(2) $$Ax+By+C=0$$

ナルヲ以テ，(1)及(2)ハ同一ノ直線ヲ表ハサザルベカラズ．

$$\therefore \quad \frac{x'}{A}=\frac{y'}{B}=\frac{-r^2}{C}$$

$$\therefore \quad x'=-\frac{Ar^2}{C}, \qquad y'=-\frac{Br^2}{C}$$

【例 4】 圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=12$ ニ關スル直線 $2x+3y=6$ ノ極ヲ求メヨ．

解 所要ノ極ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ．サスレバ與ヘラレタル圓ニ關スル點 (x', y') ノ極線ノ方程式ハ，本節ノ注意 3 ニヨリテ

$$(x-1)(x'-1)+(y-2)(y'-2)=12$$

即チ (1) $$(x'-1)x+(y'-2)y=x'+2y'+7$$

ナリ．然ルニ(1)ト

$$2x+3y=6$$

トハ同一ノ直線ヲ表ハスベキヲ以テ

$$\frac{x'-1}{2}=\frac{y'-2}{3}=\frac{x'+2y'+7}{6}$$

$$\therefore \quad 3x'-3=2y'-4$$

$$\therefore \quad (2) \quad 3x'-2y'=-1$$

又 $$3x'-3=x'+2y'+7$$

$$\therefore \quad (3) \quad x'-y'=5$$

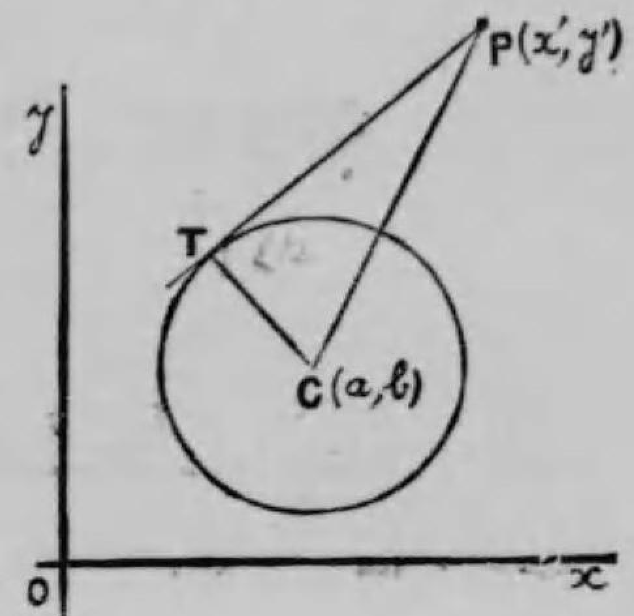
ソコデ(2)ト(3)トヨリ

$$x'=-11, \qquad y'=-16$$

ヲ得．

59. 圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 外ノ點(x', y') ヨリ此圓ヘ引キタル切線ノ長サ

圓ノ中心(a, b)ヲ C，圓外ノ定點$(x' y')$ ヲ P トシ，P ヨリ圓 C ニ引ケル切線ノ切點ヲ T トセヨ．



P 及 T ノ各ト C ヲ結ビ付ケヨ．

サスレバ

$$\angle CTP=\angle R$$

$$\therefore \quad PT^2=CP^2-CT^2=CP^2-r^2$$

然ルニ

$$CP^2=(x'-a)^2+(y'-b)^2 \quad \text{[第 5 節]}$$

$$\therefore \quad \mathbf{PT^2=(x'-a)^2+(y'-b)^2-r^2}$$

即チ圓外ノ定點(x', y')ヨリ圓$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ニ引ケル切線ノ長サノ平方ヲ表ハス式ハ，圓ノ方程式ノ常數項ヲ左邊ニ移シタル式 $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ ニ於テ x, y ノ代リニ夫々定點ノ坐標 x', y' ヲ置換ヘタル者ニ等シ．

【例】 點$(3, 4)$ヨリ圓 $3x^2+3y^2+2x+y+1=0$ ニ引ケル切線ノ長サ如何．

解 與ヘラレタル圓ノ方程式ヲ $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ ナル形ニ書キ直ス爲ニ，先ヅ其兩邊ヲ 3 ニテ割レバ

(1) $$x^2+y^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}=0$$

トナル．此式ノ左邊ハ畢竟 $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ ナル形ニ書キタル者ノ括弧ヲホドキタル者ニ外ナラズ．ソコデ(1)ノ左邊ニ於テ $x=3$, $y=4$ トオケバ所要ノ切線ノ長サノ平方ヲ得．

故ニ所要ノ切線ノ長サハ

$$\sqrt{3^2+4^2+\left(\frac{2}{3}\right)\times 3+\left(\frac{1}{3}\right)\times 4+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{86}{3}}$$

ナリ．

Never telling to anybody.

第三章　二定點ヲ通ル一群ノ圓ニ關スル性質

60. 二ツノ圓ノ交點ヲ通ル直線ノ方程式

二ツノ圓　(1)　$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

及　(2)　$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$

ガ相交ハルトセヨ.

今(1)ヨリ(2)ヲ引キテ得ル方程式

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c-(x^2+y^2+2g'x+2f'y+c')=0$$

即チ　(3)　$2(g-g')x+2(f-f')y+c-c'=0$

ノ幾何學的ノ意味ヲ考フルニ,先ヅ(3)ハ一次方程式ナルヲ以テ直線ヲ表ハス.　次ニ(1)及(2)ノ何レニモ適合スルx, yノ値ハ(3)ニモ適合スルヲ以テ,(3)ハ二ツノ圓(1)及(2)ノ交點ヲ通ル直線ヲ表ハス.

【注意1】　二ツノ圓周(1)及(2)ノ交點ノ坐標ヲ求ムルニハ,先ヅ其交點ヲ通ル直線ノ方程式(3)ヲ作リ,(3)ト(1)若クハ(2)トヲ聯立方程式トシテ之ヲ解ケバヨシ.

【注意2】　若シ二ツノ圓周(1)及(2)ガ唯一點ニ於テ出會ヘバ(即チ相切スレバ)(3)ハ(1)及(2)ノ切點ニ於テ其各ニ切スベシ.

【注意3】　タトヒ二ツノ圓周(1)及(2)ガ出會ハザルニシテ

モ直線(3)ハ存在ス.　ソコデ此場合ニ於テ(3)ノ幾何學的解釋ハ如何ニトイフニ,先ヅ(1)及(2)ヲ夫々

(4)　$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$

(5)　$(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2=0$

ナル形ニ書キ直セバ,(3)ハ結局

(6)　$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2$

ノ右邊ヲ左邊ニ移シテ同類項ヲ約シタル者ナリ.

サテ前節ニヨリ$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ハ點(x, y)ヨリ圓(4)ニ引ケル切線ノ長サノ平方ヲ表ハシ,又$(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2$ハ點(x, y)ヨリ圓(5)ニ引ケル切線ノ長サノ平方ヲ表ハス.　從テ(6)ハ直線(3)上ノ任意ノ點(x, y)ヨリ二ツノ圓(4)及(5)ノ各ヘ引ケル切線ノ長サガ相等シキコトヲ示ス.

故ニ　(3)ハ二ツノ圓(4)及(5)即チ(1)及(2)ノ各ニ相等シキ切線ヲ引キ得ベキ點ノ軌跡ヲ表ハス.

61. 根軸

定義　二ツノ圓

(1)　$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

(2)　$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$

ノ相互ノ位置如何ニ拘ハラズ,(1)ヨリ(2)ヲ引キテ得ル方程式

(3)　$2(g-g')x+2(f-f')y+c-c'=0$

ガ表ハス直線ヲ名ヅケテ，二ツノ圓(1)及(2)ノ根軸トイフ.

【注意】 二ツノ圓ノ根軸ハ此二ツノ圓ノ中心ヲ通ル直線ニ垂直ナリ.

何トナレバ (1) ノ中心ハ $(-g, -f)$ ニシテ，(2) ノ中心ハ $(-g', -f')$ ナリ，從テ中心線ノ方程式ハ

$$y+f=\frac{-f'+f}{-g'+g}(x+g)$$

ニシテ，其角係數 $\frac{f-f'}{g-g'}$ ト (3) ノ角係數 $-\frac{g-g'}{f-f'}$ トノ積ハ -1 ニ等シケレバナリ.

【例 1】 二ツノ圓

$$(1) \qquad x^2+y^2+4x+5y=6$$

$$(2) \qquad x^2+y^2+5x+4y=9$$

ノ根軸ヲ求メヨ.

解 (2)ヨリ(1)ヲ引ケバ，所要ノ方程式

$$x-y=3$$

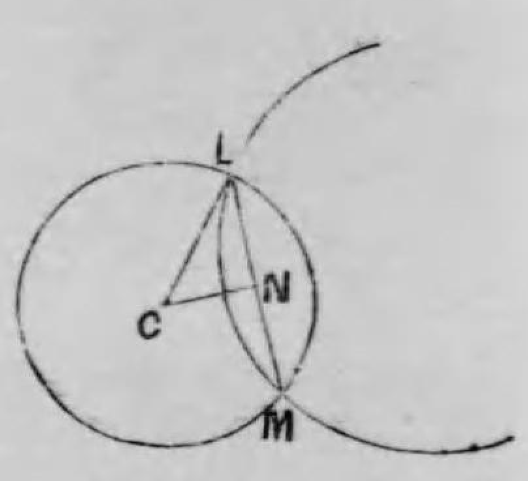
ヲ得.

【例 2】 二ツノ圓

$$(1) \qquad x^2+y^2-4x-2y-20=0$$

$$(2) \qquad x^2+y^2+8x+14y=0$$

ノ共通弦ノ長サヲ求メヨ.



解 (1)及(2)ノ交點 L, M ヲ通ル直線（卽チ共通弦ガ其一部分ナル直線）ノ方程式ハ，(2)ヨリ(1)ヲ引キタル者，卽チ

$$12x+16y+20=0$$

從テ (3) $\qquad 3x+4y+5=0$

ナリ. 圓(1)ノ方程式ヲ書キ直セバ

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25$$

トナルヲ以テ，圓(1)ノ中心 C ハ(2, 1)ニシテ其半徑ハ 5 ナリ.

サテ點 C(2, 1)ヨリ共通弦ニ下ス垂線ハ此弦ヲ二等分ス.

然ルニ點(2, 1)ヨリ直線(3)ニ下セル垂線 CN ノ長サハ

$$\frac{3\times2+4\times1+5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3 \qquad \text{[第 31 節]}$$

ナリ. 然ルニ直角三角形 CLN ニ於テ

$$CN^2+LN^2=CL^2$$

$$\therefore \qquad LN=\sqrt{CL^2-CN^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$$\therefore \qquad LM=2.LN=8$$

【例 3】 二ツノ圓

$$(1) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

$$(2) \qquad (x-b)^2+(y-a)^2=c^2$$

ガ相切スル爲ニハ c ノ値如何.

解 二ツノ圓ガ相切スルトキハ其根軸ハ兩圓ノ切點ニ於テ其各ニ切ス. [前節注意 2]，因テ一ツノ圓ノ中心ヨリ根軸ニ引キタル垂線ノ長サガ其圓ノ半徑ニ等シカラザルベカラズ.

サテ(1)及(2)ノ根軸ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(x-b)^2-(y-a)^2=0$$

卽チ $\qquad -2ax-2by+2bx+2ay=0$

$$\therefore \qquad (b-a)x-(b-a)y=0$$

$$\therefore \qquad (3) \qquad x-y=0$$

ニシテ，圓(1)ノ中心(a, b)ヨリ直線(3)ニ下シタル垂線ノ長サハ

$$\pm\frac{a-b}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\pm\frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

ナリ．而シテ此垂線ノ長サガ圓(1)ノ半徑 c ニ等シキユヱ

$$c=\frac{a-b}{\pm\sqrt{2}}$$

ナリ．

別解　二ツノ圓ガ外切スルトキハ其中心間ノ距離ハ兩圓ノ半徑ノ和ニ等シク，內切スルトキハ其中心間ノ距離ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキコト已ニ幾何學ニ於テ知ル所ナリ．

此事實ヲ用フレバ圓(1)及(2)ガ相切スル爲ニハ中心 (a, b) 及 (b, a) 間ノ距離ガ半徑 c 及 c ノ和若クハ差ニ等シキコトヲ要ス．

故ニ　(4)　$(a-b)^2+(b-a)^2=(c+c)^2$

或ハ　(5)　$(a-b)^2+(b-a)^2=(c-c)^2$

サテ(4)ヨリ　$2(a-b)^2=4c^2$

$$\therefore\quad c=\pm\frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

ニシテ前解ノ結果ニ一致ス．

次ニ(5)ヨリ　$2(a-b)^2=0$

$$\therefore\quad a=b$$

此場合ニハ二ツノ圓ハ全ク相合スルヲ以テ題意ニ適セズ，元來圓(1)及(2)ノ半徑ハ相等シキヲ以テ此兩圓ガ內切スル能ハザルコト初メヨリ知ルコトヲ得ベシ

【例4】　二ツノ圓

(1)　$x^2+y^2-12(x\sqrt{3}+y)+119=0$

(2)　$x^2+y^2=49$

ハ互ニ切スルコトヲ證明セヨ．

解　兩圓ノ根軸ノ方程式ハ(2)ヨリ(1)ヲ引キタル者，卽チ

$$12(x\sqrt{3}+y)=168$$

$\therefore$　(3)　$x\sqrt{3}+y=14$

サテ(2)ノ中心卽チ點(0, 0)ヨリ(3)ニ下シタル垂線ノ長サハ

$$\frac{14}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{14}{2}=7$$

ニシテ，丁度(2)ノ半徑ニ等シ．故ニ(3)ハ圓(2)ニ切ス，從テ(3)ハ亦圓(1)ニモ切ス．卽チ兩圓ハ互ニ相切ス．

別解　(1)ヲ書キ直セバ

$$(x-6\sqrt{3})^2+(y-6)^2=25$$

因テ(1)ノ中心ハ $(6\sqrt{3}, 6)$，半徑ハ 5；又(2)ノ中心ハ (0, 0)，半徑ハ 7 ナリ．

ソコデ兩圓ノ中心間ノ距離ノ平方ハ

$$(6\sqrt{3})^2+6^2=6^2(3+1)=36\times4$$

因テ中心間ノ距離ハ

$$\sqrt{36\times4}=6\times2=12$$

ニシテ，丁度二ツノ圓ノ半徑ノ和 5+7 ニ等シ．

故ニ此二ツノ圓ハ外切ス．

【例5】　二ツノ圓

(1)　$x^2+y^2-23x+11y=0$

(2)　$x^2+y^2-12x+11=0$

ノ共通弦ヲ直徑トスル圓ノ方程式ヲ求メヨ．

解　所要ノ圓ノ方程式ヲ

(3)　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

トセヨ．ココニ其中心 (a, b) ハ(1)及(2)ノ共通弦ノ中點ニシテ，半徑 r ハ共通弦ノ長サノ半分ニ等シ．

サテ(1)及(2)ノ共通弦ノ方程式ハ

$$11x-11y+11=0$$

從テ　(4)　$x-y+1=0$

ソコデ共通弦ノ兩端ノ坐標ヲ求ムル爲ニ(4)ト(2)トヲ聯立方程式トシテ解カン．

(4)ヨリ

$$(5) \qquad y=x+1$$

之ヲ(2)ニ代入シテ

$$x^2+(x+1)^2-12x+11=0$$

$$\therefore \qquad 2x^2-10x+12=0$$

$$\therefore \quad (6) \qquad x^2-5x+6=0$$

此方程式ヲ解ケバ共通弦ノ兩端ノ横坐標(x_1 及 x_2)ヲ得. 從テ其値ヲ(5)ニ代入シテ其點ノ縱坐標(y_1 及 y_2)ヲ得. 因テ其二點ヲ結ビ付クル線分ノ中點卽チ所要ノ圓ノ中心ノ坐標(a, b)ヲ知ルコトヲ得ベク, 又其二點間ノ距離卽チ所要ノ圓ノ直徑 $2r$ ヲ求ムルコトヲ得. ソコデ此等ノ値ヲ(3)ニ代入スレバ所要ノ圓ノ方程式ヲ得ベシ.

但シ旣ニ代數學ニ於テ知レル方程式ノ根ト係數トノ關係ヲ用フレバ簡單ニ之ヲ求ムルコトヲ得. 卽チ

$$a=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5}{2} \qquad [(6)ニヨル]$$

$$b=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2} \qquad [(5)ニヨル]$$

$$(2r)^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

然ルニ

$$y_1=x_1+1, \qquad y_2=x_2+1 \qquad [(5)ニヨル]$$

$$\therefore \qquad y_1-y_2=x_1-x_2$$

$$\therefore \qquad (2r)^2=2(x_1-x_2)^2=2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$$

$$=2(5^2-4\times 6) \qquad [(6)ニヨル]$$

$$=2$$

$$\therefore \qquad r=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

之ヲ(3)ニ代入スレバ, 所要ノ圓ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore \qquad (2x-5)^2+(2y-7)^2=2$$

$$\therefore \qquad 4x^2+4y^2-20x-28y+72=0$$

$$\therefore \qquad x^2+y^2-5x-7y+18=0$$

62. 三ツノ圓ノ中ノ二ツ宛ノ根軸ハ何レモ同一點ヲ通ル

證明 三ツノ圓ノ方程式ヲ夫々

$$(1) \qquad x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$(2) \qquad x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

$$(3) \qquad x^2+y^2+2g''x+2f''y+c''=0$$

トセヨ. 此等ノ方程式ノ左邊ヲ夫々 S, S′, S″ ニテ表ハセバ

(1) ト (2) トノ根軸ノ方程式ハ $(4) \quad S-S'=0$

(2) ト (3) トノ根軸ノ方程式ハ $(5) \quad S'-S''=0$

(3) ト (1) トノ根軸ノ方程式ハ $(6) \quad S''-S=0$

ナリ. (4),(5),(6) ノ中ノ何レカ二ツ, 例ヘバ(4)及(5)ノ何レニモ適スル x, y ノ値卽チ二ツノ根軸(4)及(5)ノ交點ノ坐標ハ(4)ニ(5)ヲ加ヘタル者, 卽チ $S-S''=0$ 卽チ(6)ニモ適合ス

因テ三ツノ根軸(4),(5),(6)ハ同一點ヲ通ル.

63. 根心

定義 三ツノ圓ノ中, 二ツ宛ノ根軸ガ相會スル點ヲ名ヅケテ此等ノ圓ノ**根心**トイフ.

【例】 三ツノ圓

$$(1) \qquad x^2+y^2+3x=0$$

$$(2) \qquad x^2+y^2+5y=1$$

$$(3) \qquad x^2+y^2+2x+2y=1$$

ノ根心ヲ求メヨ.

解 (1)ト(2)トノ根軸ノ方程式ハ

$$(4) \qquad 3x-5y=-1$$

又(2)ト(3)トノ根軸ノ方程式ハ

$$(5) \qquad 2x-3y=0$$

ソコデ聯立方程式(4)ト(5)トヲ解ケバ

$$x=3, \qquad y=2$$

ヲ得. 因テ所要ノ根心ハ (3, 2) ナリ.

64. 二ツノ圓ノ交點ヲ通ル或圓ノ方程式

二ツノ圓ノ方程式ヲ夫々

$$(1) \qquad S=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$(2) \qquad S'=x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

ナリトセヨ.

今 $\lambda=-1$ ナラズトシテ

$$S+\lambda S'=0$$

即チ

$$(3) \qquad (1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+2(g+\lambda g')x+2(f+\lambda f')y+c+\lambda c'=0$$

ナル方程式ヲ作レバ, 此方程式ノ x^2 及 y^2 ノ係數ハ同一ニシテ, 且ツ xy ヲ含ム項ハナシ. 故ニ(3)ハ一ツノ圓ヲ表ハス, 而シテ(1)及(2)ノ何レニモ適合スル x, y ノ值ハ(3)ニモ適合スルヲ以テ(3)ハ(1)及(2)ノ交點ヲ通ル或圓ヲ表ハス.

然ルニ(1)及(2)ノ二ツノ交點ヲ通ル圓ハ無數ニ多クアリ, 而シテ(1)及(2)ノ交點ヲ通ルトイフ條件ノ外ニ尙或一ツノ條件ガ與ヘラレタルトキハ, 其條件ニヨリテ夫レニ對應スル λ ノ值ガ決定セラレ, 從テ其時ノ圓ノ方程式モ亦定マルナリ.

【注意】 $\lambda=-1$ ナルトキハ $S+\lambda S'=0$ ハ $S=0$, $S'=0$ ナル二ツノ圓ノ根軸ノ方程式ナリ.

【例1】 二ツノ圓

$$(1) \qquad x^2+y^2+4x+5y-6=0$$

$$(2) \qquad x^2+y^2+5x+4y-9=0$$

ノ交點ト點(1, 2)トヲ通ル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

解 (1)及(2)ノ交點ヲ通ル圓ノ方程式ハ

$$(3) \qquad x^2+y^2+4x+5y-6+\lambda(x^2+y^2+5x+4y-9)=0$$

ナリ. ソコデ(3)ガ點(1, 2)ヲ通ル爲ニハ $x=1$, $y=2$ ガ(3)ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore \qquad 13+9\lambda=0$$

$$\therefore \qquad \lambda=-\frac{13}{9}$$

之ヲ(3)ニ代入スレバ, 所要ノ圓ノ方程式

$$x^2+y^2+4x+5y-6-\frac{13}{9}(x^2+y^2+5x+4y-9)=0$$

從テ $\qquad 4x^2+4y^2+29x+7y-63=0$

ヲ得.

【例2】 二ツノ圓

$$(1) \qquad x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$(2) \qquad x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

ノ交點ト原點トヲ通ル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

解 (1)及(2)ノ交點ヲ通ル圓ノ方程式ハ

$$(3) \qquad x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(x^2+y^2+2g'x+2f'y+c')=0$$

ナリ. (3)ガ原點(0, 0)ヲ通ル爲ニハ $x=0$, $y=0$ ガ(3)ニ適合セザルベカラズ

$$\therefore \quad c+c'\lambda=0 \qquad \therefore \quad \lambda=-\frac{c}{c'}$$

之ヲ(3)ニ代入シ c' ヲ兩邊ニ掛クレバ，所要ノ圓ノ方程式

$$(4) \qquad (c'-c)(x^2+y^2)+2(c'g-cg')x+2(c'f-cf')y=0$$

ヲ得.

【注意】 (1)ニ c' ヲ掛ケ(2)ニ c ヲ掛ケテ相減ズレバ常數項ハ消去サレテ直ニ(4)ヲ得. 常數項ガ消去セラレタルコトハ(4)ガ原點ヲ通ルコトヲ示ス.

【例3】 二ツノ圓

$$(1) \qquad x^2+y^2=9$$

$$(2) \qquad x^2+y^2-3x-2y+1=0$$

ノ交點ヲ通リ直線 $y=x+1$ ニ切スル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

解 (1)及(2)ノ交點ヲ通ル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-9+\lambda(x^2+y^2-3x-2y+1)=0$$

卽チ

$$(3) \qquad (1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-3\lambda x-2\lambda y-9+\lambda=0$$

ナリ. サテ(3)ガ直線

$$(4) \qquad y=x+1$$

ニ切スル爲ニハ，聯立方程式(3)，(4)ガ等根ヲ有スル樣ニ λ ノ値ヲ決定セザルベカラズ.

ソコデ(4)ノ右邊ヲ(3)ノ y ニ代入スレバ

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)(x+1)^2-3\lambda x-2\lambda(x+1)-9+\lambda=0$$

$$\therefore \qquad 2(1+\lambda)x^2+(2-3\lambda)x-8=0$$

此方程式ガ等根ヲ有スル爲ニハ

$$(2-3\lambda)^2+64(1+\lambda)=0$$

$$\therefore \qquad 9\lambda^2+52\lambda+68=0$$

$$\therefore \qquad \lambda=-2 \quad 或ハ \quad \lambda=-\frac{34}{9}$$

因テ求ムル方程式ハ此 λ ノ値ヲ(3)ニ代入シタル者，卽チ

$$(1-2)x^2+(1-2)y^2+6x+4y-9-2=0$$

卽チ

$$x^2+y^2-6x-4y+11=0$$

及

$$\left(1-\frac{34}{9}\right)x^2+\left(1-\frac{34}{9}\right)y^2+\frac{34}{3}x+\frac{68}{9}y-9-\frac{34}{9}=0$$

卽チ

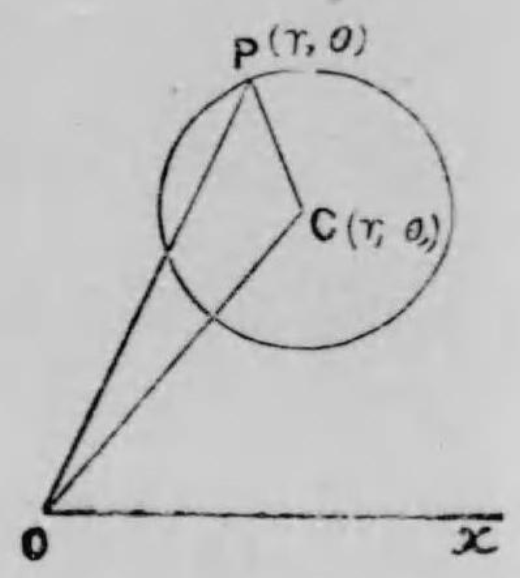
$$25x^2+25y^2-102x-68y+115=0$$

ナリ.

第四章　極坐標ニ關スル圓ノ方程式

65. 圓ノ方程式ノ一般ナル形式

O ヲ極, Ox ヲ原線トシ, 圓ノ中心 C ノ極坐標ヲ r_1, θ_1; 圓周上ノ任意ノ點 P ノ極坐標(卽チ所要ノ圓ノ方程式ノ流通坐標)ヲ r, θ トセヨ.



二點 C, P ノ各ト O トヲ結ビ付クレバ

$$OC=r_1, \quad \angle xOC=\theta_1$$

$$OP=r, \quad \angle xOP=\theta$$

$$CP=a \text{ [圓ノ半徑]}$$

而シテ平面三角法ニヨリ [吉田平面三角法講義第 226 頁參照]

$$CP^2=OP^2+OC^2-2.OP.OC\cos POC$$

卽チ　$$a^2=r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)$$

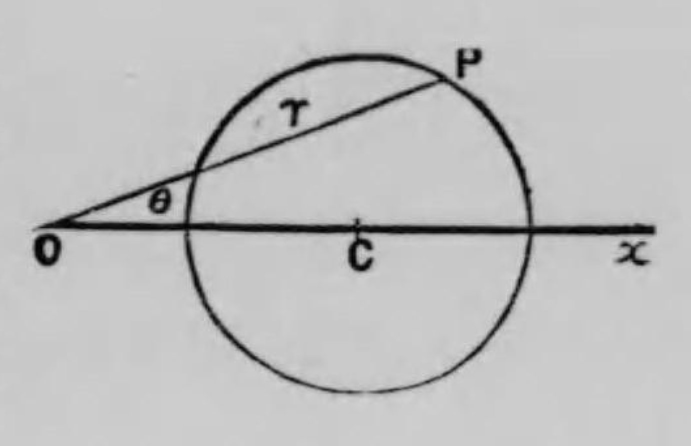
故ニ極坐標ニ關スル圓ノ一般ナル形ハ

(1)　$$r^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)+r_1^2-a^2=0$$

ナリ.

66. 中心ノ位置ノ特別ナル場合ニ於ケル圓ノ方程式

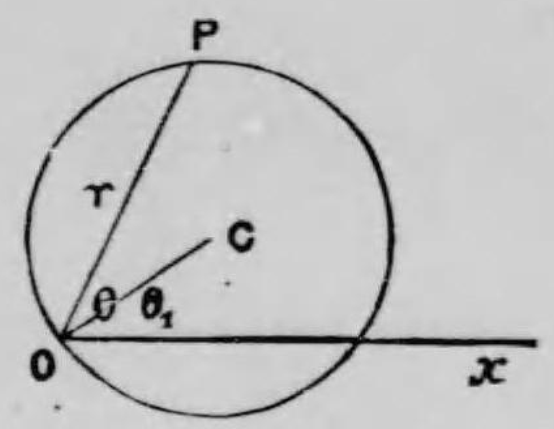
(第一) 原線ガ中心ヲ通ル場合



此場合ハ前節ノ圖ニ於ケル OC ガ Ox ニ合スルヲ以テ, 前節ノ公式(1)ニ於テ $\theta_1=0$ トオケバ所要ノ方程式ヲ得. 卽チ

(2)　$$r^2-2rr_1\cos\theta+r_1^2-a^2=0$$

(第二) 極ガ圓周上ニアル場合

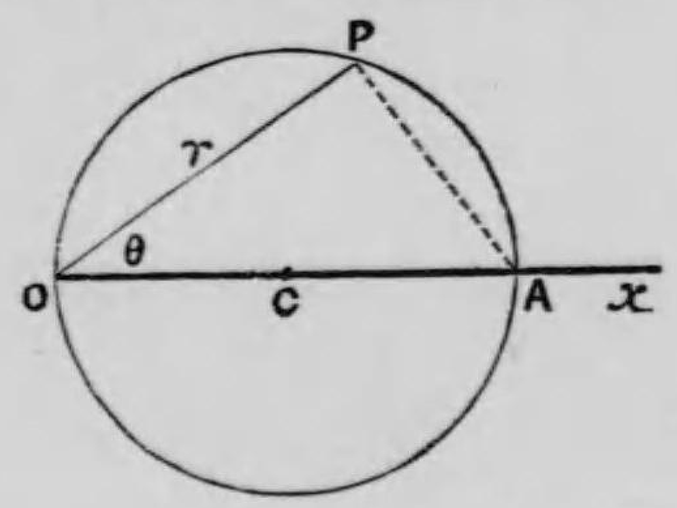


此場合ハ前節ノ圖ニ於テ OC ガ圓ノ半徑 a ニ等シクナルヲ以テ, (1)ニ於テ $r_1=a$ ト置ケバ所要ノ方程式ヲ得. 卽チ

$$r^2-2ra\cos(\theta-\theta_1)=0$$

∴　(3)　$$r=2a\cos(\theta-\theta_1)$$

(第三) 極ガ圓周上ニアリテ且ツ原線ガ中心ヲ通ル場合



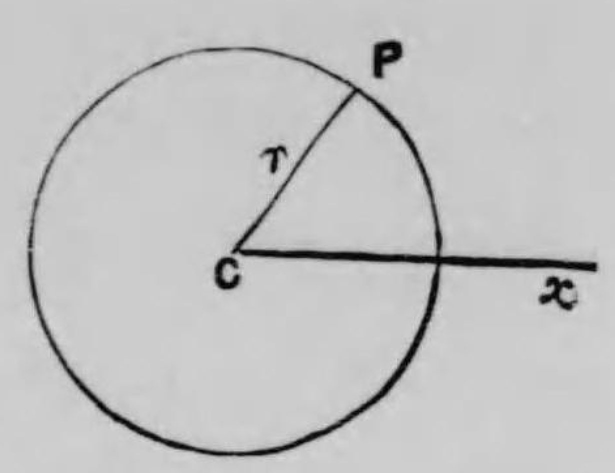
之ハ前ノ場合ニ於ケル OC ガ Ox ニ合スル場合ナルユヱ, (3)ニ於テ $\theta_1=0$ トオケバ所要ノ方程式ヲ得. 卽チ

(4)　$$r=2a\cos\theta$$

【注意】 直徑 OA ノ端 A ト點 P トヲ結ビ付クレバ △OAP ハ直徑 OA (其長サ $2a$) ヲ斜邊トスル直角三角形ナルニヨリ, 直接ニ (4) ヲ求ムルコトヲ得.

(第四) 中心ヲ極トスル場合

此場合ニハ前節ノ圖ニ於ケル OC ノ長サガ 0 トナルヲ以テ, 前節ノ公式 (1) ニ於テ $r_1=0$ トオケバ所要ノ方程式



$$r^2-a^2=0$$

$$\therefore \qquad (5) \qquad r=a$$

ヲ得.

4

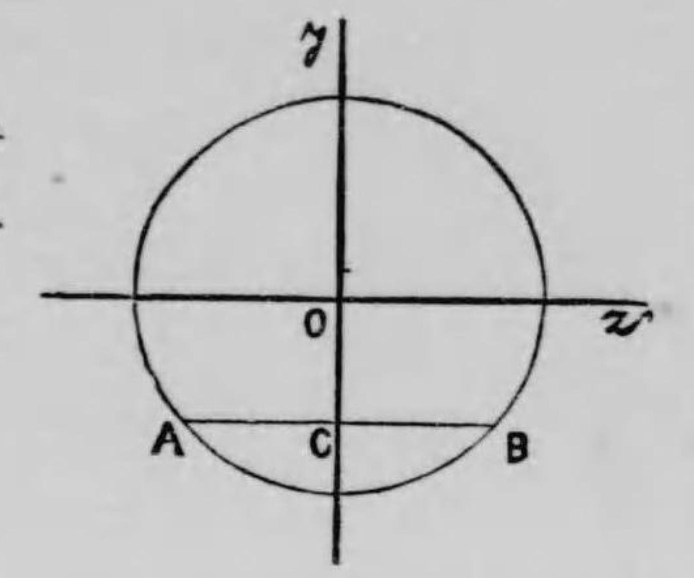
第五章 應用問題雜例

67. 證明問題ノ例

【例 1】 圓ノ弦ニ垂直ナル直~~線~~徑ハ其弦ヲ二等分スルコトヲ解析的ニ (解析幾何學ニヨリテ) 證明セヨ.

證明 圓 O ノ弦 AB ニ垂直ナル直徑ガ AB ニ交ハル點ヲ C トセヨ.

AB ニ平行ナル直徑及之ニ垂直ナル直徑ヲ兩軸ニ取リ, 圓ノ半徑ヲ r, OC ノ長サヲ l トセヨ. サスレバ圓 O ノ方程式ハ



$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2$$

ニシテ, 弦 AB ノ方程式ハ

$$(2) \qquad y=-l$$

ナリ. ソコデ弦ノ兩端 A, B ノ横坐標ヲ求ムル爲ニ, (2) ニヨリテ (1) ノ y ニ $-l$ ヲ代入スレバ

$$x^2+l^2=r^2$$

$$\therefore \qquad x=\pm\sqrt{r^2-l^2}$$

故ニ A ノ横坐標ハ $-\sqrt{r^2-l^2}$ ニシテ B ノ横坐標ハ $\sqrt{r^2-l^2}$ ナリ. 故ニ弦 AB ノ中點ノ横坐標ハ $\frac{1}{2}(-\sqrt{r^2-l^2}+\sqrt{r^2-l^2})=0$ ニシテ y 軸上ニ在ルコトヲ知ル.

因テ本問題ハ證明セラレタリ.

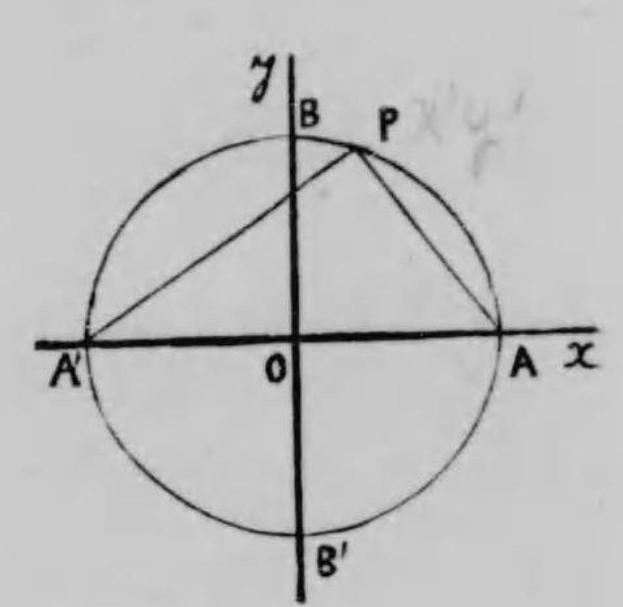
【例 2】 圓ノ直徑ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角ナルコトヲ解析的ニ證明セヨ.

證明 互ニ垂直ナル二ツノ直徑 AA′, BB′ ヲ兩軸ニ取レバ, 圓ノ方程式ハ

$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2 \qquad [r \text{ ハ半徑}]$$

圓周上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x', y') トシ, 直徑 AA′ ノ兩端 A, A′ ノ各ト點 P トヲ結ビ付ケヨ. サスレバ

$$A(r,\ 0),\qquad A'(-r,\ 0)$$



ナルヲ以テ, 直線 AP ノ方程式ハ

$$(2)\qquad \frac{y}{x-r}=\frac{y'}{x'-r}$$

直線 A′P ノ方程式ハ

$$(3)\qquad \frac{y}{x+r}=\frac{y'}{x'+r}$$

ナリ. ソコデ此二直線ノ角係數ノ積ハ

$m \times m'$

$$\frac{y'}{x'-r}\times\frac{y'}{x'+r}=\frac{y'^2}{x'^2-r^2}$$

然ルニ $P(x', y')$ ハ圓周 (1) ノ上ニアルヲ以テ

$m \times m' = 1$

$$x'^2+y'^2=r^2$$

$$\therefore\qquad x'^2-r^2=-y'^2$$

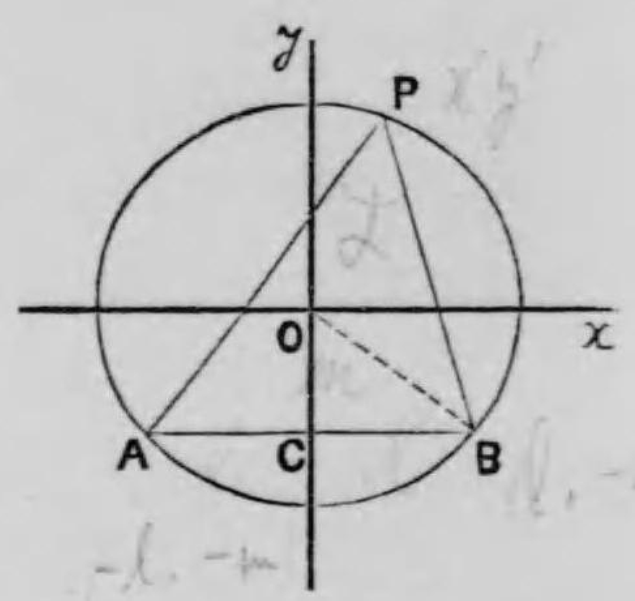
$$\therefore\qquad \frac{y'}{x'-r}\times\frac{y'}{x'+r}=\frac{y'^2}{-y'^2}=-1$$

∴　　AP⊥A′P　卽チ　∠A′PA＝∠R

【例 3】 同ジ圓ノ或弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ其弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シキコトヲ解析的ニ證明セヨ.

證明 圓 O ノ與ヘラレタル弧ヲ AB トシ, 弦 AB ニ平行ナル直徑ヲ x 軸ニ, AB ニ垂直ナル直徑ヲ y 軸ニ取リ, AB ノ長サヲ $2l$, x 軸ト弦 AB トノ距離ヲ m トスレバ

$$A(-l,\ -m),\qquad B(l,\ -m)$$



ナリ. ソコデ圓周

$$(1)\qquad x^2+y^2=r^2$$

上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ, 直線 AP ノ方程式ハ

$$(2)\qquad \frac{y+m}{x+l}=\frac{y'+m}{x'+l}$$

直線 BP ノ方程式ハ

$$(3)\qquad \frac{y+m}{x-l}=\frac{y'+m}{x'-l}$$

故ニ ∠APB＝α トスレバ

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{y'+m}{x'-l}-\dfrac{y'+m}{x'+l}}{1+\dfrac{y'+m}{x'-l}\times\dfrac{y'+m}{x'+l}}=\frac{2l(y'+m)}{x'^2-l^2+(y'+m)^2}=\frac{2l(y'+m)}{x'^2+y'^2-l^2+2y'm+m^2}$$

然ルニ　$x'^2+y'^2=r^2$

又　$l^2+m^2=r^2$

$$\therefore\qquad x'^2+y'^2-l^2=m^2$$

$$\therefore\qquad \tan\alpha=\frac{2l(y'+m)}{2my'+2m^2}=\frac{2l(y'+m)}{2m(y'+m)}=\frac{l}{m}$$

然ルニ弦 AB ノ中點ヲ C トスレバ

$$\tan BOC=\frac{l}{m}$$

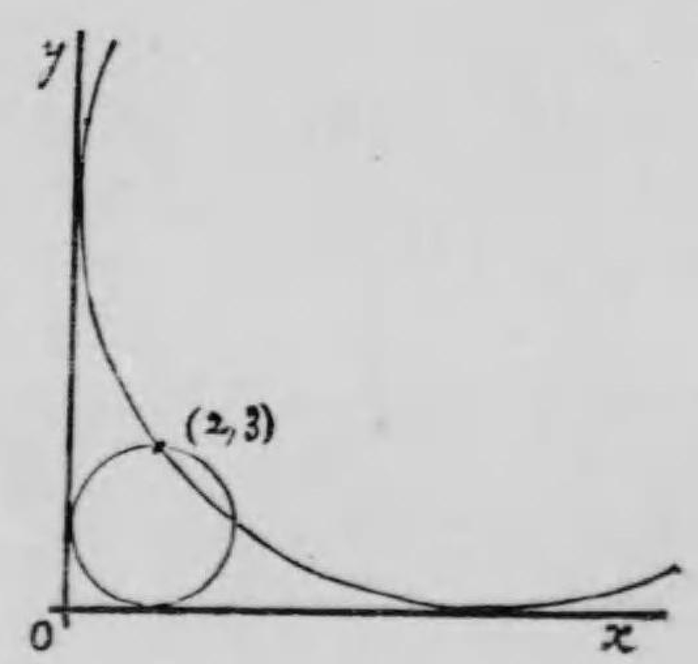
$$\therefore\qquad \tan\alpha=\tan BOC$$

$$\therefore\qquad \alpha=\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB$$

【例 4】 坐標ノ兩軸ニ切シ, 且ツ定點 (2, 3) ヲ通ル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

解 所要ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



ナリトセヨ. 點 (2, 3) ハ第一區劃内ノ點ナルヲ以テ中心 (a, b) モ亦然リ. 而シテ中心ヨリ兩軸ノ各ニ至ル距離ハ半徑 r ニ等シキヲ以テ

$$a=b=r$$

因テ (1) ハ次ノ如クニナル.

$$(2)\qquad (x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

卽チ　(2)′　$x^2+y^2-2r(x+y)+r^2=0$

然ルニ點(2, 3)ハ圓周(2)′ノ上ニ在ルヲ以テ

$$2^2+3^2-2r(2+3)+r^2=0$$

卽チ　$r^2-10r+13=0$

ヲ得. 此方程式ノ二根ヲ r_1, r_2 トスレバ

$$r_1=5+\sqrt{25-13}=5+2\sqrt{3}$$

$$r_2=5-\sqrt{25-13}=5-2\sqrt{3}$$

因テ所要ノ圓ハ二ツアリテ, 其方程式ハ夫々次ノ如シ.

$$x^2+y^2-2(5+2\sqrt{3})(x+y)+(37+20\sqrt{3})=0$$

$$x^2+y^2-2(5-2\sqrt{3})(x+y)+(37-20\sqrt{3})=0$$

【注意】 本例ニ於テハ所要ノ圓周ガ第一區劃內ノ點ヲ通ル場合トナシタレドモ, 一般ニハ點(h, k)ヲ通ルトシテモ同樣ナリ.

但シ(h, k)ガ第一區劃內ニアレバ $a=r$, $b=r$, 第二區劃內ニ在レバ $a=-r$, $b=r$, 第三區劃內ニアレバ $a=-r$, $b=-r$, 第四區劃內ニ在レバ $a=r$, $b=-r$ ナリ.

【例5】 圓 $x^2+y^2=2rx$ ガ直線 $y=mx$ ヨリ截リ取ル弦ヲ直徑トスル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

解 先ヅ圓

(1)　$x^2+y^2=2rx$

ト直線

(2)　$y=mx$

トノ交點ノ橫坐標ヲ求ムル爲ニ, (1)ト(2)トヨリ y ヲ消去スレバ

$$x^2+m^2x^2=2rx$$

$$\therefore \quad x=0 \quad 或ハ \quad x=\frac{2r}{1+m^2}$$

而シテ(2)ニヨリテ

$x=0$ ナルトキハ $y=0$

又 $x=\dfrac{2r}{1+m^2}$ ナルトキハ $y=\dfrac{2rm}{1+m^2}$

故ニ(1)ト(2)トノ交點ハ二ツアリテ, 其坐標ハ夫々

$$(0, 0), \quad \left(\frac{2r}{1+m^2}, \frac{2rm}{1+m^2}\right)$$

ナリ. 從テ此二點ヲ兩端トスル線分ノ中點, 卽チ所要ノ圓ノ中心ノ坐標ハ

$$x=\frac{r}{1+m^2}, \quad y=\frac{rm}{1+m^2}$$

ニシテ, 其半徑ハ此線分ノ半分, 卽チ

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2r}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{2rm}{1+m^2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4r^2(1+m^2)}{(1+m^2)^2}}=\frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$$

故ニ所要ノ圓ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{r}{1+m^2}\right)^2+\left(y-\frac{rm}{1+m^2}\right)^2=\frac{r^2}{1+m^2}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-\frac{2r}{1+m^2}x-\frac{2rm}{1+m^2}y+\frac{r^2}{(1+m^2)^2}+\frac{r^2m^2}{(1+m^2)^2}=\frac{r^2}{1+m^2}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-\frac{2r}{1+m^2}x-\frac{2rm}{1+m^2}y+\frac{r^2}{1+m^2}=\frac{r^2}{1+m^2}$$

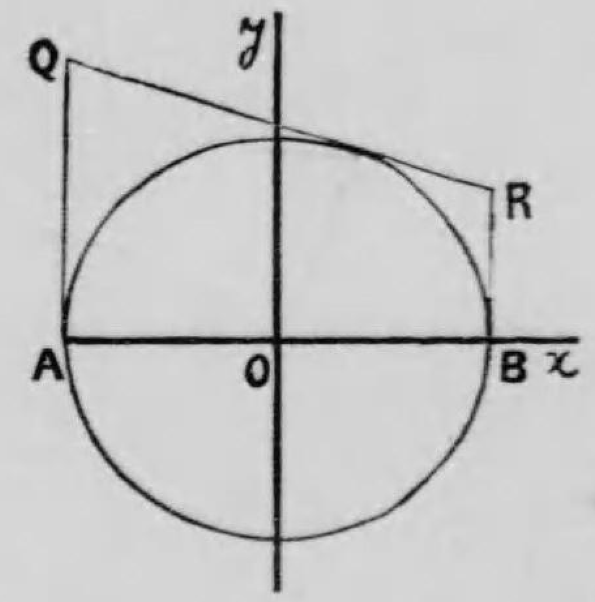
$$\therefore \quad (1+m^2)(x^2+y^2)-2rx-2rmy=0$$

ナリ.

【例6】 半徑 r ナル圓ノ任意ノ切線ガ直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ夫々 Q, R トスレバ

$$AQ.BR=r^2$$

ナリ.



證明 直徑 AB 及之ニ垂直ナル直徑ヲ兩軸ニ取リ, 切線 QR ノ角係數ヲ m トセヨ. サスレバ QR ノ方程式ハ

(1)　$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$

[茲ニ r ハ圓ノ半徑]

又 AQ ノ方程式ハ

(2)　$x=-r$

BR ノ方程式ハ

$$(3) \qquad x=r$$

ナリ. ソコデ(1)ニ於テ $x=-r$ トオケバ

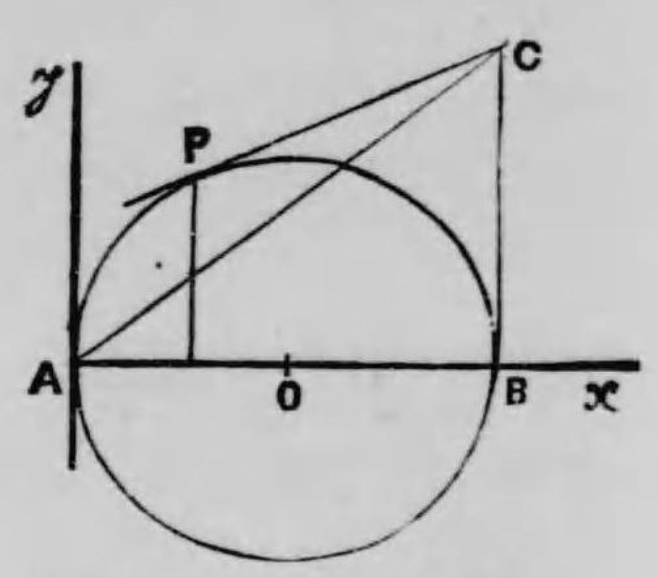
$$y=\mathrm{AQ}=-mr\pm r\sqrt{1+m^2}$$

又(1)ニ於テ $x=r$ トオケバ

$$y=\mathrm{BR}=mr\pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{AQ.BR}=-m^2r^2+r^2(1+m^2)=r^2$$

【例 7】 圓周上ノ任意ノ點 P ニ於ケル切線ト直徑 AB ノ一端 B ニ於ケル切線トノ交點 C ト直徑ノ他ノ端 A トヲ通ル直線ハ, 點 P ヨリ直徑 AB ヘ引ケル垂線ヲ二等分ス.



證明 直徑 AB チ x 軸ニ, A チ通リテ AB ニ垂直ナル直線チ y 軸ニ取リ, 圓ノ半徑チ r トスレバ, 圓 O ノ方程式ハ

$$(1) \qquad x^2+y^2=2rx$$

ニシテ, 點 B ノ坐標ハ $(2r, 0)$ ナリ.

今切點 P ノ坐標チ (x', y') トセヨ. サスレバ P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(2) \qquad xx'+yy'=r(x+x')$$

又點 B ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(3) \qquad x=2r$$

ナリ. 故ニ PC ト BC トノ交點 C ト原點 A トチ通ル直線 AC ノ方程式ハ(2)ト(3)トヨリ常數項チ消去スレバ得ラル. [第38節例2ノ注意參照] ソコデ(2)ノ兩邊ニ 2 チ掛ケ(3)ノ兩邊ニ x' チ掛ケテ邊々相減ズレバ, AC ノ方程式トシテ

$$(4) \qquad xx'+2yy'=2rx$$

チ得. 故ニ P ノ縱線ト直線 AC トノ交點ノ縱坐標チ求ムル爲ニ, (4) ニ於テ $x=x'$ トオケバ

$$y=\frac{2rx'-x'^2}{2y'}$$

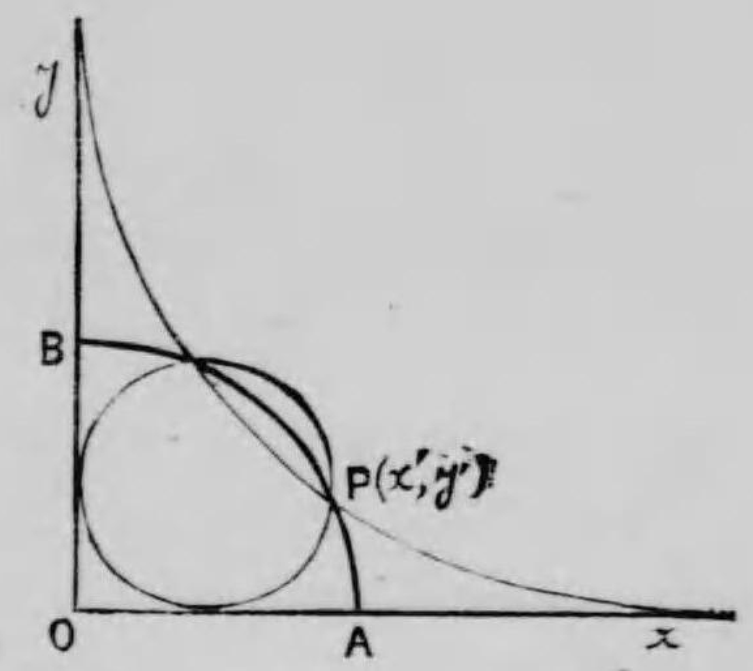
$$\text{然ルニ} \qquad x'^2+y'^2=2rx'$$

$$\therefore \qquad 2rx'-x'^2=y'^2$$

$$\therefore \qquad y=\frac{y'}{2}$$

故ニ P ノ縱線卽チ P ヨリ直徑 AB ヘ引ケル垂線ハ AC ニヨリテ二等分セラル.

【例 8】 半徑 R ナル圓ノ一象限上ノ任意ノ點ヲ通リ, 此象限ヲ界スル二ツノ半徑ニ切スル二ツノ圓ノ半徑ヲ夫々 r, r' トスレバ $rr'=\mathrm{R}^2$ ナルコトヲ證明セヨ.



證明 圓 O ノ四分圓周 AB チ界スルニツノ半徑 OA, OB チ兩軸ニ取リ, 弧 AB 上ノ任意ノ點 P ノ坐標チ (x', y') トセヨ. サスレバ先ヅ二ツノ半直線 OA, OB ニ切スル圓ノ半徑チ l トスレバ, 其圓ノ方程式ハ例 4 ニ述ベタル如ク

$$(x-l)^2+(y-l)^2=l^2$$

卽チ

$$(1) \qquad x^2+y^2-2l(x+y)+l^2=0$$

ナリ. 今此圓ガ點 $\mathrm{P}(x', y')$ チ通ルトスレバ (x', y') ハ (1) ニ適合セザルベカラズ. 故ニ

$$(2) \qquad l^2-2(x'+y')l+x'^2+y'^2=0$$

而シテ (2) ハ l ニ付テノ二次方程式ニシテ之チ解キテ得ル l ノ二ツノ値ハ夫々 r, r' ニ等シカラザルベカラズ. 故ニ二次方程式ノ根ト係數トノ關係ニヨリ

$$rr'=x'^2+y'^2=\mathrm{R}^2$$

【例 9】 方程式

$$(1) \qquad (n+1)(x^2+y^2)=ax+nby$$

ニ於テ n ニ種々ノ値ヲ與ヘテ得ル無數ニ多クノ圓ハ何レモ一ツノ根軸ヲ共有スルコトヲ證明セヨ.

證明 (1)チ書キ換ヘテ

$$x^2+y^2-ax+n(x^2+y^2-by)=0$$

トナセバ, n ハ任意ノ常數ナルチ以テ, 第112頁注意2(第一)ニヨリテ(1)ハ二ツノ圓

$$(2) \qquad x^2+y^2-ax=0$$

$$(3) \qquad x^2+y^2-by=0$$

ノ交點チ通ル. 卽チ(1)ニテ表ハサルル總テノ圓ハ何レモ, (2)ヨリ(3)チ引キテ得ル方程式, 卽チ

$$by-ax=0$$

ガ表ハス直線チ根軸ニ有ス.

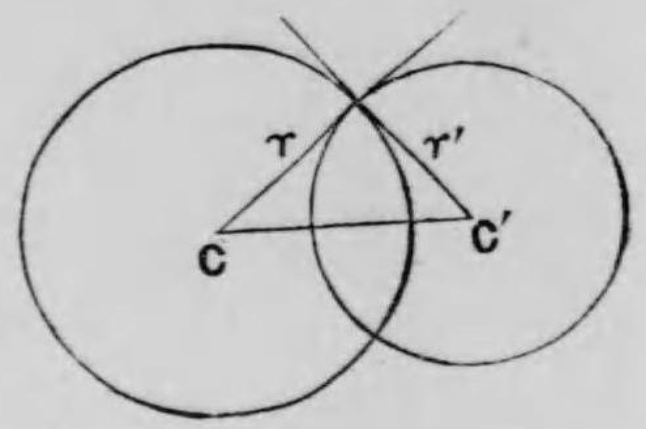
【例10】 二ツノ圓

$$(1) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(2) \qquad (x-a')^2+(y-b')^2=r'^2$$

ガ互ニ直角ニ交ハル爲ノ條件ヲ求メヨ.

解 二ツノ圓周ガ互ニ直交スルトハ此等ノ圓周ノ交點ニ於テ各ノ圓ニ引キタル切線ガ互ニ直交スルコトナリ, 而シテ切點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心チ通ルチ以テ, 圓周ノ交點ノ中ノ一ツト二ツノ中心トチ頂點トスル三角形ハ直角三角形ナラザルベカラズ.



故ニ(1)ノ中心チ C, (2)ノ中心チ C′ トスレバ所要ノ條件ハ

$$(3) \qquad r^2+r'^2=\mathrm{CC'}^2$$

ナリ. 然ルニ

$$\mathrm{CC'}^2=(a-a')^2+(b-b')^2$$

之チ(3)ノ右邊ニ代入スレバ

$$(4) \qquad r^2+r'^2=(a-a')^2+(b-b')^2$$

是ガ求ムル所ノ條件ナリ.

【例11】 點(2, 0)ヲ通リ, 且ツ二ツノ圓

$$(1) \qquad x^2+y^2=4$$

$$(2) \qquad x^2+y^2=2y+8$$

ノ各ニ直交スル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

解 所要ノ圓ノ方程式チ

$$(3) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トシ, 與ヘラレタル條件ニヨリ a, b, r ノ値チ決定スレバヨシ.

先ヅ(3)ハ(2, 0)チ通ルニヨリ, $x=2$, $y=0$ ハ(3)ニ適合ス.

$$(4) \qquad (2-a)^2+b^2=r^2$$

次ニ(1)ト(3)トハ互ニ直交スルチ以テ前例ノ(4)ニヨリ

$$(5) \qquad 4+r^2=a^2+b^2$$

又(2)ト(3)トハ互ニ直交シ, (2)ハ

$$x^2+(y-1)^2=9$$

ト書キ直サルルチ以テ, 矢張リ前例ノ(4)ニヨリ

$$(6) \qquad 9+r^2=a^2+(b-1)^2$$

ソコデ(6)ヨリ(5)チ引ケバ

$$5=(b-1)^2-b^2=-2b+1$$

$$\therefore \qquad b=-2$$

之チ(4)及(5)ニ代入スレバ

$$(7) \qquad (2-a)^2+4=r^2$$

$$(8) \qquad r^2=a^2$$

$$\therefore \qquad (2-a)^2+4=a^2$$

$$\therefore \qquad -4a+8=0$$

$$\therefore \qquad a=2$$

$$\text{從テ} \qquad r^2=a^2=4$$

因テ所要ノ圓ノ方程式ハ

$$(x-2)^2+(y+2)^2=4$$

ナリ.

【例 12】 圓 $x^2+y^2=9$ ニ關スル點 (h, k) ノ極線ガ圓 $x^2+y^2=6y$ ニ切スル爲ノ條件ヲ求ム.

解 點 (h, k) ノ圓 $x^2+y^2=9$ ニ關スル極線ノ方程式ハ

$$(1) \qquad hx+ky=9$$

ナリ, 是ガ圓

$$(2) \qquad x^2+y^2=6y$$

卽チ $$x^2+(y-3)^2=9$$

ニ切スル爲ニハ, 其中心 $(0, 3)$ ヨリ (1) ニ下セル垂線ノ長サガ (2) ナル圓ノ半徑 3 ニ等シカラザルベカラズ.

$$\therefore \qquad \pm\frac{3k-9}{\sqrt{h^2+k^2}}=3$$

$$\therefore \qquad (k-3)^2=h^2+k^2$$

$$\therefore \qquad k^2-6k+9=h^2+k^2$$

$$\therefore \qquad h^2+6k=9$$

是ガ所要ノ條件ナリ.

【例 13】 圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ關スル或直線ノ極ガ圓 $x^2+y^2=4r^2$ ノ周上ニアルトキ, 此直線ハ第三ノ圓 $x^2+y^2=\dfrac{r^2}{2}$ ニ切スルコトヲ證明セヨ.

證明 此極ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ, 此直線 [卽チ (x', y') ノ極線] ノ方程式ハ

$$(1) \qquad x'x+y'y=r^2$$

ナリ. 然ルニ (x', y') ハ圓

$$x^2+y^2=4r^2$$

ノ周上ニアルヲ以テ

$$(2) \qquad x'^2+y'^2=4r^2$$

サテ此直線 (1) ヘ第三ノ圓

$$(3) \qquad x^2+y^2=\frac{r^2}{4}$$

ノ中心ヨリ下シタル垂線ノ長サハ

$$\frac{r^2}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{4r^2}} \qquad [(2) \text{ニヨル}]$$

$$=\frac{r}{2}$$

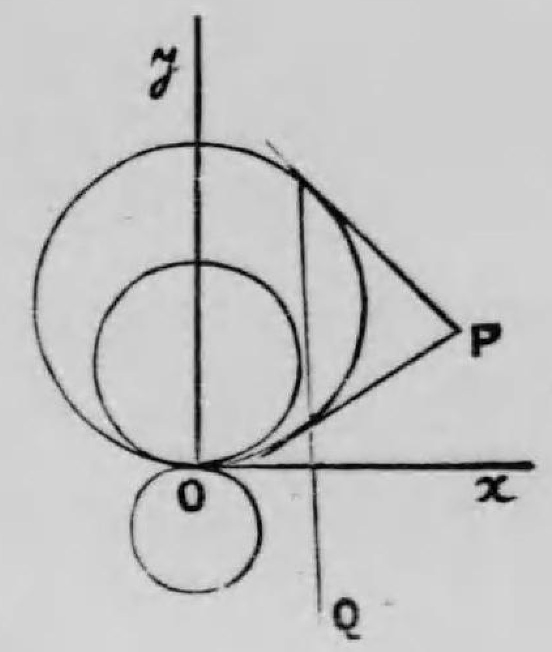
ニシテ第三ノ圓ノ半徑ニ等シ.

因テ (1) ハ圓 (3) ニ切ス.

【例 14】 同一ノ點 O ニ於テ互ニ相切スル圓ノ各ニ關スル, 一定點 P ノ極線ハ一ツノ定點ヲ通ル.

證明 O ニ於ケル各圓ノ共通切線ヲ x 軸トシ, O ヲ通リ x 軸ニ垂直ナル直線ヲ y 軸ニ取レ. サスレバ y 軸ハ O ニ於テ相切スルスベテノ圓ノ中心ヲ通ル.

ソコデ此等ノ圓ノ中ノ任意ノ一ツノ中心ノ坐標ヲ $(0, r)$ トスレバ, 其圓ノ方程式ハ



$$(1) \qquad x^2+(y-r)^2=r^2$$

ナリ. 此 r ノ値ヲ種々ニ變フレバ點 O ニ於テ相切スル種々ノ圓ノ方程式ヲ得. 故ニ r ヲ任意ノ常數ト考フレバ (1) ハ此等ノ圓ノ群ヲ代表ス.

今定點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ圓 (1) ニ關シ點 P ノ極線ノ方程式ハ, 第 58 節ニヨリテ

$$x'x+(y'-r)(y-r)=r^2$$

卽チ $$(2) \qquad x'x+y'y-r(y+y')=0$$

トナル, 而シテ是ハ二ツノ定直線

$$x'x+y'y=0 \qquad \text{及} \qquad y=-y'$$

ノ交點 (卽チ定點) ヲ通ルコトヲ示ス.

【例 15】 點 (h, k) ヨリ圓 $x^2+y^2=3$ ニ引キタル切線ノ長サガ同ジ點ヨリ圓 $x^2+y^2=3x+6$ ニ引キタル切線ノ長サノ二倍

ニ等シキトキハ $h^2+k^2=4h+7$ ナルコトヲ證明セヨ.

證明 點 (h, k) ヨリ圓 $x^2+y^2=3$ ニ引キタル切線ノ長サハ

$$\sqrt{h^2+k^2-3}$$

ニシテ, 點 (h, k) ヨリ圓 $x^2+y^2=3x+6$ ニ引キタル切線ノ長サハ

$$\sqrt{h^2+k^2-3h-6}$$

ナリ [第59節]. 而シテ第一ノ切線ノ長サハ第二ノ切線ノ長サノ二倍ナルヲ以テ

$$\sqrt{h^2+k^2-3}=2\sqrt{h^2+k^2-3h-6}$$

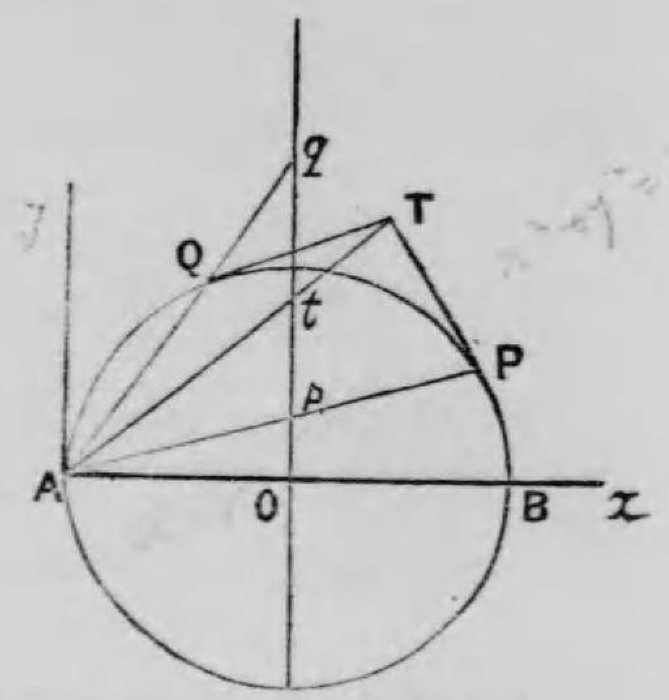
$$\therefore \quad h^2+k^2-3=4(h^2+k^2-3h-6)$$

$$\therefore \quad 3(h^2+k^2)=12h+21$$

$$\therefore \quad h^2+k^2=4h+7$$

【例16】 圓周上ノ二點 P, Q ニ於ケル切線ノ交點ヲ T トセヨ. 三點 P, Q, T ノ各トーツノ直徑 AB ノ一端 A トヲ通ル直線ガ此直徑ニ垂直ナル直徑ニ交ハル點ヲ夫々 p, q, t トスレバ二ツノ線分 pt, qt ノ長サハ相等シ.

證明 直徑 AB ヲ x 軸ニ, A ヲ通ル切線ヲ y 軸ニ取リ, 二點 P, Q ノ坐標ヲ夫々 (x', y'), (x'', y'') トセヨ. サスレバ圓ノ方程式ハ



$$(1) \qquad x^2+y^2=2rx \qquad [r \text{ ハ半徑}]$$

ニシテ, 切線 PT, QT ノ方程式ハ夫々

$$(2) \qquad xx'+yy'=rx+rx'$$

$$(3) \qquad xx''+yy''=rx+rx''$$

ナリ. ソコデ (2) ノ兩邊ニ x'' ヲ掛ケ, (3) ノ兩邊ニ x' ヲ掛ケ邊々相減ジテ常數項ヲ消去スレバ, AT ノ方程式トシテ

$$(4) \qquad y(x''y'-x'y'')=r(x''-x')x$$

ヲ得. 又 AP, AQ ノ方程式ハ夫々

$$(5) \qquad \frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}$$

$$(6) \qquad \frac{y}{x}=\frac{y''}{x''}$$

ニシテ, AB ニ垂直ナル直徑 Oq ノ方程式ハ

$$(7) \qquad x=r$$

ナリ. 故ニ (4), (5), (6) ニ於テ $x=r$ トオキテ y ノ値ヲ求ムレバ夫々 t, p, q ノ縱坐標ヲ得ベシ, 即チ

$$(4) \text{ ヨリ} \qquad y=\frac{r^2(x''-x')}{x''y'-x'y''} \qquad [\text{點 } t \text{ ノ縱坐標}]$$

$$(5) \text{ ヨリ} \qquad y=\frac{ry'}{x'} \qquad [\text{點 } p \text{ ノ縱坐標}]$$

$$(6) \text{ ヨリ} \qquad y=\frac{ry''}{x''} \qquad [\text{點 } q \text{ ノ縱坐標}]$$

サテ $pt=qt$ 即チ t ガ線分 pq ノ中點ナルコトヲ證明スル爲ニハ p 及 q ノ縱坐標ノ和ガ t ノ縱坐標ノ二倍ニ等シキコトヲ示セバヨシ, 即チ

$$\frac{ry'}{x'}+\frac{ry''}{x''}=\frac{2r^2(x''-x')}{x''y'-x'y''}$$

即チ $$(x''y'+x'y'')(x''y'-x'y'')=2rx'x''(x''-x')$$

即チ $$(8) \qquad x''^2y'^2-x'^2y''^2=2rx'x''(x''-x'')$$

ナルコトヲ證明スレバヨシ.

サテ P, Q ノ坐標 (x', y'), (x'', y'') ハ何レモ (1) ニ適合スベキヲ以テ

$$(9) \qquad x'^2+y'^2=2rx'$$

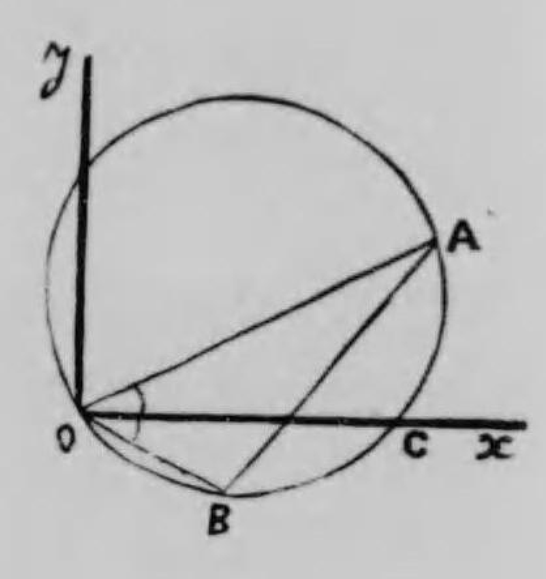
$$(10) \qquad x''^2+y''^2=2rx''$$

ソコデ (9) ノ兩邊ニ x''^2 ヲ掛ケ, (10) ノ兩邊ニ x'^2 ヲ掛ケ邊々相減ズレバ

$$x''^2y'^2-x'^2y''^2=2rx'x''^2-2rx''x'^2$$

即チ (8) ヲ得. 因テ本問題ハ證明セラレタリ.

【例17】 圓周上ノ一點 O ヨリ引ケル定弦 OC アリ, 今 OC ノ兩側ニ之ト相等シキ角ヲナス二ツノ弦 OA, OB ヲ引クトキハ, 其角ノ大サ如何ニ拘ハラズ弦 AB ハ一定ノ方向ヲ有ス.



證明　定弦 OC 及 O ヲ通リ之ニ垂直ナル直線ヲ兩軸ニ取レバ，圓ノ方程式ハ

$$(1)\qquad x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0$$

ナリ．　今直線 OA ノ角係數ヲ m トスレバ，直線 OB ノ角係數ハ $-m$ ナリ．

故ニ直線 OA ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=mx$$

ニシテ，直線 OB ノ方程式ハ

$$(3)\qquad y=-mx$$

ナリ．　ソコデ聯立方程式(1)及(2)ヲ解ケバ $x=0,\ y=0$ ノ外ニ尙

$$x=\frac{\alpha+\beta m}{1+m^2},\qquad y=\frac{m(\alpha+\beta m)}{1+m^2}$$

ヲ得．是レ點 A ノ坐標ナリ．

又聯立方程式(1)及(3)ヲ解ケバ $x=0,\ y=0$ ノ外ニ尙

$$x=\frac{\alpha-\beta m}{1+m^2},\qquad y=\frac{m(\beta m-\alpha)}{1+m^2}$$

ヲ得，是レ點 B ノ坐標ナリ．[之ヲ求ムル爲ニハ聯立方程式(1)，(3)ヲ解クニ及バズ，A ノ坐標ニ於ケル m ヲ $-m$ ニ代フレバヨシ]．

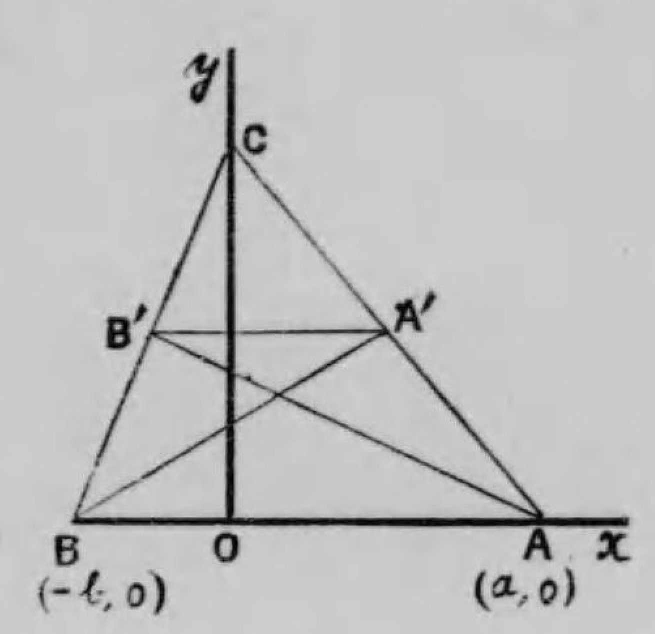
故ニ直線 AB ノ角係數ハ

$$\frac{\dfrac{m(\alpha+\beta m)}{1+m^2}-\dfrac{m(\beta m-\alpha)}{1+m^2}}{\dfrac{\alpha+\beta m}{1+m^2}-\dfrac{\alpha-\beta m}{1+m^2}}=\frac{2m\alpha}{2\beta m}=\frac{\alpha}{\beta}$$

ニシテ不易ナリ．

因テ弦 AB ハ一定ノ方向ヲ有ス．

【例 18】　△ABC ノ底邊 AB ニ平行ナル任意ノ直線ヲ引キ二邊 AC, BC ト夫々 A′, B′ ニ於テ交ハラシメ，AB′ 及 BA′ ヲ夫々直徑トスル圓ヲ畫クトキ，此二ツノ圓ノ根軸ハ頂點 C ヨリ引ケル三角形ノ高サ CO ニ合ス．



證明　底邊 AB 及高サ CO ヲ兩軸ニ取リ

$$OA=a,\qquad OB=b,\qquad OC=c$$

トセヨ．サスレバ直線 AC ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{c}-1=0$$

ニシテ，直線 A′B′ ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=h$$

[ココニ h ハ平行二直線 AB, A′B′ 間ノ距離]

ナリ．故ニ點 A′ ノ坐標ハ聯立方程式(1)及(2)ヲ解キテ得ル $x,\ y$ ノ値，卽チ

$$x=a\left(1-\frac{h}{c}\right),\qquad y=h$$

ナリ．従テ線分 BA′ ノ中點卽チ BA′ ヲ直徑トスル圓ノ中心ノ坐標ハ

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[a\left(1-\dfrac{h}{c}\right)-b\right]=\dfrac{ac-ah-bc}{2c} \\ y=\dfrac{h}{2} \end{cases}$$

故ニ BA′ ヲ直徑トスル圓ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{ac-ah-bc}{2c}\right)^2+\left(y-\frac{h}{2}\right)^2=\left(\frac{ac-ah-bc}{2c}+b\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

従テ

$$(3)\qquad x^2+y^2-(ac-ah-bc)\frac{x}{c}-hy-\frac{ab(c-h)}{c}=0$$

次ニ直線 BC ノ方程式ハ

$$(4)\qquad \frac{x}{-b}+\frac{y}{c}-1=0$$

ソコデ聯立方程式(2)ト(4)トヲ解ケバ，點 B′ ノ坐標

$$x=-b\left(1-\frac{h}{c}\right),\qquad y=h$$

ヲ得．故ニ線分 AB′ ノ中點ノ坐標ハ

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[-b\left(1-\dfrac{h}{c}\right)+a\right] \\ y=\dfrac{h}{2} \end{cases}$$

故ニ線分 AB′ ヲ直徑トスル圓ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{-bc+bh+ac}{2c}\right)^2+\left(y-\frac{h}{2}\right)^2=\left(\frac{-bc+bh+ac}{2c}-a\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

從テ

$$(5)^* \qquad x^2+y^2-(-bc+bh+ac)\frac{x}{c}-hy-\frac{ab(c-h)}{c}=0$$

トナル.

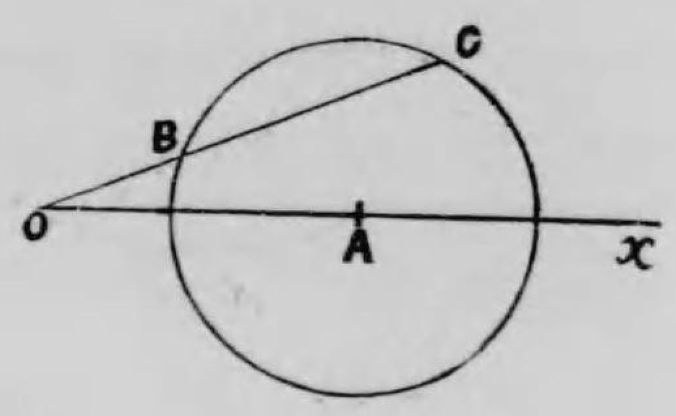
此二ツノ圓ノ根軸ノ方程式ハ(3)ヨリ(5)ヲ邊々相減ジタル者, 卽チ

$$(a-b)h.\frac{x}{c}=0$$

$$\therefore \qquad x=0$$

ニシテ卽チ y 軸ナリ.

【例 19】 圓 A ノ平面上ニアル一定點 O ヨリ引ケル直線ガ圓周ニ交ハル點ヲ B, C トスレバ二ツノ線分 OB, OC ノ包ム矩形ノ面積ハ不易ナルコトヲ解析的ニ證明セヨ.



證明 O ヲ極坐標ノ極トシ, O ト圓ノ中心 A トヲ通ル半直線ヲ原線トシ, 圓 A ノ半徑ヲ R, OA$=r_1$ トスレバ, 第 66 節(2)ニヨリ, 此圓ノ方程式ハ

$$(1) \qquad r^2-2rr_1\cos\theta+r_1{}^2-R^2=0$$

ナリ. サテ O ヨリ Ox ト α ナル角ヲナス直線ハ

$$(2) \qquad \theta=\alpha$$

ナルヲ以テ,(1)及(2)ヲ聯立方程式トシテ之ヲ解キテ得ル r ノ値ハ直線(2)ト圓(1)トノ交點 B, C ノ各ト極 O トノ間ノ距離ヲ表ハス.

ソコデ(2)ニヨリテ(1)ノ θ ニ α ヲ代入スレバ

$$r^2-2rr_1\cos\alpha+r_1{}^2-R^2=0$$

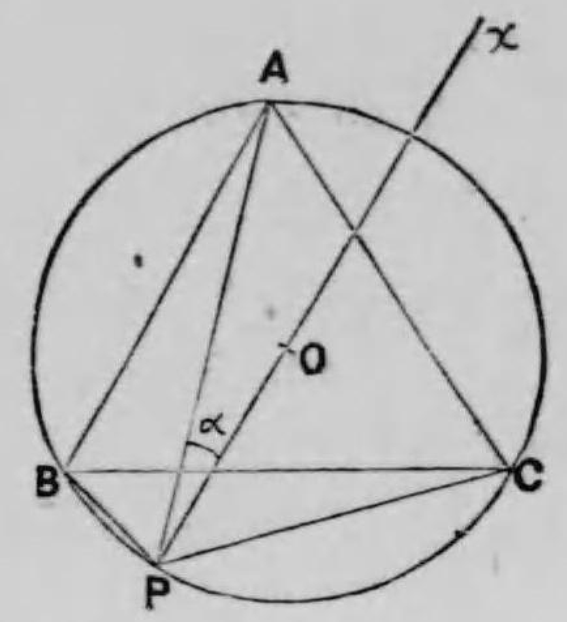
*(5)ハ結局リ(3)ニ於ケル a ヲ $-b$ ニ, 從テ $-a$ ヲ b ニ, $-b$ ヲ a ニオキ換ヘタル者ニ外ナラズ.

ナル r ニ關シテノ二次方程式ヲ得. 此方程式ノ二根ヲ r', r'' トスレバ二次方程式ノ根ト係數トノ關係ニヨリ

$$r'r''=r_1{}^2-R^2$$

此右邊ハ α ヲ含マズ, 因テ O ヨリ引ケル任意ノ直線ニ付テ(卽チ θ ニ何ヲ置換ヘテモ), $r'r''$ ハ常ニ同一ノ値 $r_1{}^2-R^2$ ヲ得, 卽チ不易ナリ,

【例 20】 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ PA=PB+PC ナルコトヲ證明セヨ.



證明 點 P ヲ極坐標ノ極トシ, P ヲ通ル外接圓ノ直徑ヲ原線ニ取レ.

外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ, 此圓ノ方程式ハ

$$(1) \qquad r=2R\cos\theta$$

ナリ.

三ツノ頂點 A, B, C ノ各ト點 P トヲ結ビ付ケヨ. 圓ノ中心ヲ O トシ, $\angle$OPA$=\alpha$ トスレバ

$$\angle APB=60^\circ, \qquad \angle APC=60^\circ$$

ナルヲ以テ

$$\angle OPB=60^\circ+\alpha, \qquad \angle OPC=\alpha-60^\circ$$

故ニ(1)ニ於テ $\theta=\alpha$ トオキタルトキノ r ノ値ハ PA ナルヲ以テ

$$PA=2R\cos\alpha$$

次ニ(1)ニ於テ $\theta=60^\circ+\alpha$ 及 $\theta=\alpha-60^\circ$ トオキタルトキノ値ハ夫々 PB 及 PC ナルヲ以テ

$$PB=2R\cos(60^\circ+\alpha), \qquad PC=2R\cos(\alpha-60^\circ)$$

$$\therefore \qquad PB+PC=2R[\cos(60^\circ+\alpha)+\cos(\alpha-60^\circ)]$$

$$=2R\times 2\cos\alpha\cos 60^\circ=2R\cos\alpha=PA$$

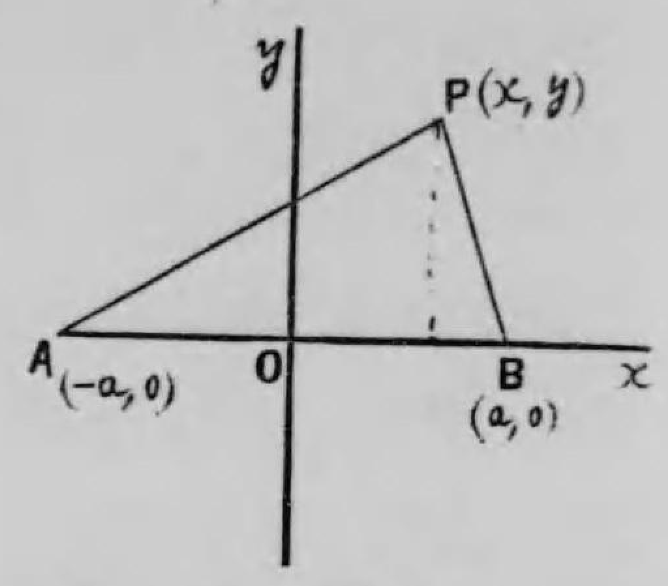
68.　軌跡問題ノ例

【例 1】 A, B ヲ二定點トシ,

$$\mathrm{PA}=n.\mathrm{PB} \qquad [\text{玆ニ}\ n\neq 1]$$

ニ適スル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　二定點 A, B ヲ結ビ付クル線分 AB ノ中點 O ヲ原點トシ,直線 AB ヲ x 軸,從テ O ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ヲ y 軸ニ取リ, 線分 AB ノ長サヲ $2a$ トセヨ.



サスレバ

$$\mathrm{A}(-a,\ 0), \qquad \mathrm{B}(a,\ 0)$$

所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ $(x,\ y)$ トスレバ

$$\mathrm{PA}=\sqrt{(x+a)^2+y^2}, \qquad \mathrm{PB}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

然ルニ　$$\mathrm{PA}=n.\mathrm{PB}$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+a)^2+y^2}=n.\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

$$\therefore \quad (x+a)^2+y^2=n^2\{(x-a)^2+y^2\}$$

卽チ　$$x^2+2ax+a^2+y^2=n^2x^2-2an^2x+a^2n^2+n^2y^2$$

$$\therefore \quad (n^2-1)x^2-2a(n^2+1)x+(n^2-1)y^2+a^2(n^2-1)=0$$

$$\therefore \quad x^2-\frac{2a(n^2+1)}{n^2-1}x+y^2=-a^2$$

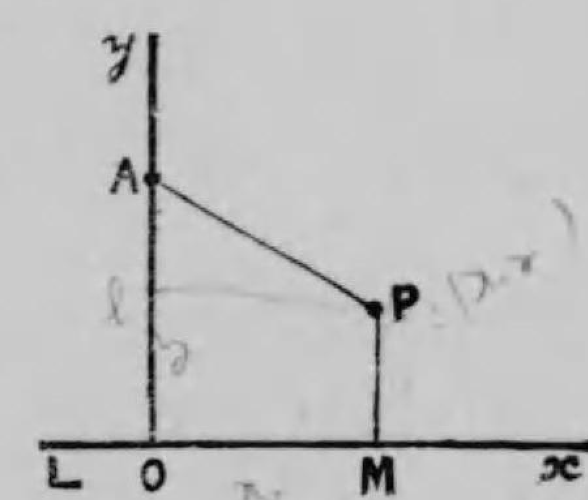
$$\therefore \quad \left[x-\frac{a(n^2+1)}{n^2-1}\right]^2+y^2=\frac{a^2(n^2+1)^2}{(n^2-1)^2}-a^2=\frac{4a^2n^2}{(n^2-1)^2}$$

故ニ所要ノ軌跡ハ中心ガ $\left[\dfrac{(n^2+1)a}{n^2-1},\ 0\right]$, 半徑ガ $\dfrac{2an}{n^2-1}$ ナル圓ナリ.

【例 2】 定點 A ヨリノ距離ノ平方ガ定直線 L ヨリノ距離ニ比例スル樣ナル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　定直線 L ヲ x 軸ニ取リ, 定點 A ヨリ定直線 L ニ下シタル垂線 AO ヲ

y 軸ニ取リ, 線分 OA ノ長サヲ l トセヨ.



所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ $(x,\ y)$ トシ, P ヨリ x 軸ニ下シタル垂線ノ足ヲ M トスレバ

$$x=\mathrm{OM}, \qquad y=\mathrm{MP}$$

又　$$\mathrm{AP}^2=x^2+(y-l)^2$$

然ルニ　$$\mathrm{AP}^2=k.\mathrm{PM} \qquad [\text{ココニ}\ k\ \text{ハ常數}]$$

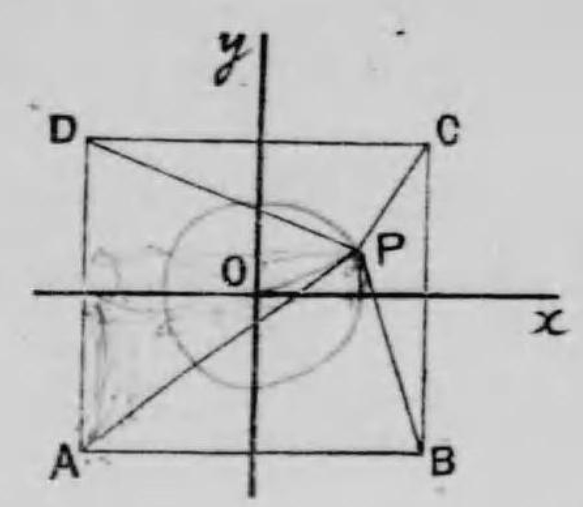
$$\therefore \quad x^2+(y-l)^2=ky$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-2\left(l+\frac{k}{2}\right)y+l^2=0$$

故ニ所要ノ軌跡ハ圓ナリ.

【例 3】 定正方形 ABCD ノ各頂點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ不易ニシテ $4k^2$ ナルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　正方形 ABCD ノ中心 O (卽チ兩對角線ノ交點) ヲ通リ相隣レル二邊 AB, BC ニ夫々平行ナル二直線ヲ兩軸ニ取レ.



正方形ノ一邊ノ長サヲ $2a$ トシ, 所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ $(x,\ y)$ トセヨ. サスレバ

$$\mathrm{A}(-a,\ -a), \quad \mathrm{B}(a,\ -a), \quad \mathrm{C}(a,\ a), \quad \mathrm{D}(-a,\ a)$$

ナルヲ以テ

$$\mathrm{PA}^2=(x+a)^2+(y+a)^2, \qquad \mathrm{PB}^2=(x-a)^2+(y+a)^2$$

$$\mathrm{PC}^2=(x-a)^2+(y-a)^2, \qquad \mathrm{PD}^2=(x+a)^2+(y-a)^2$$

然ルニ　$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2+\mathrm{PD}^2=4k^2$$

$$\therefore \quad 2(x+a)^2+2(x-a)^2+2(y+a)^2+2(y-a)^2=4k^2$$

$$\therefore \quad x^2+y^2+2a^2=k^2$$

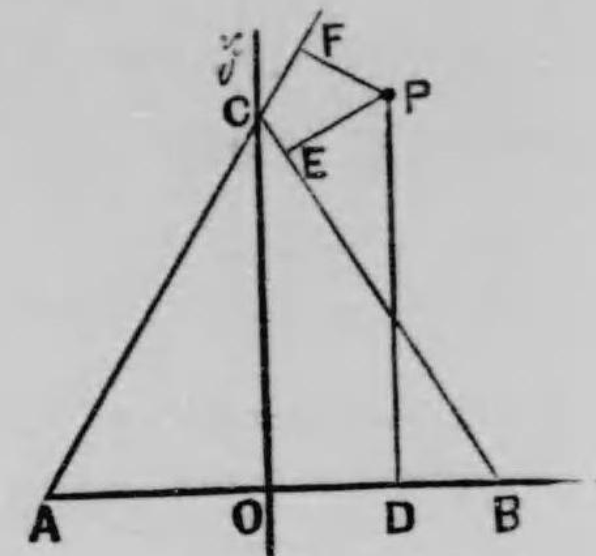
$$\therefore \quad x^2+y^2=k^2-2a^2$$

故ニ所要ノ軌跡ハ原點(正方形ノ對角線ノ交點)ヲ中心トシ, 半徑ガ $\sqrt{k^2-2a^2}$ ナル圓ナリ.

【注意】 $k^2>2a^2$ 從テ $k>\sqrt{2}a$ ナラザレバ問題ハ不可能ナリ.

【例 4】 定マレル正三角形 ABC ノ各邊ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ不易ニシテ k^2 ニ等シカルベキ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 邊 AB 及 C ヨリノ高サ CO ヲ兩軸ニ取レ. 一邊ノ長サヲ $2a$ トスレバ



$$OC=\sqrt{3}a$$

ナリ. 故ニ直線 BC ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{\sqrt{3}a}=1$$

從テ $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}a=0$

直線 AC ノ方程式ハ

$$(2)\qquad -\frac{x}{a}+\frac{y}{\sqrt{3}a}=1$$

從テ $-\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}a=0$

ソコデ所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x', y') トシ, P ヨリ AB, BC, CA ニ下シタル垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トセヨ. サスレバ

$$PD=y'$$

$$PE=\frac{\sqrt{3}x'+y'-\sqrt{3}a}{\pm 2}$$

$$PF=\frac{-\sqrt{3}x'+y'-\sqrt{3}a}{\pm 2}$$

然ルニ $PD^2+PE^2+PF^2=k^2$

$$\therefore\quad y'^2+\frac{(\sqrt{3}x'+y'-\sqrt{3}a)^2}{4}+\frac{(-\sqrt{3}x'+y'-\sqrt{3}a)^2}{4}=k^2$$

$$\therefore\quad 4y'^2+2(y'-\sqrt{3}a)^2+2(\sqrt{3}x')^2=4k^2$$

$$\therefore\quad 2y'^2+y'^2-2\sqrt{3}ay'+3a^2+3x'^2=2k^2$$

$$\therefore\quad 3(x'^2+y'^2)-2\sqrt{3}ay'=2k^2-3a^2$$

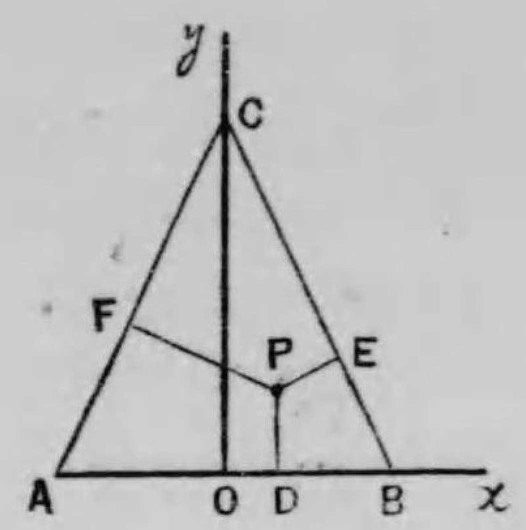
故ニ所要ノ軌跡ハ圓ナリ.

【例 5】 二等邊三角形ノ頂角内ノ一點ヨリ底邊ニ至ル距離ノ平方ガ他ノ二邊ニ至ル距離ノ積ニ等シカルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 底邊 AB 及頂點 C ヨリノ高サ CO ヲ兩軸ニ取リ

$$AB=2a,\qquad OC=b$$

トセヨ. サスレバ直線 BC ノ方程式ハ



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

從テ (1) $ab-bx-ay=0$

直線 AC ノ方程式ハ

$$-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

從テ (2) $ab+bx-ay=0$

ソコデ所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x', y') トシ, P ヨリ AB, BC, CA ニ下シタル垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トスレバ

$$PD=y'$$

次ニ $a>0$, $b>0$ ナルヲ以テ (1) 及 (2) ニテ表ハサルル直線ノ原點ニ面スル側ハ何レモ正ノ側ナリ. 因テ第 30 節ニヨリ

$$PE=\frac{ab-bx'-ay'}{\sqrt{b^2+a^2}},\qquad PF=\frac{ab+bx'-ay'}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

然ルニ $PD^2=PE.PF$

$$\therefore\quad y'^2=\frac{ab-bx'-ay'}{\sqrt{b^2+a^2}}\times\frac{ab+bx'-ay'}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$\therefore\quad y'^2=\frac{(ab-ay')^2-b^2x'^2}{b^2+a^2}$$

$$\therefore\quad (b^2+a^2)y'^2=a^2b^2-2a^2by'+a^2y'^2-b^2x'^2$$

$$\therefore\quad b^2(x'^2+y'^2)+2a^2by'=a^2b^2$$

$$\therefore\quad b(x'^2+y'^2)+2a^2y'=a^2b$$

故ニ所要ノ軌跡ハ圓ナリ.

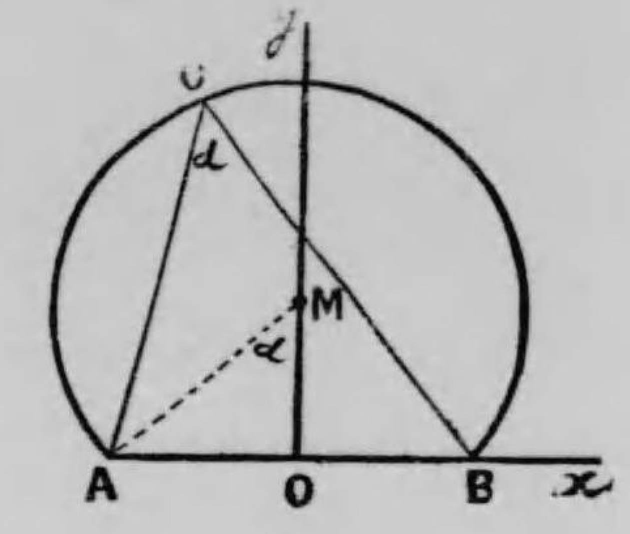
【例 6】 定線分 AB ヲ底邊トシ, 其同ジ側ニ於テ與ヘラレ

タル角 α ニ等シキ頂角ヲ有スル三角形 ABC ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 AB ヲ x 軸ニ取リ, AB ノ中點 O ヨリ AB ニ垂直ニ引キタル直線ヲ y 軸ニ取レ.

線分 AB ノ長サヲ $2a$ トスレバ

$$A(-a,\ 0),\qquad B(a,\ 0)$$



ソコデ所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 C ノ坐標(卽チ所要ノ方程式ノ流通坐標)ヲ $(x',\ y')$ トスレバ, 直線 AC ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \frac{y}{x+a}=\frac{y'}{x'+a}$$

又直線 BC ノ方程式ハ

$$(2)\qquad \frac{y}{x-a}=\frac{y'}{x'-a}$$

而シテ直線 BC, AC 間ノ角ハ α ニ等シキヲ以テ, 第33節ニヨリテ

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{y'}{x'-a}-\dfrac{y'}{x'+a}}{1+\dfrac{y'}{x'-a}\cdot\dfrac{y'}{x'+a}}=\frac{2ay'}{x'^2-a^2+y'^2}$$

$$\therefore\qquad x'^2+y'^2-2ay'\cot\alpha-a^2=0$$

$$\therefore\qquad x'^2+(y'-a\cot\alpha)^2=a^2\cot^2\alpha+a^2=a^2\operatorname{cosec}^2\alpha$$

故ニ所要ノ軌跡ハ中心ガ $(0,\ a\cot\alpha)$ ニシテ半徑ガ $a\operatorname{cosec}\alpha$ ナル圓, 卽チ上圖ニ於ケル M ヲ中心トシ, MA ヲ半徑トスル圓ノ弦 AB ガ張ル弧ナリ.

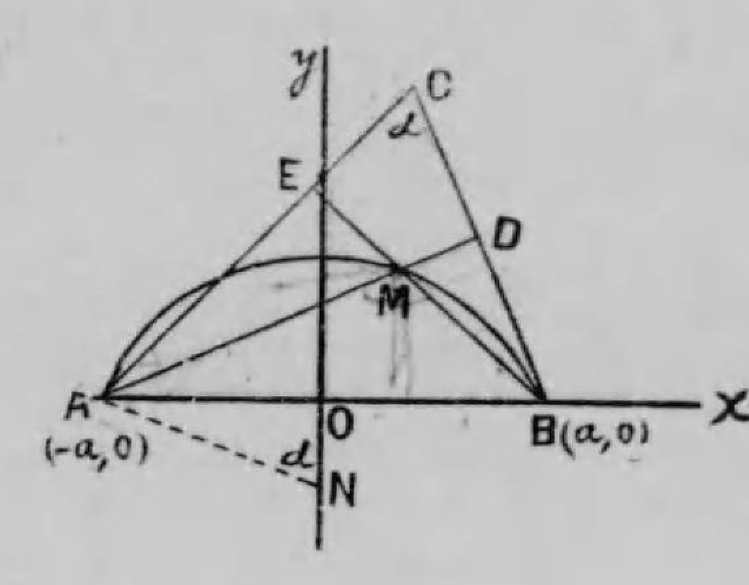
【例7】 定線分 AB ヲ底邊トシ,其同ジ側ニ於テ與ヘラレタル角 α ニ等シキ頂角 C ヲ有スル三角形ノ垂心ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 前例ト同ジ樣ニ兩軸ヲ取レ. 二直線 AC, BC ノ角係數ヲ夫々 $m,\ m'$ トスレバ, 直線 AC ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y=m(x+a)$$

直線 BC ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=m'(x-a)$$



ナリ. ソコデ A ヨリ BC ニ下シタル垂線ヲ AD トシ, B ヨリ AC ニ下シタル垂線ヲ BE トセヨ.

サスレバ直線 AD ノ方程式ハ

$$(3)\qquad y=-\frac{1}{m'}(x+a)$$

直線 BE ノ方程式ハ

$$(4)\qquad y=-\frac{1}{m}(x-a)$$

ナリ. 然ルニ

$$(5)\qquad \tan\alpha=\frac{m'-m}{1+m'm}$$

而シテ △ABC ノ垂心 M ハ二ツノ垂線 AD, BE ノ交點ナルヲ以テ, (3), (4), (5) ヨリ m 及 m' ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ, [第128頁消去法例1參照], 乃チ

$$(3)\ \text{ヨリ}\qquad m'=-\frac{x+a}{y}$$

$$(4)\ \text{ヨリ}\qquad m=-\frac{x-a}{y}$$

之ヲ(5)ニ代入スレバ

$$\tan\alpha=\frac{-\dfrac{x+a}{y}+\dfrac{x-a}{y}}{1+\dfrac{x^2-a^2}{y^2}}=\frac{-2ay}{y^2+x^2-a^2}$$

$$\therefore\qquad x^2+y^2+2ay\cot\alpha=a^2$$

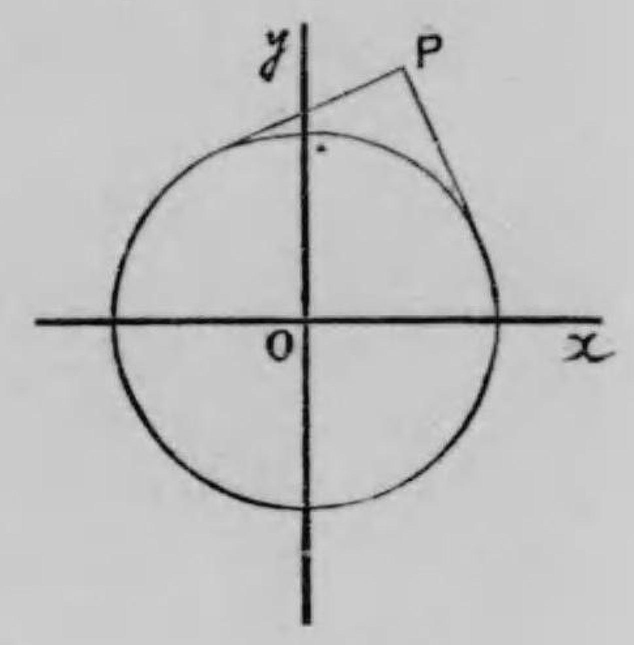
$$\text{卽チ}\qquad x^2+(y+a\cot\alpha)^2=a^2\cot^2\alpha+a^2=a^2\operatorname{cosec}^2\alpha$$

故ニ所要ノ軌跡ハ中心ガ $(0,\ -a\cot\alpha)$, 半徑ガ $a\operatorname{cosec}\alpha$ ナル圓, 卽チ上圖ニ於ケル N ヲ中心トシ NA ヲ半徑トスル圓ノ弦 AB ガ張ル弧ナリ.

【例8】 圓 O ノ互ニ垂直ナル二ツノ切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 圓 O ノ互ニ垂直ナル二ツノ直徑ヲ兩軸ニ取レ．

圓 O ノ半徑ヲ r トスレバ，此圓ノ方程式ハ



$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2$$

ナリ．今所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x', y') トシ，P ヨリ引ケル (1) ノ二ツノ切線ノ角係數ヲ求ムル爲ノ方程式ヲ作ラントス．切線

$$(2) \qquad y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

ガ (x', y') ヲ通ル爲ノ條件ハ

$$y'=mx'\pm r\sqrt{1+m^2}$$

從テ $\qquad (y'-mx')^2=r^2(1+m^2)$

從テ $\qquad m^2(x'^2-r^2)-2x'y'm+y'^2-r^2=0$

ナリ．ソコデ m ニ付テノ此二次方程式ノ二根ヲ m_1, m_2 トスレバ，根ト係數トノ關係ニヨリ

$$m_1m_2=\frac{y'^2-r^2}{x'^2-r^2}$$

然ルニ P ハ互ニ垂直ナル二ツノ切線ノ交點ナルヲ以テ

$$m_1m_2=-1$$

故ニ所要ノ軌跡ノ方程式ハ

$$\frac{y'^2-r^2}{x'^2-r^2}=-1$$

$$\therefore \qquad x'^2+y^2=2r^2$$

ニシテ，原點卽チ定圓ノ中心ヲ中心トシ，半徑ガ $\sqrt{2}r$ ナル圓ヲ表ハス．

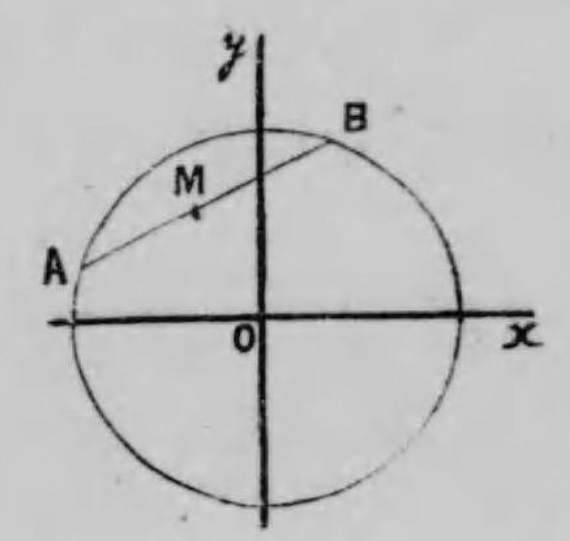
【例 9】 與ヘラレタル方向ヲ有スル，圓 O ノ平行弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ．

解 圓 O ノ方程式ヲ

$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2$$

トシ，平行弦ガ x 軸トナス角ヲ α トセヨ．

今平行弦ノ中ノ任意ノ一ツ AB ヲ取リ，其ノ中點 M ノ坐標卽チ所要ノ方程式ノ流通坐標ヲ (x', y') トスレバ，其方程式ハ第 20 節ニヨリ



$$(2) \qquad \frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\sin\alpha}=l$$

ナリ [ココニ l ハ M(x', y') ヨリ此直線上ノ (x, y) ニテ表ハサルル點ニ至ル距離ヲ表ハス]．

今點 M ヨリ弦ノ兩端 A, B ノ各ニ至ル距離ヲ求ムルニハ，(1) ト (2) トヲ聯立方程式トシテ解キテ l ノ値ヲ求ムレバヨシ．

サテ (2) ヨリ

$$x=x'+l\cos\alpha, \quad y=y'+l\sin\alpha$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$(x'+l\cos\alpha)^2+(y'+l\sin\alpha)^2=r^2$$

卽チ $\qquad x'^2+2lx'\cos\alpha+l^2\cos^2\alpha+y'^2+2ly'\sin\alpha+l^2\sin^2\alpha=r^2$

$\therefore \qquad l^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+2l(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha)+x'^2+y'^2-r^2=0$

卽チ $\qquad l^2+2l(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha)+x'^2+y'^2-r^2=0$

是ハ l ニ付テノ二次方程式ニシテ，其二根 l_1, l_2 ハ A, B ノ各ト M トノ距離ヲ表ハス．

サテ根ト係數トノ關係ニヨリテ

$$l_1+l_2=-2(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha)$$

然レニ M ハ弦 AB ノ中點ナルヲ以テ，l_1, l_2 ハ同ジ絕對値ヲ有シ．其符號ハ相反ス．

$$\therefore \qquad l_1+l_2=0$$

$$\therefore \qquad x'\cos\alpha+y'\sin\alpha=0$$

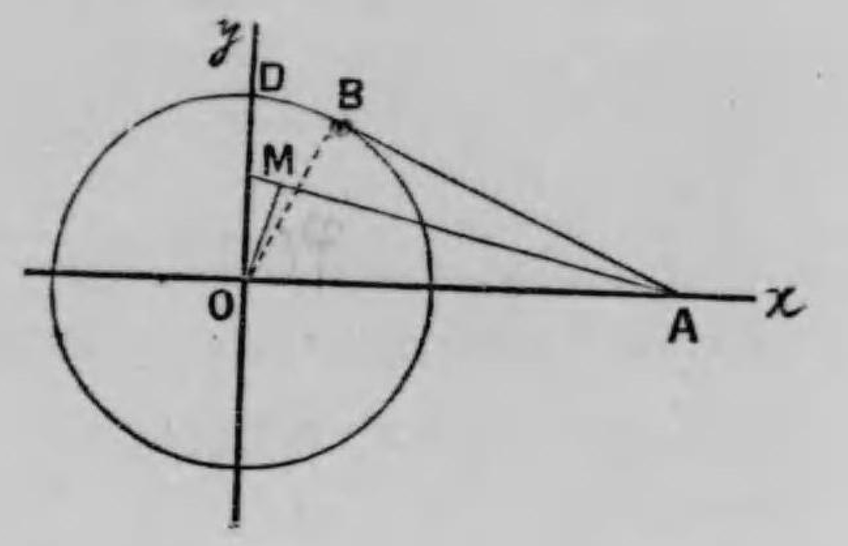
$$\therefore \qquad \frac{y'}{x'}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot\alpha$$

是レ所要ノ軌跡ノ方程式ニシテ，圓ノ中心 O ヲ通リ，平行線ノ各ニ垂直ナル直線ヲ表ハス．

【例 10】 圓 O ノ一ツノ直徑ノ延長上ノ任意ノ點 A ヨリ引

キタル切線ノ切點ヲ B トスルトキ, ∠OAB ノ二等分線上ニ投ズル中心 O ノ直射影 M ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　此直徑ヲ x 軸ニ取リ, 之ニ垂直ナル直徑ヲ y 軸ニ取レ. サスレバ圓ノ方程式ハ



$$(1) \qquad x^2+y^2=\mathrm{R}^2$$

[R ハ半徑]

O ト B トヲ結ビ付ケヨ. ∠AOB$=\varphi$ トオケバ, 點 B ノ坐標ハ

$$\mathrm{R}\cos\varphi, \qquad \mathrm{R}\sin\varphi \qquad \text{[第45節]}$$

ナルヲ以テ, 切線 AB ノ方程式ハ

$$\mathrm{R}x\cos\varphi+\mathrm{R}y\sin\varphi=\mathrm{R}^2$$

從テ

$$(2) \qquad x\cos\varphi+y\sin\varphi-\mathrm{R}=0$$

ナリ. 而シテ (2) ニテ表ハサルル直線ノ原點ニ面スル側ハ負ノ側ナルヲ以テ, ∠AOB ノ二等分線ノ方程式ハ第37節ニヨリテ

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-\mathrm{R}=-y$$

從テ

$$(3) \qquad x\cos\varphi+y(1+\sin\varphi)=\mathrm{R}$$

ナリ. サテ此二等分線上ニ投ズル點 O ノ直射影 M ノ軌跡ノ方程式ハ, (3) 及 OM ノ方程式, 卽チ

$$(4) \qquad \frac{x}{\cos\varphi}=\frac{y}{1+\sin\varphi}$$

ヨリ φ ヲ消去スルコトニヨリテ求メラル. ソレニハ先ヅ (4) ヨリ

$$\frac{x}{\cos\varphi}=\frac{y}{1+\sin\varphi}=\frac{x\cos\varphi+y(1+\sin\varphi)}{\cos^2\varphi+(1+\sin^2\varphi)^2}$$

$$=\frac{\mathrm{R}}{2(1+\sin\varphi)} \qquad \text{[(3) ニヨル]}$$

$$\therefore \qquad y=\frac{\mathrm{R}}{2}$$

故ニ所要ノ軌跡ハ y 軸ニ合スル半徑 OD ノ中點ヲ通リ x 軸ニ平行ナル直線ナリ.

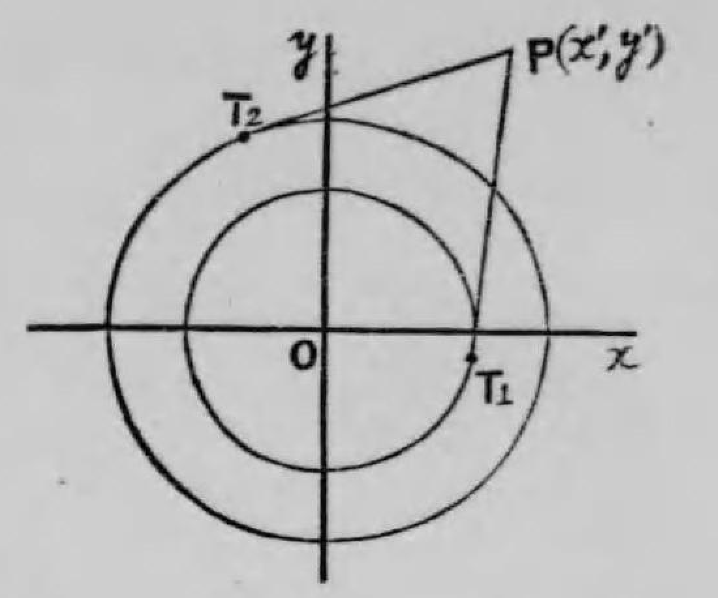
【例 11】 點 P ヨリ二ツノ同心圓

$$(1) \qquad x^2+y^2=r_1^2$$

$$(2) \qquad x^2+y^2=r_2$$

ノ各ヘ引ケル二ツノ切線ノ長サガ此等ノ圓ノ半徑ニ反比例スルトキ, 點 P ノ軌跡如何.

解　點 P ノ坐標ヲ (x', y') トシ, P ヨリ (1) 及 (2) ヘ引キタル切線ノ切點ヲ夫々 T_1 及 T_2 トセヨ. サスレバ



$$\frac{\mathrm{PT}_1}{\mathrm{PT}_2}=\frac{r_2}{r_1} \quad \text{從テ} \quad \frac{\mathrm{PT}_1^2}{\mathrm{PT}_2^2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$$

然ルニ第59節ニヨリテ

$$\mathrm{PT}_1^2=x'^2+y'^2-r_1^2$$

$$\mathrm{PT}_2^2=x'^2+y'^2-r_2^2$$

$$\therefore \qquad \frac{x'^2+y'^2-r_1^2}{x'^2+y'^2-r_2^2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$\therefore \qquad r_1^2(x'^2+y'^2)-r_1^4=r_2^2(x'^2+y'^2)-r_2^4$$

$$\therefore \qquad (x'^2+y'^2)(r_1^2-r_2^2)=(r_1^2-r_2^2)(r_1^2+r_2^2)$$

$$\therefore \qquad x'^2+y'^2=r_1^2+r_2^2$$

故ニ所要ノ軌跡ハ與ヘラレタル圓ト同心ナル一ツノ圓周ナリ.

【例 12】 定線分 AB 上ニ二點 R, S ヲ

$$\mathrm{AR}^2+\mathrm{RS}^2+\mathrm{SB}^2=c^2 \quad \text{(不易)}$$

ナル樣ニ取リ, 線分 RS ヲ底邊トスル正三角形 RSP ヲ直線 AB ノ同ジ側ニ畫クトキ, 頂點 P ノ軌跡如何.

解　直線 AB 及 A ヨリ之ニ垂直ニ引キタル直線ヲ兩軸ニ取リ

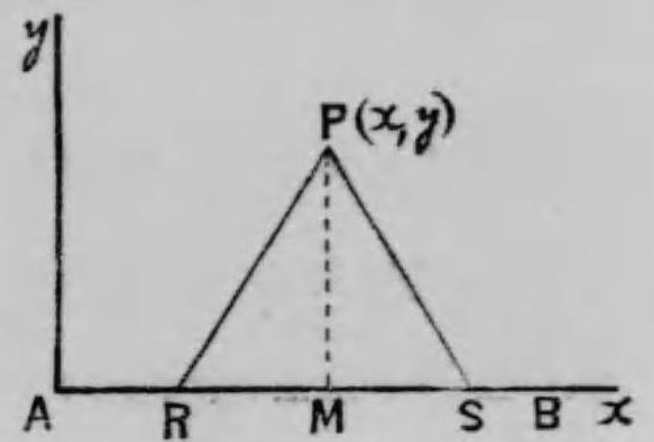
$$\mathrm{AB}=a, \qquad \mathrm{AR}=l, \qquad \mathrm{RS}=m$$

トセヨ. ココニ a ハ不易ニシテ l, m ノ値ハ R, S ノ位置ニヨリテ變化スル者ナリ.

今點 P ノ坐標ヲ (x, y) トシ, P ヨリ x 軸ニ下シタル垂線ノ足ヲ M トスレバ

(1)　$x=AM=AR+RM=l+m\cos60^\circ=l+\frac{m}{2}$

(2)　$y=MP=m\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}m}{2}$



然ルニ　$AR^2+RS^2+SB^2=c^2$

故ニ (3)　$l^2+m^2+(a-l-m)^2=c^2$

ソコデ(1),(2),(3)ヨリ變常數 l, m ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得, 即チ

(2) ヨリ　$m=\frac{2}{\sqrt{3}}y$

從テ(1)ヨリ　$l=x-\frac{m}{2}=x-\frac{1}{\sqrt{3}}y$

(3) ヨリ　$2l^2+2m^2+2lm-2a(l+m)=c^2-a^2$

$$\therefore\quad 2\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)^2+2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2y^2+2\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}y\right)$$
$$-2a\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{2}{\sqrt{3}}y\right)=c^2-a^2$$

$$\therefore\quad 2x^2-\frac{4}{\sqrt{3}}xy+\frac{2}{3}y^2+\frac{8}{3}y^2+\frac{4}{\sqrt{3}}xy-\frac{4}{3}y^2-2ax-\frac{2ay}{\sqrt{3}}=c^2-a^2$$

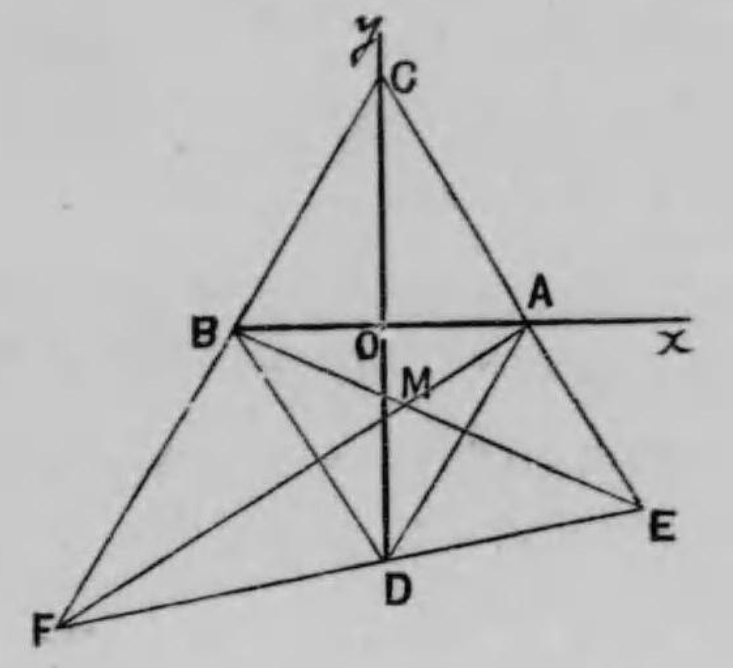
$$\therefore\quad 2(x^2+y^2)-2ax-\frac{2ay}{\sqrt{3}}=c^2-a^2$$

故ニ所要ノ軌線ハ圓ナリ.

【例 13】 定線分 AB ヲ底邊トシ, 其兩側ニ二ツノ正三角形 ABC, ABD ヲ畫ケ. 點 D ヲ通リテ任意ノ直線ヲ引キ二直線 CA, CB 又ハ其延長ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシムレバ, 二直線 AF 及 BE ノ交點 M ノ軌跡如何.

解 C ト D トヲ結ビ付クレバ線分 AB ヲ O ニ於テ垂直ニ二等分ス. ソコデ此二直線 AB, CD ヲ兩軸ニ取リ

$AB=2a$　從テ　$OC=a\sqrt{3}$



トセヨ. サスレバ直線 AC ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a\sqrt{3}}=1$$

從テ　(1)　$\sqrt{3}x+y-a\sqrt{3}=0$

直線 BC ノ方程式ハ

$$-\frac{x}{a}+\frac{y}{a\sqrt{3}}=1$$

從テ　(2)　$-\sqrt{3}x+y-a\sqrt{3}=0$

ナリ. 次ニ直線 EF ノ角係數ヲ m トスレバ, 點 D ノ坐標ハ $(0, -a\sqrt{3})$ ナルユエ, EF ノ方程式ハ

$$y+a\sqrt{3}=mx$$

從テ　(3)　$y+a\sqrt{3}-mx=0$

サテ(1)ト(3)トノ交點 E ヲ通ル直線ノ方程式ハ

$$\sqrt{3}x+y-a\sqrt{3}+\lambda(y+a\sqrt{3}-mx)=0$$

ニシテ, 此直線ガ點 B ヲ通ル爲ノ λ ノ値ヲ決定スルニハ, 上ノ方程式ニ於テ $x=-a$, $y=0$ トオカザルベカラズ, 即チ

$$-a\sqrt{3}-a\sqrt{3}+\lambda(a\sqrt{3}+ma)=0$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+m}$$

故ニ直線 BE ノ方程式ハ

$$\sqrt{3}x+y-a\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+m}(y+a\sqrt{3}-mx)=0$$

從テ　(4)　$(\sqrt{3}x+y-a\sqrt{3})(\sqrt{3}+m)+2\sqrt{3}(y+a\sqrt{3}-mx)=0$

トナル. 同樣ニシテ直線 AF ノ方程式ハ

(5)　$(-\sqrt{3}x+y-a\sqrt{3})(\sqrt{3}-m)+2\sqrt{3}(y+a\sqrt{3}-mx)=0$

(4)及(5)ヨリ m ヲ消去スレバ AF, BE ノ交點 M ノ軌跡ノ方程式ヲ得. ソレニハ先ヅ(4)ト(5)トヲ邊々加ヘ合ハセテ

$$2\sqrt{3}mx+2\sqrt{3}y-6a+4\sqrt{3}(y+a\sqrt{3}-mx)=0$$

$$\therefore \qquad mx+y-\sqrt{3}a+2y+2\sqrt{3}a-2mx=0$$

卽チ　(6)　$3y+\sqrt{3}a-mx=0$

ヲ求メ，次ニ(4)ト(5)トヲ邊々相減ジテ

$$6x+2my-2\sqrt{3}am=0$$

從テ　(7)　$3x+m(y-\sqrt{3}a)=0$

ヲ求メ，(6)及(7)ヨリ m ヲ消去スレバヨシ.

ソコデ(6)ヨリ

$$m=\frac{3y+\sqrt{3}a}{x}$$

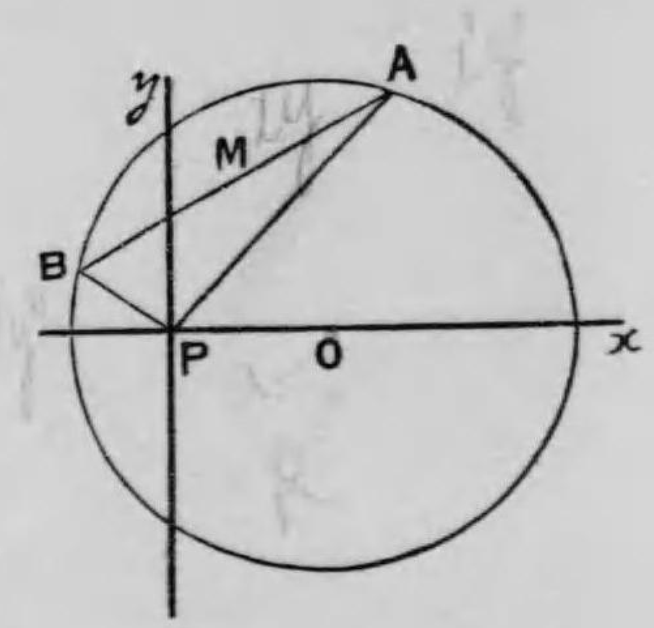
之ヲ(7)ニ代入スレバ

$$3x+\frac{(3y+\sqrt{3}a)(y-\sqrt{3}a)}{x}=0$$

故ニ　(8)　$3(x^2+y^2)-2\sqrt{3}ay-3a^2=0$

故ニ所要ノ軌跡ハ圓ナリ，而シテ △ABC ノ各頂點ノ坐標卽チ $x=a,\ y=0$; $x=-a,\ y=0$; $x=0,\ y=\sqrt{3}a$ ハ各組トモ(8)ニ適合スルヲ以テ此軌跡ハ △ABC ノ外接圓ナリ.

【例 14】 圓 O 內ノ定點 P ヨリ互ニ垂直ナル二ツノ半直線ヲ引キ圓周ト A, B ニ於テ交ハラシムルトキ，弦 AB ノ中點 M ノ軌跡如何.



解　直線 PO 及 P ヲ通リ PO ニ垂直ナル直線ヲ兩軸ニ取レ.

$$PO=a, \qquad 圓ノ半徑=R$$

トスレバ，圓 O ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+y^2=R^2$$

卽チ　(1)　$x^2+y^2-2ax+a^2-R^2=0$

ナリ. A, B ノ坐標ヲ夫々 (x', y'), (x'', y'') トセヨ. サスレバ A, B ハ圓 O ノ周上ニアルヲ以テ

(2)　$x'^2+y'^2-2ax'+a^2-R^2=0$

(3)　$x''^2+y''^2-2ax''+a^2-R^2=0$

又直線 PA ノ角係數ハ $\frac{y'}{x'}$，直線 PB ノ角係數ハ $\frac{y''}{x''}$ ニシテ，此等ノ二直線ハ互ニ垂直ナルヲ以テ

$$\frac{y'}{x'}\times\frac{y''}{x''}=-1$$

從テ　(4)　$x'x''+y'y''=0$

弦 AB ノ中點 M ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ

(5)　$x=\frac{x'+x''}{2}, \qquad y=\frac{y'+y''}{2}$

ソコデ(2),(3),(4),(5) ヨリ x', y', x'', y'' ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ，卽チ先ヅ(2)ト(3)トヲ邊々相加フレバ

(6)　$x'^2+x''^2+y'^2+y''^2-2a(x'+x'')+2(a^2-R^2)=0$

(4)ノ兩邊ヲ 2 倍シ，之ト(6)トヲ邊々相加フレバ

$$(x'+x'')^2+(y'+y'')^2-2a(x'+x'')+2(a^2-R^2)=0$$

ソコデ(5)ニヨリテ

$$4x^2+4y^2-4ax+2(a^2-R^2)=0$$

$$\therefore \qquad x^2+y^2-ax+\frac{a^2-R^2}{2}=0$$

故ニ所要ノ軌跡ハ線分 PO ノ中點ヲ中心トシ，半徑ガ $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-a^2}$ ナル圓ナリ.

【例 15】 定線分 AB ノ兩端ヨリ之ニ垂直ナル二ツノ線分 AA′, BB′ ヲ AA′×BB′=AB² ナル樣ニ AB ノ同ジ側ニ引クトキ，二直線 AB′, A′B ノ交點 M ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　直線 AB 及線分 AB ノ中點 O ヲ通リ此線分ニ垂直ナル直線ヲ兩軸ニ取レ.

$$AB=2a, \qquad AA'=l, \qquad BB'=m$$

トセヨ. [ココニ a ハ不易ニシテ, l, m ハ變ズル者ナリ] サスレバ

$$A(a, 0), \qquad B(-a, 0), \qquad A'(a, l), \qquad B'(-a, m)$$

故ニ直線 AB′ ノ方程式ハ

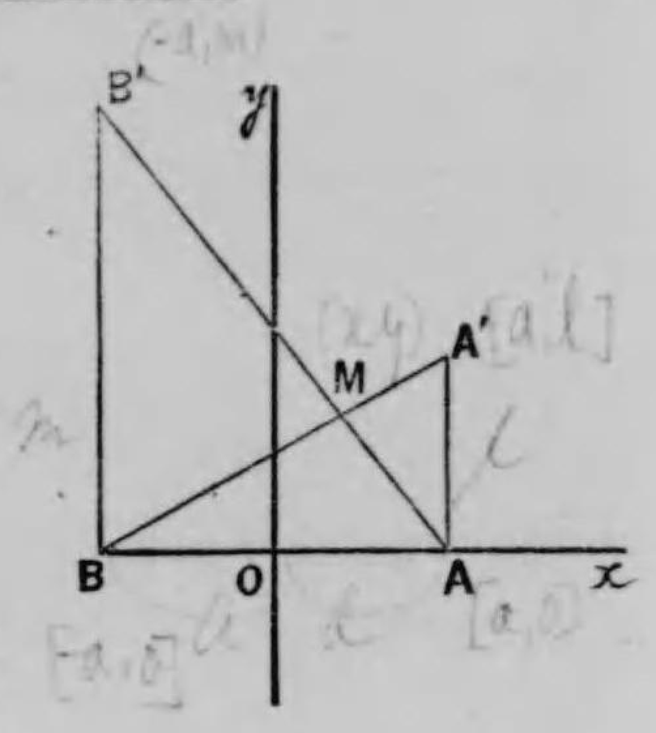
(1) $$\frac{y}{x-a}=\frac{m}{-2a}$$

直線 A′B ノ方程式

(2) $$\frac{y}{x+a}=\frac{l}{2a}$$

然ルニ $$AA'\times BB'=AB^2$$

∴ (3) $$lm=4a^2$$



(1), (2), (3) ヨリ l 及 m ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得, 卽チ (1) 及 (2) ヲ邊々相乘ズレバ

$$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{lm}{-4a^2}$$

故ニ (3) ニヨリテ

$$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{4a^2}{-4a^2}=-1$$

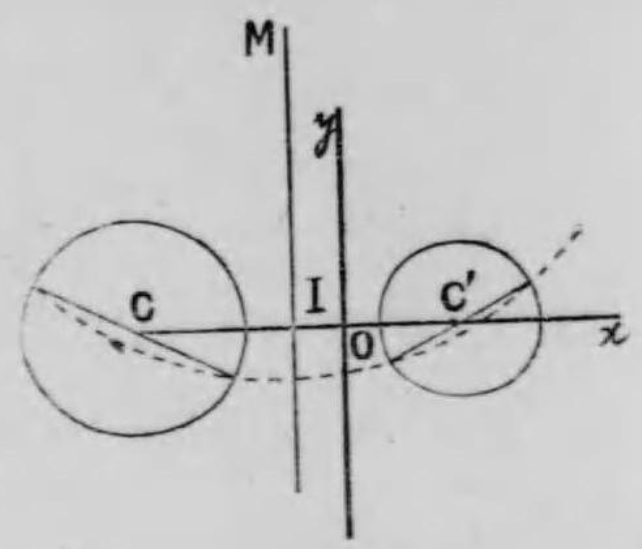
∴ $$x^2+y^2=a^2$$

故ニ所要ノ軌跡ハ線分 AB ヲ直徑トスル圓ナリ.

【例 16】 同心ナラザル二定圓 C 及 C′ ニ交ハリテ各ノ圓周ヲ二等分スル圓ノ中心 M ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　二ツノ定圓ノ中心線 CC′ ヲ x 軸ニ, 此二ツノ圓ノ根軸ヲ y 軸ニ取レ.

圓 C ノ中心ノ坐標ヲ $(a, 0)$, 其半徑ヲ r トシ, 圓 C′ ノ中心ノ坐標ヲ $(a', 0)$, 其半徑ヲ r' トセヨ. サスレバ圓 C ノ方程式ハ



$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

從テ $$x^2-2ax+a^2+y^2-r^2=0$$

圓 C′ ノ方程式ハ

$$(x-a')^2+y^2=r'^2$$ 從テ $$x^2-2a'x+a'^2+y^2-r'^2=0$$

故ニ此二定圓ノ根軸ノ方程式ハ

$$2(a'-a)x+a^2-r^2-(a'^2-r'^2)=0$$

然ルニ根軸ハ y 軸ナルヲ以テ其方程式ハ $x=0$ ナラザルベカラズ.

∴ $$a^2-r^2=a'^2-r'^2$$

ソコデ $$a^2-r^2=a'^2-r'^2=b^2$$

トオケバ, 此等ノ二ツノ圓ノ方程式ハ夫々

(1) $$x^2+y^2-2ax+b^2=0$$

(2) $$x^2+y^2-2a'x+b^2=0$$

[ココニ a, a', b ハ何レモ常數]

次ニ所要ノ圓 M ノ方程式ヲ

(3) $$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$$

[ココニ α, β, γ ハ圓ノ位置ニヨリテ其値變化スルモノナリ]

トセンニ, 二ツノ圓 C 及 M ノ根軸ノ方程式ハ

(4) $$2(\alpha-a)x+2\beta y+b^2-\gamma=0$$

此根軸ガ圓 C ノ直徑ニ合スルタメ, 換言スレバ (4) ガ中心 C ヲ通ル爲ニハ, C ノ坐標 $(a, 0)$ ガ (4) ニ適合セザルベカラズ; 卽チ

(5) $$2a(\alpha-a)+b^2-\gamma=0$$

ナラザルベカラズ.

同樣ニ二ツノ圓 C′ 及 M ノ共通弦ガ圓 C′ ノ直徑ニ合スルタメノ條件ハ

(6) $$2a'(\alpha-a')+b^2-\gamma=0$$

サテ圓 M ノ中心ノ坐標ハ (α, β) ナルヲ以テ, 圓 M ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルニハ (5), (6) ヨリ變常數 γ ヲ消去シテ α, β 間ノ關係ヲ表ハス方程式ヲ作レバヨシ. ソコデ γ ヲ消去スルタメニ (5), (6) ヲ邊々相減ズレバ

$$2a(\alpha-a)-2a'(\alpha-a')=0$$

∴ $$\alpha(a-a')-(a^2-a'^2)=0$$

∴ $$(a-a')[\alpha-(a+a')]=0$$

然ルニ $$a-a'\neq 0$$

∴ $$\alpha-(a+a')=0$$

∴ (7) $$\alpha=a+a'$$

是レ所要ノ軌跡ノ方程式ナリ. 此 α ハ圓 M ノ中心ノ横坐標ナルヲ以テ之ヲ x ニテ置換フレバ, (7) ハ

$$x=a+a'$$

トナリテ y 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス.

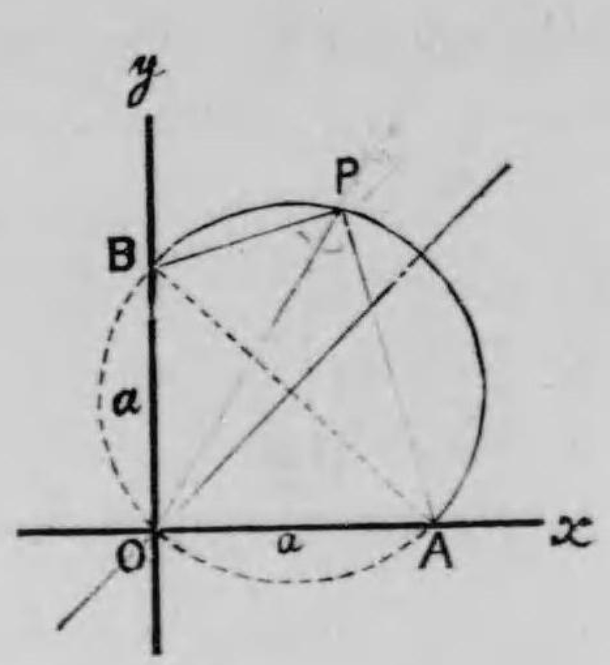
而シテ線分 CC′ ノ中點 I ノ横坐標ハ $\dfrac{a+a'}{2}$ ナルヲ以テ, 所要ノ軌跡ハ點 I ニ關シテ二ツノ定圓 C, C′ ノ根軸ニ對稱ナル直線ナリ.

【例 17】 定點 O ヨリ引ケル互ニ垂直ナル二定半直線 Ox, Oy 上ニ夫々點 A, B ヲ OA＝OB＝a ナル様ニ取ルトキ, 此二線分ノ各ヲ等角ニ見込ム點 P ノ軌跡如何. 但シ a ハ不易ナリ.

解 此二定直線ヲ兩軸ニ取レ.

サスレバ　A$(a, 0)$,　B$(0, a)$

ナリ. 今點 P ノ坐標ヲ (x', y') トシ, O ト P トヲ結ビ付ケヨ.



直線 OP ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}$$

直線 AP ノ方程式ハ

$$(2)\qquad \frac{y}{x-a}=\frac{y'}{x'-a}$$

直線 BP ノ方程式ハ

$$(3)\qquad \frac{y-a}{x}=\frac{y'-a}{x'}$$

$$\therefore\qquad \tan\mathrm{OPA}=\frac{\dfrac{y'}{x'-a}-\dfrac{y'}{x'}}{1+\dfrac{y'^2}{x'(x'-a)}}=\frac{ay'}{x'(x'-a)+y'^2}$$

$$\text{又}\qquad \tan\mathrm{OPB}=\frac{\dfrac{y'}{x'}-\dfrac{y'-a}{x'}}{1+\dfrac{y'(y'-a)}{x'^2}}=\frac{ax'}{x'^2+y'(y'-a)}$$

$$\text{然ルニ}\qquad \angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OPB}$$

$$\therefore\qquad \frac{ay'}{x'(x'-a)+y'^2}=\frac{ax'}{x'^2+y'(y'-a)}$$

$$\therefore\qquad x'^2y'+y'^2(y'-a)=x'^2(x'-a)+x'y'^2$$

$$\therefore\qquad (x'^3-x'^2y')+(x'y'^2-y'^3)-a(x'^2-y'^2)=0$$

$$\therefore\qquad x'^2(x'-y')+y'^2(x'-y')-a(x'-y')(x'+y')=0$$

$$\therefore\qquad (x'-y')(x'^2+y'^2-ax'-ay')=0$$

故ニ

$$(4)\qquad x'-y'=0$$

$$\text{及}\qquad x'^2+y'^2-ax'-ay'=0$$

$$\text{從テ}\qquad (5)\qquad \left(x'-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

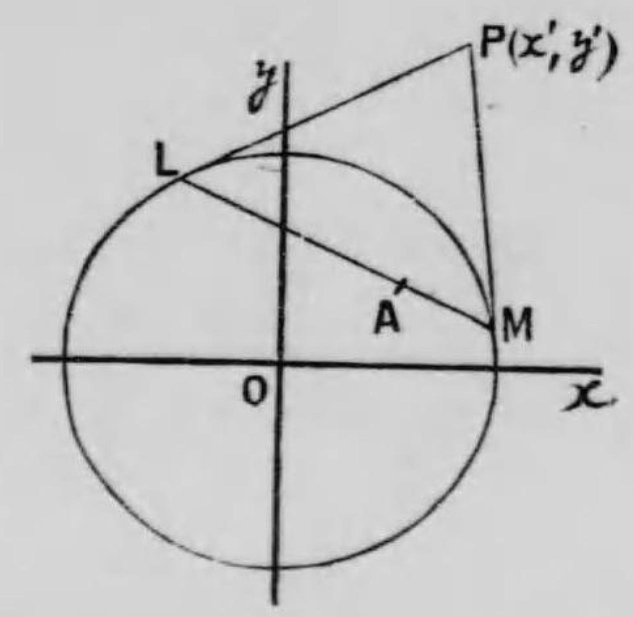
ガ所要ノ軌跡ノ方程式ナリ. 卽チ所要ノ軌跡ハ兩軸間ノ二等分線及線分 AB ヲ直徑トスル半圓周ナリ.

【例 18】 定點 A ヲ通ル任意ノ直線ノ定圓 O ニ關スル極 P ノ軌跡如何.

解 互ニ垂直ナル二ツノ直徑ヲ兩軸ニ取リ, 圓 O ノ半徑ヲ r トセヨ. サスレバ圓 O ノ方程式ハ

$$(1)\qquad x^2+y^2=r^2$$

ナリ. 定點 A ノ坐標ヲ (h, k) トシ, 極 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ點 P ノ定圓 O ニ關スル極線 LM ノ方程式ハ



$$(2)\qquad x'x+y'y=r^2$$

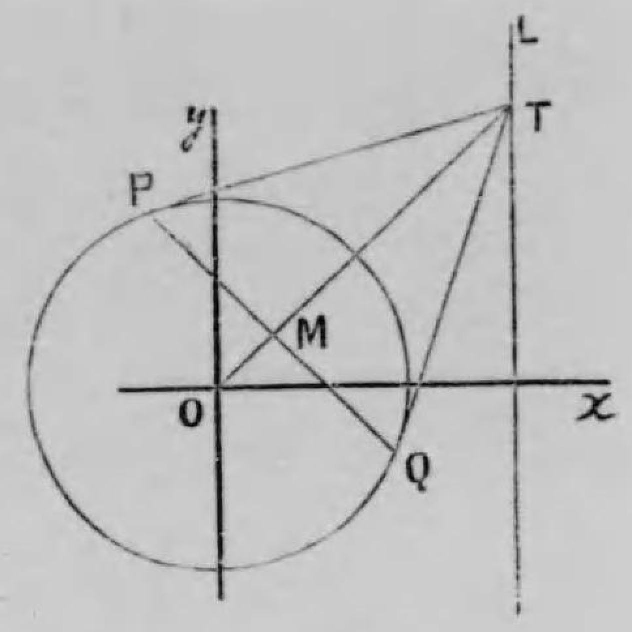
ナリ. 然ルニ LM ハ必ズ定點 A(h, k) ヲ通ルヲ以テ $x=h$, $y=k$ ハ (2) ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore\qquad (3)\qquad x'h+k'y=r^2$$

是レ極 P ノ軌跡ノ方程式ニシテ, コハ定點 A(h, k) ノ極線ニ外ナラズ, 卽チ P ノ軌跡ハ A ノ極線ナリ.

【例19】 定圓Oノ外ニアル定直線L上ノ任意ノ點ヨリ圓Oニ引ケル切線ノ切弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 定直線Lニ垂直ナル直徑及Lニ平行ナル直徑ヲ兩軸ニ取レ.



圓Oノ半徑ヲrトスレバ, 圓Oノ方程式ハ

$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2$$

又y軸トLトノ距離ヲaトスレバ, 直線Lノ方程式ハ

$$(2) \qquad x=a$$

今直線L上ノ任意ノ點Tノ坐標ヲ(a, y')トスレバ, Tヨリ圓Oニ引キタル切線ノ切弦PQ(卽チTノ極線)ノ方程式ハ

$$(3) \qquad ax+y'y=r^2$$

又直線OTノ方程式ハ

$$(4) \qquad \frac{y}{x}=\frac{y'}{a}$$

ナリ.

然ルニOTトPQトノ交點ハ弦PQノ中點Mナルヲ以テ, (3)及(4)ヲ聯立方程式ト考ヘテ, 其レヨリ變常數y'ヲ消去スレバ點Mノ軌跡ノ方程式ヲ得, 卽チ(4)ヨリ

$$y'=\frac{ay}{x}$$

之ヲ(3)ニ代入スレバ

$$ax+\frac{ay^2}{x}=r^2$$

$$\therefore \qquad a(x^2+y^2)-r^2x=0$$

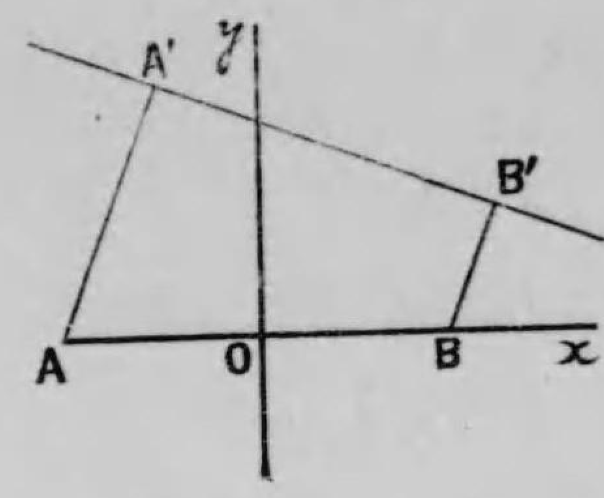
故ニ所要ノ軌跡ハ中心ガ$\left(\frac{r^2}{2a}, 0\right)$ニシテ原點ヲ通ル圓ナリ.

【例20】 位置ガ移動スル直線ヘ二定點A, Bヨリ下シタル

垂線AA′, BB′ノ積ガ不易ナルトキ, 其垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 定線分ABノ中點Oヲ原點トシ, 直線AB及Oヲ通リ之ニ垂直ナル直線ヲ兩軸ニ取レ. $AB=2a$トスレバ

$$A(-a, 0), \qquad B(a, 0)$$



ナリ. 直線A′B′ノ方程式ヲ

$$(1) \qquad y=mx+b$$

トセヨ. サレバ

$$AA'=\frac{-ma+b}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$BB'=\frac{ma+b}{\sqrt{1+m^2}}$$

然ルニ $\qquad AA'.BB'=k^2 \qquad$ [kハ不易]

$$\therefore \qquad \frac{b-ma}{\sqrt{1+m^2}}\times\frac{b+ma}{\sqrt{1+m^2}}=k^2$$

$$\therefore \qquad (2) \qquad b^2-m^2a^2=k^2(1+m^2)$$

又直線AA′ノ方程式ハ

$$(3) \qquad y=-\frac{1}{m}(x+a)$$

直線BB′ノ方程式ハ

$$(4) \qquad y=-\frac{1}{m}(x-a)$$

故ニ(1), (2), (3)ヨリm及bヲ消去スレバ點A′ノ軌跡ノ方程式ヲ得. 卽チ

(3)ヨリ $\qquad (3)' \qquad my+x=-a$

(1)ヨリ $\qquad (1)' \qquad y-mx=b$

(3)′及(1)′ノ兩邊ヲ平方シテ邊々相加フレバ

$$m^2y^2+2mxy+x^2+y^2-2mxy+m^2x^2=a^2+b^2$$

$$\therefore \qquad y^2(1+m^2)+x^2(1+m^2)=a^2+b^2$$

此式ト(2)トヲ邊々相加フレバ

$$y^2(1+m^2)+x^2(1+m^2)+b^2-m^2a^2=a^2+b^2+k^2(1+m^2)$$

$\therefore \quad x^2(1+m^2)+y^2(1+m^2)=a^2(1+m^2)+k^2(1+m^2)$

故ニ此兩邊ヲ $1+m^2$ ニテ割レバ

$$(5) \qquad x^2+y^2=a^2+k^2$$

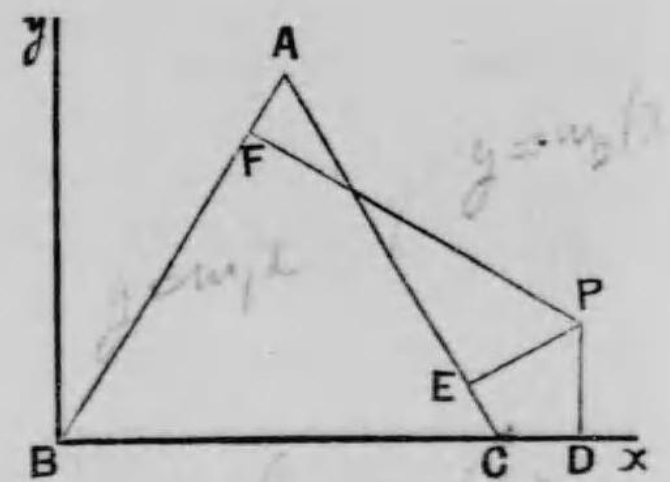
故ニ點 A′ ノ軌跡ハ原點ヲ中心トシ半徑ガ $\sqrt{k^2+a^2}$ ナル圓ナリ.

又點 B ノ軌跡ノ方程式ハ (1), (2), (4) ヨリ m 及 b ヲ消去スルコトニヨリテ求メラル. サレドモ (3) ト (4) トハ單ニ a ノ符號ガ異ナルダケナレバ上ト同様ナル演算ヲ一々繰返スニ及バズ, 唯上ノ結果 (5) ニ於ケル a ノ符號ヲ變ヘルダケニテヨシ, 然ルニ (5) ハ a ノ平方ノミヲ含ムヲ以テ a ノ符號ヲ變ヘテモ結果ハ變ハラズ, 卽チ點 B′ ノ軌跡モ亦點 A′ ノ軌跡ト同一ナル圓ナリ

【例 21】 △ABC ノ各邊ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ不易ナルベキ點ノ軌跡ガ圓トナル爲ニハ, △ABC ハ如何ナル種類ノ三角形ナルベキカ.

解 底邊 BC 及 B ヨリ之ニ垂直ニ引キタル直線ヲ兩軸ニ取リ

$$BC=l$$



トスレバ, 點 C ノ坐標ハ $(l, 0)$ ナリ. 次ニ二直線 AB, AC ノ角係數ヲ夫々 m_1, m_2 トセヨ. サスレバ直線 AB ノ方程式ハ

$$(1) \qquad y=m_1x \qquad 從テ \qquad y-m_1x=0$$

直線 AC ノ方程式ハ

$$(2) \qquad y=m_2(x-l)$$

$$從テ \qquad y-m_2(x-l)=0$$

ナリ. ソコデ軌跡上ノ一點 P ノ坐標ヲ (x', y') トシ, P ヨリ BC, CA, AB ニ下シタル垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トスレバ

$$PD=y'$$

$$PE=\pm\frac{y'-m_2(x'-l)}{\sqrt{1+m_2{}^2}}$$

$$PF=\pm\frac{y'-m_1x'}{\sqrt{1+m_1{}^2}}$$

$$然ルニ \qquad PD^2+PE^2+PF^2=k^2 \qquad [k ハ不易]$$

$$\therefore \qquad y'^2+\frac{\{y'-m_2(x'-l)\}^2}{1+m_2{}^2}+\frac{(y'-m_1x')^2}{1+m_1{}^2}=k^2$$

是ガ點 P ノ軌跡ノ方程式ナリ.

サテ此軌跡ガ圓ナル爲ニハ第 48 節ニ述ベタルコトニヨリテ此方程式ノ x'^2, y'^2 ノ係數ハ相等シク, $x'y'$ ノ係數ガ 0 ナラザルベカラズ. 卽チ

$$(3) \qquad 1+\frac{1}{1+m_2{}^2}+\frac{1}{1+m_1{}^2}=\frac{m_2{}^2}{1+m_2{}^2}+\frac{m_1{}^2}{1+m_1{}^2}$$

$$(4) \qquad -\frac{2m_2}{1+m_2{}^2}-\frac{2m_1}{1+m_1{}^2}=0$$

$$(4) ヨリ \qquad m_2(1+m_1{}^2)+m_1(1+m_2{}^2)=0$$

$$\therefore \qquad (m_2+m_1)+m_1m_2(m_1+m_2)=0$$

$$\therefore \qquad (m_1+m_2)(1+m_1m_2)=0$$

$$\therefore \qquad 1+m_1m_2=0 \qquad 或ハ \qquad m_1+m_2=0$$

ソコデ (3) ニ於テ $1+m_1m_2=0$ 從テ $m_2=-\dfrac{1}{m_1}$ トオケバ

$$1+\frac{m_1{}^2}{m_1{}^2+1}+\frac{1}{1+m_1{}^2}=\frac{1}{m_1{}^2+1}+\frac{m_1{}^2}{1+m_1{}^2}$$

$$\therefore \qquad 1=0$$

是レ不合理ナリ. 故ニ此場合ハ棄テザルベカラズ.

次ニ (3) ニ於テ $m_1+m_2=0$ 從テ $m_2=-m_1$ トオケバ

$$1+\frac{2}{1+m_1{}^2}=\frac{2m_1{}^2}{1+m_1{}^2}$$

$$\therefore \qquad 1+m_1{}^2+2=2m_1{}^2$$

$$\therefore \qquad m_1{}^2=3$$

$$\therefore \qquad m_1=\sqrt{3} \qquad 從テ \qquad m_2=-\sqrt{3}$$

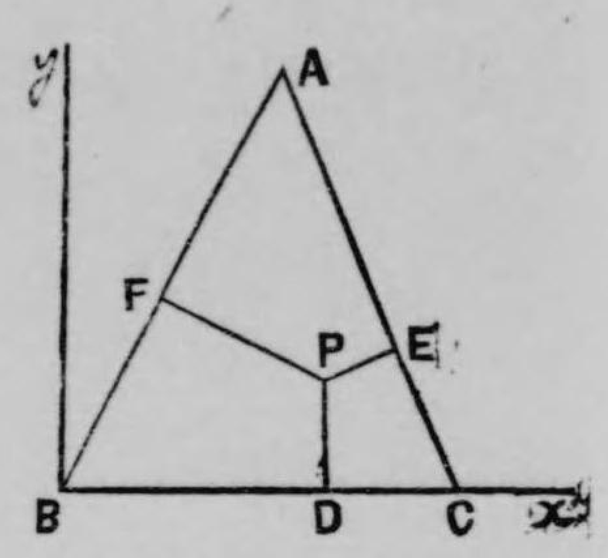
$$\therefore \qquad \angle ABC=60^\circ, \qquad \angle BCA=120^\circ$$

故ニ △ABC ハ正三角形ナリ.

【例 22】 動點 P ノ △ABC ノ底邊 BC ヨリノ距離ノ平方ト同ジ點ノ他ノ二邊ヨリノ距離ノ積トノ比ガ不易ナルトキ,

P ノ軌跡ガ圓周トナル爲ニハ, △ABC ハ如何ナル種類ノ三角形ナルベキカ.

解　前例ノ圖ヲ用フレバ



$$\mathrm{PD}=y'$$

$$\mathrm{PE}=\pm\frac{y'-m_2(x'-l)}{\sqrt{1+m_2{}^2}}$$

$$\mathrm{PF}=\pm\frac{y'-m_1x'}{\sqrt{1+m_1{}^2}}$$

然ルニ　$\mathrm{PD}^2=k.\mathrm{PE}.\mathrm{PF}$　[k ハ不易]

$$\therefore\quad y'^2=\pm\frac{k(y'-m_1x')\{y'-m_2(x'-l)\}}{\sqrt{1+m_1{}^2}\sqrt{1+m_2{}^2}}$$

是ガ點 P ノ軌跡ノ方程式ナリ.

サテ此軌跡ガ圓ナル爲ニハ x'^2 及 y'^2 ノ係數ガ相等シク且ツ $x'y'$ ノ係數ハ 0 ナラザルベカラズ, 卽チ

$$(1)\qquad \sqrt{(1+m_1{}^2)(1+m_2{}^2)}\mp k=\mp km_1m_2$$

$$(2)\qquad \pm k(m_1+m_2)=0$$

然ルニ $k\neq 0$ ナルヲ以テ, (2) ヨリ

$$(3)\qquad m_1+m_2=0\qquad 從テ\qquad m_2=-m_1$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$1+m_1{}^2\mp k=\pm km_1{}^2$$

$$\therefore\quad 1+m_1{}^2=\pm k(1+m_1{}^2)$$

$$\therefore\quad k=\pm 1$$

サテ k ハ正數ナルベキヲ以テ

$$(4)\qquad k=1$$

因テ點 P ノ軌跡ガ圓ナル爲ニハ △ABC ハ BC ヲ底邊トスル二等邊三角形ニシテ $\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PE.PF}}=1$ ナルコトヲ要ス.

【例 23】 定圓 O 外ノ一定點 P ヨリ任意ノ半直線ヲ引キ圓周ト L, M ニ於テ交ハラシメ, 此半直線上ニ於テ點 N ヲ取

欠

欠

$$\therefore \quad 3r^2-4\sqrt{3}ar\cos(\theta-30^\circ)+4a^2\cos^2(\theta-30^\circ)=0$$

即チ
$$[\sqrt{3}r-2a\cos(\theta-30^\circ)]^2=0$$

$$\therefore \quad \sqrt{3}r-2a\cos(\theta-30^\circ)=0$$

$$\therefore \quad r=2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\cos(\theta-30^\circ)$$

故ニ所要ノ軌跡ハ正三角形 ABC ノ外接圓ナリ.

問　題

1. 定圓 O 内ノ定點ヲ P トシ, 直線 OP ニ平行ナル任意ノ弦ヲ AB トスレバ, PA^2+PB^2 ハ不易ナルコトヲ證明セヨ.

2. 二ツノ圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 及 $(x-b)^2+(y-a)^2=r^2$ ノ共通弦ノ長サヲ求メヨ. 且ツ其結果ヲ用ヒテ此兩圓ガ互ニ相切スル爲ノ條件ヲ求メヨ.

3. 圓ノ中心ヨリ或點ニ至ル距離ト其圓ニ關スル此點ノ極線ニ至ル距離トノ積ハ不易ナルコトヲ證明セヨ.

4. △ABC ノ底邊 AB ノ位置及其長サガ定マリ, 其他ノ二邊ノ平方ノ和ガ不易ナルトキ, 其頂點 C ノ軌跡ヲ求メヨ.

5. 定正方形 ABCD ノ各邊ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ不易ナルベキ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

6. 點 P ヨリ二ツノ圓 $x^2+y^2=3$ 及 $x^2+y^2=3x+6$ ヘ引

ケル二ツノ切線ノ長サノ比ガ 2 : 3 ニ等シキトキ, 點 P ノ軌跡如何.

7. 定圓 C 上ノ任意ノ點 P ニ於ケル切線ヘ定點 S ヨリ垂線 SY ヲ引キ, 又 P ヨリ直線 CS ニ垂線 PM ヲ引キ, MP 又ハ其延長ノ上ニ SY ニ等シク MQ ヲ取ルトキ點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ.

第四編

抛物線

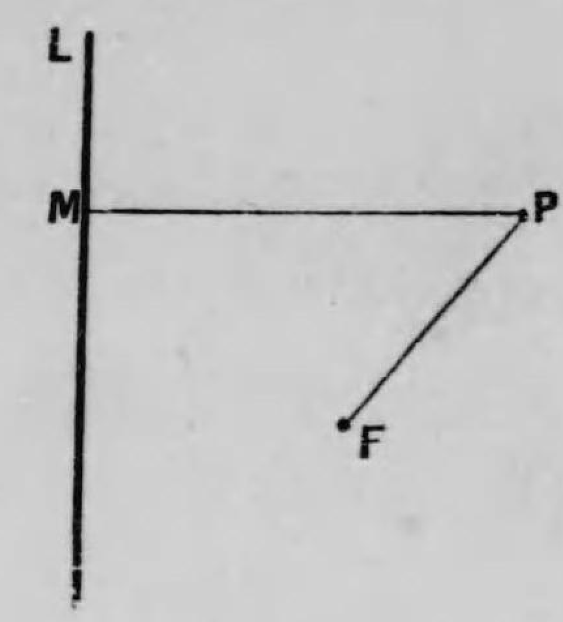
第一章 抛物線ノ方程式(平行坐標)

69. 圓錐曲線

定義 點 P ノ定點 F ヨリノ距離 PF ト定直線 L ヨリノ距離 PM トノ比ガ不易ニシテ e ニ等シキトキ, 卽チ

$$PF = e.PM$$

ナルトキ, 點 P ノ軌跡ヲ名ヅケテ**圓錐曲線**トイフ.



而シテ $e=1$ ナルトキノ軌跡ヲ**抛物線**トイヒ, $e<1$ ナルトキノ軌跡ヲ**橢圓**トイヒ, $e>1$ ナルトキノ軌跡ヲ**雙曲線**トイフ.

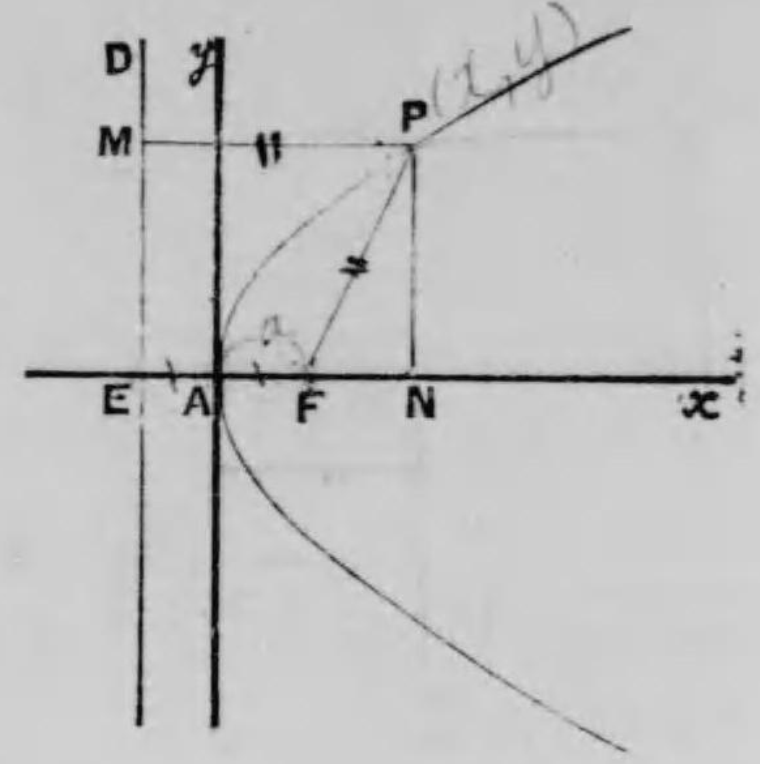
何レニシテモ定點 F ヲ**焦點**, 定直線 L ヲ**準線**, 比 e ヲ**離心率**トイフ.

【注意 1】 上ニ述ベタル三ツノ曲線ヲ圓錐曲線ト名ヅクル所以ハ, 直圓錐ヲ任意ノ平面ニテ截ルトキ, 其截口ナル線ガ此等ノ曲線ノ中ノ何レカ一ツ(若クハ其特別ナル場合ノ圖形)トナルニヨルナリ.

【注意 2】 之ヨリ編ヲ分チテ順次ニ拋物線, 楕圓, 双曲線ニ就テ講述シ, 更ニ此等ヲ總括シテ述ベントス.

70. 拋物線ノ方程式ノ標準ノ形式

焦點 F ヨリ準線 D ニ下シタル垂線ノ足ヲ E トシ, 線分 EF ノ中點ヲ A トセヨ.



サスレバ AE=AF ナルヲ以テ點 A ハ拋物線上ノ一點ナリ.

サテ半直線 AF ヲ x 軸ニ取リ, 點 A ヨリ AF ニ垂直ニ引キタル直線ヲ y 軸ニ取レ. 拋物線上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x, y) トシ, P ト F トヲ結ビ付ケ, 又 P ヨリ準線及 x 軸ニ下シタル垂線ノ足ヲ夫々 M, N トセヨ.

サスレバ拋物線ノ定義ニヨリ

$$PF=PM$$

$$\therefore \quad PF^2=PM^2$$

ソコデ $AF=a$ ト置ケバ F ノ坐標ハ $(a, 0)$ ナリ.

$$\therefore \quad PF^2=(x-a)^2+y^2$$

$$PM^2=EN^2=(EA+AN)^2=(a+x)^2$$

$$\therefore \quad x^2-2ax+a^2+y^2=a^2+2ax+x^2$$

故ニ

$$(1) \qquad y^2=4ax$$

是レ所要ノ拋物線ノ方程式ナリ. $y^2=2px$.

定義 點 A ヲ拋物線ノ**頂點**トイヒ, 頂點ト焦點トヲ通ル直線ヲ拋物線ノ**軸**トイフ.

【注意 1】 準線ノ方程式ハ $x=-a$ 即チ $x+a=0$ ナリ.

71. 拋物線ノ形狀ノ研究

前節ニ於テ求メ得タル拋物線ノ方程式

$$(1) \qquad y^2=4ax \quad [a>0]$$

ヨリ

$$(2) \qquad y=\pm 2\sqrt{ax}$$

ヲ得. 而シテ $a>0$ ナルユヱ, $x<0$ ナルトキハ (2) ノ右邊ノ根號内ノ式ハ負數トナリ, 從テ y ノ値ハ虚數トナル. 因テ

(第一) 拋物線(1)ハ y 軸ノ右方ニ於テノミ存在ス.

又 $x \geqq 0$ ニ適スル x ノ各ノ値ニ對應スル y ノ値ハ二ツアリテ其絶對値ハ同一ニシテ其符號ハ相反ス. 因テ

(第二) 拋物線(1)ハ x 軸ニ關シテ對稱ナリ.

次ニ x ノ値ガ漸々大キクナルニ從ヒテ, y ノ絶對値モ亦漸々大キクナリ, 竟ニ $x=\infty$ トナレバ $y=\pm\infty$ トナル. 因テ

(第三) 拋物線(1)ハ無限ニ遠キ所マデ擴ガル.

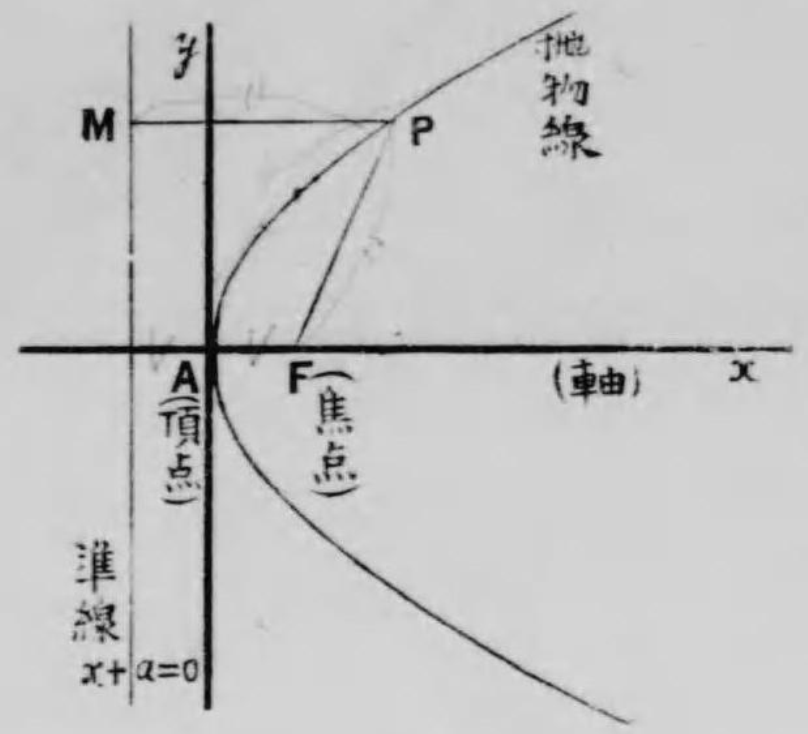
以上三ツノ結果ヲ綜合スレバ, 拋物線(1)ノ形狀ハ大凡ソ次

ノ(甲圖)ノ如クニナルコトヲ知ルベシ.

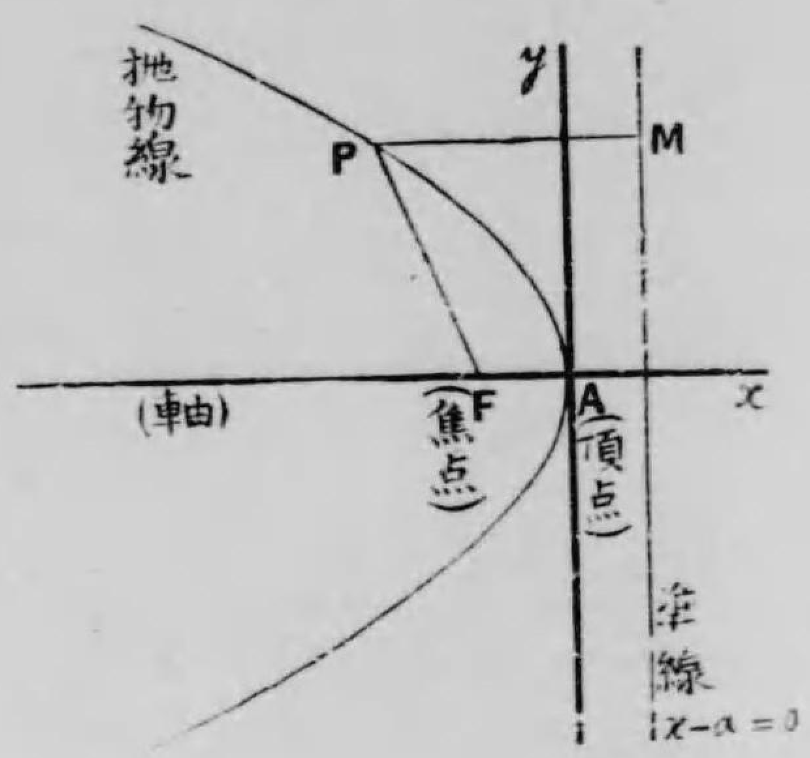
【注意 1】　(3)　$y^2=-4ax$　$[a>0]$

ハ何ヲ表ハスカトイフニ, 是ハ(1)ノ右邊ニ於ケル a ノ符號ヲ變ヘタル者ニ外ナラズ, 從テ焦點ガ y 軸ノ左, 準線ガ y 軸ノ右ニアル拋物線ヲ表ハスベシ. 因テ其位置ハ次ノ(乙圖)ノ如クニナル.

(甲圖)



(乙圖)



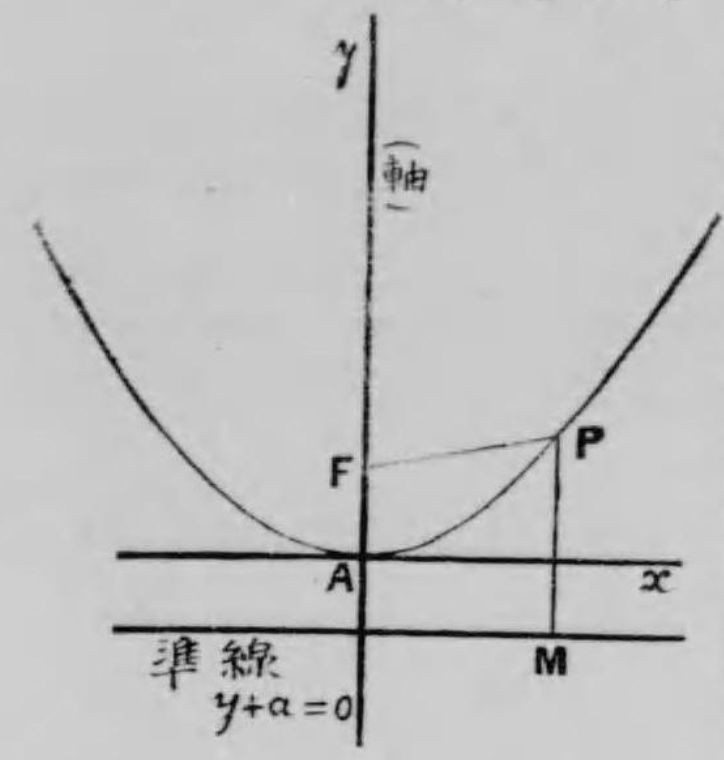
【注意 2】　(4)　$x^2=4ay$　$[a>0]$

及　(5)　$x^2=-4ay$　$[a>0]$

ハ何ヲ表ハスカトイフニ, (4)ハ(1)ニ於テ x ト y トヲ交換シタル者, (5)ハ(3)ニ於テ x ト y トヲ交換シタル者ニ外ナラズ. 故ニ(4)及(5)ハ何レモ曲線ノ軸ガ x 軸ニ合スル代リニ y 軸ニ合スル拋物線ニシテ, (4)ノ位置ハ(丙圖)ノ如ク, (5)ノ位置ハ(丁圖)ノ如クナルコトヲ推知シ得ベシ.

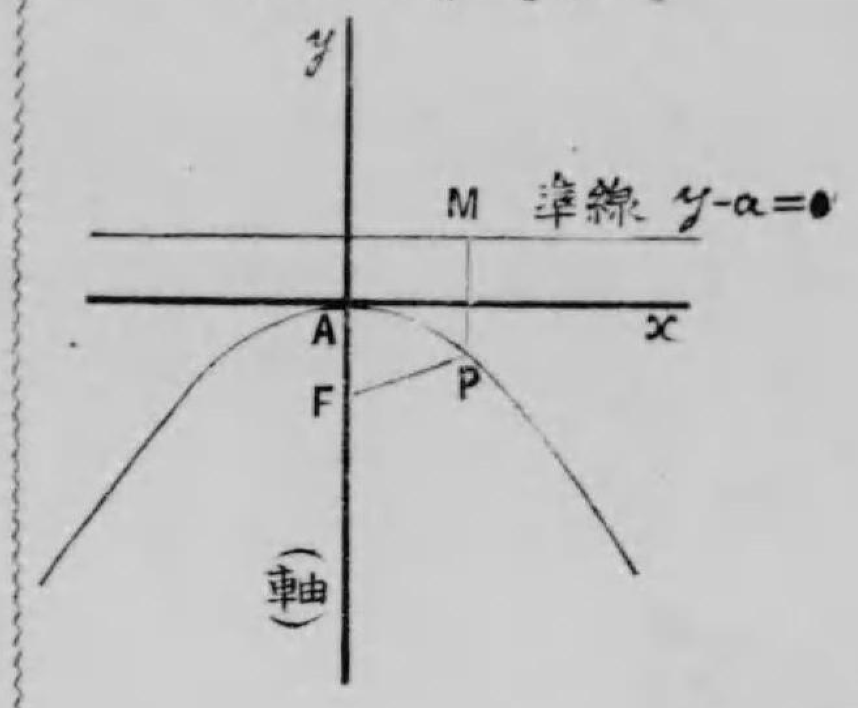
(丙圖)

$x^2=4ay$　$[a>0]$



(丁圖)

$x^2=-4ay$　$[a>0]$



【注意 3】 拋物線ハ焦點ト準線トニテ定マルユヱ,焦點ト準線トノ位置ノ關係ガ同一ナル拋物線ハ相等シ. 因テ a ガ同一ナル二ツノ拋物線ハ相等シキ拋物線ナリ.

72. 問題ノ例

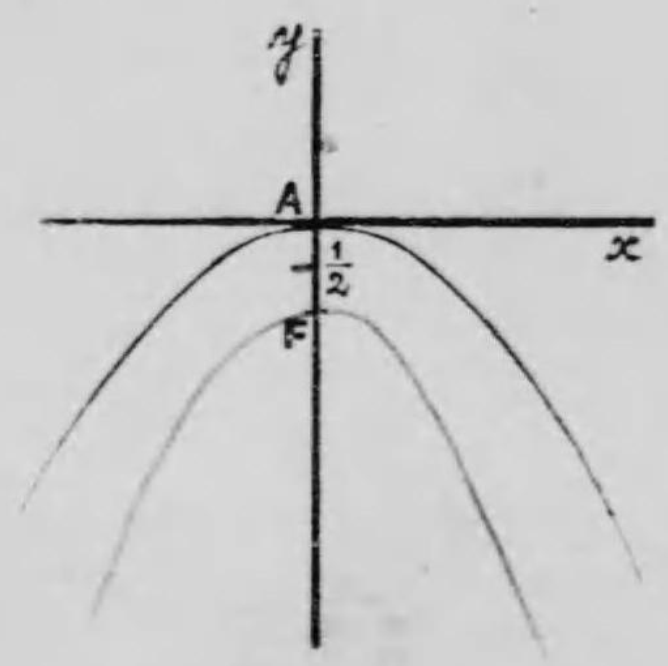
【例 1】 $x^2+2y=0$ ハ如何ナル曲線ヲ表ハスカ.

解　$x^2+2y=0$ ヲ書キ換ヘテ

$$x^2=-2y=-4\left(\frac{1}{2}\right)y$$

トナセバ, 上ノ(5)ノ形トナル.

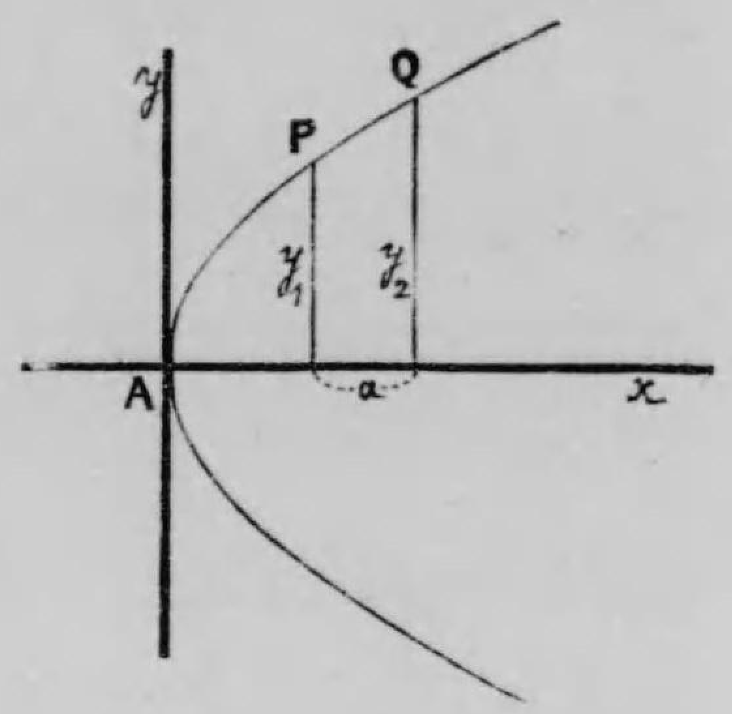
因テ是ハ右圖ニ示セル拋物線ヲ表ハス.



【例 2】 拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ二點 P, Q ノ縱坐標 y_1, y_2 ノ積ガ a^2 ニ等シク, 此二縱線間ノ距離ガ a ナルトキ, y_1 及 y_2 ノ

値ヲ求メヨ [但シ y_1 及 y_2 ハ何レモ正ノ數ナリトス.]

解 點 P, Q ノ坐標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) トセヨ.



サスレバ此等ノ坐標ハ拋物線ノ方程式

$$y^2=4ax$$

ニ適合スベキヲ以テ

$$(1)\qquad y_1^2=4ax_1$$

$$(2)\qquad y_2^2=4ax_2$$

然ルニ

$$(3)\qquad y_1y_2=a^2$$

$$(4)\qquad x_2-x_1=a$$

サテ (2) ヨリ (1) ヲ引ケバ

$$y_2^2-y_1^2=4a(x_2-x_1)$$

故ニ (4) ニヨリテ

$$(5)\qquad y_2^2-y_1^2=4a^2$$

又 (3) ヨリ

$$(6)\qquad y_2=\frac{a^2}{y_1}$$

之ヲ (5) ニ代入スレバ

$$\frac{a^4}{y_1^2}-y_1^2=4a^2$$

$$\therefore\qquad y_1^4+4a^2y_1^2-a^4=0$$

$$\therefore\qquad y_1^2=-2a^2\pm\sqrt{4a^4+a^4}=-2a^2\pm a^2\sqrt{5}$$

然ルニ y_1^2 ハ正ノ數ナルベキニヨリ

$$y_1^2=a^2(\sqrt{5}-2)$$

$$\therefore\qquad y_1=a(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{2}}$$

從テ (6) ヨリ

$$y_2=\frac{a^2}{a(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{2}}}=a(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{2}}$$

【例 3】 拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ二點 (x', y'), (x'', y'') ヲ通ル

直線ガ焦點ヲ通ルタメノ條件ヲ求メヨ.

解 直線 PQ ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \frac{y-y''}{x-x''}=\frac{y'-y''}{x'-x''}$$

然ルニ

$$(2)\qquad y'^2=4ax'$$

$$(3)\qquad y''^2=4ax''$$

$$\therefore\qquad 4a(x'-x'')=y'^2-y''^2=(y'-y'')(y'+y'')$$

$$\therefore\qquad \frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{4a}{y'+y''}$$

之ヲ (1) ノ右邊ニ代入スレバ

$$\frac{y-y''}{x-x''}=\frac{4a}{y'+y''}$$

$$\therefore\qquad y(y'+y'')-y'y''-y''^2=4ax-4ax''$$

$$\therefore\qquad (4)\qquad y(y'+y'')-y'y''=4ax\qquad [(3)\text{ ニヨル}]$$

是レ拋物線上ノ二點 (x', y'), (x'', y'') ヲ通ル直線ノ方程式ナリ.

サテ此直線ガ焦點 $(a, 0)$ ヲ通ルトスレバ $x=a$, $y=0$ ハ (4) ニ適合セザルベカラズ. 從テ

$$-y'y''=4a^2$$

$$\therefore\qquad (5)\qquad y'y''+4a^2=0$$

是レ所要ノ條件ナリ.

【例 4】 三角形ノ三頂點ガ何レモ拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ點ニシテ此等ノ點ノ縱坐標ガ夫々 y_1, y_2, y_3 ナルトキ, 此三角形ノ面積ハ

$$\frac{1}{8a}(y_1\sim y_2)(y_2\sim y_3)(y_3\sim y_1)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

證明 三角形ノ三頂點ノ坐標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) トセヨ. サスレバ此三角形ノ面積 S ハ第 14 節ニヨリテ

$$(1)\qquad S=\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)\sim(x_3-x_1)(y_2-y_1)]$$

然ルニ

$$(2)\qquad y_1^2=4ax_1$$

$$(3)\qquad y_2^2=4ax_2$$

$$(4)\qquad y_3^2=4ax_3$$

故ニ(3)ヨリ(2)ヲ引ケバ

$$4a(x_2-x_1)=y_2^2-y_1^2 \qquad \therefore \qquad x_2-x_1=\frac{1}{4a}(y_2^2-y_1^2)$$

又(4)ヨリ(2)ヲ引ケバ

$$4a(x_3-x_1)=y_3^2-y_1^2 \qquad \therefore \qquad x_3-x_1=\frac{1}{4a}(y_3^2-y_1^2)$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$S=\frac{1}{8a}[(y_2^2-y_1^2)(y_3-y_1)\sim(y_3^2-y_1^2)(y_2-y_1)]$$

$$=\frac{1}{8a}[(y_2+y_1)(y_2-y_1)(y_3-y_1)\sim(y_3+y_1)(y_3-y_1)(y_2-y_1)]$$

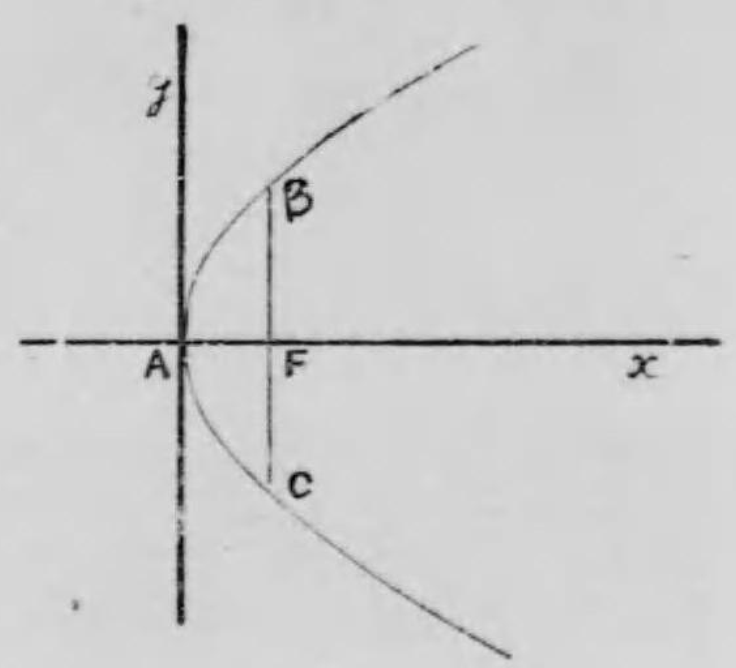
$$=\frac{1}{8a}(y_2-y_1)(y_3-y_1)[(y_2+y_1)\sim(y_3+y_1)]$$

$$=\frac{1}{8a}(y_2\sim y_1)(y_3\sim y_1)(y_2\sim y_3)$$

$$=\frac{1}{8a}(y_1\sim y_2)(y_2\sim y_3)(y_3\sim y_1)$$

73. 通徑

定義　抛物線ノ焦點ヲ通リ，軸ニ垂直ニ引キタル直線ガ此曲線ニ夾マルル部分(卽チ弦)ヲ名ヅケテ通徑トイフ.



右圖ニ於テ點F ハ抛物線ノ焦點ニシテ弦 BC ガ通徑ナリ.

今此抛物線ノ方程式ヲ

$$(2)\qquad y^2=4ax$$

トスレバ，點 F ノ横坐標 AF

ハ a ナルヲ以テ,(1)ノ右邊ニ於テ $x=a$ トオケバ

$$y^2=4a^2 \qquad 從テ \qquad y=\pm 2a$$

ヲ得. 此 y ノ絶對値 $2a$ ハ FB ノ長サニシテ，通徑 BC ノ長サハ其 2 倍卽チ $4a$ ナリ.

74. 抛物線 $y^2=4ax$ ト點 (x', y') トノ位置ノ關係

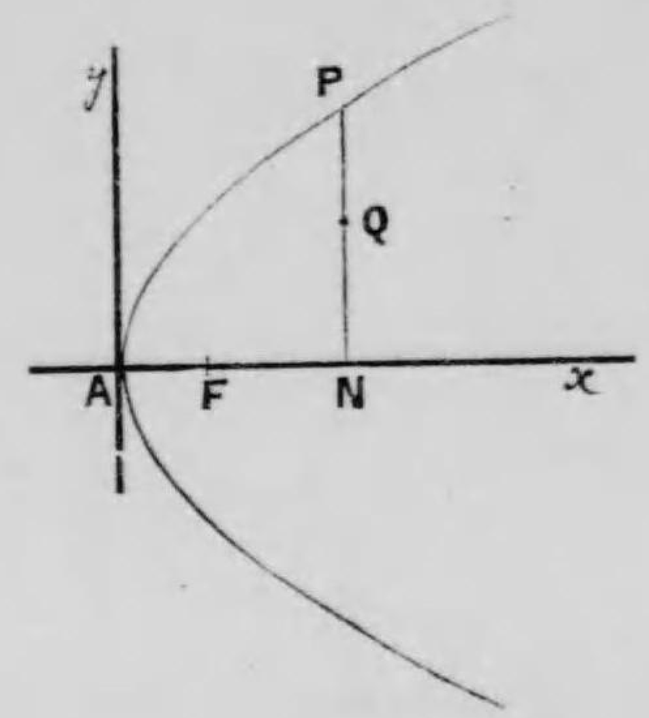
(第一)　點 (x', y') ガ抛物線上ニアルトキ.

此場合ニハ坐標 (x', y') ハ抛物線ノ方程式ニ適合ス. 從テ

$$y'^2-4ax'=0$$

(第二)　點 (x', y') ガ抛物線ノ内ニ在ルトキ.

此點ヲ Q トシ，其縦線 NQ ヲ Q ノ方ニ延長シテ抛物線ト點 P ニ於テ交ハラシメヨ.



サスレバ　$x'=AN$, $y'=NQ$

而シテ NP ノ長サ(卽チ其絶對値)ハ NQ ノ長サ(絶對値)ヨリモ大ナリ.

$$\therefore \qquad NP^2>NQ^2$$

然ルニ點 P ハ抛物線 $y^2=4ax$ 上ノ點ナルヲ以テ

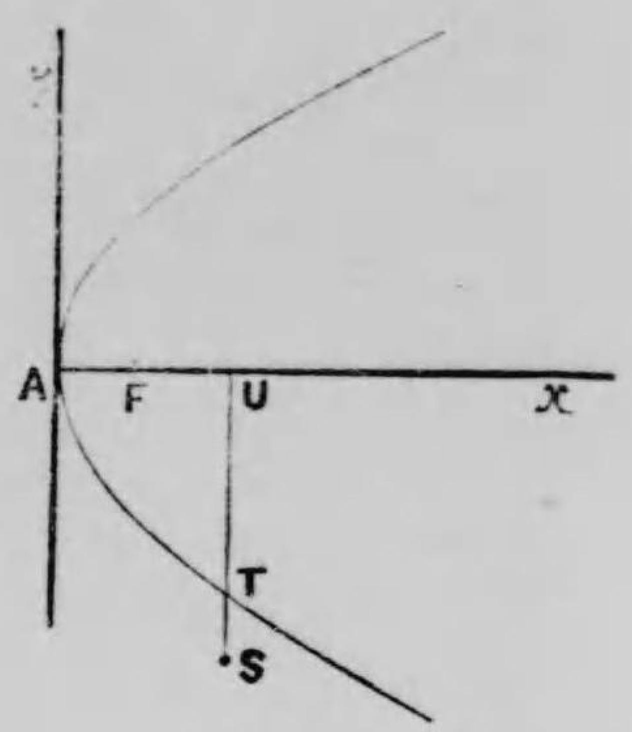
$$NP^2-4a.AN=0$$

$$\therefore \qquad NQ^2-4a.AN<0$$

即チ　　$y'^2-4ax'<0$

(第三)　點(x', y')ガ拋物線ノ外ニ在ルトキ.

此點ヲ S トシ,其縱線ノ足ヲ U, 縱線ガ拋物線ニ交ハル點ヲ T トセヨ.



サスレバ　$x'=\mathrm{AU}$,　$y'=\mathrm{US}$

而シテ US ノ長サハ UT ノ長サヨリモ大ナルヲ以テ (圖ノ如クSガx軸ノ下方ニアルトキニテモ) S ノ縱坐標 y' ノ絶對値ハ T ノ縱坐標 UT ノ絶對値ヨリモ大ナリ.

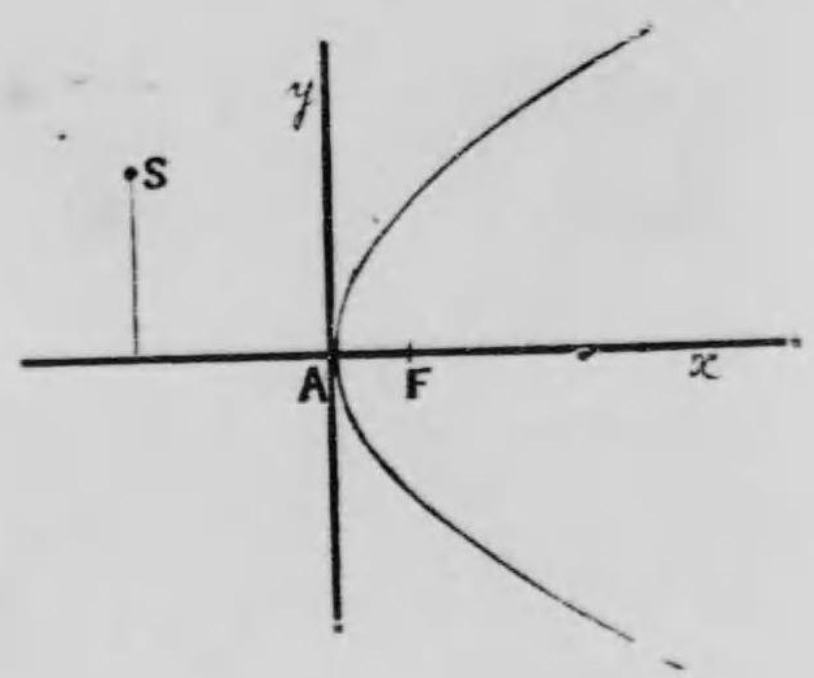
$$\therefore\quad y'^2=\mathrm{US}^2>\mathrm{UT}^2$$

然ルニ T ハ拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ點ナルヲ以テ

$$\mathrm{UT}^2-4a.\mathrm{AU}=0$$

$$\therefore\quad \mathrm{US}^2-4a.\mathrm{AU}>0$$

即チ　　$y'^2-4ax'>0$



若シ S ガ y 軸ノ左方ニ在レバ其橫坐標 x' ハ負ナルヲ以テ勿論

$$y'^2-4ax'>0$$

ナリ.

以上三ツノ結果ヲ纏ム

レバ次ノ如シ.

拋物線ノ方程式 $y^2=4ax$ ノ右邊 $4ax$ ヲ左邊ニ移シテ得ル式 y^2-4ax 中ノ x, y ニ夫々今考ヘツツアル點ノ坐標(x', y')ヲ置換ヘテ y'^2-4ax' ヲ作ルトキ,

$y'^2-4ax'>0$ ナレバ點(x', y')ハ拋物線 $y^2=4ax$ ノ外ニアリ.

$y'^2-4ax'<0$ ナレバ點(x', y')ハ拋物線 $y^2=4ax$ ノ內ニアリ.

$y'^2-4ax'=0$ ナレバ點(x', y')ハ拋物線 $y^2=4ax$ 上ニアリ.

【例1】 拋物線 $y^2=8x$ ニ關スル點$(1, 2)$ノ位置如何.

$y^2=4px$
$y^2=4\times2\times x$

解　y^2-8x ニ於テ $x=1, y=2$ トオケバ

$$4-8\times1=-4<0$$

トナル. 故ニ點$(1, 2)$ハ拋物線 $y^2=8x$ ノ內部ニアリ.

【例2】 拋物線 $y^2=-6x$ ニ關スル點$(3, -2)$ノ位置如何.

解　y^2+6x ニ於テ $x=3, y=-2$ トオケバ

$$(-2)^2+6\times3=4+18=22>0$$

トナル. 故ニ點$(3, -2)$ハ拋物線 $y^2=-6x$ ノ外部ニアリ.

75. 點(h, k)ヲ頂點トシ, x 軸ニ平行ナル軸ヲ有スル拋物線ノ方程式

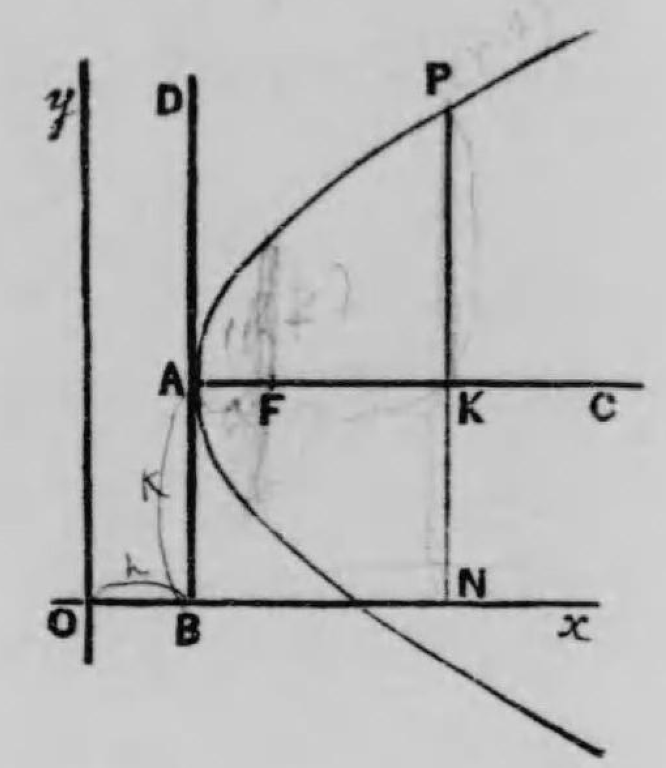
點(h, k)ヲ A トシ, A ヨリ x 軸ニ下シタル垂線ノ足ヲ B トセヨ. サスレバ

$$\mathrm{OB}=h,\qquad \mathrm{BA}=k$$

ナリ. ソコデ A ヨリ x 軸及 y 軸ニ夫々平行線 AC, AD ヲ引キ,直線 AC 上ノ點 F ガ拋物線ノ焦點ナリトシ, AF$=a$ ト

セヨ.

此拋物線上ノ任意ノ點 P ヨリ x 軸ニ下シタル垂線ノ足ヲ N; PN ト直線 AC トノ交點ヲ K トセヨ. サスレバ



(1)　$KP^2=4a.AK$

ソコデ點 P ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ

$$ON=x, \qquad NP=y$$

$$AK=BN=ON-OB=x-h$$

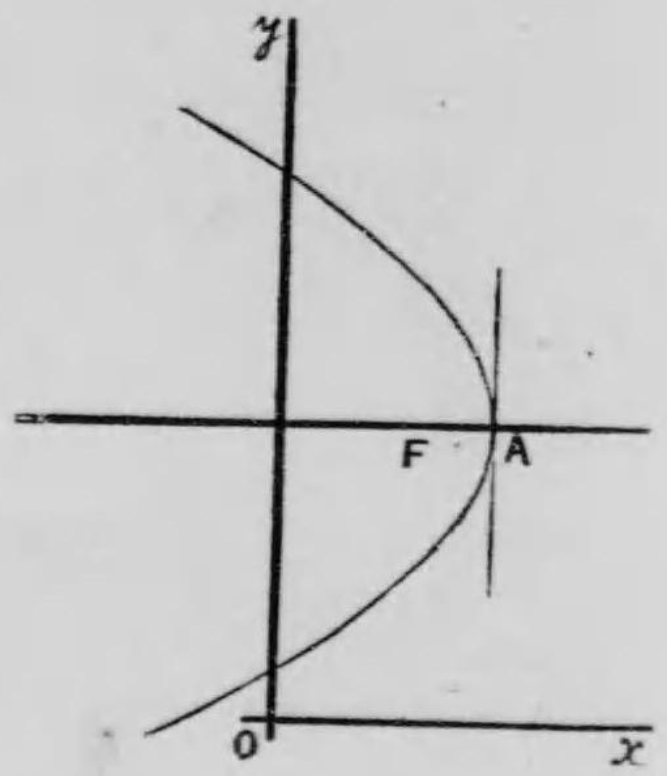
$$KP=NP-NK=NP-BA=y-k$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

(2)　$(y-k)^2=4a(x-h)$　$4ax-4ah$

ヲ得. 是レ所要ノ拋物線ノ方程式ナリ.

【注意 1】 若シ拋物線ノ軸ノ向キ (卽チ頂點 A ヨリ焦點 F ヘノ向キ) ト x 軸ノ負ノ向キトガ同方向ナラバ, 第 71 節ノ注意ニ述ベタルト同理ニヨリ, 其拋物線ノ方程式ハ



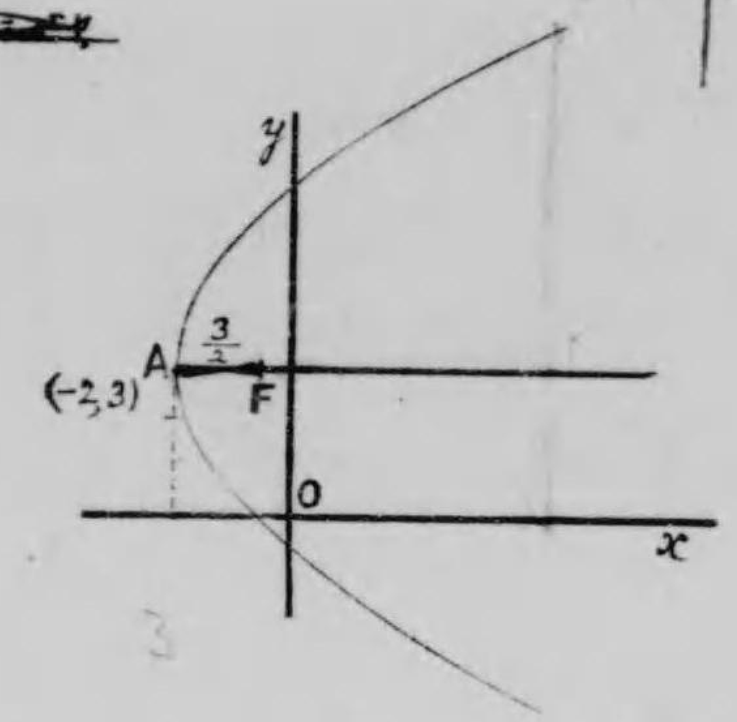
(3)　$(y-k)^2=-4a(x-h)$

ナリ.

【注意 2】 準線ト軸トノ交點ヲ原點トシタルトキノ拋物線ノ方程式ハ, 上ノ (2) ニ於テ $h=a$, $k=0$ トオキタル者, 卽チ

(4)　$y^2=4a(x-a)$

【例 1】 右ノ圖ニ示セル拋物線ノ方程式ハ上ノ公式 (2) ニ於テ

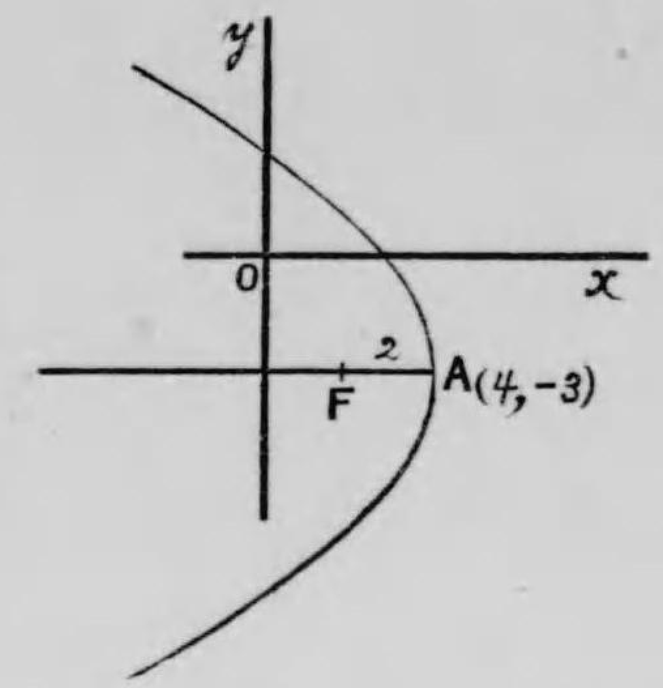


$$h=-2, \quad k=3, \quad a=\frac{3}{2}$$

トオキタル者, 卽チ

$(y-3)^2=6(x+2)$　ナリ.

【例 2】 右ノ圖ニ示セル拋物線ノ方程式ハ上ノ公式 (3) ニ於テ



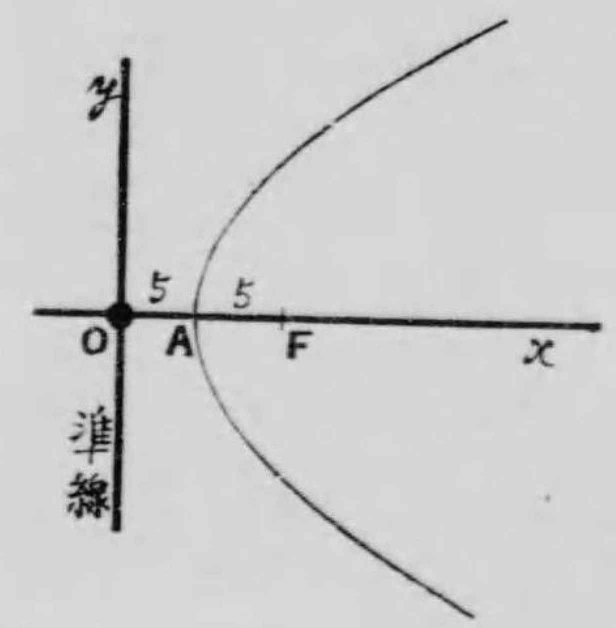
$$h=4, \quad k=-3, \quad a=2$$

トオキタル者, 卽チ

$$(y+3)^2=-8(x-4)$$

ナリ.

【例 3】 右ノ圖ニ示ス拋物線ノ方程式ハ上ノ公式 (4) ニ於テ $a=5$ トオキタル者, 卽チ



$$y^2=20(x-5)$$

ナリ.

76. 抛物線ト直線トノ交點ノ求メ方

抛物線 (1) $y^2=4ax$

ト直線 (2) $y=mx+b$

トノ交點ノ坐標ヲ求ムルニハ，(1)及(2)ヲ聯立方程式トシテ之ヲ解ケバヨシ．サスレバ一般ニハ x, y ノ二組ノ値ヲ得ベシ．

【例1】 直線 $2x-y=4a$ ト抛物線 $y^2=4ax$ トノ交點ノ坐標ヲ求メヨ．

解 直線ノ方程式ヨリ

$$(1) \qquad y=2x-4a$$

ヲ得．之ヲ抛物線ノ方程式 $y^2=4ax$ ノ左邊ニ代入スレバ

$$4(x-2a)^2=4ax$$

$$\therefore \quad x^2-5ax+4a^2=0$$

$$\therefore \quad (x-4a)(x-a)=0$$

$$\therefore \quad x=4a \quad 或ハ \quad x=a$$

是レ所要ノ交點ノ横坐標ナリ．因テ所要ノ二ツノ交點ノ坐標ハ，(1)ニヨリテ夫々

$$(4a,\ 4a) \quad 及 \quad (a,\ -2a)$$

$y^2=4\times2(x+1)$

ナリ．

【例2】 直線 $y=x+3$ ハ抛物線 $y^2=8(x+1)$ ニ切スルコトヲ證明シ，且ツ其切點ノ坐標ヲ求メヨ．

解 直線ノ方程式ヨリ得ル y ノ値ヲ抛物線ノ方程式ノ左邊ニ代入スレバ

$$(x+3)^2=8(x+1)$$

$$\therefore \quad x^2-2x+1=0$$

$$\therefore \quad (x-1)^2=0$$

8x+8

$$\therefore \quad x=1 \quad [等根]$$

$$從テ \quad y=4$$

故ニ直線 $y=x+3$ ハ點(1, 4)ニ於テ抛物線 $y^2=8(x+1)$ ニ切ス．

【例3】 抛物線 $y^2=8x$ ガ直線 $2x+y-8=0$ ヨリ截リ取ル弦ノ長サヲ求メヨ．

解 先ヅ此直線ト此抛物線トノ交點ノ坐標ヲ求ムル爲ニ，直線ノ方程式ヨリ得ル

$$(1) \qquad y=8-2x$$

ヲ抛物線ノ方程式ノ左邊ニ代入スレバ

$$4(4-x)^2=8x$$

$$\therefore \quad 16-8x+x^2=2x$$

$$\therefore \quad x^2-10x+16=0$$

$$\therefore \quad (x-2)(x-8)=0$$

$$\therefore \quad x=2 \quad 或ハ \quad x=8$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ二ツノ交點ノ坐標

$$(2,\ 4) \quad 及 \quad (8,\ -8)$$

ヲ得．

因テ所要ノ弦ノ長サハ此二點間ノ距離，即チ

$$\sqrt{(8-2)^2+(-8-4)^2}=\sqrt{6^2+12^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$$

【例4】 抛物線

$$(1) \qquad y^2=4ax$$

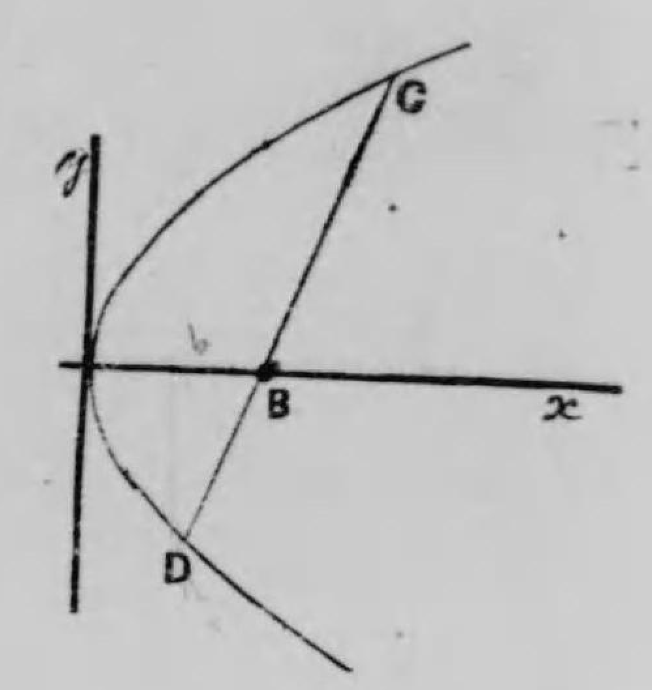
ノ軸上ノ定點 B ヲ通リテ任意ノ直線ヲ引キ此抛物線ト二點ニ於テ交ハラシムレバ，此二交點ノ横坐標ノ積ハ不易ナリ．又其縱坐標ノ積モ不易ナリ．

證明 點 B ノ坐標ヲ $(b, 0)$ トセヨ．ココニ b ハ不易ナリ．

點 B ヲ通ル任意ノ弦 CD ノ方程式ヲ

(2) $y=m(x-b)$

トセヨ. 今(1)ト(2)トノ交點C. Dノ橫坐標ヲ求ムル爲ニ,(2)ニヨリテ(1)ノ y ヲ置換フレバ



$$m^2(x-b)^2=4ax$$

$$\therefore\quad m^2x^2-2(bm^2+2a)x+m^2b^2=0$$

ソコデC, Dノ橫坐標ヲ夫々 x_1, x_2 トスレバ,二次方程式ノ根ト係數トノ關係ニヨリ

$$x_1x_2=\frac{m^2b^2}{m^2}=b^2 \qquad [不易]$$

同樣ニ C, D ノ縱坐標ヲ求ムル爲ニ(2)ヨリ

$$x=\frac{y}{m}+b$$

ヲ得テ,之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$y^2=4a\left(\frac{y}{m}+b\right)=\frac{4ay}{m}+4ab$$

$$\therefore\quad my^2-4ay-4abm=0$$

ソコデ C, D ノ縱坐標ヲ夫々 y_1, y_2 トスレバ

$$y_1y_2=\frac{-4abm}{m}=-4ab \qquad [不易]$$

【例5】 抛物線

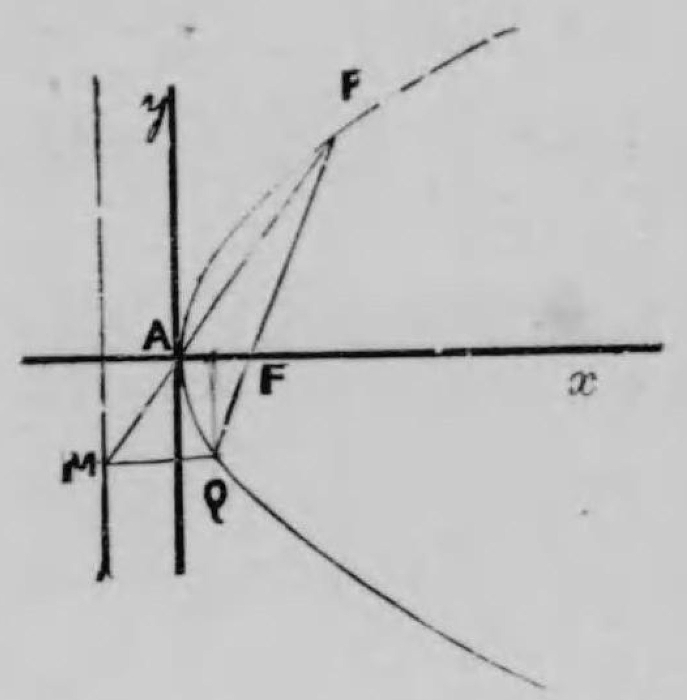
(1) $y^2=4ax$

ノ焦點Fヲ通ル弦ノ兩端ヲP, Qトシ, Pト頂點Aトヲ通ル直線ト準線トノ交點ヲMトスレバ,直線QMハ抛物線ノ軸ニ平行ナリ.

證明 焦點Fノ坐標ハ $(a, 0)$ ナリ. 今點Pノ坐標ヲ (x_1, y_1) トスレバ弦PQノ方程式ハ

(2) $\dfrac{y}{x-a}=\dfrac{y_1}{x_1-a}$

ナリ. サテ MQ ガ軸 Ax ニ平行ナルコトヲ證明スルニハ M 及 Q ノ縱坐標ガ相等シキコトヲ證明スレバヨシ.



直線 AP ノ方程式ハ

(3) $\dfrac{y}{x}=\dfrac{y_1}{x_1}$

準線ノ方程式ハ

(4) $x=-a$

ナルヲ以テ, (3)ト(4)トヲ聯立方程式トシテ y ノ値ヲ求ムレバ

$$y=-\frac{ay_1}{x_1}=-\frac{ay_1}{\dfrac{y_1^2}{4a}} \qquad [\because\ y_1^2=4ax_1]$$

$$=-\frac{4a^2}{y_1}$$

是レ點 M ノ縱坐標ナリ.

次ニ點 Q ノ縱坐標ヲ求ムル爲ニ(1)ト(2)トヲ聯立方程式トシテ y ノ値ヲ求ムレバ

$$\frac{y}{\dfrac{y^2}{4a}-a}=\frac{y_1}{x_1-a}=\frac{y_1}{\dfrac{y_1^2}{4a}-a} \qquad [\because\ y_1^2=4ax_1]$$

$$\therefore\quad \frac{4ay}{y^2-4a^2}=\frac{4ay_1}{y_1^2-4a^2}$$

$$\therefore\quad y_1y^2-y(y_1^2-4a^2)-4a^2y_1=0$$

$$\therefore\quad (y-y_1)(yy_1+4a^2)=0$$

$$\therefore\quad y=y_1 \quad 及 \quad y=-\frac{4a^2}{y_1}$$

$$\therefore\quad QM\,//\,AF$$

【注意】 點 Q ノ坐標ヲ (x_2, y_2) トスレバ直線 PQ ハ焦點ヲ通ルヲ以テ

$$y_1y_2+4a^2=0 \qquad [第72節例3]$$

$$\therefore\quad y_2=-\frac{4a^2}{y_1}$$

ヲ得.

【例 6】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ弦 PQ ヲ頂點 A ニ於テ見込ム角ガ直角ナルトキ此弦ハ定點 $(4a,\ 0)$ ヲ通ル.

解 直線 AP ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad y=mx$$

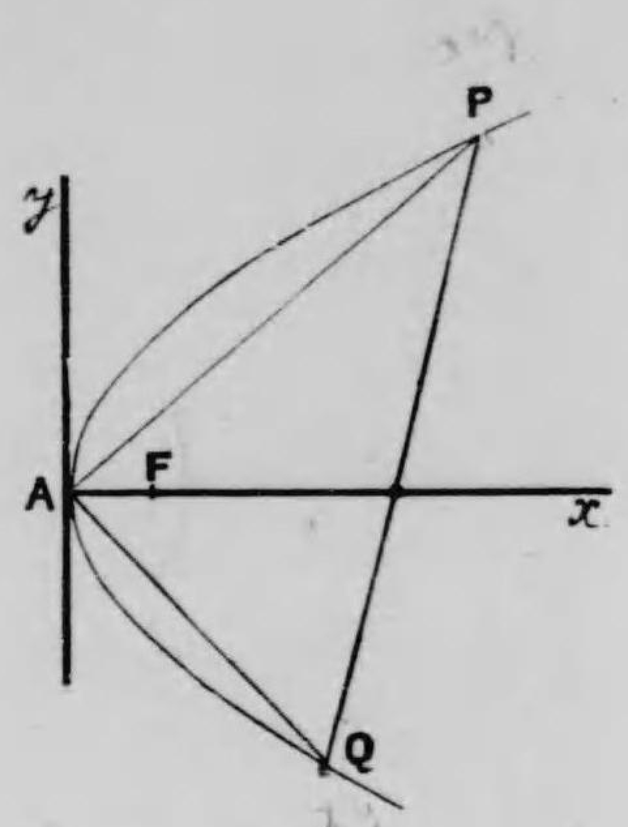
トスレバ, 之ニ垂直ナル直線 AQ ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=-\frac{1}{m}x$$

ナリ. ソコデ點 P ノ坐標ヲ求ムルタメニ, 拋物線ノ方程式

$$(3)\qquad y^2=4ax$$

ト (1) トヲ聯立方程式トシテ解ケバ



$$m^2x^2=4ax$$

然ルニ

$$x\neq 0$$

$$\therefore\quad x=\frac{4a}{m^2}\quad 從テ\quad y=\frac{4a}{m}$$

即チ P ノ坐標ハ $\left(\frac{4a}{m^2},\ \frac{4a}{m}\right)$ ナリ.

次ニ (2) 及 (3) ヲ聯立方程式トシテ解ケバ點 Q ノ坐標 $(4am^2,\ -4am)$ ヲ得.

故ニ弦 PQ ノ方程式ハ

$$\frac{y+4am}{x-4am^2}=\frac{\frac{4a}{m}+4am}{\frac{4a}{m^2}-4am^2}=\frac{m(1+m^2)}{1-m^4}=\frac{m}{1-m^2}$$

$$\therefore\qquad (1-m^2)y+4am-4am^3=mx-4am^3$$

$$\therefore\quad (4)\qquad (1-m^2)y-m(x-4a)=0$$

ナリ. 而シテ m ノ如何ニ拘ハラズ $x=4a,\ y=0$ ハ (4) ニ適合スルヲ以テ弦 PQ ハ定點 $(4a,\ 0)$ ヲ通ル.

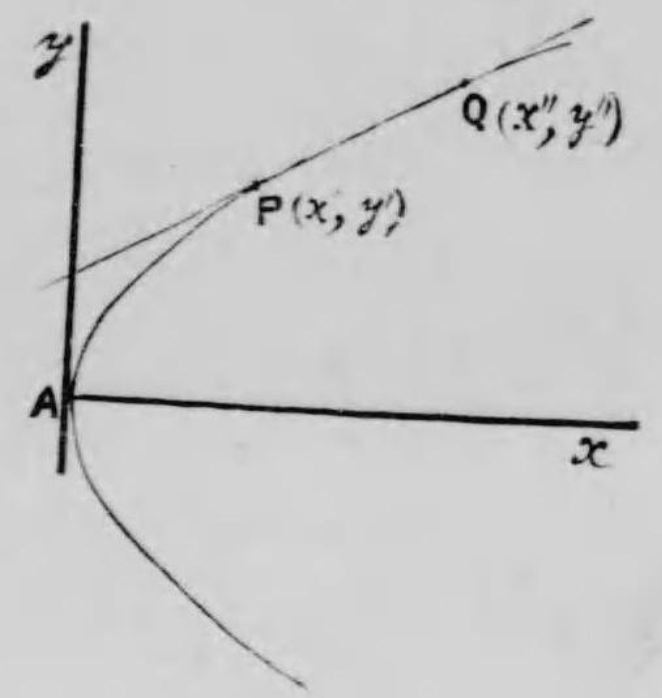
第二章 切線及法線

77. 拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ一點 $(x',\ y')$ ニ於ケル切線ノ方程式

拋物線

$$(1)\qquad y^2=4ax$$

上ノ二點ヲ P, Q トシ, 其坐標ヲ夫々 $(x',\ y')$, $(x'',\ y'')$ トセヨ.



直線 PQ ノ方程式ハ第 72 節例 3 ニ述ベタル如ク

$$(2)\qquad y(y'+y'')-y'y''=4ax$$

ソコデ Q ヲ限リ無ク P ニ近ヅケタルトキノ PQ ノ極限ノ位置ノ方程式即チ (2) ニ於テ $y''=y'$ ト置キタル者ハ點 $(x',\ y')$ ニ於ケル切線ノ方程式ナリ. 即チ

$$2yy'-y'^2=4ax$$

$$\therefore\qquad 2yy'-4ax'=4ax\qquad [\because\quad y'^2=4ax']$$

故ニ

$$(3)\qquad yy'=2a(x+x')$$

是ガ所要ノ方程式ナリ.

【注意】 切線ノ方程式 (3) ハ第 51 節ノ注意 2 及第 53 節ノ

注意ニ述ベタルト同様ニシテ容易ニ記憶スルコトヲ得ベシ．即チ抛物線ノ方程式 $y^2=4ax$ ノ左邊ニ於ケル y^2 (卽チ yy) ノ一ツノ因數 y ニ切點ノ縱坐標 y' ヲ代用シ，右邊ノ項 $4ax$ ヲ $2ax+2ax$ ニ分チ其第二項ノ x ニ切點ノ橫坐標 x' ヲ代用スルモノトシテ記憶スレバヨシ．

系 (3) ニ於テ $x'=0,\ y'=0$ トオケバ

$$x=0$$

トナル，卽チ抛物線ノ頂點 A ニ於ケル切線ハ y 軸ト一致ス．

【例 1】 抛物線 $y^2=4ax$ 上ノ二點 (x',y'), (x'',y'') ニ於ケル切線ノ交點ノ坐標ヲ求メヨ．

解 點 (x',y') 及 (x'',y'') ニ於ケル切線ノ方程式ハ夫々

$$(1)\qquad y'y=2a(x+x')$$

$$(2)\qquad y''y=2a(x+x'')$$

故ニ此二ツノ切線ノ交點ノ坐標ハ聯立方程式(1)及(2)ノ根ナリ．

サテ(1)ヨリ(2)ヲ減ズレバ

$$(y'-y'')y=2a(x'-x'')$$

$$\therefore\qquad y=\frac{2a(x'-x'')}{y'-y''}$$

$$=\frac{4a(x'-x'')}{2(y'-y'')}=\frac{y'^2-y''^2}{2(y'-y'')}\quad\left[\because\ \begin{matrix}y'^2=4ax'\\ y''^2=4ax''\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{y'+y''}{2}$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$\frac{y'(y'+y'')}{2}=2a(x+x')$$

$$\therefore\qquad 2ax=\frac{y'(y'+y'')}{2}-2ax'=\frac{y'^2+y'y''-4ax'}{2}$$

$$=\frac{y'y''}{2}\qquad[\because\ y'^2=4ax']$$

$$\therefore\qquad x=\frac{y'y''}{4a}$$

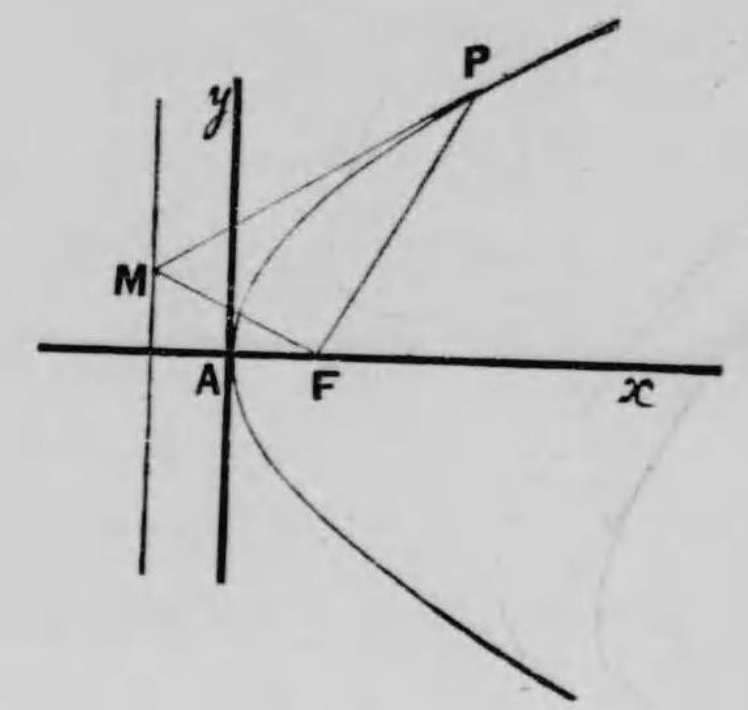
故ニ所要ノ交點ノ坐標ハ $\left(\dfrac{y'y''}{4a},\ \dfrac{y'+y''}{2}\right)$ ナリ．

【例 2】 抛物線上ノ任意ノ點 P ニ於ケル切線ガ準線ニ交ハル點ヲ M トスレバ，焦點 F ニ於テ線分 PM ヲ見込ム角ハ直角ナリ．

證明 抛物線ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad y^2=4ax$$

トシ，點 P ノ坐標ヲ (x',y') トセヨ．



サスレバ P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y'y=2a(x+x')$$

ナリ．ソコデ準線

$$(3)\qquad x=-a$$

ト(2)トヲ聯立方程式トシテ解ケバ

$$x=-a,\qquad y=\frac{2a(x'-a)}{y'}$$

ヲ得．是レ點 M ノ坐標ナリ．

又點 F ノ坐標ハ $(a,0)$ ナルヲ以テ直線 MF ノ方程式ハ

$$(4)\qquad \frac{y}{x-a}=\frac{\dfrac{2a(x'-a)}{y'}}{-a-a}=-\frac{x'-a}{y'}$$

次ニ直線 FP ノ方程式ハ

$$(5)\qquad \frac{y}{x-a}=\frac{y'}{x'-a}$$

然ルニ此二直線ノ角係數ノ積ハ

$$-\frac{x'-a}{y'}\times\frac{y'}{x'-a}=-1$$

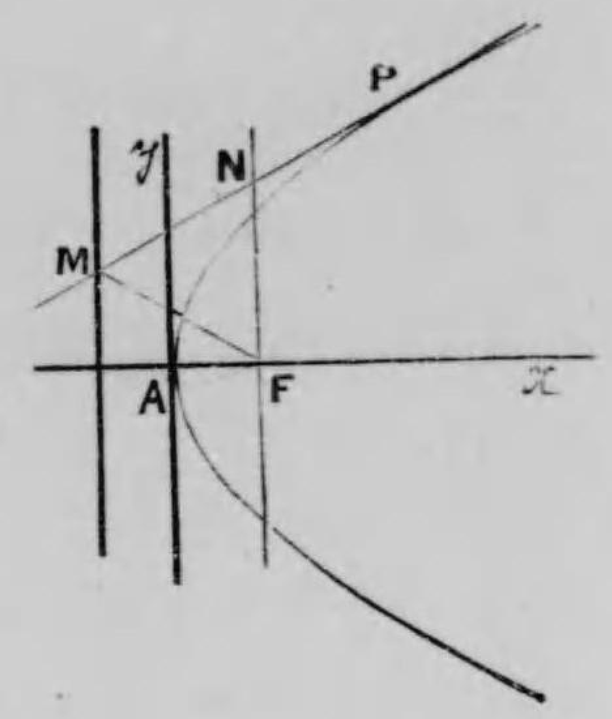
$$\therefore\qquad \mathrm{MF}\perp\mathrm{FP}$$

$$\angle\mathrm{MFP}=\angle\mathrm{R}$$

【例 3】 拋物線上ノ任意ノ點 P ニ於ケル切線ガ夫々準線及通徑ノ延長ト交ハル點 M, N ハ焦點 F ヨリ等距離ニ在リ.

證明 拋物線ノ方程式ヲ

(1)　$y^2=4ax$



トシ, 點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ點 P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

(2)　$y'y=2a(x+x')$

準線ノ方程式ハ

(3)　$x=-a$

通徑ノ方程式ハ

(4)　$x=a$

ナリ. ソコデ(2)ト(3)トノ交點 M ノ坐標 (x_1, y_1) ハ

$$x_1=-a, \quad y_1=\frac{2a(-a+x')}{y'}$$

ニシテ,(2)ト(4)トノ交點 N ノ縦坐標 y_2 ハ

$$y_2=\mathrm{FN}=\frac{2a(a+x')}{y'}$$

ナリ.

$$\therefore \quad \mathrm{FM}^2=(a-x_1)^2+(0-y_1)^2=(2a)^2+\frac{4a^2(x'-a)^2}{y'^2}$$

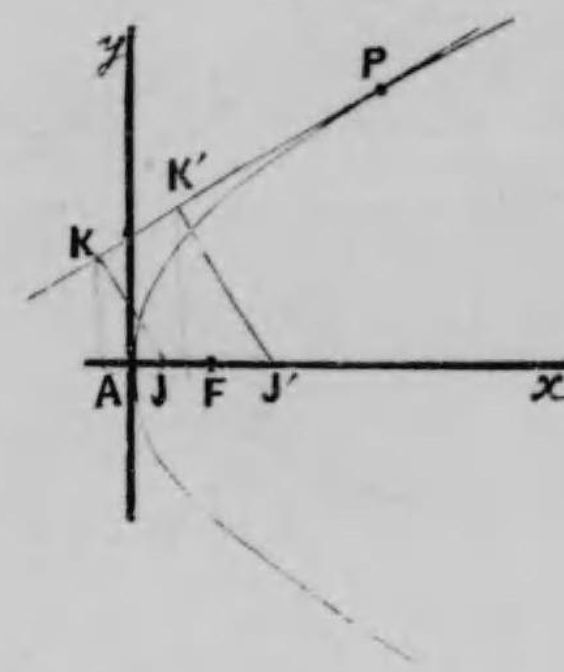
$$=\frac{4a^2[y'^2+(x'-a)^2]}{y'^2}=\frac{4a^2[4ax'+x'^2-2ax'+a^2]}{y'^2} \quad [\because \ y'^2=4ax']$$

$$=\frac{4a^2[x'+a]^2}{y'^2}=y_2^2=\mathrm{FN}^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{FM}=\mathrm{FN}$$

【例 4】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ軸上ニ於テ焦點 F ヨリ等距離ニアル二定點 J, J′ ヨリ拋物線ノ任意ノ切線ニ下シタル二ツノ垂線 JK, J′K′ ノ各ノ平方ノ差ハ不易ニシテ $2a.\mathrm{JJ}'$ ニ等シキ

コトヲ證明セヨ.



證明　$\mathrm{JF}=\mathrm{FJ}'=b$

トスレバ

$$\mathrm{J}(a-b,\ 0), \quad \mathrm{J}(a+b,\ 0)$$

ナリ. 又切線ノ切點 P ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ, 切線ノ方程式ハ

$$y'y=2a(x+x')$$

ナリ.

$$\therefore \quad \mathrm{JK}^2=\frac{[2a(a-b+x')]^2}{4a^2+y'^2}=\frac{4a^2(a+x'-b)^2}{4a^2+4ax'}=\frac{a(a+x'-b)^2}{a+x'}$$

又　$$\mathrm{J'K'}^2=\frac{[2a(a+b+x')]^2}{4a^2+y'^2}=\frac{4a^2(a+x'+b)^2}{4a^2+4ax'}=\frac{a(a+x'+b)^2}{a+x'}$$

$$\therefore \quad \mathrm{J'K'}^2-\mathrm{JK}^2=\frac{a(a+x'+b)^2}{a+x'}-\frac{a(a+x'-b)^2}{a+x'}$$

$$=\frac{a[(a+x'+b)^2-(a+x'-b)^2]}{a+x'}=\frac{a[2(a+x')\times 2b]}{a+x'}$$

$$=2a\times 2b=2a.\mathrm{JJ}'$$

78. 切線ノ方向ガ與ヘラルルトキノ拋物線 $y^2=4ax$ ノ切線ノ方程式

切線ノ角係數ヲ m トシ, 所要ノ方程式ヲ

(1)　$y=mx+c$

トセヨ. 此直線ト拋物線

(2)　$y^2=4ax$

トノ交點ノ坐標ヲ求ムル爲ニハ, (1)ニヨリテ(2)ノ y ニ代入スレバ

$$(mx+c)^2=4ax$$

$$\therefore \quad m^2x^2+2(cm-2a)x+c^2=0$$

然ルニ(1)ガ(2)ニ切スル爲ニハ此二次方程式ノ二根ガ相一致セザルベカラズ、從テ

$$(cm-2a)^2-m^2c^2=0$$

卽チ

$$c^2m^2-4amc+4a^2-m^2c^2=0$$

$$\therefore \quad 4a(a-mc)=0$$

$$\therefore \quad a-mc=0$$

故ニ

$$(3) \qquad c=\frac{a}{m}$$

ソコデ之ヲ(1)ニ代入スレバ所要ノ方程式

$$(4) \qquad y=mx+\frac{a}{m}$$

ヲ得.

系　抛物線 $y^2=4ax$ ノ切線 $y=mx+\dfrac{a}{m}$ ノ切點ノ坐標ハ $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$ ナリ.

證明　所要ノ切點ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ, (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(1) \qquad y'y=2a(x+x')$$

從テ

$$y=\frac{2a}{y'}x+\frac{2ax'}{y'}$$

ナリ, 而シテ與ヘラレタル切線ノ方程式

$$(2) \qquad y=mx+\frac{a}{m}$$

及(1)ハ何レモ同一ノ直線ヲ表ハスベキヲ以テ

$$m=\frac{2a}{y'} \qquad \therefore \quad y'=\frac{2a}{m}$$

又

$$\frac{a}{m}=\frac{2ax'}{y'}=\frac{2ax'}{\dfrac{2a}{m}}=mx' \qquad \therefore \quad x'=\frac{a}{m^2}$$

故ニ $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$ ガ所要ノ切點ナリ.

【注意】　抛物線 $y^2=4ax$ 上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ一ツノ變數ニテ表ハス場合ニハ其點ニ於ケル切線ガ軸トナス角ノ正切卽チ m ヲ用フレバ　$x=\dfrac{a}{m^2}$,　$y=\dfrac{2a}{m}$ ナリ.

但シ此角ノ餘切卽チ $\dfrac{1}{m}=\mu$ ヲ變數ニ用フル方ガ一般ニ便利ナリ, 其場合ニハ

$$x=a\mu^2, \qquad y=2a\mu$$

ナリ.

【例 1】　x 軸ト $30°$ ノ角ヲナシテ抛物線 $y^2=4ax$ ニ切スル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解　上ノ公式(4)ニ於テ　$m=\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

トオケバ, 所要ノ方程式

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\sqrt{3}a \qquad 從テ \qquad \sqrt{3}y-x=3a$$

ヲ得.

【例 2】　抛物線 $y^2=4ax$ ノ二ツノ切線

$$(1) \qquad y=m_1x+\frac{a}{m_1}$$

(2) $$y=m_2x+\frac{a}{m_2}$$

ノ交點ヨリ第三ノ切線

(3) $$y=m_3x+\frac{a}{m_3}$$

ニ下シタル垂線ト準線トノ交點ノ坐標ヲ求メヨ.

解 (1)及(2)ヲ聯立方程式トシテ解ケバ二ツノ切線(1)及(2)ノ交點ノ坐標ヲ得, 卽チ(1)ヨリ(2)ヲ引ケバ

$$0=(m_1-m_2)x-\frac{(m_1-m_2)a}{m_1m_2}$$

$$\therefore \qquad x=\frac{a}{m_1m_2}.$$

從テ $$y=\frac{m_1a}{m_1m_2}+\frac{a}{m_1}=a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$

故ニ點 $\left[\frac{a}{m_1m_2},\ a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\right]$ ヨリ第三ノ切線(3)ニ下シタル垂線ノ方程式ハ

(4) $$y-a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=-\frac{1}{m_3}\left(x-\frac{a}{m_1m_2}\right)$$

ナリ. 又準線ノ方程式ハ

(5) $$x=-a$$

ナルニヨリ, (4)ニ於テ $x=-a$ トオケバ所要ノ點ノ y 坐標ヲ得, 卽チ

$$y=a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1m_2m_3}\right)$$

故ニ所要ノ點ノ坐標ハ

$$\left[-a,\ a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1m_2m_3}\right)\right]$$

ナリ.

【例 3】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ三ツノ切線

(1) $$y=m_1x+\frac{a}{m_1}$$

(2) $$y=m_2x+\frac{a}{m_2}$$

(3) $$y=m_3x+\frac{a}{m_3}$$

ニテ出來ル三角形ノ垂心ハ準線ノ上ニ在ルコトヲ證明セヨ.

證明 今(1)及(2)ノ交點ヲ A, (2)及(3)ノ交點ヲ B, (3)及(1)ノ交點ヲ C ト名ヅクレバ頂點 A ヨリ邊 BC ニ下シタル垂線ト準線トノ交點ノ坐標ハ前例ニヨリテ

$$x=-a,\quad y=a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1m_2m_3}\right)$$

ナリ. 今度ハ頂點 B ヨリ邊 AC ニ下シタル垂線ト準線トノ交點ノ坐標ハ上ノ結果ニ於テ m_1, m_2, m_3 ノ代リニ夫々 m_2, m_3, m_1 ヲオキタル者ニ外ナラズ, 然ルニ上ノ y 坐標ハ m_1, m_2, m_3 ニ付テ對稱式ナルヲ以テ今述ベタル置換ヲ行ヒテモ全ク同一ノ結果ヲ得, 卽チ

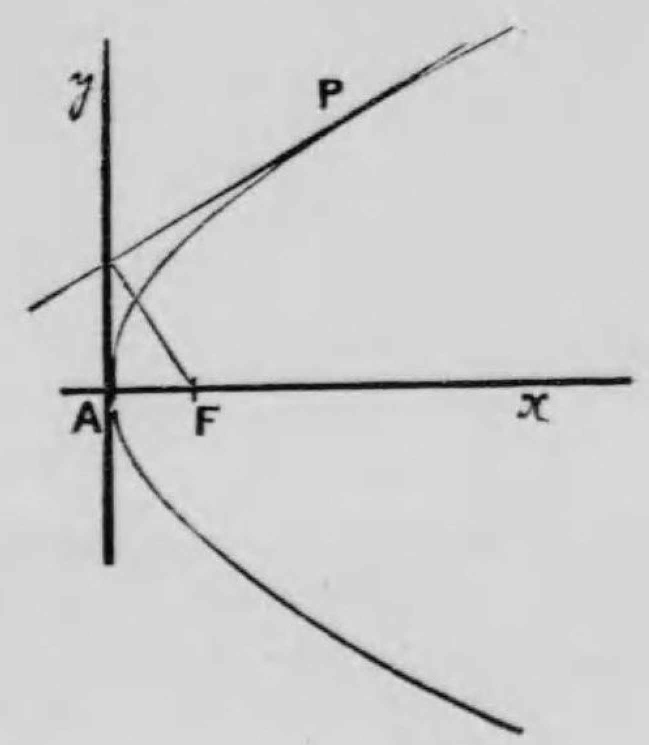
$$x=-a,\quad y=a\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2m_3m_1}\right)$$

同樣ニ頂點 C ヨリ邊 AB ニ下シタル垂線ト準線トノ交點ノ坐標ハ

$$x=-a,\quad y=a\left(\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3m_1m_2}\right)$$

此等ノ三點ノ坐標ハ何レモ同一ナリ. 仍テ △ABC ノ各頂點ヨリ對邊ニ引キタル三垂線ノ交點卽チ垂心ノ x 坐標ガ $-a$ ナルコトニヨリ是ガ準線上ニ在ルコトヲ知ル.

【例 4】 拋物線ノ焦點ヨリ切線ニ下シタル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ.



解 拋物線ノ方程式ヲ

(1) $$y^2=4ax$$

任意ノ切線ノ方程式ヲ

(2) $$y=mx+\frac{a}{m}$$

トセヨ. サスレバ焦點$(a, 0)$ヨリ(2)ニ下

シタル垂線ノ方程式ハ

$$(3)\qquad y=-\frac{1}{m}(x-a)$$

ソコデ(2)及(3)ヨリ m チ消去スル爲ニ邊々相減ズレバ

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)x=0$$

$$\therefore\qquad x=0$$

故ニ所要ノ軌跡ハ拋物線ノ頂點ニ於ケル切線ナリ.

【例5】 拋物線ノ互ニ垂直ナル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 拋物線ノ方程式チ

$$(1)\qquad y^2=4ax$$

トシ, 其互ニ垂直ナル二ツノ切線ノ角係數チ夫々 m_1, m_2 トセヨ. サスレバ此等ノ切線ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=m_1x+\frac{a}{m_1}$$

$$(3)\qquad y=m_2x+\frac{a}{m_2}$$

ニシテ, m_1 及 m_2 ノ間ニハ

$$(4)\qquad m_1m_2=-1$$

ナル關係アリ. ソコデ(2), (3), (4)ヨリ m_1, m_2 チ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式チ得. 即チ(2)ヨリ(3)チ引ケバ

$$(5)\qquad 0=(m_1-m_2)x-\frac{(m_1-m_2)}{m_1m_2}a$$

然ルニ $\qquad m_1-m_2\neq 0$

故ニ(5)ノ兩邊チ m_1-m_2 ニテ割レバ

$$0=x-\frac{a}{m_1m_2}$$

故ニ(4)ニヨリテ $\qquad 0=x-\dfrac{a}{-1}$

$$\therefore\qquad 0=x+a\qquad \text{従テ}\qquad x=-a$$

故ニ所要ノ軌跡ハ準線ナリ.

79. 定點(x', y')ヨリ拋物線 $y^2=4ax$ ニ引キタル切線ノ方程式

任意ノ切線ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y=mx+\frac{a}{m}$$

ナリ. 此切線ガ定點(x', y')ヲ通ルトスレバ $x=x'$, $y=y'$ ハ(1)ニ適合セザルベカラズ, 即チ

$$y'=mx'+\frac{a}{m}$$

従テ $\qquad (2)\qquad m^2x'-my'+a=0$

是ハ m ニ付テノ二次方程式ニシテ二ツノ根ヲ有ス. 故ニ一般ニハ(x', y')ヨリ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得. 今(2)ノ二根ヲ m_1, m_2 トスレバ, 此二ツノ切線ノ方程式ハ夫々

$$(3)\qquad y=m_1x+\frac{a}{m_1}$$

及 $\qquad (4)\qquad y=m_2x+\dfrac{a}{m_2}$

ナリ.

【注意】 二次方程式(2), 即チ

$$m_2x'-my'+a=0$$

ハ $y'^2-4ax'>0$ ナルトキ即チ(x', y')ガ拋物線ノ外ニアルトキハ相異ナル二ツノ實根ヲ有ス, 故ニ(x', y')ヨリ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得.

$y'^2-4ax'=0$ ナルトキ即チ(x', y')ガ拋物線上ニ在ルトキハ

上ノ二次方程式ハ唯一ツノ實根ヲ有ス，故ニ(x', y')ヨリ唯一ツノ切線ヲ引クコトヲ得.

$y'^2-4ax'<0$ ナルトキ卽チ(x', y')ガ拋物線ノ內ニ在ルトキハ上ノ二次方程式ハ虛根ヲ有ス，卽チ(x', y')ヨリ切線ヲ引クコトヲ得ズ.

80. 前節ノ應用問題ノ例

【例 1】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ二ツノ切線ガ x 軸トナス角ヲ θ, θ' トシ，$\tan\theta.\tan\theta'=\lambda$（不易）ナルトキ其交點ノ軌跡如何.

解 二ツノ切線ノ交點卽チ所要ノ軌跡上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ(x', y')トシ，其點ヨリ引ケル二切線ノ角係數ヲ m_1, m_2 トスレバ

$$\tan\theta=m_1,\qquad \tan\theta'=m_2$$

ナルヲ以テ

$$(1)\qquad m_1m_2=\lambda$$

サテ(x', y')ヨリ引キタル切線ノ方程式ヲ

$$y=mx+\frac{a}{m}$$

トスレバ，(x', y')ハ其上ノ點ナルヲ以テ

$$y'=mx'+\frac{a}{m}$$

從テ
$$x'm^2-y'm+a=0$$

ナリ．而シテ m ニ付テノ此二次方程式ノ二根ガ m_1, m_2 ナルベキヲ以テ，根ト係數トノ關係ニヨリ

$$m_1m_2=\frac{a}{x'}$$

故ニ(1)ニヨリテ

$$\frac{a}{x'}=\lambda$$

$$\therefore\qquad x'=\frac{a}{\lambda}$$

因テ所要ノ軌跡ハ y 軸ニ平行ナル直線ナリ.

【例 2】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ二ツノ切線ガ x 軸トナス角ヲ θ, θ' トシ，$\cot\theta+\cot\theta'=\lambda$（不易）ナルトキ其交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 前問題ト同ジ記號ヲ用フレバ，先ヅ

$$y'=mx'+\frac{a}{m}$$

從テ
$$x'm^2-y'm+a=0$$

故ニ根ト係數トノ關係ニヨリテ

$$m_1+m_2=\frac{y'}{x'}$$

$$m_1m_2=\frac{a}{x'}$$

然ルニ假設ニヨリ

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\lambda$$

$$\therefore\qquad \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}=\lambda$$

$$\therefore\qquad \frac{y'}{x'}\div\frac{a}{x'}=\lambda$$

$$\therefore\qquad y'=a\lambda$$

是レ所要ノ軌跡ノ方程式ニシテ拋物線ノ軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス.

【例 3】 拋物線 $y^2=4ax$ ニ於テ $\sin\theta.\sin\theta'=\lambda$（不易）ニ適スル二ツノ切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ．但シ θ, θ' ノ意味ハ前例ニ準ズ.

解 前例ノ如ク

$$(1)\qquad m_1+m_2=\frac{y'}{x'}$$

$$(2)\qquad m_1m_2=\frac{a}{x'}$$

然ルニ
$$\sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{m_1}{\sqrt{1+m_1{}^2}}$$

同様ニ
$$\sin\theta'=\frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

故ニ假設ニヨリ
$$\sin\theta.\sin\theta'=\frac{m_1m_2}{\sqrt{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}}=\lambda$$

$$\therefore\quad (m_1m_2)^2=\lambda^2(1+m_1^2)(1+m_2^2)=\lambda^2[1+(m_1^2+m_2^2)+(m_1m_2)^2]$$
$$=\lambda^2[1+(m_1+m_2)^2-2m_1m_2+(m_1m_2)^2]$$

故ニ(1)及(2)ニヨリテ
$$\left(\frac{a}{x'}\right)^2=\lambda^2\left[1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2-\frac{2a}{x'}+\left(\frac{a}{x'}\right)^2\right]$$
$$\therefore\quad a^2=\lambda^2[x'^2+y'^2-2ax'+a^2]$$
$$\therefore\quad (x'-a)^2+y'^2=\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$$

故ニ所要ノ軌跡ハ焦點$(a, 0)$ヲ中心トシ $\dfrac{a}{\lambda}$ ヲ半徑トスル圓ナリ.

【例4】 抛物線 $y^2=4ax$ ニ於テ $\cot\theta-\cot\theta'=\lambda$ (不易)ニ適スル二ツノ切線ノ交點ノ軌跡如何. (θ, θ' ノ意味ハ前ニ倣フ)

解 前例ノ如ク
$$(1)\qquad m_1+m_2=\frac{y'}{x'},\qquad m_1m_2=\frac{a}{x'}$$

然ルニ假設ニヨリ
$$\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}=\lambda$$
$$\therefore\quad m_2-m_1=\lambda m_1m_2$$
$$\therefore\quad (m_2-m_1)^2=\lambda^2(m_1m_2)^2$$
$$\therefore\quad (m_1+m_2)^2-4m_1m_2=\lambda^2(m_1m_2)^2$$

故ニ(1)ニヨリテ
$$\left(\frac{y'}{x'}\right)^2-\frac{4a}{x'}=\lambda^2\left(\frac{a}{x'}\right)^2$$
$$\therefore\quad y'^2-4ax'=\lambda^2a^2$$
$$\therefore\quad y'^2=4a\left(x'-\frac{a\lambda^2}{4}\right)$$

故ニ所要ノ軌跡ハ頂點ガ$\left(\dfrac{a\lambda^2}{4}, 0\right)$ニシテ, 軸ガ x 軸(即チ原拋物線ノ軸)ニ一致スル, 原拋物線ニ等シキ拋物線ナリ. 〔第71節注意參照〕

81. 拋物線 $y^2=4ax$ ノ法線ノ方程式

(第一) 拋物線上ノ點(x', y')ニ於ケル法線ノ方程式

(x', y')ニ於ケル切線ノ方程式ハ
$$y'y=2a(x+x')\qquad 從テ\qquad y=\frac{2a}{y'}(x+x')$$

故ニ(x', y')ニ於ケル法線ノ方程式ハ
$$(1)\qquad y-y'=-\frac{y'}{2a}(x-x')$$
ナリ.

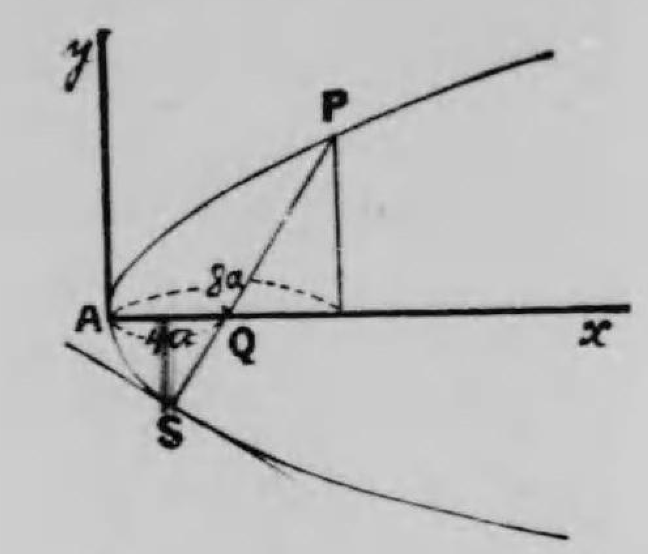
(第二) 角係數ガ與ヘラレタルトキノ法線ノ方程式

上ノ(1)ニ於テ $-\dfrac{y'}{2a}$ ハ法線ノ角係數ナルヲ以テ
$$-\frac{y'}{2a}=m$$
トオケバ
$$(2)\qquad y'=-2am$$
然ルニ
$$y'^2=4ax'$$
$$\therefore\quad 4a^2m^2=4ax'$$
$$\therefore\quad (3)\qquad x'=am^2$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ所要ノ法線ノ方程式
$$y+2am=m(x-am^2)$$
即チ
$$(4)\qquad y=mx-2am-am^3$$
ヲ得.

82. 前節ノ應用ノ例

【例 1】 拋物線 $y^2=4ax$ 上ニ於ケル横坐標ガ $8a$ ナル點 P ヨリ引ケル直線ガ軸ニ交ハル點 Q ノ横坐標ガ $4a$ ナルトキ，其直線ガ再ビ拋物線ニ交ハル點 S ノ横坐標ハ $2a$ ニシテ，直線 PQ ハ點 S ニ於ケル拋物線ノ法線ナリ.



證明　P ノ坐標ハ

$$x'=8a,\qquad y'=\sqrt{4a.8a}=4\sqrt{2}a$$

又 Q ノ坐標ハ

$$x''=4a,\qquad y''=0$$

ナルヲ以テ，直線 PQ ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \frac{y}{x-4a}=\frac{4\sqrt{2}a}{8a-4a}=\sqrt{2}$$

此直線ト拋物線

$$(2)\qquad y^2=4ax$$

トノ第二ノ交點 S ノ横坐標ヲ求ムル爲ニ，(1) ト (2) トヨリ y ヲ消去スレバ

$$2(x-4a)^2=4ax$$

$$x^2-8ax+16a^2=2ax$$

$$\therefore\qquad x^2-10ax+16a^2=0$$

$$(x-2a)(x-8a)=0$$

$$\therefore\qquad x=2a\quad 或ハ\quad x=8a$$

故ニ點 S ノ横坐標ハ $2a$ ナリ.

次ニ直線 PQ ノ角係數ハ (1) ニヨリテ $\sqrt{2}$ ナリ. ソコデ角係數ガ $\sqrt{2}$ ナル拋物線 (2) ノ法線ノ方程式ヲ作レバ，前節ノ公式 (4) ニヨリテ

$$(3)\qquad y=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}a-2\sqrt{2}a$$
$$=\sqrt{2}(x-4a)$$

ニシテ (1) ニ同ジ.

因テ直線 PQ ハ點 S ニ於ケル法線ナリ.

【例 2】 任意ノ點ヨリ拋物線ニ三ツヨリ多クノ法線ヲ引クコトヲ得ズ，又軸上ニ於テ頂點ヨリノ距離ガ $2a$ ヨリ小ナル點ヨリハ唯一ツノ法線ヲ引クコトヲ得.

證明　拋物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4ax$$

トスレバ，法線ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y=mx-2am-am^3$$

ナリ. 是ガ點 (x', y') ヨリ引キタル法線ナランニハ，x', y' ハ (1) ニ適合セザルベカラズ. 故ニ

$$(2)\qquad y'=mx'-2am-am^3$$

而シテ是ハ m ニ付テ三次方程式ナルヲ以テ，三ツノ根ヲ有ス.

故ニ (x', y') ヨリ拋物線ニ三ツヨリ多クノ法線ヲ引クコトヲ得ズ.

次ニ $y'=0$ ナルトキハ

$$0=mx'-2am-am^3$$

$$\therefore\qquad m(am^2+2a-x')=0$$

$$\therefore\qquad m=0$$

或ハ　$am^2+2a-x'=0$　從テ　$m=\pm\sqrt{\dfrac{x'-2a}{a}}$

然ルニ $x'<2a$ ナルトキハ $\sqrt{\dfrac{x'-2a}{a}}$ ハ虛數ナルヲ以テ實數根ハ $m=0$ ノミナリ.

因テ軸上ニ於テ其横坐標ガ $2a$ ヨリ小ナル點ヨリハ拋物線ニ唯一ツノ法線ヲ引クコトヲ得.

【例 3】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ互ニ垂直ナル法線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　交點ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ (x', y') ヨリ引キタル拋物線ノ三ツノ法線ノ角係數ハ次ノ三次方程式ノ三ツノ根ナリ.

$$y'=mx'-2am-am^3$$

從テ　(1)　$am^3-m(x'-2a)+y'=0$

今此三ツノ根ヲ m_1, m_2, m_3 トスレバ，根ト係數トノ關係ニヨリテ

$$(2)\qquad m_1m_2m_3=-\frac{y'}{a}$$

今 m_1, m_2 ナル角係數ヲ有スル法線ガ互ニ垂直ナリトセヨ．サスレバ

$$(3)\qquad m_1m_2=-1$$

然ルニ m_3 ハ (1) ノ一ツノ根ナルヲ以テ，(2) 及 (3) ニヨリテ (1) ノ中ノ m ニ $\frac{y'}{a}$ ヲ代入スレバ

$$\frac{y'^3}{a^2}-\frac{y'}{a}(x'-2a)+y'=0$$

$$\therefore\qquad y'[y'^2-a(x'-2a)+a^2]=0$$

$$\therefore\qquad y'[y'^2-a(x'-3a)]=0$$

サテ $y'=0$ トスレバ $m_3=0$ ナルユヱ，m_1 及 m_2 ハ (1) ヨリ得ル二次方程式

$$am^2-(x'-2a)=0$$

ノ二根ナルベク，而シテ (3) ガ成リ立ツ爲ニハ

$$m_1m_2=-\frac{x'-2a}{a}=-1$$

$$\therefore\qquad x'=3a$$

從テ一點 $(3a, 0)$ ガ適合スルノミ．故ニ $y'=0$ ハ奇解ナリ．

因テ之ヲ省ケバ所要ノ方程式

$$y'^2-a(x'-3a)=0$$

$$\therefore\qquad y'^2=a(x'-3a)$$

ヲ得．故ニ所要ノ軌跡ハ拋物線ナリ．

【例 4】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ焦點ヨリ一ツノ法線ニ下シタル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ．

解　任意ノ法線ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad y=mx-2am-am^3$$

トセヨ．又焦點 $(a, 0)$ ヲ通リ (1) ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=-\frac{1}{m}(x-a)$$

ナリ．ソコデ (1) 及 (2) ヨリ m ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得．卽チ (2) ヨリ

$$m=-\frac{x-a}{y}$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$y=-\frac{x(x-a)}{y}+\frac{2a(x-a)}{y}+\frac{a(x-a)^3}{y^3}=\frac{(x-a)(2a-x)}{y}+\frac{a(x-a)^3}{y^3}$$

$$\therefore\qquad y^4-(x-a)(2a-x)y^2-a(x-a)^3=0$$

$$\therefore\qquad [y^2+(x-a)^2][y^2-a(x-a)]=0$$

故ニ

$$(3)\qquad y^2+(x-a)^2=0$$

或ハ

$$(4)\qquad y^2-a(x-a)=0$$

然ルニ (3) ハ一點 $(a, 0)$ ガ適合スルノミニテ之ハ奇解ナリ．因テ之ヲ省ク．

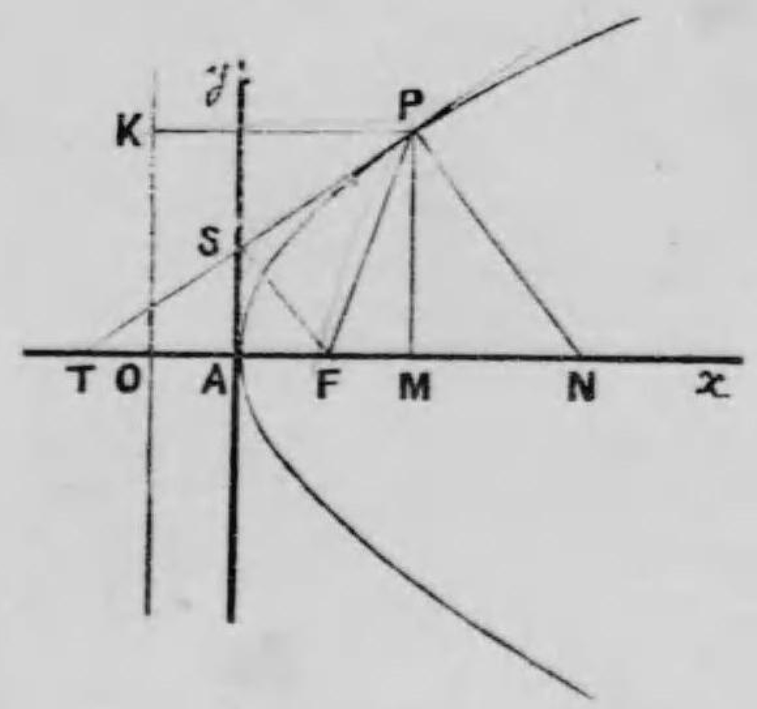
故ニ所要ノ軌跡ハ

$$y^2=a(x-a)$$

ニシテ拋物線ナリ．

83. 拋物線ノ主要ナル幾何學的ノ性質

拋物線ノ主要ナル幾何學的ノ性質ヲ述ブルニ先ダチ，拋物線ニ關係アル或線分ノ名稱ヲ述ベン．



拋物線上ノ任意ノ點 P ニ於テ切線及法線ヲ引キ，x 軸ト夫々 T, N ニ於テ交ハラシメヨ．又點 P ヨリ x 軸ニ引キタル垂線ノ足ヲ M トセヨ．

線分 PT ヲ**切線**,　　線分 PN ヲ**法線**,

線分 MT ヲ**次切線**(又ハ**切線影**),

線分 MN ヲ**次法線**(又ハ**法線影**)

トイフ. 此等ノ名稱ハ拋物線ニ限ラズ, スベテノ曲線ニ付テモ同樣ナリト知ルベシ.

(第一) 次切線 MT ハ頂點 A ニヨリテ二等分セラル.

證明 拋物線ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad y^2=4ax$$

點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ切線 PT ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y'y=2a(x+x')$$

ナリ. ソコデ $y=0$ トオケバ, 點 P ノ横坐標

$$x=\text{AT}=-x'$$

ヲ得, 卽チ線分 AT 及 AM$(=x')$ハ頂點 A ノ兩側ニアリテ, 其絕對値ハ相等シ, 故ニ次切線 MT ハ頂點 A ニ於テ二等分セラル.

(第二) 次法線 MN ハ不易ナリ.

證明 P ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$(3)\qquad y-y'=-\frac{y'}{2a}(x-x')$$

ソコデ $y=0$ トオケバ

$$x=2a+x'$$

故ニ

$$(4)\qquad x-x'=2a$$

然ルニ此 x ハ N ノ横坐標 AN ニシテ, x' ハ AM ナリ. 故ニ (4) ハ

$$\text{AN}-\text{AM}=\text{MN}=2a$$

ヲ表ハス, 卽チ　　MN=2.AF　　[F ハ焦點]

ニシテ不易ナリ.

(第三) FP=FT

證明　FT=TA+AF=AM+AF　[(第一)]

=OA+AM　[∵ AF=OA]

=OM=KP　[KP ハ P ヨリ準線ヘ引キタル垂線]

=FP　[拋物線ノ定義]

【注意】 $\text{FP}=x'+a$

何トナレバ　FP=KP=OM

=OA+AM=AF+AM　[∵ OA=FA]

$=x'+a$

拋物線上ノ一點 P ノ**焦點距離**トハ其點 P ト焦點 F トノ距離 FP ノコトナリ.

(第四) 切線 PT ハ ∠FPK ヲ二等分ス.

證明 (第三) ニヨリ　　FP=FT

∴　∠FPT=∠FTP

=∠KPT

(第五) 焦點 F ヨリ切線ニ下シタル垂線ノ足ハ頂點ニ於

ケル切線上ニ在リ. [第78節例4參照]

證明 切線 PT ト頂點 A ニ於ケル切線トノ交點ヲ S トセヨ. サスレバ

$$TA=AM \qquad [(第一)]$$

$$SA \parallel PM$$

$$\therefore \quad TS=SP$$

$$又 \quad FP=FT \qquad [(第三)]$$

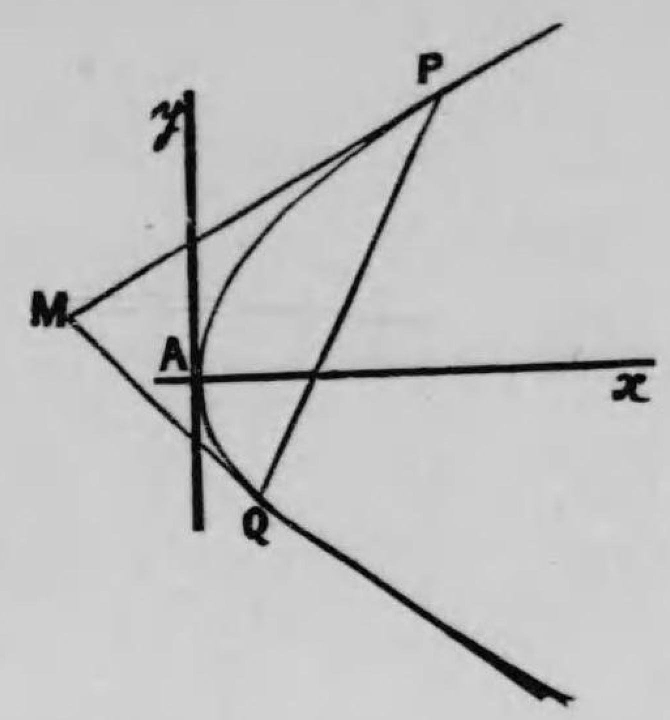
故ニ FS ハ二等邊三角形ノ底邊ノ中點 S ト頂點 F トヲ結ビ付クル直線ナリ.

$$\therefore \quad FS \perp PT$$

故ニ S ハ焦點 F ヨリ切線 PT ニ下セル垂線ノ足ニシテ頂點 A ニ於ケル切線ノ上ニアリ.

第三章 極及極線

84. 點(x', y')ヨリ拋物線 $y^2=4ax$ ヘ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ通ル直線ノ方程式



點 M (x', y') ヨリ拋物線

(1) $\qquad y^2=4ax$

ヘ引ケル二ツノ切線ノ切點 P, Q ノ坐標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) トセヨ. サスレバ切點 P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

(2) $\qquad y_1y=2a(x+x_1)$

切點 Q ニ於ケル切線ノ方程式ハ

(3) $\qquad y_2y=2a(x+x_2)$

ナリ. 然ルニ此等ノ二ツノ切線ハ何レモ點 (x', y') ヨリ引キタル者ナルヲ以テ, (x', y') ハ (2) 及 (3) ニ適合セザルベカラズ, 卽チ

(4) $\qquad y_1y'=2a(x'+x_1)$

(5) $\qquad y_2y'=2a(x'+x_2)$

(4) 及 (5) ニヨリテ (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) ハ

(6) $\qquad yy'=2a(x'+x)$

ナル一次方程式ニ適合スルコトヲ知ル.

因テ(6)ガ(x', y')ヨリ $y^2=4ax$ ニ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ通ル直線ノ方程式ナリ.

【注意1】 圓ノ場合ニ於ケルト同ジク,(6)ハ第77節ノ切線ノ方程式ト同一ノ形式ヲ有ス, 而シテ(x', y')ガ拋物線上ニ在ルトキハ, 特別ノ場合トシテ(6)ハ(x', y')ニ於ケル切線トナルナリ.

【注意2】 (x', y')ガ拋物線內ニ在ルトキハ第79節ニヨリテ切線ヲ引クコトヲ得ザレドモ(6)ガ表ハス直線ハ存在ス.

85. 極線及極

定義 直線 $y'y=2a(x+x')$ ヲ名ヅケテ拋物線 $y^2=4ax$ ニ關スル點(x', y')ノ**極線**トイヒ, 點(x', y')ヲ直線 $y'y=2a(x+x')$ ノ**極**トイフ.

86. 極線ノ應用ノ例

【例1】 點Pガ拋物線 $y^2=4ax$ ニ關スル點Qノ極線上ニ在レバ, 點Qハ點Pノ極線上ニ在リ.

證明 P, Qノ坐標ヲ夫々(x_1, y_1)及(x_2, y_2)トセヨ. サスレバ點Qノ極線ハ

$$(1)\qquad y_2y=2a(x+x_2)$$

然ルニ點(x_1, y_1)ハ直線(1)ノ上ニ在ルヲ以テ

$$(2)\qquad y_2y_1=2a(x_1+x_2)$$

而シテ(2)ハ亦點(x_2, y_2)ガ直線

$$(3)\qquad y_1y=2a(x+x_1)$$

卽チ點(x_1, y_1)ノ極線上ニ在ルコトヲ示ス.

【例2】 拋物線 $y^2=4ax$ ニ關スル, 直線 $Ax+By+C=0$ ノ極ノ坐標ヲ求メヨ.

解 所要ノ坐標ヲ(x', y')トスレバ, 此點ノ極線ノ方程式ハ前節ニヨリテ

$$y'y=2a(x+x') \qquad 卽チ \qquad 2ax-y'y+2ax'=0$$

ナリ. 而シテ是ガ與ヘラレタル極線 $Ax+By+C=0$ ト同一ノ直線ヲ表ハス爲ニハ

$$\frac{2a}{A}=\frac{-y'}{B}=\frac{2ax'}{C}$$

$$\therefore \qquad x'=\frac{C}{A}; \qquad y'=-\frac{2aB}{A}$$

故ニ所要ノ極ハ$\left(\frac{C}{A}, -\frac{2aB}{A}\right)$ナリ.

【例3】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ焦點ヲ通ル弦ノ兩端ニ於ケル切線ハ準線ノ上ニ於テ相交ハル.

證明 拋物線 $y^2=4ax$ ニ關スル焦點$(a, 0)$ノ極線ハ, 方程式

$$y_1y=2a(x+x_1)$$

ニ於テ $x_1=a, y_1=0$ トオキタル者, 卽チ

$$x+a=0$$

ニシテ準線ナリ. 故ニ焦點ヲ通ル弦ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ヲPトスレバ, 焦點ハPノ極線上ニ在ルヲ以テ例1ニヨリテPハ焦點ノ極線タル準線上ニ在ラザルベカラズ.

因テ本問題ハ證明セラレタリ.

【例4】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ通徑上ノ任意ノ點ノ極線ハ, 何レモ軸ト準線トノ交點ヲ通ル.

證明 通徑上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ(a, k)トセヨ. ココニ k ハ不定ナリ.

(a, k)ノ極線ノ方程式ハ

$$(1)\qquad ky=2a(x+a)$$

$$卽チ \qquad 2a(x+a)-ky=0$$

ナルヲ以テ, k ノ如何ニ拘ラハズ, (1)ハ

$$y=0 \quad 及 \quad x+a=0$$

ノ交點$(-a,\ 0)$卽チ軸ト準線トノ交點ヲ通ル.

【例5】 抛物線 $y^2=4ax$ 上ノ二點 P, Q ノ縱坐標ノ比ガ一定ニシテ $k:1$ ナルトキ, 此二點ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡如何.

解 二點 P, Q ニ於ケル切線ノ交點(卽チ所要ノ軌跡上ノ點)ノ坐標ヲ$(x',\ y')$トセヨ. サスレバ切弦 PQ ノ方程式ハ

$$(1) \qquad y'y=2a(x+x')$$

ナリ. 之ト抛物線ノ方程式

$$(2) \qquad y^2=4ax$$

トヨリ x ヲ消去スレバ

$$y^2-2y'y+4ax'=0$$

此方程式ノ二根 y_1, y_2 ハ夫々二點 P, Q ノ縱坐標ナリ.

サテ根ト係數トノ關係ニヨリ

$$(3) \qquad y_1+y_2=2y'$$

$$(4) \qquad y_1y_2=4ax'$$

然ルニ假設ニヨリ

$$\frac{y_1}{y_2}=k \qquad \therefore \quad y_1=ky_2$$

之ヲ(3), (4)ニ代入スレバ

$$(5) \qquad (1+k)y_2=2y'$$

$$(6) \qquad ky_2{}^2=4ax'$$

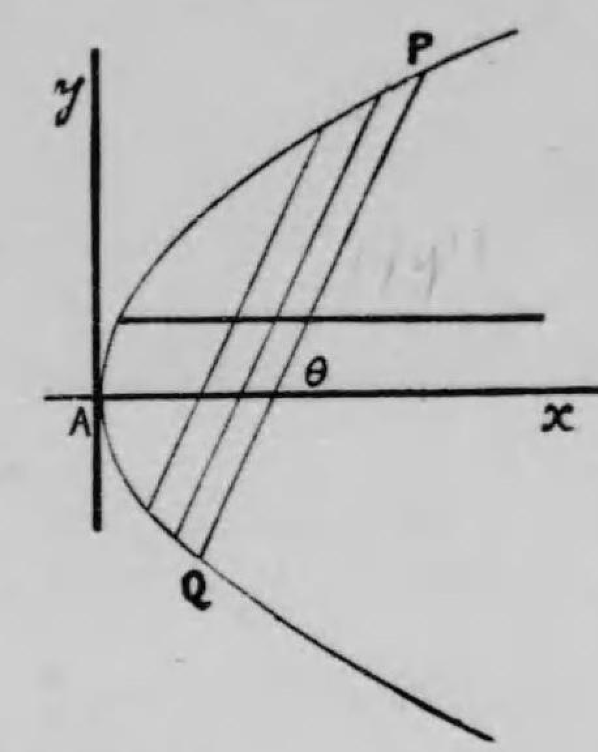
(5)及(6)ヨリ y_2 ヲ消去スレバ

$$\frac{k(4y'^2)}{(1+k)^2}=4ax' \qquad \therefore \quad y'^2=\frac{(1+k)^2}{k}ax'$$

故ニ所要ノ軌跡ハ抛物線ナリ.

第四章　徑

87. 抛物線 $y^2=4ax$ ノ平行弦ノ中點ノ軌跡



平行弦ノ各ガ x 軸トナス角ヲ θ トセヨ.

此等ノ弦ノ中ノ任意ノ一ツノ兩端 P, Q ノ坐標ヲ夫々 $(x',\ y')$, $(x'',\ y'')$ トシ, 其弦ノ中點(卽チ所要ノ軌跡上ノ點)ノ坐標ヲ$(x,\ y)$トセヨ. サスレバ

$$(1) \qquad 2x=x'+x'', \qquad 2y=y'+y''$$

又

$$(2) \qquad \frac{y'-y''}{x'-x''}=\tan\theta$$

然ルニ$(x',\ y')$, $(x'',\ y'')$ハ抛物線

$$y^2=4ax$$

上ノ點ナルヲ以テ

$$(3) \qquad y'^2=4ax'$$

$$(4) \qquad y''^2=4ax''$$

$$\therefore \quad y'^2-y''^2=4a(x'-x'')$$

卽チ $\qquad (y'-y'')(y'+y'')=4a(x'-x'')$

$$\therefore \quad \frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{4a}{y'+y''}$$

$$\therefore \qquad \frac{4a}{y'+y''}=\tan\theta \qquad [(2)ニヨル]$$

故ニ(1)ニヨリテ

$$\frac{4a}{2y}=\tan\theta$$

$$\therefore \qquad (5) \qquad y=2a\cot\theta$$

故ニ所要ノ軌跡ハ軸ニ平行ナル直線ナリ.

88. **定義** 拋物線ノ平行弦ノ中點ノ軌跡ヲ名ヅケテ徑トイフ.

徑ガ拋物線ニ交ハル點ヲ名ヅケテ徑ノ端トイフ.

徑ノ端ノ坐標ハ $(a\cot^2\theta,\ 2a\cot\theta)$ ナリ. 何トナレバ其縱坐標ハ前節ノ方程式(5)ニヨリテ明カニ $2a\cot\theta$ ナルユエ, 之ヲ拋物線ノ方程式 $y^2=4ax$ ノ左邊ニ代入スレバ

$$x=\frac{4a^2\cot^2\theta}{4a}=a\cot^2\theta$$

ヲ得レバナリ.

89. 徑ニ關スル問題ノ例

【例1】 拋物線ノ徑ノ端ニ於ケル切線ハ其徑ニヨリテ二等分セラルル平行弦ノ各ニ平行ナリ.

證明 拋物線 $y^2=4ax$ ノ平行弦ガ x 軸トナス角ヲ θ トスレバ, 其弦ニ對スル徑ノ方程式ハ

$$(1) \qquad y=2a\cot\theta$$

ニシテ其端ノ坐標ハ $(a\cot^2\theta,\ 2a\cot\theta)$ ナリ.

ソコデ徑ノ端ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y.2a\cot\theta=2a(x+a\cot^2\theta)$$

$$\therefore \qquad (2) \qquad y=x\tan\theta+a\cot\theta$$

故ニ此切線ノ角係數ハ $\tan\theta$ ナリ. 因テ此徑ニテ二等分セラルル平行弦ノ各ニ平行ナリ.

【例2】 拋物線ノ焦點ヨリ平行弦ノ各ニ垂直ニ引ケル直線ハ此弦ノ徑(此弦ヲ二等分スル徑)ト準線ノ上ニ於テ交ハル.

證明 平行弦ノ一ツノ方程式ヲ

$$(1) \qquad y=mx+b$$

トシ, 拋物線ノ方程式ヲ

$$(2) \qquad y^2=4ax$$

トセヨ. サスレバ上ノ弦ヲ二等分スル徑ノ方程式ハ

$$(3) \qquad y=\frac{2a}{m}$$

ナリ. 焦點 $(a,\ 0)$ ヲ通リ(1)ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$(4) \qquad y=-\frac{1}{m}(x-a)$$

ソコデ(3)ト(4)トヲ聯立方程式トシテ y ヲ消去スレバ

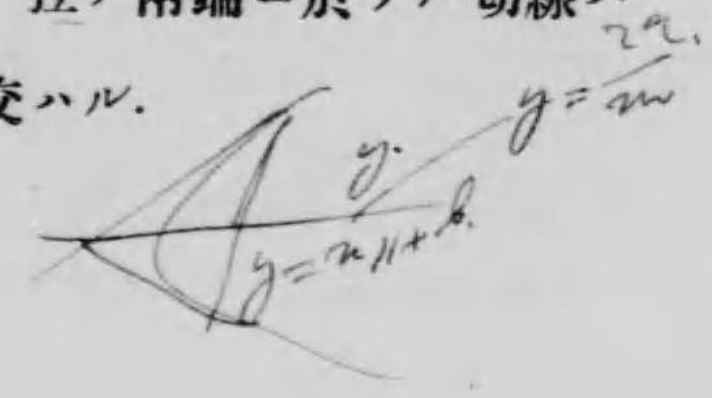
$$\frac{2a}{m}=-\frac{1}{m}(x-a)$$

$$\therefore \qquad x-a=-2a$$

$$\therefore \qquad x=-a$$

是ハ徑ト直線(4)トノ交點ノ橫坐標ナリ. 故ニ此交點ハ準線上ニ在リ.

【例3】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ一ツノ弦ノ兩端ニ於ケル切線ハ此弦ヲ二等分スル徑ノ上ニ於テ相交ハル.



證明 弦ノ方程式ヲ

$$(1) \qquad y=mx+b$$

トスレバ, 之ヲ二等分スル徑ノ方程式ハ

$$(2) \qquad y=\frac{2a}{m}$$

ナリ. ソコデ此弦ノ兩端ニ於ケル二ツノ切線ノ交點ノ坐標ヲ (x',y') トスレバ, 直線(1)ハ點 $(x',\ y')$ ノ極線ナルヲ以テ, 極線ノ方程式

(3) $y'y=2a(x+x')$ 從テ $y=\frac{2a}{y'}x+\frac{2ax'}{y'}$

ト(1)トハ結局同一ノ直線ヲ表ハス.

$$\therefore \qquad \frac{2a}{y'}=m$$

$$\therefore \qquad y'=\frac{2a}{m}$$

是ハ(2)ニ適合ス. 故ニ此二切線ノ交點ハ徑ノ上ニ在リ.

【例 4】 抛物線 $y^2=4ax$ ノ二ツノ切線ノ角係數ヲ夫々 μ, μ' トスルトキ, 此二切線ノ切點ヲ結ビ付クル弦ヲ二等分スル徑ノ端ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 此二ツノ切線ノ方程式ハ夫々

(1) $y=\mu x+\frac{a}{\mu}$

(2) $y=\mu' x+\frac{a}{\mu'}$

ナリ. ソコデ(1)及(2)ヲ聯立方程式トシテ y ノ値ヲ求ムレバ切線(1)及(2)ノ交點ノ縦坐標ヲ得. 卽チ

(1) $\times\mu'-$ (2) $\times\mu$ $\quad (\mu'-\mu)y=a\left(\frac{\mu'}{\mu}-\frac{\mu}{\mu'}\right)=\frac{a(\mu'-\mu)(\mu'+\mu)}{\mu\mu'}$

$\therefore$ (3) $\quad y=\frac{a(\mu'+\mu)}{\mu\mu'}$

然ルニ此二切線ノ交點ハ其切點ヲ結ビ付クル弦ヲ二等分スル徑ノ上ニ在ルベキヲ以テ, 徑ノ端ノ縦坐標モ亦(3)ノ右邊ニ同ジ. 從テ徑ノ端ノ橫坐標ハ抛物線ノ方程式

$$y^2=4ax$$

ノ左邊ニ $y=\frac{a(\mu+\mu')}{\mu\mu'}$ ヲ代入シタルトキノ x ノ値, 卽チ

$$x=\frac{a^2(\mu+\mu')^2}{4a\mu^2\mu'^2}=\frac{a(\mu+\mu')^2}{4\mu^2\mu'^2}$$

ナリ. 因テ點 $\left[\frac{a(\mu+\mu')^2}{4\mu^2\mu'^2}, \frac{a(\mu+\mu')}{\mu\mu'}\right]$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{a(\mu+\mu')}{\mu\mu'}y=2a\left[x+\frac{a(\mu+\mu')^2}{4\mu^2\mu'^2}\right]$$

第五章 應用問題雜例

90. 證明問題

【例 1】 抛物線上ノ點 P ニ於ケル切線ヘ焦點 F ヨリ下シタル垂線ノ足ヲ S トスレバ

$$FS^2=FA.FP$$

ナリ, 但シ A ハ頂點ナリ.

證明 抛物線ノ方程式ヲ

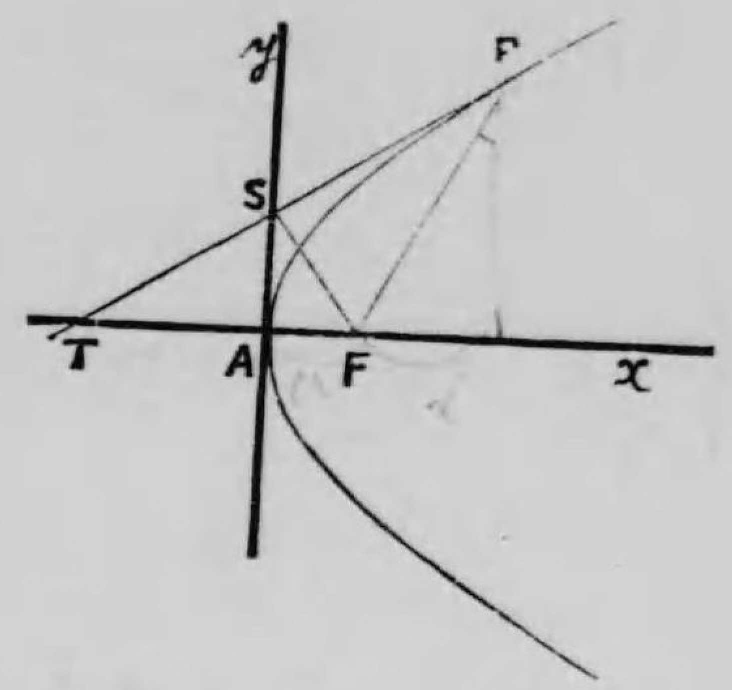
(1) $y^2=4ax$

トシ, 點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ.

サスレバ點 P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

(2) $y'y=2a(x+x')$

ナリ. 故ニ焦點 $(a, 0)$ ヨリ切線 (2) ニ下シタル垂線 FS ハ第 31 節ニヨリテ



$$FS=\frac{2a(a+x')}{\sqrt{4a^2+y'^2}}=\frac{2a(a+x')}{\sqrt{4a^2+4ax'}} \qquad [\because \ y'^2=4ax']$$

$$=\frac{2a(a+x')}{2\sqrt{a(a+x')}}=\sqrt{a(a+x')}$$

然ルニ $\quad FA=a, \quad FP=a+x'$ [第 83 節注意]

$$\therefore \qquad FS=\sqrt{FA.FP}$$

$$\therefore \qquad FS^2=FA.FP$$

【注意】 S ハ頂點ニ於ケル切線上ニ在リ[第 83 節(第五)]. 故ニ切線ト軸トノ交點ヲ T トスレバ

$$FS^2=FA.FT$$

然ルニ $\quad FP=FT$ [第 83 節(第三)]

$\therefore \qquad FS^2 = FA.FP$

【例 2】 二ツノ抛物線

$$(1) \qquad y^2 = 4ax$$

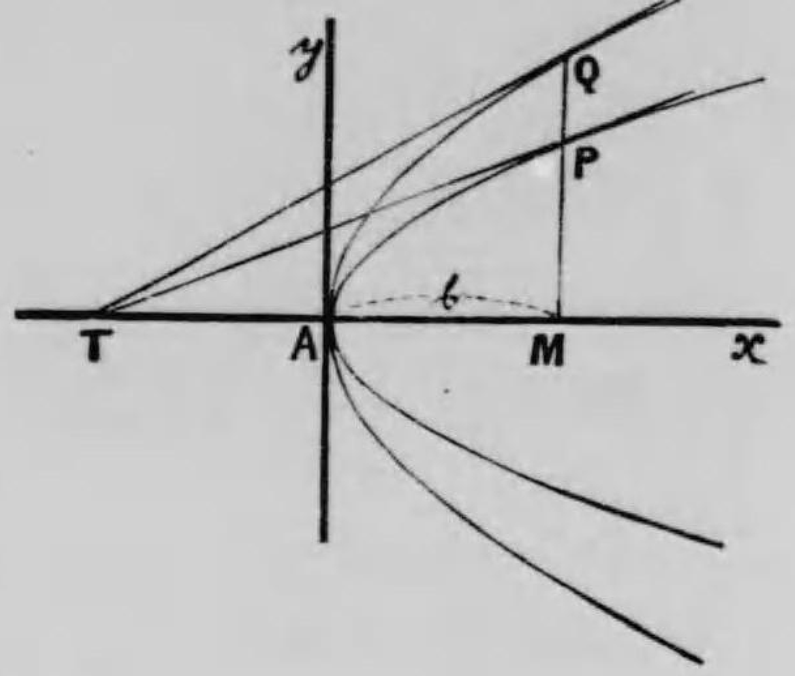
$$(2) \qquad y^2 = 4a'x$$

上ノ同一ノ橫坐標 b ヲ有スル點 P, Q ニ於ケル二ツノ切線ト線分 PQ トニテ圍マルル三角形ノ面積ハ $2b^{\frac{3}{2}}(\sqrt{a'} \sim \sqrt{a})$ ナルコトヲ證明セヨ.

證明 P, Q ノ縱線ノ足ヲ何レモ M トセヨ. サスレバ

$$MP = 2\sqrt{ab}, \quad MQ = 2\sqrt{a'b}$$

$$\therefore \quad PQ = MQ - MP$$
$$= 2\sqrt{b}(\sqrt{a'} - \sqrt{a})$$



サテ P, Q ニ於ケル切線ト軸トノ交點ヲ夫々 T, T′ トスレバ, 次切線 MT, MT′ ハ何レモ頂點 A ニ於テ二等分セラルベキヲ以テ [第83節(第一)], T ト T′ トハ同一ノ點ナリ.

卽チ P, Q ニ於ケル二切線ノ交點ハ x 軸上ニアリテ

$$TM = 2b$$

$$\therefore \quad \triangle TPQ = \frac{1}{2}TM.PQ = \frac{1}{2}2b.2\sqrt{b}(\sqrt{a'} - \sqrt{a})$$
$$= 2b^{\frac{3}{2}}(\sqrt{a'} - \sqrt{a})$$

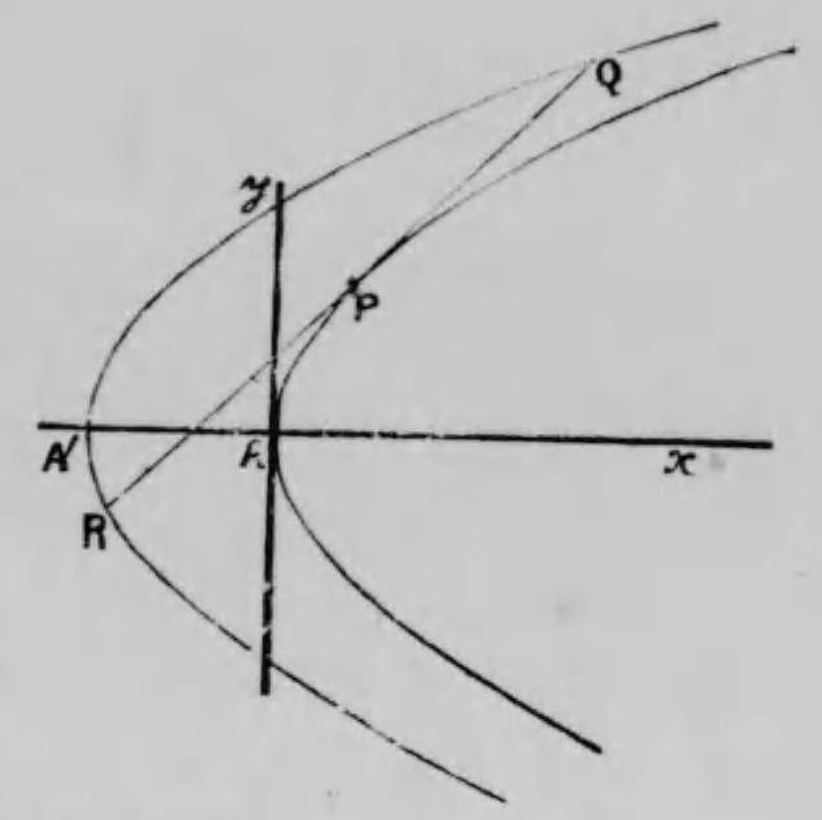
【例 3】 軸ヲ共有スル二ツノ相等シキ抛物線アリ, 其中ノ內方ニアル者ノ切線上ニ生ズル, 外方ノ抛物線ノ弦ハ切點ニ於テ二等分セラル.

證明 共通ノ軸ヲ x 軸ニ取リ, 內方ノ抛物線ノ頂點 A ヲ原點トシ, 外方ノ抛物線ノ頂點 A′ ノ坐標ヲ $(-l, 0)$ トセヨ. 今內方ノ抛物線ノ方程式ヲ

$$(1) \qquad y^2 = 4ax$$

トスレバ, 之ニ等シキ外方ノ抛物線ノ方程式ハ

$$(2) \qquad y^2 = 4a(x+l)$$



ナリ. 抛物線(1)ノ上ニアル點 P (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(3) \qquad y'y = 2a(x+x')$$

ナリ. ソコデ (2) ト (3) トヲ聯立方程式トシテ解ケバ切線 (3) 上ニ生ズル, 外方ノ抛物線ノ弦ノ兩端 Q, R ノ坐標ヲ得ベシ.

今 (2) ト (3) トヨリ x ヲ消去スル爲ニ (3) ノ兩邊ニ 2 ヲ掛ケテ (2) ヨリ邊々相減ズレバ

$$y^2 - 2y'y - 4a(l - x') = 0$$

此方程式ノ二根ハ Q 及 R ノ縱坐標ナリ. 今之ヲ y_1, y_2 トセンニ, 根ト係數トノ關係ニヨリ

$$y_1 + y_2 = 2y'$$

因テ P ハ弦 QR ノ中點ナリ.

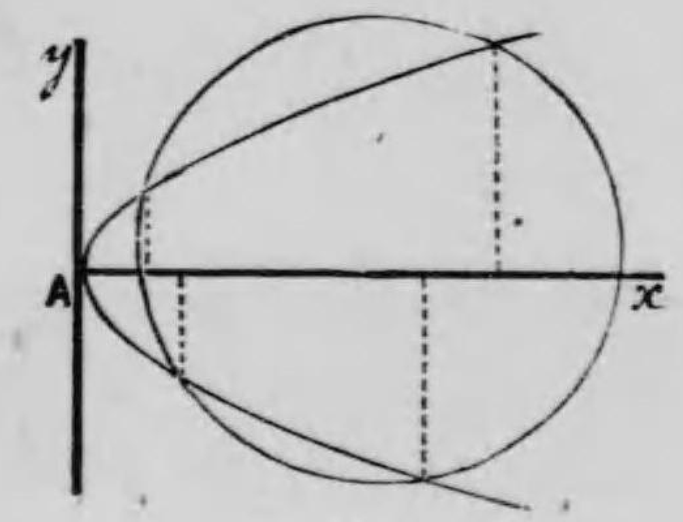
【例 4】 抛物線 $y^2 = 4ax$ ト或一ツノ圓トガ四點ニ於テ相交ハルトキ, 其中抛物線ノ軸ノ一方ニアル點ノ縱線ノ和ハ他方ニアル者ノ縱線ノ和ニ等シ.

證明 圓ノ方程式ヲ

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

トセンニ, (1) ト抛物線ノ方程式

$$(2) \qquad y^2 = 4ax$$



トヨリ x ヲ消去スレバ, (1), (2) ノ四ツノ交點ノ縱坐標ヲ與フル方程式ヲ得. 卽チ (2) ヨリ

$$x=\frac{y^2}{4a}$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$\frac{y^4}{16a^2}+y^2+\frac{gy^2}{2a}+2fy+c=0$$

$$\therefore\qquad y^4+(16a^2+8ag)y^2+32a^2fy+16a^2c=0$$

是ハ y ニ付テノ四次方程式ナリ. ソコデ其四根ヲ y_1, y_2, y_3, y_4 トスレバ,上ノ方程式ニハ y^3 ノ項ナキユエ, 根ト係數トノ關係ニヨリ

$$y_1+y_2+y_3+y_4=0$$

故ニ此 y_1, y_2, y_3, y_4 ノ中ニハ正數ト負數トガアリテ其正數ノ絶對値ノ和ト負數ノ絶對値ノ和トガ相等シキコトヲ知ル.

因テ本問題ノ眞ナルコトヲ知ル.

【例 5】 軸ガ互ニ平行ナル三ツノ抛物線ガ相交ハルアリ,其二ツ宛ノ共通弦ハ同一ノ點ヲ通ル.

證明 一ツノ抛物線ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad y^2=4ax$$

トスレバ, 軸ガ平行ナル他ノ二ツノ抛物線ノ方程式ハ夫々

$$(2)\qquad (y-k')^2=4a'(x-h')$$

$$(3)\qquad (y-k'')^2=4a''(x-h'')$$

トオクコトヲ得. サスレバ(1)ト(2)トノ共通弦ノ方程式ハ

(1)−(2)卽チ　$(4)\qquad 2k'y-k'^2=4ax-4a'(x-h')$

(2)ト(3)トノ共通弦ノ方程式ハ　(2)−(3)　卽チ

$$(5)\qquad 2(k''-k')y+k'^2-k''^2=4a'(x-h')-4a''(x-h'')$$

又(3)ト(1)トノ共通弦ノ方程式ハ　(3)−(1)　卽チ

$$(6)\qquad -2k''y+k''^2=4a''(x-h'')-4ax$$

ナリ. (4),(5),(6)ノ中ノ何レカ二ツ, 例ヘバ(4)及(5)ノ何レニモ適スル x, y ノ値卽チ二直線(4)及(5)ノ交點ノ坐標ハ(4)ニ(5)ヲ加ヘタル者, 卽チ

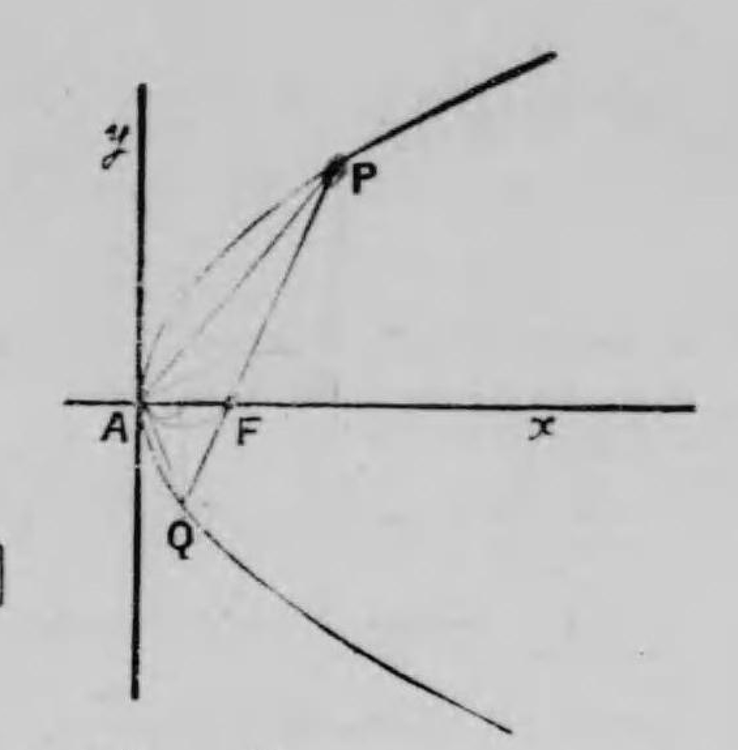
$$2k''y-k''^2=4ax-4a''(x-h'')$$

卽チ(6)ニモ適合ス. 因テ三ツノ弦(4),(5),(6)ハ同一ノ點ヲ通ル.

【例 6】 抛物線ノ頂點ヲ A, 焦點ヲ F, 焦點ヲ通ル弦ノ兩端ヲ P, Q トスルトキ, △PAQ ノ面積ハ弦 PQ ノ平方根ニ比例ス.

證明 抛物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4ax$$



トシ, P, Q ノ坐標ヲ夫々 $(x', y'), (x''y'')$ トスレバ

$$PQ=FP+FQ=(x'+a)+(x''+a)$$

$$=\frac{y'^2}{4a}+\frac{y''^2}{4a}+2a\qquad\left[\because\ \begin{array}{l}y'^2=4ax'\\ y''^2=4ax''\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{4a}(y'^2+y''^2+8a^2)$$

又 $$\triangle APQ=\triangle AFP+\triangle AFQ=\frac{ay'}{2}-\frac{ay''}{2}$$

$$\therefore\qquad (\triangle APQ)^2=\frac{a^2}{4}(y'^2+y''^2-2y'y'')$$

$$=\frac{a^2}{4}(y'^2+y''^2+8a^2)\qquad [\because\ y'y''=-4a^2 \text{ 第72節例3}]$$

$$\therefore\qquad \frac{(\triangle APQ)^2}{PQ}=a^3$$

$$\therefore\qquad \triangle APQ=a^{\frac{3}{2}}\sqrt{PQ}$$

【例 7】 抛物線ノ通徑ノ一端 P ニ於ケル法線ガ再ビ此曲線ト交ハル點ヲ Q トスレバ, P 及 Q ニ於ケル切線ノ交點ヲ通ル徑ハ通徑ノ今一ツノ端 P′ ヲ通ル.

證明 抛物線ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad y^2=4ax$$

トセヨ. サスレバ點 P ノ坐標ハ $(a, 2a)$ ナリ. 故ニ點 P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y'y=2a(x+x')$$

ニ於テ $x'=a$, $y'=2a$ トオキタル者, 卽チ

$$2ay=2a(x+a)$$

ニシテ, 其角係數ハ

$$\frac{2a}{2a}=1$$

ナリ. 故ニ P ニ於ケル法線 PQ ノ角係數ハ -1 ナリ.

故ニ法線 PQ ニ平行ナル弦ノ各ヲ二等分スル徑卽チ Q, P ニ於ケル切線ノ交點ヲ通ル徑ノ方程式ハ第 87 節ニヨリ

$$y=\frac{2a}{-1}=-2a$$

ナリ. 故ニ此徑ハ通徑ノ他ノ端 $(a,\ -2a)$ ヲ通ル.

【例 8】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ一ツノ定マレル徑ノ上ノ任意ノ點ヨリ拋物線ニ引ケル二ツノ切線ノ角係數ヲ夫々 μ_1, μ_2 トスレバ $\dfrac{1}{\mu_1}+\dfrac{1}{\mu_2}$ ハ不易ナリ.

證明 拋物線ノ徑ハ軸ニ平行ナルユヱ, 徑ノ上ノ任意ノ一點 P ノ坐標ヲ $(x',\ y')$ トスレバ y' ハ一定ナリ.

今拋物線ノ切線ノ方程式

$$y=mx+\frac{a}{m}$$

ニ於テ $x=x'$, $y=y'$ トオキ分母ヲ拂ヘバ m ニ付テノ二次方程式

$$m^2x'-my'+a=0$$

ヲ得. 此二根ガ卽チ P ヨリ引ケル二ツノ切線ノ角係數 μ_1, μ_2 ナリ. 故ニ根ト係數トノ關係ニヨリ

$$\mu_1+\mu_2=\frac{y'}{x'},\qquad \mu_1\mu_2=\frac{a}{x'}$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}=\frac{y'}{x'}\div\frac{a}{x'}=\frac{y'}{a}$$

ニシテ一定不易ナリ.

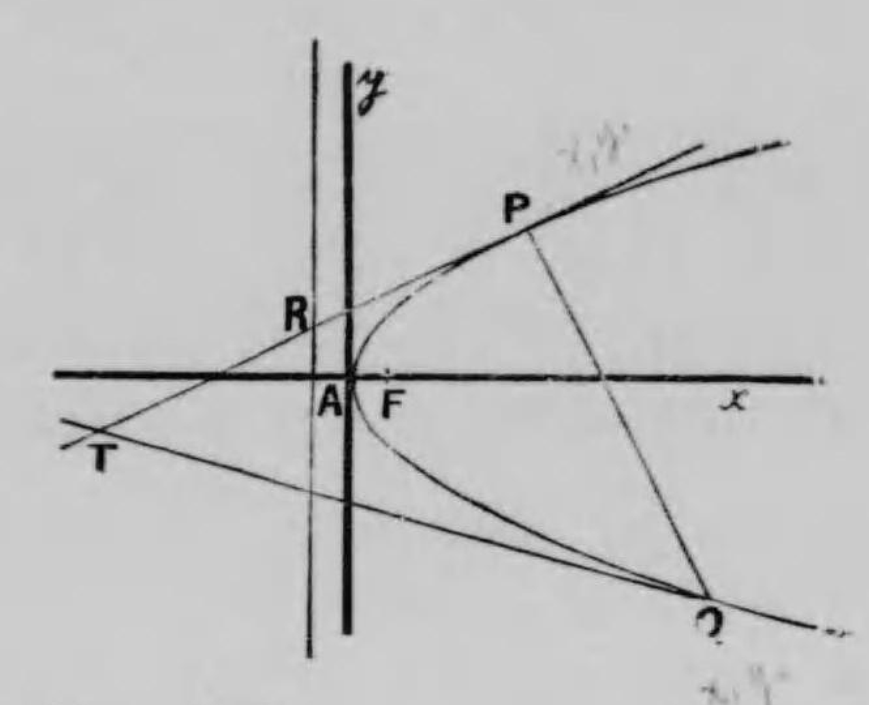
【例 9】 拋物線上ノ點 P ヲ通ル法線ガ再ビ拋物線ニ交ハル點ヲ Q トシ, P 及 Q ニ於ケル切線ノ交點ヲ T トスレバ線

分 PT ハ準線ニヨリテ二等分セラル.

證明 拋物線ノ方程式ヲ

(1) $\qquad y^2=4ax$

トシ, P, Q ノ坐標ヲ夫々 $(x',\ y')$, $(x'',\ y'')$ トセヨ. サスレバ PT ノ方程式ハ



(2) $\qquad y'y=2a(x+x')$

QT ノ方程式ハ

(3) $\qquad y''y=2a(x+x'')$

而シテ直線 PQ ノ方程式ハ

(4) $$\frac{y-y''}{x-x''}=\frac{y'-y''}{x'-x''}$$

ナリ. 然ルニ

$$\mathrm{PT}\perp\mathrm{PQ}$$

$$\therefore\qquad \frac{2a}{y'}\times\frac{y'-y''}{x'-x''}=-1$$

$$\therefore\qquad (5)\qquad \frac{x'-x''}{y'-y''}=-\frac{2a}{y'}$$

ソコデ本問題ヲ證明スルニハ, 此 (5) ナル條件ヲ用ヒテ點 T ノ x 坐標ヲ求メ, 之ト x' トノ和ガ $-2a$ ニ等シキコトヲ證明スレバヨシ. サテ其レガ爲ニハ先ヅ T ノ y 坐標 y_1 ヲ求メ, 然ル後 T ノ x 坐標 x_1 ヲ求ムル方ガ簡便ナリ, 卽チ

(2)—(3) $\qquad (y'-y'')y=2a(x'-x'')$

$$\therefore\qquad y_1=\frac{2a(x'-x'')}{y'-y''}=2a\left(-\frac{2a}{y'}\right)\qquad [(5)\text{ ニヨル}]$$

$$=-\frac{4a^2}{y'}$$

之ヲ (2) ノ y ニ代入スレバ

$$-4a^2=2a(x_1+x')$$

$$\therefore\qquad x_1+x'=-2a$$

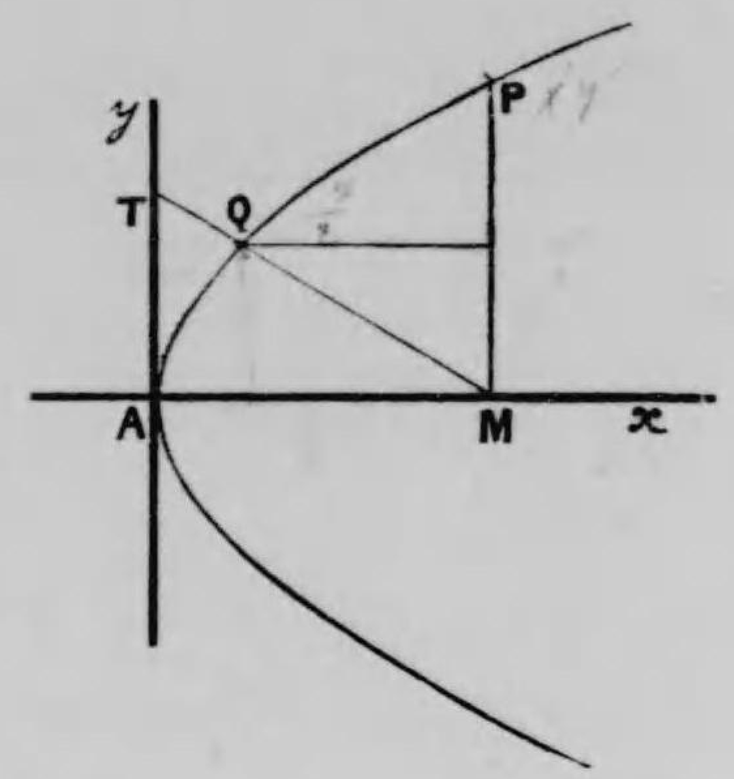
【例 10】 拋物線上ノ點 P ノ縱線ヲ MP トシ, MP ノ中點

ヲ通リテ軸ニ平行ナル直線ヲ引キ抛物線トQニ於テ交ハラシメ，又直線 MQ ト頂點 A ニ於ケル切線トノ交點ヲ T トセヨ．サスレバ $AT=\frac{2}{3}MP$ ナリ．

證明 抛物線ノ方程式ヲ

(1)　$y^2=4ax$

トシ，點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ．



サスレバ點 Q ノ y 坐標ハ $\frac{y'}{2}$ ニシテ

其 x 坐標ハ $\frac{y'}{2}$ ヲ(1) ノ y ニ代入シテ得ル x ノ値，卽チ

$$\left(\frac{y'}{2}\right)^2\div 4a=\frac{y'^2}{16a}$$

ナリ．故ニ直線 MQ ノ方程式ハ

$$(2)\qquad \frac{y}{x-x'}=\frac{\frac{y'}{2}}{\frac{y'^2}{16a}-x'}=\frac{8ay}{y'^2-16ax'}$$

$$=\frac{8ay}{4ax'-16ax'}\qquad [\because\ y'^2=4ax']$$

$$=-\frac{2y'}{3x'}$$

ソコデ(2)ニ於テ $x=0$ ヲ代入シテ得ル y ノ値ハ T ノ y 坐標ナリ．卽チ

$$\frac{y}{-x'}=-\frac{2y'}{3x'}$$

$$\therefore\qquad y=\frac{2}{3}y'$$

卽チ　$AT=\frac{2}{3}MP$

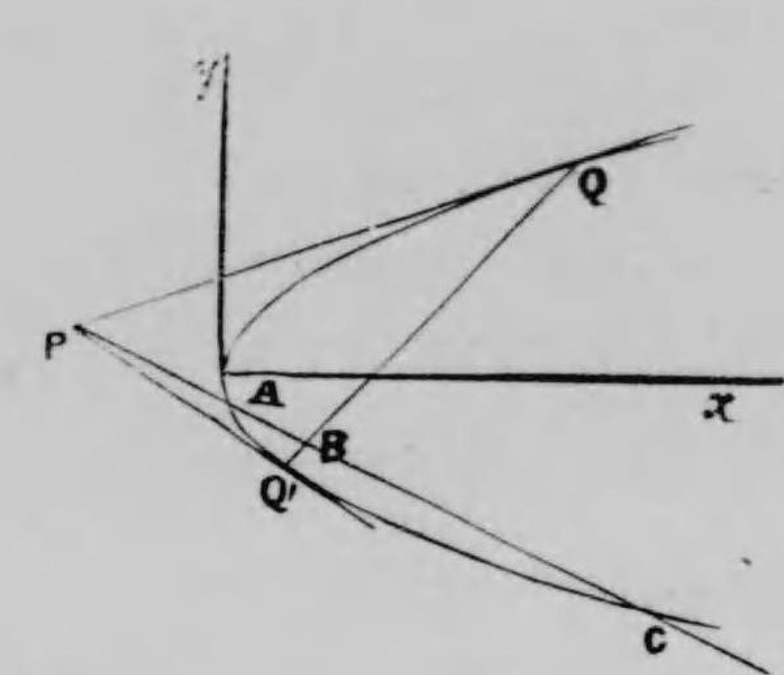
【例 11】 抛物線ノ弦 QQ′ ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點 P ヨリ直線ヲ引キ抛物線ト二點 A, C ニ於テ交ハラシメ，弦 QQ′ ト

點 B ニ於テ交ハラシムルトキ，三ツノ線分 PA, PB, PC ハ調和級數ヲナス．

證明 抛物線ノ方程式ヲ

(1)　$y^2=4ax$

トシ，點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ．



サスレバ QQ′ ノ方程式ハ

(2)　$y'y=2a(x+x')$

ナリ．次ニ直線 PABC ノ方程式ヲ

$$(3)\qquad \frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\sin\alpha}=l$$

從テ

$$(3)'\qquad x=x'+l\cos\alpha,\quad y=y'+l\sin\alpha$$

トセヨ．ソコデ(3)′ニヨリテ(1)ノ x, y ニ代入スレバ，l ニ付テノ二次方程式

$$(y'+l\sin\alpha)^2=4a(x'+l\cos\alpha)$$

從テ　(4)　$l^2\sin^2\alpha-2l(2a\cos\alpha-y'\sin\alpha)+y'^2-4ax'=0$

ヲ得．此二根ハ二ツノ線分 PA, PC ヲ表ハス數ナリ．今之ヲ l_1, l_2 トセンニ，根ト係數トノ關係ニヨリテ

$$l_1+l_2=\frac{2(2a\cos\alpha-y'\sin\alpha)}{\sin^2\alpha},\qquad l_1l_2=\frac{y'^2-4ax'}{\sin^2\alpha}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{PA}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}=\frac{l_1+l_2}{l_1l_2}=\frac{2(2a\cos\alpha-y'\sin\alpha)}{y'^2-4ax'}$$

又 (3)′ ヲ (2) ニ代入スレバ

$$y'^2+ly'\sin\alpha=2a(2x'+l\cos\alpha)$$

$$\therefore\qquad l=PB=\frac{y'^2-4ax'}{2a\cos\alpha-y'\sin\alpha}$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{PB}=\frac{2a\cos\alpha-y'\sin\alpha}{y'^2-4ax'}$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{PA}+\frac{1}{PC}=\frac{2}{PB}$$

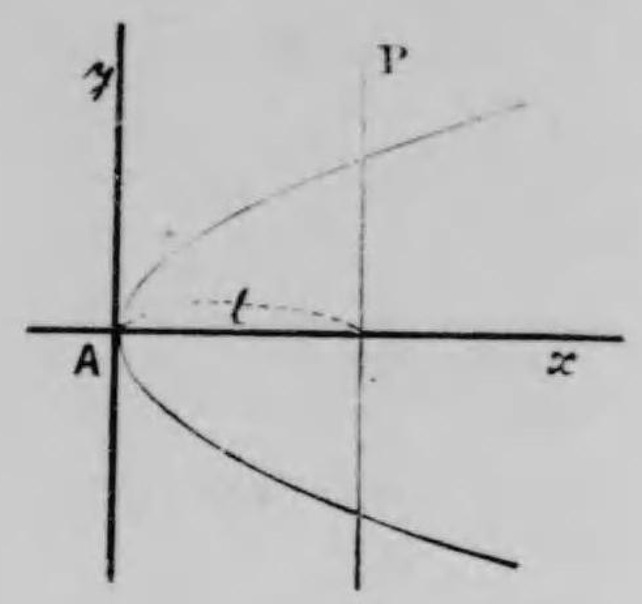
【例 12】 頂點ト軸トヲ共有スル數多ノ抛物線アリ，其共通

軸ニ垂直ナル一ツノ直線上ノ任意ノ點ヲ極トスルトキノ總テノ拋物線ニ關スル極線ハ皆同一ノ點ヲ通ル.

證明 項點ト軸トヲ共有スル數多ノ拋物線ノ中ノ任意ノ一ツノ方程式ヲ

(1) $$y^2=4ax$$

トセヨ. ココニ a ハ變常數ナリ.



x 軸ニ垂直ナル定直線ノ方程式ヲ

$$x=l$$

トシ, 其上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (l, y') トセヨ. ココニ y' ハ P ノ位置ニヨリテ其値ガ變ハル.

サスレバ拋物線(1)ニ關スル P ノ極線ノ方程式ハ

(2) $$y'y=2a(x+l)$$

從テ $$y-\frac{2a}{y'}(x+l)=0$$

而シテ $\frac{2a}{y'}$ ハ P ノ位置及拋物線ノ異ナルニ從テ其値ガ變ハル, 卽チ變常數ナリ.

故ニ(3)ハ二定直線

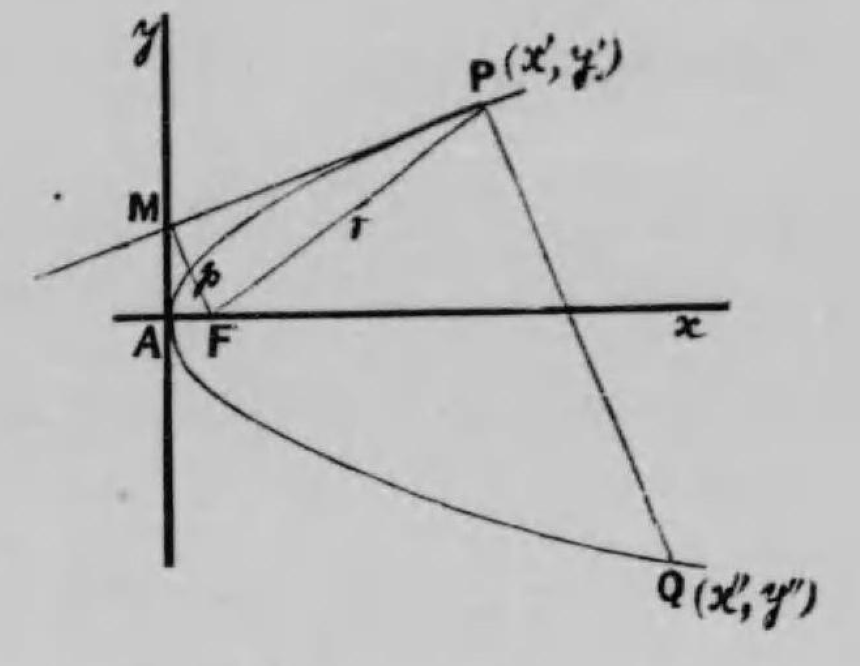
$$y=0 \quad 及 \quad x+l=0$$

ノ交點, 卽チ x 軸上ニ於テ原點 A ノ左方 l ダケノ距離ニアル點ヲ通ルコトヲ知ル.

【例 13】 拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ任意ノ點 P ニ於ケル法線ガ再ビ曲線ニ交ハル點ヲ Q トシ, FP$=r$ [ココニ F ハ焦點ナリ], P ニ於ケル切線上へ F ヨリ下シタル垂線ノ長サ FM ヲ p トスレバ $\mathrm{PQ}=\frac{4pr}{r-a}$ ナリ.

證明 P ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ, 法線 PQ ノ方程式ハ

(1) $$y-y'=-\frac{y'}{2a}(x-x')$$



之ト曲線ノ方程式

(2) $$y^2=4ax$$

トヨリ x ヲ消去スレバ

$$y-y'=-\frac{y'}{2a}\left(\frac{y^2}{4a}-x'\right)$$

$$\therefore\ y'y^2+8a^2y-4a(2a+x')y'=0$$

此二根ハ P ノ y 坐標 y' ト Q ノ y 坐標 y'' トナリ.

$$\therefore\quad (y'-y'')^2=(y'+y'')^2-4y'y''=\left(-\frac{8a^2}{y'}\right)^2+16a(2a+x')$$

$$=\frac{64a^4+16a(2a+x')y'^2}{y'^2}=\frac{64a^4+64a^2x'(2a+x')}{4ax'} \quad [\because\ y'^2=4ax']$$

$$=\frac{16a[a^2+x'(2a+x')]}{x'}$$

$$\therefore \quad (3) \quad (y'-y'')^2=\frac{16a(x'+a)^2}{x'}$$

サテ Q ノ坐標 (x'', y'') ハ (1) ニ適合スベキヲ以テ

$$y''-y'=-\frac{y'}{2a}(x''-x')$$

$$\therefore\quad (x'-x'')^2=\frac{4a^2(y'-y'')^2}{y'^2}=\frac{4a^2(y'-y'')^2}{4ax'}=\frac{a(y'-y'')^2}{x'}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2=\frac{a(y'-y'')^2}{x'}+(y'-y'')^2$$

$$=\frac{(y'-y'')^2(x'+a)}{x'}=\frac{16a(x'+a)^3}{x'^2} \qquad [(3)ニヨル]$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}=\frac{4(x'+a)\sqrt{a(x'+a)}}{x'}$$

然ルニ $r=\mathrm{FP}=x'+a, \quad p=\mathrm{FM}=\sqrt{\mathrm{FA.FP}}=\sqrt{a(x'+a)}$ [例 1]

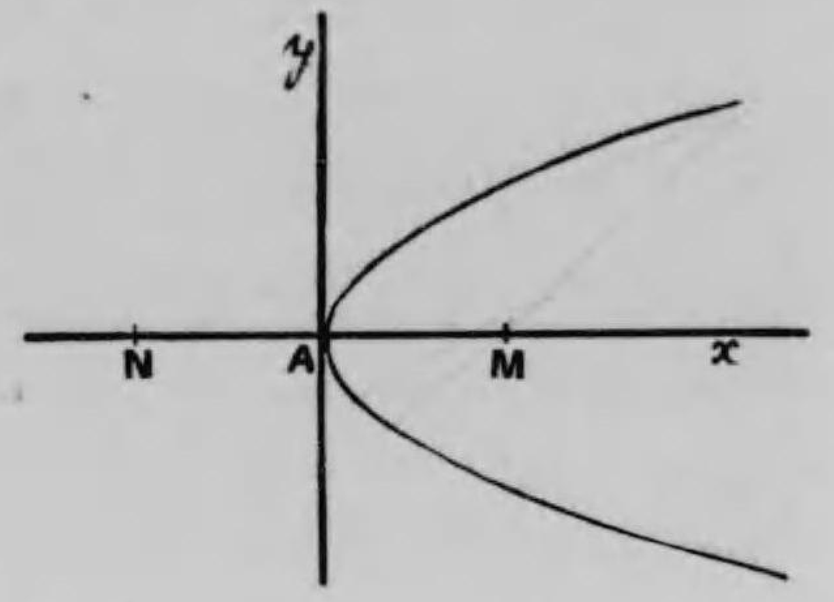
$$\therefore\quad \mathrm{PQ}=\frac{4pr}{r-a}$$

【例 14】 拋物線ノ軸上ニ於テ頂點ヨリ等距離ニアル二點 M, N ヨリ平行ナル二ツノ弦ヲ引ケバ, 此二弦ガ M, N ニ於テ

内分又ハ外分セラルル二ツノ分ノ積ハ相等シ.

證明 抛物線ノ方程式ヲ

(1) $y^2=4ax$



トシ, M ノ坐標ヲ $(b, 0)$ トスレバ, N ノ坐標ハ $(-b, 0)$ ナリ.

サテ M ヲ通リ x 軸ト角 α ヲナス弦ノ方程式ハ

(2) $\dfrac{x-b}{\cos\alpha}=\dfrac{y}{\sin\alpha}=l$

$\therefore\quad x=l\cos\alpha+b,\quad y=l\sin\alpha$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$l^2\sin^2\alpha=4al\cos\alpha+4ab$$

$$\therefore\quad l^2\sin^2\alpha-4al\cos\alpha-4ab=0$$

l ニ付テノ此二次方程式ノ二根ハ M ヨリ此弦ノ兩端ニ至ル距離, 卽チ此弦ガ M ニテ分タルル二ツノ分ヲ表ハス. 今之ヲ l_1, l_2 トスレバ

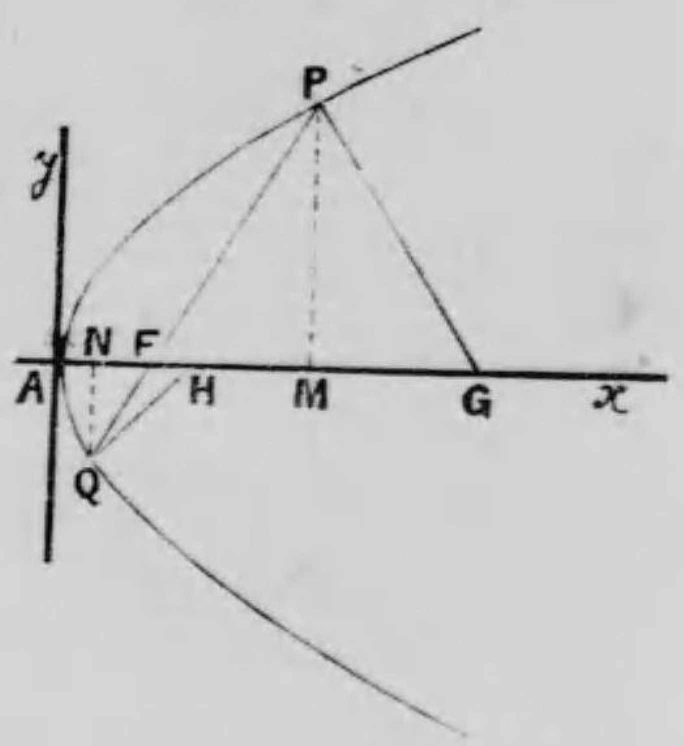
(3) $l_1l_2=-\dfrac{4ab}{\sin^2\alpha}$

次ニ N ヲ通リ x 軸ト角 α ヲナス弦ガ N ニテ外分サルル二ツノ分ノ積ハ (3) ノ右邊ニ於テ b ノ代リニ $-b$ ト置キタルモノ, 卽チ

$$\frac{4ab}{\sin^2\alpha}$$

ニ外ナラザルベク, 從テ其絶對値ハ相等シ.

【例 15】 抛物線ノ焦點 F ヲ通ル任意ノ弦ノ兩端 P, Q ニ於ケル法線ヲ夫々 PG, QH トスレバ $\dfrac{1}{\mathrm{PG}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{QH}^2}$ ハ不易ナリ.



證明 抛物線ノ方程式ヲ

(1) $y^2=4ax$

トシ, 二點 P, Q ノ坐標ヲ夫々 (x', y'), (x'', y'') トセヨ. P, Q ノ縱線ノ足ヲ夫々 M, N トスレバ

$$\mathrm{PG}^2=\mathrm{PM}^2+\mathrm{MG}^2=y'^2+4a^2 \qquad [第 83 節(第二)]$$

同樣ニ $\qquad \mathrm{QH}^2=y''^2+4a^2$

$$\therefore\quad \frac{1}{\mathrm{PG}^2}+\frac{1}{\mathrm{QH}^2}=\frac{1}{y'^2+4a^2}+\frac{1}{y''^2+4a^2}$$

$$=\frac{8a^2+(y'^2+y''^2)}{(y'^2+4a^2)(y''^2+4a^2)}=\frac{8a^2+(y'^2+y''^2)}{y'^2y''^2+4a^2(y'^2+y''^2)+16a^4}$$

然ルニ弦 PQ ハ焦點ヲ通ルヲ以テ

$$y'y''+4a^2=0 \qquad [第 72 節例 3 參照]$$

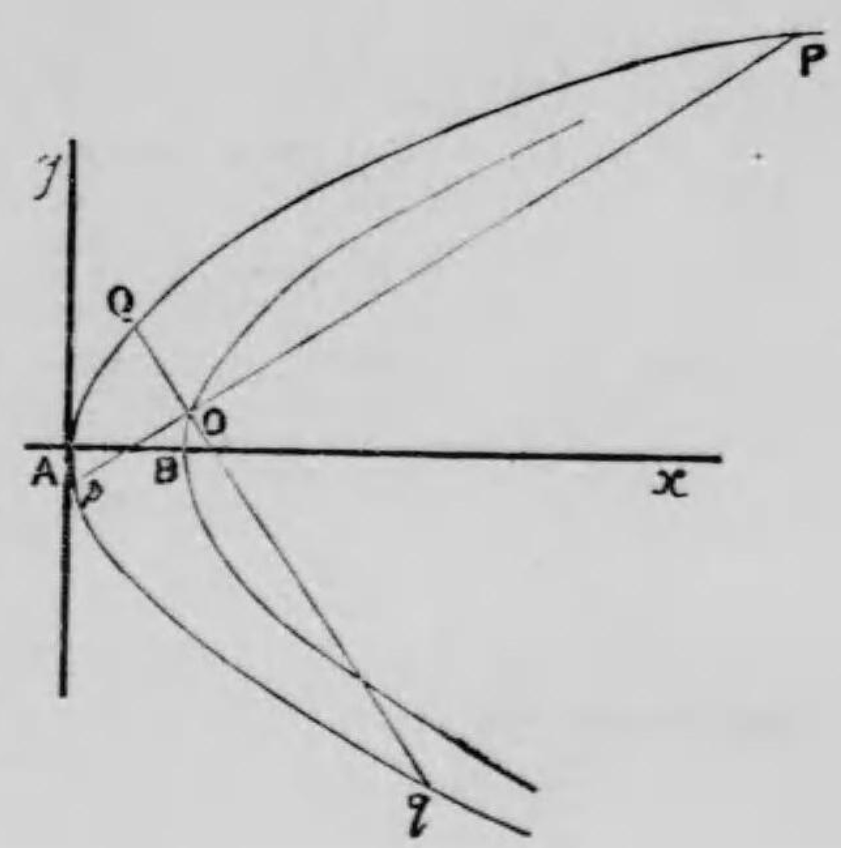
$$\therefore\quad \frac{1}{\mathrm{PG}^2}+\frac{1}{\mathrm{QH}^2}=\frac{8a^2+(y'^2+y''^2)}{(-4a^2)^2+4a^2(y'^2+y''^2)+16a^4}$$

$$=\frac{8a^2+(y'^2+y''^2)}{4a^2[8a^2+(y'^2+y''^2)]}=\frac{1}{4a^2}$$

【例 16】 軸ダケヲ共有スル相等シキ二ツノ抛物線アリ, 其中デ内側ニアル者ノ上ノ任意ノ點 O ヲ通リテ外側ニアル抛物線ノ互ニ垂直ナル二ツノ弦 POp, QOq ヲ引クトキハ $\dfrac{1}{\mathrm{PO.O}p}+\dfrac{1}{\mathrm{QO.O}q}$ ハ不易ナリ.

證明 外側ノ抛物線ノ方程式ヲ

(1) $y^2=4ax$



トシ, 内側ノ抛物線ノ方程式ヲ

(2) $y^2=4a(x-b)$

トセヨ. ココニ $\mathrm{AB}=b$ ナリトス.

今抛物線 (2) ノ上ノ任意ノ點 O ノ坐標ヲ (x', y') トシ, 抛物線 (1) ノ一ツノ弦 POp ガ x 軸トナス角ヲ α トスレバ, 之ニ垂直ナル弦 QOq ガ x 軸トナス角ハ $90°+\alpha$ ナリ. 故ニ POp ノ方程式ハ

$$(3)\qquad \frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\sin\alpha}=l$$

ニシテ, QOq ノ方程式ハ

$$(4)\qquad \frac{x-x'}{\cos(\alpha+90^\circ)}=\frac{y-y'}{\sin(\alpha+90^\circ)}$$

ナリ. ソコデ(3)ヨリ得ル

$$x=x'+l\cos\alpha,\qquad y=y'+l\sin\alpha$$

ヲ(1)ニ代入スレバ

$$(y'+l\sin\alpha)^2=4a(x'+l\cos\alpha)$$

$$\therefore\qquad l^2\sin^2\alpha+2l(y'\sin\alpha-2a\cos\alpha)+y'^2-4ax'=0$$

今此 l ニ付テノ二次方程式ノ二根ヲ l_1, l_2 トスレバ

$$l_1l_2=\frac{y'^2-4ax'}{\sin^2\alpha}$$

然ルニ (x', y') ハ拋物線(2)ノ上ノ點ナルヲ以テ

$$y'^2=4a(x'-b)\qquad\therefore\qquad y'^2-4ax'=-4ab$$

$$\therefore\qquad l_1l_2=-\frac{4ab}{\sin^2\alpha}$$

$$\therefore\qquad PO.Op=\frac{4ab}{\sin^2\alpha}$$

同樣ニシテ, (2)ト(4)トヨリシテ

$$QO.Oq=\frac{4ab}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}=\frac{4ab}{\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{PO.Op}+\frac{1}{QO.Oq}=\frac{\sin^2\alpha}{4ab}+\frac{\cos^2\alpha}{4ab}=\frac{1}{4ab}$$

【例 17】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ頂點 A ヲ通リテ引ケル互ニ垂直ナル弦ノ長サヲ夫々 r, r' トスレバ

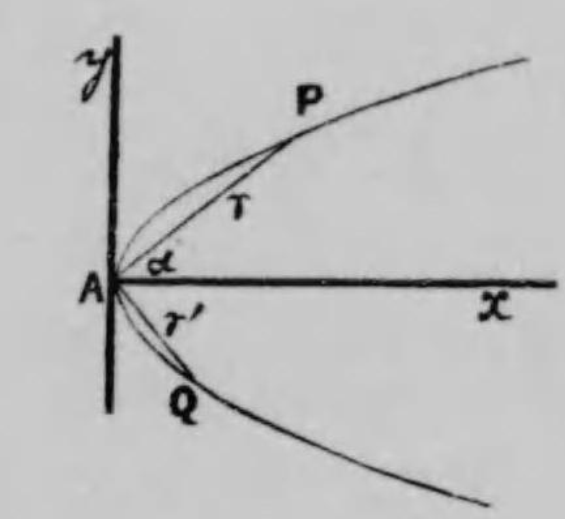
$$r^{\frac{4}{3}}r'^{\frac{4}{3}}=16a^2(r^{\frac{2}{3}}+r'^{\frac{2}{3}})$$

ナリ.

證明 AP ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\sin\alpha}=l$$

トスレバ, AQ ノ方程式ハ



$$(2)\qquad \frac{x}{\cos(\alpha+90^\circ)}=\frac{y}{\sin(\alpha+90^\circ)}=l'$$

ナリ. ソコデ(1)ニヨリテ

$$x=l\cos\alpha,\qquad y=l\sin\alpha$$

ヲ拋物線ノ方程式ニ代入スレバ

$$l^2\sin^2\alpha=4al\cos\alpha$$

然ルニ $AP\neq 0$, 故ニ上ノ方程式ノ兩邊ヲ l ニテ割リテ

$$l\sin^2\alpha=4a\cos\alpha$$

従テ
$$l=AP=r=\frac{4a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

同樣ニシテ(2)ト拋物線ノ方程式トヨリ

$$AQ=r'=\frac{4a\cos(\alpha+90^\circ)}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}=-\frac{4a\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\qquad r^{\frac{4}{3}}r'^{\frac{4}{3}}==\left(\frac{4a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{4a\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{16a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{(4a)^{\frac{8}{3}}}{(\sin\alpha\cos\alpha)^{\frac{4}{3}}}$$

$$r^{\frac{2}{3}}+r'^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{4a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{4a\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{(4a)^{\frac{2}{3}}(\cos\alpha)^{\frac{2}{3}}}{(\sin\alpha)^{\frac{4}{3}}}+\frac{(4a)^{\frac{2}{3}}(\sin\alpha)^{\frac{2}{3}}}{(\cos\alpha)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{(4a)^{\frac{2}{3}}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{(\sin\alpha\cos\alpha)^{\frac{4}{3}}}=\frac{(4a)^{\frac{2}{3}}}{(\sin\alpha\cos\alpha)^{\frac{4}{3}}}$$

$$\therefore\qquad r^{\frac{4}{3}}r'^{\frac{4}{3}}=(4a)^{\frac{6}{3}}(r^{\frac{2}{3}}+r'^{\frac{2}{3}})=16a^2(r^{\frac{2}{3}}+r'^{\frac{2}{3}})$$

【例 18】 同一ノ點 P ヨリ拋物線ニ二ツノ切線ヲ引クトキ, 其切點 M, N ヲ兩端トスル弦ニ平行ナル第三ノ切線 ST ハ二ツノ線分 PM, PN ノ各ヲ二等分ス.

證明 拋物線ノ方程式ヲ

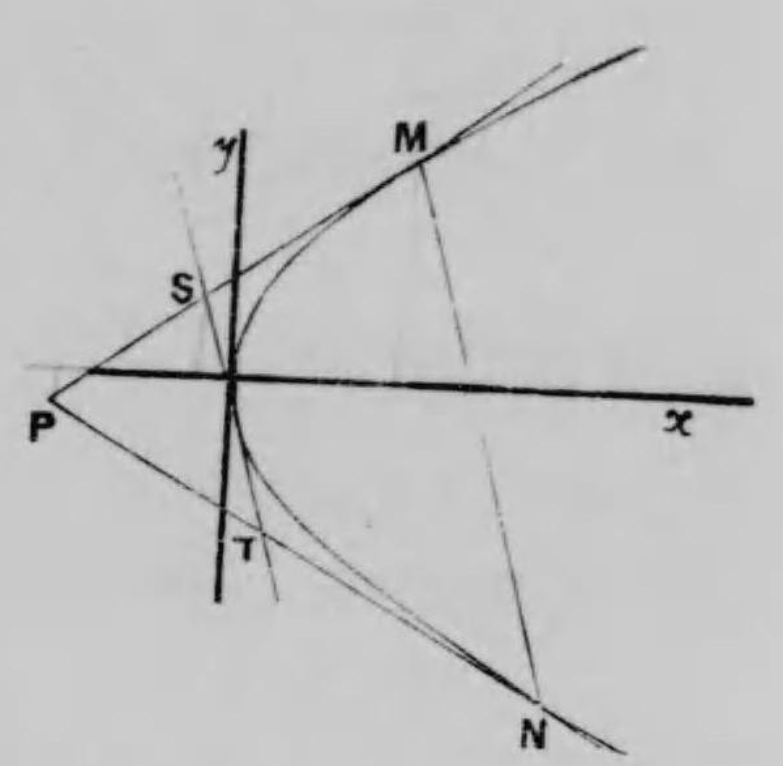
$$(1)\qquad y^2=4ax$$

トシ, 點 P ノ坐標ヲ (h, k) トセヨ.

サスレバ MN ノ方程式ハ

(2)　　$ky=2a(x+h)$

ニシテ其角係數ハ $\frac{2a}{k}$ ナリ．因テ MN ニ平行ナル切線ノ方程式ハ，切線ノ公式 $y=mx+\frac{a}{m}$ ニ於テ m ノ代リニ $\frac{2a}{k}$ ヲ置換ヘタルモノ，卽チ



$$y=\frac{2a}{k}x+\frac{a}{\frac{2a}{k}}$$

卽チ　(3)　　$2ky=4ax+k^2$

サテ ST ガ PM, PN ヲ二等分スルコトヲ證明スル爲ニハ $P(h, k)$ ヨリ MN ニ至ル距離 d ガ P ヨリ ST ニ至ル距離 d' ノ二倍ニ等シキコトヲ證明スレバヨシ．

然ルニ　$$d=\frac{k^2-2a(h+h)}{\sqrt{k^2+4a^2}}=\frac{k^2-4ah}{\sqrt{k^2+4a^2}}$$

又　$$d'=\frac{2k^2-4ah-k^2}{\sqrt{4k^2+16a^2}}=\frac{k^2-4ah}{2\sqrt{k^2+4a^2}}$$

$$\therefore\qquad d=2d'$$

【例 19】 抛物線 $y^2=4ax$ ノ弦ノ極ノ橫坐標ハ其弦ノ兩端ノ橫坐標ノ比例中項ナリ．

證明　極ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ，其弦ノ方程式ハ

$$y'y=2a(x+x')$$

ニシテ之ト抛物線ノ方程式トヨリ y ヲ消去スレバ

$$\left[\frac{2a(x+x')}{y'}\right]^2=4ax$$

$$\therefore\qquad a(x+x')^2=y'^2x$$

$$\therefore\qquad ax^2+(2ax'-y'^2)x+ax'^2=0$$

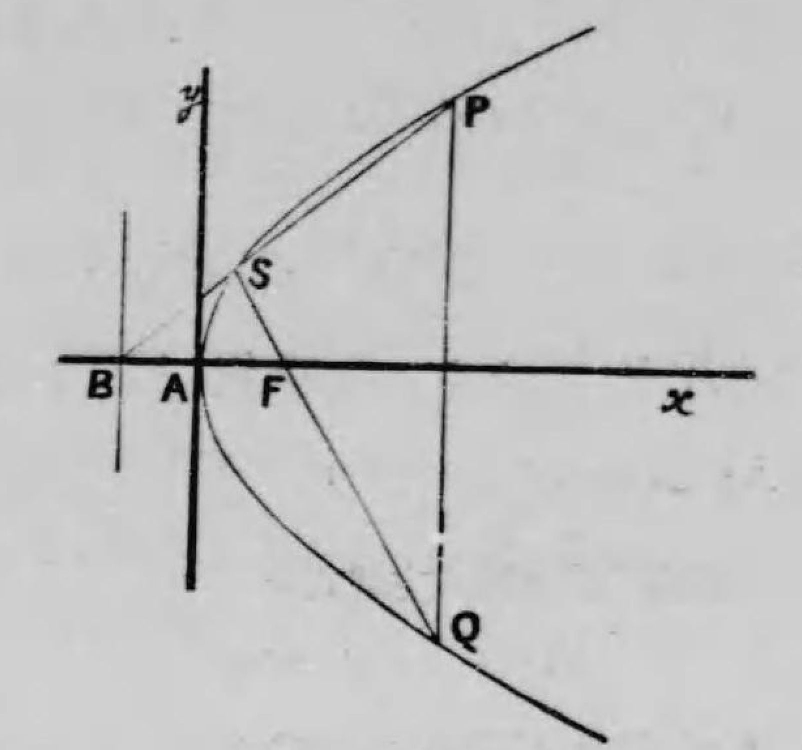
x ニ關スル此二次方程式ノ二根ハ卽チ弦ノ兩端ノ橫坐標ニシテ，之ヲ x_1, x_2 トスレバ

$$x_1x_2=\frac{ax'^2}{a}=x'^2$$

卽チ x' ハ x_1, x_2 ノ比例中項ナリ．

【例 20】 抛物線ノ軸ニ垂直ナル弦ノ兩端ヲ P, Q トシ，準線ト軸トノ交點 B ト P トヲ結ビ付クル線分ガ再ビ抛物線ニ交ハル點ヲ S トスレバ，弦 SQ ハ焦點 F ヲ通ル．

證明　本問題ヲ證明スルニハ二直線 BP, FQ ノ交點ガ抛物線上ノ點ナルコトヲ證明スレバヨシ．



抛物線ノ方程式ヲ

(1)　　$y^2=4ax$

トシ，點 P ノ坐標ヲ (x_1, y_1) トスレバ點 Q ノ坐標ハ $(x_1, -y_1)$ ナリ．

又 B ノ坐標ハ $(-a, 0)$ ニシテ F ノ坐標ハ $(a, 0)$ ナルヲ以テ，直線 BP ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x+a}=\frac{y_1}{x_1+a}$$

卽チ　(2)　　$y(x_1+a)=y_1(x+a)$

同樣ニ直線 FQ ノ方程式ハ

(3)　　$y(x_1-a)=-y_1(x-a)$

ソコデ(2)ト(3)トヲ邊々相加フレバ

$$2x_1y=2ay_1$$

$$\therefore\qquad y=\frac{ay_1}{x_1}$$

之ヲ(2)ニ代入スレバ

$$\frac{ay_1(x_1+a)}{x_1}=y_1(x+a)$$

$$\therefore\qquad x+a=\frac{a(x_1+a)}{x_1}$$

$$\therefore \qquad x=\frac{a(x_1+a)}{x_1}-a=\frac{a^2}{x_1}$$

今得タル x, y ノ値ハ二直線 BP, FQ ノ交點ノ坐標ナリ.

サテ x, y ノ此値ニ對シテハ

$$y^2-4ax=\frac{a^2y_1{}^2}{x_1{}^2}-\frac{4a^3}{x_1}=\frac{a^2(y_1{}^2-4ax_1)}{x_1{}^2}$$

然ルニ $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ ハ拋物線上ノ點ナルヲ以テ

$$y_1{}^2-4ax_1=0$$

$$\therefore \qquad y^2-4ax=0$$

因テ二直線 BP, FQ ノ交點ハ拋物線上ニアリ.

【例 21】 拋物線ノ頂點 A ヨリ任意ノ切線ヘ下シタル垂線ノ足ヲ P トシ, 此垂線 AP ト拋物線トノ交點ヲ Q トスレバ $\mathrm{AP.AQ}=4a^2$ ナリ.

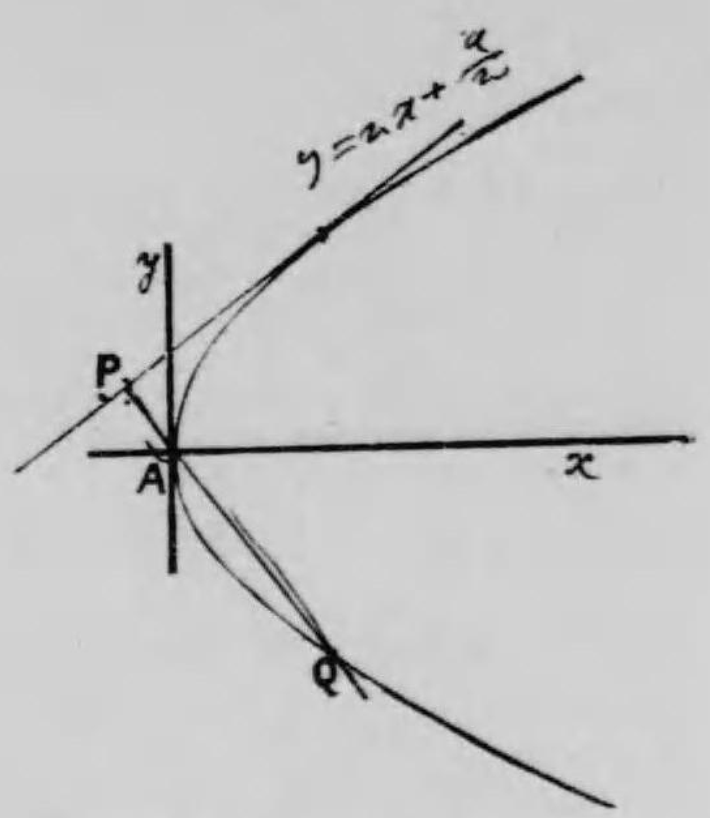
證明 拋物線ノ方程式ヲ

$$(1) \qquad y^2=4ax$$

トシ, 任意ノ切線ノ方程式ヲ

$$(2) \qquad y=mx+\frac{a}{m}$$

トスレバ



$$\mathrm{AP}=\frac{\frac{a}{m}}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{a}{m\sqrt{1+m^2}}$$

又直線 AP ノ方程式ハ

$$(3) \qquad y=-\frac{1}{m}x$$

故ニ點 Q ノ坐標ハ (3) ト (1) トノ交點ノ中, (0, 0) ナラザル點ナリ.

サテ (3) ニヨリテ y ヲ (1) ニ代入スレバ

$$\frac{x^2}{m^2}=4ax$$

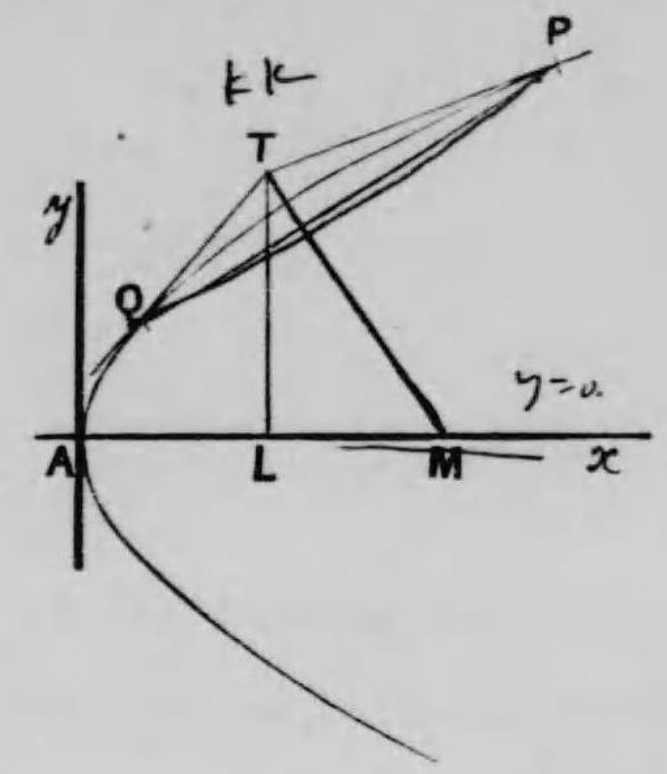
$$\therefore \qquad x=4am^2$$

從テ
$$y=-\frac{4am^2}{m}=-4am$$

$$\therefore \qquad \mathrm{AQ}=\sqrt{x^2+y^2}=4am\sqrt{1+m^2}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{AP.AQ}=\frac{a}{m\sqrt{1+m^2}}\times 4am\sqrt{1+m^2}=4a^2$$

【例 22】 拋物線 $y^2=4ax$ ニ關スル任意ノ點 T ノ極線ヘ其極 T ヨリ垂直ニ引キタル直線ガ軸ニ交ハル點ヲ M トシ, T ヨリ軸ニ下シタル垂線ノ足ヲ L トスレバ, 線分 LM ノ長サハ不易ニシテ $2a$ ニ等シ.



證明 點 T ノ坐標ヲ (h, k) トスレバ其極線 PQ ノ方程式ハ

$$ky=2a(x+h)$$

故ニ直線 TM ノ方程式ハ

$$(1) \qquad y-k=-\frac{k}{2a}(x-h)$$

(1) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$x=\mathrm{AM}=2a+h$$

$$\therefore \qquad \mathrm{LM}=\mathrm{AM}-\mathrm{AL}=2a+h-h=2a$$

【例 23】 拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ任意ノ點 P ニ於ケル切線及法線ガ拋物線ノ軸ニ交ハル點ヲ夫々 T, G トスレバ, 線分 TG ハ P ニ於ケル切線ニ平行ナル, 焦點 F ヲ通ル弦 MN ノ半分ニ等シ.

證明 點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ

$$(1) \qquad \mathrm{TG}=\mathrm{TK}+\mathrm{KG}=2x'+2a \qquad [第 83 節參照]$$

又 M, N ノ坐標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) トスレバ

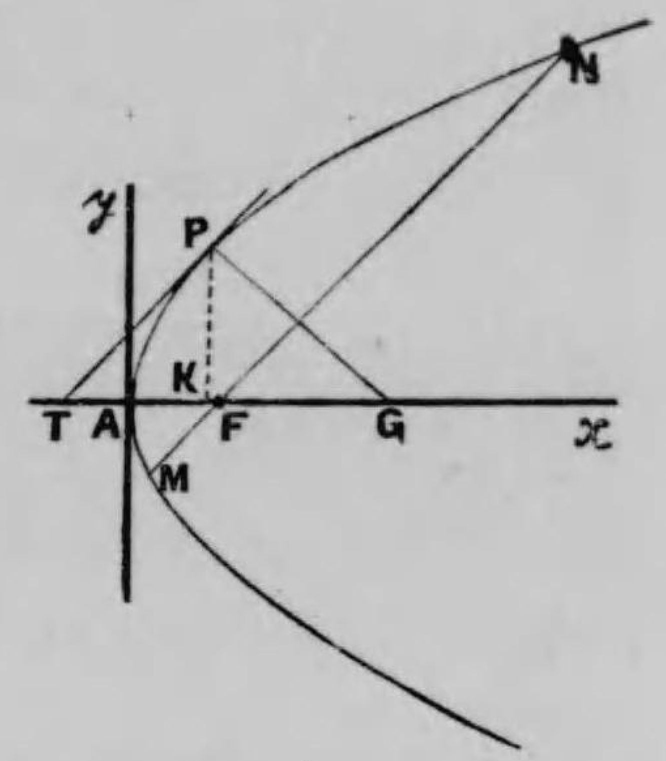
$$(2) \qquad \mathrm{MN}=\mathrm{FM}+\mathrm{FN}=(x_1+a)+(x_2+a)=(x_1+x_2)+2a \ [第 83 節參照]$$

サテ切線 PT ノ方程式ハ

$$y'y=2a(x+x')$$

故ニ F$(a, 0)$ ヲ通リ PT ニ平行ナル弦 MN ノ方程式ハ

(3) $$y'y=2a(x-a)$$



(3) ト拋物線ノ方程式トヨリ y ヲ消去スレバ

$$\left[\frac{2a(x-a)}{y'}\right]^2=4ax$$

$$\therefore \quad a(x-a)^2=xy'^2$$

$$\therefore \quad ax^2-(2a^2+y'^2)x+a^3=0$$

此二次方程式ノ二根ガ M ト N トノ x 坐標ナリ.

$$\therefore \quad x_1+x_2=\frac{2a^2+y'^2}{a}=\frac{2a^2+4ax'}{a} \qquad [\because \ y'^2=4ax']$$

$$=2a+4x'$$

$$\therefore \quad \mathrm{MN}=4a+4x' \qquad [(2)\text{ニヨル}]$$

$$\therefore \quad \mathrm{TG}=\frac{1}{2}.\mathrm{MN} \qquad [(1)\text{ニヨル}]$$

【例 24】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ焦點 F ヲ通ル任意ノ弦ノ兩端ノ x 坐標ヲ x_1, x_2 トスレバ $x_1x_2=a^2$ ナリ.

證明 兩端ノ坐標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) トスレバ

$$y_1{}^2=4ax_1, \qquad y_2{}^2=4ax_2$$

$$\therefore \quad (1) \qquad y_1{}^2y_2{}^2=16a^2x_1x_2$$

然ルニ此弦ハ焦點ヲ通ルヲ以テ

$$(2) \qquad y_1y_2+4a^2=0 \qquad [\text{第 72 節例 3 參照}]$$

$$\therefore \quad 16a^4=16a^2x_1x_2 \qquad [(1).(2)\text{ニヨル}]$$

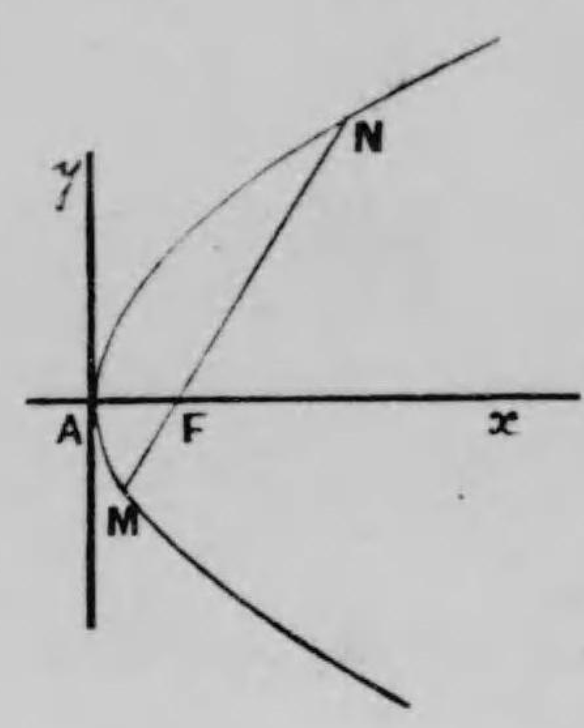
$$\therefore \quad x_1x_2=a^2$$

【例 25】 拋物線 $y^2=4ax$ ノ焦點 F ヲ通ル弦 MN ノ長ザガ L ナルトキ, 其弦ガ焦點ニテ分タルル二ツノ分ノ積ハ aL ニ等シ.

證明 MN ガ x 軸トナス角ヲ α トセヨ.

サスレバ MN ノ方程式ハ

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y}{\sin\alpha}=l$$



從テ $\quad x=a+l\cos\alpha, \qquad y=l\sin\alpha$

之ヲ拋物線ノ方程式ニ代入スレバ

$$l^2\sin^2\alpha=4a(a+l\cos\alpha)$$

$$\therefore \quad l^2\sin^2\alpha-4al\cos\alpha-4a^2=0$$

此二根ヲ l_1, l_2 トスレバ

$$l_1+l_2=\frac{4a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$l_1l_2=-\frac{4a^2}{\sin^2\alpha}$$

$$\therefore \quad \mathrm{MN}^2=(l_1\sim l_2)^2=(l_1+l_2)^2-4l_1l_2$$

$$=\frac{16a^2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}+\frac{16a^2}{\sin^2\alpha}=\frac{16a^2}{\sin^4\alpha}=\mathrm{L}^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{L}=\frac{4a}{\sin^2\alpha}$$

$$\therefore \quad l_1l_2=-\frac{4a^2}{\sin^2\alpha}=-a\mathrm{L}$$

故ニ其絶對値ヲ取レバ

$$\mathrm{FM.FN}=a\mathrm{L}$$

91. 軌跡問題

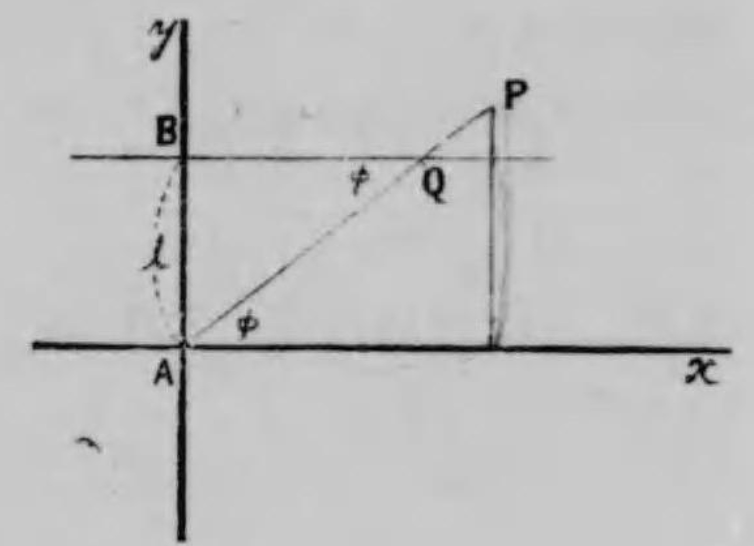
【例 1】 A ハ原點, B ハ y 軸上ノ定點ナリ. B ヲ通リ x 軸ニ平行ナル直線ヲ引キ, 其上ニ於テ任意ノ點 Q ヲ取リ, 半直線 AQ 上ニ於テ BQ ニ等シキ縦坐標ヲ有スル點 P ヲ取レバ, P ノ軌跡如何.

解 AB$=l$, $\angle$PA$x=\varphi$ トスレバ

$$\mathrm{BQ}=l\cot\varphi$$

今點 P ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ

(1). $\dfrac{y}{x}=\tan\varphi$



又假設ニヨリ

(2) $y=\mathrm{BQ}=l\cot\varphi$

故ニ(1)ト(2)トヲ相乘ジテ φ ヲ消去スレバ

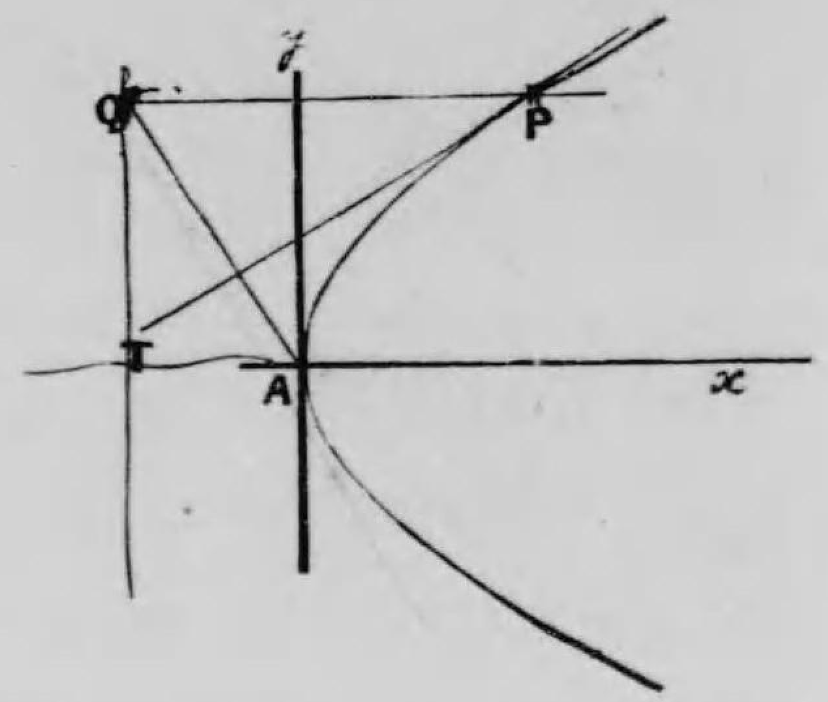
(3) $\dfrac{y^2}{x}=l$ 從テ $y^2=lx$

ヲ得. 故ニ所要ノ軌跡ハ抛物線ナリ.

【例2】 A ハ抛物線ノ頂點ニシテ P ハ抛物線上ノ任意ノ點ナリ. A ヲ通リ P ニ於ケル切線ニ垂直ナル直線ト, P ヲ通リ軸ニ平行ナル直線トノ交點ヲ Q トスレバ, Q ノ軌跡ハ直線ナリ.

證明 抛物線ノ方程式ヲ

(1) $y^2=4ax$



トシ, P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ.

サスレバ PT ノ方程式ハ

(2) $y'y=2a(x+x')$

從テ AQ ノ方程式ハ

(3) $y=-\dfrac{y'}{2a}x$

然ルニ PQ ノ方程式ハ

(4) $y=y'$

ソコデ(4)ニヨリ(3)ノ y' ニ y ヲ代入シテ變常數 y' ヲ消去スレバ Q ノ軌跡ノ方程式

$$y=-\frac{y}{2a}x$$

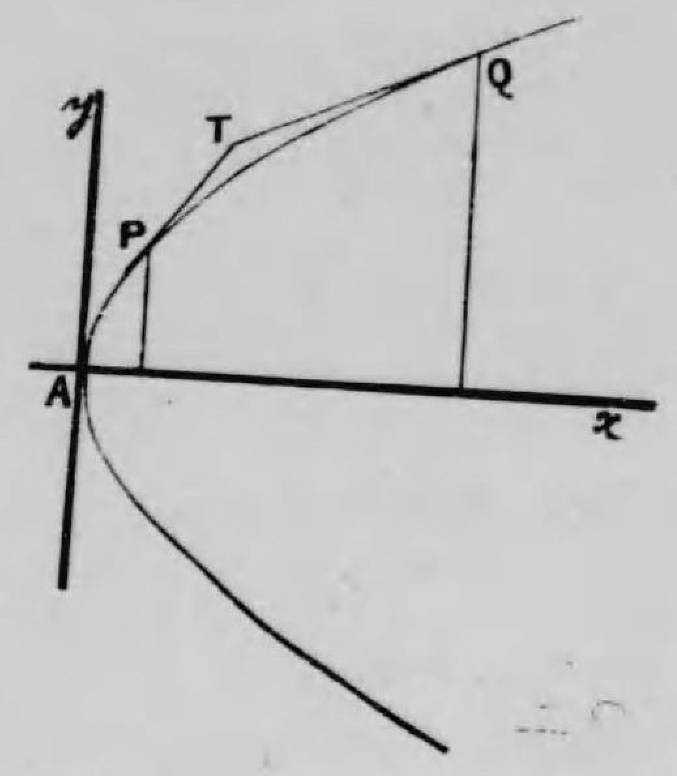
$$\therefore \quad y=0 \quad 或ハ \quad x=-2a$$

ヲ得. 此中 $y=0$ ハ奇解ナリ. 之ヲ省ケバ Q ノ軌跡ハ y 軸ニ平行ナル直線ナリ.

【例3】 抛物線 $y^2=4ax$ 上ニ於テ横坐標ノ比ガ $1:\mu$ ナル二點 P, Q ニ於ケル切線ノ交點 T ノ軌跡ノ方程式ハ, 此等ノ二點ガ抛物線ノ軸ノ同ジ側ニアレバ $y^2=(\mu^{\frac{1}{4}}+\mu^{-\frac{1}{4}})^2ax$ ニシテ, 軸ノ兩側ニ一ツ宛アレバ $y^2=-(\mu^{\frac{1}{4}}-\mu^{-\frac{1}{4}})^2ax$ ナリ.

證明 P, Q ガ軸 Ax ノ同ジ側(例ヘバ上方)ニアル場合

P, Q ノ横坐標ヲ夫々 x', $\mu x'$ トセヨ.



サスレバ

$$\mathrm{P}(x', 2\sqrt{ax'}),\ \mathrm{Q}(\mu x', 2\sqrt{a\mu x'})$$

ナリ. 故ニ PT, QT ノ方程式ハ夫々

(1) $2\sqrt{ax'}.y=2a(x+x')$

(2) $2\sqrt{a\mu x'}.y=2a(x+\mu x')$

ソコデ(1)及(2)ヨリ x' ヲ消去スレバ T ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ. サテ(1)ヲ(2)ニテ邊々相除スレバ

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}=\frac{x+x'}{x+\mu x'} \qquad \therefore \quad x+\mu x'=\sqrt{\mu}x+\sqrt{\mu}x'$$

$$\therefore \qquad (\sqrt{\mu}-1)x=\sqrt{\mu}(\sqrt{\mu}-1)x'$$

$$\therefore \qquad x=\sqrt{\mu}x' \qquad \therefore \quad x'=\frac{x}{\sqrt{\mu}}$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{\mu}}y=a\left(x+\frac{x}{\sqrt{\mu}}\right)=\frac{ax(\sqrt{\mu}+1)}{\sqrt{\mu}}$$

$$\therefore \qquad y=\frac{\sqrt{ax}(\sqrt{\mu}+1)}{\sqrt[4]{\mu}}=\sqrt{ax}(\mu^{\frac{1}{4}}+\mu^{-\frac{1}{4}})$$

$$\therefore \qquad y^2=ax(\mu^{\frac{1}{4}}+\mu^{-\frac{1}{4}})^2$$

【注意】 P, Q ガ何レモ抛物線ノ軸ノ下方ニアルトキモ亦同一ノ結果ヲ得ルコト明カナリ.

P, Q ガ軸ノ兩方ニ一ツ宛(例ヘバ P ガ上方ニ, Q ガ下方ニ)アル場合

P, Q ノ坐標ヲ夫々

$P(x', 2\sqrt{ax'})$, $Q(\mu x', -2\sqrt{a\mu x'})$

トセヨ. サスレバ

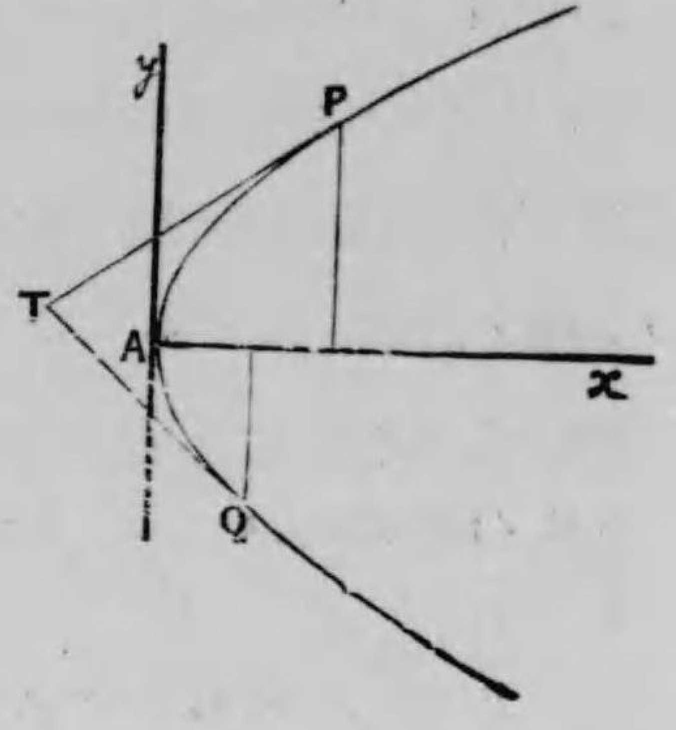
PT...... $\sqrt{ax'}.y=a(x+x')$.........(3)

QT......$-\sqrt{a\mu x'}.y=a(x+\mu x')$ ......(4)

ソコデ前ノ場合ト同様ニ運算スレバ

$$y^2=-(\mu^{\frac{1}{4}}-\mu^{-\frac{1}{4}})^2ax$$

ヲ得.

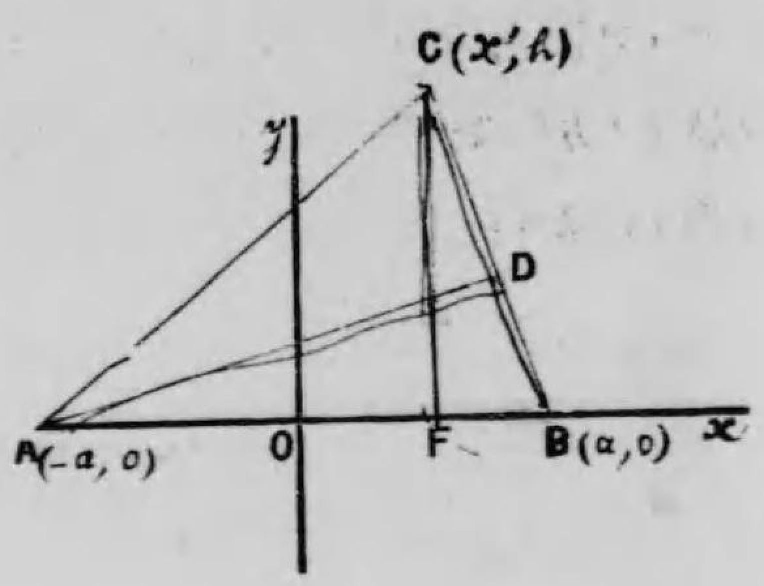


【例 4】 底邊ト高サトガ與ヘラレタル三角形ノ垂心ノ軌跡ハ, 此等ノ三角形ノ高サニ等シキ通徑ヲ有スル抛物線ナリ.

證明 底邊ヲ AB, 頂點ヲ C トシ, AB ノ中點 O ヲ原點トシ, AB ヲ x 軸トセヨ.

頂點 C ノ坐標ヲ (x', h) トスレバ, h ハ不易ニシテ x' ハ C ノ位置ニヨリテ變バル.

今 AB$=2a$ トスレバ A$(-a, 0)$, B$(a, 0)$ナリ.



直線 BC ノ方程式ハ

$$(1) \qquad \frac{y}{x-a}=\frac{h}{x'-a}$$

故ニ A ヨリ BC ニ引ケル垂線ヲ AD トスレバ, 其方程式ハ

$$(2) \qquad y=-\frac{x'-a}{h}(x+a)$$

ヨリ AB ニ引ケル垂線ヲ CF トスレバ, 其方程式ハ

$$(3) \qquad x=x'$$

(2) ト (3) トヨリ x' ヲ消去スレバ AD, CF ノ交點卽チ △ABC ノ垂心ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ. 卽チ (3) ニヨリテ (2) ノ x' ノ代リニ x トオケバ

$$y=-\frac{x-a}{h}(x+a)=-\frac{x^2-a^2}{h}$$

$$\therefore \qquad x^2=-hy+a^2$$

$$\therefore \qquad x^2=-h\left(y-\frac{a^2}{h}\right)$$

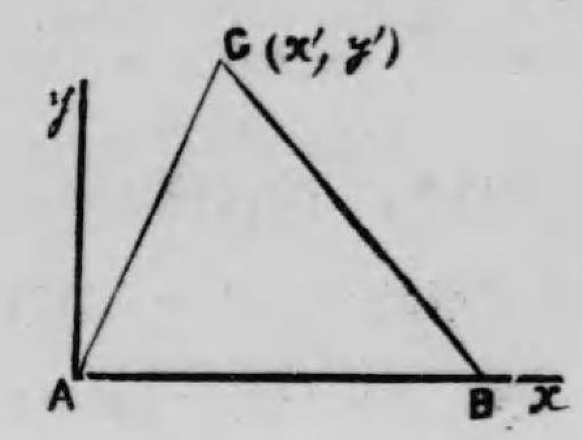
是ハ抛物線ノ方程式ニシテ, 頂點ノ坐標ハ$\left(0, \dfrac{a^2}{h}\right)$, 其軸ハ y 軸ニ合シ, 通徑ノ長サハ h ニ等シ.

【例 5】 △ABC ノ底邊 AB ガ定マリ, 且ツ $\tan A \tan\frac{B}{2}=2$ ナルトキ, 頂點 C ノ軌跡ハ A ヲ頂點トシ B ヲ焦點トスル抛物線ナリ.

證明 A ヲ原點ニ, 直線 AB ヲ x 軸ニ取リ

$$AB=l$$

トシ, 頂點 C ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ直線 AC ノ方程式ハ



$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}$$

$$\therefore \qquad (1) \qquad \tan A=\frac{y'}{x'}$$

又直線 BC ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x-l}=\frac{y'}{x'-l}$$

$$\therefore \qquad (2) \qquad \tan B=-\frac{y'}{x'-l}$$

然ルニ

$$\tan B=\frac{2\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}$$

$$\therefore \qquad \tan B\tan^2\frac{B}{2}+2\tan\frac{B}{2}-\tan B=0$$

$$\therefore \quad \tan\frac{B}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 B}}{\tan B}$$

ソコデ(2)ニヨリテ $\tan B$ ヲ代入スレバ

$$(3) \qquad \tan\frac{B}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\left(\frac{y'}{x'-l}\right)^2}}{-\frac{y'}{x'-l}}=\frac{x'-l\mp\sqrt{(x'-l)^2+y'^2}}{y'}$$

然ルニ假設ニヨレバ

$$\tan A\tan\frac{B}{2}=2$$

$$\therefore \quad \frac{y'}{x'}\times\frac{(x'-l)\mp\sqrt{(x'-l)^2+y^{2\prime}}}{y'}=2$$

$$\therefore \quad x'-l\mp\sqrt{(x'-l)^2+y'^2}=2x'$$

$$\therefore \quad \mp\sqrt{(x'-l)^2+y'^2}=x'+l$$

$$\therefore \quad (x'-l)^2+y'^2=(x'+l)^2$$

$$\therefore \quad y'^2=4lx'$$

因テ C ノ軌跡ハ A ヲ頂點トシ, B ヲ焦點トスル抛物線ナリ.

【例 6】 抛物線 $y^2=4ax$ ノ二ツノ切線ガ軸トナス角 θ_1, θ_2 ノ和ガ不易ナルトキ, 其交點ノ軌跡ハ焦點ヲ通ル直線ナリ.

證明 二ツノ切線ノ交線(即チ所要ノ軌跡上ノ任意ノ點)ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ, (x', y') ヨリ引ケル二ツノ切線ノ角係數 $m_1[=\tan\theta_1]$ 及 $m_2[=\tan\theta_2]$ ハ

$$y'=mx'+\frac{a}{m}$$

ナル m ヲ未知數トスル方程式ノ根ナラザルベカラズ, 今此方程式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$m^2x'-my'+a=0$$

$$\therefore \quad m_1+m_2=\frac{y'}{x'}, \quad m_1m_2=\frac{a}{x'}$$

然ルニ假設ニヨリ

$$\theta_1+\theta_2=\alpha \qquad [不易]$$

$$\therefore \quad \tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\tan\alpha \qquad [不易]$$

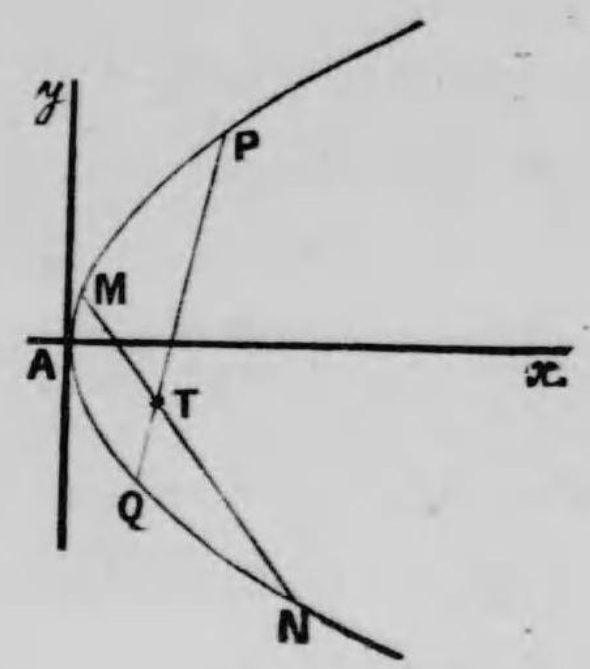
$$\therefore \quad \frac{\frac{y'}{x'}}{1-\frac{a}{x'}}=\tan\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{y'}{x'-a}=\tan\alpha \qquad 從テ \qquad y'=(x'-a)\tan\alpha$$

而シテ是ハ x', y' ニ關シ一次方程式ナルヲ以テ所要ノ軌跡ハ直線ナルコトヲ知ル. 又 $x'=a, y'=0$ ハ此方程式ニ適合スルヲ以テ此直線ハ焦點ヲ通ル.

【例 7】 抛物線ニ於テ定マル方向ニ引ケル相等シキ長サノ弦 MN, PQ ノ交點ノ軌跡ハ一ツノ直線ナリ.

證明 MN 及 PQ ガ x 軸トナス一定ノ角ヲ夫々 α, α' トシ, 此二弦ノ交點 T ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ直線 MN ノ方程式ハ



$$(1) \qquad \frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\sin\alpha}=l$$

又直線 PQ ノ方程式ハ

$$(2) \qquad \frac{x-x'}{\cos\alpha'}=\frac{y-y'}{\sin\alpha'}=l'$$

$$(3) \qquad y^2=4ax$$

トスレバ, (1) ト (3) トヨリ

$$(y'+l\sin\alpha)^2=4a(x'+l\cos\alpha)$$

$$\therefore \quad l^2\sin^2\alpha-2l(2a\cos\alpha-y'\sin\alpha)+y'^2-4ax'=0$$

l ヲ未知數トスル此二次方程式ノ二根 l_1, l_2 ハ TM, TN ヲ表ハス數ナリ.

サテ

$$MN^2=(l_1\sim l_2)^2=(l_1+l_2)^2-4l_1l_2$$

$$=\frac{4(2a\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2}{\sin^4\alpha}-\frac{4(y'^2-4ax')}{\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{4[4a^2\cos^2\alpha-4ay'\sin\alpha\cos\alpha+y'^2\sin^2\alpha-y'^2\sin^2\alpha+4ax'\sin^2\alpha]}{\sin^4\alpha}$$

$$=\frac{16a[a\cos^2\alpha+(x'\sin\alpha-y'\cos\alpha)\sin\alpha]}{\sin^4\alpha}$$

同様ニ(2)ト(3)トヨリ

$$PQ=\frac{16a[a\cos^2\alpha'+(x'\sin\alpha'-y'\cos\alpha')\sin\alpha']}{\sin^4\alpha'}$$

然ルニ $$PQ=MN$$

$$\therefore\quad \frac{a\cos^2\alpha+(x'\sin\alpha-y'\cos\alpha)\sin\alpha}{\sin^4\alpha}=\frac{a\cos^2\alpha'+(x'\sin\alpha'-y'\cos\alpha')\sin\alpha'}{\sin^4\alpha'}$$

是ハ x', y' ニ付テ一次方程式ナリ.

故ニ所要ノ軌跡ハ直線ナリ.

【例8】 抛物線 $y^2=4ax$ ニ關シ, 今一ツノ抛物線 $y^2=4a'x$ ノ切線ノ極ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 第二ノ抛物線

$$(1)\qquad y^2=4a'x$$

ノ任意ノ切線ノ方程式ヲ

$$(2)\qquad y=mx+\frac{a'}{m}$$

トシ, 其直線ノ第一ノ抛物線

$$(3)\qquad y^2=4ax$$

ニ關スル極ヲ (x', y') トスレバ, 其方程式ハ

$$(4)\qquad y'y=2a(x+x')$$

ニテ表ハサルベク, 從テ(2)ト(4)トハ同一直線ヲ表ハスヲ以テ

$$\frac{y'}{1}=\frac{2a}{m}=\frac{2ax'}{\frac{a'}{m}}$$

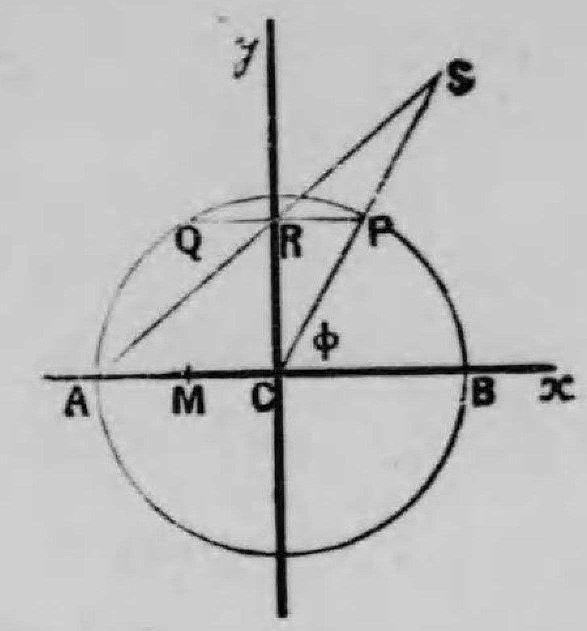
$$\therefore\quad y'=\frac{2a}{m}\quad 及\quad y'=\frac{2amx'}{a'}$$

此二式ヲ相乘ジテ分母ヲ拂ヘバ

$$a'y'^2=4a^2x'$$

故ニ所要ノ軌跡ハ抛物線ナリ.

【例9】 圓 C ノ周上ノ任意ノ點 P ト中心 C トヲ通ル直線ヲ引キ, 又直徑 ACB ニ平行ナル弦 PQ ヲ引キ其中點ヲ R トセヨ. サスレバ二直線 CP, AR ノ交點 S ノ軌跡ハ抛物線ナリ.



證明 圓ノ中心 C ヲ原點ニ, 定直徑 ACB ヲ x 軸ニ取レバ R ハ y 軸上ニアルコト明カナリ. 今圓 C ノ半徑ヲ r トスレバ, $A(-r, 0)$ ニシテ P ノ坐標ハ

$x=r\cos\varphi,\quad =r\sin\varphi$ [ココニ $\varphi=\angle PCB$]

ナリ. 從テ $R(0, \varphi)$ ナリ.

故ニ 直線 CP $$\frac{y}{x}=\tan\varphi\qquad(1)$$

直線 AR $$-\frac{x}{r}+\frac{y}{r\sin\varphi}=1\qquad(2)$$

ソコテ(1),(2)ヨリ φ ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ.

(2)ヨリ $$(x+r)\sin\varphi=y$$

$$\therefore\qquad(3)\qquad \sin\varphi=\frac{y}{x+r}$$

(1)ト(3)トヨリ

$$(4)\qquad \cos\varphi=\sin\varphi\cot\varphi=\frac{y}{x+r}\times\frac{x}{y}=\frac{x}{x+r}$$

然ルニ $$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$$

之ニ(3)及(4)ヲ代入スレバ

$$\left(\frac{y}{x+r}\right)^2+\left(\frac{x}{x+r}\right)^2=1$$

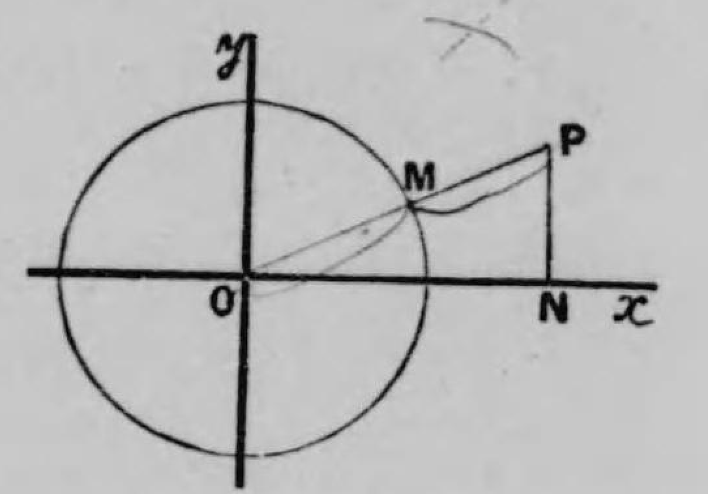
$$\therefore\quad y^2+x^2=(x+r)^2=x^2+2rx+r^2$$

$$\therefore\quad y^2=2r\left(x+\frac{r}{2}\right)$$

故ニ所要ノ軌跡ハ AC ノ中點 M ヲ頂點トシ, C ヲ焦點トスル抛物線ナリ.

【例10】 定圓周ニ至ル最短距離ガ其定直徑ヨリノ距離ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 定圓 O ノ定直徑及之ニ垂直ナル直徑ヲ夫々 x, y 軸ニ取リ，其圓ノ半徑ヲ r トセヨ．



任意ノ點 P ヨリ圓 O ノ周ニ至ル最短距離 PM ハ，OP$\sim r$ ニ等シ．ソコデ軌跡上ノ一點 P ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ

$$\mathrm{PM}=\mathrm{NP}=y \qquad \therefore \quad \mathrm{PM}^2=y^2$$

又 $$\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{PM}^2=(\mathrm{OP}\sim r)^2=(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2=y^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2}-r=\pm y$$

$$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2}=r\pm y$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=r^2+y^2\pm 2ry$$

$$\therefore \quad x^2=2r\left(y+\frac{r}{2}\right) \quad \text{或ハ} \quad x^2=-2r\left(y-\frac{r}{2}\right)$$

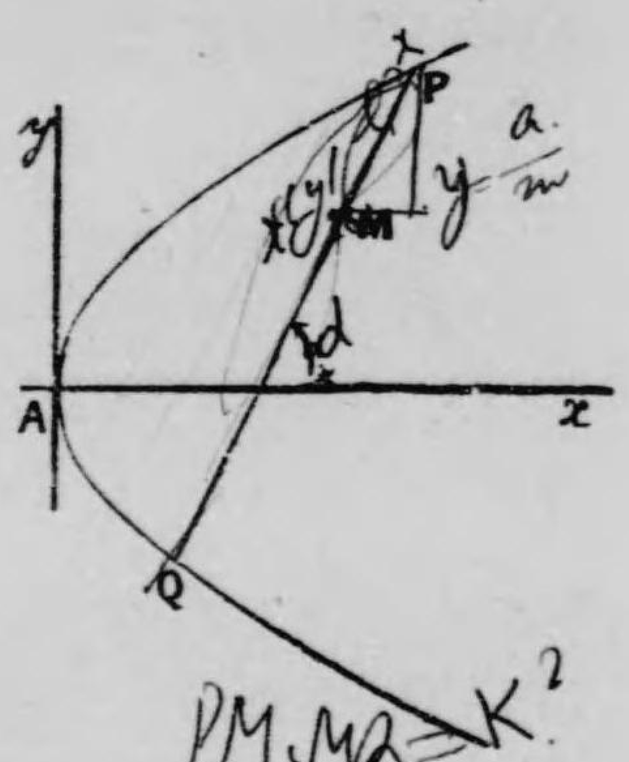
故ニ所要ノ軌跡ハ原點 O ヲ焦點トシ，定直徑 Ox ニ平行ナル圓ノ切線中ノ一ツヲ(y 軸ト圓 O ノ周トノ交點ニ於ケル切線ヲ)準線トスル二ツノ拋物線ナリ．

【例 11】 拋物線ノ平行弦ノ各ヲ二ツノ分ニ分チ其積ヲ不易ナラシムルトキ，其分點ノ軌跡ヲ求メヨ．

解 拋物線ノ方程式ヲ

(1) $$y^2=4ax$$

トシ，平行弦ガ x 軸トナス角ヲ α トセヨ．



今其中ノ任意ノ一ツ PQ ヲ M ニテ二部分ニ分チ PM.MQ$=k^2$ ナラシメ，M ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ．

サスレバ PQ ノ方程式ハ

(2) $$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\sin\alpha}=l$$

從テ $x=x'+l\cos\alpha, \quad y=y'+l\sin\alpha$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

PM.MQ=K²

$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\sin\alpha}=l$

$x=x'+l\cos\alpha$

$y=y'+l\sin\alpha$

$$(y'+l\sin\alpha)^2=4a(x'+l\cos\alpha)$$

$$\therefore \qquad l^2\sin^2\alpha+2l(y'\sin\alpha-2a\cos\alpha)+y'^2-4ax'=0$$

ソコデ此二根ヲ l_1, l_2 トスレバ

$$l_1l_2=\frac{y'^2-4ax'}{\sin^2\alpha}$$

而シテ M ハ拋物線內ニアルヲ以テ

$$y'^2-4ax'<0$$

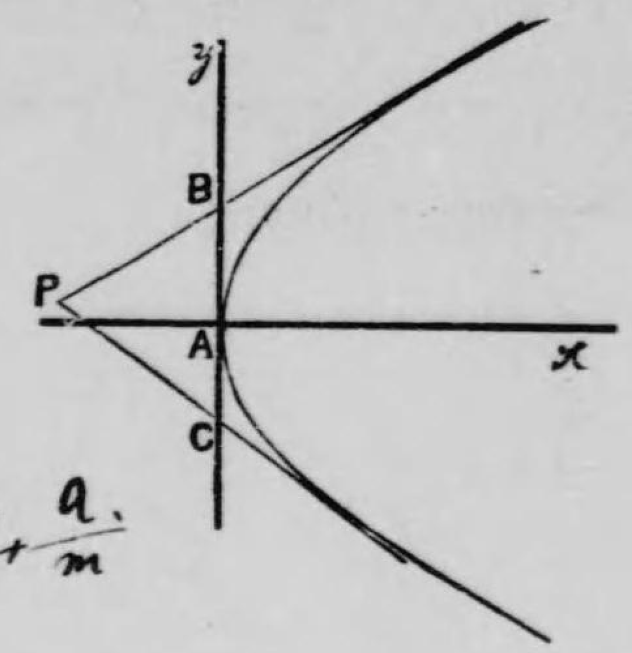
故ニ l_1, l_2 ノ絕對値ノ積ハ $\dfrac{4ax'-y'^2}{\sin^2\alpha}$ ニシテ，假設ニヨレバ是ガ k^2 ニ等シカルベキヲ以テ，M ノ軌跡ノ方程式ハ

$$\frac{4ax'-y'^2}{\sin^2\alpha}=k^2 \qquad 從テ \qquad y'^2=4a\left(x'-\frac{k^2\sin^2\alpha}{4a}\right)$$

トナル. 卽チ所要ノ軌跡ハ拋物線ナリ.

【例 12】 點 P ヨリ拋物線ニ引ケル二ツノ切線ガ頂點 A ニ於ケル切線ヨリ截リ取ル線分ノ長サガ不易ニシテ l ニ等シトイフ，點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 拋物線ノ方程式ヲ



(1) $\qquad y^2=4ax$

トシ，點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ.

今切線ノ方程式

(2) $\qquad y=mx+\dfrac{a}{m}$

ニ於テ $x=x'$, $y=y'$ トオキタル者

$$\cancel{y'=m'+\frac{a}{m}} \quad y'=mx'+\frac{a}{m}$$

從テ (3) $\qquad m^2x'-my'+a=0$

ヲ m ニ付テ解ケバ P ヨリ引キタル二ツノ切線ニ對應スル角係數ヲ得. ソコデ其二根ヲ m_1, m_2 トスレバ，二ツノ切線ノ方程式ハ

(4) $\qquad y-y'=m_1(x-x')$

(5) $\qquad y-y'=m_2(x-x')$

今切線(4), (5)ノ各ト頂點 A ニ於ケル切線, 卽チ

$$x=0$$

トノ交點ヲ夫々 B, C トセヨ. サスレバ(4)ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$y=\mathrm{AB}=y'-m_1x'$$

又(5)ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$y=\mathrm{AB}=y'-m_2x'$$

$$\therefore \qquad \mathrm{BC}=\mathrm{AB}\sim\mathrm{CA}=(m_2\sim m_1)x'=1$$

從テ　(6)　$(m_2-m_1)^2x'^2=l^2$

然ルニ　$m_1+m_2=\dfrac{y'}{x'},\qquad m_1m_2==\dfrac{a}{x'}$　[(3)ニヨル]

$$(m_2-m_1)^2=(m_1+m_2)^2-4m_1m_2=\frac{y'^2-4ax'}{x'^2}$$

之ヲ(6)ニ代入スレバ

$$y'^2-4ax'=l^2$$

$$\therefore \qquad y'^2=4a\left(x'+\frac{l^2}{4a}\right)$$

故ニ P ノ軌跡ハ與ヘラレタル拋物線(1)ニ等シキ拋物線ナリ.

【例 13】 拋物線ノ任意ノ切線ガ他ノ二定切線ノ間ニ夾マルル部分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 拋物線ノ方程式ヲ

(1)　$y^2=4ax$

トセヨ. 又二定切線 AB, AC ノ方程式ヲ夫々

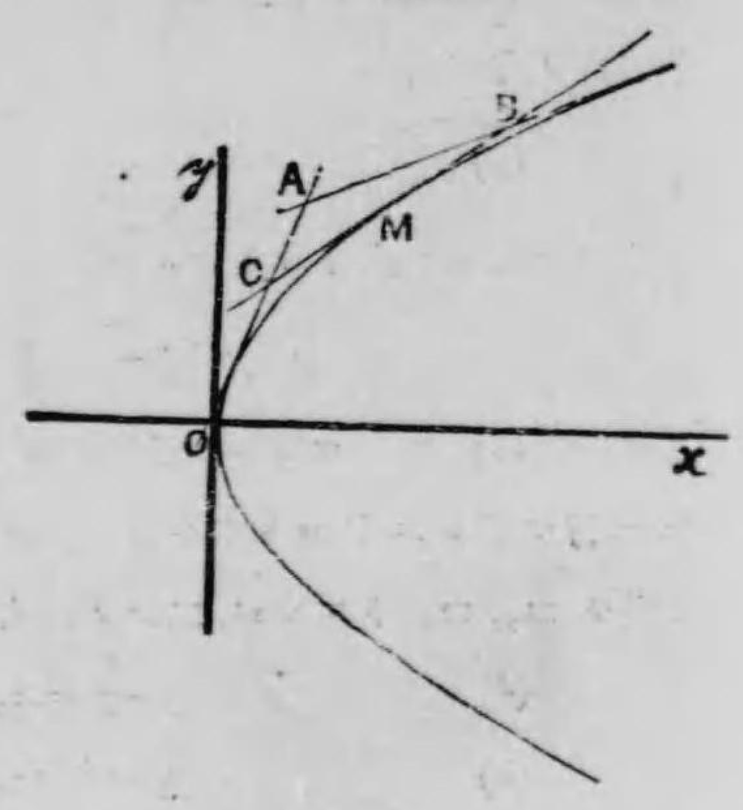
(2)　$y=m_1x+\dfrac{a}{m_1}$

(3)　$y=m_2x+\dfrac{a}{m_2}$

トシ, 其他ノ任意ノ切線ノ方程式ヲ

(4)　$y=m_3x+\dfrac{a}{m_3}$

トセヨ. ココニ m_3 ハ變常數ナリ.



(2)ト(4)トノ交點 B ノ坐標(x_1, y_1)ハ第78節例2ノ解中ニ示セル如ク

$$x_1=\frac{a}{m_1m_8},\qquad y_1=a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3}\right)$$

ニシテ, (3)ト(4)トノ交點 C ノ坐標(x_2, y_2)ハ

$$x_2=\frac{a}{m_2m_3},\qquad y_2=a\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)$$

ナリ. ソコデ線分 BC ノ中點 M ノ坐標ヲ(x', y')トスレバ

(5)　$2x'=x_1+x_2=\dfrac{a}{m_3}\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}\right)$

(6)　$2y'=y_1+y_2=a\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{2}{m_3}\right)$

(5)及(6)ヨリ變常數 m_3 ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ヲ得, 卽チ(5)ヨリ

$$\frac{a}{m_3}=\frac{2x'}{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}}$$

之ヲ(6)ノ右邊ニ代入スレバ

$$2y'=a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\frac{4x'}{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}}$$

$$\therefore \qquad 2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)y'-4x'=a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2$$

故ニ所要ノ軌跡ハ直線ナリ.

問　題

1. 拋物線ノ焦點ヲ通ル任意ノ弦ノ兩端ニ於ケル切線ハ準線ノ上ニ於テ直交スルコトヲ證明セヨ.

2. 拋物線 $y^2=4ax$ ノ焦點ヲ通ル弦ヲ直徑トスル圓ハ準線ニ切ス.

3. 拋物線ノ焦點 F ト拋物線上ノ任意ノ點 P トヲ結ビ付クル線分 FP ヲ直徑トスル圓ハ頂點ニ於ケル拋物線ノ切線ニ切ス.

4. 拋物線ノ軸上ノ點ヨリニアラザレバ二ツノ相等シキ切線ヲ引クコトヲ得ズ.

5. 拋物線 $y^2=4ax$ ノ頂點ガ A, 焦點ガ F ナルトキ, A ヲ中心トシ, AF ノ 3 倍ニ等シキ直徑ニテ畫キタル圓ト拋物線トノ共通弦ハ線分 AF ヲ二等分ス.

6. 定圓 A ト定直線 LM トニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.

7. 拋物線上ノ任意ノ點 P ニ於ケル法線ガ拋物線ノ軸ニ交ル點ヲ G トスルトキ, 線分 PG ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

8. 拋物線 $y^2=8a(x-c)$ ニ切スル拋物線 $y^2=4ax$ ノ弦 PQ ノ中點ノ軌跡如何.

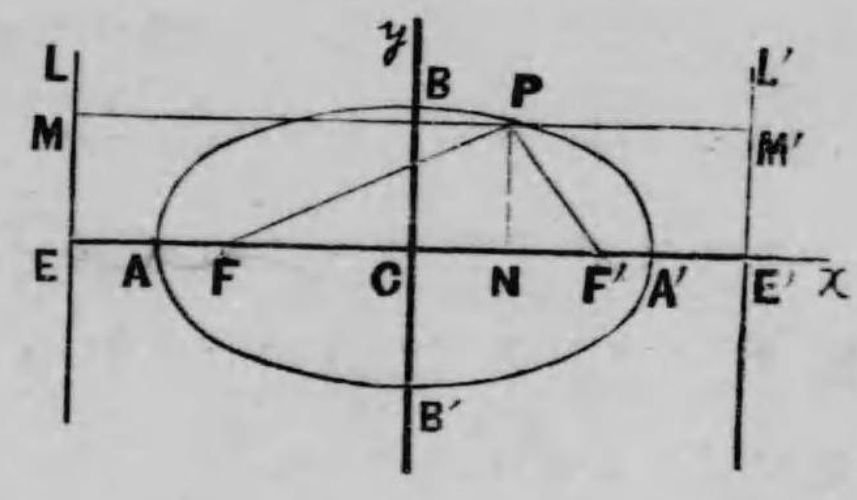
第五編

楕圓

第一章 楕圓ノ方程式(平行坐標)

92. 楕圓ノ方程式ヲ作ルコト

楕圓上ノ任意ノ一點ヲ P トシ, 楕圓ノ焦點ヲ F; 準線ヲ L トシ, P ヨリ L ニ下シタル垂線ノ足ヲ M トスレバ, 第 69 節ニ述ベタル楕圓ノ定義ニヨリ



$$FP=e.PM$$ [ココニ e ハ 1 ヨリ小ナル或常數ナリ]

焦點 F ヨリ準線 L ニ下シタル垂線ノ足ヲ E トシ, 線分 EF ヲ點 A ニ於テ

(1) $$FA : EA=e : 1$$

ナル樣ニ內分シ, 又點 A′ ニ於テ

(2) $$FA' : EA'=e : 1$$

ナル樣ニ外分スルトセヨ. サスレバ線分 EF ハ定線分ナルヲ以テ二點 A 及 A′ ハ何レモ楕圓上ノ定點ナルコト明カナ

リ. ソコデ線分 AA' ノ長サヲ $2a$ トシ, 其中點ヲ C トセヨ

サテ (1) ヨリ

$$(1)' \qquad FA=e.EA$$

又 (2) ヨリ

$$(2)' \qquad FA'=e.EA'$$

$$(1)'+(2)' \qquad AA'=e(EA+EA')$$

即チ

$$2a=e.2CE$$

故ニ

$$(3) \qquad \mathbf{CE=\frac{a}{e}}$$

又

$$(2)'-(1)' \qquad 2.CF=e(EA'-EA)=e.AA'$$

$$=e.2a=2.ae$$

故ニ

$$(4) \qquad \mathbf{CF=ae}$$

ソコデ C ヲ原點ニ取リ, 直線 AA' ヲ直交軸ノ x 軸ニ取リ, 點 P ノ坐標ヲ (x, y) トシ, P ヨリ x 軸ニ下シタル垂線ノ足ヲ N トセヨ. サスレバ

$$x=CN, \qquad y=NP$$

而シテ F ノ坐標ハ $(-ae, 0)$ ナルヲ以テ

$$FP^2=(x+ae)^2+y^2$$

又

$$PM=CN+CE=x+\frac{a}{e} \qquad [(3) ニヨル]$$

然ルニ

$$FP^2=e^2.PM^2$$

$$\therefore \quad (x+ae)^2+y^2=e^2\left(x+\frac{a}{e}\right)^2=(ex+a)^2$$

即チ

$$x^2+2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2+2aex+a^2$$

$$\therefore \quad x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

ソコデ

$$a^2(1-e^2)=b^2 \qquad [b\ モ亦常數ニシテ\ b<a]$$

トオケバ, 楕圓ノ方程式

$$(5) \qquad \mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

ヲ得.

【注意】 楕圓ノ方程式 (5) ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$y=\pm b$$

ヲ得. 因テ y 軸上ニ於テ原點 C ノ上下ニ長サ b ナル二ツノ線分 CB, CB′ ヲ取レバ B 及 B′ モ亦楕圓上ノ點ナルコトヲ知ル.

定義 二點 A, A′ ノ各ヲ楕圓ノ**頂點**, 點 C ヲ楕圓ノ**中心**, 二ツノ線分 AA′, BB′ ヲ夫々楕圓ノ**長軸**, **短軸**トイフ.

93. 楕圓ノ形狀ノ研究

若シ (x', y') ガ楕圓

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ點ナリトスレバ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

ナラザルベカラズ，而シテ是ハ亦

$$\frac{(-x')^2}{a^2}+\frac{(-y')^2}{b^2}=1$$

トモ考ヘラルルヲ以テ，$(-x',\ -y')$ モ亦楕圓上ノ點ナルコトヲ知ル，而シテ此二點ヲ結ビ付クル線分ノ中點ノ坐標ハ

$$x=\frac{x'+(-x')}{2}=0,\qquad y=\frac{y'+(-y')}{2}=0$$

ナルヲ以テ，此線分ハ中心 C ニヨリテ二等分セラル．

因テ

（第一） 楕圓ハ中心ニ關シテ對稱ナル曲線ナリ．

楕圓ノ方程式 (1) ヲ y ニ付テ解ケバ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

ヲ得．之ニヨリテ見レバ x ノ絶對値ガ a ヨリ大ナレバ y ハ虚數トナリ，x ノ絶對値ガ a ニ等シケレバ y ノ値ハ 0 トナリ，x ノ絶對値ガ a ヨリ小ナレバ x ノ同ジ値ニ對シテ y ノ値ハ二ツアリテ唯其符號ガ相異ナルノミナリ．

因テ

（第二） 楕圓ハ長軸ニ關シテ對稱ニシテ，長軸ノ兩端（次圖ノ A, A'）ニ於テ長軸ニ垂直ニ引ケル二直線間ニノミ存在ス．

又 (1) ヲ x ニ付テ解ケバ

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

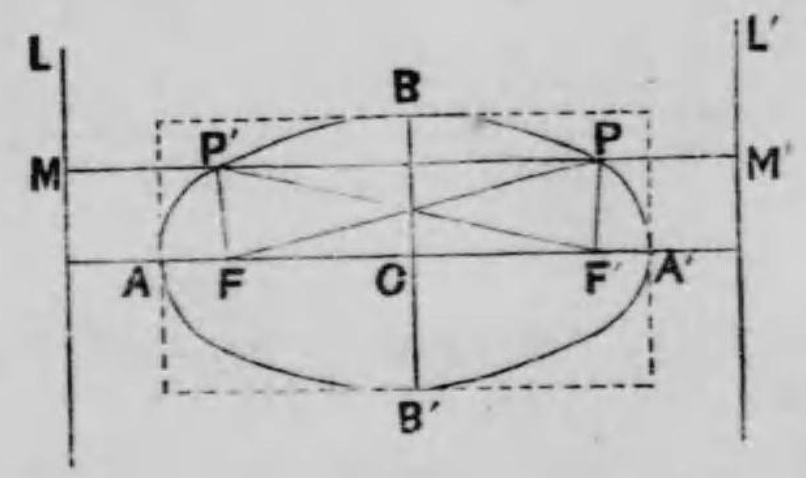
ヲ得．因テ上ニ述ベタルト同樣ニシテ次ノ結果ヲ得．

（第三） 楕圓ハ短軸ニ關シテ對稱ニシテ，短軸ノ兩端（下圖ノ B, B'）ニ於テ短軸ニ垂直ニ引ケル二直線間ニノミ存在ス．

［（第二）及（第三）ヲ綜合スレバ結局楕圓ハ下圖ニ於テ點線ニテ示セル矩形内ニノミ存在ス．］

短軸ニ關シ，準線 L ニ對稱ナル直線ヲ L' トシ，E, F ノ對稱點ヲ夫々 E', F' トセヨ．又楕圓上ノ任意ノ點 P ヲ通リ，長軸ニ平行ナル直線ガ二直線 L 及 L' ニ交ル點ヲ夫々 M, M' トシ．楕圓ト再ビ交ル點ヲ P' トシ，P 及 P' ノ各ヲ F 及 F' ノ各ニ結ビ付ケヨ．

サスレバ	$FP=F'P'$,	$PM=P'M'$
又	$FP'=F'P$,	$P'M=PM'$
然ルニ	$FP=e.PM$ ∴	$F'P'=e.P'M'$
又	$FP'=e.P'M$ ∴	$F'P=e.PM'$



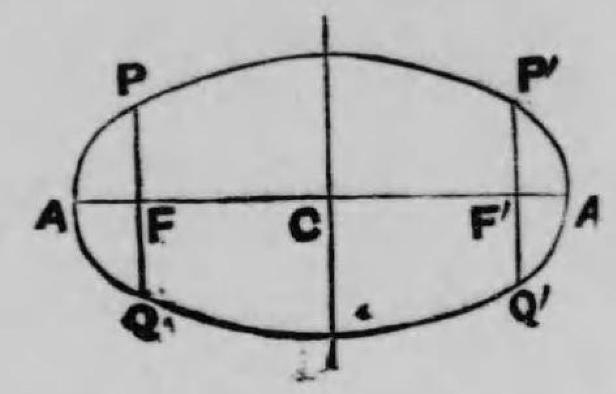
故ニ楕圓上ノ任意ノ點例ヘバ P ノ點 F 及直線 L ニ對スル關係ハ，全ク點 F' 及直線 L' ニ對スル關係ニ同ジ．

因テ

(第四) 楕圓ハ二ツノ焦點ト二ツノ準線トヲ有ス，而シテ此等ハ夫々短軸ニ關シテ互ニ對稱ナリ．

94. 通徑

定義 楕圓ノ焦點ヲ通リ長軸ニ垂直ナル直線ガ此曲線ニ挾マルル部分(卽チ弦)ヲ名ヅケテ通徑トイフ



右圖ニ於テ點 F, F′ ハ何レモ楕圓ノ焦點ニシテ，弦 PQ, P′Q′ ハ何レモ通徑ナリ．

今此楕圓ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

トスレバ，點 F ノ横坐標ハ ae ナルヲ以テ，(1) ニ於テ $x=ae$ トオケバ

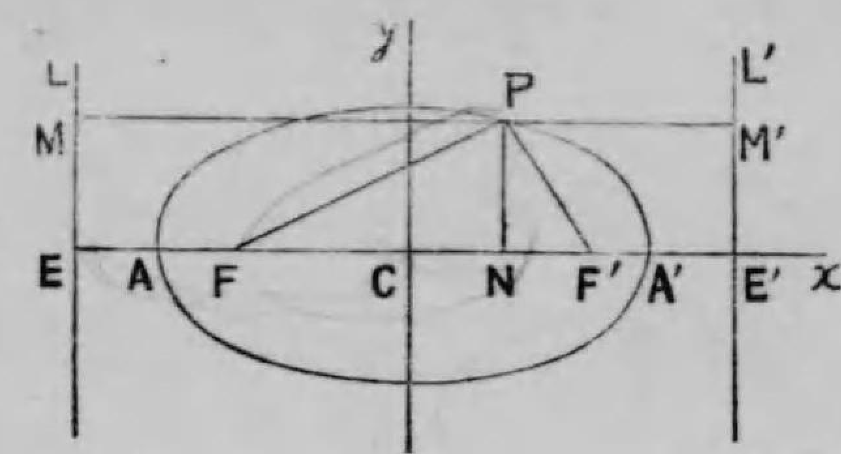
$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\therefore\quad y^2=b^2(1-e^2)=\frac{b^4}{a^2}\qquad [\because\ a^2(1-e^2)=b^2]$$

$$\therefore\quad y=\pm\frac{b^2}{a}$$

此 y ノ絶對値 $\frac{b^2}{a}$ ハ F′P′ ノ長サニシテ，通徑 P′Q′ ノ長サハ其 2 倍卽チ $\frac{2b^2}{a}$ ナリ．

95. 楕圓上ノ點ノ焦點ヨリノ距離



楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ，二ツノ焦點 F, F′ ノ各ヨリ P ニ至ル距離ヲ表ス式ハ次ノ如クニシテ求メラル，[第 92 節ニ於ケルト同ジ圖ニヨル.]

$$FP=e.PM=e.NE$$

$$=e(CE+CN)=e\left(\frac{a}{e}+x'\right)$$

故ニ

$$(1)\qquad \boldsymbol{FP=a+ex'}$$

又

$$F'P=e.PM'=e.NE'$$

$$=e\ (CE'-CN)=e\left(\frac{a}{e}-x'\right)$$

故ニ

$$(2)\qquad \boldsymbol{F'P=a-ex'}$$

從テ

$$(3)\qquad \boldsymbol{FP+F'P=2a}$$

卽チ楕圓上ノ任意ノ點ノ兩焦點ヨリノ距離ノ和ハ長軸ノ長サニ等シ.

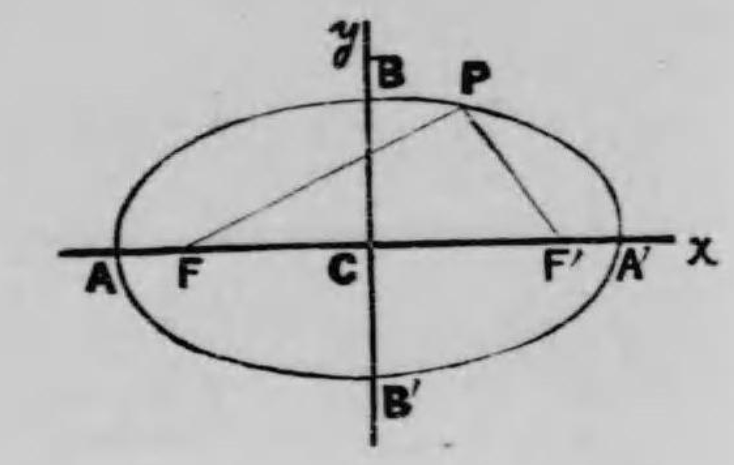
【注意 1】 今得タル性質ニヨリ次ノ如ク器械的ニ楕圓ヲ書クコトヲ得ベシ.

或長サノ絲ノ兩端ヲ或二定點ニ固定シ，鉛筆ノ尖端ニ其絲ヲ掛ケ，絲ガ弛マヌ樣ニ鉛筆ヲ動カストキハ，此二定點ヲ焦點トシ，此絲ノ長サニ等シキ長サノ長軸ヲ有スル楕圓ヲ生ズ．

【注意2】 上ノ (3) ニテ示シタル性質ヲ楕圓ノ定義トシテモヨシ，卽チ

二定點ヨリノ距離ノ和ガ不易ナル點ノ軌跡ヲ楕圓トイフ．

此定義ニヨリ楕圓ノ方程式ヲ求メン．



二定點ヲ F, F′ トシ之ヲ通ル直線ヲ x 軸トシ，線分 FF′ ノ中點 C ヨリ之ニ垂直ニ引キタル直線ヲ y 軸トセヨ．

今楕圓上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ定義ニヨリ

$$PF+PF'=2a \qquad [2a \text{ ハ不易}]$$

又 $FC=CF'=c$ ト置ケバ $F(-c, 0)$, $F'(c, 0)$ ナリ．故ニ

$$PF^2=(x+c)^2+y^2, \qquad PF'^2=(x-c)^2+y^2.$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

此兩邊ヲ平方スレバ

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\therefore \quad 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

$$\therefore \quad a^2[(x-c)^2+y^2]=(a^2-cx)^2$$

$$\therefore \quad a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$\therefore \quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

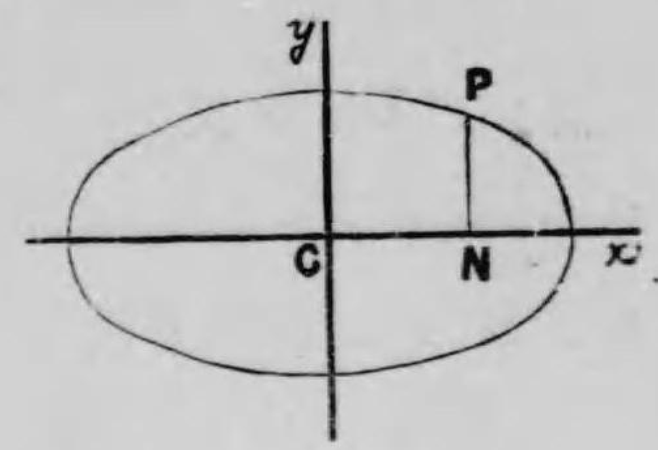
ソコデ $a^2-c^2=b^2$ ト置ケバ

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

96. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ト點 (x', y') トノ位置ノ關係

（第一） 點 $P(x', y')$ ガ楕圓上ニアルトキハ，坐標 (x', y') ハ楕圓ノ方程式ニ適合ス．從テ

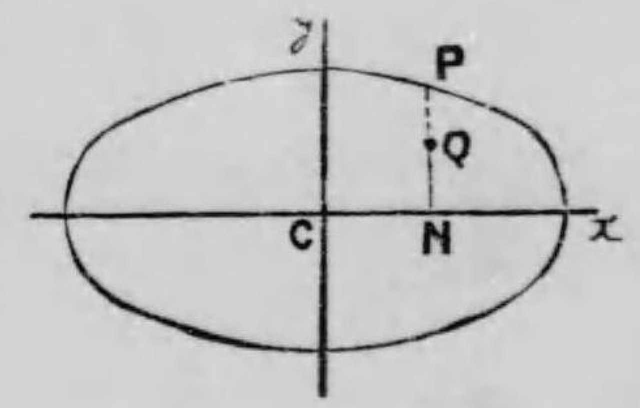


$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

ナリ．

（第二） 點 (x', y') ガ楕圓ノ內ニ在ルトキ．

此點ヲ Q トシ，其縱線 NQ ヲ Q ノ方ニ延長シテ楕圓ト點 P ニ於テ交ラシメヨ．サスレバ



$$x'=CN, \quad y'=NQ$$

而シテ NP ノ長サハ NQ ノ長サヨリモ大ナリ.

$$\therefore \quad NP^2 > NQ^2$$

然ルニ點 P ハ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ點ナルヲ以テ

$$\frac{CN^2}{a^2}+\frac{NP^2}{b^2}-1=0$$

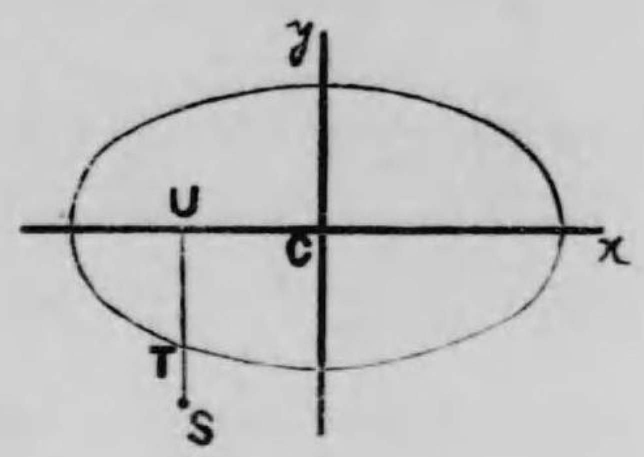
$$\therefore \quad \frac{CN^2}{a^2}+\frac{NQ^2}{b^2}-1<0$$

即チ
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1<0$$

(第三) 點 (x', y') ガ楕圓ノ外ニ在ルトキ.

此點ヲ S トシ, 其縦線ノ足ヲ U, 縦線ガ楕圓ニ交ル點ヲ T トセヨ. サスレバ

$$x'=CU, \quad y'=US$$



而シテ US ノ長サハ UT ノ長サヨリモ大ナルヲ以テ (圖ノ如ク S ガ x 軸ノ下方ニアルトキニテモ), S ノ縦坐標 y' ノ絶對値ハ T ノ縦坐標 UT ノ絶對値ヨリ大ナリ.

$$\therefore \quad y'^2=US^2>UT^2$$

然ルニ T ハ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ點ナルヲ以テ

$$\frac{CU^2}{a^2}+\frac{UT^2}{b^2}-1=0$$

$$\therefore \quad \frac{CU^2}{a^2}+\frac{US^2}{b^2}-1>0$$

即チ
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1>0$$

以上三ツノ結果ヲ纏ムレバ次ノ如シ.

楕圓ノ方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ右邊ノ 1 ヲ左邊ニ移シテ得ル式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ ノ中ノ x, y ニ今考ヘツツアル點ノ坐標 (x', y') ヲ置換ヘテ $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1$ ヲ作ルトキ,

$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1>0$ ナレバ點 (x', y') ハ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ外ニ在リ.

$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0$ ナレバ點 (x', y') ハ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ上ニ在リ.

$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1<0$ ナレバ點 (x', y') ハ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ内ニ在リ.

【例 1】 楕圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ニ對シ點 (2, 3) ノ位置如何.

解 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1$ ニ於テ $x=2, y=3$ トオケバ

$$\frac{4}{9}+\frac{9}{4}-1>0$$

故ニ點 (2, 3) ハ楕圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ノ外ニアリ.

【例2】 點 (2, 1) ノ楕圓 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ ニ對スル位置如何.

解 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}-1$ ニ於テ $x=2,\ y=1$ トオケバ

$$\frac{4}{6}+\frac{1}{4}-1=\frac{8+3-12}{12}<0$$

故ニ點 (2, 1) ハ楕圓 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ ノ内ニ在リ.

97. 第 92 節乃至第 96 節ノ問題ノ例

【例1】 楕圓 $4x^2+9y^2=36$ ノ離心率, 通徑ノ長サ及焦點ノ坐標ヲ求メヨ.

解 $4x^2+9y^2=36$ ヲ其右邊ガ 1 トナル様ニ書キ直セバ

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

ソコデ之ヲ楕圓ノ標準ノ形式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ニ比較スレバ

$$a=3,\qquad b=2$$

トナル. 然ルニ

$$b^2=a^2(1-e^2)\qquad 従テ\qquad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

故ニ此場合ニ於テハ

$$e^2=\frac{9-4}{9}=\frac{5}{9}\qquad \therefore\qquad e=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$通徑ノ長サ=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times4}{3}=\frac{8}{3}$$

$$焦點ノ横坐標=\pm ae=\pm3\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\pm\sqrt{5}$$

故ニ二ツノ焦點ノ坐標ハ夫々 $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$ ナリ.

【例2】 點 F (1, 0) ヲ焦點トシ, 直線 $x+y=0$ ヲ準線トシ, 離心率ガ $\frac{1}{2}$ ナル楕圓ノ方程式ヲ求メヨ.

解 楕圓上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x, y) トシ, P ヨリ準線ニ下シタル垂線ノ足ヲ M トスレバ

$$FP=e.\,PM$$

従テ

$$FP^2=e^2.PM^2$$

然ルニ

$$FP^2=(x-1)^2+y^2$$

$$PM^2=\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(x+y)^2}{2}$$

$$e=\frac{1}{2}$$

故ニ所要ノ方程式ハ

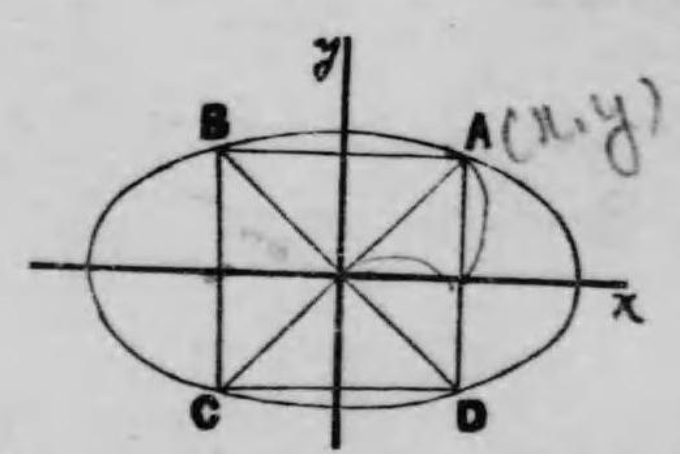
$$(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}\times\frac{(x+y)^2}{2}$$

$$\therefore\quad 8(x^2-2x+1)+8y^2=x^2+2xy+y^2$$

$$\therefore\quad 7x^2-2xy+7y^2-16x+8=0$$

重要

【例3】 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ内接スル正方形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ.



解 内接正方形 ABCD ノ頂點ハ兩軸ガナス角ノ二等分線上ニアルベキコト明カナリ. ソコデ聯立方程式

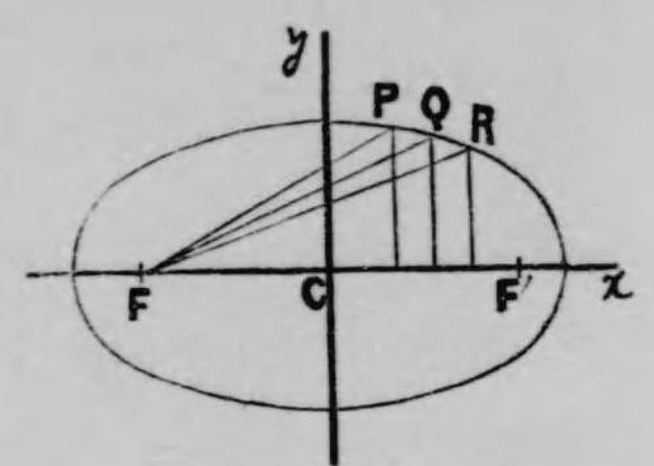
$$y=x\qquad 及\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ヲ解キテ y ヲ求ムレバ

$$y=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ヲ得. 是レ A ノ縦坐標ニシテ内接正方形ノ一邊ノ半分ニ等シ, 故ニ内接正方形ノ一邊ノ長サハ $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ナリ,

【例 4】 P, Q, R ハ一ツノ焦點ガ F ナル楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ三點ニシテ, 其横坐標ガ等差級數ヲナストキ, 三ツノ線分 FP, FQ, FR モ亦等差級數ヲナス.



解 P, Q, R ノ横坐標ヲ夫々 x_1, x_2, x_3 トスレバ, 假設ニヨリテ

$$x_1+x_3=2x_2$$

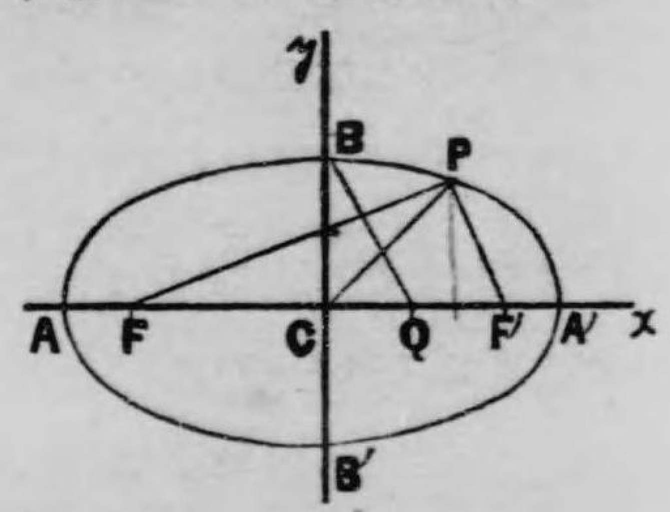
ソコデ P, Q, R ノ各ト焦點 F トヲ結ビ付クレバ第 95 節ニヨリテ

$$FP=a+ex_1,\quad FQ=a+ex_2,\quad FR=a+ex_3$$

$$\begin{aligned}\therefore\qquad FP+FR&=(a+ex_1)+(a+ex_3)\\&=2a+e(x_1+x_3)=2a+2ex_2\\&=2(a+ex_2)=2.\ FQ\end{aligned}$$

故ニ FP, FQ, FR ハ等差級數ヲナス.

【例 5】 楕圓上ノ點 P ノ焦點 F, F′ ヨリノ距離ニ等シキ二ツノ分ニ, 長軸 AA′ ヲ Q ニ於テ分ツトキ, 短軸 BB′ ノ何レカ一端ト Q トノ距離ハ P ト楕圓ノ中心 C トノ距離ニ等シ.



證明 楕圓ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

トシ, P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ.

サスレバ　$FP=AQ=a+ex'$

從テ　$F'P=A'Q=a-ex'$

$$\therefore \quad CQ = AQ - AC = a + ex' - a = ex'$$

$$\therefore \quad BQ^2 = b^2 + (ex')^2 = b^2 + e^2x'^2$$

$$= b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x'^2 = x'^2 + b^2\left(1 - \frac{x'^2}{a^2}\right)$$

然ルニ
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad y'^2 = b^2\left(1 - \frac{x'^2}{a^2}\right)$$

$$\because \quad BQ^2 = x'^2 + y'^2 = CP^2$$

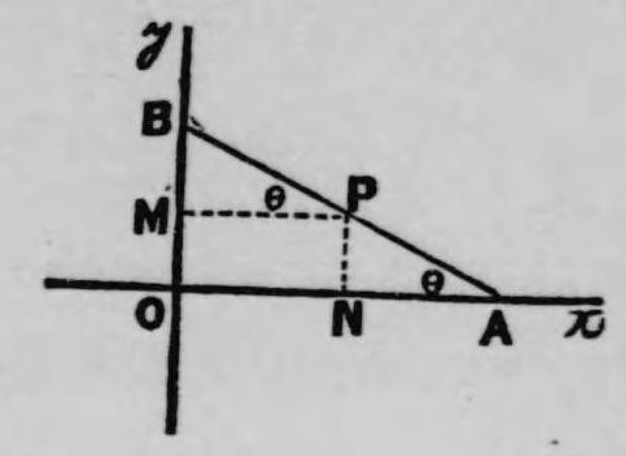
$$\therefore \quad BQ = CP$$

【例 6】 與ヘラレタル長サノ線分 AB ノ兩端ガ，互ニ直交スル二定直線 Ox, Oy 上ニアル樣ニ動クトキ，其線分上ノ(中點ナラザル)一定點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 二定直線 Ox, Cy ヲ兩軸ニ取リ

$$PA = a, \qquad PB = b$$

トシ，線分 AB ト OA トガナス角ヲ θ トセヨ. [ココニ θ ハ變常數ナリ.]



ソコデ P ノ坐標ヲ (x, y) トシ，P ヨリ Ox, Oy ニ夫々垂線 PN, PM ヲ下セ. サスレバ

(1) $$x = ON = MP = BP\cos\theta = b\cos\theta$$

(2) $$y = NP = AP\sin\theta = a\sin\theta$$

故ニ (1) ヨリ

(3) $$\frac{x}{b} = \cos\theta$$

又 (2) ヨリ

(4) $$\frac{y}{a} = \sin\theta$$

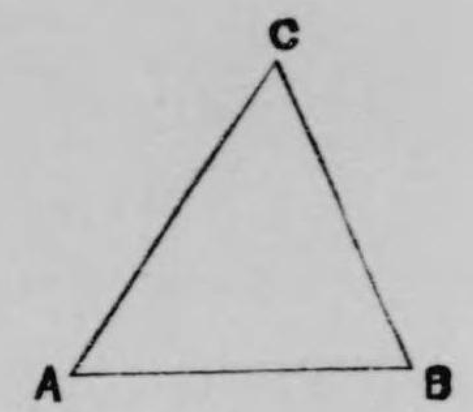
ソコデ (3) 及 (4) ノ各ヲ平方シ之ヲ邊々相加ヘテ θ ヲ消去スレバ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

故ニ所要ノ軌跡ハ楕圓ナリ.

【例 7】 △ABC ノ底邊 AB ガ定マリ, $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$ ガ與ヘラルルトキ, 頂點 C ノ軌跡ヲ求メヨ.

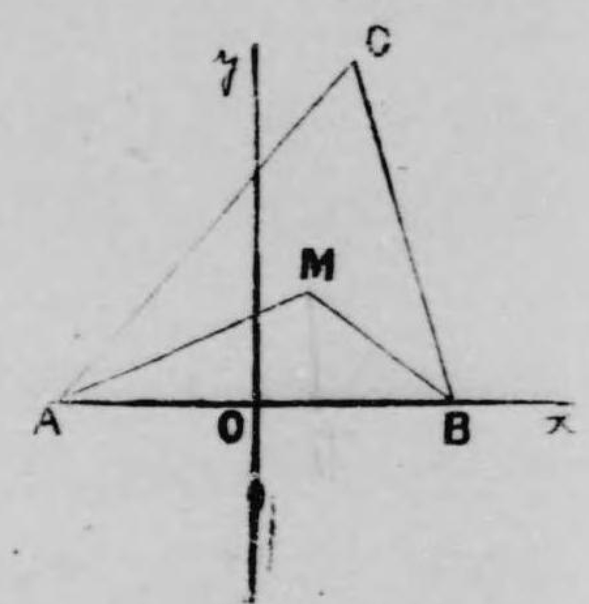
解
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{s-c}{s}\qquad [\text{ココニ } 2s=a+b+c]$$



$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$ 及ビ AB$=c$ ガ與ヘラルルヲ以テ s ハ定マル. 從テ AC+BC$=2s-c$ モ亦定マル.

故ニ C ノ軌跡ハ A 及 B ヲ焦點トスル楕圓ナリ.

【例 8】 △ABC ノ底邊 AB ガ定マリ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$ ガ不易ニシテ k ニ等シキトキ, 此三角形ノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ.



解 AB ノ中點 O ヲ原點ニ取リ, AB ヲ x 軸トセヨ. △ABC ノ內心ヲ M トシ, AB$=2c$ トセヨ. サスレバ直線 AM ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y=(x+c)\tan\frac{A}{2}$$

又直線 BM ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=-\tan\frac{B}{2}(x-c)$$

故ニ (1) ト (2) トヲ邊々相乘ズレバ

$$y^2=-(x^2-c^2)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

然ルニ
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=k$$

$$\therefore\qquad y^2=-k(x^2-c^2)$$

$$\therefore\qquad y^2+kx^2=kc^2$$

$$\therefore \qquad \frac{y^2}{kc^2}+\frac{x^2}{c^2}=1$$

故ニ所要ノ軌跡ハ AB ヲ長軸トスル楕圓ナリ.

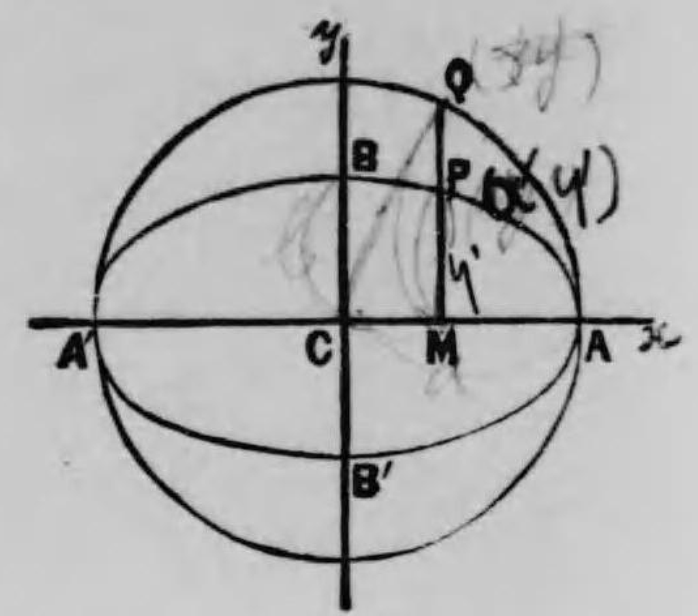
第二章 離心角

98. 補助圓

定義 楕圓ノ長軸 AA′ ヲ直徑トスル圓ヲ補助圓ト名ヅク.

楕圓ノ方程式ヲ

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



トスレバ, 補助圓ノ方程式ハ

(2) $x^2+y^2=a^2$

ナリ. 今楕圓上ノ任意ノ點 P ノ縦坐標 MP ヲ P ノ方ヘ延長シ補助圓ト Q ニ於テ交ラシメヨ. 此二點 P ト Q トヲ**相對應スル點**トイフ.

ソコデ MP : MQ ヲ求メン. P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ.

サスレバ $$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

$$\therefore \quad y'=MP=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x'^2}$$

又 Q ノ横坐標ハ矢張リ x' ナルヲ以テ, Q ノ縦坐標 MQ ハ (2) ニ於テ $x=x'$ トオキタルトキノ y ノ値ヲ求ムレバヨシ. 卽チ

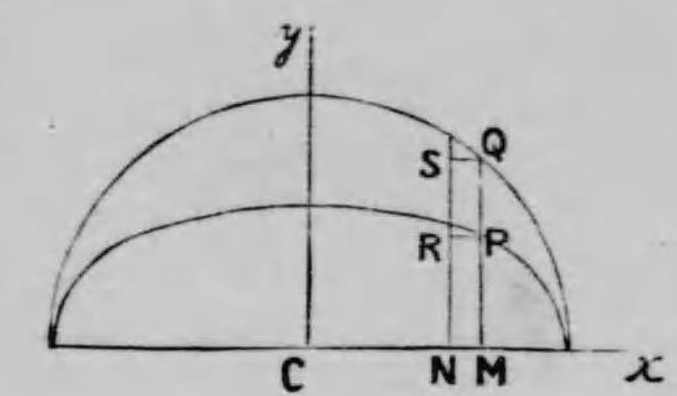
$$y=MQ=\sqrt{a^2-x'^2}$$

$$\therefore \quad MP : MQ=b : a$$

卽チ楕圓及其補助圓ノ上ニ於ケル相對應スル點ノ縦線ノ比ハ不易ニシテ $\frac{b}{a}$ ニ等シ.

99. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ面積

右圖ノ如ク補助圓ヲ書キ, P, Q ヲ楕圓ト補助圓トノ相對應スル點トセヨ.



P, Q ヨリ夫々 x 軸ニ平行線ヲ引キ, 又 x 軸上ニ於テ P ノ縦線ノ足 M ニ極メテ近キ點 N ヨリ MP ニ平行線ヲ引キテ前ノ平行二直線ト夫々 R, S ニ於テ交ラシム. サスレバ

$$\frac{\text{矩形 MPRN}}{\text{矩形 MQSN}}=\frac{MP}{MQ}=\frac{b}{a} \qquad \text{[前節]}$$

故ニ斯樣ニシテ作リタル, 相等シキ底邊ヲ有スル任意ノ箇數ノ矩形ノ和ノ比ハ $b:a$ ナルベシ. 故ニ極限ノ定理ニヨリ, 楕圓ノ四分ノ一ノ面積ト補助圓ノ四分ノ一ノ面積トノ比モ亦然リ.

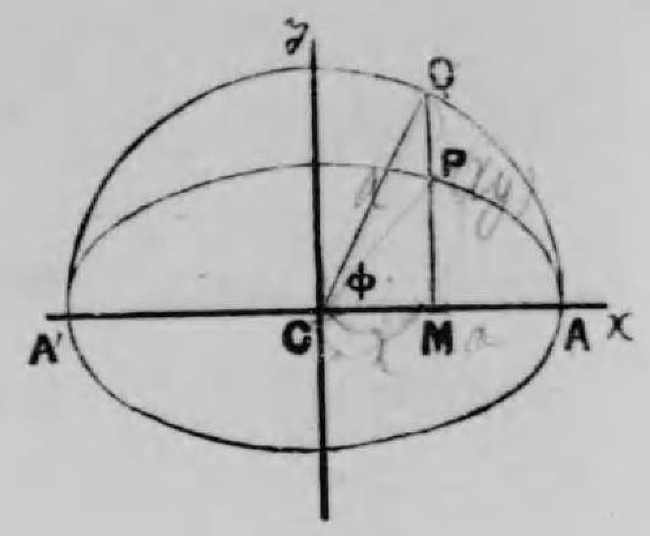
從テ $$\frac{\text{楕圓ノ面積}}{\text{補助圓ノ面積}}=\frac{b}{a}$$

然ルニ $$\text{補助圓ノ面積}=\pi a^2$$

$$\therefore \quad \text{楕圓ノ面積}=\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab$$

100.　離心角

定義　楕圓上ノ點 P ニ對應スル，補助圓周上ノ點ヲ Q トスレバ，∠ACQ ヲ名ヅケテ點 P ノ**離心角**トイフ．



今 P ノ離心角ヲ φ トスレバ P ノ坐標 (x, y) ヲ φ ニテ表ハスコトヲ得．即チ

$$x=\mathrm{CM}=\mathrm{CQ}\cos\varphi=a\cos\varphi$$

$$y=\mathrm{MP}=\mathrm{MQ}\times\frac{b}{a}\qquad\text{[第 98 節]}$$

$$=a\sin\varphi\times\frac{b}{a}=b\sin\varphi$$

今求メタル P ノ坐標

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{cases}$$

ハ楕圓ノ方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ適合スルコト明カナリ．

【注意】 斯様ニ離心角ヲ用フレバ楕圓上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ一ツノ變數ニテ表ハシ得ルヲ以テ，問題ヲ解クニモ之ニヨル方ガ通例簡單ナリ．

101.　離心角ニ關スル問題ノ例

【例 1】 離心角ガ夫々 α, β ナル，楕圓上ノ二點 P, Q ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ．

解　　$\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$,　　$\mathrm{Q}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$

故ニ PQ ノ方程式ハ

$$\frac{y-b\sin\beta}{x-a\cos\beta}=\frac{b\sin\alpha-b\sin\beta}{a\cos\alpha-a\cos\beta}=\frac{b(\sin\alpha-\sin\beta)}{a(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

$$=\frac{2b\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{-2a\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=-\frac{b\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\therefore\quad ay\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-ab\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-bx\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+ab\cos\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\therefore\quad bx\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+ay\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=ab\left[\cos\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

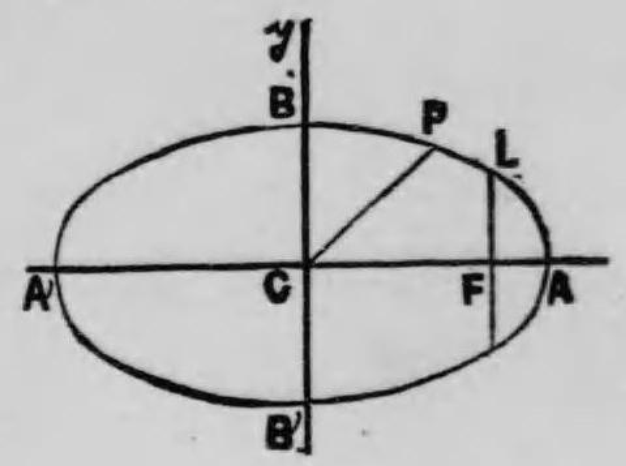
$$=ab\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)=ab\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\therefore\qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

【例 2】 楕圓ノ通徑ノ一端ニ於ケル離心角ヲ求メヨ．

又楕圓上ニ於テ $x=y$ ナル點ノ離心角ヲ求メヨ．

又兩軸ノ各端 A, A′, B, B′ ノ離心角ヲ求メヨ．



解　通徑ノ端 L ノ横坐標ハ ae ナリ．

ソコデ L ノ離心角ヲ φ トスレバ

$$ae=a\cos\varphi\qquad\therefore\qquad\cos\varphi=e$$

又楕圓上ニ於テ $x=y$ ナル點 P ノ離心角ヲ φ トスレバ

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=b\sin\varphi$$

然ルニ假設ニヨリ　　$x=y$

$$\therefore\quad a\cos\varphi=b\sin\varphi\qquad\therefore\quad\tan\varphi=\frac{a}{b}$$

又點 A ニ就テハ

$$x=a\cos\varphi=a\qquad\therefore\quad\cos\varphi=1\qquad\therefore\quad\varphi=0$$

點 A′ ニ就テハ

$$x=a\cos\varphi=-a\qquad\therefore\quad\cos\varphi=-1\qquad\therefore\quad\varphi=180^\circ$$

點 B ニ就テハ

$$y=b\sin\varphi=b \qquad \therefore \quad \sin\varphi=1 \qquad \therefore \quad \varphi=90^\circ$$

點 B′ ニ就テハ

$$y=b\sin\varphi=-b \qquad \therefore \quad \sin\varphi=-1 \qquad \therefore \quad \varphi=270^\circ$$

【例 3】 楕圓上ノ一點 P ノ離心角ヲ α トスルトキ, 二直線 AP, A′P ノ方程式ヲ求メヨ.

解 點 A ノ離心角ハ 0 ニシテ, 點 A′ ノハ 180° ナリ.

ソコデ AP ノ方程式ハ

$$(1) \qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad [例 1]$$

ニ於テ $\beta=0$ トオキタルモノ, 卽チ

$$(2) \qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$$

又 A′P ノ方程式ハ, (1) ニ於テ $\beta=180^\circ$ トオキタルモノ, 卽チ

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+90^\circ\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+90^\circ\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}-90^\circ\right)$$

卽チ (3) $$\frac{y}{b}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{x}{a}\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}$$

ナリ

【例 4】 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ三點 P, Q, R ノ離心角ガ夫夫 α, β, γ ナルトキハ, △PQR ノ面積ハ

$$2ab\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

ナリ.

證明 P$(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$, Q$(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$, R$(a\cos\gamma,\ b\sin\gamma)$

$$\therefore \ \triangle PQR=\frac{1}{2}\Big[(a\cos\beta-a\cos\alpha)(b\sin\gamma-b\sin\alpha)-(a\cos\gamma-a\cos\alpha)(b\sin\beta-b\sin\alpha)\Big]$$

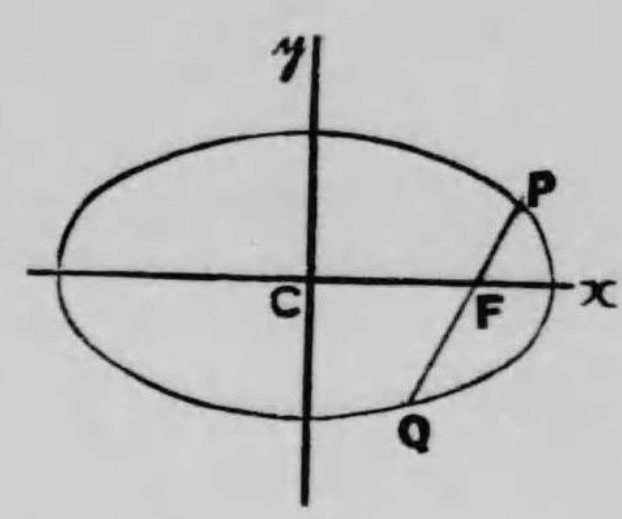
$$=\frac{1}{2}ab\Big[(\cos\beta-\cos\alpha)(\sin\gamma-\sin\alpha)-(\cos\gamma-\cos\alpha)(\sin\beta-\sin\alpha)\Big]$$

$$=\frac{4}{2}ab\Big[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}-\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big]$$

$$=2ab\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\Big[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}-\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big]$$

$$=2ab\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

【例 5】 楕圓ノ焦點ヲ通ル弦ノ兩端 P, Q ノ離心角ヲ α, β トスレバ $\quad \tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}=-\dfrac{1-e}{1+e} \quad$ ナリ.



證明 PQ ノ方程式ハ

$$(1) \qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

然ルニ PQ ハ點 $(ae, 0)$ ヲ通ルヲ以テ

$x=ae$, $y=0$ ハ (1) ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore \qquad \frac{ae}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\therefore \qquad e\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore \qquad (1+e)\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=-(1-e)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore \qquad \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=-\frac{1-e}{1+e}$$

【例 6】 楕圓ノ二ツノ弦 MN, PQ ガ長軸ト交ル點ガ中心ヨリ等距離ニアルトキ, 其端點ノ離心角ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}=1 \qquad ナリ.$$

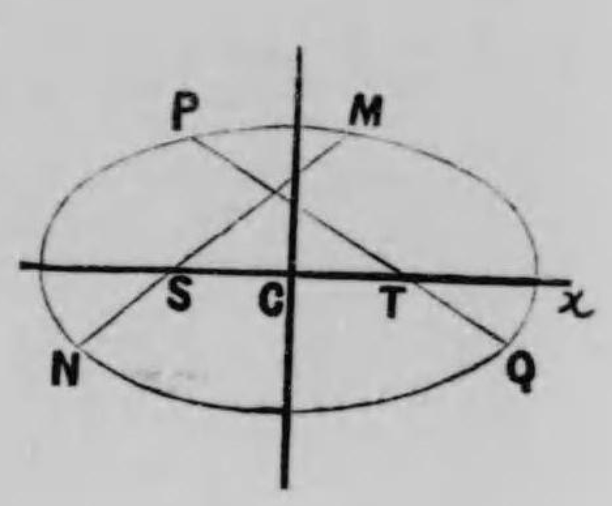
證明 MN ノ方程式ハ

$$(1) \qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

PQ ノ方程式ハ

$$(2)\qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\gamma+\delta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}=\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$$

今 MN, PQ ガ長軸ト交ル點ヲ夫々 S, T トセヨ.



(1) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$x=\mathrm{CS}=\frac{a\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

(2) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$x=\mathrm{CT}=\frac{a\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}}$$

然ルニ $\qquad \mathrm{CS}=-\mathrm{CT}$

$$\therefore\qquad \frac{a\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{a\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}}=0$$

$$\therefore\qquad \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}=-\frac{\cos\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\delta}{2}+\sin\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\delta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\delta}{2}-\sin\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\delta}{2}}$$

$$\frac{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}}=-\frac{1+\tan\dfrac{\gamma}{2}\tan\dfrac{\delta}{2}}{1-\tan\dfrac{\gamma}{2}\tan\dfrac{\delta}{2}}$$

$$\therefore\qquad 1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}-\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}$$

$$=-1-\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}$$

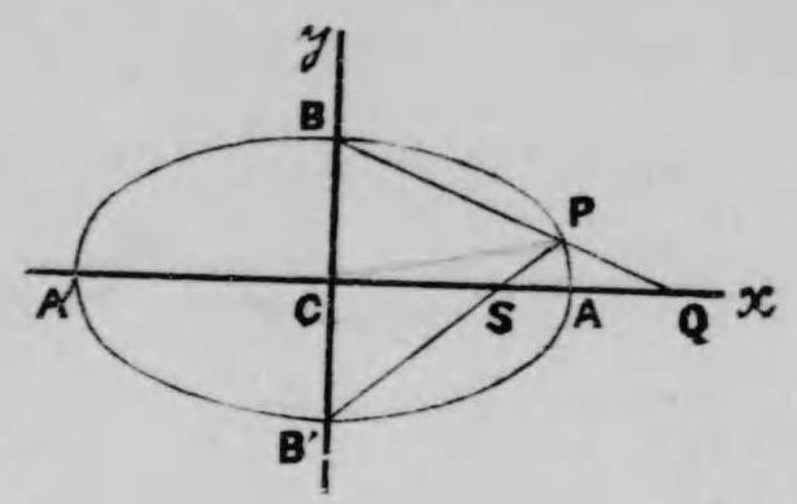
$$\therefore\qquad \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}=1$$

102. 離心角ヲ用ヒテ問題ヲ解ク例

【例 1】 中心ガ C ナル楕圓上ノ點 P ト短軸 BB′ ノ兩端トヲ通ル二直線ガ長軸 AA′ ト交ル點ヲ Q, S トスレバ $\mathrm{CQ.CS}=\mathrm{CA}^2$ ナリ.

證明 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



トシ, 其上ノ點 P ノ離心角ヲ φ, 從テ P ノ坐標ヲ $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ トセヨ. B, B′ ノ坐標ハ夫々 $(0, b)$ $(0, -b)$ ナルヲ以テ

直線 BP: $$\frac{y-b}{x}=\frac{b\sin\varphi-b}{a\cos\varphi}\qquad(1)$$

直線 B′P: $$\frac{y+b}{x}=\frac{b\sin\varphi+b}{a\cos\varphi}\qquad(2)$$

(1) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$x=\mathrm{CQ}=\frac{ab\cos\varphi}{b-b\sin\varphi}$$

又 (2) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$x=\mathrm{CS}=\frac{ab\cos\varphi}{b+b\sin\varphi}$$

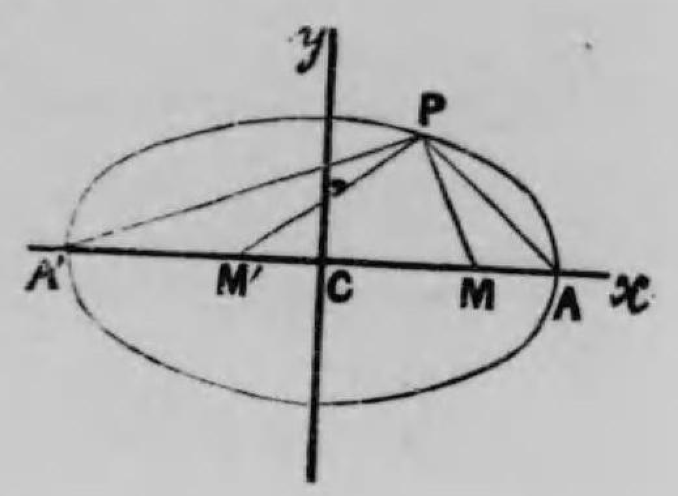
$$\therefore\qquad \mathrm{CQ.CS}=\frac{ab\cos\varphi}{b(1-\sin\varphi)}\times\frac{ab\cos\varphi}{b(1+\sin\varphi)}$$

$$=\frac{a^2\cos^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}=a^2=\mathrm{CA}^2$$

【例 2】 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ任意ノ點ヲ P トシ, AA′ ヲ其長軸トセヨ. P ヲ通リ二直線 AP, A′P ニ夫々垂直ナル

二直線ガ AA′ ト交ル點ヲ M′, M トスレバ, 線分 M′M ハ通徑ニ等シ.

證明 P ノ離心角ヲ φ トセヨ. サスレバ $P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$



直線 A′P ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x+a}=\frac{b\sin\varphi}{a(\cos\varphi+1)}$$

故ニ直線 PM ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y-b\sin\varphi=-\frac{a(\cos\varphi+1)}{b\sin\varphi}(x-a\cos\varphi)$$

又直線 AP ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x-a}=\frac{b\sin\varphi}{a(\cos\varphi-1)}$$

故ニ直線 PM′ ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y-b\sin\varphi=-\frac{a(\cos\varphi-1)}{b\sin\varphi}(x-a\cos\varphi)$$

ソコデ點 M ノ横坐標ヲ求ムル爲ニ, (1) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$x=\mathrm{CM}=\frac{b^2\sin^2\varphi}{a(\cos\varphi+1)}+a\cos\varphi$$

ヲ得. 又點 M′ ノ横坐標ヲ求ムル爲ニ, (2) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$x=\mathrm{CM}'=\frac{b^2\sin^2\varphi}{a(\cos\varphi-1)}+a\cos\varphi$$

$$\therefore\qquad \mathrm{M'M}=\mathrm{CM}-\mathrm{CM}'=\frac{b^2\sin^2\varphi}{a(\cos\varphi+1)}-\frac{b^2\sin^2\varphi}{a(\cos\varphi-1)}$$

$$=\frac{-2b^2\sin^2\varphi}{a(\cos^2\varphi-1)}=\frac{-2b^2\sin^2\varphi}{-a\sin^2\varphi}=\frac{2b^2}{a}\ (=\text{通徑ノ長サ})$$

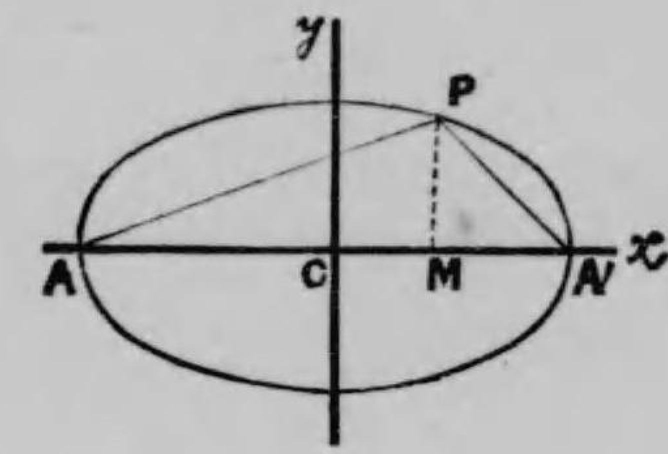
【例 3】 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ任意ノ點ヲ P トシ, 長軸ノ兩端ヲ A, A′ トシ, P ノ縱坐標ヲ y' トスレバ

$$\cot \mathrm{APA'}\propto y' \quad ナリ.$$

證明 P ノ離心角ヲ φ トスレバ

$P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$

P ノ縱線ノ足ヲ M トスレバ



$$\tan\mathrm{APM}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MP}}=\frac{\mathrm{AC+CM}}{\mathrm{MP}}=\frac{a+a\cos\varphi}{b\sin\varphi}$$

$$\tan\mathrm{A'PM}=\frac{\mathrm{MA'}}{\mathrm{MP}}=\frac{\mathrm{CA'-CM}}{\mathrm{MP}}=\frac{a-a\cos\varphi}{b\sin\varphi}$$

$$\therefore\quad \tan\mathrm{APA'}=\frac{\tan\mathrm{APM}+\tan\mathrm{A'PM}}{1-\tan\mathrm{APM}.\tan\mathrm{A'PM}}=\frac{\frac{a(1+\cos\varphi)}{b\sin\varphi}+\frac{a(1-\cos\varphi)}{b\sin\varphi}}{1-\frac{a(1+\cos\varphi)}{b\sin\varphi}\cdot\frac{a(1-\cos\varphi)}{b\sin\varphi}}$$

$$=\frac{2ab\sin\varphi}{b^2\sin^2\varphi-a^2(1-\cos^2\varphi)}=\frac{2ab\sin\varphi}{b^2\sin^2\varphi-a^2\sin^2\varphi}=\frac{2ab}{(b^2-a^2)\sin\varphi}$$

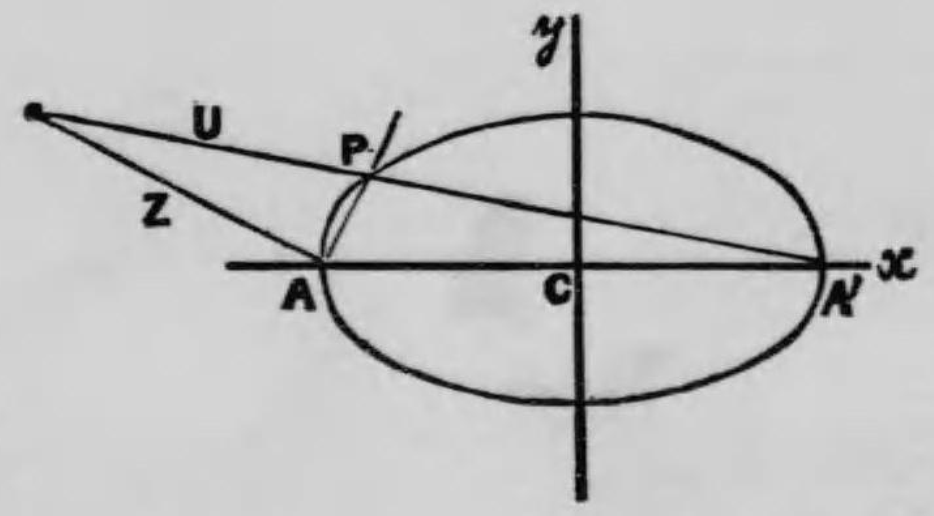
$$\therefore\qquad \cot\mathrm{APA'}=\frac{(b^2-a^2)\sin\varphi}{2ab}=\frac{b^2-a^2}{2ab^2}.(b\sin\varphi)$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2ab^2}y'\propto y'$$

【例 4】 P ヲ楕圓上ノ任意ノ點トシ, 長軸ノ一端 A ヲ通リ直線 AP ニ垂直ナル直線 Z ト, 長軸ノ他ノ端 A′ 及 P ヲ通ル直線 U トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



トシ, 點 P ノ離心角ヲ φ トセヨ. サスレバ

$A(-a,\ 0),\ \ A'(a,\ 0),$

$P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$

故ニ直線 AP ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x+a}=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi+a}$$

因テ直線 Z ノ方程式ハ

(1) $$y=-\frac{a(1+\cos\varphi)}{b\sin\varphi}(x+a)$$

又直線 A′P ノ方程式ハ

(2) $$y=\frac{b\sin\varphi}{a(\cos\varphi-1)}(x-a)$$

ソコデ (1) 及 (2) ヲ聯立方程式トシテ其右邊ヲ相等シトオケバ

$$-\frac{a(1+\cos\varphi)}{b\sin\varphi}(x+a)=\frac{b\sin\varphi}{a(\cos\varphi-1)}(x-a)$$

∴ $$-\frac{a^2(\cos^2\varphi-1)}{\sin^2\varphi}(x+a)=b^2(x-a)$$

即チ $$\frac{a^2\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}(x+a)=b^2(x-a)$$

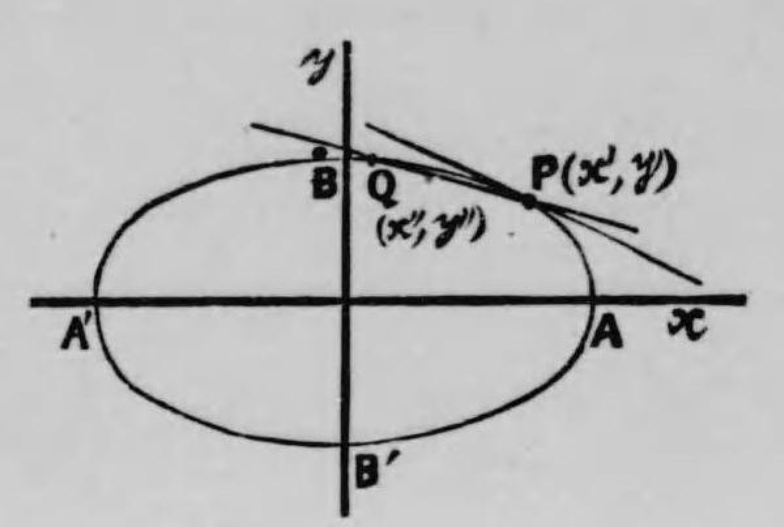
即チ $$a^2(x+a)=b^2(x-a)$$

∴ $$x(a^2-b^2)=-a(a^2+b^2)$$

而シテ是ハ φ ヲ含マザルヲ以テ，是ガ所要ノ軌跡ノ方程式ナリ．
因テ所要ノ軌跡ハ y 軸ニ平行ナル直線ナリ．

第三章　切線及法線

103. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ一點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式



楕圓

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

上ノ二點ヲ P, Q トシ，其坐標ヲ夫々 (x', y'), (x'', y'') トセヨ．

直線 PQ ノ方程式ハ

(2) $$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y''-y'}{x''-x'}$$

然ルニ $$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,\qquad \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1$$

∴ $$\frac{x''^2-x'^2}{a^2}=-\frac{y''^2-y'^2}{b^2}$$

∴ $$\frac{(x''+x')(x''-x')}{a^2}=-\frac{(y''+y')(y''-y')}{b^2}$$

∴ $$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{b^2(x''+x')}{a^2(y''+y')}$$

之ヲ (2) ノ右邊ニ代入スレバ

$$\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x''+x'}{y''+y'}$$

∴ (3) $$\frac{x(x''+x')}{a^2}+\frac{y(y''+y')}{b^2}=\frac{x'(x''+x')}{a^2}+\frac{y'(y''+y')}{b^2}$$

是ガ楕圓 (1) 上ノ二點 (x', y'), (x'', y'') ヲ通ル直線ノ方程式ナリ.

ソコデ Q ヲ限リナク P ニ近ヅケタルトキノ PQ ノ極限ノ位置ノ方程式, 即チ (3) ニ於テ $x''=x'$, $y''=y'$ トオキタル者ハ點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ナリ, 即チ

$$\frac{2xx'}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=\frac{2x'^2}{a^2}+\frac{2y'^2}{b^2}$$

∴ $$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}$$

然ルニ $P(x', y')$ ハ楕圓 (1) 上ノ點ナルヲ以テ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

故ニ所要ノ切線ノ方程式ハ

(4) $$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$$

【注意】 圓ノ切線ノ場合ト同樣ニシテ容易ニ此 (4) ヲ記憶スルコトヲ得ベシ.

系 1. (4) ニ於テ $x'=-a$, $y'=0$ トオケバ

$$-\frac{x}{a}=1 \qquad \therefore \qquad x=-a$$

又 (4) ニ於テ $x'=a$, $y'=0$ トオケバ

$$\frac{x}{a}=1 \qquad \therefore \qquad x=a$$

故ニ長軸ノ兩端 A, A′ ニ於ケル切線ハ何レモ短軸ニ平行ナリ.

又 (4) ニ於テ $x'=0$, $y'=\pm b$ トオケバ

$$y=\pm b$$

ヲ得. 即チ

短軸ノ兩端 B, B′ ニ於ケル切線ハ何レモ長軸ニ平行ナリ.

系 2. 切點ノ離心角ヲ φ トスレバ, $x'=a\cos\varphi$, $y'=b\sin\varphi$

故ニ切線ノ方程式ハ

$$\frac{ax\cos\varphi}{a^2}+\frac{by\sin\varphi}{b^2}=1$$

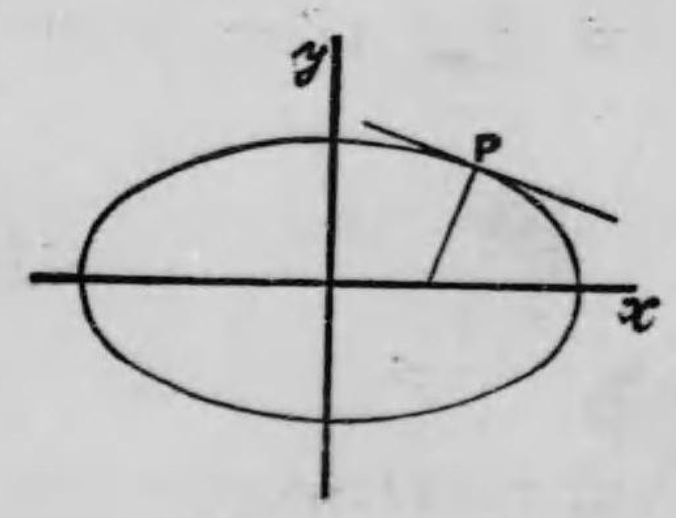
∴ $$\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}=1$$

ナリ.

104. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ點 (x', y') ニ於ケル法線ノ方程式

前節ニヨリ, 點 $P(x', y')$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

(1) $$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$$



從テ切線ノ角係數ハ $\frac{-b^2x'}{a^2y'}$ ナリ.

故ニ P (x', y') ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$$

ナリ.

(2) ハ又次ノ形ニ書クコトヲ得.

$$(2)'\qquad \frac{y-y'}{\frac{a^2}{x'}}=\frac{x-x'}{\frac{b^2}{y'}}$$

$$(2)''\qquad \frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=a^2-b^2$$

系 P ノ離心角ヲ φ トスレバ P ニ於ケル法線ノ方程式ハ (2)″ ニヨリ

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=a^2-b^2$$

ナリ.

105. 前二節ノ公式ヲ應用スル問題ノ例

【例 1】 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ通徑ノ (x 軸ノ上方ニアル) 一端ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 第 103 節ノ公式 (4) ニ於テ $x'=ae,\ y'=\frac{b^2}{a}$ トオケバ所要ノ切線ノ方程式トシテ

$$\frac{ae\,x}{a^2}+\frac{\frac{b^2}{a}}{b^2}=1$$

従テ $$ex+y=a$$

ヲ得. 又前節ノ公式 (2)″ ニ於テ $x'=ae,\ y'=\frac{b^2}{a}$ トオケバ, 所要ノ法線ノ方程式トシテ

$$\frac{a^2x}{ae}-\frac{b^2y}{\frac{b^2}{a}}=a^2-b^2$$

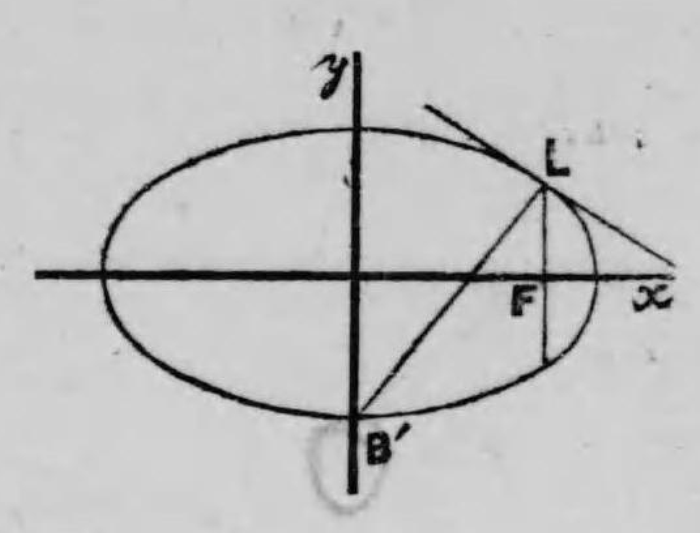
従テ $$\frac{ax}{e}-ay=a^2-b^2$$

$$\therefore\quad x-ey=\frac{e(a^2-b^2)}{a}=\frac{e.a^2e^2}{a}$$

$$\therefore\quad x-ey=ae^3$$

ヲ得.

【例 2】 楕圓ノ通徑ノ一端 L ニ於ケル法線ガ短軸ノ一端 B′ ヲ通ルトキハ其離心率如何.



解 前例ニヨリ $L\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$(1)\qquad x-ey=ae^3$$

ナリ. 此法線ガ點 $B'(0, -b)$ ヲ通ルヲ以テ $x=0,\ y=-b$ ハ (1) ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore\quad eb=ae^3\quad 卽チ\quad e(ae^2-b)=0$$

然ルニ $$e\neq 0\quad\therefore\quad ae^2-b=0$$

$$\therefore\quad e^2=\frac{b}{a}\quad\therefore\quad e^4=\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$$

$$\therefore\quad e^4+e^2-1=0$$

然ルニ $$e^2>0\quad\therefore\quad e^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\quad e=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

【例 3】 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ一點ニ於ケル切線ガ x 軸及 y 軸上ニ生ズル截部ガ a, b ニ比例ストイフ, 其點ノ坐標ヲ求メヨ.

解 所要ノ點ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ其點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$$

ソコデ $y=0$ トオケバ $\qquad x=\dfrac{a^2}{x'}$

ヲ得, 是レ x 軸上ノ截部ノ長サナリ.

又 $x=0$ トオケバ $\qquad y=\dfrac{b^2}{y'}$

ヲ得, 是レ y 軸上ノ截部ノ長サナリ.

故ニ題意ニヨリ $\qquad \dfrac{a^2}{x'}:\dfrac{b^2}{y'}=a:b$

$\therefore \qquad (1) \qquad ay'=bx'$

然ルニ $\qquad (2) \qquad \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$

故ニ (1) 及 (2) ヨリ

$$x'=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y'=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$$

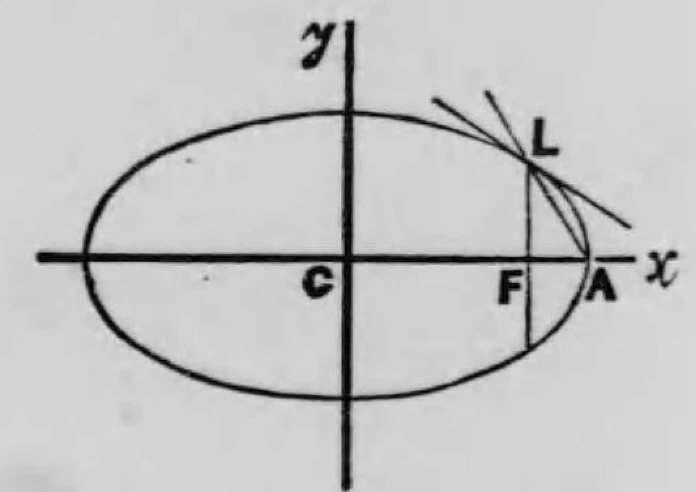
【例 4】 次ノ圖ニ於ケル直線 AL ノ方程式ヲ求メ, 且ツ此直線ト L ニ於ケル切線トガナス角ヲ決定セヨ.

解 $\quad A(a, 0), \quad L\left(ae, \dfrac{b^2}{a}\right)$

故ニ直線 AL ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x-a}=\frac{\dfrac{b^2}{a}}{ae-a}=\frac{b^2}{a^2(e-1)}$$

$$=\frac{a^2(1-e^2)}{a^2(e-1)}=-(1+e)$$



$\therefore \qquad (1) \qquad y=-(1+e)(x-a)$

又 L ニ於ケル切線ノ方程式ハ, 例 1 ニヨリ

$(2) \qquad ex+y=a$

ソコデ (1), (2) ガナス角ヲ μ トスレバ

$$\tan\mu=\frac{-e-[-(1+e)]}{1+(-e)[-(1+e)]}=\frac{1+e-e}{1+e(1+e)}=\frac{1}{1+e+e^2}$$

【例 5】 楕圓上ノ一點 P ノ縱線 MP ノ延長ト通徑ノ一端 L ニ於ケル切線トノ交點ヲ Q トシ, 焦點ト P トヲ結ビ付クレバ MQ=PF ナリ.

證明 $P(x', y')$, $Q(x', y'')$ トスレバ, L ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$(1) \qquad ex+y=a$

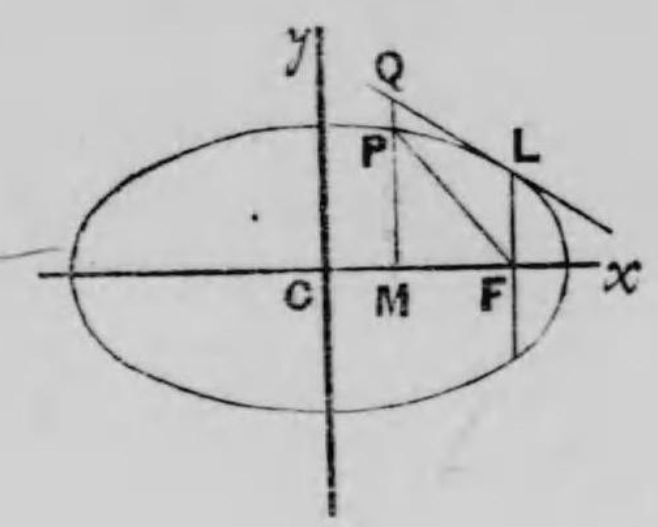
然ルニ點 Q ハ (1) 上ノ點ナルヲ以テ

$$ex'+y''=a$$

$\therefore \qquad y''=MQ=a-ex'$

然ルニ $\qquad FP=a-ex' \qquad$ [第 95 節]

$\therefore \qquad MQ=FP$



【例 6】 同一ノ長軸ヲ有スル數多ノ楕圓ノ通徑ノ端ニ於ケル切線ハ二定點中ノ一ツヲ通ル.

證明 此等ノ楕圓ノ中ノ任意ノ一ツニ付テ考フレバ, 通徑ノ端ニ於ケル切線ハ都合四ツアリ, 而シテ其方程式ハ夫々

(1) $\quad ex+y=a \quad$ (L ニ於ケル切線)

(2) $\quad ex-y=a \quad$ (L′ ニ於ケル切線)

(3) $\quad -ex+y=a \quad$ (L″ ニ於ケル切線)

(4) $\quad -ex-y=a \quad$ (L‴ ニ於ケル切線)

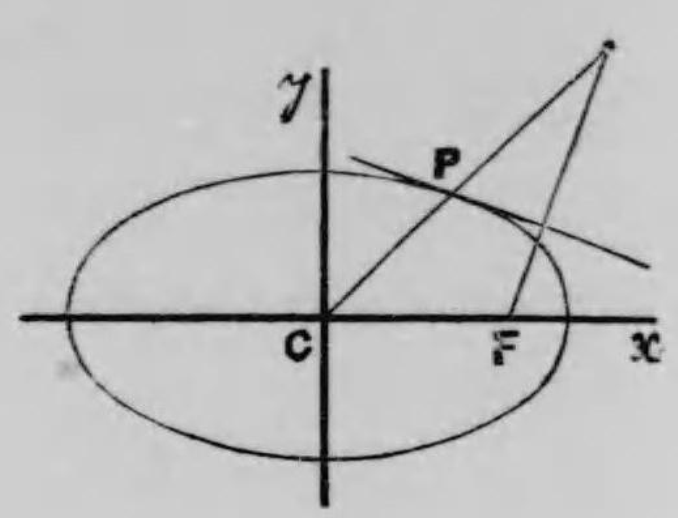
ナリ. ココニ e ハ楕圓ニヨリ夫々異ナル値ヲ取ル變常數ニシテ, a ハ定マレル値ヲ有ス.

然ルニ e ノ値如何ニ拘ラズ (1) 及 (3) ハ何レモ $x=0, y=a$ ニヨリテ滿足セラルルヲ以テ, (1) ト (3) トハ定點 $(0, a)$ ヲ通ル. 同様ニ (2) ト (4) トハ定點 $(0, -a)$ ヲ通ル.

【例 7】 楕圓ノ任意ノ切線ヘ焦點 F ヨリ下シタル垂線ト切點 P ト中心 C トヲ通ル直線 CP トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 點 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ.

P ニ於ケル切線ノ方程式ハ



(1) $$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$$

故ニ F ヨリ (1) ニ下シタル垂線ノ方程式ハ

(2) $$y=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-ae)$$

又直線 CP ノ方程式ハ

(3) $$y=\frac{y'}{x'}x$$

ソコデ (2) ト (3) トヨリ x', y' ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ. 卽チ

(2)÷(3) $$1=\frac{a^2}{b^2}\times\frac{x-ae}{x}$$

$$\therefore \quad b^2x=a^2x-a^3e$$

$$\therefore \quad x=\frac{a^3e}{a^2-b^2}=\frac{a^3e}{a^2e^2}=\frac{a}{e}$$

故ニ所要ノ軌跡ハ F ニ對應スル準線ナリ.

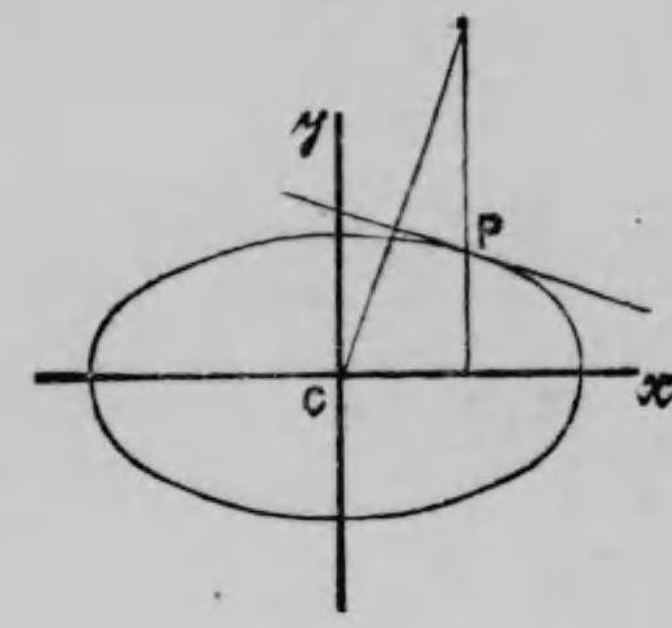
【例 8】 楕圓上ノ任意ノ點 P ノ縱線ノ延長ト, 其點ニ於ケル切線ヘ中心 C ヨリ下セル垂線トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 點 P ノ離心角ヲ φ トセヨ. サスレバ P ノ坐標ハ $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ ナリ.

P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

(1) $$\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}=1$$

中心 C (0, 0) ヨリ (1) ニ下シタル垂線ノ方程式ハ



(2) $$\frac{x\sin\varphi}{b}-\frac{y\cos\varphi}{a}=0$$

此 (2) ト P ノ縱線ノ方程式

(3) $$x=a\cos\varphi$$

トヨリ φ ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得.

先ヅ (3) ヨリ $$\cos\varphi=\frac{x}{a}$$

之ヲ (2) ニ代入シテ $$\sin\varphi=\frac{by}{a^2}$$

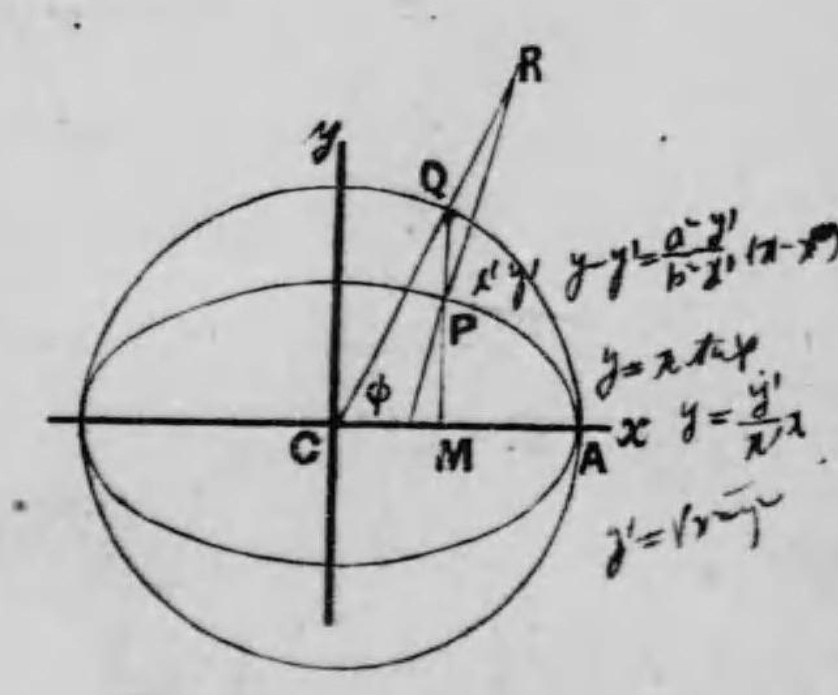
$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}=1$$

故ニ所要ノ軌跡ハ楕圓ナリ.

【例 9】 楕圓ノ任意ノ縱線 MP ノ延長ト補助圓トノ交點ヲ Q トセヨ; P ニ於ケル楕圓ノ法線ト, Q ニ於ケル補助圓ノ法線トノ交點 R ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 點 P ノ離心角ヲ φ トスレバ, P ニ於ケル楕圓ノ法線ノ方程式ハ



(1) $$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=a^2-b^2 \text{ [前節系]}$$

又 Q ニ於ケル補助圓ノ法線ノ方程式ハ

(2) $$y=x\tan\varphi$$

ナリ. (1) ト (2) トヲ聯立方程式トシテ解ケバ R ノ坐標トシテ

$$x=(a+b)\cos\varphi,\qquad y=(a+b)\sin\varphi$$

ヲ得. 從テ

$$x^2+y^2=(a+b)^2$$

トナル. 即チ所要ノ軌跡ハ中心ガ C ニシテ半徑ガ $a+b$ ナル圓ナリ.

106. 角係數 m ガ與ヘラレタルトキノ切線ノ方程式

$$(1)\qquad y=mx+c$$

ヲ楕圓

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ切線ナリトセヨ.

(2) ニ於テ $y=mx+c$ ト置換フレバ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

$$\therefore\quad (3)\quad (a^2m^2+b^2)x^2+2mca^2x+a^2(c^2-b^2)=0$$

サテ (1) ガ (2) ニ切スル爲ニハ, x ニ付テノ二次方程式 (3) ハ等根ヲ有セザルベカラズ.

$$\therefore\quad m^2c^2a^4=(a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{c^2=a^2m^2+b^2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{c=\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}}$$

故ニ方向(從テ m)ガ與ヘラレタル切線ハ二ツアリ, 其方程式ハ次ノ如シ.

$$(4)\qquad \boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}}$$

【例】 楕圓 $3x^2+y^2=3$ ノ切線ガ x 軸ト 45° ノ角ヲナストキ, 其切線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 $3x^2+y^2=3$ ヲ書替ヘテ $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ トナセバ $a^2=1,\ b^2=3$ ナルコトヲ知ル.

ソコデ上ノ公式 (4) ニ於テ $m=\tan 45°=1,\ a^2=1,\ b^2=3$ トオケバ所要ノ互ニ平行ナル二切線ノ方程式ヲ得, 即チ

$$y=x+2\qquad 及ビ\qquad y=x-2$$

107. 定點 $(x',\ y')$ ヨリ楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ引キタル切線ノ方程式

任意ノ切線ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

ナリ. 此切線ガ定點 $(x',\ y')$ ヲ通ルトスレバ, $x=x',\ y=y'$ ハ (1) ニ適合セザルベカラズ, 即チ

$$y'=mx'+\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

從テ

$$(y'-mx')^2=m^2a^2+b^2$$

$$\therefore\quad (2)\quad (x'^2-a^2)m^2-2x'y'm+y'^2-b^2=0$$

是ハ m ニ付テノ二次方程式ニシテ二ツノ根ヲ有ス. 故ニ一般ニハ $(x',\ y')$ ヨリ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得.

今 (2) ノ二根ヲ m_1, m_2 トスレバ, 此二ツノ切線ノ方程式ハ夫々

$$y-y'=m_1(x-x')\qquad 及\qquad y-y'=m_2(x-x')$$

ナリ.

【注意】 二次方程式 (2) 卽チ

$$(x'^2-a^2)m^2-2x'y'm+y'^2-b^2=0$$

ハ

$$x'^2y'^2-(x'^2-a^2)(y'^2-b^2)>0$$

卽チ

$$b^2x'^2+a^2y'^2-a^2b^2>0$$

從テ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1>0$$

ナルトキ，卽チ (x', y') ガ楕圓ノ外ニアルトキハ相異ナル二ツノ實根ヲ有ス，故ニ (x', y') ヨリ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得.

$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0$ ナルトキ，卽チ (x', y') ガ楕圓上ニアルトキハ，上ノ二次方程式ハ唯一ツノ實根ヲ有ス，故ニ (x', y') ヨリ唯一ツノ切線ヲ引クコトヲ得.

$\frac{x'^2}{a}+\frac{y'^2}{b^2}-1<0$ ナルトキ，卽チ (x', y') ガ楕圓ノ内ニアルトキハ上ノ二次方程式ハ虛根ヲ有ス，卽チ (x', y') ヨリ切線ヲ引クコトヲ得ズ.

108. 前二節ノ應用ノ例

【例 1】 楕圓ノ切線ガ長軸ト φ ナル角ヲナストキ，此切線ト兩軸トニテ成ス三角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}(a^2\tan\varphi+b^2\cot\varphi)$ ナリ.

證明 切線ノ方程式ヲ

(1) $$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

トセヨ．ココニ $m=\tan\varphi$

(1) ニ於テ $y=0$ トオケバ

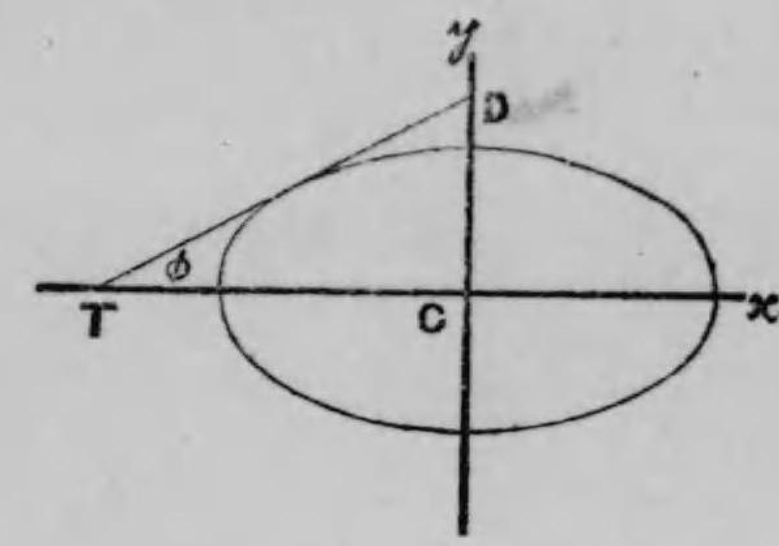
$$x=\mathrm{CT}=-\frac{\sqrt{m^2a^2+b^2}}{m}$$

又 (1) ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$\mathrm{Y}=\mathrm{CD}=\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{CDT}=\frac{1}{2}.\mathrm{CT}.\mathrm{CD}=\frac{m^2a^2+b^2}{2m}$$

$$=\frac{1}{2}\left(ma^2+\frac{1}{m}b^2\right)=\frac{1}{2}(a^2\tan\varphi+b^2\cot\varphi)$$



【例 2】 楕圓ノ長軸ト φ ナル角ヲナス切線ト中心トノ間ノ距離ハ $a(1-e^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$ ナリ.

證明 此切線ノ方程式ヲ

(1) $y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}$

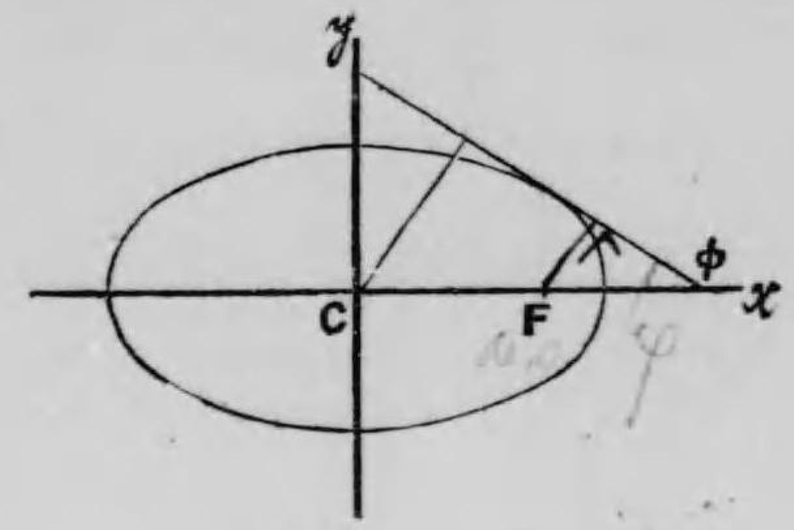
トセヨ．ココニ $m=\tan\varphi$

故ニ中心 C ヨリ (1) ニ下シタル垂線ノ長サハ

$$\frac{\sqrt{m^2a^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{\frac{a^2\tan^2\varphi+a^2(1-e^2)}{1+\tan^2\varphi}}$$

$$=a\sqrt{\frac{\sec^2\varphi-e^2}{\sec^2\varphi}}$$

$$=a\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}$$



【例 3】 前問題ニ於ケル切線ト焦點 F トノ間ノ距離ハ

$$a\left\{e\sin\varphi+(1-e^2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

ナリ.

證明 F ノ坐標ハ $(ae, 0)$ ナルヲ以テ，所要ノ距離ハ

$$\frac{mae+\sqrt{m^2a^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{ae\tan\varphi}{\sec\varphi}+\frac{\sqrt{m^2a^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

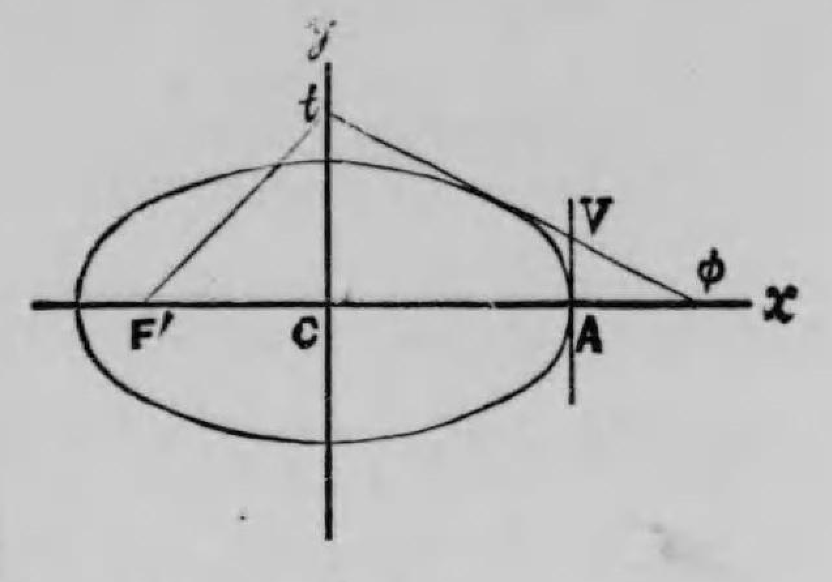
$$=ae\sin\varphi+a\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}=a\{e\sin\varphi+\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\}$$

【例 4】 楕圓ノ任意ノ切線ガ A ニ於ケル切線ト V ニ於テ交リ，且ツ短軸ト t ニ於テ交レバ $tV=tF'$ ナリ.

證明 切線ノ方程式ヲ

(1) $y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}$

$[m=\tan\varphi]$



トセヨ. (1) ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$y=Ct=\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad F't=\sqrt{F'C^2+Ct^2}=\sqrt{a^2e^2+m^2a^2+b^2}$$

$$=\sqrt{a^2e^2+m^2a^2+a^2(1-e^2)}=a\sqrt{1+m^2}$$

$$Vt=CA\sec(180^\circ-\varphi)=CA\sqrt{1+\tan^2\varphi}=a\sqrt{1+m^2}$$

$$\therefore \quad tV=tF'$$

【例 5】 直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ガ楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ切線ナルベキ爲ノ條件ヲ求メヨ.

解 直線ノ方程式ヲ書キ變フレバ

(1) $$y=x(-\cot\alpha)+\frac{p}{\sin\alpha}$$

是ガ切線ノ公式

(2) $$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

ニテ表ハサルルモノト同一ノ直線ヲ示ス爲ニハ

$$m=-\cot\alpha,\qquad \frac{p}{\sin\alpha}=\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{p^2}{\sin^2\alpha}=m^2a^2+b^2=a^2\cot^2\alpha+b^2$$

$$\therefore \quad p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha$$

是レ所要ノ條件ナリ.

【例 6】 中心及兩軸ノ方向ヲ共有スル二ツノ楕圓アリ，而シテ兩軸ノ長サノ平方ノ和ハ各楕圓ニ付テ同一ナリトイフ. 此二ツノ楕圓ノ共通切線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 一ツノ楕圓ノ兩軸ノ長サノ半分ヲ a, b トシ，今一ツノ楕圓ノヲ c, d トセヨ.

サスレバ第一楕圓ノ切線ノ方程式ハ

(1) $$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

ナル形ヲ有シ，第二ノ楕圓ノハ

(2) $$y=mx\pm\sqrt{m^2c^2+d^2}$$

ナル形ヲ有ス. 若シ此等ガ所要ノ共通切線ヲ表ハスナラバ，(1) ト (2) トハ恒等ナラザルベカラズ. 卽チ

$$m^2a^2+b^2=m^2c^2+d^2$$

從テ $$m^2=\frac{d^2-b^2}{a^2-c^2}$$

ナラザルベカラズ.

然ルニ假設ニヨリ $$a^2+b^2=c^2+d^2$$

從テ $$a^2-c^2=d^2-b^2$$

$$\therefore \quad m^2=1$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ所要ノ共通切線ノ方程式ヲ得，卽チ

$$y=\pm x\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

【例 7】 楕圓ノ焦點ヨリ切線ヘ下シタル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 任意ノ切線ノ方程式ヲ

(1) $$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

トセヨ. 焦點 F$(ae, 0)$ ヲ通リ (1) ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$y=-\frac{1}{m}(x-ae)$$

卽チ　(2)　$my+x=ae$

ナリ．ソコデ (1) 及 (2) ヨリ m ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ

卽チ

(1) ヨリ　$(y-mx)^2=m^2a^2+b^2$

卽チ　(3)　$y^2-2mxy+m^2x^2=m^2a^2+b^2$

又 (2) ヨリ

(4)　$m^2y^2+2mxy+x^2=a^2e^2$

(3) ト (4) トヲ邊々相加フレバ

$$y^2(1+m^2)+x^2(m^2+1)=m^2a^2+b^2+a^2e^2$$
$$=m^2a^2+a^2(1-e^2)+a^2e^2=a^2(m^2+1)$$

$$\therefore\qquad x^2+y^2=a^2$$

故ニ所要ノ軌跡ハ補助圓ナリ．

【例8】 互ニ垂直ナル二ツノ切線ヲ楕圓ニ引キ得ベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ．

解　軌跡上ノ一點ヲ (x',y') トスレバ，此點ヨリ引キタル二切線ノ角係數ハ，m ニ關スル次ノ二次方程式

$$(x'^2-a^2)m^2-2x'y'm+y'^2-b^2=0$$

ノ根ナリ．[前節 (2)]

今此二根ヲ m_1, m_2 トスレバ

$$m_1m_2=\frac{y'^2-b^2}{x'^2-a^2}$$

然ルニ二切線ハ互ニ垂直ナルヲ以テ

$$m_1m_2=-1\qquad\therefore\qquad\frac{y'^2-b^2}{x'^2-a^2}=-1$$

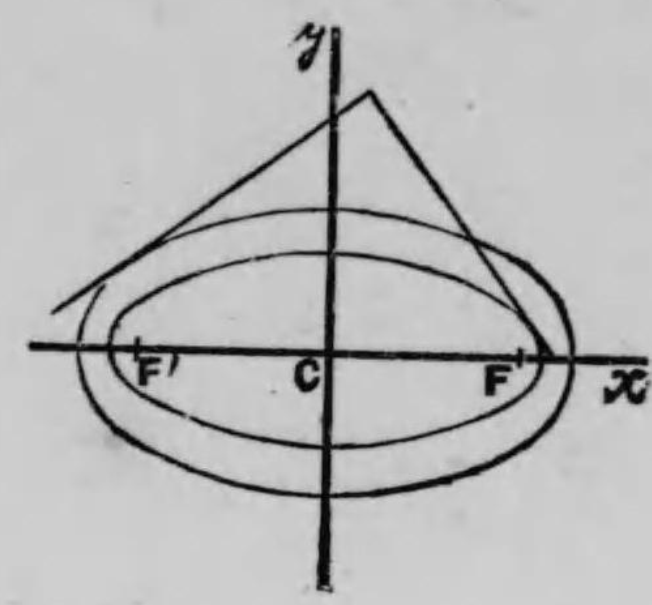
$$\therefore\qquad x'^2+y'^2=a^2+b^2$$

卽チ所要ノ軌跡ハ楕圓ノ中心 C ヲ中心トシ，半徑ガ $\sqrt{a^2+b^2}$ ナル圓ナリ．

【注意】 此圓ノコトヲ楕圓ノ準圓トイフ．

【例9】 直角ノ二邊ガ一ツ宛同焦點ヲ有スル二ツノ楕圓ノ各ニ切スルトキ，其頂點ノ軌跡ハ此二ツノ楕圓ト同ジ中心ヲ有スル圓ナリ．

證明　二ツノ楕圓ノ方程式ヲ夫々



(1)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(2)　$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$

トセヨ．而シテ此二ツノ楕圓ハ同ジ焦點ヲ有スルヲ以テ

(3)　$a^2-b^2=\alpha^2-\beta^2\;[=CF^2]$

ナリ．サテ直角ノ一邊ハ (1) ニ切スルヲ以テ，其方程式ハ

(4)　$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}$

今一ツノ邊ハ (2) ニ切スルヲ以テ，其方程式ハ

(5)　$y=m'x+\sqrt{m'^2\alpha^2+\beta^2}$

然ルニ　(6)　$mm'=-1$

ソコデ (4), (5), (6) ヨリ m, m' ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ，

卽チ (6) ニヨリテ $m'=-\dfrac{1}{m}$ ヲ (5) ニ代入スレバ

$$y=-\frac{x}{m}+\frac{1}{m}\sqrt{\alpha^2+m^2\beta^2}$$

從テ　(5)′　$(my+x)^2=\alpha^2+m^2\beta^2$

又 (4) ヨリ　(4)′　$(y-mx)^2=m^2a^2+b^2$

(5)′+(4)′　$(1+m^2)y^2+(1+m^2)x^2=(\alpha^2+b^2)+m^2(a^2+\beta^2)$

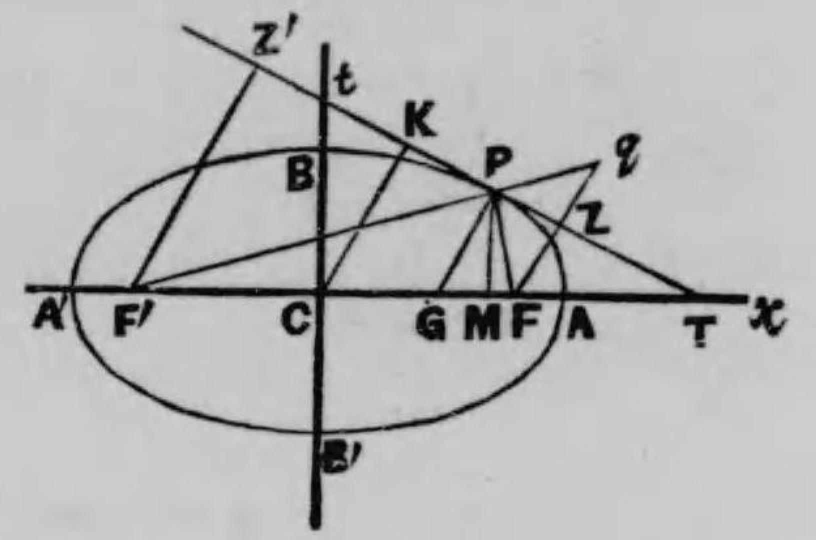
然ルニ (3) ヨリ　$a^2+\beta^2=\alpha^2+b^2$

$$\therefore\qquad(1+m^2)(x^2+y^2)=(\alpha^2+b^2)(1+m^2)$$

$$\therefore\qquad x^2+y^2=\alpha^2+b^2$$

故ニ所要ノ軌跡ハ原點ヲ中心トスル圓ナリ．

109. 楕圓ノ主要ナル幾何學的ノ性質



楕圓上ノ任意ノ點 P ニ於ケル切線ガ兩軸ニ交ル點ヲ夫々T, t トシ, 又 P ニ於ケル法線ガ長軸ト交ル點ヲ G トセヨ.

楕圓ノ方程式ヲ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ トシ P ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ, P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$$

ナリ. ソコデ x 軸上ニ於ケル其截部ヲ得ルタメニ, $y=0$ トオケ.

サスレバ　　$x'x=a^2$

卽チ　(1)　$CM.CT=CA^2$

同樣ニシテ　(2)　$MP.Ct=CB^2$

又 P ニ於ケル法線ノ方程式

$$\frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=a^2-b^2$$

ニ於テ $y=0$ トオケバ, x 軸上ニ於ケル其截部ハ

$$x=\frac{(a^2-b^2)x'}{a^2}=e^2x'$$

卽チ　(3)　$CG=e^2.CM$

$$\therefore \quad GF=CF-CG=ae-e^2x'=e(a-ex')=e.FP$$

又　$$F'G=F'C+CG=ae+e^2x'=e(a+ex')=e.F'P$$

$$\therefore \quad \frac{FG}{F'G}=\frac{FP}{F'P}$$

故ニ PG ハ ∠FPF' ヲ二等分ス. 從テ

(4)　法線ハ二ツノ焦點動徑ノ間ノ角ヲ二等分シ, 切線ハ其補角ヲ二等分ス.

P ノ坐標ハ (x', y') ニシテ, G ノ坐標ハ $(e^2x', 0)$ ナルヲ以テ

$$PG^2=(x'-e^2x')^2+y'^2$$
$$=x'^2(1-e^2)^2+y'^2=\frac{x'^2b^4}{a^4}+y'^2$$

$$\therefore \quad PG=b^2\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}$$

又中心 C ヨリ切線ニ下シタル垂線ヲ CK トスレバ, CK ハ原點 $(0, 0)$ ヨリ切線 $\dfrac{x'x}{a^2}+\dfrac{y'y}{b^2}=1$ ノ上ニ下シタル垂線ノ長サナルヲ以テ

$$CK=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x'^2}{a^4}+\dfrac{y'^2}{b^4}}}$$

∴　(5)　$PG.CK=b^2=CB^2$

次ニ FZ, F'Z' ヲ夫々焦點 F, F' ヨリ切線ニ下シタル垂線トシ, FZ 及 F'P ノ延長ノ交點ヲ q トセヨ. サスレバ (4)

及幾何學ノ定理ニヨリ

$$\triangle \mathrm{PFZ} \equiv \triangle \mathrm{P}q\mathrm{Z}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{FZ}=q\mathrm{Z} \qquad 及 \qquad \mathrm{PF}=\mathrm{P}q$$

$$\therefore \qquad \mathrm{F}'q=\mathrm{F}'\mathrm{P}+\mathrm{PF}=2a$$

又 C 及 Z ハ夫々 FF′ 及 Fq ノ中點ナリ.

$$\therefore \qquad \mathrm{CZ}=\frac{1}{2}\mathrm{F}'q=a$$

故ニ

(6) 焦點ヨリ切線ニ下シタル垂線ノ足ハ補助圓周上ニ在リ.

[此事ノ解析的證明ハ前節例 7 ノ解ヲ參考スベシ.]

次ニ P ノ離心角ヲ φ トスレバ, P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1$$

ナリ. 而シテ F$(ae,\ 0)$, F′$(-ae,\ 0)$ ナルヲ以テ

$$\mathrm{FZ}=\frac{1-e\cos\varphi}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}}}, \quad \mathrm{F'Z'}=\frac{1+e\cos\varphi}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}}}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{FZ}\,.\,\mathrm{F'Z'}=\frac{1-e^2\cos^2\varphi}{\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}}$$

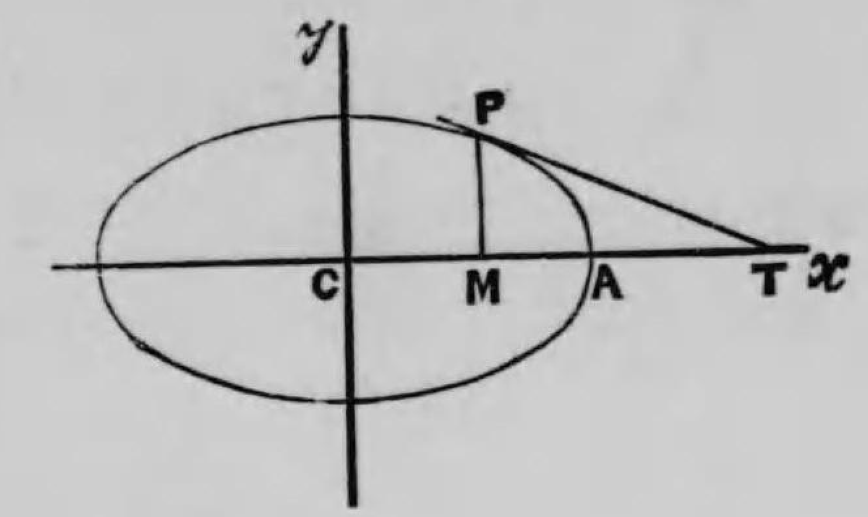
サテ $$1-e^2\cos^2\varphi=1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2\varphi=\sin^2\varphi+\frac{b^2}{a^2}\cos^2\varphi$$

$$=b^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)$$

$$\therefore \qquad (7) \qquad \mathrm{FZ.F'Z'}=b^2=\mathrm{CB}^2$$

110. 幾何學的性質ヲ應用スル例

【例 1】 長軸ヲ共有スル任意ノ箇數ノ楕圓ノ相對應スル點(卽チ同ジ横坐標ヲ有スル點)ニ於ケル切線ハ長軸ノ延長上ニ於ケル同一點ヲ通ル.



證明 斯様ナル楕圓ノ中ノ任意ノ一ツノ上ノ點 P ニ於ケル切線ト長軸ノ延長トノ交點ヲ T トシ, P ノ横坐標 CM ヲ x' トスレバ

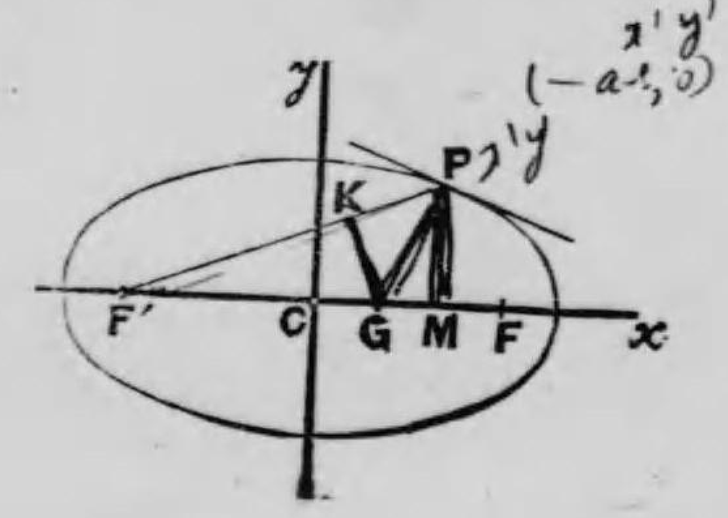
$$\mathrm{CM.CT}=\mathrm{CA}^2 \quad [前節(1)]$$

卽チ $\quad x'.\mathrm{CT}=a^2$

$$\therefore \qquad \mathrm{CT}=\frac{a^2}{x'}$$

然ルニ a 及 x' ハスベテノ楕圓ニ付テ不易ナルヲ以テ CT ノ長サハ不易ナリ.
故ニ問題ニ於ケルスベテノ切線ハ定點 T ヲ通ル.

【例 2】 楕圓上ノ點 P ニ於ケル法線ト長軸トノ交點ヲ G トシ, G ヨリ直線 F′P ヘ下シタル垂線ノ足ヲ K トセヨ. サスレバ GK$=e$.MP ナリ. ココニ MP ハ P ノ縱線, F′ ハ一ツノ焦點ナリ.



證明 P ノ坐標ヲ $(x',\ y')$ トセヨ.
サスレバ G ノ坐標ハ $(e^2x',\ 0)$ ナリ.
[前節 (3)]

F′P ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x+ae}=\frac{y'}{x'+ae}$$

$$\therefore \quad (x'+ae)y=y'(x+ae)$$

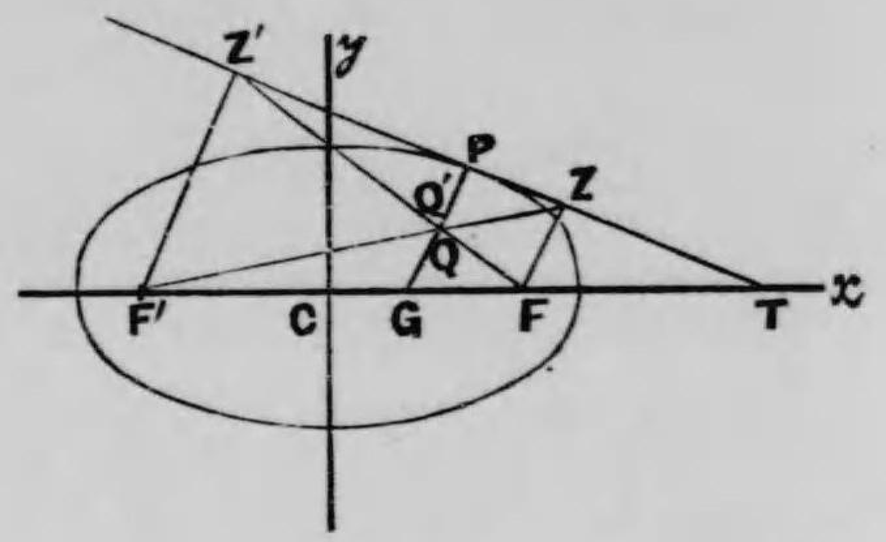
$$\therefore \quad GK=\frac{y'(e^2x'+ae)}{\sqrt{y'^2+(x'+ae)^2}}=\frac{y'e(ex'+a)}{\sqrt{y'^2+(x'+ae)^2}}$$

然ルニ $\qquad ex'+a=F'P$

又 $\quad \sqrt{y'^2+(x'+ae)^2}=\sqrt{MP^2+(CM+F'C)^2}=\sqrt{MP^2+F'M^2}=F'P$

$$\therefore \quad GK=y'e=e.MP$$

【例3】 橢圓ノ二焦點 F, F′ ヨリ, 橢圓上ノ點 P ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ足ヲ夫々 Z, Z′ トセヨ. サスレバ二ツノ線分 FZ′, F′Z ハ P ニ於ケル法線 PG ノ上ニ於テ相交ル.



證明 Pノ坐標ヲ (x', y') トシ, F′Z 及 FZ′ ガ法線 PG ト交ル點ヲ夫々 Q, Q′ トセヨ. サスレバ

$$\frac{GQ}{FZ}=\frac{F'G}{F'F}=\frac{ae+e^2x'}{2ae}$$

$$=\frac{a+ex'}{2a}$$

同樣ニ $\qquad \frac{GQ'}{F'Z'}=\frac{a-ex'}{2a}$

$$\therefore \quad (1) \quad \frac{GQ}{GQ'}\times\frac{F'Z'}{FZ}=\frac{a+ex'}{a-ex'}$$

P ニ於ケル切線ト x 軸トノ交點ヲ T トスレバ

$$\frac{F'Z'}{FZ}=\frac{F'T}{FT}=\frac{\frac{a^2}{x'}+ae}{\frac{a^2}{x'}-ae}=\frac{a+ex'}{a-ex'}$$

故ニ (1) ヨリ $\qquad GQ=GQ'$

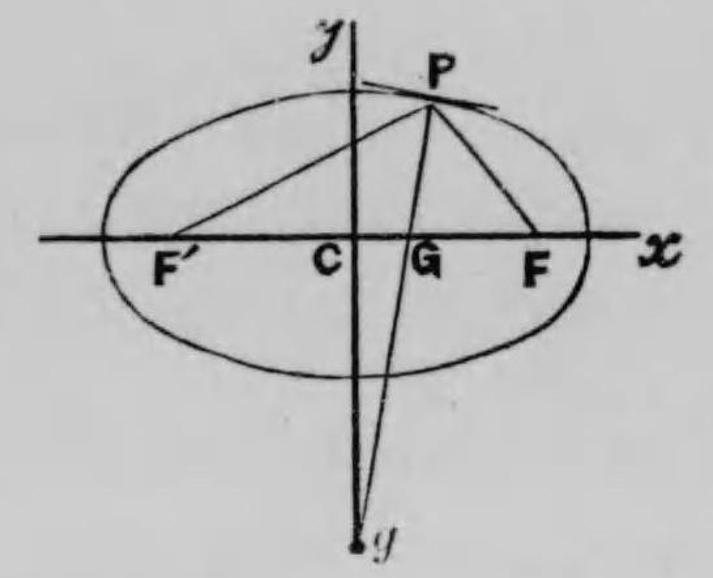
卽チ Q ト Q′ トハ相合ス.

【例4】 橢圓上ノ點 P ニ於ケル法線ガ兩軸ト交ル點ヲ夫

々 G, g トスレバ PG.Pg=FP.F′P ナリ.

證明 P ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ.

サスレバ法線ノ方程式ハ



$$(1) \quad \frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=a^2-b^2$$

$$\therefore \quad G\left[\frac{(a^2-b^2)x'}{a^2}, \ 0\right]$$

$$g\left[0, \ -\frac{(a^2-b^2)y'}{b^2}\right]$$

$$\therefore \quad PG=\sqrt{\left(x'-\frac{a^2-b^2}{a^2}x'\right)^2+y'^2}=\sqrt{\frac{b^4x'^2}{a^4}+y'^2}=b^2\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}$$

$$Pg=\sqrt{x'^2+\left(y'+\frac{a^2-b^2}{b^2}y'\right)^2}=\sqrt{x'^2+\frac{a^4y'^2}{b^4}}=a^2\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}$$

$$\therefore \quad (2) \quad PG.Pg=a^2b^2\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right)=\frac{b^2x'^2}{a^2}+\frac{a^2y'^2}{b^2}$$

然ルニ $\qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \therefore \quad \frac{a^2y'^2}{b^2}=a^2-x'^2$

之ヲ (2) ノ右邊ニ代入スレバ

$$PG.Pg=\frac{b^2x'^2}{a^2}+a^2-x'^2=a^2-\frac{(a^2-b^2)x'^2}{a^2}$$

$$=a^2-e^2x'^2=(a+ex')(a-ex')$$

$$=F'P.FP$$

【注意】 △F′PF ノ外接圓ヲ畫ケバ Cg ガ弦 F′F ノ垂直二等分線ナルコトト, Pg ガ ∠F′PF ノ二等分線ナルコトトヨリ, 此外接圓ガ g ヲ通ルコトヲ知ル. 因テ容易ニ

$$\triangle PF'g \backsim \triangle PGF$$

$$\therefore \quad PF':Pg=PG:PF \qquad \therefore \quad PG.Pg=PF'.PF$$

【例5】 橢圓ノ中心 C ヲ通リ, 橢圓上ノ點 P ニ於ケル切線ニ平行ニ引キタル直線ガ, 二ツノ焦點 F, F′ ノ各ト P ト