流を供給して居る場合に1臺の變壓器に故障を生じた時にも此の故障の1臺を取除いて他の2臺で供給する事が出來る。此の2臺の變壓器を以て三相電力を供給する場合の



第 9 7 圖

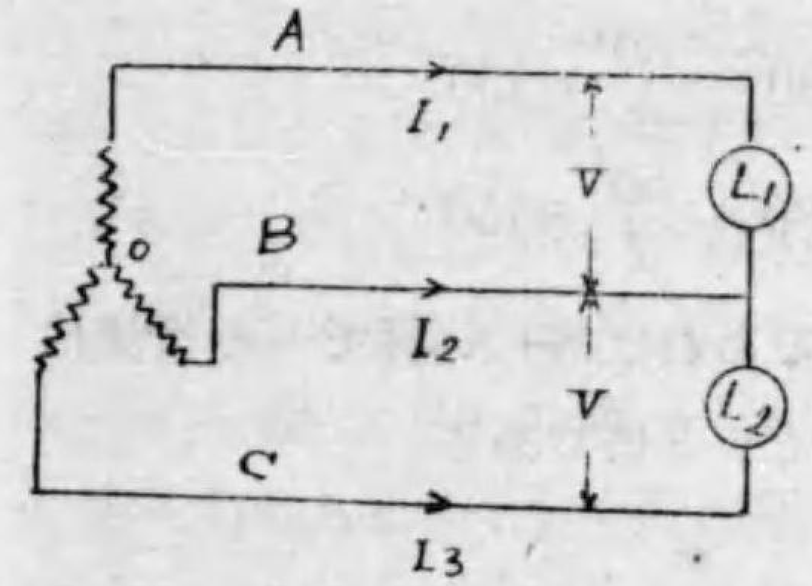
接續は第97圖の通りでその二次側のみを書き換へて見ると第98圖甲圖の通りになる。前にも述べた通り此V結線と云ふのは三角型結線に於ける一相を取除いたものであるから電壓のベクター圖も三角形結線の場合のベクター圖と同樣に書かれる譯である。即ち第98圖乙は此結線のベクター圖であつてabとbcのベクターの間には120度の相差を有して居る。aとcとの間の電壓は點線で示した方向を取りabとbcとが相等しく變壓器の一次側に完全な平衡三相電壓を供給すれば點線で示したcaのベクターもab及びbcに相等しいと云ふ事になる。從つて變壓器2臺をV結線にして三相電壓を出さしてめもその電壓は各線間とも相等しいものである。



第 9 8 圖

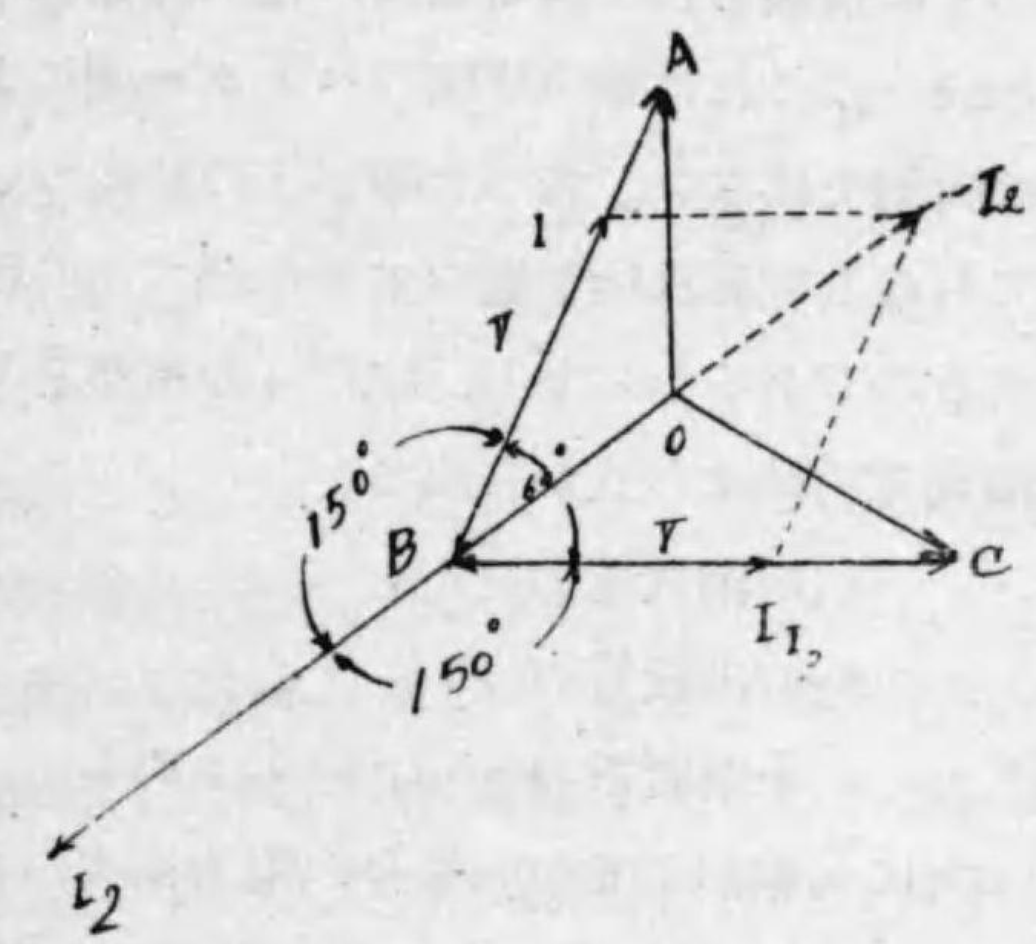
10. V結線の電流

負荷をV接續にするとどんな電流が流れるかと云ふ事を説明する。負荷の接續をV接續にすれば之に平衡三相交流電壓を供給しても決して平衡電流は流れないものである。今第99圖の如くL_1 L_2の二つの電球をV接續として之に三相交流をかけて見る。先づ供給電壓のベクター圖をかいて見ると假りに之を星形



第 9 9 圖

接續として第100圖のOA, OB, OCの通りになる。今電球L_1及びL_2に供給されて居る電壓を求めて見るとL_1にかかる電壓はOAよりOBをベクター的に引いたものであるからBAの如きベクターとなりL_2にかゝる電壓はOCからOBを引いたものであるからBCの如きベクターとなる。次に電流Iのベクターは BAのベクターと同相にあるを以てI_1のベクターが書かれI_3はBCのベクターと同相にあるから圖の如くI_3のベクターがBCと同相に取られる。中央の線を流れる電流I_2はI_1の電流とI_3の電流とに釣合ふのであるからI_1とI_3とを合成してその方向を逆にすればよい。I_1の電流とI_3の電流とを合成すると$-I_2$のベクターが得られ此のベクターを逆に引延ばして$-I_2$と同じ長さにI_2を取れば此のI_2のベクターが求むる電流I_2のベクターである。各電流の大きさとその間の位相角とを求めて見ると次の通りになる。



第 1 0 0 圖

I_1とI_3との間の位相角＝60度

$$I_1 \text{と} I_2 \text{との間の位相角} = 180° - \frac{60°}{2} = 150°$$

$$I_3 \text{と} I_2 \text{との間の位相角} = 180° - \frac{60°}{2} = 150°$$

電流 I_1 と I_3 とは負荷さへ同じであれば等しい譯で I_2 の電流はベクター圖によつて明かなる如く $\sqrt{3}$ 倍である。

$$I_1 = I_3 \qquad I_2 = \sqrt{3}\, I_1$$

11. V結線負荷の電力

Vに接續されて居る負荷の電力は如何なる方法で計算するかと云へばこれは第100圖のベクター圖によつて明らかな通り別に面倒ではない。先づ力率が1の時について云へば第99圖に於て I_1 なる電流は L_1 を通つてBに出て I_3 の電流は L_2 を通つてBに出るのであるから今 L_1 及び L_2 の電壓をVとすれば L_1 及び L_2 の消費電力は次の式から出る。

L_1 の消費電力 $= VI_1$

L_2 の消費電力 $= VI_3$

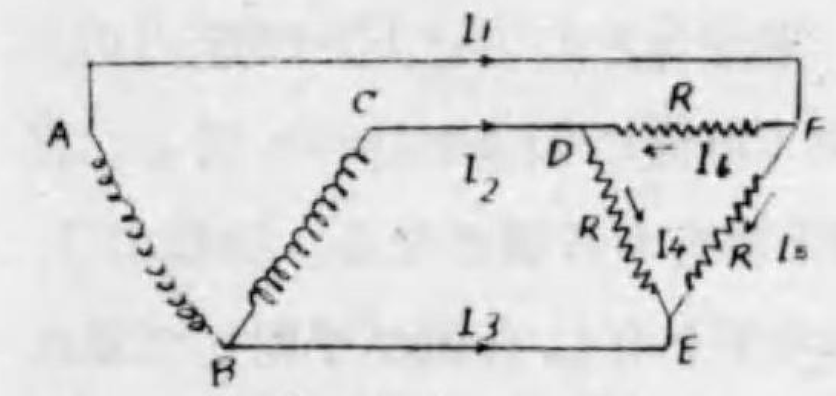
全消費電力 $= VI_1 + VI_3 = 2VI$

次に力率が1でない場合の電力は次の如く計算し得。

全消費電力 $= VI_1\cos\theta + VI_3\cos\theta = 2VI\cos\theta$

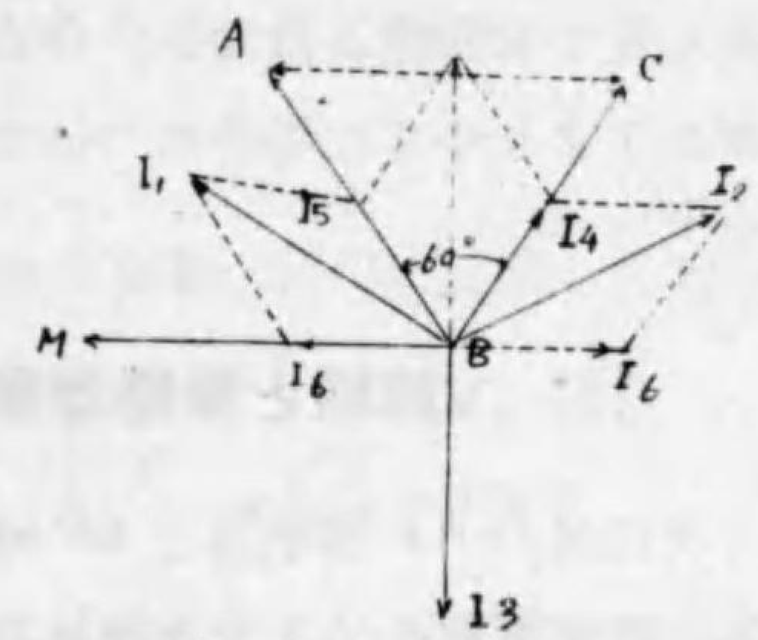
12. 電源としてのV結線

今迄は主として負荷をオープンデルタに接續した時の事を説明したが今度は電源をV結線にした場合を述べて見る。先づ負荷に對しては平衡負荷をかけるものと假定する。第101圖に於てAB, BCは變壓器の二次線で之をV型に接續し三角型に接續



第　1　0　1　圖

されて居る負荷Rに電壓を供給して居る。此の場合に三つの線に流れる電流を夫夫 I_1 I_2 I_3 とし負荷の三角形回路に流れる電流を圖の如く夫々 I_4 I_5 I_6 とする。今此の場合のベクターを畫いて見ると第102圖の通りでBA, BCは第101圖のBA, BCの電壓のベクターである。負荷の力率を1と假定するならばEFに流れる電流 I_5 はABより供給せられるのであるからABのベクターと同相にあるしDEに流れる電流 I_4 はBCより供給せられるからBCのベクターと同相にある筈である。此の I_4 をBC上に取り I_5 をBA上に取ると第102圖の如きベクター圖が



第　1　0　2　圖

書かれFとDとの間を流れる電流 I_6 はCAの電壓と同相であるからBよりCAに平行線を引き此の上に電流 I_6 のベクターを書けば良い譯である。是で I_4 I_5 I_6 の三つの電流のベクターが書けた譯で是より I_1 I_2 I_3 のベクターを書いて見る。電流 I_1 は圖によつて明かな通り I_5 と I_6 との合成和であるから第102圖に於て此の二つの電流を合成して見ると I_1 となる。電流 I_2 は第101圖に示す通り I_4 の電流のベクターより I_6 の電流のベクターを引いたものであるから此の二つをベクター的に引き去つて見ると圖の通り I_2 のベクターが得られる。電流 I_3 は圖に於て明かな通り I_4 と I_5 との合成和の逆であるから此の二つを合成して逆に引き延

すと I_3のベクターが得られる。電流 I_5と I_4とは互に60度の相差を有し I_5と I_3, I_4と I_3とは互に150度の相差を持つて居る。從つてI_1とI_3との間は120度の相差を有する事になる。同様に I_1とI_2, I_2と I_3との間も120度の相差を有し負荷が平衡して居ればI_1 I_2 I_3は共に殆んど相等しくなる。

從つてV結線の電源から平衡三相負荷に電壓を供給すれば平衡三相電流が流れる譯であるが實際は電壓降下の不平衡によつて電流も僅かながら違つて來るけれ共是は僅かであつて平衡電流と見ても間違ひはない。今のは力率が1の場合であつたが力率が1より小さな場合についても同様にベクターをかく事が出來る。

13. V結線と變壓器容量

次に前のAB變壓器とBC變壓器との力率であるがAB變壓器の出す電壓はABベクターの通りでその電流はI_1である。從つて此の變壓器の出す電力は電壓をVとすれば次の通りである。

$$W_1 = VI_1\cos(30°-\theta)$$

從つて此の變壓器の力率は $\cos(30°-\theta)$ で若しθが30度よりも小さければその力率は進相力率である。BC變壓器の出す電壓はBCベクターで表はされその電流はI_2である。從つてBC變壓器の出す電力は下記の通りでる。

$$W_2 = VI_2\cos(30°+\theta)$$

此のBC變壓器の力率は遅相力率でその位相角は$(30°+\theta)$である。次にAB變壓器とBC變壓器とが出す電力を合計して見ると次の通りになる。

$$\begin{aligned} W_1+W_2 &= VI_1\cos(30°-\theta)+VI_2\cos(30°+\theta) \\ &= VI\{\cos(30°-\theta)+\cos(30°+\theta)\} \\ &= 2VI\cos30°\cos\theta = 2VI\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\ &= \sqrt{3}\,VI\cos\theta \end{aligned}$$

二つの變壓器より出す電力は上の通りになり結局平衡三相負荷の場合と同じになる。此の二つの變壓器の出す電力は$VI\cos\theta$の$\sqrt{3}$倍であるが若し之を三角形に接續すれば3臺の變壓器より出す電力は下の通りの出力とならなければならない。

$$W_1+W_2+W_3 = 3VI\cos\theta$$

故に2臺をV型に接續した場合と3臺を三角型に接續した場合との比を求めると次の通りになる。

$$\frac{W_1+W_2}{W_1+W_2+W_3} = \frac{\sqrt{3}\,VI\cos\theta}{3VI\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

是は變壓器を2臺使用してVに接續したものと3臺使用して三角形に接續した場合との比であつて、V結線を使用すると3臺使用して三角形に結線した場合の57.7パーセントに減少する。所が三角形に接續した時は變壓器を3臺使用するしV形に接續する場合は2臺使用するので1臺の變壓器の容量が57.7パーセントに減少するのではない。然らば1臺の變壓器の容量はV接續にするとどれ丈減少するかと云へば此の57.7パーセントを2で割つて3倍した丈の出力となるものである。今變壓器を3臺三角形に接續した場合の2臺分の出力を求めると此の出力は明かに$2VI\cos\theta$であるべき筈である。從つて此のV接續の2臺分と三角形接續の2臺分との出力の比を見ると次の如く出て來る。

$$\frac{\text{V 接續の2臺分の出力}}{\text{三角形接續の2臺分の出力}}=\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{VI}\cos\theta}{2\mathrm{VI}\cos\theta}$$

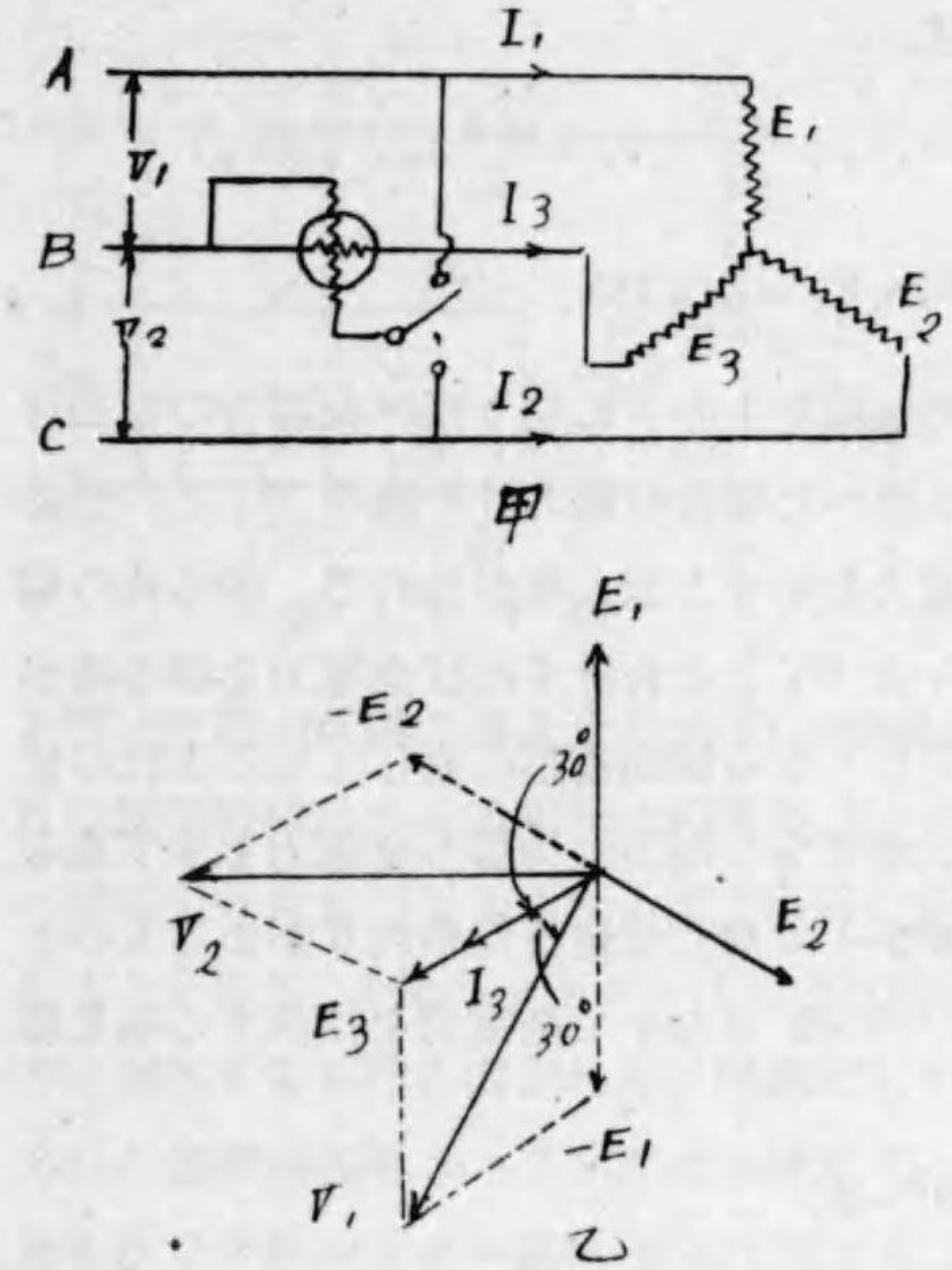
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$$

即ち變壓器をV接續にすれば三角形に接續する場合よりもその1臺分は出力を86.6パーセントに減少する。是は變壓器をVに接續すると負荷の力率が1の時でも變壓器の力率は1とはならない。此の事は前に述べた通りで W_1 及び W_2 の式に示された通り各變壓器は $\cos(30°-\theta)$ 及 $\cos(30°+\theta)$ の力率を有する事から知れる譯である。此の力率の異る事が變壓器の出力を變化せしめて出力を小にするのである。

14. 三相ベクターと電力計

三相ベクターを電力計に應用して見ると比較的よく三相ベクターの觀念が了解出來るし又三相ベクターを電力計に應用される事は比較的多いものである。電力計を以て三相負荷の電力を測定する場合には1箇の電力計を以て測定する一電力計法と2箇の電力計を以て測定する二電力計法と3箇の電力計を以て測定する三電力計法とがある。1箇の電力計を以て三相電力を測定する場合には負荷の三相電力が平衡負荷の場合に限つて正確であるが不平衡負荷に對しては不正確である。此の方法に二通りあるが第一の方法のみを述べる。

第103圖の如く平衡三相負荷がある場合に電力計の電流線輪はその一相の線に接續し電壓線輪は他の二つの線との間に切り換へる事が出來る樣にする。先づ此の電力計に流れる電流を調べると今負荷の力率が1であるとすれば此の電流 I_3 は相電壓 E_3 と同相にある譯である。電壓線輪をAの側に切り換へた場合の



第103圖

電壓は電力計の電壓が線論の上方より入つて居る場合に相電壓 E_3 より相電壓 E_1 を引いたものであると定れば同乙圖のベクター圖に示す通り V_1 の方向を取る。次に電壓線輪をCの方向に切り換へた場合に電力計の電壓線輪には E_3 より E_2 をベクター的に引いた電壓 V_2 がかゝる譯である。此の場合に電壓線輪をAの方に切り換へた電力計の讀みを W_1 としCの方に切り換へた場合の讀みを W_2 とすれば W_1 と W_2 とは第103圖のベクター圖によつて明かな如く夫々次の如きものとなる。

$$W_1=I_3V_1\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}I_3V_1$$

$$W_2=I_3V_2\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}I_3V_2$$

今此の W_1 と W_2 とを加へて見ると次の通りになり V_1 と V_2 とは平衡三相の電壓であるから等しくなるので之をVの電壓で表しBを流れる電流 I_3 はA及びCを流れる電流とも相等しい譯で

あるから之をＩで表す。

$$W_1+W_2=\frac{\sqrt{3}}{2}I_3V_1+\frac{\sqrt{3}}{2}I_3V_2=\frac{\sqrt{3}}{2}I_3(V_1+V_2)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}I\times 2V=\sqrt{3}\,IV$$

即ち是によつて電壓線輪を上のＡに切り換へた場合の電力計の讀み W_1 とＣに切り換へた場合の電力計の讀み W_2 との合計は平衡三相負荷の全電力を示すと云ふ事が知れる。即ち此の場合には二つの讀み W_1 と W_2 とを合計すれば全電力を測る事が出來るのである。又更にＶなる線間電壓に直して見ると此の値は 3EI となりて各相が消費する電力の和即ち全電力を示す事を知る。次に負荷の力率が１でなくて或る位相角 θ があるものとすれば次の如く $\sqrt{3}\,VI\cos\theta$ となりて全電力を指示する事を知る。

$$W_1=I_3V_1\cos(30^\circ-\theta)$$

$$W_2=I_3V_2\cos(30^\circ+\theta)$$

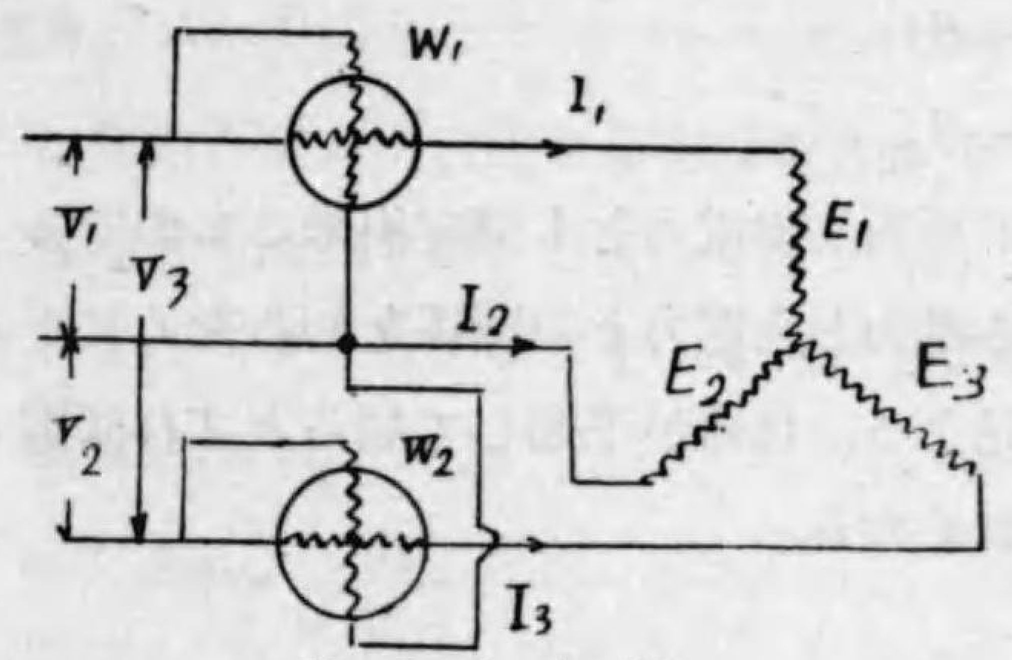
$$\therefore\ W_1+W_2=I_3V_1\cos(30^\circ-\theta)+I_3V^2\cos(30^\circ+\theta)$$

$$=IV\{\cos(30^\circ-\theta)+\cos(30^\circ+\theta)\}$$

$$=2IV\cos 30^\circ\cos\theta$$

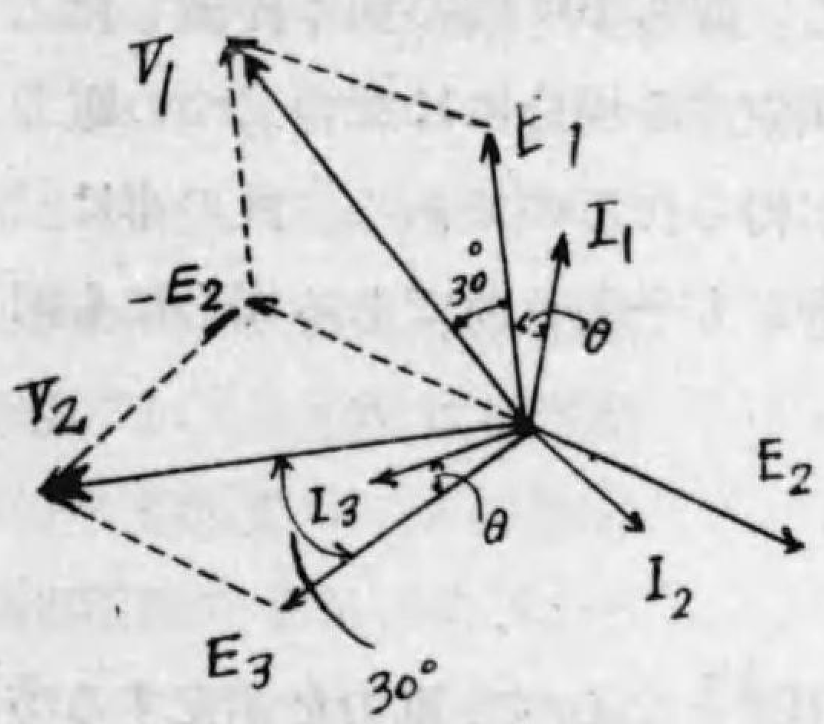
$$=2IV\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\,VI\cos\theta$$

三相電力を測定するに最も普通の方法は２箇の電力計を使用して測定する方法で不平衡三相電力も測定せられるしその接續も容易である。第104圖は此の接續を示すもので電壓線輪には二つの線間電壓がかけられて居る。先づ電力計に流れる電流は負荷の力率が１であるならば相電壓と同相にある譯であるが若し負荷の力率が１よりも小さければ各線を流れる電流は相電壓



第１０４圖

より或る位相角丈遲れる譯である。先づ此の場合は一般の狀態を説明するために電流は相電壓よりも θ の位相角丈遲れるものと假定する。此の場合のベクター圖を書けば第105圖の通りで E_1 の相に接續せられて居る W_1 電力計の電壓線輪にかゝる電壓は相電壓 E_1 より相電壓 E_2 をベクター的に引いたものであるから第105圖に於て V_1 の如き方向と大きさとを取る。（此のベクターは第104圖の相が $E_1E_2E_3$ の順序に廻轉するものと假定した）同樣にして E_3 の相にある W_2 電力計の電壓線輪にかゝる電壓は相電壓 E_3 より相電壓 E_2 を引いたもので之をベクター圖に表して見ると V_2 の如き方向のベクターとなる。是等のベクター圖より電力計 W_1 と W_2 との指示する電力が知れる譯である。先づ W_1 電力計の指示する電力は電流 I_1 に電壓 V_1 を乘じ之に I_1 及 V_1 ベクター間の角度の餘弦を乘じたものである。同樣にして W_2 電力計の電力をも知る事が出來、此の電力を夫々 W_1 及び W_2 とすれば是等の電力は次の式で表はされる。



第１０５圖

$$W_1 = I_1V_1\cos(30^\circ+\theta)$$
$$W_2 = I_3V_2\cos(30^\circ-\theta)$$

此の電力計の接續は不平衡三相電力をも測定出來るものであるが各電力計の指示する電力と全電力との關係を知るために平衡負荷の場合を考へて見よう。負荷が平衡して居るとすれば電壓や電流の關係が次の如くなる。

$$E_1 = E_2 = E_3 = E$$
$$V_1 = V_2 = V$$
$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

之を前の式に入れて W_1 と W_2 との和を求めて見る。

$$\begin{aligned} W_1+W_2 &= I_1V_1\cos(30^\circ+\theta)+I_3V_2\cos(30^\circ-\theta) \\ &= IV\{\cos(30^\circ+\theta)+\cos(30^\circ-\theta)\} \\ &= 2IV\cos30^\circ\cos\theta \\ &= 2VI\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \sqrt{3}\,VI\cos\theta \\ &= \sqrt{3}\sqrt{3}\,EI\cos\theta = 3EI\cos\theta \end{aligned}$$

かく計算して見ると２箇の電力計の讀みを加へ合したものが三相電力であると云ふ事を知る。即ち104圖の如く接續した二つの電力計を以て三相負荷を測定する場合には此の二つの電力計の讀みを加へ合せば全電力が得られるのである。此の事は三相負荷が不平衡負荷である場合にも平衡負荷である場合にも同じ事である。

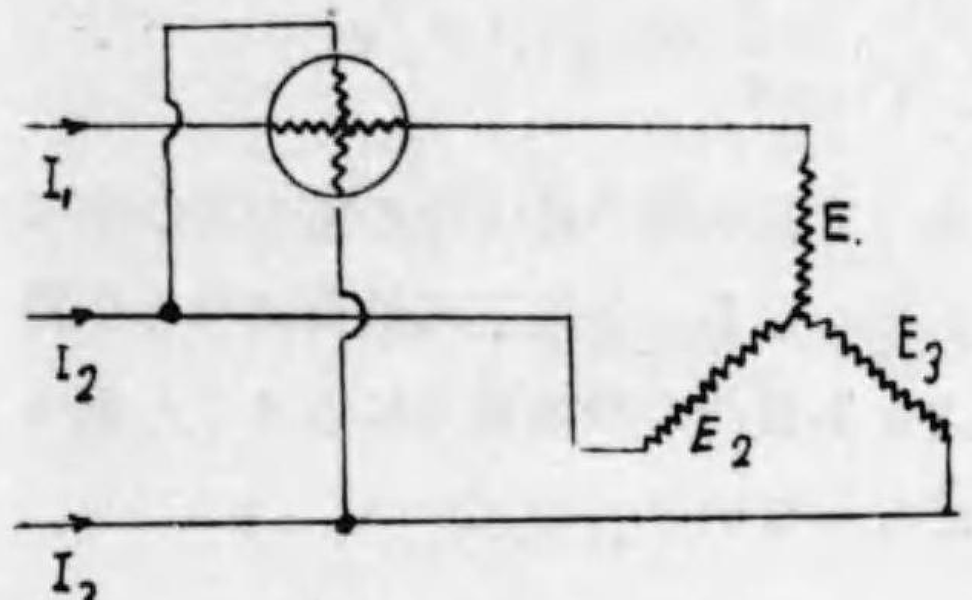
15.　無効電力の測定

今迄述べたのは實際の電力損失となるべき電力を測定する方法であるが力率が１以下の場合には電力の損失とならない**無効**

電力（Wattless power ワットレスパワー）なるものが存在する。實際の電力損失となる有効電力は $EI\cos\theta$ で表すのであるが無効電力は $EI\sin\theta$ で表はされて居る。今一つの回路の抵抗をRオームリアクタンスをxオームで表せば此の $\sin\theta$は次の式で表はされる。

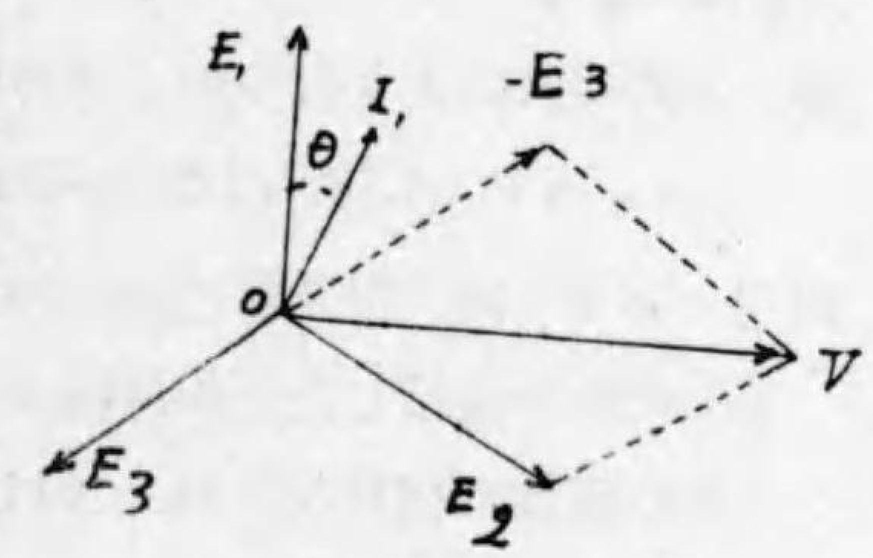
$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (52)$$

此の無効電力を測るに三相電力に於ては普通の電力計を使用して測定する事が出來る。先づ三相負荷が平衡三相負荷であるならば１箇の電力計を以て測定する事が出來る。第106圖はその接續を示すものであつて一つの電力計の電流線輪を一相の線に入れ電壓線輪へは他の二相間の線間電壓を供給して居る。



第　１　０　６　圖

今各線に流れる電流をＩとし各線間の電壓をＶとする。此の場合のベクター圖を書いて見ると第107圖の通りになり電流I_1はE_1の相電壓より位相角θ丈遲れる。電壓線輪にかゝる電壓は相電壓E_2と相電壓E_3との間の線間電壓であるからE_2よりE_3を引いたものでなければならない。今E_2より



第　１　０　７　圖

E_3を引いたものとすればそのベクター圖は第107圖の通りになり此の場合の電力を計算して見ると次の通りになる。卽ち電力計が廻轉するのは電流I_1と電壓Vとを乘じたものに角I_1OVの餘弦を乘じたもので廻轉するのであるから此の場合の電力は次の式で表はさる。

$$W=VI\cos(90^\circ-\theta)$$

此處で90度と云ふのはE_1とVのベクターが圖によつて明かなる如く直角をなして居るからである。此の式を書き直すと次の通りになる。

$$W=VI\cos(90^\circ-\theta)=VI\sin\theta$$

是は明かに無効電力であつて云ひ換へれば此の電力計の指示する電力は無効電力と云ふ事になる。是は三相負荷の取る全體の無効電力ではないので之を全負荷の無効電力に直さうと思へば之に$\sqrt{3}$を乘じなければならない。

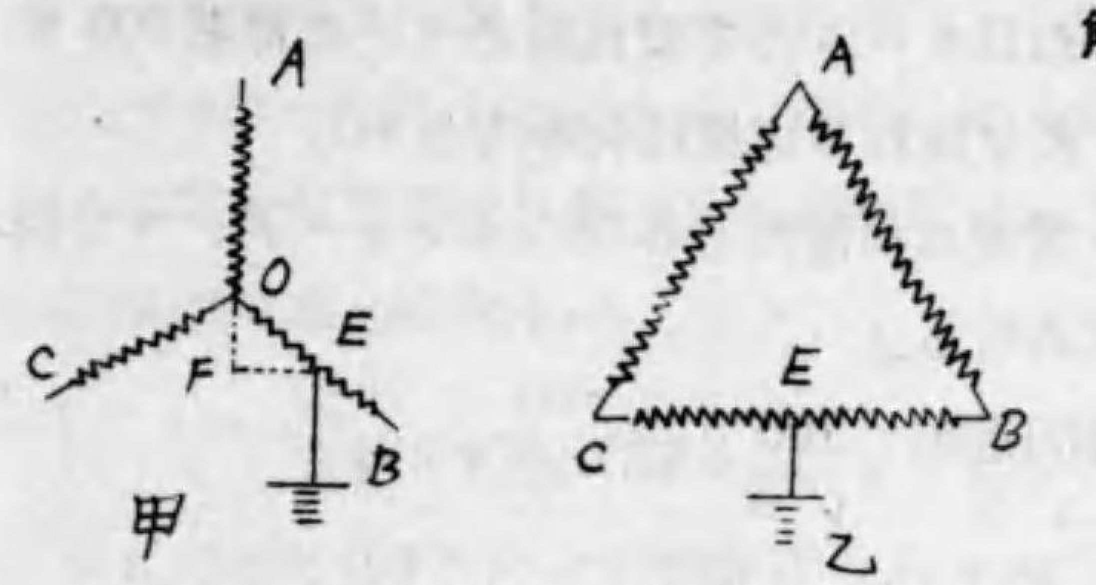
16. 例　題

例 1. 相電壓 121.4ヴォルトの變壓器の二次側を星形に接續し一次側に三相交流を供給すれば二次側の線間電壓は何程となるか。

解　公式52式により次の如く求め得る。

$$V=\sqrt{3}\,E=1.732\times121.4=210 \text{ ヴォルト}$$

例 2. 第103圖、甲及び乙圖の如く星形に接續した三相捲線と三角形に接續した三相捲線との一相の中央を接地すればA點の電位は何程なるか、但し一相の電壓をEヴォルトとす。



第 1 0 8 圖

解　星形接續の場合は先づAOの延長上にEより垂線EFを下す。AE間の電壓は次の式で表はさる。

$$AE=\sqrt{(AO+OE\cos60^\circ)^2+(OE\sin60^\circ)^2}$$

$$=\sqrt{\left(E+\frac{E}{2}\times\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\,E}{2\times2}\right)^2}$$

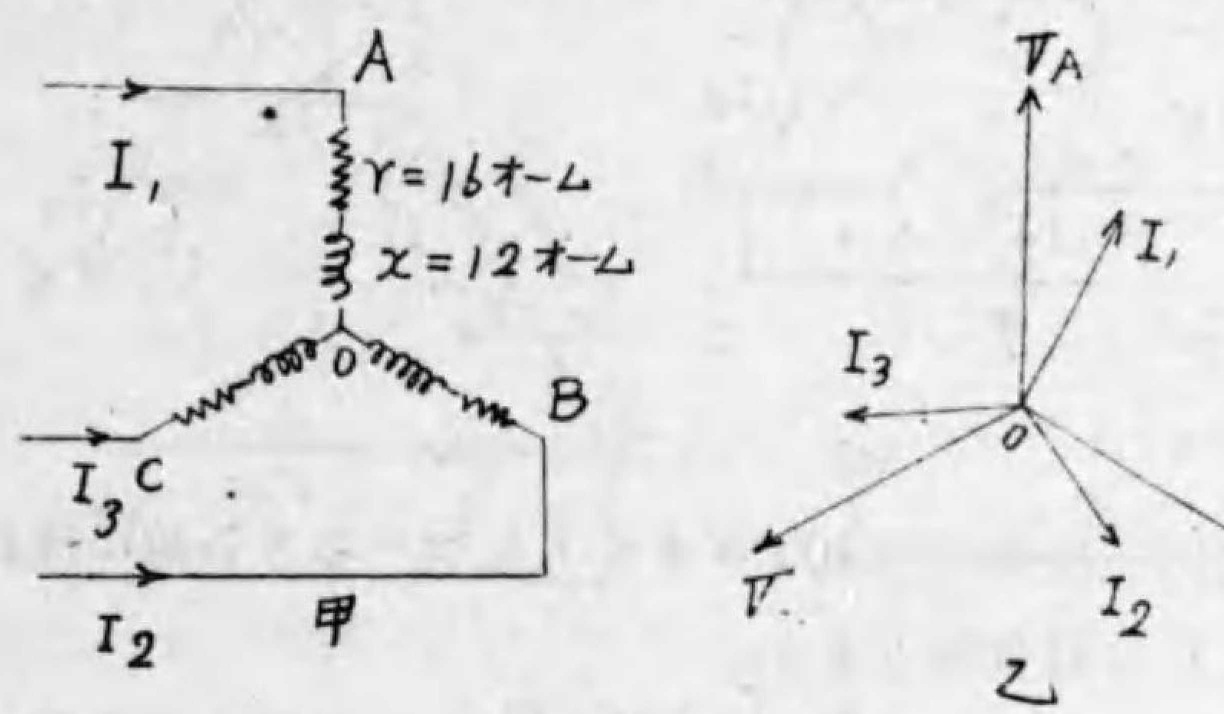
$$=\frac{\sqrt{7}}{2}E \text{ ヴォルト}$$

次に三角形接續の場合にはAE間の電壓を次の如く求むる事を得。

$$AE=\sqrt{AB^2-EB^2}$$

$$=\sqrt{E^2-\left(\frac{E}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}E \text{ ヴォルト}$$

例 3. 第109圖に示すが如く一相の抵抗rが16オーム、誘導



第 1 0 9 圖

リアクタンス x が12オームの平衡負荷あり之に電壓 100 ヴォルトを供給すれば流れる電流は何程なるか。

解 各相に流れる電流は相電壓を各相のインピーダンスで割れば次の如く求めらる。

$$\text{相電壓}=\frac{\text{線間電壓}}{\sqrt{3}}=\frac{100}{\sqrt{3}}=57.7\ \text{ヴォルト}$$

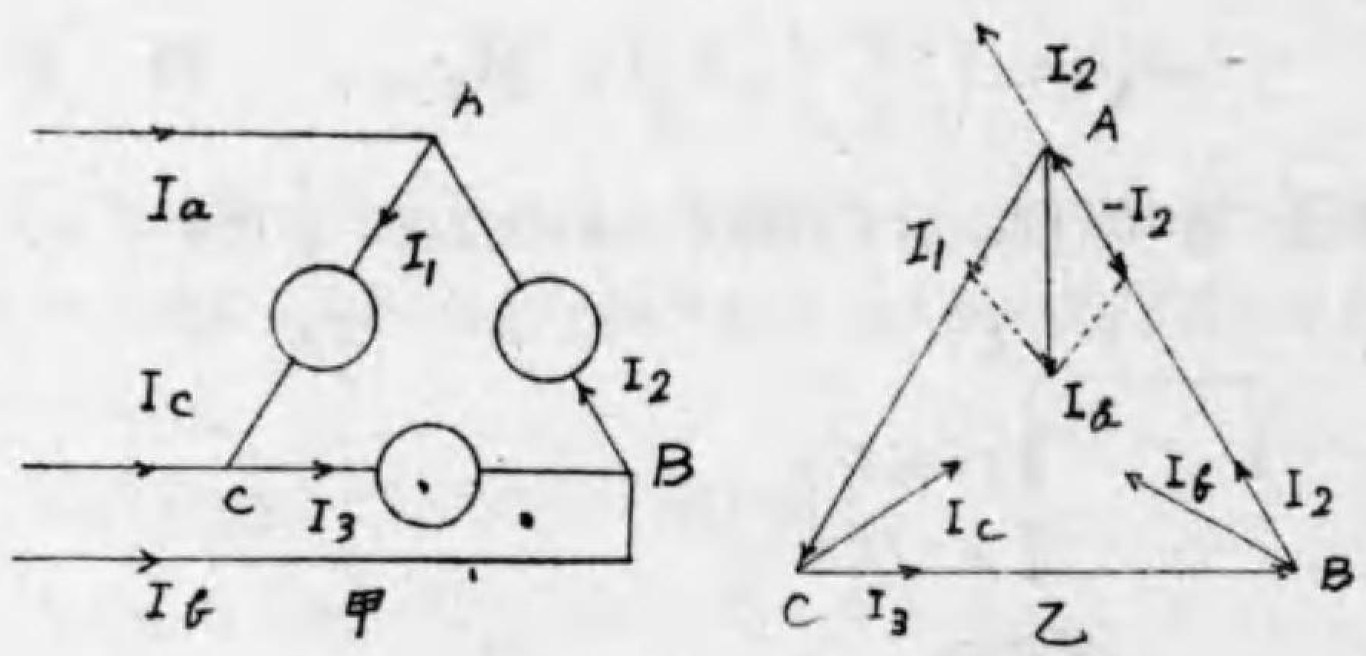
$$\text{各相電流}=\frac{57.7}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{57.7}{\sqrt{16^2+12^2}}$$

$$=\frac{57.7}{20}=2.885\ \text{アンペア}$$

是が線電流ともなるのであつて此の電流のベクターの方向は第109圖乙圖の如く $I_1\ I_2\ I_3$ は何れも同じ大きさを有し各相電壓 $V_A\ V_B\ V_C$ より次の力率に相當した位相角丈遅れるのである。

$$\text{力率}=\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{16}{20}=0.8$$

例 4. 第110圖甲圖の如く60ワットの電球3箇を三角形に接



第 1 1 0

續し之に三相交流の100ヴォルトを與へると各線に流れる電流 $I_a\ I_b\ I_c$ は何程なるか。

解 今A點よりC點に向ふ相電流を I_1 としB點よりA點に向

ふ相電流を I_2 とすればA點に流入する線電流は I_1 より I_2 をベクター的に引いたものである。今 I_1 の大きさを計算すれば電燈が無誘導負荷であるため電力は VI_1 で表はされ電流は次の通りになる。

$$I_1=\frac{\text{電力}}{\text{電壓}}=\frac{60}{100}=0.6\ \text{アンペア}$$

I_2 も同様に0.6アンペアで I_1 より I_2 をベクター的に引くには第110圖乙圖の如く I_2 と逆方向に $-I_2$ を取り之と I_1 とを合成すれば I_a が求められる。A點の角が60度であるから I_a と I_1 とのなす角度は30度となり I_a と $-I_2$ とのなす角度も30度となるから I_a の大きさは次の式で求められる。

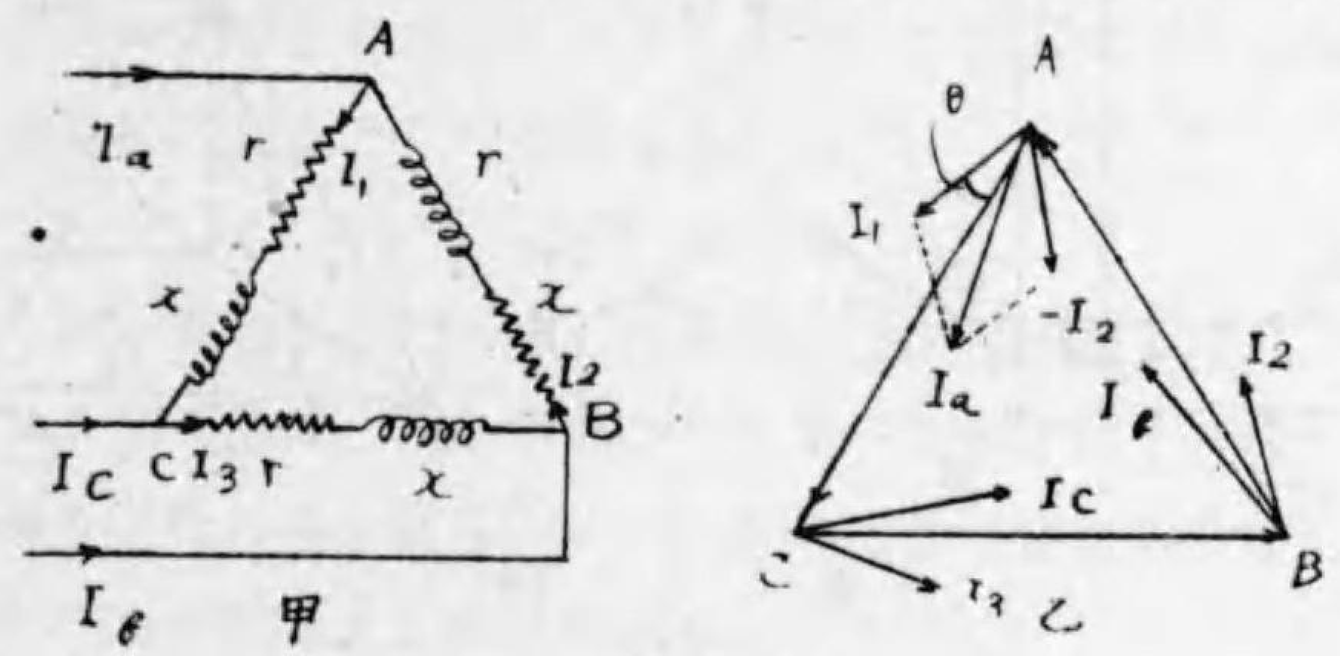
$$I_a=I_1\cos 30^\circ+I_2\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}I_1+\frac{\sqrt{3}}{2}I_2$$

然るに I_1 も I_2 も相等しいのであつて0.6アンペアであるから I_a の大きさは次の通りになる。

$$I_a=\sqrt{3}\,I_1=\sqrt{3}\times 0.6=1.04\ \text{アンペア}$$

同様に I_b も I_c も1.04アンペアとなりその方向は何れも線間電壓と30度の位相角を有するのである。

例 5. 第111圖に於て三角形に接續した各相の抵抗 r に 8 オ



第 1 1 1 圖

ーム、誘導リアクタンスxは6オームである。此の負荷に電壓100ヴォルトの三相交流を供給すれば流れる線電流は何程なるか。

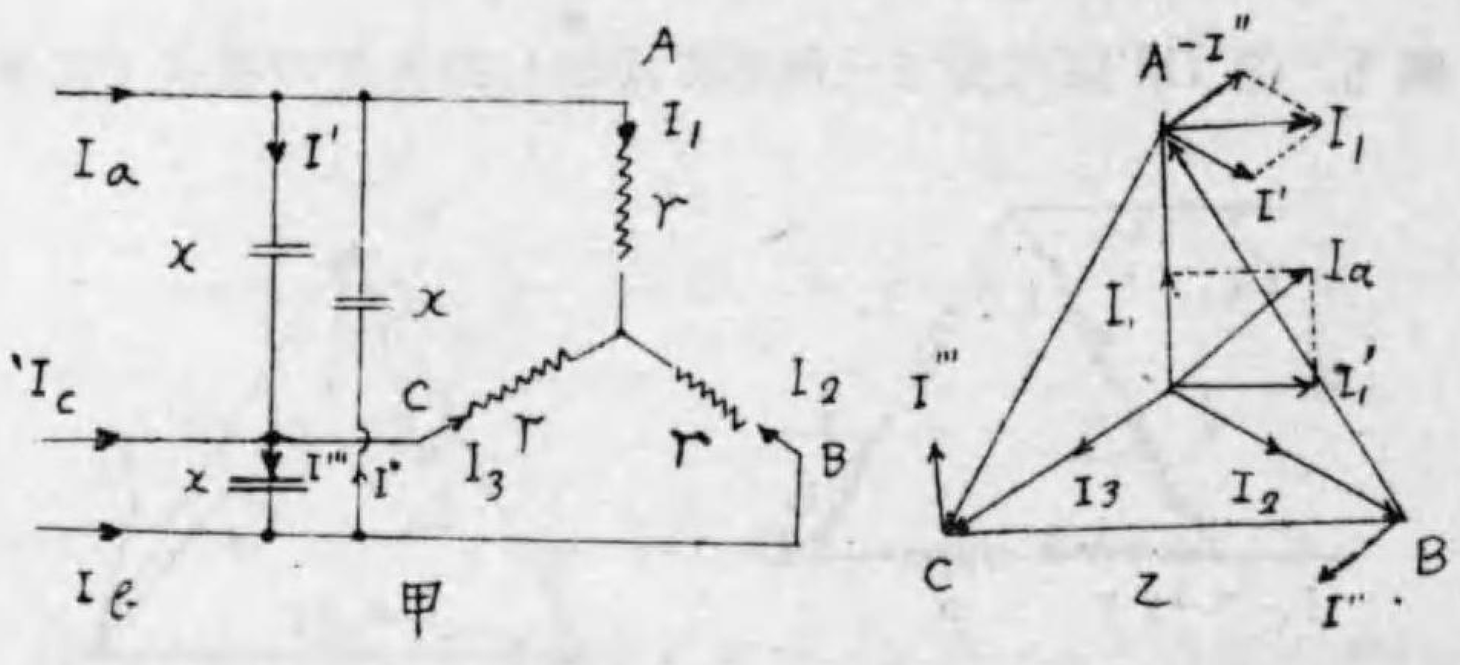
解　前例と同じく各相に流れる電流を計算すると次の通りになる。

$$I_1=\frac{V}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{100}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{100}{10}=10 \text{ アンペア}$$

此の電流は各相共同じ大きさであつて力率0.8に相當する位相角θ丈相電壓より遲れるものである。次に各線を流れる線電流であるがA點に入る電流I_aは相電流I_1より相電流I_2をベクター的に引いたものである。之を求むるには第111圖乙圖の如くI_1より$-I_2$をベクター的に加へると線電流I_aが求められる。此の線電流I_aの大きさは前例の如く次の大きさを有し位相は電壓ACより$(30°-\theta)$丈進んで居る。

$$I_a=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times I_1=\sqrt{3}\,I_1=17.32 \text{ アンペア}$$

例 6.　第112圖甲圖の如く抵抗rを星形に接續し靜電容量によるリアクタンスxを三角形に接續した回路がある。今抵抗r



第 1 1 2 圖

を9.62オームとし、靜電容量によるリアクタンスxを34.6オームとすれば此の回路全體に流れる線電流I_a I_b I_cは各々何程なるか。

解　先づ星形に接續された抵抗回路に流れる電流を計算する。

$$\text{星形相電壓}=\frac{100}{\sqrt{3}}=57.7 \text{ ヴォルト}$$

$$r\text{に流れる電流 } I_1=\frac{\text{相電壓}}{r}=\frac{57.7}{9.62}\fallingdotseq 6 \text{ アンペア}$$

此の電流I_1は抵抗のみの上を流れるのであるから相電壓と同相にあり、之をベクターで示すと第112圖乙圖の通りになる。次に三角形に接續せられた靜電容量の上を流れる相電流I' I'' I'''を計算すると次の通りになる。

$$I'=\frac{100}{34.6}=2.89 \text{ アンペア}$$

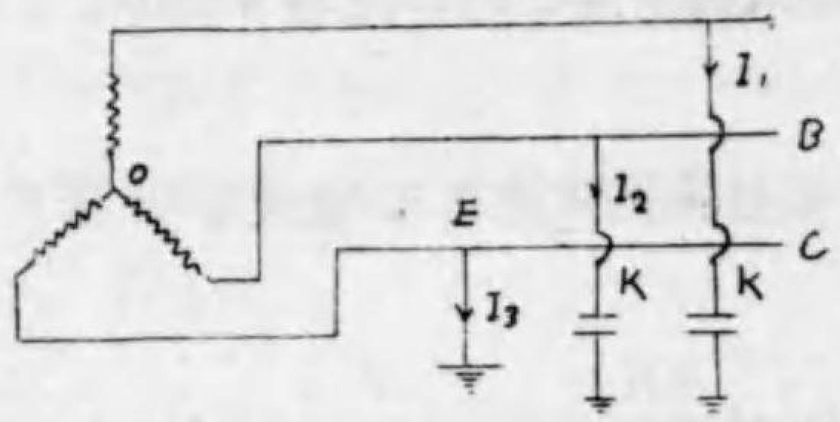
此のI'は靜電容量を流れるため電壓ACよりも90度進む譯で之をベクターに書いて見るとI'のやうになる。同樣にI'' I'''も夫々BA, CBの電壓から90度進むのである。此の三角形に接續された靜電容量に流れる線電流I_1'はI'よりI''をベクター的に引けば良いので之を合成して見るとI_1'の通りになる。今此のI_1'を計算して見ると次の通りである。

$$I_1'=\sqrt{3}\,I'=\sqrt{3}\times 2.89=5 \text{ アンペア}$$

此のI_1'と前のI_1とを合成したものが全體の回路を流れる線電流I_aであつて是は乙圖の中央のベクターで示す如く合成する事が出來る。此の場合はI_1とI_1'とが直角となつて居るのでI_aの電流は次の通り計算する事が出來る。

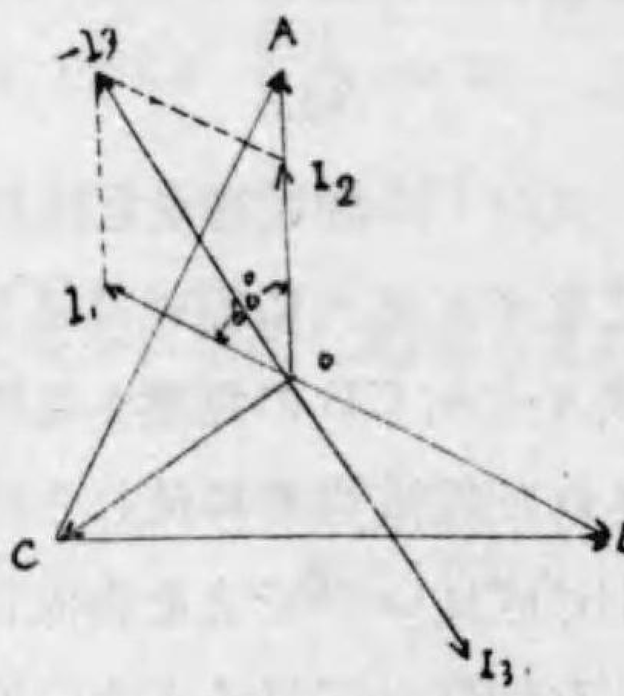
$$I_a=\sqrt{I_1^2+I_1'^2}=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}=7.8 \text{ アンペア}$$

例 7. 第113圖の如き送電線路があつて一線Aと大地との間にはKなるキヤパシチーが存在しB線と大地との間にもKなるキヤパシチーが存在して居る。今三線中の一線CがEなる點に於て接地したとしたならば此の故障を起したE點では如何なる電流が流れるか。



第 1 1 3 圖

解 此の問題は實際上よく起る問題で特に近頃流行のペテルゼンコイルの理窟を考へる場合には是が非でも此の問題を考へなければならない。先づ第一に考へる事はそのベクター圖で最初に電源の電壓OA, OB, OCを第114圖の如く書いて見る。C線は接地してしまつて居るのであるからその電位は大地の電位と同じであると見て宜しい。A線とC線との間の電壓は圖に示す通りCAベクターとなりB線とC線との間の電壓はCBのベクターの如くなる。これはA線と大地間にKなるキヤパシチーがありB線と大地間にもKなるキヤパシチーがあり其の上C線と大地とは接續されて居るので結局ABCの三線の間に二つのKなるキヤパシチーがV形に接續されて居るのと同じ形になるからである。



第 1 1 4 圖

C線がE點で接地せられるとしたならば此の接地箇所では接地電流が流れる事は明かでその接地電流を計算するために便宜

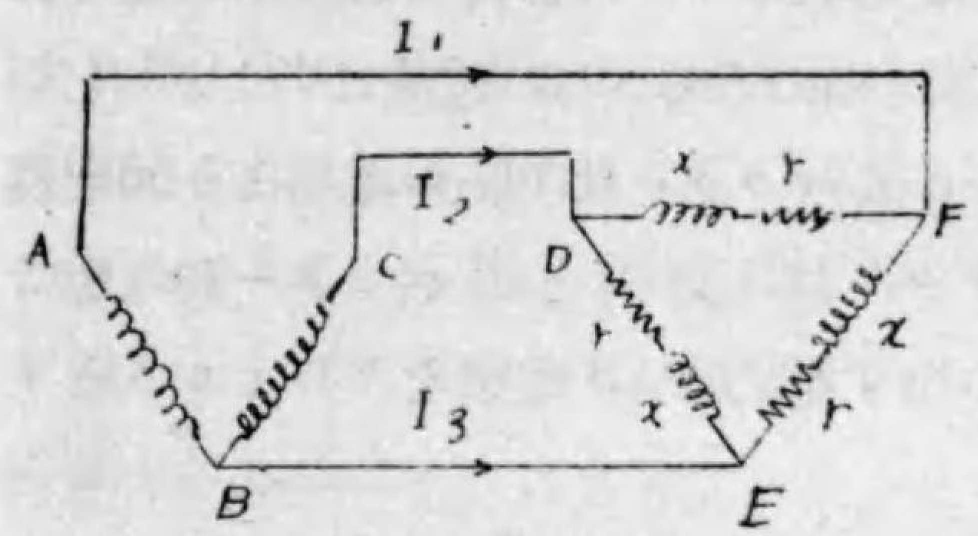
上圖の如くKなるキヤパシチー一つを以て送電線の一線の全體のキヤパシチーと見做して見る。此の時A線より大地に向けて流れる電流I_1とB線より大地に向けて流れる電流I_2とを計算して見る。今送電線の電壓をVヴォルト、周波數をfサイクル、キヤパシチーKの大きさをCファラッドとすればI_1とI_2とは夫夫次の式によつて出て來る。

$I_1=\omega CV=2\pi fCV$ アンペア　　$I_2=\omega CV=2\pi fCV$ アンペア

AC間とBC間とに接續されて居るものは此のキヤパシチーのみであるから電流は電壓よりも90度進む譯である、卽ち電流I_1は電壓CAよりも90度進み電流I_2は電壓CBよりも90度進むのである。從つて第114圖にCAより90度進ませて電流I_1のベクターを書きCBより90度進ませて電流I_2のベクターを書くEの點に流れる接地電流I_3はI_1とI_2の電流のベクター的和の逆を取れば良い譯である、圖に於てI_1とI_2とを合成して逆に延ばし同じ長さに切ればI_3のベクターが得られる。從つてI_1とI_2のベクターの間には60度の相差がありI_1とI_3及びI_2とI_3との間には150度の相差がある。I_3の電流は次の式から計算する事が出來る。

$I_3=\sqrt{3}\,I_1=\sqrt{3}\times 2\pi fCV=3.764\pi fCV$ アンペア

例 8. 變壓器を第115圖の如くV形に接續して此の電壓を負荷に供給する、變壓器の二次電壓は100ヴォルト、負荷の抵抗rは3オーム、負荷のリアクタンスxは$\sqrt{3}$オームであるとすれば各變壓器の力率とI_1 I_2 I_3の



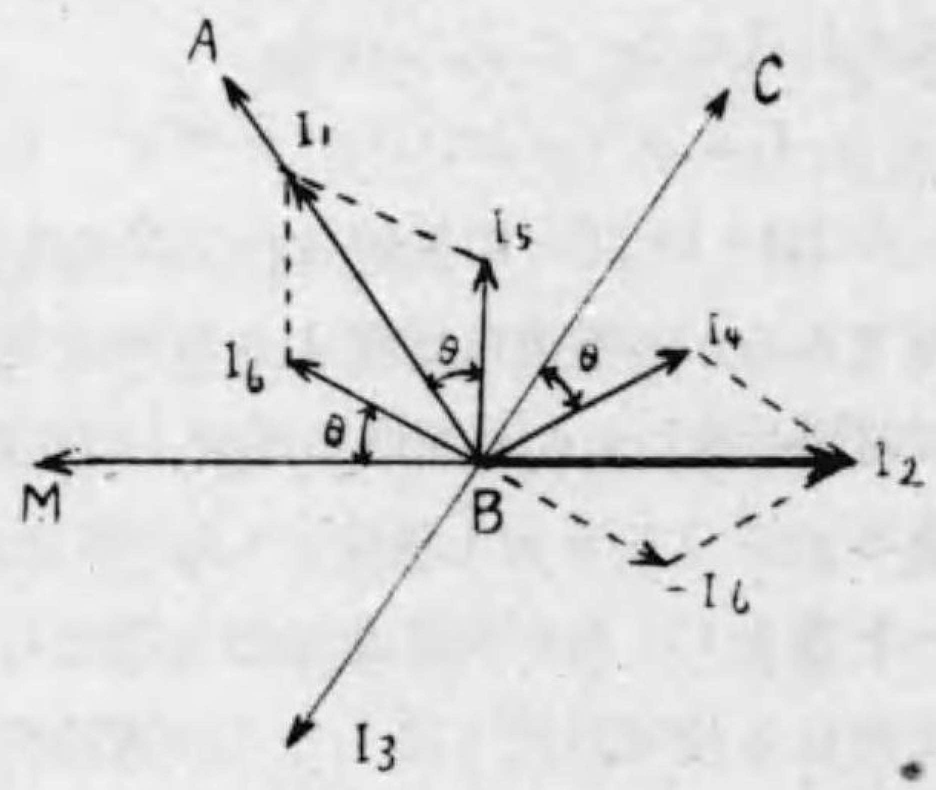
第 1 1 5 圖

電流とを求む。

解 DE, EF, FDの各相を流れる電流 $I_4\ I_5\ I_6$ は各々次の如き電流となる。

$$I_4=I_5=I_6=\frac{100}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{100}{\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}}=28.9 \text{ アンペア}$$

第116圖に此の電流 I_4 I_5 I_6 をベクターとして書き入れるのであるが先づ電壓ABと電流 I_5 との間の位相角 θ を求めなければならない。此の角 θ は負荷の力率による位相角で今負荷の力率 $\cos\theta$ を求めて見る。



第116圖

$$\cos\theta=\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{3}{\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}}=\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad \theta=30^\circ$$

負荷の力率が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから θ は30度である。從つて I_5 はAB電壓より30度遅れ同樣に I_4 はBCより I_6' はBMより各30度遅れる。I_5 と I_6 とを合成すれば I_1 のベクターが得られ θ が30度であるから I_1 はABベクターと同相になる。I_2 の電流は I_4 より I_6 を引いたものであるからその合成ベクターはBCの電壓より60度遅れる事になる。I_3 のベクターは I_5 と I_4 とのベクター和の逆である。次にAB變壓器の出す電力はAB電壓をVヴォルトとすると次の通りである。

$$\text{ABの出す電力}=VI_1\cos(30^\circ-\theta)$$

$$=VI=100\times28.9=2890 \text{ ワット}$$

$$\text{BCの出す電力}=VI_2\cos(30^\circ+\theta)=VI_1\cos60^\circ$$

$$=VI\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2500 \text{ ワット}$$

從つてAB變壓器の力率は1となりBC變壓器の力率は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるのである。變壓器の中を流れる電流とその兩端にかゝる電壓とは相等しいけれ共力率が違つて來るのでその出す有効電力は違つて來る筈である。

例 9. 20キロヴォルトアンペアの變壓器3臺を三角形に接續して居る場合にその1臺が故障を起したので殘りの2臺を以て電力を供給せんとする。此の場合に變壓器の二次電壓を200ヴォルトとすれば各線に流れる電流は何アンペアを限度として流し得るか。

解 今20キロヴォルトアンペアの變壓器3臺を三角形に接續して電流を供給して居る場合に各線に流れる電流を計算して見る。

$$\text{變壓器を流れる相電流}=\frac{VA}{V}=\frac{20000}{200}=100 \text{ アンペア}$$

$$\therefore\quad \text{各線を流れる線電流}=\sqrt{3}\times\text{相電流}=\sqrt{3}\times100$$

$$=173.2 \text{ アンペア}$$

即ち3臺の變壓器を三角形に接續されて居る場合の各線の電流は173.2アンペアであるが變壓器1臺が故障を起して2臺をVに接續されて居る場合にはその出力が57.7パーセントに減少するものであるから從つて外に出し得る線電流も57.7パーセントに減少しなければならない理窟である。此の場合の線電流は次の通りになる。

$$\text{V結線の線電流}=0.577\times\text{三角結線3臺の線電流}$$

$$=0.577\times173.2=100 \text{ アンペア}$$

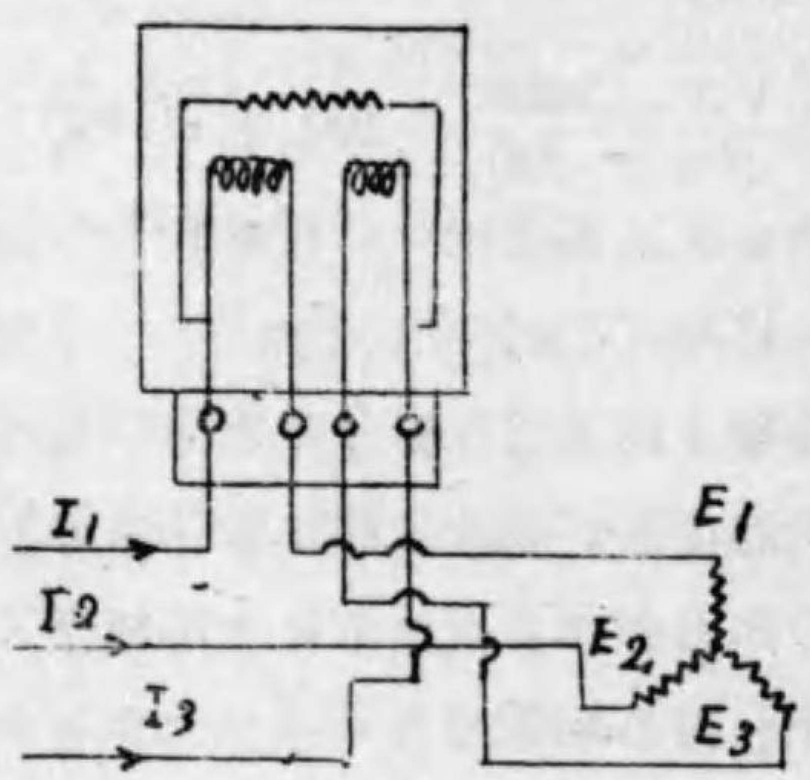
即ち線電流は100アンペアとなる譯である。又20キロ2臺をV接續にした場合の全出力は次の如くその容量を減少する。

V結線の1臺の出力$=0.866\times$三角結線1臺分の容量
$=0.866\times20=17.32$ キロヴオルトアンペア

∴ V結線の2臺分$=17.32\times2=34.64$キロヴオルトアンペア

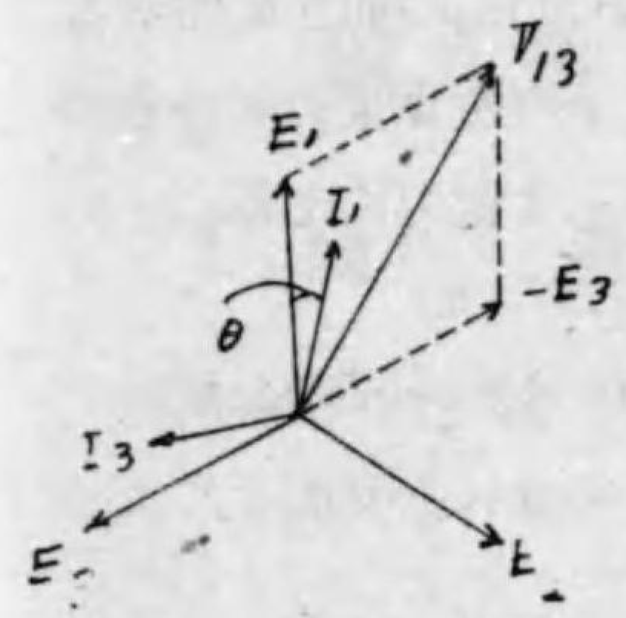
即ち三角結線の場合の2臺分の出力は40キロヴオルトアンペアであるがV形に接續すれば34.64キロヴォルトアンペアに減少する。此の34.64キロヴオルトアンペアなる出力は三角形結線の3臺分の出力60キロヴオルトアンペアの57.7パーセントである。

例10. 第117圖は三相平衡負荷に對する電力を測定する積算電力計の接續で普通の三相積算電力計では2箇の電壓線輪を有して居るけれ共此の積算電力計は1箇の電壓線輪を共有して居る。I_3の流れる電流線輪は普通逆の方向に捲かれて居るか又は圖の如く逆の方向から電流を供給して居る。此の積算電力計は如何なる譯で三相電力を積算するか。



第 1圖 1 7

解 先づ電壓線輪にかゝる電壓はE_1よりE_3をベクター的に引いたものであるから第118圖のベクター圖に於てV_{13}の如きベクターとなる。

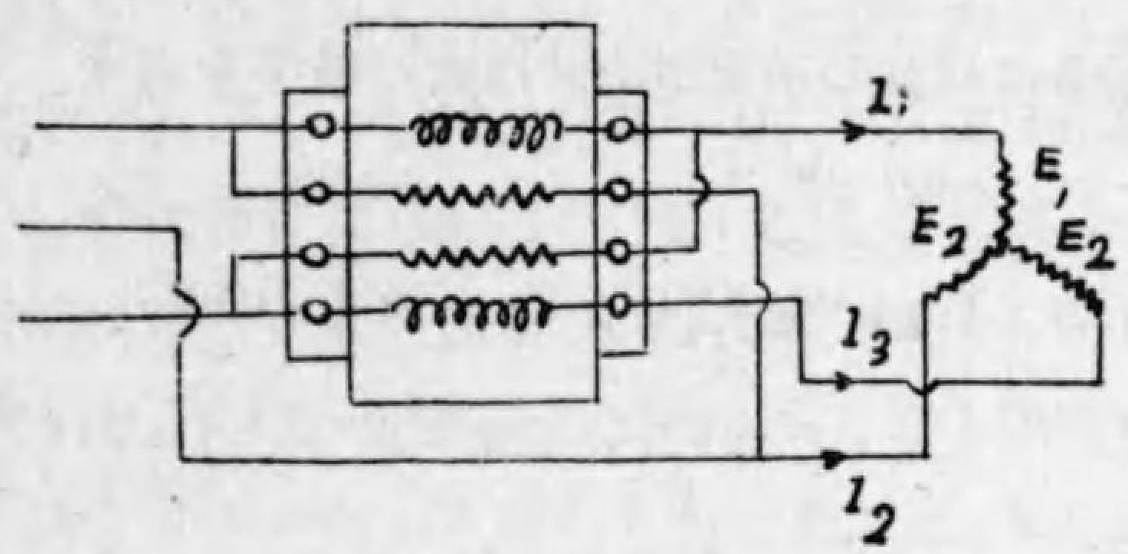


第 1 1 8 圖

今此のV_{13}の電壓とI_1の電流とによる電力をW_1で表はしV_{13}の電壓と$-I_3$の電流とによる電力をW_2で表はせば第118圖のベクター圖で知れる通り次の様になる。

$$W_1=V_{13}I_1\cos(30^\circ-\theta)$$
$$=VI(\cos30^\circ\cos\theta+\sin30^\circ\sin\theta)$$
$$W_2=V_{13}(-I_3)\cos(120^\circ+30^\circ-\theta)$$
$$=-VI\cos\{180^\circ-(30^\circ+\theta)\}$$
$$=+VI\cos(30^\circ+\theta)$$
$$=VI(\cos30^\circ\cos\theta-\sin30^\circ\sin\theta)$$
$$\therefore\ W=W_1+W_2=2VI\cos30^\circ\cos\theta=\sqrt{3}\,VI\cos\theta$$

即ち此の式で表はされた通り此の積算電力計は負荷の全電力を積算し得ると云ふ事が知れるのである。

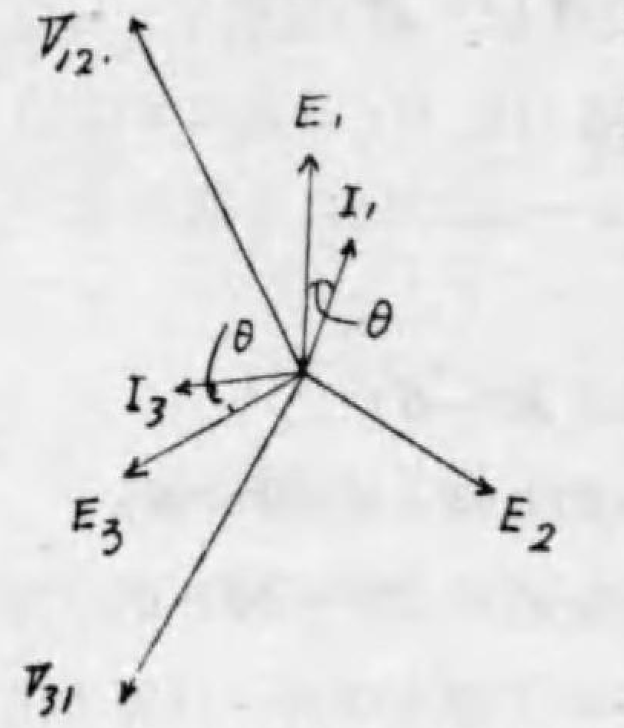


第 1 1 9 圖

例11. 積算電力計の接續を誤りて第119圖の如く接續した場合には此の積算電力計は如何なる電力を指示するか、又若し此の場合負荷の力率が夫々$\frac{\sqrt{3}}{2}$及び$\frac{1}{2}$なる場合には如何なる電力を指示するか。

解 先づ第120圖の如くベクター圖を書いて見る。上部の電壓線輪にかゝる電壓はE_1よりE_2をベクター的に引いたものであるからV_{12}の如き電壓となり下の電壓線輪にかゝる

電壓は E_3 より E_1 をベクター的に引いた V_{31} の如き電壓となる。從つて上と下の積算電力計の廻轉は夫々次の式で示す電力による。



第120圖

$$W_1 = V_{12}I_1\cos(30^\circ+\theta)$$
$$= VI(\cos30^\circ\cos\theta-\sin30^\circ\sin\theta)$$
$$= VI\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2}VI(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)$$
$$W_2 = V_{31}I_3\cos(30^\circ+\theta)$$
$$= VI\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$\therefore\quad W_1+W_2=\frac{1}{2}VI(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)$$
$$=VI(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)$$

即ち $VI(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)$ ワットとなる。次に力率が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ なる場合には此の積算電力計は次の數字を表す。

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\quad\theta=30^\circ$$
$$\therefore\quad W_1+W_2=VI(\sqrt{3}\cos30^\circ+\sin30^\circ)$$
$$=VI\left(\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=VI\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=2VI\ \text{ワット}$$

即ち1時間には $2VI$ ワット時指示する譯である。次に力率が $\frac{1}{2}$ の場合の電力は次の通りになる。

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad\theta=60^\circ$$
$$\therefore\quad W_1+W_2=VI(\sqrt{3}\cos60^\circ+\sin60^\circ)$$
$$=VI\left(\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}VI\ \text{ワット}$$

第八章　記號式ベクター

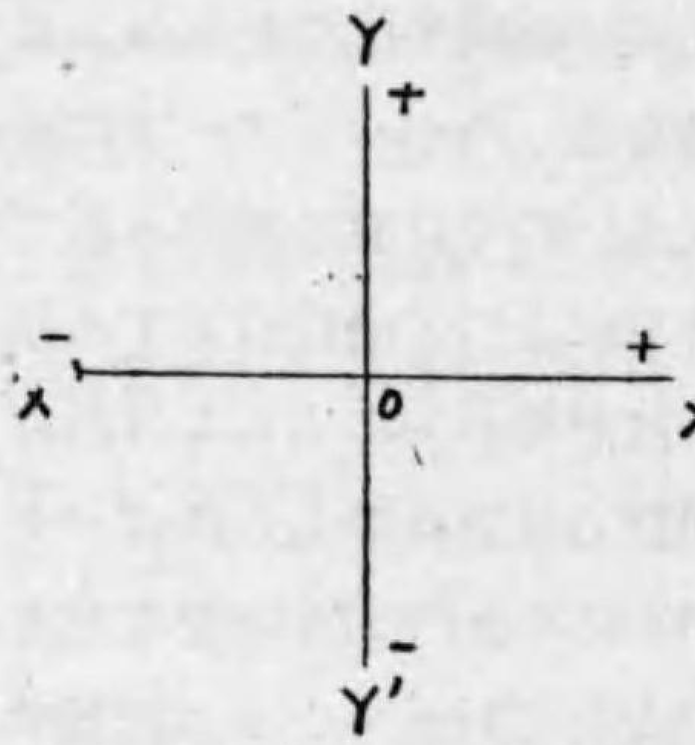
1.　緒　　言

直流は常に方向が一定であつて電流にしても電壓にしてもその大きさは變るけれどもその方向が變るやうな事はない。交流になるとインダクタンスのために電流が電壓より遲れたりキヤパシチーのために進んだりしてその方向も一定ではない。方向が一定であれば何の造作もなく算術や代數で回路の計算も出來るけれども交流のやうに方向が變つて呉れては一寸面倒である。此の數量と共に方向をも持つて居る電流や電壓を取扱ふには前に述べたベクターが最も便利である。所がベクターでは直接電流や電壓の計算を行ふ事が出來ないので計算の補助としてのみ役立つものである。尤も圖形計算によつて直接計算する事も出來る事は出來るけれども一般には計算の力によらなければ正確に出て來ない。特に複雜なる回路の計算にでもなればベクターばかりでは計算出來ない場合がある。かう云ふ不便な點を除くためにベクターをそのまゝ式で表して行かうと云ふ**記號式ベクター法**（Symbolic methode シムボリック メソッド）なる方法が用ひられる。直流回路を解くにはキルヒホッフの法則と云ふ便利な法則があつて複雜なる回路でも簡單に解決する事が出來るものであるが交流に於ても此の記號式ベクター法を使用すると此のキルヒホッフの法則が適用せられ非常に便利である。記號式ベクターを使用すると計算式そのものが方向と大きさとを示すもので之を應用して交流の回路を計算すれば最も便利である。交流理論の計算に當つては此の記號式ベクターを使用す

事が最も多く少し複雑なる回路には此の方法を使用するのが普通である。此の記號式ベクターと云ふのは大して難しいものではなくその理窟さへはつきり知るならば自由に應用する事が出來その應用範圍は頗る大きい。

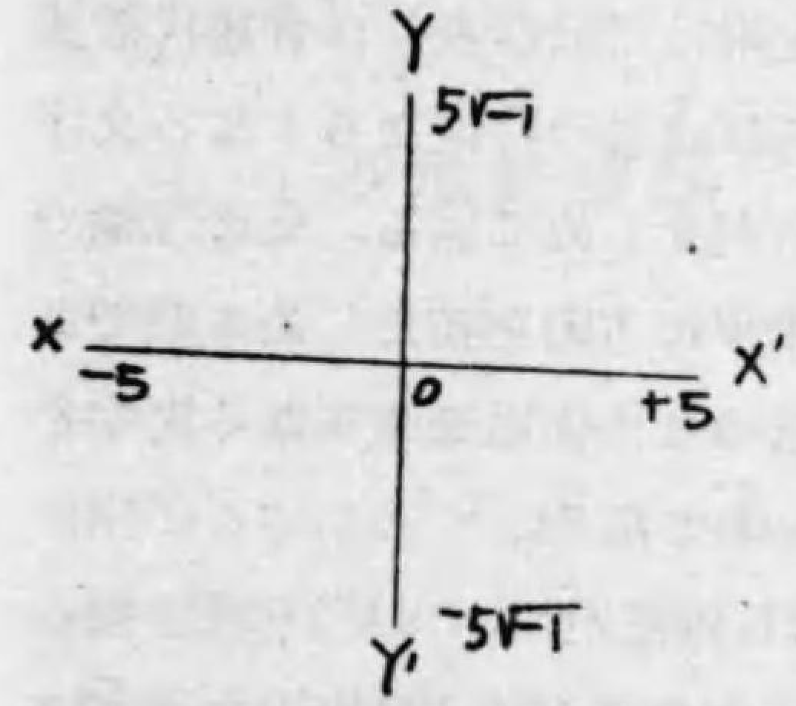
2. 數字の方向

普通の數字は方向を持つては居ない。所が數はプラス即ち正ばかりに限つたものでなくマイナス即ち負もやはり數である。此のプラス即ち正とマイナス即ち負とを考へに入れゝば數字に方向を持たす事が出來る。例へば第121圖(甲)の如く横にXX′の線を引き、縱にYYの線を引いて見て此の二つの線の交點をOとして見る。今此のO點を零の點としてXX′軸の右側、即ちX′の方向を+即ちプラスの方向として見ると左側のXの方向は−即ちマイナスの方向となる。從つて +5と云へば OX′ の上にあり、−3と云へばOXの上にあつて方向を持つ事になる。又縱軸の方でもさうである。今上方のOYの方向をプラスとすればOY′の方向はマイナスとなる。從つて縱軸の方向で +4と云へばOYの上にあり、−2と云へばOY′の上にあつて夫等の方向と大きさとを圖上に表す事が出來る。所が單に +5と云へば横軸の上にあるものやら縱軸の上にあるものやらさつぱりわからない事になる。此の意味からして横軸と縱軸とはその符號を變へて置か



第 1 2 1 圖 (甲)

なければならない。今或る數例へば +5なら +5に −1を乘ずるとするならば −5となつて來る。+5から −5になるとすれば第121圖(乙)に於ても明かな通りその方向を180度廻轉したと云ふ事になる。所がOX′からOY に90度廻轉したならばどうなるかと云ふ事が知れゝばYY 上の位置の符號も定まる譯である。今 +5より −5に到る間を考へて見ると180度廻轉して居るのであるから此の180度廻轉する事は90度廻轉するのを二度やれば +5より −5に廻轉出來る筈である。所が$\sqrt{-1}$と云ふものを考へて見ると此の$\sqrt{-1}$と云ふ數は之を二乘すると$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$ となりて結局180度廻轉したのと同じになる。從つて90度廻轉せしめやうと思へば$\sqrt{-1}$を乘ずれば良いと云ふ事になり、180度廻轉せしむるには$\sqrt{-1}$を乘じたものに更に$\sqrt{-1}$を乘じて結局 −1を乘じたものにすれば良い譯である。從つて第121乙圖に示して居る通りOX′の方向は+を數字の前に附けてその方向を表し、OY の方向は數字に$+\sqrt{-1}$を乘じ OXの方向は數字に−を附け OY′の方向は數字に$-\sqrt{-1}$を乘じて表せば良いと云ふ事になる。



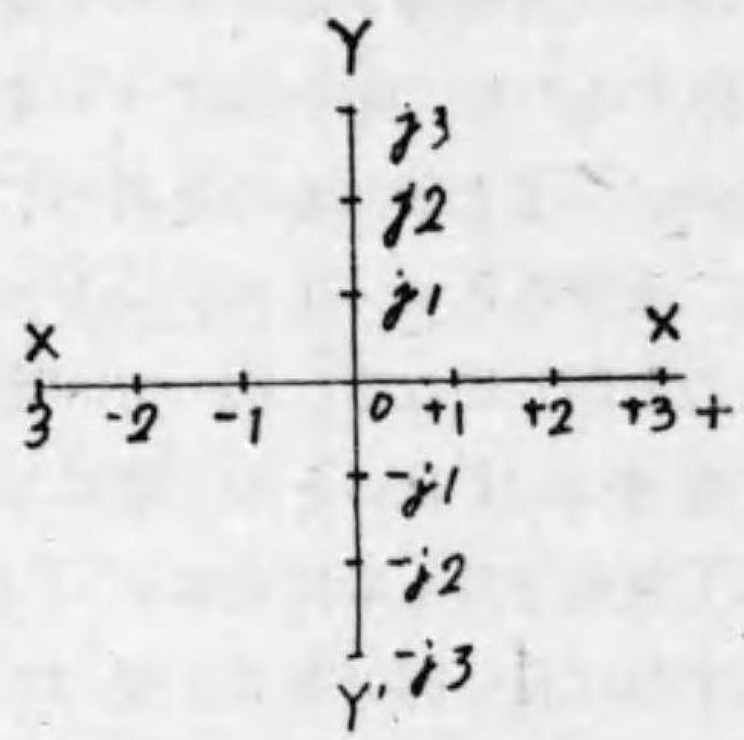
第 1 2 1 圖 (乙)

3 $\sqrt{-1}$ とは何か

是で OX′上は+を、OX上は−を、OY上は$+\sqrt{-1}$を、OY′上は$-\sqrt{-1}$をつけてその方向を表せば良いと云ふ事が知れた

譯であるが、此の$\sqrt{-1}$と云ふものは何かと云へば代數では之を**虚數**（Imaginary Number イマジナリー ナムバー）と稱へて居て實際では有り得ない數である。代數でも此の虚數は實數ではないのであるから i なる符號を附けて云ひ表し、普通代數式に$\sqrt{-1}$なる數字が出て來たならば虚數の符號たる i なる文字に入れ換へて此の i なる文字で代表せしめて居る。交流理論でも此の$\sqrt{-1}$なる數を使用して數字に方向を持たしめるのであるが代數と同樣に此の$\sqrt{-1}$をそのまゝ使用せず j なる文字を用ひ之に$\sqrt{-1}$なる數を代表せしめて居る。

此の j なる符號によつて第 121 圖乙の XX′YY′ を書き換へて見ると第 122 圖の如くなり數の方向は圖の如き符號によつて表す事が出來るものである。先づ +3 の位置を90度廻轉せしめようと思へば 3×j となり +j3 の位置に來る。次に此の j3 の位置を更に 90 度廻轉せしめようとすれば此の j3 に更に j を乘ずれば良い譯で



第 1 2 2 圖

$$j \times j3 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times 3 = -3$$

となり −3 の位置に來る。更に此の −3 に j を乘ずれば −j3 となり再び90度廻轉する。此の −j3 に更に j を乘ずればまた90度廻つて來て元の +3 に逆戻りする譯である。かくの如く j を乘ずると云ふ事は90度位置を變へると云ふ事を表すもので、3 の數と j3の數とは90度その位置を變化して居ると云ふ事を示す

ものである。交流理論に於てはインダクタンスがあれば90度電流が遅れキヤパシチーがあれば90度進むものであるから此の j なる文字を利用してそのベクターの大きさと方向とを式に書き表すものである。

4. j の加減乘除

j 卽ち$\sqrt{-1}$を附して計算する場合に之が加減乘除を充分知つて置かなければならないが、是は別に面倒な事ではなく j が如何なるものかと云ふ事が知れた以上は容易に行ふ事が出來る。先づ加法について述べると此の j なる符號を第 122 圖の YY′ 軸上にあると云ふ事を示すだけのものであるから此の上にあるものはいくらでも直接に加へ得るものである。從つて如何に多數の數があらうとも普通の算術や代數で行ふ加法と同樣に加へ合せば良い譯である。今例として j5, j3, j0.5 を加へ合せて見ると次の通りになる。

$$j5 + j3 + j0.5 = j8.5$$

皆虚數の符號卽ち j の附いて居るものは上の如く普通に加へ合せて計算する事が出來るけれども實數と虚數符號の附いて居るものとは一緒に加へ合す譯には行かない。此の場合は實數と虚數符號のものとは別々に計算するのであつて、例へば次の如き數字があるとすれば實數と j のある數とを夫々別々に加へ合すのである。

$$j4 + 5 + j2 + 4.5 + j3.5 = 5 + 4.5 + j(4 + 2 + 3.9) = 9.5 + j9.5$$

次に減法であるが、是も加法と同樣であつて j の符號のあるものは夫々引いて行けば良い譯である。例へば次の如き例題を解いて見ると加法の場合と同樣になる。

$$j18-j3.5-j6-j5.5=j(18-3.5-6-5.5)=j3$$

又 j の符號のあるものと實數とは一緒になし得ない事は加法の場合と同樣であつて例を擧げて解いて見ると次の通りである。

$$j16+7-j5-4-j7.5+6-j8.5$$
$$=7-4+6+j(16-5-7.5-8.5)=9-j5$$

次に乘法を述べて見る　是は當り前に掛け合はしさへすれば良い譯で j と j を掛け合はせば$\sqrt{-1}$と$\sqrt{-1}$とを掛け合す事になるので$\sqrt{-1}$の二乘になり結局 -1 となる。又他の實數と j とを掛け合す場合、例へば 5 に j を掛け合すと j5となる。是は掛け合す數が如何に多くても次々に掛け合はして行けば良い譯で二三の計算例を擧げて見ると次の通りである。

例 1.　$j5\times j=5\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-5$

例 2.　$j5\times 8=j\times 5\times 8=j40$

例 3.　$j3\times j2\times 5\times j6\times 3=\sqrt{-1}\times 3\times\sqrt{-1}\times 2\times 5$
$\times\sqrt{-1}\times 6\times 3=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times 540$
$=-\sqrt{-1}540=-j540$

例 4.　$j4\times 5\times 0.4\times j2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times 4\times 5\times 0.4\times 2$
$=-1\times 16=-16$

次に除法を述べて見る。今 j を j で割るならば明かに 1 である。從つて j4 を j2 で割れば 2 と云ふ數が出て來る。又 j のある數字を實數で割る場合も同樣に除して行けば良い譯で今夫等の例として次に二三の計算を行つて見る。

例 1.　$j4\div j1=\frac{j4}{j1}=4$

例 2.　$j6\div j3=\frac{j6}{j3}=2$

例 3.　$j8\div 2=\frac{j8}{2}=j4$

例 4.　$(6+j9\ \div 3=\frac{6+j9}{3}=2+j3$

例 5.　$(8+j4)\div 2=\frac{8+j4}{2}=4+j2$

次に j の附いて居る數で實數を除する場合は除せられる數を分子に置き、除す數を分母に置くのであるが、此の場合分母に虛數をそのまゝ置いて置くと云ふ事は餘り感心しない事である。かう云ふ場合には一般に分母の虛數を實數に直すものであつてそれがために分子に虛數が無い場合でも分母を實數にしたために分子に虛數を生ずる事が多い。分母の虛數を實數に直すには分數の分母と分子とに j を乘ずれば良い譯である。例へば次の計算を行ふ場合に分母の虛數を實數に直すには分數の分母と分子とに j を掛ければよい。

例 1.　$5\div j2.5=\frac{5}{j2.5}=\frac{5\times j}{j2.5\times j}=\frac{j\times 5}{\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times 2.5}$
$=\frac{j5}{-2.5}=-j2$

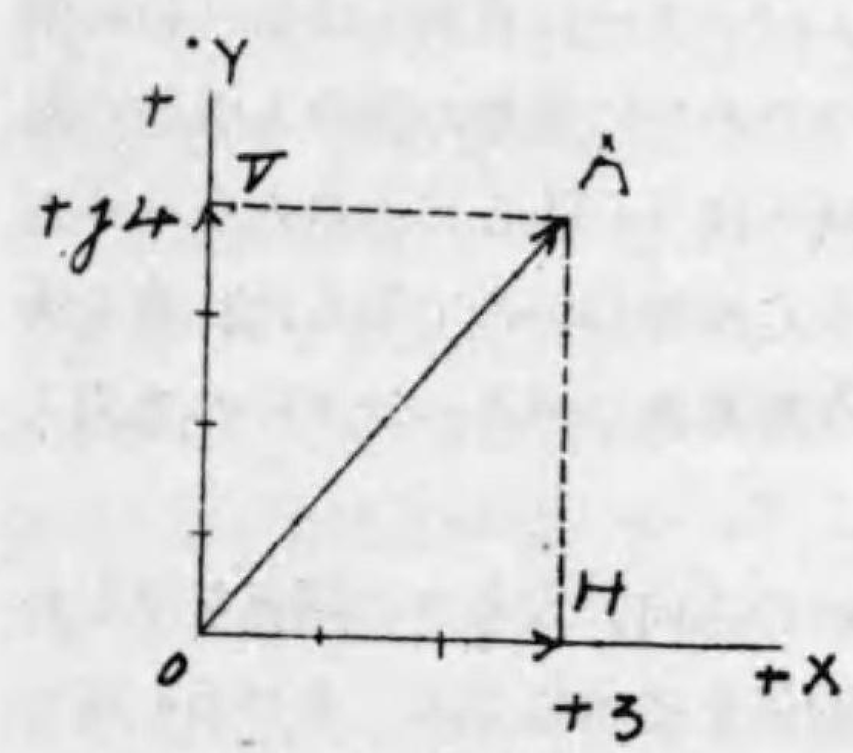
例 2.　$(6+j9)\div j3=\frac{6+j9}{j3}=\frac{j(6+j9)}{j3\times j}$
$=\frac{j6+\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times 9}{\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times 3}$
$=\frac{j6-9}{-3}=\frac{9-j5}{3}=3-j2$

例 3.　$(8-j6)\div j2=\frac{8-j6}{j2}=\frac{j(8-j6)}{j2\times j}=\frac{j8-\sqrt{-1}\sqrt{-1}6}{\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times 2}$
$=\frac{j8-(-6)}{-2}=\frac{j8+6}{-2}=-3-j4$

5. 複 素 數

我々が平生使用して居る數は實數であるが此の實數の外に負數を根で開いた虚數のある事を前節に述べたのである。此の實數と虚數を組み合せたものを**複素數**（Complex Number コンプレツクス ナムバー）と呼ばれて居る。交流理論の記號式ベクター法に使用せられるものは此の複素數であつてどんな形を持つて居るかと云へば實數と虚數との組み合せであるから、例へば $3+j2$ と云ふ風な形である。之を一般の形で書き表すと $a+jb$ と云ふ形であつて a も b も實數であるが b の前には虚數の符號が附いて居るので jb なる項は虚數を示すと云ふ事になる。此の複素數の中で a は實數であるからその方向は前節に示した通り水平の方向、即ち XX' の方向を取る事になり、jb は虚數であるから縦軸の方向、即ち YY の方向を取るのである。

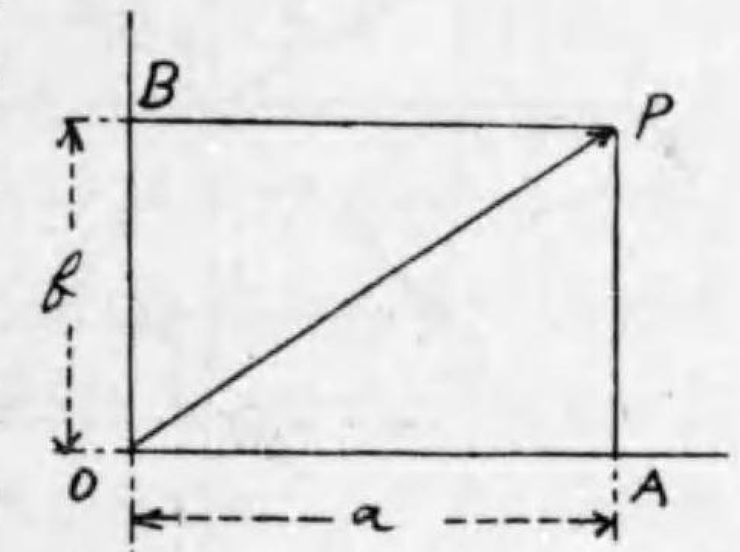
然らば複素數 $a+jb$ は如何なるものであるかと云ふ問題になるが、此の複素數と云ふものは任意の方向のベクターとその大きさとを表すものである。實數は水平の方向を表し、虚數は垂直の方向を表すのであるから、此の二つを組み合はしたならば當然如何なる方向のベクターでも示し得る事になる筈である。今假りに $3+j4$ と云ふ複素數があるとする。此の $3+j4$ と云ふ複素數は 3 と云ふ實數と $j4$ と云ふ虚數との組み合せであつて此の複素數の表すベクターを圖に書いて見ると第 123 圖の通りになる。先づ實數 3 に相當する長さに水平距離 OH を取る。次に $j4$ は虚數であるから縦に 4 に相當する距離 OV を取る。H より OH に垂線を立て、V より OV に垂線を立て二つの垂線の交點を A とする。A と O とを結んだ線 OA ベクターは實數 3 と虚數



第 1 2 3 圖

$j4$ とをベクター的に加へ合せたもので、云ひかへれば OH と OV とのベクター的和である。$3+j4$ と云ふ複素數は圖の OA ベクターを表すものであつて實數 3 と虚數 $j4$ のベクター的和を表したのである。一般に $a+jb$ と云ふのは實數 a と虚數 jb とのベクター的和で結局此の複素數はベクターを示すものである。

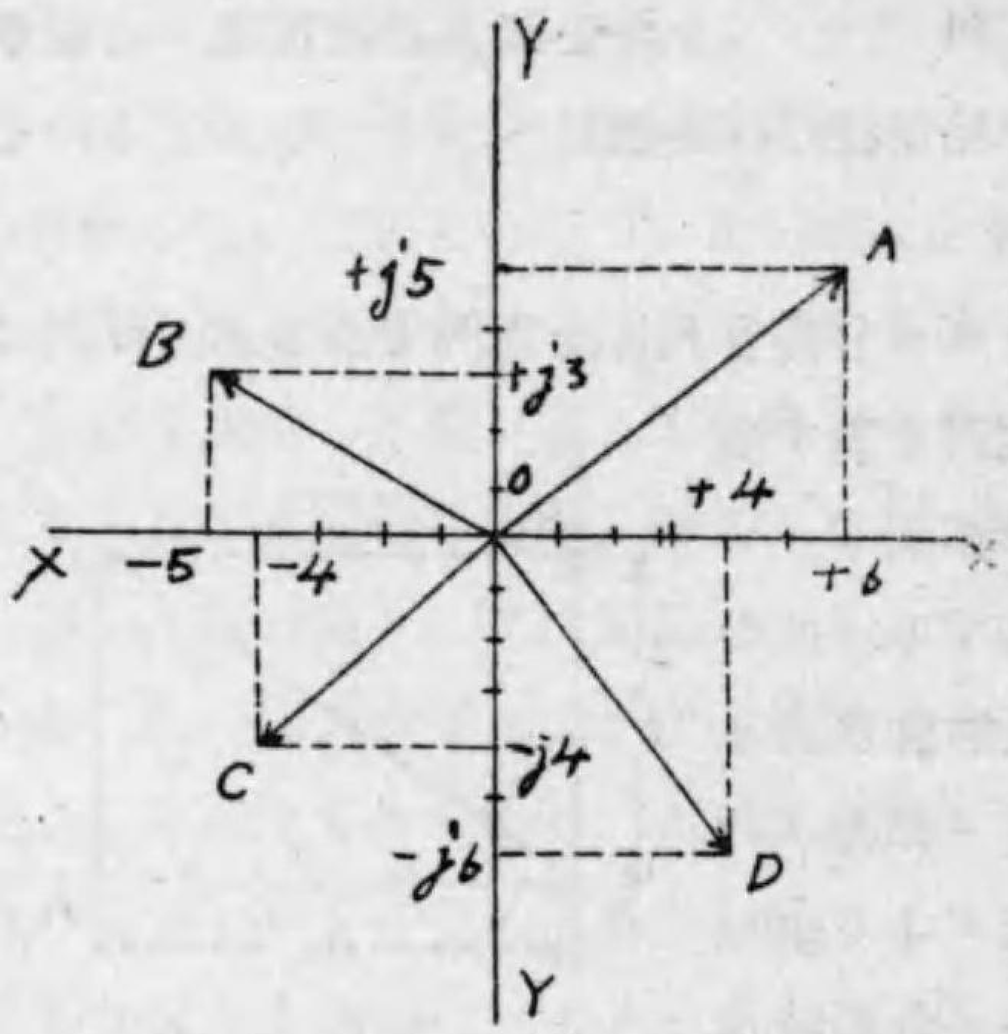
是は複素數よりベクターを書き表した實例であるが、反對にベクターより複素數を書き表す事も出來る。今第 124 圖に於て OP なるベクターがあるとする。此の OP なるベクターを複素數で書き表して見る。先づ P より横軸 OX に垂線 PA を下す、又 P より縦軸 OV に PB を下して見る。此の時水平距離 OA を a で表し、垂直距離 OB を b で表すとすれば OP なるベクターは $a+jb$ なる複素數で表し得ると云ふ事になる。從つて $a+jb$ と云ふ複素數は OP なるベクターに書き直す事が出來ると同時に OP なるベクターより複素數を作り出す事も出來る。複素數はベクターの大きさとその方向とを式によつて示し出したものであつて、その大きさが同じであつても方向が違つて居れば複素數の形も違つて來



第 1 2 4 圖

る。大きさが同じで方向の違ふベクターは實數と虚數の前に附いて居る符號が異つて來るものであつて實數の部分と虚數の部分との絶對値は異ならない。例へば 5+j4 と云ふのと 5−j4 と云ふ複素數とはその大きさは全く相等しいのであるけれども方向が違つたベクターである。今複素數の形とベクターの方向との關係を圖によつて示して見よう。

第 125 圖は複素數とベクターの方向、大きさの關係を示したもので今此の圖によつてその關係を述べて見る。先づ 6+j5 と云ふ複素數を圖示して見ると、此の數の實數は +6 であるから水平軸 OX の方向に 6 を取り、虚數は +j5 であるから垂直軸の OY の方向に +j5 を取る。此の +6 と +j5 との線をベクター的に合成すると OA のベクターが得られる。此の OA が 6+j5 のベクターを示すものであつて此の OA は OX 軸と OY 軸との間の空間にある。此の空間の事を第一象限と呼んで居る。從つて a+jb と云ふやうな複素數のベクターは第一象限にある。次に −5+j3 と云ふやうなベクターは實數がマイナスで虚數がプラスであるから、圖に於て −5 の點と +j3の點とをベクター的に加へ合せたベクターに



第 1 2 5 圖

なる。此のベクターは OBに示すものとなり OXとOYとの間の空間にある。此の空間を第二象限と呼び從つて − a+jb と云ふやうな複素數のベクターは第二象限にある事となる。同様にして −4−j4 と云ふやうなベクターは實數も虚數も皆マイナスであるからして此の複素數のベクターは OC の通りになる。此の場所を第三象限と呼び、從つて −a−jb の如き複素數のベクターは第三象限にある。又 +4−j6 の如き複素數のベクターは ODの如くなり。此の空間を第四象限と呼んで居るので+a−jb と云ふやうな複素數のベクターは第四象限にあると云ふ事になる。

6. 複素數の大きさ

複素數は夫自身が已にベクターの方向と大きさとを指示して居るものであるが複素數の形だけではつきりその大きさを知る譯に行かない。例へば (70+j50) ヴォルトと云つて見た所が何ヴォルトになるか一寸見當がつかない。記號式ベクター法で計算するとその答は殆んど複素數で出て來るので之を實數に直さなければ實際の電壓なり電流なりが出て來ない。然らば複素數を實數に直すには如何なる方法を取るかと云へば第 124 圖に示したベクター圖で知れる通り OP なるベクターの大きさを知れば良い譯である。第 124 に於ける OP の長さを計算するには $\sqrt{a^2+b^2}$ を以て行ふのである。此の OP なるベクターは之を複素數で表すと a+jb であるから結局複素數を計算するには次の式で行ふ。

$$a+jb=\sqrt{a^2+b^2}$$

從つて 3+j4 と云ふ複算數の計算は次の通りになる。

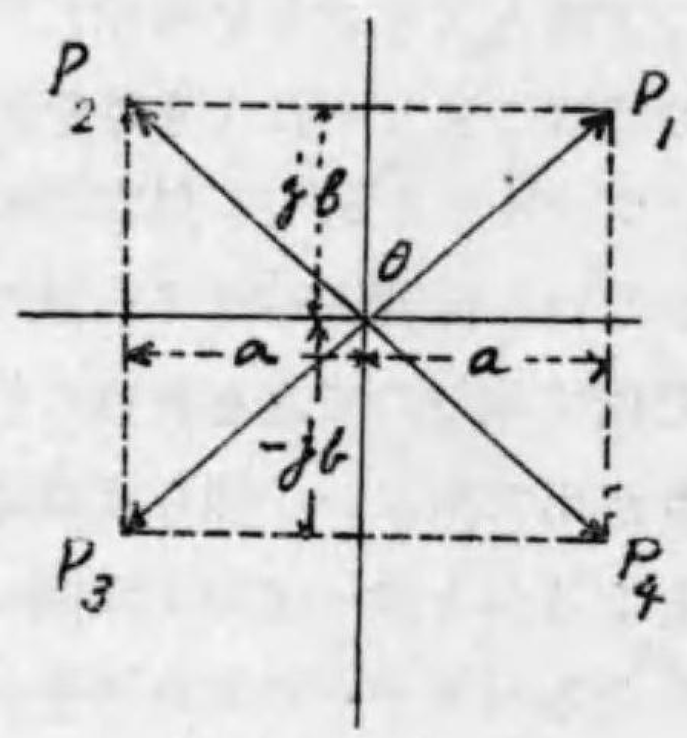
$$3+j4=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

つまり 3+j4 と云ふ複素數を計算して見ると5となる。又第124圖に於て水平軸OAとベクターOPとの間の角をθとし、此の角を計算するには次の式を以て行ふ。

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

此の二式は交流理論で位相角を見出す式であつて力率は$\cos\theta$で表すものである。今述べた例はベクターが第一象限にある場合であるが第二象限第三象限にある場合はどうなるかと云へば是も第一象限の場合と同様に行ふ事が出來る。第126圖に於て第一象限にあるOP_1は前にべた通り$\sqrt{a^2+b^2}$の大きさを持つて居るが第二象限にあるOP_2のベクターもその大きさは同じく$\sqrt{a^2+b^2}$である。又第三象限にあるOP_3も第四象限にあるOP_4も圖によつて明かなる通り是亦$\sqrt{a^2+b^2}$の大きさを持つて居る。從つて是等を式に示して見ると次の通りになる。



第126圖

$$OP_1=a+jb=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$OP_2=-a+jb=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$OP_3=-a-jb=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$OP_4=a-jb=\sqrt{a^2+b^2}$$

是等の式によつて第125圖に示したOA, OB, OC, OD の四つのベクターを計算して見ると次の通りである。

$$OA=6+j5=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{36+25}=7.8$$

$$OB=-5+j3=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{25+9}=5.83$$

$$OC=-4-j4=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{16+16}=5.65$$

$$OD=4-j6=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=7.2$$

是等の複素數を字で表すにはその字の頭に點を打ち複素數で表して居ると云ふ事を意味せしむるのである。例へば a+jb と云ふ複素數をPなる字によつて表す場合には$\dot{P}$と云ふ字によつて表すものである。此のPなる字に點を打たないで單にPとする時にはその大きさを表すもので、點を打つて$\dot{P}$とした複素數を表すものと單にPとしたものとの區別をはつきりして置かねばならない。例へば第125圖のOAなるベクターをPと云ふ字で表して見ると之に點を打つて$\dot{P}$とすれば6+j5なる複素數を表し、單にPとした場合には7.8を表すものである。交流理論の記號式ベクター法では電壓を表すのに$\dot{V}$なる文字を用ひ、電流を表すのに$\dot{I}$なる文字を又インピーダンスを表すのに$\dot{Z}$なる文字を用ひて居るが是はベクターと同樣に方向をも意味する複素數で表して居ると云ふ事を示したものである。

7. 複素數の加減法

複素數と複素數とを加へ合はす方法は既に前に述べた所であつて此處では單にその練習とベクターの大きさとを示す事にとどめる。今一般の例としてその計算の仕方を示して見る。先づ a+jb と c+jd とを加へて見る。

$$a+jb+c+jd=a+c+j(b+d)$$

複素數を加へ合はす方法は上式によつて行ふ事が出來るが、その大きさを示すにはどんな計算をすればよいかと云へば次の

式の通りである。

$$\{a+c+j(b+d)\}の大きさ=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

今例を擧げて計算して見る。例へば $4+j3$ と $5+j4$ と $7+j5$ とを加へ合はし、同時にその大きさを實數で表はして見る事とす。

$$4+j3+5+j4+7+j5=4+5+7+j(3+4+5)=16+j12$$

此の和の大きさ$=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{400}=20$

次に差の場合も同様である。例へば $a+jb$ より $c+jd$ を引けば次の如くなりその大きさも同様に表はす事が出來る。

$$a+jb-c-jd=a-c+j(b-a)$$

此の大きさ$=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

今例として $17+j8$ より $6+j5$ と $3+j7$ と引いた場合の計算をやつて見る。

$$17+j8-(6+j5)-(3+j7)=17+j8-6-j5-3-j7$$
$$=17-6-3+j(8-5-7)=8-j4$$

かくて計算が出來るが、此の場合のベクターの大きさを計算して見ると次の通りである。

$$8-j4=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$$
$$=\sqrt{5\times16}=4\sqrt{5}=8.95$$

次に多數の和や差が一時に存在する場合の計算をやつて見よう。先づ $14+j8$ より $9+j10$ を引き之に $5.3+j2$ と $6.7-j4$ を加へ之より $5-j7$ を引き更に $-7-j4$ を加へた場合の合計を求めて見る。

$$14+j8-(9+j10)+5.3+j2+6.7-j4-(5-j7)-7-j4$$
$$=14+j8-9-j10+5.3+j2+6.7-j4-5+j7-7-j4$$
$$=14-9+5.3+6.7-5-7+j(8-10+2-4+7-4)$$

$$=5-j1$$

結局之だけの複素を加へると $5-j1$ となり、此の $5-j1$ の大きさを計算して見ると次の通りになる。

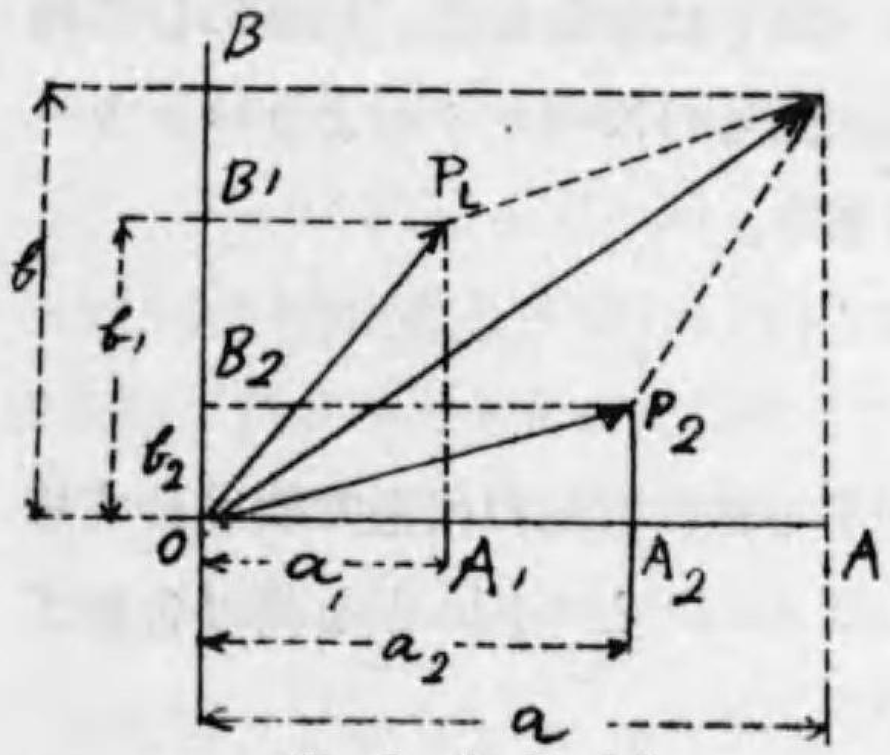
$$大きさ=5-j1=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}=5.1$$

複素數はベクターと同じく方向と大きさを持つて居るので複素數を加へ合はすと云ふ事はベクターを合成するのと同じ意味である。

8. 複素數を加へる意味

複素數は大きさと共に方向をも加味して居るので、前に述べた通り複素數を加へたり引いたりする事は、ベクターを加へたり引いたりする意味と全く變らない。此處でその理由を一寸述べて見る。今 a_1+jb_1 と云ふ複素數と a_2+jb_2 と云ふ複素數とを加へて見る。此の場合に計算によつて此の二つの複素數を加へて見ると前の方法によつて次の如く計算が出來る。

$$a_1+jb_1+a_2+jb_2=a_1+a_2+j(b_1+b_2)$$



第 1 2 7 圖

次に a_1+b_1 はどんなベクターかと云へば、第127圖の如く水平軸に a_1 の長さを取り縦軸に b_1 の長さを取つたベクター OP_1 に相當する。次に a_2+jb_2 のベクターは水平軸に a_2 の長さを取り縦軸に b_2 の長さを取つたベクター OP_2 に相當する。

今此の OP_1 のベクターと OP_2 のベクターとをベクター的に合成

して見ると、第127圖に表した通りOPのベクターが得られる。此のOPのベクターは之を複素數で表はすと次の通りになる。

$$OP=a+jb$$

此處に於てa及びbなる長さは圖に示したものであつて此のa及びbの大きさを調べて見る。第127圖によつて見られる通りOA_1がa_1に等しく、OA_2がa_2に等しいのであつてOPはOP_1とOP_2のベクター的合成和であるからA_2とAとの間はa_1に等しい事になる。同様にして縦軸の方に於てもB_1とBとの間の長さはb_2に等しくなる。從つてa_1とa_2との長さの和はaに等しくなり、b_1とb_2との長さの和はbに等しくなる。之よりして次の式が成立する。

$$a_1+a_2+j(b_1+b_2)=a+jb$$

此の式で知れる通りOP_1のベクターとOP_2のベクターとをベクター的に合成したOPベクターは結局a_1+jb_1の複素とa_2+jb_2の複素數との和のベクターに等しくなると云ふ事になる。從つて複素數と複素數とを加へ合すと云ふ事はベクターとベクターとをベクター的に合成するのと同じ結果となる。同様にして複素數より複素數を引いた差と云ふものはベクターよりベクターを引いたものに等しいものである。

9. 複素數の乘法

複素數と複素數とを掛け合す方法は普通の代數で掛け合す場合と殆んど同じである。例へば$a+jb$と$c+jd$とを掛け合はす場合の例を計算して見る。

$$(a+jb)(c+jd)=ac+jbc+jad+jjbd$$
$$=ac+jbc+jad-bd=ac-bd+j(bc+ad)$$

此の計算に於て見られる通り並通の掛け算と異る所はjjなる積が出て來る事であつて此のjjなる積は$\sqrt{-1}$と$\sqrt{-1}$とを掛け合したものであつて$\sqrt{-1}$の二乘となり結局-1となる。從つてjjなる數が出て來たならば直ちに此のjjの代りに-1を置けばよい譯である。複素數の積を求める場合に最後に出て來た答は實數部分と虚數部分とに集めなければならない。次に此の掛け合した複素數のベクターは水平軸と如何なる角度をなして居るかと云へば、例へば$(a+jb)(c+jd)$と水平軸との角度をθとすれば前の例を解いた答から$\tan\theta$及び$\cos\theta$は次の通りになる事を知るのである。

$$\tan\theta=\frac{bc+ad}{ac-bd}$$

$$\cos\theta=\frac{ac-bd}{\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad^2)}}$$

次に此の例の大きさを實數で求めて見ると次の通りである。

$$(a+jb)(c+jd)\text{の大きさ}=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$$

今之に對して數を入れて見てその結果を求めて見る。例へば$(4+j8)(6-j4)$の積を求めて見る。

$$(4+j8)(6-j4)=24+j48-j16-jj32$$
$$=24+j32+32=56+j32$$

次に此の複素數を掛け合して出て來た複素數の大きさと水平軸となす角度θとを求めて見る。

$$(4+j8)(6-j4)\text{の大きさ}=56+j32=\sqrt{56^2+32^2}=64.5$$

次に$\tan\theta=\dfrac{32}{56}=0.57$

故に三角函數表より　$\theta=29°40'$

又　$\cos\theta=\dfrac{56}{\sqrt{56^2+32^2}}=\dfrac{56}{64{,}5}=0.869$

故に三角函數表より θ を求めると前と同樣に 29°40′ となる。

10. 複素數の除法

複素數を以て實數を割つたり素複數を割つたりするには除數を分母に除せられる數を分子に置けばよい。所が j の附いて居る虚數を分母に置くと云ふ事は餘り感心しない。分母だけは實數に直して置かなければならない。分母を實數に直すと云ふ場合に分母に a+jb なる數があるとすればその分母を $\sqrt{a^2+b^2}$ と直して實數にしてはならない。複素數を複素數で割ると云ふ事はベクターをベクターで割ると云ふ事であつて、$\sqrt{a^2+b^2}$ と變へると分母はベクターを表はさなくなるものである。然らば如何にして此の分母を實數に直すかと云ふと、之には代數の公式を用ふる。その公式は次の通りである。

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

今此の公式の b の代りに jb を入れて見ると次の通りになる。

$$(a+jb)(a-jb)=a^2-j^2b^2=a^2+b^2$$

即ち $(a+jb)(a-jb)$ と云ふ複素數の積は實數の形で表れて來ると云ふ事が知れる。此の事からして若し分母に a+jb と云ふ形の素複數があれば、分母と分子とに a−jb と云ふ複素數を掛けると分母は實數で表れて來る事になる。此の場合に此の分數には上下に同じものを掛けたものであるから何等その價に變化は起らない筈である。又分母に a−jb と云ふ形の複素數があるならば同樣に a+jb なる複素數を分母と分子とに掛け分母の虚數を實數に變へるのである。分母にある虚數を實數に變へ分母にある虚數を除く事を**有理化**すると呼んで居る。今例として 4 なる實數を 7+j5 で割つたものを有理化して見る。

$$\frac{4}{7+j5}=\frac{4(7-j5)}{(7+j5)(7-j5)}=\frac{4(7-j5)}{7^2-j^25^2}$$

$$=\frac{4\ 7-j5)}{49+25}=\frac{4(7-j5)}{74}=\frac{14-j10}{37}$$

次に複素數を複素數で割る場合も同樣であつて次に計算例を示して見よう。

$$\frac{9+j5}{6-j4}=\frac{(9+j5)(6+j4)}{(6-j4)(6+j4)}=\frac{54+j30+j36+jj20}{6^2-j^24^2}$$

$$=\frac{54+j66-20}{36+16}=\frac{34+j66}{52}=\frac{2(17+j33)}{26\times2}=\frac{17+j33}{26}$$

之を一般式で表して見ると、即ち a+jb を c+jd で割る場合と c−jd で割る場合とを示して見る。

$$\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)}=\frac{ac+jbc-jad-jjbd}{c^2-j^2d^2}$$

$$=\frac{ac+jbc-jad+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd+j(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$\frac{a+jb}{c-jd}=\frac{(a+jb)(c+jd)}{(c-jb)(c+jd)}=\frac{ac+jbc+jad-bd}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac-bd+j(bc+ad)}{c^2+d^2}$$

かくの如く分母が實數で出て來たならば、此の分數は容易にそのベクターの大きさも位相角も見出す事が出來る。

$$\frac{a+jb}{c+jd}\text{の大きさ}=\frac{\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}}{c^2+d^2}$$

$$\frac{a+jb}{c-jd}\text{の大きさ}=\frac{\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}}{c^2+d^2}$$

水平軸とベクターとなす角度を求めるには分母の大小は無關係であつて c^2+d^2 が大きくても小さくても角度に變つた所がない。從つて分子だけの複素數よりその角度は決定する。

今$\dfrac{a+jb}{c+jd}$と水平軸とのなす角度をθ_1とし$\dfrac{a+jb}{c-jd}$と水平軸とのなす角度をθ_2とすれば夫々次の關係がある。

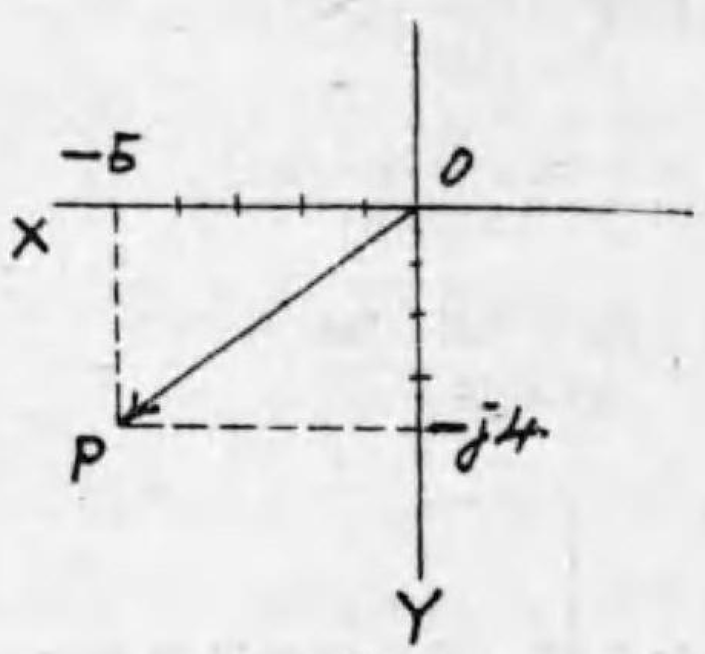
$$\tan\theta_1=\frac{bc-ad}{ac+bd}$$

$$\tan\theta_2=\frac{bc+ad}{ac-bd}$$

11. 例 題

例 1. $-5-j4$ なる複素數をベクターにて示しその長さを計算せよ。

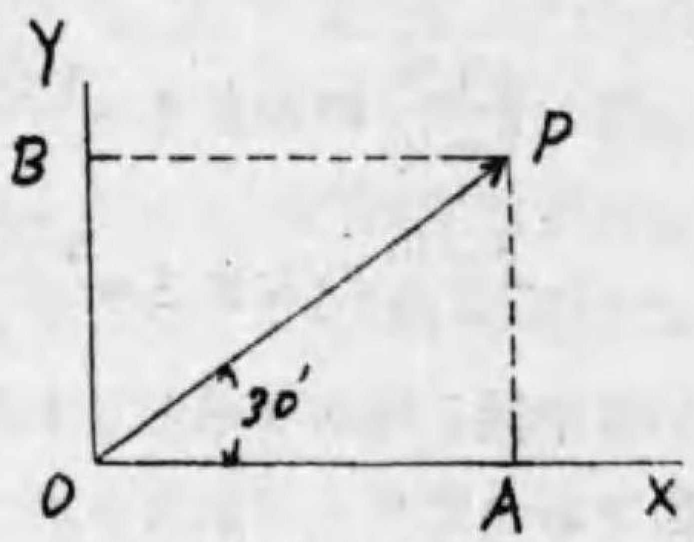
解 $-5-j4$は第128圖のベクター圖に示す通り水平軸は-5の位置に取り縱軸は$-j4$の位置に取つてその各々の點から垂線を立て交點をPとすればOPが求むる複素數のベクターである。従つてその位置は第三象限にある事になる。その長さは次の如く計算する事が出來る。



第128圖

$$長さ=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}=6.4$$

例 2. 第129圖に示すやうなベクター OP がある。此のOPなるベクターの長さは8であつて横軸OXとなす角は30度である此のOPのベクターを複素數にて表せ。



第129圖

解 $PA=BO=OP\ \sin 30°=8\times\dfrac{1}{2}=4$

$OA=OP\ \cos 30°=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6.93$

此の場合にOAは複素數の中の實數部分に相當しOBは虚數部分に相當する。今此のOPの複素數を$a+jb$とすれば上のOA, OBよりして次の如き複素數が得らる。

複素數$=a+jb$

$a=OA=6.93$　　$b=OB=4$

$\therefore$ 複素數$=6.93+j4$

例 3. 次の式を計算しその大きさを算定せよ。

$9+j4-5+j3+8-j9-3-j8$

解 $9+j4-5+j3+8-j9-3-j8$

$=9-5+8-3+j(4+3-9-8)=9-j10$

大きさ$=\sqrt{9^2+10^2}=\sqrt{181}=13.45$

例 4. $(2+j3)(4-j2)$の積を求めその水平軸となす角度と大きさを求めよ。

解 $(2+j3)(4-j2)=2\times4+j3\times4-j2\times2-jj3\times2$

$=8+j12-j4+6=14+j8$

水平軸となす角度をθとすれば

$\tan\theta=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}=0.571$

故に$\theta=29°45'$

大きさ$=\sqrt{14^2+8^2}=\sqrt{260}=16.1$

例 5. $\dfrac{6}{5-j3}$を求む。

解 $\dfrac{6}{5-j3}=\dfrac{6(5+j3)}{(5-j3)(5+j3)}=\dfrac{30-j18}{5^2-j^2 3^2}$