拋物線·橢圓·雙曲線

之

幾何學的討論

黃　泰　譯

正　中　書　局　印　行

拋物線·橢圓·雙曲線

之

幾何學的討論

黃　泰　譯

正　中　書　局　印　行

中華民國二十六年三月初版
中華民國三十六年十一月滬一版

拋物線橢圓雙曲線
之
幾何學的討論

全一冊　定價國幣五元
（外埠酌加運費匯費）

原著者	Robert Wm. Griffin
譯者	黃　泰
發行人	吳秉常
印刷所	正中書局
發行所	正中書局

（578）

奎(奎)(林)　1/1

譯 序

圓錐曲線之幾何討論專書,在國內出版界,固未之見,卽西文本中,亦不多覯;求其自成體系,論證詳明,便利初學者,尤屬難得!Griffin教授所著之 The Parabola, Ellipse, and Hyperbola Treated Geometrically 一書,排列有序,理法詳明,學者祇須具有普通幾何基礎,卽能暢讀此書.余讀之久,而愛之深,久思迻譯,以餉國人,良以是書不但可供大學幾何科教本,亦可爲大中學學生及一般學者之參考用書.今年夏,得任孟閑先生之督促,乃速其成.既脫稿,謹誌數語,以弁其端:

(一) 原書未列節目,譯本分立節目,以便查考.

(二) 原書定義多集一處,譯本則散佈書中,需要時預爲序述,意義較顯.

(三) 原書理解已至詳盡,間有少數費解之處,譯本均加釋註,以便讀者.

(四) 原書有少數重要性質,列推論中者,譯本則排入命題中,以示重要.

(五) 譯者深懼淺陋,有失原著之美,尚希閱者指正.

二十四年冬月,黃黍.

原　序（節譯）

余長期經驗知一般學子，關於拋物線，橢圓，雙曲線之基本幾何性質，於實際方面，確有甚大之助益與需要．本書之作，在使讀者祇須有普通幾何基礎，卽能暢讀此書，不必須解析方面所需要之準備與學力也．

關於此類曲線之每一有用性質，書中均成立命題，而以嚴格幾何方式證明之；其證法及記號，一按普通幾何之線索及體系，使讀者讀之有味，並減少其困難．

關於直徑及配徑之性質，本書所論，均較他著爲詳．

Robert WM. Griffin.

目 次

第一篇

拋物線

1. **定義** 一動點與一定點之距離,等於此動點與一定直線之距離,此動點之軌跡,稱爲**拋物線**.

此定點稱爲**焦點**(Focus),定直線稱爲**準線**(Directrix).

2. **定義** 過焦點,垂直於準線之直線,稱爲**拋物線軸**.拋物線軸與曲線之交點,稱爲**頂點**(Vertex).

依定義,拋物線頂點應爲焦點與準線之距離的中點.

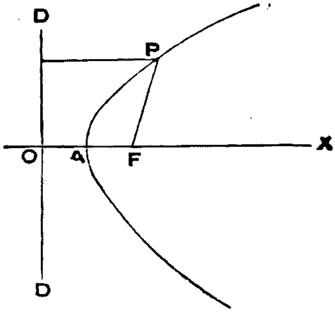

圖 1

3. **定義** 任一直線爲拋物線截取之線分,稱爲**弦**(Chord).過焦點之弦,稱爲**焦點弦**(Focal chord).與拋物線軸垂直之焦點弦,稱爲**正焦點弦**(Latus rectum).

命題一

4. 已知焦點及準線,試決定拋物線上任意若干點.

設 F 爲焦點, Oy 爲準線. 作 $FO \perp Oy$, 則 OF 爲軸, OF 之中點 A 爲拋物線頂點.

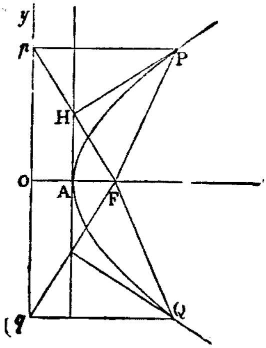

圖 2

在準線上任取一點 p; 連 Fp; 作 $AH \perp FO$; 過 H, 作 $HP \perp Fp$, 遇垂直準線於 p 點之垂線 pP 於 P, 連 PF.

則 $$\triangle FHP = \triangle pHP,$$

$$\therefore \quad PF = Pp.$$

故 P 爲曲線上之一點. 同理, 連焦點與準線上之任一點, 則曲線上的任意若干點均可按上法決定之.

5. 推論一 若在準線上截取 $Oq = Op$, 則依上法在軸的下方, 也能決定一點 Q, 此 P, Q 兩點與軸等距離, 且與準線等距離, 故知拋物線必對稱於其軸.

6. 推論二 由 $Pp = Qq$;

$$\therefore \quad FP = FQ, \quad \angle OFP = \angle OFQ;$$

故從焦點至曲線作與拋物線軸夾等角之線分必相等.

7. 推論三 拋物線內正焦點弦之長, 等於焦點與頂點距離之四倍.

作正焦點弦 PP'; 並作 Pp 垂直於準線.

則 $$PP' = 2\,PF = 2\,pP, \qquad \text{(推論二)}$$

$$= 2\,FO = 4\,FA. \qquad \text{Q. E. D}$$

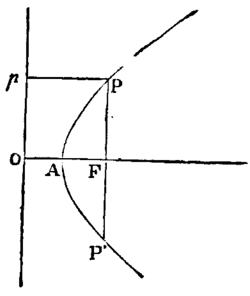

圖 3

8. **推論四**　在拋物線上任一點P及頂點A之間,任作一直線與拋物線軸平行,則此線爲準線及曲線截取之線分qQ,必小於該線爲準線及AP連線截取之線分qR;準此,知拋物線對準線成凸形

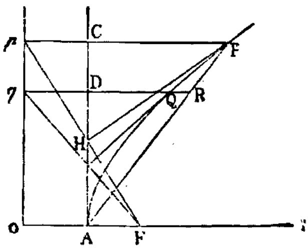

圖 4

因　$$\angle FHP=\angle R;\quad\therefore\quad \angle AHF+\angle CHP=\angle R,$$

故　$$\triangle AHF\sim\triangle CPH;$$

$$\therefore\quad FA:AH=HC:CP;$$

$$\therefore\quad FA\cdot CP=HC\cdot AH.$$

但　$$FA=AO;\quad\therefore\quad FH=Hp;\quad\therefore\quad AH=HC;$$

$$\therefore\quad FA\cdot CP=\overline{AH}^2=(\tfrac{1}{2}\overline{AC})^2.$$

同理,　$$FA\cdot QD=\tfrac{1}{4}\overline{AD}^2;$$

$$\therefore\quad CP:DQ=\overline{AC}^2:\overline{AD}^2,$$

$$=\overline{CP}^2:\overline{DR}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{CP}^2:CP\cdot DQ=\overline{CP}^2:\overline{DR}^2;$$

$$\therefore\quad CP\cdot DQ=\overline{DR}^2;$$

$$\therefore\quad DQ:DR=DR:CP=AD:AC.$$

依假設, $AD<AC$; $\therefore$ $DQ<DR$;

$\therefore$ $qQ<qR$. Q. E. D.

9. 推論五 在拋物線上任一點P及頂點A之間,任作一直線垂直於拋物線軸,則此線為曲線及軸截取之線分QN,必大於該線為A,P之連線及軸截取之線分SN.準此,知拋物線對其軸成凹形.

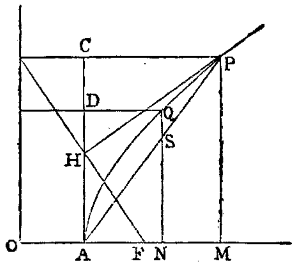

圖 5

因 $$CP:DQ=\overline{AC}^2:\overline{AD}^2;$$ (推論四)

$$\therefore \quad AM:AN=\overline{PM}^2:\overline{QN}^2; \tag{A}$$

$$\therefore \quad PM:SN=\overline{PM}^2:\overline{QN}^2;$$

$$\therefore \quad \overline{PM}^2:PM\cdot SN=\overline{PM}^2:\overline{QN}^2;$$

$$\therefore \quad PM\cdot SN=\overline{QN}^2;$$

$$\therefore \quad PM:QN=QN:SN. \tag{B}$$

題云: $AN<AM$, 由 (A) 式,知 $QN<PM$.

由 (B) 式,知 $SN<QN$. Q. E. D.

命 題 二

10. 一點與焦點之距離,大於或小於該點與準線之距離,

視此點在拋物線外或拋物線內而定.

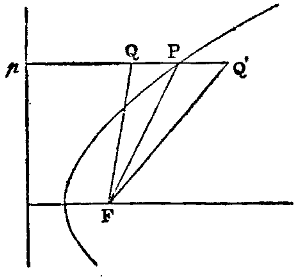

圖 6

(i) 設 Q 爲拋物線外之一點;連 FQ,並作 Qp 垂直於準線,其引長線交曲線於 P;連 FP

則由 $\triangle FPQ$, 有 $QF+QP>PF$,

(何故?)

$$\therefore\quad QF+QP>Pp;$$

$$\therefore\quad QF>Pp-QP;$$

$$\therefore\quad QF>Qp. \qquad \text{Q. E. D.}$$

(ii) 再設 Q' 爲拋物線內之一點;連 $Q'F$.

則由 $\triangle Q'FP$, 有 $Q'F<Q'P+PF$;

$$\therefore\quad Q'F<Q'P+Pp;$$

$$\therefore\quad Q'F<Q'p. \qquad \text{Q. E. D.}$$

11. 推論　反之,欲決定一點在拋物線外或拋物線內,視此點與焦點之距離,大於抑小於其與準線之距離而定.

命題三

12. (*a*) 拋物線上任一點與焦點之連線,及其至準線之垂線夾一角,此角之平分線必全在曲線外.

(*b*) 過此點,任作其他直線,必與拋物線相割.

(*a*) 設 P 爲拋物線上任一點, Pp 垂直於準線, PH 爲 $\angle pPF$

之平分線.

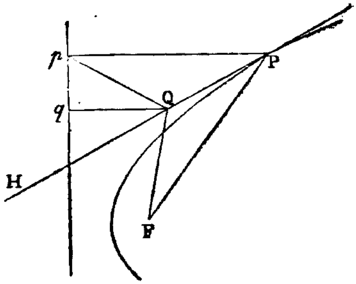

圖 7

在PH上任取一點Q,連QF,並作Qq垂直於準線,則因

$\triangle QPF=\triangle QPp$, (S. A. S.)

$\therefore\quad QF=Qp$.

但 $Qp>Qq$, (何故?)

$\therefore\quad QF>Qq$.

故Q在拋物線外.(命題二,推論.) Q. E. D.

(b) 過P點任作他一直線PK.

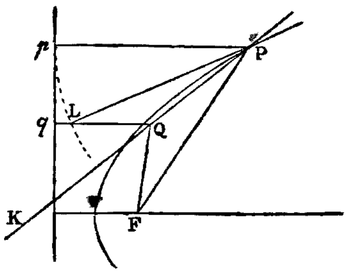

圖 8

作PL,使$\angle KPL=\angle KPF$,截取$PL=PF$.過L,作$QLq\perp$準線;連QF.

則 $\triangle FPQ=\triangle LPQ$, (S. A. S.)

$\therefore\quad QL=QF$;

$\therefore\quad QF<Qq$.

故Q點在拋物線內.(命題二,推論.)

所以PQ是割線. Q. E. D.

13. **定義** 一直線與拋物線相遇,經引長後不復與曲線相交,則稱此直線爲拋物線之**切線**(Tangent).

垂直切線於切點之直線,稱爲**法線**(Normal).

14. **推論一** 拋物線上任一點至準線之垂線,及其與焦點之連線所夾角的平分線,必切於拋物線;而其外角之平分

線，必為該點之法線．

15．推論二　拋物線頂點之切線，必垂直於拋物線軸．

命　題　四．

16．從拋物線焦點至任一切線作垂線，則垂線足之軌跡，為拋物線頂點之切線．

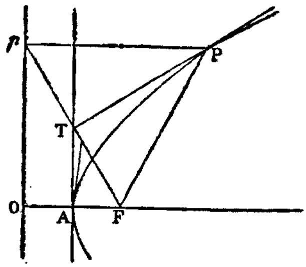

圖　9

設 PT 為拋物線上任一切線．FT 垂直 PT 於 T，Pp 垂直於準線，連 pT．

則因　$\angle pPT=\angle FPT$，　(何故?)

$\therefore$　$\triangle pPT=\triangle FPT$，　(S. A. S.)

$\therefore$　$\angle pTP=\angle FTP=\angle R$，

$\therefore$　$Tp=TF$，且成一直線．

$\therefore$　$TA \parallel Op$．　(何故?)

故 TA 為拋物線頂點之切線．　(何故?)

17．推論一　自拋物線上任一點 P 至準線作垂線 Pp，則焦點 F 與垂足 p 之連線，必垂直於 P 點之切線．

18．推論二　設直角 FTP 之頂點 T，移動於定直線上，有一邊常過一定點 F，則他邊必切於一拋物線．此拋物線以定點 F 為焦點，定直線為其頂點之切線．

命　題　五

19．自拋物線外一點求作拋物線之切線．

設Q爲拋物線外之任一點,連FQ,以FQ爲直徑作圓,與拋物線頂點之切線相交,則交點與Q之連線,必切於拋物線. (何故?)

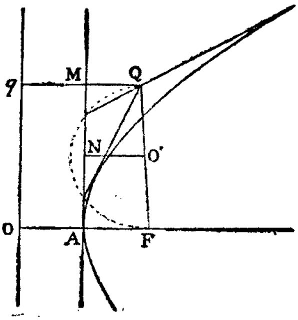

圖 10

注意 以QF爲直徑之圓,必交拋物線頂點之切線.因取QF之中點O',作$O'N \perp AM$.

則
$$Qq = QM + Mq$$
$$= QM + AO$$
$$= QM + AF = 2\,O'N.$$

但 $$QF > Qq, \qquad \text{(命題二)}$$
$$\therefore \quad QF > 2\,O'N,$$
$$\therefore \quad O'F > O'N.$$

即此圓之半徑,常大於圓心與頂點切線之距離,故常得兩交點.

命題六

20. 過焦點任作一直線,必爲拋物線,焦點,及準線所調分(Devided harmonically).

設PD爲過焦點之任一直線,則因

$$PD : DQ = Pp : Qq \qquad \text{(相似三角形)}$$
$$= PF : FQ. \qquad \text{Q.E.D.}$$

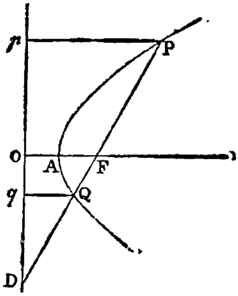

圖 11

21. **推論一**　$\frac{1}{Pp}+\frac{1}{Qq}=$常數.

因　$Pp:FO:Qq=DP:DF:DQ.$

而　DP, DF, DQ 成調和級數.

故　Pp, FO, Qq 亦成調和級數.

故　$\frac{1}{Pp}, \frac{1}{FO}, \frac{1}{Qq}$ 成算術級數,

$$\therefore\quad \frac{1}{Pp}+\frac{1}{Qq}=\frac{2}{FO}\text{ 是常數.}$$

22. **推論二**　$\frac{1}{FP}+\frac{1}{FQ}=$常數.

因　$FP=Pp,\quad FQ=Qq.$

命題七

23 拋物線上互相垂直的二切線交點之軌跡,即此拋物線之準線.

設 QP 及 QP', 爲拋物線上互相垂直的二切線,從焦點 F,向二切線作垂線 FT 及 FT'.

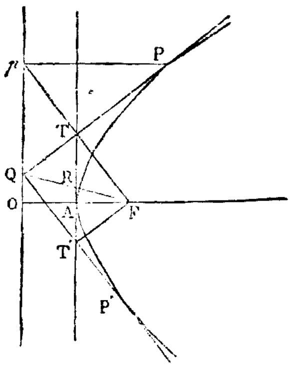

圖 12

則二垂足 T, T' 應在拋物線頂點之切線上.(命題四)

故 TT' 即爲拋物線頂點之切線,而垂直於其軸.(何故?)

又 $FTQT'$ 爲矩形,其對角線 QF 必爲 TT' 平分於 R.

作 $QO \parallel TT'$,

則有 $FA = AO$,

故 QO 卽爲拋物線之準線. Q. E. D.

24. **定義** 曲線上任一點之切線,爲曲線及軸截取之線分,在軸上之射影,稱爲**切線影** (Subtangent).

曲線上任一點之法線,爲曲線及軸截取之線分,在軸上之射影,稱爲**法線影** (Subnormal).

命題八

25. 於拋物線上任一點作法線,則其在軸上之法線影爲定長,且等於正焦點弦之半.

設 P 爲拋物線上任一點, PN 爲法線, MN 爲法線影. 作 Pp 垂直於準線, 連 Fp.

則 Fp 必垂直於 P 點之切線. (何故?)

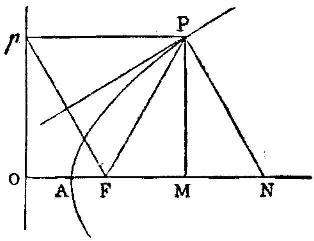

圖 13

故 $Fp \parallel PN$, 且等於 PN. (何故?)

$\therefore \quad \triangle pOF = \triangle PMN$, (何故?)

$\therefore \quad MN = OF = 2\,AF = \frac{1}{2}$ 正焦點弦. (命題一, 推論三.)

命題九

26. 於拋物線上任一點作切線,則其切線影,爲拋物線頂點所平分.

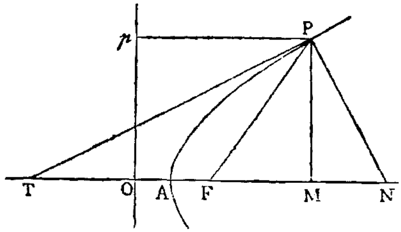

圖 14

設 PT 爲切線, Pp 垂直於準線, MT 爲切線影. 連 PF,

則 $$\angle TPF = \angle TPp, \quad \text{(何故?)}$$

$$= \angle PTF,$$

$$\therefore \quad FT = FP = Pp = MO,$$

但 $$AF = AO,$$

$$\therefore \quad FT - FA = MO - AO;$$

$$\therefore \quad AT = AM. \quad \text{Q. E. D.}$$

27. 推論一　若 PN 爲法線, 則 $FT = FN$.

因 $$FT = MO = MF + FO = FN. \quad \text{(命題八)}$$

28. 推論二　$\angle PFN = 2\angle PTN$. (何故?)

29. 定義　與準線垂直之任一直線, 稱爲拋物線之**直徑** (Diameter).

30. 推論　拋物線軸亦爲拋物線一直徑.

31. 定義　在拋物線上任一點作切線, 過切點作直徑, 則凡平行於該切線之任一直線爲此直徑及曲線截取之線分, 稱爲此直徑之**縱線** (Ordinate). 而直徑上爲此縱線及曲線截

取之線分,稱爲**經線**(Abscissa).

32. 推論 拋物線軸之緯線,必垂直於拋物線軸.

命題一〇

33. 關於拋物線軸之緯線,必爲其對應經線及正焦點弦之比例中項.

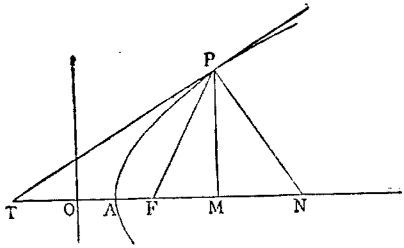

圖 15

於拋物線上之任一點P,作切線PT,緯線PM,法線PN.

則 $\overline{PM}^2 = TM \cdot MN;$ (何故?)

但 $TM = 2\,AM,$ (命題九)

$MN = 2\,AF,$ (命題八)

$\therefore\ \overline{PM}^2 = 2\,AM \cdot 2\,AF$

$= AM \cdot 4\,AF$

$=$ 經線 $\times$ 正焦點弦. Q. E. D.

34. 推論一 拋物線軸之二緯線平方比,等於其對應之經線比.

35. 推論二 切線$\overline{PT}^2 = 4\,FP \cdot AM.$

因 $$\overline{PT}^2=TN\cdot TM$$
$$=2\,TF\cdot 2\,AM$$
$$=4\,FP\cdot AM.$$ Q. E. D.

36. **推論三** 法線 $\overline{PN}^2=4\,AF\cdot FN.$

因 $$\overline{PN}^2=TN\cdot MN$$
$$=2\,FN\cdot 2\,AF$$
$$=4\,AF\cdot FN.$$ Q. E. D.

37. **定義** 拋物線上一點與焦點之連線,稱爲焦點半徑 (Focal radius).

命題一一

38. 於拋物線上任一點,作切線及焦點半徑,則過焦點垂直於此半徑之直線,與該切線交點之軌跡,即此拋物線之準線.

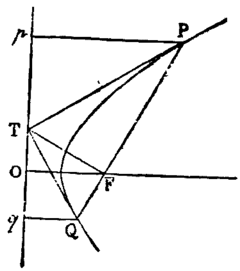

圖 16

設 P 爲拋物線上任一點, PT 爲切線, PF 爲焦點半徑,作 $FT\perp PF$, 交 PT 於 T.

作 TO 垂直拋物線軸,又作 $Pp\perp OT$ 之引長線.

則 $$\triangle TFP\equiv\triangle TpP,$$ (何故?)
$$\therefore\quad Pp=PF,$$

故 OT 爲準線. Q. E. D.

39. **推論一** 反之,若由準線上任一點,作拋物線之切線,

則此點與焦點之連線,必垂直切點之焦點半徑於焦點.

40. **推論二**　過焦點任作一弦,在此弦的兩端作拋物線之二切線,則此兩切線互相垂直,且垂足在準線上.

設 PQ 爲過焦點之任一弦, TP, TQ 爲切線.

因 $$\angle FTP=\angle pTP,\quad \angle FTQ=\angle qTQ;$$

$$\therefore\quad \angle QTP=\tfrac{1}{2}(\angle FTp+\angle FTq)=\angle R.$$

命題一二

41. 設 PP' 爲拋物線內之任一弦,交準線於 D, 則 FD 爲 $\angle PFP'$ 外角之平分線.

作 Pp, $P'p'$ 垂直於準線

則 $$P'F:PF=P'p':Pp$$
$$=P'D:PD$$

(相似三角形)

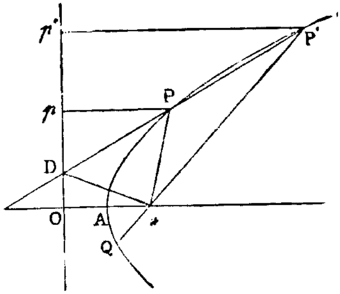

圖 17

$\therefore$　FD 爲 $\angle PFQ$ 之平分線　(何故?)

42. **推論一**　若知焦點及拋物線上之兩點,則能決定準線,及拋物線軸.

因 PP' 之引長線與 $\angle PFP'$ 外角之平分線,交於準線上,再從此交點 D, 至 P 爲圓心 PF 爲半徑之圓周上作切線,則此切線即爲所求之準線,再從焦點作此準線之垂線,即得拋物線軸.

若 P, P' 兩點無限接近,則割線 PP' 之極限地位,成為 P 點之切線.此時 $\angle PFP'$ 趨於零,而外角平分線 FD,必垂直焦點半徑 FP 於焦點,且切線 PD 必平分 Pp 及 PF 所夾角.讀者試與命題一一推論一,及命題三推論一比較觀之.

命題一三

43. 拋物線上兩定點 P, P' 與其上一動點 O 之連線,順次交準線於 p, p',則 $\angle pFp'$ 為定角.

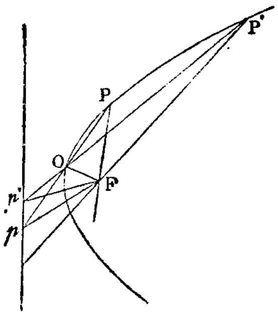

圖 18

因 Fp 為 $\angle OFP$ 之外角平分線;(命題一二)

$$\therefore\quad \angle OFp+\tfrac{1}{2}\angle OFP=\angle R.$$

同理 Fp' 為 $\angle OFP'$ 之外角平分線.

$$\therefore\quad \angle OFp'+\tfrac{1}{2}\angle OFP'=\angle R.$$

$$\therefore\quad \angle OFp+\tfrac{1}{2}\angle OFP=\angle OFp'+\tfrac{1}{2}\angle OFP'.$$

$$\therefore\quad \angle OFp-\angle OFp'=\tfrac{1}{2}\angle OFP'-\tfrac{1}{2}\angle OFP.$$

$$\therefore\quad \angle pFp'=\tfrac{1}{2}\angle PFP'\text{ 為定角.}$$ Q. E. D.

命題一四

44. 拋物線上四定點，及其上一動點，構成線束之**交比**(Cross ratio)爲常數.

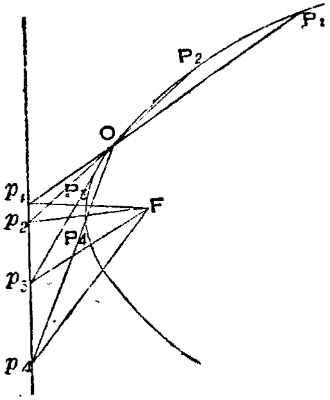

圖 19

因 $$O(P_1P_2P_3P_4)=O(p_1p_2p_3p_4)=F(p_1p_2p_3p_4)$$
$$=\text{常數}.\qquad\text{(命題一三)}$$

命題一五

45. 拋物線上任意二切線之交點，與焦點之連線，必平分兩切點之焦點半徑所夾角.

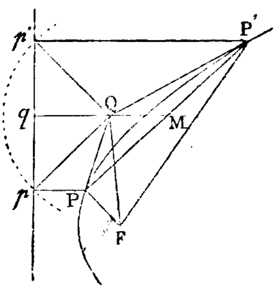

圖 20

設 QP 及 QP' 爲拋物線上任意二切線，相交於 Q，連 FP, FQ, FP'.

作 $Pp, P'p'$，垂直於準線．連 Qp，及 Qp'.

則 $$\triangle QFP' = \triangle Qp'P',\qquad \text{(何故?)}$$

$$\therefore\quad QF = Qp',$$

$$\angle QFP' = \angle Qp'P'.$$

又 $$\triangle QPF = \triangle QPp,\qquad \text{(何故?)}$$

$$\therefore\quad QF = Qp,$$

$$\angle PFQ = \angle PpQ,$$

$$\therefore\quad Qp = Qp'.$$

$$\therefore\quad \angle Qpp' = \angle Qp'p,$$

$$\therefore\quad \angle QpP = \angle Qp'P'.$$

$$\therefore\quad \angle QFP = \angle QFP'.$$

Q. E. D.

46. **推論一** 過二切線之交點Q,作準線之垂線,則其引長線必平分PP'弦.

因 $$\triangle Qqp = \triangle Qqp',$$

故q爲$p'p$之中點,而$Pp \parallel Qq \parallel P'p'$.

故M爲$P'P$之中點. Q. E. D.

47. **推論二** 以Q爲心,QF爲半徑作圓,必過p, p'兩點.

48. **推論三** 由推論二之理,可自拋物線外一點,作拋物線之二切線.即以此點Q爲心,QF爲半徑作圓,交準線於兩點;由此兩點作準線之二垂線,其遇拋物線之點,即爲所求之切點,連切點及Q,即得二切線.

49. **推論四** $\triangle P'QF$與$\triangle QPF$相似,乃知QF爲FP及FP'之比例中項.

因 $$\angle FQP' = \angle P'Qp', \quad \angle FQP = \angle PQp,$$

$$\angle pQq = \angle p'Qq;$$

$$\therefore \quad \angle FQP' + \angle PQq = 2\angle R.$$

但 $$\angle pPQ \text{ 或 } \angle FPQ + \angle PQq = 2\angle R,$$

$$\therefore \quad \angle FQP' = \angle FPQ.$$

又 $$\angle QFP = \angle QFP',$$

$$\therefore \quad \triangle P'QF \sim \triangle QPF;$$

$$\therefore \quad P'F : FQ = FQ : FP.$$

命題一六

50. 過拋物線上任意兩切線的交點作直徑,則切點弦(Chord of contact)必為此直徑之綍線.

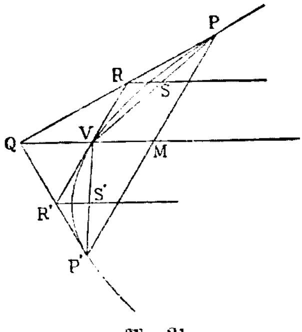

圖 21

設 QP, QP' 為二切線交於 Q;過 Q,作直徑,遇拋物線於 V;過 V 作切線,交 QP 於 R,交 QP' 於 R';連 VP, VP';過 R, R' 作直徑之平行線.

則 VP 必平分於 S, VP' 必平分於 S'.

(命題一五,推論一)

故 QP 必平分於 R, QP' 必平分於 R'. (何故?)

$$\therefore \quad RR' \parallel PP'. \qquad \text{(何故?)}$$

故 PP' 是直徑 QM 之綍線.

51. 推論 $$QV = VM. \qquad \text{(何故?)}$$

命題一七

52. 拋物線上一動切線為二定切線所截,其截取線分在焦點之對角為定角,且等於二切線之切點弦在焦點所對角的二分之一.

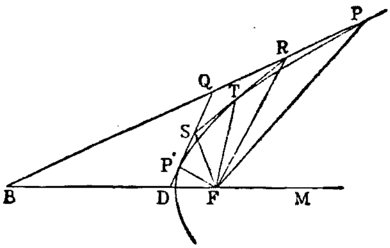

圖 22

設 QP 及 QP' 為定切線, RS 為動切線, 連 FP', FS, FT, FR, 及 FP.

則
$$\angle SFT = \tfrac{1}{2}\angle TFP',$$
$$\angle TFR = \tfrac{1}{2}\angle TFP, \qquad \text{(命題一五)}$$
$$\therefore\ \angle RFS = \tfrac{1}{2}\angle PFP',\ \text{為定角.} \qquad \text{Q. E. D.}$$

53. **推論** 拋物線上一動切線,為四定切線截成列點之交比為常數.

因動切線上截取各線分,在焦點之對角,各為定角故也.

命題一八

54. 拋物線上任意三切線圍成一三角形之外接圓,必過焦點.

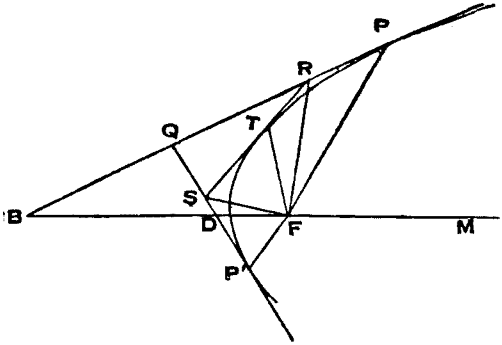

圖 23

設 $\triangle QRS$ 之三邊，皆爲拋物線之切線.

因 $$\angle PFM=2\angle PBF,\qquad \text{(命題九，推論二.)}$$

$$\angle P'FM=2\angle P'DF,$$

$$\therefore\quad \angle P'FM+\angle PFM=2\angle P'DF+2\angle PBF.$$

$$\therefore\quad 4\angle R-\angle P'FP=4\angle R-2\angle BQD.$$

$$\therefore\quad \angle P'FP=2\angle BQD.$$

$$\therefore\quad \angle SFR=\angle BQD.\qquad \text{(命題一七)}$$

故 S, Q, R, F 四點共圓. Q. E. D.

命題一九

55. 設於拋物線上任一點 P，作切線，遇拋物線軸於 T. 又從 P 作軸之平行線，交頂點切線於 p，則 $\triangle PAT$ 及 $\triangle PAp$ 等積

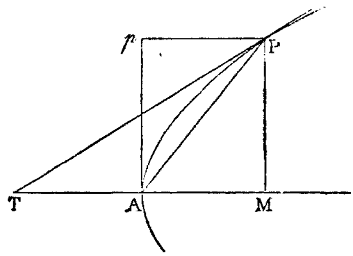

圖 24

作緯線 PM, 則因 $AT=AM$, (命題九)

$$\therefore \quad \triangle TAP = \triangle AMP.$$

$$= \triangle PAp. \qquad \text{(何故?)}$$

56. **推論** $\triangle TMP$ 與矩形 MAp 等積.

命題二〇

57. 自拋物線上任一點 Q 對於任意直徑 Pp 作緯線 QG, 交拋物線軸於 L, 又自 Q 作拋物線軸之緯線 QS; AH 為頂點切線, 則 $\triangle QLS$ 與矩形 $KSAH$ 等積.

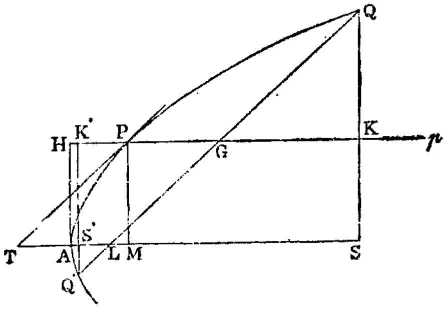

圖 25

在P點作切線PT,

則　$$\triangle QLS \sim \triangle PTM.$$　(何故?)

$$\therefore\quad \triangle QLS : \triangle PTM = \overline{QS}^2 : \overline{PM}^2$$

由命題一〇推論一,　$= AS : AM$

$= $ 矩形 AK : 矩形 AP.

由命題一九推論,知

$$\triangle PTM = \text{矩形 } AP,$$

$$\therefore\quad \triangle QLS = \text{矩形 } AK.$$　Q. E. D.

58. **推論** 同理可證$\triangle Q'S'L =$ 矩形 AK'.

命題二一

59. 平行於任一切線之弦,必為過切點之直徑所平分.

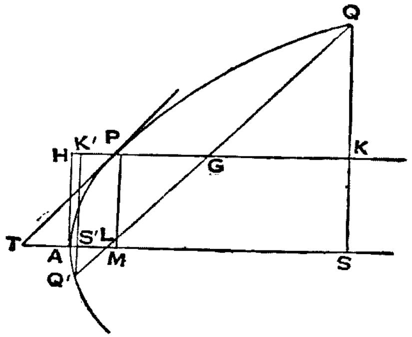

圖 26

設PT為切線,QQ'為平行於PT之一弦,交過切點P之直徑於G.

則因　$$\triangle QLS = \text{矩形 } AK,$$　(命題二〇)

$$\therefore\quad \triangle QGK = \text{梯形}\ HALG.$$

又　$$\triangle Q'LS' = \text{矩形}\ AK',$$

$$\therefore\quad \triangle QGK = \triangle Q'GK',$$

此二三角形又相似，故全等.

$$\therefore\quad QG = GQ'. \qquad \text{Q. E. D.}$$

60. 推論　$\triangle QGK$與平行四邊形$TLGP$等積.

因　$\triangle TPM =$ 矩形 AP,　　(命題一九，推論.)

$\square TPGL =$ 梯形 $HALG$,

$= \triangle QGK.$　　(命題二一)

命題二二

61. 在一弦之兩端作切線，則凡與此弦平行之任一直線，為拋物線及二切線截取之線分恆相等.

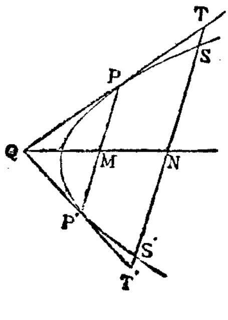

圖 27

過二切線之交點 Q, 作直徑 QM, 則切點弦 PP' 必為 QM 之緯線.　(命題一六)

故平行於 PP' 之任一直線 SS', 亦為 QM 之緯線.

故 PP' 及 SS 均為直徑 QM 所平分.

(命題二一)

但　$$NT = NT',$$　(何故?)

$$\therefore\quad ST = S'T'. \qquad \text{Q. E. D.}$$

命題二三

62　任意直徑緯線之平方,必與其對應經線成比例.

設TS為軸,PN為任意直徑,緯線QG及RH,平行於P點之切線;PG, PH為其對應經線,

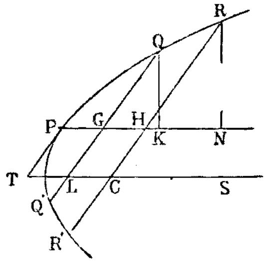

圖 28

則　　$\triangle QGK = \square PGLT.$

(命題二一,推論.)

又　　$\triangle RHN = \square PHCT;$

$$\therefore\quad \triangle QGK : \triangle RHN = \square PGLT : \square PHCT.$$

$$\therefore\quad \overline{QG}^2 : \overline{RH}^2 = PG : PH. \qquad \text{Q. E. D}$$

命題二四

63　自拋物線上任一點作直徑,則與此直徑之緯線平行之焦點弦,等於四倍此點之焦點半徑.

設PH為直徑;過焦點作此直徑之緯線QH,自頂點A作$AG \parallel QH$,

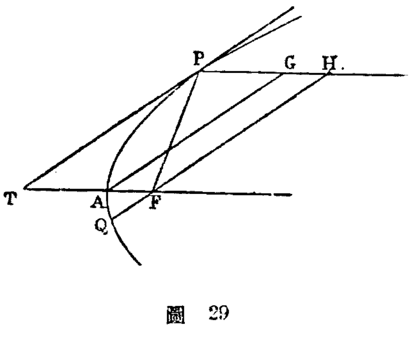

圖 29

則　　$\overline{QH}^2 : \overline{AG}^2 = PH : PG$　　(命題二三)

$$= TF : TA$$

$$= 4\,TF \cdot TF : 4\,TF \cdot TA.$$

但 $$\overline{AG}^2=\overline{PT}^2=4\,TF\cdot TA \qquad \text{(命題一〇,推論二.)}$$

$$\therefore\quad \overline{QH}^2=4\,TF\cdot TF;$$

$$\therefore\quad QH=2\,TF=2\,FP. \qquad \text{(命題九)}$$

但 QH 爲該焦點弦之半,　(命題二一)

故其全長 $=4\,FP$.　Q. E. D.

64. 定義 過焦點作一弦,與一直徑之緯線平行,則稱此弦爲該直徑之**緯向焦點弦**(Parameter).

65. 推論一 自拋物線上任一點作直徑,則此直徑之緯向焦點弦,必爲該點之焦點半徑之四倍.

66. 推論二 任一直徑爲其緯向焦點弦所截之經線,必爲此焦點弦四分之一.

因 $$PH=TF=FP=\tfrac{1}{4}\text{緯向焦點弦}.$$

命題二五

67. 一直徑之緯線平方,等於其對應經線及該直徑之緯向焦點弦所包之矩形.

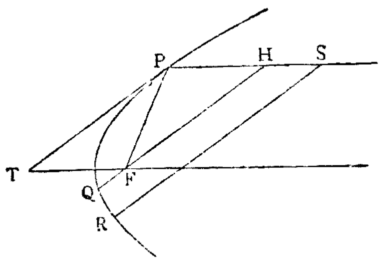

圖 30

設 RS 爲直徑 PS 之緯線,PS 爲對應經線,QH 爲過焦點之緯線.

則 $$\overline{RS}^2:\overline{QH}^2=PS:PH; \qquad \text{(命題二三)}$$

但 $$QH=2\,FP \qquad \text{(命題二四)}$$

$$=2\,FT \qquad \text{(命題九)}$$

$$=2\,PH.$$

$$\therefore\quad \overline{RS}^2 : 4\overline{PH}^2 = PS : PH$$

$$=4\,PH\cdot PS : 4\,\overline{PH}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{RS}^2 = 4\,PH\cdot PS$$

$$=4\,FT\cdot PS$$

$$=4\,FP\cdot PS$$

= 緯向焦點弦 × 經線. (命題二四)

命題二六

68. 從拋物線上任一點,至一直徑作垂線,則此垂線平方,等於該直徑上之經線,及正焦點弦所包之矩形.

設 QH 垂直於直徑 PH; QG 爲 PH 之緯線, PG 爲經線; AC 爲頂點切線,交切線 PT 於 C, 連 CF.

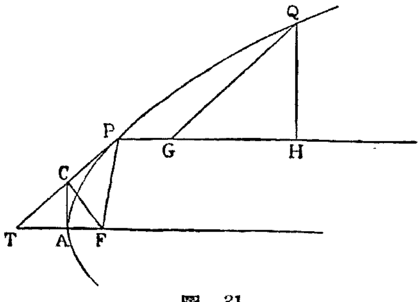

圖 31

則 $$\triangle QHG \sim \triangle CAT.$$

$$\therefore\quad \overline{QH}^2 : \overline{QG}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CT}^2.$$

但 $$\overline{QG}^2 = 4\,FP\cdot PG, \qquad \text{(命題二五)}$$

$$\overline{CA}^2 = FA\cdot AT, \qquad \text{(命題四)}$$

$$\overline{CT}^2 = FT\cdot AT,$$

$$\therefore\quad \overline{QH}^2 : 4\,FP\cdot PG = FA\cdot AT : FT\cdot AT$$
$$= FA : FT$$
$$= FA : FP$$
$$= 4\,FA\cdot PG : 4\,FP\cdot PG$$
$$\therefore\quad \overline{QH}^2 = 4\,FA\cdot PG,$$

＝正焦點弦×經線.　　Q. E. D.

69. 附註　設一緯線與其直徑所夾角爲 α,則此直徑之緯向焦點弦與 $\csc^2\alpha$ 成比例.

如
$$\csc^2 QGH = \frac{\overline{QG}^2}{\overline{QH}^2} = \frac{4\,FP\cdot PG}{4\,FA\cdot PG} = \frac{4\,FP}{4\,FA},$$

∴　正焦點弦 × $\csc^2 QGH = 4\,FP =$ 直徑 PH 之緯向焦點弦.

命題二七

70. 自拋物線上任一點作切線,並從此點作任意直徑之緯線,則此直徑爲此緯線及切線截取之線分,必爲曲線所平分.

設 P 爲拋物線上任一點,PT 爲切線.PM 爲直徑 TS 之緯線.

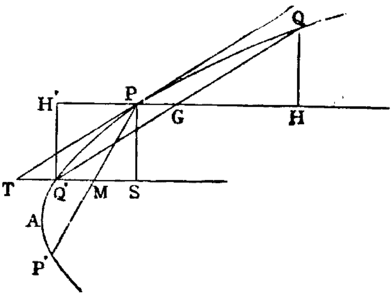

圖 32

作 $Q'Q$ 弦平行於 PT,作 QH 垂直於過 P 點之直徑,又作 PS 垂直於直徑 TS.

則 $GQ = GQ'$, (命題二一)

$\therefore \quad QH = Q'H' = PS.$

但 $\overline{QH}^2 =$ 正焦點弦 $\times PG$, (命題二六)

而 $\overline{PS}^2 =$ 正焦點弦 $\times Q'M$.

$\therefore \quad PG = Q'M = TQ'.$ Q. E. D.

71. 推論 觀上圖,若於 P' 作切線,亦必遇直徑 TS 於 T.

(何故?)

故在一弦之兩端作切線,必相交於平分此弦之直徑上.

命題二八

72. 設拋物線內平行二弦爲任一直徑所截,則每一弦截成兩線分,所包矩形之比,等於此直徑爲曲線及一弦截取線分之比.

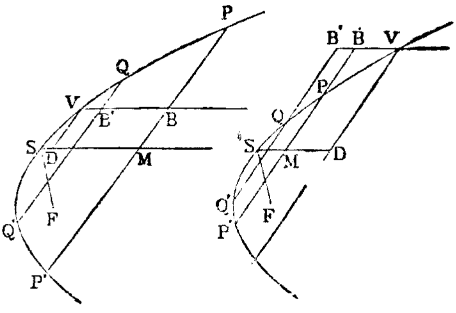

圖 33

設 $VB'B$ 爲直徑, PP' 及 QQ' 爲平行二弦.

作直徑 SM, 平分平行弦 PP' 及 QQ'.

則 $$\overline{PM}^2 = 4\,SF\cdot SM, \qquad \text{(命題二五)}$$

$$\overline{VD}^2 = 4\,SF\cdot SD.$$

$$\therefore\quad \overline{PM}^2 \sim \overline{VD}^2 = 4\,SF\cdot DM.$$

即 $$\overline{PM}^2 \sim \overline{BM}^2 = 4\,SF\cdot VB.$$

$$\therefore\quad (PM+BM)(PM\sim BM) = 4\,SF\cdot VB.$$

即 $$P'B\cdot PB = 4\,SF\cdot VB.$$

同理, $$Q'B'\cdot QB' = 4\,SF\cdot VB'.$$

$$\therefore\quad PB\cdot P'B : QB'\cdot Q'B' = VB : VB'. \qquad \text{Q.E.D.}$$

73　推論　過任一點作弦,再過此點作直徑,並作平分此弦之直徑,則此弦爲此點分成兩線分相乘積,等於第一直徑爲弦及曲線截取之線分,及第二直徑之緯向焦點弦相乘積.

因　$PB\cdot P'B = 4\,SF\cdot VB =$ 緯向焦點弦 × 所截線分.

命題二九

74. 設拋物線有兩弦相交,則每一弦上兩線分相乘積之比,等於平分每一弦之直徑的緯向焦點弦之比.

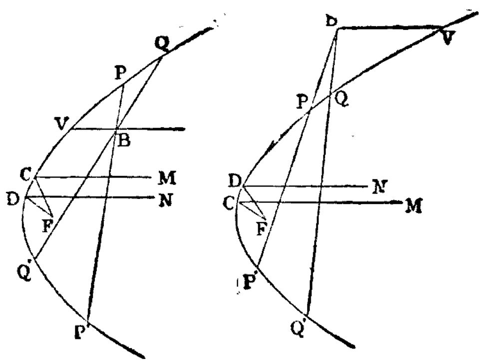

圖 34

設 PP' 及 QQ' 兩弦相交於 B, CM 爲平分 QQ' 之直徑, DN 爲平分 PP'

之直徑.

過兩弦之交點,作直徑VB.

則 $PB\cdot BP'=4\,FD\cdot VB$, (命題二八,推論.)

又 $QB\cdot BQ'=4\,FC\cdot VB$. (同理)

$\therefore\ PB\cdot BP' : QB\cdot BQ'=4\,FD : 4\,FC$. Q. E. D

75 推論一 設兩弦相交,則一弦上兩線分相乘積,與該弦之平行焦點弦成比例.

因一弦之平行焦點弦,即為平分此弦之直徑的緯向焦點弦也.

76 推論二 設一組相交兩弦與他組相交兩弦兩兩平行,則此組每一弦上兩線分相乘積之比,等於他組之每一弦上兩線分相乘積之比.

77 推論三 若P, P'兩點相合,則BP成一切線;故從任一點作拋物線之二切線,並從他一點作其平行之二弦,則每一弦上兩線分相乘積,與其平行之切線平方成比例.

命題三O

78. 設TP, TQ為拋物線之二切線,任作直線與一切線平行,交他一切線於O,交切點弦於B,交拋物線於A, C,則OA, OB, OC成幾何級數.

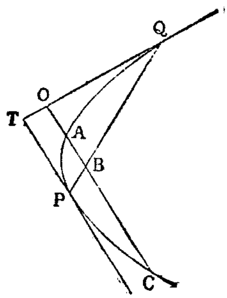

圖 35

因 $OA \cdot OC : \overline{OQ}^2 = \overline{TP}^2 : \overline{TQ}^2$ （命題二九，推論三.）

$$= \overline{OB}^2 : \overline{OQ}^2.$$

$$\therefore \quad OA \cdot OC = \overline{OB}^2,$$

$$\therefore \quad OA : OB = OB : OC.$$

Q. E. D.

命題三一

76. 設一圓交拋物線於四點，則二公共弦必與拋物線軸夾等角.

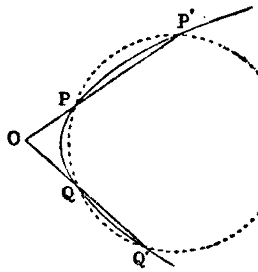

圖 36

設二公共弦 PP' 及 QQ' 相交於 O.

則 $OP \cdot OP' : OQ \cdot OQ' =$ 其平行焦點弦之比. （命題二九，推論一.）

但 $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$.

故與 PP' 及 QQ' 平行之二焦點弦相等，故此二焦點弦應與拋物線軸夾等角.

（命題一，推論二.）

故 PP' 及 QQ' 與拋物線軸夾等角. Q. E. D.

80. **推論** 依同理，可證 PQ 及 $P'Q'$ 與拋物線軸夾等角，又 PQ' 及 $P'Q$ 與拋物線軸夾等角.

命題三二

81. 過拋物線上兩切線之交點，任作直線，必為曲線，此點，及切點弦所調分.

設 OP, OQ 二切線相交於 O, 過 O 點作直線, 交拋物線於 B, B', 交切點弦 PQ 於 O'.

過 B, B', 作 TS 及 $T'S' \parallel PQ$.

則 $BO : OB' = BT : B'T' = BS : B'S'$,

(相似三角形)

$\therefore \quad \overline{BO}^2 : \overline{OB'}^2 = BT \cdot BS : B'T' \cdot B'S'$.

但 $\quad BS = TA, \quad B'S' = T'A'$.

(命題二二)

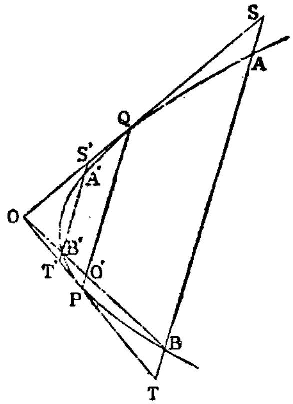

圖 37

$$\therefore \quad \overline{BO}^2 : \overline{OB'}^2 = BT \cdot TA : B'T' \cdot T'A',$$
$$= \overline{TP}^2 : \overline{PT'}^2,$$
$$= \overline{BO'}^2 : \overline{O'B'}^2;$$

$\therefore \quad BO : OB' = BO' : O'B'$. Q. E. D.

82. 推論 自拋物線外任一點 O 作直線, 交曲線於 B, B', 於其上取線分 OO', 使 OO' 爲 OB 及 OB' 之調和中項, 則 O' 之軌跡爲一直線, 即自 O 點向拋物線所作兩切線之切點弦.

命題三三

83. 設 PM 及 QN 爲拋物線之任意二直徑, 作直線 BE, 平行於一直徑之緯線, 遇他一直徑於 E, 遇曲線於 D, 遇 PQ 弦於 C, 則 BE, BD, BC 成幾何級數.

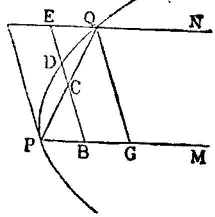

圖 38

作緯線 QG, 則 $\overline{BE}^2 : \overline{BD}^2 = \overline{GQ}^2 : \overline{BD}^2,$

$$= PG : PB, \qquad \text{(命題二三)}$$

$$= PQ : PC,$$

$$= BE : BC,$$

$$= \overline{BE}^2 : BE \cdot BC.$$

$$\therefore \quad \overline{BD}^2 = BE \cdot BC. \qquad \text{Q.E.D.}$$

命題三四

84. 過拋物線上任一點 P, 作直線 PCO' 及 $Q'PQ$, 平行於一內接四邊形之二鄰邊 DA 及 DC, 交其對邊於 O O' 及 Q, Q', 則 $PO \cdot PO' : PQ \cdot PQ'$ 之比值爲一定.

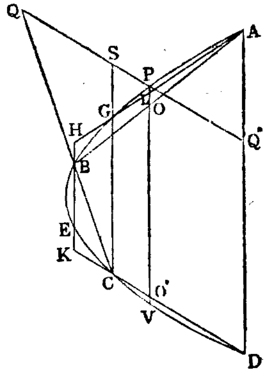

圖 39

過 B, C 作 AD 之平行線 BE, CG, 連 AG, 引長交 EB 之引長線於 H.

則 $OL : BH = LA : AH$

$$= O'D : DK. \quad \text{(平行線)}$$

中項互換, $\qquad OL : O'D = BH : DK.$

又 $\qquad \triangle QSC \sim \triangle CKB.$

$$\therefore \quad SC \text{ 或 } PO' : SQ = BK : KC.$$

$$\therefore \quad OL \cdot PO' : O'D \cdot SQ = BH \cdot BK : DK \cdot KC.$$

因 $\qquad O'D = PQ' \qquad$ (平行四邊形的對邊)

又 $BH=EK$, (因平分平行弦 GC 及 AD 之直徑,必平分 BE 弦及 PV 弦,又平分其平行線 HK 及 LO'.)

$$\therefore \quad OL\cdot PO' : PQ'\cdot SQ = EK\cdot BK : DK\cdot KC$$

$$= O'V\cdot O'P : O'C\cdot O'D$$

$$= PL\cdot O'P : PS\ PQ'.$$

$$\therefore \quad OL\cdot PO' + PL\cdot O'P : PQ'\cdot SQ + PS\cdot PQ'$$

$$= EK\cdot BK : DK\cdot KC.$$

$$\therefore \quad PO\cdot PO' : PQ\cdot PQ' = EK\cdot BK : DK\cdot KC.$$

因 A, B, C, D 爲定點,故 E 爲定點.

$\therefore$ $EK\cdot BK : DK\cdot KC$ 之比值爲一定.

$\therefore$ $PO\cdot PO' : PQ\cdot PQ'$ 之比值爲一定. Q. E. D.

命題三五

85 自抛物線上任一點至一內接四邊形之四邊作直線 PR, PR', PS, PS', 各與該邊夾定角,則至對邊上的兩線分相乘積之比爲一定.

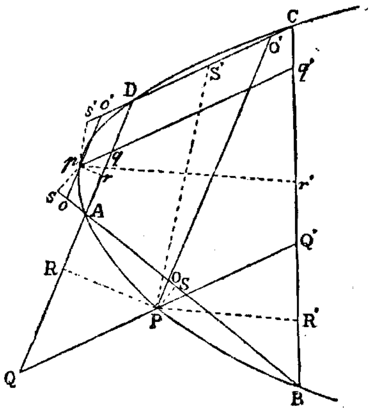

圖 40

在抛物線上另取一點 p, 過 P, p 作 QPQ' 及 $pqq' \parallel DC$, 又作 POO' 及 $opo' \parallel AD$, 又作 pr, pr', ps, ps' 順次平行 PR, PR', PS, PS'.

則 $$PR:pr=PQ:pq,\qquad\text{(相似三角形)}$$

又 $$PR':pr'=PQ':pq',$$

$$\therefore\quad PR\cdot PR':pr\cdot pr'=PQ\cdot PQ':pq\cdot pq'.$$

同理可證:

$$PS\cdot PS':ps\cdot ps'=PO\cdot PO':po\cdot po',$$

但 $$PQ\cdot PQ':PO\cdot PO'=pq\cdot pq':po\cdot po',$$

$$\therefore\quad PR\cdot PR':PS\cdot PS'=pr\cdot pr':ps\cdot ps'.\qquad\text{Q. E. D.}$$

86. **推論一** 從抛物線上任一點,至一內接四邊形的四邊作垂線,則對邊上兩垂線相乘積之比爲一定.

87. **推論二** 若 A, B 兩點相合, C, D 兩點亦相合,則 AB 及 CD 兩邊成切線,而 BC 及 AD 亦相合成切點弦.故從抛物線上任一點向二切線所作兩垂線的相乘積,與從此點向切點弦所作垂線的平方成定比.

88. **定義** 兩曲線相似,且在相似位置,必須兩曲線各自一定點,向曲線作平行之向量半徑 (Radius vector),此兩半徑之比須一定.

89. **定義** 兩曲線相似,必須兩曲線各自一定點作向量半徑,其方向夾定角,且比值爲一定.

此二定點稱爲**相似心** (Centres of similarity).

命題三六

90. 凡抛物線皆相似.

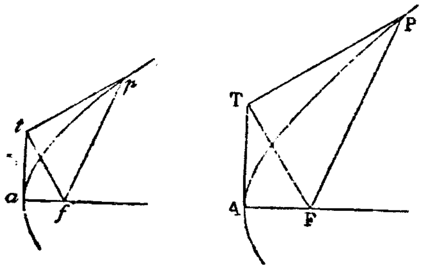

圖 41

設 F, f 爲焦點. 作焦點半徑 FP 及 fp, 各與其軸夾一角互相等. 再於 P, p 作切線, 自 F, f 作切線之垂線 FT 及 ft; 連垂足與頂點, 得 AT 及 at.

則 AT 及 at 必爲拋物線頂點之切線. (命題四)

又 $\angle PFT = \frac{1}{2}\angle PFA,$ (命題一五)

同理, $\angle pft = \frac{1}{2}\angle pfa.$

$$\therefore \quad \angle PFT = \angle pft;$$

$$\therefore \quad \triangle PFT \sim \triangle pft,$$

$$\triangle TFA \sim \triangle tfa;$$

$$\therefore \quad PF : FT = pf : ft,$$

$$TF : FA = tf : fa,$$

$$\therefore \quad PF : FA = pf : fa;$$

$$\therefore \quad PF : pf = FA : fa = \text{常數}.$$

故此二曲線相似. Q. E. D.

命題三七

91. 拋物線內任一緯線及其對應經線,與曲線所包之面

積,等於此緯線及徑線爲鄰邊作成一平行四邊形面積的三分之二.

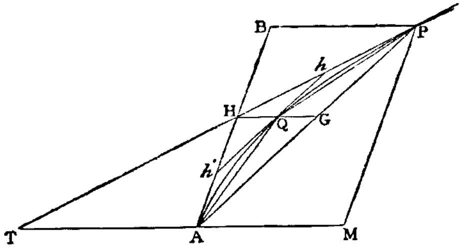

圖 42

設 PM 爲緯線, AM 爲對應經線. 作 A 點及 P 點之切線 AB 及 PT, 作 $PB \parallel AM$.

則 $AMPB$ 爲平行四邊形. 連 AP,

則因 $$TA = AM,$$ (命題一六)

而 $$\triangle THA = \triangle PHB,$$

$$\therefore \quad TH = HP,$$

$$\therefore \quad \triangle TAH = \tfrac{1}{2}\triangle TAP = \tfrac{1}{2}\triangle APM.$$

同理,過 H 作直徑,遇曲線於 Q; 於 Q,作切線 hh',則可證

$$\triangle HQh = \tfrac{1}{2}\triangle QGP,$$

$$\triangle HQh' = \tfrac{1}{2}\triangle QGA.$$

循是進行,再過 h 及 h' 作直徑,總可證拋物線外之切線所圍成之三角形面積等於拋物線內切點弦及直徑圍成之三角形面積的 $\frac{1}{2}$. 當三角形數增至無限時,此理恆成立.

故諸外三角形面積總和 $= \frac{1}{2}$ 內三角形面積總和.其極限亦相等.

故 AM, MP 及曲線所包之面積,等於 $\frac{2}{3}$ $\triangle TPM$ 之面積,卽等於 $\frac{2}{3}$ 平行四邊形 $AMPB$ 之面積.

又法

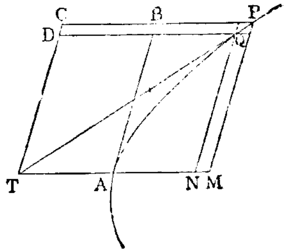

圖 43

在拋線上 P 點鄰近取一點 Q. 作 $QN \parallel PM$.

連 PQ, 引長,交直徑 MA 之引長線於 T.

作 $TC \parallel AB$, $QD \parallel TM$.

因 Q 是平行四邊形 $TMPC$ 對角線 PT 上的一點,

故平行四邊形 QC 及 QM 等積.

若 Q 與 P 無限接近,則 PT 成爲 P 點之切線,而有 $AT=AM$.

$$\therefore \quad \square BQ = \square CD.$$

$$\therefore \quad \square QM = 2\,\square BQ.$$

若將拋物線弧 AP 分作無限微分,總可證每一內平行四邊形,等於二倍一對應外平行四邊形,其雙方總和之極限,仍有此關係.

故 AMP 之面積,等於 $\frac{2}{3}$ 平行四邊形 $AMPB$ 之面積.

92 定義 設直角三角形繞一腰爲軸而旋轉,其轉成之面稱爲旋轉圓錐面,稱斜邊爲旋轉線 (Generating line).

命題三八

93 一平面平行於旋轉線截旋轉圓錐面之截面必爲一

拋物線.

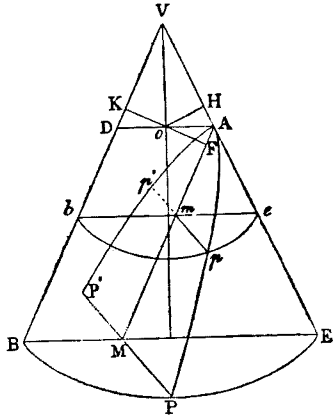

圖 44

過旋轉面之軸作截面 BVE 垂直於截面 PAP'，而與紙面合. 作底面 BPE 與軸垂直，交截面 PAP' 於 MP，則底面 $BPE \perp$ 紙面 BVE. (何故?)

又 $MP \perp$ 紙面 BVE. (何故?)

$\therefore$ $MP \perp BE$ (直徑). (何故?)

$\therefore$ $\overline{MP}^2 = BM \cdot ME$. (何故?)

作截面 bpe 與底面平行，交截面 PAP' 於 mp，則依同理可證:

$$\overline{mp}^2 = bm \cdot me.$$

$$\therefore \quad \overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 = BM \cdot ME : bm \cdot me.$$

但 $$BM = bm,$$

$$\therefore \quad \overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 = ME : me$$

$$= MA : mA. \qquad \text{(相似三角形)}$$

故截面 PAP' 爲拋物線.

94 推論一　正焦點弦爲 VD 及 DA 之第三比例項.

因 $$VD : DA = AM : ME$$

$$= AM \cdot MB : ME \cdot MB.$$

$$= AM \cdot MB : \overline{MP}^2$$

$$= AM \cdot DA : \text{正焦點弦} \times AM. \qquad \text{(命題一〇)}$$

$$\therefore \quad VD : DA = DA : \text{正焦點弦}.$$

95 **推論二**　自O點作直線,垂直於截面PAP',則垂足爲焦點F.

因$\triangle VDO$及$\triangle OAF$互爲等角形.

$$\therefore\quad VD:2\,DO=2\,OA:4\,AF$$

$$\therefore\quad VD:DA=DA:4\,AF$$

$\therefore$　$4\,AF=$ 正焦點弦.　　(推論一)

故F爲焦點.　　(命題一,推論三.)

拋物線問題

1. 設自拋物線之切線上任一點,至切點之焦點半徑作垂線,則垂足及焦點在此半徑上截取之線分,等於該點與準線之距離.

2. 已知拋物線焦點及一切線,則其頂點之軌跡爲一圓.

3. 自拋物線焦點作直線,與任意切線夾定角,求其交點之軌跡.

提示: 設三角形有一頂點固定,一底角頂點移動於一定直線上,則另一底角之頂點之軌跡爲直線.(參閱命題四推論一)

4. 已知拋物線的四切線,試決定其焦點及準線.(參閱命題一八)

5. 一焦點弦兩端之法線,必相交於平分此弦之直徑上.(參閱命題一一)

6. 以拋物線之任一焦點弦爲直徑作一圓,必切於準線.

7. 設$\triangle ABC$之三邊均切於拋物線,F爲焦點,自A, B, C順次作FA, FB, FC之垂線,則此三垂線相會於一點.

8. 設一圓交拋物線於四點,則自軸之同側兩交點,至此軸之二緯線和互相等.

9. 已知正焦點弦,求作錐面之拋物線截面.

10. 關於拋物線成自配(Self-conjugate)三角形三邊中點之連線,必切於此拋物線.(參閱命題三二及命題二七)

第 二 篇

橢 圓

96. 定義 一動點與一定點之距離,及此動點與一定直線之距離之比,爲小於1之常數,則此動點之軌跡稱爲**橢圓**.

此定點稱爲**焦點**,此定直線稱爲**準線**.

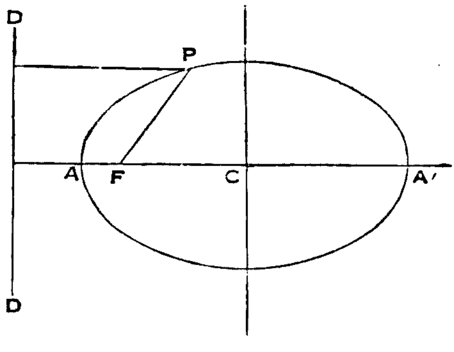

圖 45

97. 定義 過焦點,與準線垂直之直線稱爲**橢圓軸**.

橢圓與其軸之兩交點,稱爲**頂點**.

橢圓軸爲橢圓截取一線分之中點,稱爲**橢圓心**.

98. 定義 過橢圓心之任一直線,爲**橢圓直徑**.

99 定義 一直線與橢圓相遇,經引長後不復與橢圓相交,則此直線稱爲橢圓之**切線**.

垂直切線於切點之直線,稱爲**法線**.

100. **定義**　任一直線為橢圓截取之線分,稱為弦.

過焦點之弦,稱為焦點弦.

與軸垂直之焦點弦,稱為正焦點弦.

橢圓中緯線及經線之定義,與拋物線之緯線經線相同.

預備定理

101. 若調分AB線分於O及O',以OO'為直徑作圓,則圓周上任一點與AB兩端點距離之比為一定.

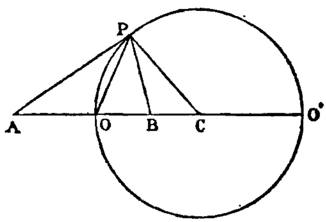

圖 46

設P為以OO'為直徑之圓周上任一點,C為OO'之中點,連PC, PO.

則　$AO' : O'B = AO : OB$.

$$\therefore \quad AO' + AO : A'O - AO = O'B + OB : O'B - OB;$$

即
$$2\,AC : 2\,OC = 2\,OC : 2\,BC;$$

$$\therefore \quad AC : CP = CP : CB;$$

$$\therefore \quad \triangle ACP \sim \triangle PCB;$$

$$\therefore \quad \angle CPB = \angle CAP.$$

但
$$\angle CPO = \angle COP \qquad (\text{因 } CP = CO)$$
$$= \angle OAP + \angle OPA$$
$$= \angle CPB + \angle OPA;$$

$$\therefore \quad \angle BPO = \angle OPA.$$

故PO為$\angle APB$之平分線,

$\therefore$　$AP : PB = AO : OB$.　Q. E. D.

102. **定義**　設橢圓上一點與焦點之距離,及其與準線距離之比爲e,則稱e爲距離比(Eccentricity).

依橢圓定義,知e值應小於1.

命題一

103. 已知橢圓之焦點,準線,及距離比,試決定其上之若干點.

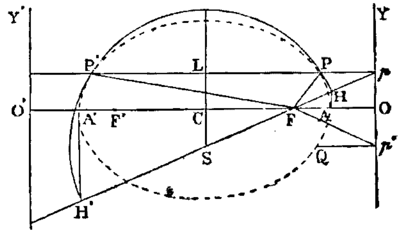

圖 47

設F爲焦點,OY爲準線,作$FO \perp OY$.

內分FO於A,並外分FO於A',使內分比等於外分比,等於$e:1$.

則A, A'爲橢圓兩頂點.AA'爲其軸.　(定義)

在準線上任取一點p,連Fp.於頂點A及A',作橢圓軸之垂線,交Fp及其引長線於H及H'.以HH'爲直徑作一圓,自p點作軸之平行線,交此圓於P, P',則P, P'爲橢圓上之兩點.

證　連PF及$P'F$.則因$AH \parallel Op$,

$$\therefore \quad HF : Hp = AF : AO.$$

又　$$A'H' \parallel Op,$$

$$\therefore \quad H'F : H'p = A'F : A'O.$$

但　$$AF : AO = A'F : A'O.$$　(作圖)

$$\therefore \quad HF : Hp = H'F : H'p,$$

又 $$PF : Pp = FH : Hp \qquad \text{(預備定理)}$$
$$= FA : AO = e.$$

同理 $$P'F : P'p = FH : Hp$$
$$= FA : AO = e.$$

故 P, P' 皆在橢圓上.

準此法,可作橢圓上任意若干點.

104. 推論一 橢圓必對稱於其軸.

因於準線上另取一點 p', 使 $Op' = Op$, 則依同法可決定橢圓上之一點 Q, 並有

$$Qp' = Pp.$$

此表示軸之上方有一點 P 在橢圓上,其下方必存在一對稱點,亦在橢圓上.

故橢圓必對稱於其軸.

105. 推論二 過橢圓心作 AA' 軸之垂線 BB', 則橢圓亦對稱於 BB'.

設 C 為橢圓心, $BB' \perp AA'$ 於 C, 交 HH' 於 S, 交 PP' 於 L, 則 $BB' \perp PP'$.

因 $$AH \parallel CS \parallel A'H',$$
$$\therefore \quad SH = SH'.$$

故 S 為 $H'P'PH$ 圓之心,且有 $LP = LP'$.

此表明 BB' 右端有一點 P 在橢圓上,其左端必存在一對

稱點 P'，亦在橢圓上.

故橢圓又對稱於 BB'.　Q. E. D.

通常謂橢圓有兩軸，過焦點之弦 AA'，稱為長軸(Major axis)；垂直且平分 AA' 之弦 BB' 稱為短軸(Minor axis).因橢圓對此兩軸皆對稱，故橢圓對稱於此兩軸之交點 C，故 C 點稱為橢圓心.

106. 推論三　橢圓之準線有二焦點亦有二.

因於長軸上取 $CO'=CO$，並取 $CF'=CF$.

作 $O'Y'\perp O'C$ 於 O'，則以 F' 為焦點，$O'Y'$ 為準線，同樣可作此橢圓.

故橢圓有二焦點，並有二準線.

107. 推論四　橢圓之距離比 e，等於 $CA:CO$.

因
$$PF:Pp=AF:AO=A'F:A'O$$
$$=AF+A'F:AO+A'O$$
$$=2\,CA:2\,CO=CA:CO.$$
Q. E. D.

108. 推論五　CA 是 CF 及 CO 的比例中項.

因
$$A'F:A'O=AF:AO,$$
$$\therefore\quad A'F+AF:A'F-AF=A'O+AO:A'O-AO,$$
$$\therefore\quad 2CA:2CF=2CO:2CA,$$
$$\therefore\quad CF\times CO=\overline{CA}^2.$$
Q. E. D.

命題二

109. 橢圓上任一點，與兩焦點距離之和為常數，且等於其

長軸.

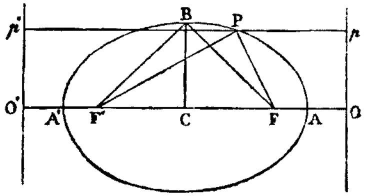

圖 48

設P爲橢圓上任一點，F, F'爲焦點，Op 及 $O'p'$ 爲準線，則

$$PF : Pp = CA : CO,$$

又 $PF' : Pp' = CA : CO,$

$$\therefore\quad PF + PF' : Pp + Pp' = CA : CO.$$

但 $$Pp + Pp' = 2\,CO;$$

$$\therefore\quad PF + PF' = 2\,CA = AA'.\qquad \text{Q. E. D.}$$

110. 推論一　由命題二,得橢圓之簡易作法:

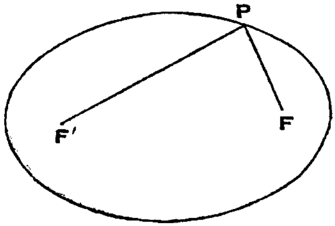

圖 49

取一線其長等於橢圓之長軸,以線之兩端緊繫於固定兩焦點F, F'上,用一鉛筆P,將線拉緊,則P筆移動一週,作成之曲線爲一橢圓.

因曲線上之任一點,與兩焦點距離之和恆等於該線之長,卽等於其長軸之長也.

111. 推論二　短軸端點與焦點之距離,等於長軸之半.

因 $$BF = BF',\qquad \therefore\quad BF = \tfrac{1}{2}AA'.$$

112. 推論三　短軸之半BC,爲AF及$A'F$之比例中項.

$$\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{FC}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2 = AF \cdot A'F.$$

113. 推論四　一點與橢圓兩焦點之距離和,大於或小於其長軸視此點在橢圓外,或橢圓內而定

(i) 設Q為橢圓外之一點,連QF及QF'.

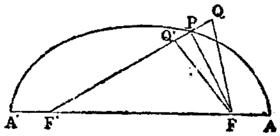

圖 50

P為QF'與橢圓之交點,連PF.

則 $$QF+QF'>PF+PF'$$

$$>AA' \qquad \text{Q. E. D.}$$

(ii) 設Q'為橢圓內之一點,連$Q'F$及$Q'F'$,令$Q'F'$與橢圓之交點為P.連PF.

則 $$Q'F'+Q'F<PF'+PF$$

$$<AA'. \qquad \text{Q. E. D.}$$

114. **推論五** 反之,若一點與橢圓兩焦點之距離和,大於其長軸,則此點在橢圓外,若小於其長軸,則此點在橢圓內.

115 **定義** 橢圓上任一點,與兩焦點之連線,稱為橢圓之焦點半徑 (Focal radii).

命題三

116 由橢圓上任一點,作二焦點半徑,則其外角之平分線,必全在橢圓外.

過此點任作他一直線,必與橢圓相割.

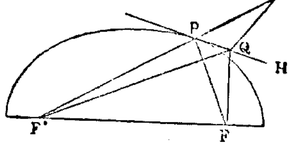

圖 51

(i) 設PH為PF及PF'之引長線所夾角之平分線.於其上取任一點Q.

截取 $PR=PF$, 連 QR, QF', 及 QF.

則 $$\triangle PQF=\triangle PQR. \qquad \text{(S. A. S.)}$$

$$\therefore\quad QR=QF.$$

但 $$QF'+QR>F'R$$

$$>PF'+PF,$$

$$\therefore\quad QF'+QF>PF'+PF.$$

故 Q 在橢圓外. (命題二,推論五)

故 PH 全在橢圓外. Q. E. D.

(ii) 過 P 點任作直線 PK.

作 PL 使 $\angle KPL=\angle KPF$.

截取 $PL=PF$, 連 $F'L$ 交 PK 於 Q 連 QF', QF.

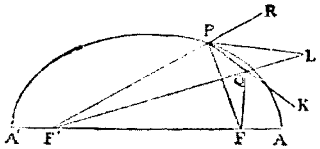

圖 52

則 $$\triangle FPQ=\triangle LPQ. \qquad \text{(S. A. S.)}$$

$$\therefore\quad QF=QL.$$

但 $$F'L<F'P+PL,$$

即 $$QF'+QF<PF'+PF.$$

故 Q 在橢圓內. (命題二,推論五.)

故 PK 必與橢圓相割.

117. **推論一** 自橢圓上任一點,作二焦點半徑,則所夾外角之平分線,爲橢圓之切線.

118. **推論二** 自橢圓上任一點,作二焦點半徑,則其所夾角之平分線,爲該點之法線.

119. **推論三** 橢圓頂點之切線垂直於橢圓之長軸.

橢圓長軸之緯線,亦垂直於長軸.

命 題 四

120. 從橢圓焦點至任意切線作垂線,則垂足之軌跡,爲以長軸爲直徑之圓周.

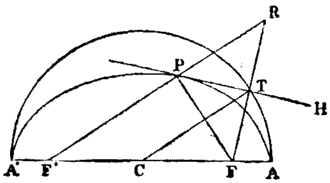

圖 53

設 PT 爲橢圓之任一切線,

$FT \perp PT$.

連 $F'P$, 引長交 FT 於 R, 連 TC.

則 $\triangle PFT = \triangle PRT$. (A. S. A.)

$\therefore \quad FT = TR$.

又 C 爲 FF' 之中點, 故 $CT \parallel F'R$.

且
$$CT = \tfrac{1}{2}F'R$$
$$= \tfrac{1}{2}(F'P + PF) = \tfrac{1}{2}AA'.$$

故 T 點在以 C 爲圓心, $\frac{1}{2}AA'$ 爲半徑之圓周上.

同理,若自焦點 F' 至切線 PT 作垂線, 則垂足 T 亦必在此圓周上.

121. **定義** 以橢圓之長軸爲直徑之圓,稱爲橢圓之輔圓 (Auxiliary circle).

122. **推論一** 橢圓上任意切線與輔圓相交,則交點與橢圓焦點之連線必垂直於此切線.

123. **推論二** 設一直角之頂移動於定圓周上,有一足經

過圓內一定點F,則他足常接於以F爲焦點之一橢圓.

124. 推論三　由命題四,可自橢圓外任一點Q,作得橢圓之二切線.

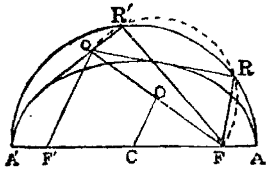

圖 54

連QF,以QF爲直徑作圓,交輔圓於兩點R及R',則此兩點與Q之連線,必爲橢圓之切線.

因 $FR\perp QR$, $FR'\perp QR'$.　(半圓周角)

故QR及QR'均爲橢圓之切線.　(推論二)

注意　以QF爲直徑之圓,必交橢圓之輔圓.

因取QF之中點O,連OC及QF'.

則
$$QF+QF'>AA'. \qquad \text{(命題三,推論四)}$$
$$\therefore\quad OF+OC>CA.$$
$$\therefore\quad OC>CA-OF.$$

此表示兩圓心之距離,大於其半徑之差,故此兩圓必相交.

125. 推論四　自橢圓心作直線,平行於橢圓上任一點之焦點半徑,爲該點切線截取之線分,等於長軸二分之一.

見命題四圖:　$CT=CA=\frac{1}{2}AA'$.

126. 推論五　以橢圓之任一焦點半徑爲直徑作圓,必切於其輔圓.

見推論三圖;若Q在橢圓上,則應有
$$QF+QF'=AA'.$$
即
$$OF+OC=CA.$$

即　　$OC=CA-OF.$

此表示兩圓心之距離,等於其半徑之差,故相切.

命題五

127. 自橢圓兩焦點至任一切線作垂線,則此二線分所(
之矩形,等於短軸之半的平方.

設 TPT' 為橢圓上任一切線,作 FT 及 $F'T'$ 垂直於切線. 連 TC, 引長交 $T'F'$ 於 S.

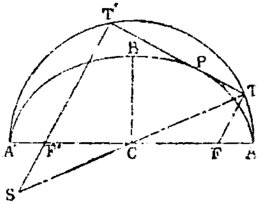

圖 55

則　　$\triangle CSF'=\triangle CTF.$　　(A. S. A.)

$\therefore\quad F'S=FT.$

$$CS=CT=CA.\qquad\text{(命題四}$$

故 S 點在輔圓上.

$$\therefore\quad A'F'\cdot F'A=SF'\cdot F'T'$$

$$=FT\cdot F'T'.$$

但　　$A'F'=A'C-F'C=BF'-F'C,$

$$F'A=A'C+F'C=BF'+F'C,$$

$$\therefore\quad \overline{BC}^2=\overline{BF'}^2-\overline{F'C}^2=A'F'\cdot F'A=FT\cdot F'T'.\qquad\text{Q. E. I}$$

命題六

128. 橢圓上相垂直兩切線之交點軌跡為一圓.

設 QP 及 QP' 為橢圓上互相垂直之二切線, QP 交輔圓1

T 及 T', QP' 交輔圓於 H 及 H'. 連 FT, FH, $F'T'$ 及 $F'H'$.

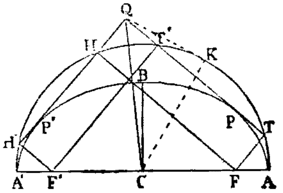

圖 56

作 QK 切於輔圓, 連 CK, CQ.

則 FT 及 $F'T'$ 同垂直於 QP, 故相平行, 且平行於 QP'. (命題四, 推論一)

同理 $F'H'$ 及 FH 同垂直於 QP', 故相平行, 且平行於 QP.

故 $$QT=FH;\ QT'=F'H'.$$

今
$$\overline{CQ}^2=\overline{CK}^2+\overline{QK}^2$$
$$=\overline{CA}^2+QT'\cdot QT$$
$$=\overline{CA}^2+F'H'\cdot FH$$
$$=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2 \qquad \text{(命題五)}$$
$$=\overline{AB}^2.$$

$$\therefore\ CQ=AB.$$

此表示動點 Q 與定點 C 有定距離 AB, 故 Q 之軌跡, 是以 C 爲圓心, AB 爲半徑之圓周.

通常稱此圓爲橢圓之**方向圓** (Direction circle).

命題七

129. 設 PN 爲橢圓上任一點之法線, PM 爲長軸之緯線, 則

$$CM:CN=\overline{CA}^2:\overline{CF}^2.$$

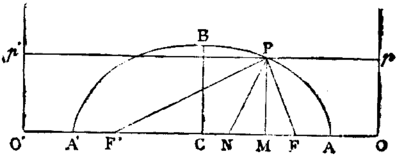

圖 57

連 PF 及 PF', 過 P 點作直線平行於長軸,交二準線於 p 及 p'

則因法線 PN 平分 $\angle FPF'$. (命題三推論二

$$\therefore\quad F'N : NF = F'P : PF$$

$$= Pp' : Pp.$$

$$\therefore\quad F'N + NF : F'N - NF = Pp' + Pp : Pp' - Pp.$$

或 $$2CF : 2CN = 2CO : 2CM.$$

$$\therefore\quad CM : CN = CO : CF$$

$$= CO \cdot CF : \overline{CF}^2.$$

故 $$CM : CN = \overline{CA}^2 : \overline{CF}^2.$$ (命題四,推論一)

130. 推論一 $$CM : MN = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2.$$

因 $$CM : CM - CN = \overline{CA}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2,$$

$$\therefore\quad CM : MN = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$$ (命題二,推論三

131. 推論二 $$\because\quad F'P : PF = F'N : NF.$$

$$\therefore\quad F'P + PF : PF = F'N + NF : NF,$$

或 $$CA : CF = PF : NF.$$

同理, $$CA : CF = PF' : NF'.$$

$$\therefore\quad \overline{CA}^2 : \overline{CF}^2 = PF \cdot PF' : NF \cdot NF'.$$

$$\therefore\quad \overline{CA}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2 = PF \cdot PF' : PF \cdot PF' - NF \cdot NF'.$$

$$\therefore\quad \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2 = PF \cdot PF' : \overline{PN}^2.$$

命題八

132. 由橢圓上任一點 P 作切線,引長交長軸於 T, 作縱線

PM，則 CA 為 CM 及 CT 之比例中項.

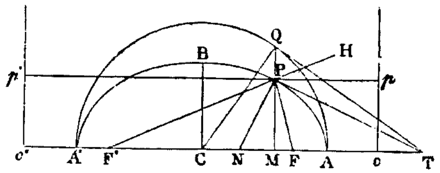

圖 58

過 P 點作 pPp'，平行於橢圓之長軸.連 PF 及 PF'. 則因切線 PT 是 $\angle F'PH$ 的平分線，

$$\therefore \quad F'T : TF = F'P : PF,$$

$$= p'P : Pp.$$

$$\therefore \quad F'T + TF : F'T - TF = Pp' + Pp : Pp' - Pp$$

即
$$2\,CT : 2\,CF = 2\,CO : 2\,CM.$$

$$\therefore \quad CT \cdot CM = CF \cdot CO$$

$$= \overline{CA}^2. \qquad \text{(命題一,推論五)}$$

133. 推論一 引長 MP 交輔圓於 Q，則 QT 為此圓之切線.

因
$$CT : CA = CA : CM$$

$$\therefore \quad CT : CQ = CQ : CM.$$

$$\therefore \quad \triangle CQT \sim \triangle CMQ,$$

$$\therefore \quad \angle CQT = 90^\circ.$$

故 QT 切於輔圓.

134 推論二 在任一緯線與橢圓及輔圓之交點，作該曲線之切線，必交橢圓長軸於同一點.

135. 推論三 橢圓及其輔圓在一直線上之兩緯線 PM

及QM之比值爲一定.

因$\triangle NPT$爲直角三角形,有$PM\perp NT$,

$$\therefore\quad NM\cdot MT=\overline{PM}^2.$$

又$\triangle CQT$亦爲直角三角形,有$QM\perp CT$.

$$\therefore\quad CM\cdot MT=\overline{QM}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{PM}^2:\overline{QM}^2=NM:CM$$

$$=\overline{CB}^2:\overline{CA}^2.\qquad \text{(命題七,推論一)}$$

$$\therefore\quad PM:QM=CB:CA$$

〔附註〕 $\angle QCA$稱爲P點之偏心角 (Excentric angle).

136. 推論四 橢圓對其長軸成凹形.

$$QM:PM=AC:BC=qm:pm,\qquad \text{(推論三)}$$

但 $QM:PM=sm:rm,$

(相似三角形)

$$\therefore\quad qm:pm=sm:rm.$$

由圓之性質知 $qm>sm.$

$$\therefore\quad pm>rm.$$

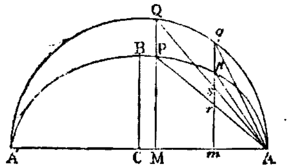

圖 59

此表示在橢圓上任一點P及頂點A之間,作長軸之垂線,則此線爲長軸及曲線截取之線分,大於其爲長軸及AP截取之線分,故知曲線對其長軸爲凹形.

命題九

137 橢圓長軸,爲其任一緯線截成兩線分之相乘積,與此

緯線平方之比爲一定.

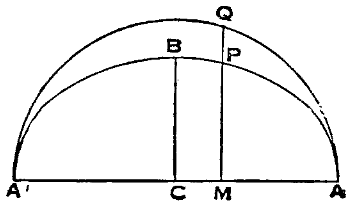

圖 60

由命題八, 推論三, 知

$$\overline{PM}^2 : \overline{QM}^2 = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2.$$

但 $\overline{QM}^2 = A'M \cdot MA,$

$$\therefore \quad \overline{PM}^2 : A'M \cdot MA = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2. \qquad \text{Q. E. D.}$$

138. **推論一**　橢圓之正焦點弦,爲其長軸及短軸之第三比例項.

設 L 爲正焦點弦之長,

則 $$\left(\frac{L}{2}\right)^2 : AF \cdot A'F = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2,$$

又 $$\left(\frac{L}{2}\right)^2 : \overline{CB}^2 = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2, \qquad \text{(命題二,推論三)}$$

$$\therefore \quad CA : CB = CB : \frac{L}{2}. \qquad \text{Q. E. D.}$$

139 **推論二**　自任一緯線足,作兩軸端點之連線的平行線,則此緯線,必爲短軸上分成兩線分的比例中項.

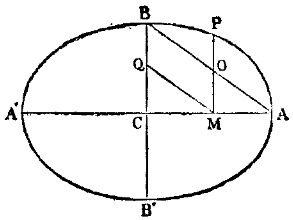

圖 61

設 PM 爲緯線, $MQ \parallel AB$.

則 $$\overline{CA}^2 : \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 : \overline{CQ}^2. \qquad \text{(平行線)}$$

$$\therefore \quad \overline{CA}^2 - \overline{CM}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CQ}^2 : \overline{CB}^2.$$

$$\therefore \quad AM \cdot A'M : \overline{CA}^2 = BQ \cdot B'Q : \overline{CB}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{PM}^2 : \overline{CB}^2 = BQ \cdot B'Q : \overline{CB}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{PM}^2 = BQ \cdot B'Q \qquad \text{Q. E. D}$$

140. 推論三 設 PN 爲橢圓上任一點 P 之法線交長軸於 N; 作 NH 垂直於焦點半徑 PF, 則 PH 等於正焦點弦之半.

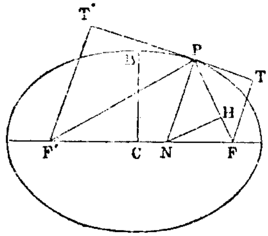

圖 62

因 $\triangle PFT \sim \triangle PNH$.

$$\therefore \quad FT : FP = PH : PN.$$

又 $$F'T' : F'P = PH : PN,$$ (何故?)

$$\therefore \quad FT \cdot F'T' : FP \cdot F'P = \overline{PH}^2 : \overline{PN}^2.$$

但 $$\overline{CB}^2 : FP \cdot F'P = \overline{PH}^2 : \overline{PN}^2,$$ (命題五)

$$\overline{CA}^2 : FP \cdot F'P = \overline{CB}^2 : \overline{PN}^2,$$ (命題七,推論二)

$$\therefore \quad CA : CB = CB : PH.$$

但 $$CA : CB = CB : \frac{L}{2},$$ (推論一)

$$\therefore \quad PH = \frac{L}{2}.$$ Q. E. D.

141. 推論四 自橢圓上任一點作切線及法線,並從兩焦點至切線作垂線,則此法線及二垂線成調和級數.

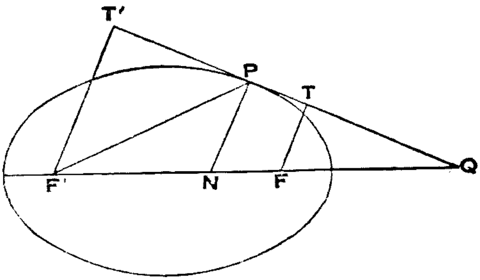

圖 63

引長切線$T'T$,交長軸於Q.

則由相似三角形之理,

$$T'Q : TQ = F'T' : FT.$$

又 $$F'T' : FT = T'P : PT.$$

$$\therefore \quad T'Q : TQ = T'P : PT.$$

故$T'T$爲P, Q所調分

故$T'Q, PQ$, 及TQ成調和級數.

但 $$T'Q : PQ : TQ = F'T' : NP : FT.$$

故$F'T'$, NP, 及FT亦成調和級數. Q. E. D.

命題一〇

142 在橢圓上任作一切線,過焦點作直線垂直於切點之焦點半徑於焦點,則此垂線與切線之交點軌跡,爲橢圓之準線.

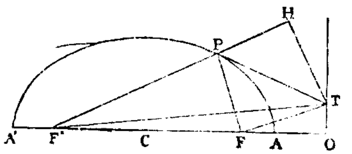

圖 64

設PT爲任意切線,$FT \perp PF$,交PT於T.

作$TO \perp A'A$之引長線於O,並作$TH \perp F'P$之引長線於H.連TF',

則 $$\triangle THP = \triangle TFP. \qquad \text{(A. S. A.)}$$

$$\therefore \quad PH = PF; \quad TH = TF.$$

$$\therefore \quad F'H = F'P + PF = A'A$$

令
$$\overline{F'H}^2=\overline{F'T}^2-\overline{TF}^2$$
$$=\overline{F'T}^2-\overline{TH}^2$$
$$=\overline{F'O}^2-\overline{FO}^2$$
$$=2\,CO\cdot 2\,CF.$$
$$\therefore\quad \overline{A'A}^2=4\,CO\cdot CF.$$
卽
$$\overline{CA}^2=CO\cdot CF.$$

故 OT 爲準線. (命題一,推論五.)

143 **推論一** 反之,自準線上任一點,作橢圓之切線,則此點與較近一焦點之連線,必垂直於自此焦點至切點之焦點半徑.

144 **推論二** 焦點弦兩端點之切線,必相交於準線上.

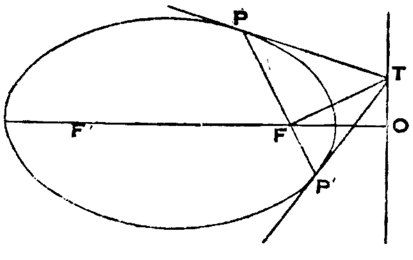

圖 65

命題一一

145. 橢圓內之任一弦,交一準線於 D, 若 F 爲此準線之對應焦點,則 FD 必爲 $\angle PFP'$ 之外角平分線.

作 Pp 及 $P'p'$，垂直於準線，引長 $P'F$ 至 Q.

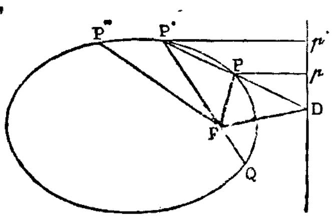

圖 66

則　$P'F : PF = P'p' : Pp$

$= P'D : PD.$

（相似三角形）

故 FD 平分 $\angle PFQ$.

146. **推論一**　準此理，若知一焦點，及橢圓上之三點 P, P' 及 P''，則能決定準線及長軸.

因先作 $P'FP$ 之外角平分線，與 $P'P$ 相交，得交點在準線上；再作 $P''FP$ 之外角平分線，與 $P''P$ 之交點亦應在準線上；連此兩交點，即得準線.

又由 $PF : Pp$，可決定橢圓之距離比 e，過 F 作準線之垂線，依命題一推論四，可決定橢圓心.　　$PF : Pp = CA : CO$.

故可決定橢圓之長軸.

147. **推論二**　若 P' 與 P 無限接近，則割線 $P'PD$ 之極限地位，成為 P 點之切線；於是 $\angle PFQ$ 成一平角，由本定理，知 $\angle PFQ$ 之平分線 FD，應垂直於焦點半徑 FP.

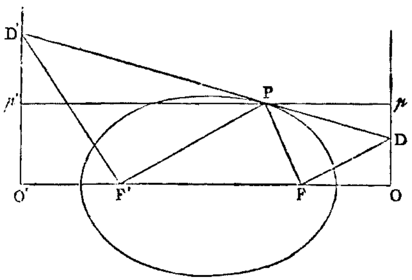

圖 67

讀者可與命題一〇之推論一，比較觀之.

148. **推論三**　又因

$$PF : PF' = Pp : Pp' = PD : PD'$$

而 $$\angle PFD = \angle PF'D' = 90°$$

故 $$\triangle PFD \sim \triangle PF'D'$$

$$\therefore \quad \angle FPD = \angle F'PD'.$$

故P點之切線,與切點之焦點半徑PF及PF'夾等角.

讀者試與命題三比較觀之.

命題一二

149. 設P, P'爲橢圓上二定點,O爲其上之動點,則PO及$P'O$之引長線,在一準線上截取之線分pp',於其對應焦點之對角爲一定.

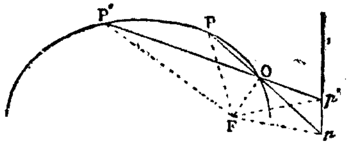

圖 68

由命題一一,知Fp應爲$\angle OFP$之外角平分線,Fp'應爲$\angle OFP'$之外角平分線

$$\therefore \quad \angle OFp + \tfrac{1}{2}\angle OFP = 90°.$$

$$\angle OFp' + \tfrac{1}{2}\angle OFP' = 90°.$$

$$\therefore \quad \angle OFp + \tfrac{1}{2}\angle OFP = \angle OFp' + \tfrac{1}{2}\angle OFP'$$

$$\therefore \quad \angle OFp - \angle OFp' = \tfrac{1}{2}(\angle OFP' - \angle OFP)$$

$$\therefore \quad \angle pFp' = \tfrac{1}{2}\angle PFP'.$$

故爲定角. Q. E. D.

150. 推論一 橢圓上四定點,及一動點構成線束之交比爲一定.

因 $O(P_1P_2P_3P_4)=O(p_1p_2p_3p_4)=F(p_1p_2p_3p_4)$ 為一定.

此 $p_1p_2p_3p_4$ 順次表 OP_1, OP_2, OP_3, 及 OP_4 在準線上之交點.

命題一三

151. 橢圓上任意二切線之交點,與一焦點之連線必平分兩切點至此焦點之二半徑所夾角.

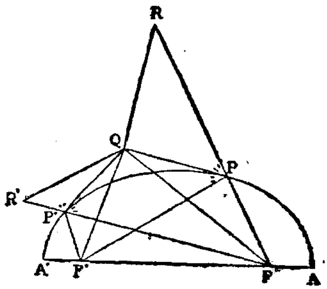

圖 69

設 QP 及 QP' 為橢圓上任意二切線,相交於 Q, 試證 QF 為 $\angle PFP'$ 之平分線.

引長 FP 至 R, 使 $PR=PF'$. 連 QR, QF',

則 $$\triangle PQR=\triangle PQF', \qquad \text{(S. A. S.)}$$

$$\therefore \quad QR=QF'.$$

又引長 FP' 至 R', 使 $P'R'=P'F'$.

則 $$\triangle QP'F'=\triangle QP'R', \qquad \text{(S. A. S.)}$$

$$\therefore \quad QR'=QF',$$

$$\therefore \quad QR=QR'.$$

又 $$FR=FP+PF'=FP'+P'F'=FR',$$

$$\therefore \quad \triangle FQR=\triangle FQR'. \qquad \text{(S. S. S.)}$$

故 $$\angle QFR=\angle QFR',$$

同理,亦可證 $$\angle QF'P=\angle QF'P'. \qquad \text{Q. E. D.}$$

152 附註　自橢圓上任一點 P, 作長軸之緯線,交輔圓於

Q, 則

$$(1)\quad \tan\tfrac{1}{2}PF'C=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot\tan\tfrac{1}{2}QCF;$$

$$(2)\quad \tan\tfrac{1}{2}PFA=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\tfrac{1}{2}QCF.$$

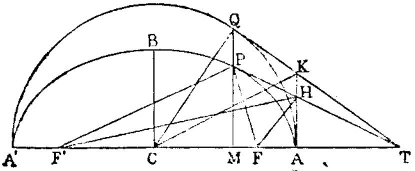

圖 70

(1) 在頂點 A 作橢圓之切線, 交 P, Q 兩點之切線於 H, K 連 KC, HF', 及 HF.

令 $CA=a$, 則 $\angle HF'C=\frac{1}{2}\angle PF'C$ (命題一三)

$$\angle HFA=\tfrac{1}{2}\angle PFA$$

又 $\angle KCA=\frac{1}{2}\angle QCF$

今 $$\tan\tfrac{1}{2}PF'C=\tan HF'C=\frac{HA}{F'A}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}PFA=\tan\angle HFA=\frac{HA}{FA}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}QCF=\tan KCA=\frac{KA}{CA}$$

$\therefore$ $$\frac{\tan\frac{1}{2}PF'C}{\tan\frac{1}{2}QCF}=\frac{HA\cdot AC}{KA\cdot AF'}=\frac{PM}{QM}\cdot\frac{AC}{AF'}$$

$$=\frac{CB}{CA}\cdot\frac{AC}{AF'}$$ (命題八, 推論三.)

$$=\frac{CB}{AF'}=\frac{\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CF}^2}}{CA+CF}$$

$$=\sqrt{\frac{CA-CF}{CA+CF}}=\sqrt{\frac{a-ae}{a+ae}};$$

$$\therefore\quad \tan\tfrac{1}{2}PF'C=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot\tan\tfrac{1}{2}QCF.$$

(2) 又 $$\frac{\tan\frac{1}{2}PFA}{\tan\frac{1}{2}QCF}=\frac{HA\cdot AC}{KA\cdot AF}=\frac{PM}{QM}\cdot\frac{AC}{AF}$$

$$=\frac{CB}{CA}\cdot\frac{AC}{AF}$$ (命題八,推論三)

$$=\frac{CB}{AF}=\frac{\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CF}^2}}{CA-CF}$$

$$=\sqrt{\frac{CA+CF}{CA-CF}}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

$$\therefore\quad \tan\tfrac{1}{2}PFA=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\tan\tfrac{1}{2}QCF.$$

153. 推論一 $\dfrac{\tan\frac{1}{2}PF'C}{\tan\frac{1}{2}PFA}=\dfrac{1-e}{1+e}.$

154. 推論二 橢圓之外切四邊形兩對邊,在同一焦點之對角相補.

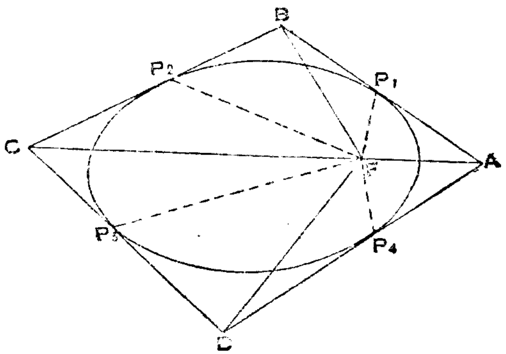

圖 71

因 $$\angle P_1FA=\tfrac{1}{2}\angle P_1FP_4$$
$$\angle P_1FB=\tfrac{1}{2}\angle P_1FP_2$$
$$\angle P_3FC=\tfrac{1}{2}\angle P_3FP_2$$
$$\angle P_3FD=\tfrac{1}{2}\angle P_3FP_4 \quad (+$$

$$\therefore\quad \angle AFB+\angle DFC=\tfrac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ. \qquad \text{Q. E. D.}$$

154. **推論三** 由命題一三,可自橢圓外任一點,作橢圓之二切線.

見命題一三圖;因 $QF'=QR=QR'$,

$$FR=FR'=AA',$$

故以 Q 爲心,QF' 爲半徑作一圓,再以 F 爲心 AA' 之長爲半徑作圓,則得兩交點 R 及 R'.

連 FR 及 FR',即得二切點 P 及 P'.

命題一四

155. 橢圓上一動切線,爲二定切線所截之線分,在每一焦點之對角爲一定.

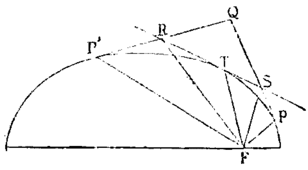

圖 72

設 QP 及 QP' 爲定切線. RS 爲動切線. 連 FP, FS, FT, FR, 及 FP'.

則 $\angle TFS=\tfrac{1}{2}\angle TFP$, (命題一三)

$\angle TFR=\tfrac{1}{2}\angle TFP'$,

$\therefore$ $\angle RFS=\tfrac{1}{2}\angle PFP'$, 爲定角. Q. E. D.

156 推論 橢圓上一動切線,爲四定切線截得四點之交

比為一定.

因各線分在焦點之對角,各為定角也.

命題一五

157. 在橢圓之任意直徑 CP 之端點,作切線 PT,交長軸之引長線於 T;又作橢圓頂點之切線 AH,交 CP 之引長線於 H,則 $\triangle CPT$ 與 $\triangle CAH$ 等積.

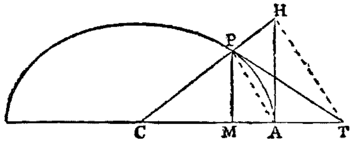

圖 73

作縱線 PM,連 PA, HT.

則 $$TC : CA = CA : CM \qquad \text{(命題八)}$$

$$= CH : CP. \qquad (PM \parallel HA)$$

$$\therefore \quad PA \parallel HT,$$

$$\therefore \quad \triangle PAH = \triangle PAT$$

$$\therefore \quad \triangle CPT = \triangle CAH \qquad \text{Q. E. D.}$$

158. **推論** $\triangle PMT =$ 梯形 $PMAH$.

命題一六

159. 自橢圓上任一點 P,作 PM 垂直於長軸,交輔圓於 Q;作 CQ' 垂直於 CQ,交輔圓於 Q';自 Q' 作 $Q'M'$,垂直於長軸,交橢圓於 P',則 CP' 必平行於過 P 點之切線.

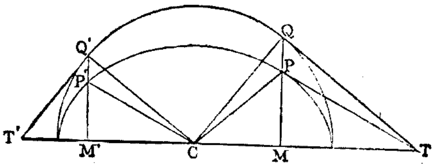

圖 74

切輔圓於Q之切線QT，必交切橢圓於P之切線PT於長軸之引長線上　　　　(命題八，推論二)

因QT及$Q'C$同垂直於CQ.

$$\therefore\quad Q'C \parallel QT.$$

$$\therefore\quad \triangle QMT \sim \triangle Q'M'C.$$

$$\therefore\quad MT : M'C = QM : Q'M'$$

$$= PM : P'M' \qquad \text{(命題八，推論三)}$$

$$\therefore\quad \triangle PMT \sim \triangle P'M'C.$$

$$\therefore\quad P'C \parallel PT. \qquad \text{Q. E. D.}$$

160. 定義　設一直徑平行於他一直徑端點之切線，則稱此直徑爲他一直徑之**配徑** (Conjugate diameter).

161. 推論一　若一直徑爲他一直徑之配徑，則他一直徑亦必爲此直徑之配徑.

見上圖；若於Q'及P'作切線，則其交點T'，亦應在長軸之引長線上.　　　　(命題八，推論二)

依同理，可證CP必平行於P'之切線.

由本定理，知CP'爲CP之配徑，今CP亦爲CP'之配徑，通常稱之曰互爲配徑.

162. 推論二　　$CM = Q'M'$,　$CM' = QM$.

因　　$\angle M'Q'C + \angle M'CQ' = 90^\circ$,

又　　$\angle M'CQ' + \angle MCQ = 90^\circ$,

$$\therefore\quad \angle M'Q'C = \angle MCQ,$$

$$\therefore \quad \triangle M'Q'C \sim \triangle MCQ.$$

但　$CQ' = CQ. \quad \therefore \quad CM = Q'M', \quad CM' = QM.$

163　推論三　$\overline{CM}^2 + \overline{CM'}^2 = \overline{CA}^2.$

因　$\overline{CA}^2 = \overline{CQ}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MQ}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{CM'}^2.$　（推論二）

164　推論四　$\overline{PM}^2 + \overline{P'M'}^2 = \overline{CB}^2.$

因　$QM : Q'M' = PM : P'M',$　（命題八推論三）

$$\therefore \quad \overline{QM}^2 + \overline{Q'M'}^2 : \overline{QM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{P'M'}^2 : \overline{PM}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{CA}^2 : \overline{PM}^2 + \overline{P'M'}^2 = \overline{QM}^2 : \overline{PM}^2$$　（推論二，及三）

$$= \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2.$$　（命題八，推論三）

$$\therefore \quad \overline{PM}^2 + \overline{P'M'}^2 = \overline{CB}^2.$$

165. 推論五　互配兩直徑各半之平方和，等於橢圓之長短軸各半之平方和.

因　$\overline{CM}^2 + \overline{CM'}^2 = \overline{CA}^2.$　（推論三）

$\overline{PM}^2 + \overline{P'M'}^2 = \overline{CB}^2.$　（推論四）

相加得　$\overline{CP}^2 + \overline{CP'}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2.$

166　推論六　$PM : CM' = CB : CA = P'M' : CM.$

因　$PM : QM = CB : CA.$

但　$QM = CM', \quad \therefore \quad PM : CM' = CB : CA.$

又　$P'M' : Q'M' = CB : CA.$

但　$Q'M' = CM, \quad \therefore \quad P'M' : CM = CB : CA.$

167　推論七　$\triangle CPM$ 與 $\triangle CP'M'$ 等積.

因　$PM : P'M' = QM : Q'M' = CM' : CM,$　（推論二）

$$\therefore\quad PM\cdot CM = P'M'\cdot CM'. \qquad \text{Q. E. D.}$$

命題一七

168. 自橢圓上任一點 Q, 作任意直徑 Pp 之緯線 QG, 交長軸於 L; 作 QS 垂直於長軸, 交 Pp 或其引長線於 K; AH 爲頂點之切線, 則 $\triangle QSL$ 與梯形 $KSAH$ 等積.

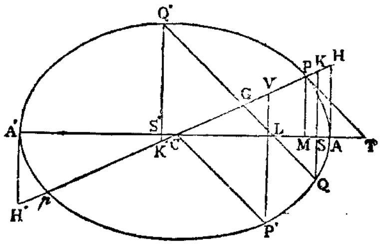

圖 75

作 PM 垂直於長軸, 則由相似三角形,

$$CA : CS : CM = AH : SK : MP.$$

$$\therefore\quad CA+CS : CA+CM = AH+SK : AH+MP.$$

$$\therefore\quad A'S : A'M = AH+SK : AH+MP.$$

$$\therefore\quad \frac{A'S}{A'M}\cdot\frac{AS}{AM} = \frac{AH+SK}{AH+MP}\cdot\frac{AS}{AM}.$$

但
$$\frac{A'S\cdot AS}{A'M\cdot AM} = \frac{\overline{SQ}^2}{\overline{PM}^2}, \qquad \text{(命題九)}$$

而
$$\frac{(AH+SK)AS}{(AH+MP)AM} = \frac{\text{梯形 } KSAH}{\text{梯形 } PMAH}.$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{SQ}^2}{\overline{PM}^2} = \frac{\text{梯形 } KSAH}{\text{梯形 } PMAH}.$$

今
$$\triangle QSL \sim \triangle PMT,$$

$$\therefore\quad \triangle QSL : \triangle PMT = \overline{SQ}^2 : \overline{PM}^2.$$

$\therefore \quad \triangle QSL : \triangle PMT =$ 梯形 $KSAH$: 梯形 $PMAH.$

但　　$\triangle PMT =$ 梯形 $PMAH.$　（命題一五,推論一）

$\therefore \quad \triangle QSL =$ 梯形 $KSAH.$

169. 推論一　$\triangle QGK =$ 梯形 $TPGL.$

因　$\triangle QSL =$ 梯形 $KSAH,$　$\triangle PMT =$ 梯形 $PMAH,$

$\therefore \quad \triangle QGK =$ 四邊形 $GLAH =$ 梯形 $GLTP.$

170. 推論二　任意直徑必平分與其端點一切線平行之一羣平行弦.

因依同理,可證　$\triangle GQ'K' =$ 梯形 $GLTP.$

$\therefore \quad \triangle GQK = \triangle GQ'K'.$

且此二三角形相似,

$\therefore \quad GQ = GQ'.$

命題一八

171. 若 CP' 與 CP 互爲配徑, QG 爲 CP 之任一緯線.

則　$\overline{QG}^2 : PG \cdot Gp = \overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2.$

見圖 75; 因　$\triangle CPT : \triangle CGL = \overline{CP}^2 : \overline{CG}^2,$

依減比定理,

$$\triangle CPT : \text{梯形 } GLTP = \overline{CP}^2 : \overline{CP}^2 - \overline{CG}^2,$$

或　$\triangle CP'V : \triangle QGK = \overline{CP}^2 : PG \cdot Gp.$

（命題一七,推論一）

$\therefore \quad \overline{CP'}^2 : \overline{GQ}^2 = \overline{CP}^2 : PG \cdot Gp.$

或 $$\overline{QG}^2 : PG\cdot Gp=\overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2.$$

172. 推論一 與橢圓心等距離任一直徑之二緯線必相等.

因其與橢圓心等距離,則矩形$(PG\cdot Gp)$相同,故此二緯線應相等.

173. 推論二 橢圓內任一直徑之緯線平方,必與此直徑上兩線分相乘積成比例.

命題一九

174. 於橢圓上任一點P作法線,交長軸於N,交短軸於N',若CP與CP'互爲配徑,則

$$PN : CP'=CB : CA=CP' : PN'.$$

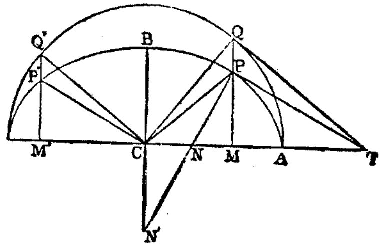

圖 76

因 $CP' \parallel PT$, $\therefore$ $\triangle P'M'C\sim\triangle PMT\sim\triangle NPM.$

$$\therefore\ P'C : NP=CM' : PM$$

$=QM : PM$ (命題一六,推論二

$=CA : CB.$ (命題八,推論二

又 $$\triangle CNN' \sim \triangle MNP.$$

$$\therefore \quad NN' : PN = CN : NM.$$

$$\therefore \quad NN' + PN : PN = CN + NM : NM.$$

或 $$PN' : PN = CM : NM$$

$$= \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2. \qquad \text{(命題七)}$$

$$\therefore \quad PN' \cdot PN : \overline{PN}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$$

$$= \overline{P'C}^2 : \overline{NP}^2.$$

$$\therefore \quad PN' \cdot PN = \overline{P'C}^2.$$

$$\therefore \quad PN' : P'C = P'C : PN = CA : CB.$$

175. 推論 於橢圓上任一點P作法線交長軸於N交短軸於N',若CP'與CP互爲配徑,則CP'是PN及PN'之比例中項.

命題二〇

176. 若CP'與CP互爲配徑,則CP'爲PF及PF'之比例中項.

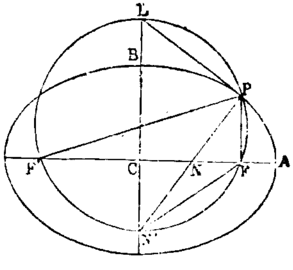

圖 77

作$\triangle PFF'$之外接圓交橢圓短軸及其引長線於N'及L.則PN'必爲$\angle F'PF$之平分線.(N'爲$\widehat{F'F}$之中點)

故PN'爲P點之法線.

又 $$\angle PF'N = \angle PN'F. \qquad \text{(對同弧)}$$

$$\therefore \quad \triangle PF'N \sim \triangle PN'F$$

$$\therefore \quad F'P : PN = PN' : PF.$$

$$\therefore\quad F'P\cdot PF=PN\cdot PN'$$

$$=\overline{CP'}^2.\qquad\text{(命題一九)}\quad \text{Q. E. D.}$$

又法　　$2CA=PF+PF'$,

$$\therefore\quad 4\overline{CA}^2=\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2+2PF\cdot PF'$$

$$=2\overline{CP}^2+2\overline{CF}^2+2PF\cdot PF'.$$

$$\therefore\quad PF\cdot PF'=2\overline{CA}^2-\overline{CP}^2-\overline{CF}^2$$

$$=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2-\overline{CP}^2\qquad\text{(命題二推論三)}$$

$$=\overline{CP}^2+\overline{CP'}^2-\overline{CP}^2\qquad\text{(命題一六,推論三)}$$

$$=\overline{CP'}^2.$$

177. 推論一　$\overline{PN}^2=PN'\cdot PN-NN'\cdot PN$

$$=\overline{CP'}^2-F'N\cdot NF.$$

178. 推論二　因PN'為法線,則PL既垂直於PN',故PL為切線,是以$\triangle PFF'$之外接圓與橢圓之短軸及其引長線之交點,卽為P點之法線與切線交短軸之點也.

179. 推論三　設K為N'至焦點半徑PF或PF'之垂足.

則　　　$^*PK=\frac{1}{2}(PF+PF')=\frac{1}{2}AA'$.

---

*註　　$PK=\frac{1}{2}(PF+PF')$

可證明如次:作 $N'K'\perp PF$ 之引長線,則直角三角形 $PN'K$ 及 $PN'K'$ 全等.　(何故?)

又　　$N'F'=N'F$,　(對等弧)

$\therefore$　　$\triangle N'KF'\cong\triangle N'K'F$.

$\therefore$　　$F'K=FK'$, $\therefore PK=\frac{1}{2}(PF+PF')$

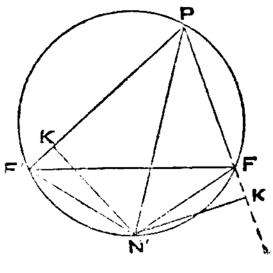

圖 78

此爲三角形及其外接圓之一重要性質.(參閱 Geometrical Gymnasium, Ex. 179, Galbraith and Haughton's Manual of Euclid, books 1. 2, 3.)

180 推論四 若自 L 向 PF' 作垂線, K' 爲垂足,

則 $$F'K'=\tfrac{1}{2}(PF+PF')=\tfrac{1}{2}AA'.$$

若 K'' 爲 L 至 PF 之垂足,

則 $$FK''=\tfrac{1}{2}(PF+PF')=\tfrac{1}{2}AA'.\qquad\text{(見推論三)}$$

181. 推論五 $\overline{CA}^2:\overline{CB}^2=PF'\cdot PF:\overline{PN}^2$ (命題七.推論二)

$$=\overline{CP'}^2:\overline{PN}^2.$$

$$\therefore\quad CA:CB=CP':PN.$$

命題二一

182. 自橢圓心 C 至其上任一點 P 之切線作垂線 CK, 若 CP' 與 CP 互爲配徑,則

$$CK:CA=CB:CP'.$$

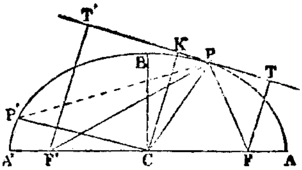

圖 79

作 FT 及 $F'T'$, 垂直於 P 點之切線.

則 $$\triangle FPT\sim\triangle F'PT'.$$

$$\therefore\quad FP:F'P=FT:F'T'$$

$$=FP+F'P:FT+F'T'$$

$$=CA:CK.$$

$$\therefore\quad FP\cdot F'P:FT\cdot F'T'=\overline{CA}^2:\overline{CK}^2.$$

但 $$FP\cdot F'P=\overline{CP'}^2.\qquad\text{(命題二〇)}$$

$$FT\cdot F'T'=\overline{CB}^2.\qquad\text{(命題五)}$$

$$\therefore\quad \overline{CP'}^2:\overline{CB}^2=\overline{CA}^2:\overline{CK}^2.$$

$$\therefore\quad CP':CB=CA:CK.\qquad\text{Q. E. D.}$$

183. **推論**　若CP'與CP互為配徑,則$\triangle CPP'$之面積為一定.

因　　$$CP'\cdot CK=CB\cdot CA.$$

$$\therefore\quad \triangle P'CP=\triangle BCA\text{ 為一定}.$$

命題二二

184. 設橢圓內兩弦相交,則每一弦上兩線分之乘積,與其平行之直徑之半之平方成比例.

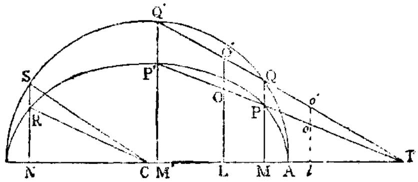

圖 80

設PP'為橢圓內過O點之任一弦.CR為其平行之直徑的二分之一.作PM, $P'M'$及RN,垂直於長軸,交輔圓於Q, Q',及S.

則　　$PM:P'M'=QM:Q'M$.　　(命題八,推論二)

故PP'及QQ'引長交長軸於同一點T.

過O,作$O'OL$垂直於長軸.

又　　$NC:M'T=RN:P'M'$　　(相似三角形)

$=SN:Q'M'$.　　(命題八,推論三)

$$\therefore\quad SC\parallel Q'T.$$

$$\therefore\quad \triangle SCR\sim\triangle Q'TP'.$$

今　$$OP' : O'Q' = P'T : Q'T.$$　(平行線)

而　$$OP : O'Q = P'T : Q'T.$$

$$\therefore \quad OP \cdot OP' : O'Q \cdot O'Q' = \overline{P'T}^2 : \overline{Q'T}^2$$

$$= \overline{RC}^2 : \overline{CS}^2.$$

$$\therefore \quad OP \cdot OP' : \overline{RC}^2 = O'Q \cdot O'Q' : \overline{CS}^2.$$

同理過O點任作其他弦pp',再作$pm, p'm'$垂直於長軸,其引長線交輔圓於q, q'.

則　$$OL : O'L = CB : CA$$

$$= pm : qm$$

$$= p'm' : q'm'.$$　(命題八,推論三)

$\therefore$　qq'弦必經過O'.

若Cr為平行於pp'之直徑的二分之一,

則　$$Op \cdot Op' : \overline{Cr}^2 = O'q \cdot O'q' : \overline{CA}^2.$$

但　$$O'Q \cdot O'Q' = O'q \cdot O'q',$$

$$\therefore \quad OP \cdot OP' : Op \cdot Op' = \overline{CR}^2 : \overline{Cr}^2.$$　Q. E. D.

又法

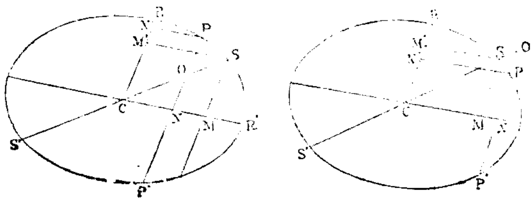

圖 81

設PP'為過O點之任一弦,CR為平行於此弦之直徑的二

分之一，CR' 是 CR 之配徑的二分之一．過 O 點作直徑交橢圓於 S, S'．作 CR' 之緯線 SM，作 CR 之緯線 SM' 及 PN'．

則 $$\overline{RC}^2-\overline{CN'}^2 : \overline{RC}^2-\overline{CM'}^2=\overline{PN'}^2 : \overline{SM'}^2.$$

（命題一八，推論二）

$$\therefore\quad \overline{RC}^2-\overline{PN}^2 : \overline{RC}^2-\overline{SM}^2=\overline{CN}^2 : \overline{CM}^2$$
$$=\overline{ON}^2 : \overline{SM}^2.$$
$$\therefore\quad \overline{RC}^2-\overline{PN}^2 : \overline{ON}^2=\overline{RC}^2-\overline{SM}^2 : \overline{SM}^2.$$
$$\therefore\quad \overline{RC}^2-\overline{PN}^2+\overline{ON}^2 : \overline{ON}^2=\overline{RC}^2 : \overline{SM}^2.$$
$$\therefore\quad \overline{RC}^2-PO\cdot OP' : \overline{RC}^2=\overline{ON}^2 : \overline{SM}^2$$
$$=\overline{OC}^2 : \overline{CS}^2.$$
$$\therefore\quad PO\cdot OP' : \overline{RC}^2=\overline{CS}^2-\overline{OC}^2 : \overline{CS}^2$$
$$=SO\cdot OS' : \overline{CS}^2.$$

若 pp' 爲過 O 點之另一弦，且 Cr 爲其平行直徑二分之一．

則 $$pO\cdot Op' : \overline{Cr}^2=SO\cdot OS' : \overline{CS}^2.$$
$$\therefore\quad PO\cdot OP' : pO\cdot Op'=\overline{CR}^2 : \overline{Cr}^2.$$

185. 推論一 橢圓內一直徑爲其一緯線截成兩線分相乘積，與此緯線平方之比，等於此直徑之半之平方，與其配徑之半之平方比．

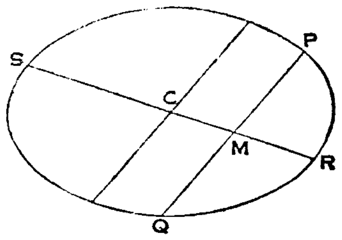

圖 82

因 $$SM\cdot MR : PM\cdot MQ=\overline{CR}^2 : \overline{CR'}^2,$$

即 $$\therefore\quad SM\cdot MR : \overline{PM}^2=\overline{CR}^2 : \overline{CR'}^2.$$

186. 推論二 若O爲橢圓外之一點，P. P'兩點相合，p, p'兩點亦相合，則OPP'及Opp'成爲橢圓之切線，故自橢圓外一點至橢圓二切線之比，等於其平行之直徑之半之比.

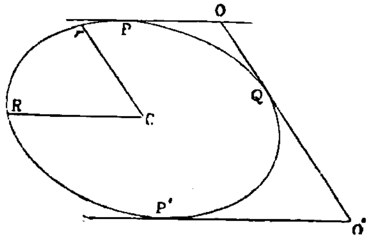

圖 83

187. 推論三 設PO及$P'O'$爲平行二切線，交第三切線於O及O'.

則 $OP : O'P' = OQ : O'Q.$

因 $OP : OQ = CR : Cr = O'P' : O'Q.$ (推論二)

188. 推論四 自橢圓外一點，作割線，並作切線，則割線全長乘其外線分，與此切線平方之比，等於其平行之直徑之半之平方比.

〔附註〕若於命題二二之證明中，將O, O', L讀作o, o', l，則此證明可適用於兩弦之交點在橢圓外.

命題二三

189. 設OP, OR爲自橢圓外一點O，向橢圓所作之二切線，任作直線AQ'平行於一切線，遇他一切線於A，割橢圓於Q, Q'，交切點弦於B，則AQ, AB, AQ'成幾何級數.

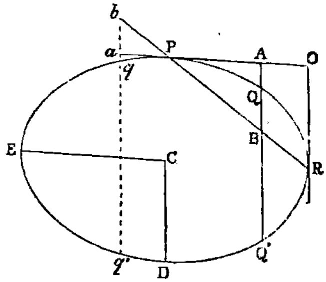

圖 84

作平行於OP及OR之半直徑CE及CD.

則 $AQ\cdot AQ' : \overline{AP}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{CE}^2$ (命題二二, 推論四)

$= \overline{OR}^2 : \overline{OP}^2$ (命題二二, 推論二)

$= \overline{AB}^2 : \overline{AP}^2.$ (平行線)

$\therefore \quad AQ\cdot AQ' = \overline{AB}^2.$ Q.E.D.

190. **推論** 若 AQ' 爲切線,

則 $AQ = AQ'.$

$\therefore \quad AB = AQ'.$

故知橢圓上平行二切線爲任意第三切線所截,則平行切線之一爲他二切線之切點弦截取之線分,必爲此第三切線所平分.

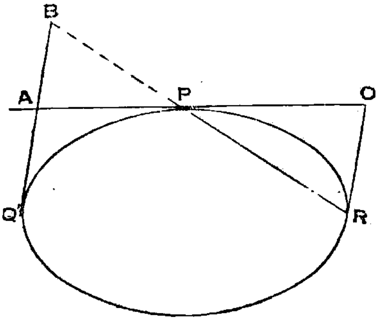

圖 85

命題二四

191. 設一圓交橢圓於四點,則其公共弦必與長軸夾等角.

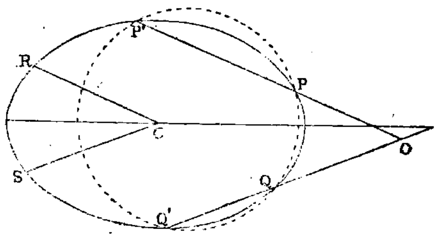

圖 86

設 PP' 及 QQ' 二公共弦相交於 O.

作半直徑 CR 及 CS, 順次平行於 $P'P$ 及 $Q'Q$.

則 $OP\cdot OP' : OQ\cdot OQ' = \overline{CR}^2 : \overline{CS}^2.$ (命題二二)

但 $OP\cdot OP' = OQ\cdot OQ',$

$$\therefore\quad CR = CS.$$

故 CR 及 CS 與橢圓長軸夾等角, 因而 $P'P$ 及 $Q'Q$ 與長軸夾等角. (命題一, 推論一)

192. 推論 依同理可證公共弦 PQ 及 $P'Q'$, 又 $P'Q$ 及 PQ', 與橢圓長軸夾等角.

命題二五

193. 在橢圓上任一點 P 作切線, 交直徑 AA' 之引長線於 T, 作緯線 PM, 則 CA 爲 CM 及 CT 之比例中項.

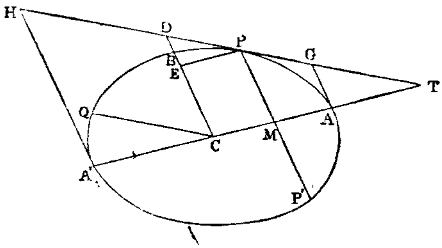

圖 87

自 A, A' 作切線交 P 點之切線於 G, H.

則 $$A'T : AT = A'H : AG.$$ (平行線)

又 $$A'M : MA = HP : PG,$$

但 $$A'H : AG = HP : PG,$$ (命題二二推論三)

$$\therefore\quad A'T : AT = A'M : MA.$$

C 爲 $A'A$ 之中點, 故有 $\overline{CA}^2 = CM \cdot CT$.

194. 推論一 若 PM 爲任意直徑 $A'A$ 之緯線, CT 爲 CM 及 CA 之第三比例項, 則 PT 必爲橢圓之切線.

195. 推論二 於任一弦之兩端作切線, 必相交於以此弦爲緯線之直徑上.

196. 推論三 過橢圓上兩切線之交點作直徑，必平分此切點弦.

命題二六

197. 橢圓上二平行定切線，為一動切線截取兩線分相乘積為一定，且等於其平行之半直徑之平方.

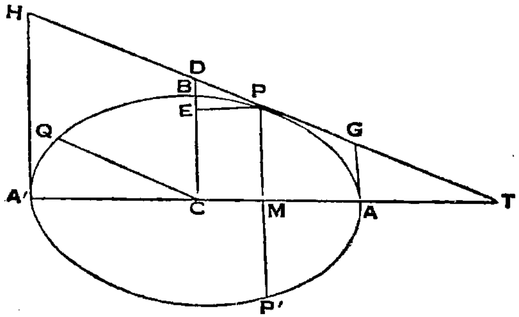

圖 88

設 AG 及 $A'H$ 為橢圓上二平行定切線為動切線 GPH 截取之線分，半直徑 $CB \parallel AG$，引長交 GPH 於 D. 自切點 P 作 CB 之縱線 PE.

則 $$CT : CA = CA : CM,$$ (命題二五)

減比， $$CT : AT = CA : MA.$$

$$\therefore \quad CT : CA = AT : MA.$$ (中項互換)

加比， $$CT : TA' = AT : MT;$$

$$\therefore \quad CD : A'H = AG : PM;$$ (相似三角形)

$$\therefore \quad A'H\cdot AG = CD\cdot PM = CD\cdot CE = \overline{CB}^2. \quad (\text{命題二五})$$

198 推論一 動切線上兩線分相乘積 $PG\cdot PH$, 等於其平行之半直徑平方.

因 $$A'H : HP = CB : CQ = AG : PG,$$

(命題二二,推論三)

$$\therefore \quad A'H\cdot AG : HP\cdot PG = \overline{CB}^2 : \overline{CQ}^2.$$

但 $$A'H\cdot AG = \overline{CB}^2,$$

$$HP\cdot PG = \overline{CQ}^2.$$

199. 推論二 橢圓上任意切線,必爲二平行切線及過二切點之直徑所調分.

因 $$HT : TG = A'H : AG \quad (\text{相似三角形})$$

$$= HP : PG. \quad (\text{命題二二,推論三})$$

200. 推論三 設橢圓上二平行切線 AC、BF 爲其他二切線 EF、CD 所截,則

$$AE : BD = EO : OF = CO : OD.$$

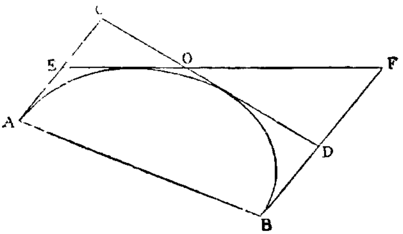

圖 89

因 $$AC\cdot BD = AE\cdot BF.$$

(命題二六)

$$\therefore \quad AE : AC = BD : BF.$$

$$\therefore \quad AE : AC - AE = BD : BF - BD.$$

或 $$AE : EC = BD : DF.$$

$$\therefore \quad AE : BD = EC : DF.$$

$$= EO : OF = CO : OD. \qquad \text{Q. E. D.}$$

201　**推論四**　連 FC 及 DE,必相交於 BA 之引長線上.

因　$AE : BD = EC : DF,$　(推論三

故 $FC, DE,$ 及 BA 相會於一點.

命題二七

202. 在兩個半直徑 CA, CP 的端點,作切線 AK, PT,則所成 $\triangle CAK$ 及 $\triangle CPT$ 等積.

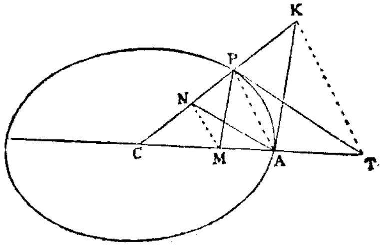

圖 90

作 CA 之緯線 PM,

則　$TC : CA = CA : CM.$

(命題二五)

$= CK : CP,$　(平行線)

$$\therefore \quad KT \parallel PA,$$

$$\therefore \quad \triangle PAT = \triangle PKA,$$

$$\therefore \quad \triangle CPT = \triangle CAK.$$

203. **推論**　自 A 作 CP 之緯線 AN,則 $\triangle CMP$ 及 $\triangle CAN$ 等積.

因　$AN \parallel PT,$

$$\therefore \quad TC : CA = PC : CN,$$

$$CA : CM = PC : CN,$$

故　$MN \parallel PA.$

$$\therefore \quad \triangle NPM = \triangle NAM,$$

$$\therefore \quad \triangle CMP = \triangle CAN.$$

命題二八

204. 自二互配半直徑 CP, CQ 的端點,作任一直徑 AA' 的縱線 PM 及 QN, 則

$$\overline{CN}^2 = AM \cdot MA', \quad \overline{CM}^2 = AN \cdot NA'.$$

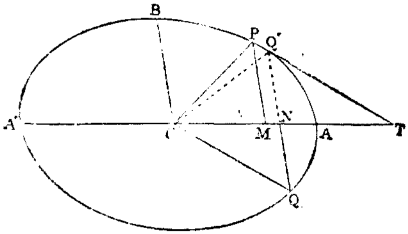

圖 91

$$\overline{MT}^2 : \overline{CN}^2 = \overline{PM}^2 : \overline{QN}^2 \qquad \text{(相似三角形)}$$

$$= AM \cdot MA' : AN \cdot NA'. \qquad \text{(命題一八推論二)}$$

但
$$AM \cdot MA' = \overline{AC}^2 - \overline{CM}^2$$

$$= TC \cdot CM - \overline{CM}^2 \qquad \text{(命題二五)}$$

$$= CM \cdot MT.$$

$$\therefore \quad \overline{MT}^2 : \overline{CN}^2 = CM \cdot MT : AN \cdot NA'.$$

$$\therefore \quad \overline{MT}^2 : CM \cdot MT = \overline{CN}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CN}^2.$$

$$\therefore \quad MT : CM = \overline{CN}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CN}^2.$$

加比,
$$MT : CT = \overline{CN}^2 : \overline{CA}^2.$$

$$\therefore \quad CM \cdot MT : CM \cdot CT = \overline{CN}^2 : \overline{CA}^2.$$

但
$$CM \cdot CT = \overline{CA}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{CN}^2 = CM\cdot MT = CM\cdot MA'.$$

同理可證 $\overline{CM}^2 = AN\cdot NA'.$ Q. E. D.

205. 推論一 $\overline{CM}^2+\overline{CN}^2=\overline{CA}^2.$

因 $\overline{CM}^2+\overline{CN}^2 = AN\cdot NA' + AM\cdot MA'$

$$=\overline{CA}^2-\overline{CN}^2+\overline{CA}^2-\overline{CM}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{CM}^2+\overline{CN}^2=\overline{CA}^2.$$

206. 推論二 $\overline{PM}^2+\overline{QN}^2=\overline{CB}^2$, CB 爲 CA 之互配半直徑.

因 $\overline{CB}^2:\overline{CA}^2=\overline{PM}^2:AM\cdot MA'$ 或 $\overline{CN}^2$, (命題一八)

又 $\overline{CB}^2:\overline{CA}^2=\overline{QN}^2:AN\cdot NA'$ 或 $\overline{CM}^2$,

$$\therefore\quad \overline{CB}^2:\overline{CA}^2=\overline{PM}^2+\overline{QN}^2:\overline{CN}^2+\overline{CM}^2.$$

但 $\overline{CA}^2=\overline{CN}^2+\overline{CM}^2$, $\therefore\quad \overline{CB}^2=\overline{PM}^2+\overline{QN}^2.$

207. 推論三 $CA:CB=CM:QN=CN:PM.$

因 $\overline{CA}^2:\overline{CB}^2=AM\cdot MA'$ 或 $\overline{CN}^2:\overline{PM}^2$

$$=AN\cdot NA' \text{ 或 } \overline{CM}^2:\overline{QN}^2.$$

$$\therefore\quad CA:CB=CN:PM=CM:QN.$$

208. 推論四 $\triangle CMP=\triangle CNQ.$

引長 QN 至 Q', 則 $QN=Q'N.$

$$\therefore\quad CN:CM=PM:Q'N. \qquad \text{(推論三)}$$

$$\therefore\quad \triangle CMP=\triangle CNQ'=\triangle CNQ.$$

命題二九

209. 橢圓上任一點 A 之切線交互配兩直徑 CP, CQ 之引

長線於 T 及 T', 則 AT 與 AT' 之乘積, 等於其平行之半直徑之平方.

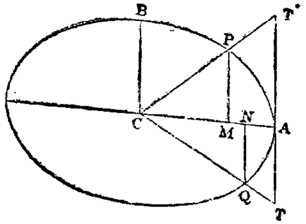

圖 92

作直徑 $A'A$, 並作其緯線 PM 及 QN.

則 $$CM : PM = CA : AT',$$

(相似三角形)

$$\therefore \quad CM \cdot AT' = PM \cdot CA,$$

$$= CB \cdot CN. \quad \text{(命題二八, 推論三)}$$

$$\therefore \quad CM : CN = CB : AT',$$

又 $$CN : NQ = CA : AT, \quad \text{(相似三角形)}$$

$$\therefore \quad CN \cdot AT = CA \cdot NQ,$$

$$= CB \cdot CM. \quad \text{(命題二八, 推論三)}$$

$$\therefore \quad CM : CN = AT : CB.$$

$$\therefore \quad CB : AT' = AT : CB.$$

$$\therefore \quad AT \cdot AT' = \overline{CB}^2. \qquad \text{Q. E. D.}$$

又法 於橢圓上任一點 P 作切線, 交互配二直徑 CA, CB 之引長線於 T 及 T', CQ 爲其平行之半直徑.

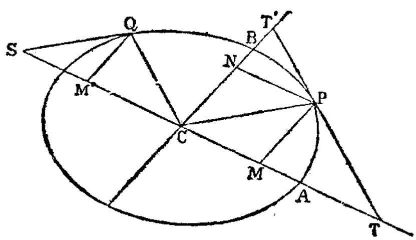

圖 93

作 CA 之緯線 PM 及 QM', 及 CB 之緯線 PN.

則 $$CS \cdot CM' = \overline{CA}^2 = CM \cdot CT. \quad \text{(命題二五)}$$

$$\therefore \quad CS : CT = CM : CM'.$$

但 $$CS : CT = CQ : PT, \qquad \text{(相似三角形)}$$

$$\therefore \quad CQ : PT' = CM : CM'$$
$$= PN : CM'$$
$$= PT' : CQ. \qquad \text{(相似三角形)}$$

$$\therefore \quad PT \cdot PT' = \overline{CQ}^2.$$

210. **推論** 反之,若於橢圓之任意切線上截取 AT 及 AT',使 $AT \cdot AT'$ 等於其平行之半直徑平方,則 CT 及 CT' 必為互配二直徑.

命題三〇

211. 已知橢圓兩互配半直徑之長及其位置,求橢圓之長軸及短軸.

設 CA' 及 CB' 為互配二半直徑.

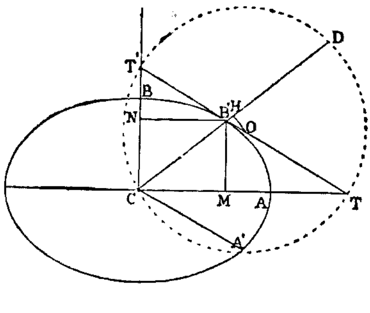

圖 94

在 CB' 之引長線上,截取 $B'D$,使 $B'D$ 為 CB' 及 CA' 之第三比例項.在 CD 之中點 H,作 $HO \perp CD$,過 B' 作 CA' 之平行線,交 HO 於 O.以 O 為圓心,CO 為半徑,作圓,交 $B'O$ 之引長線於 T 及 T';連 CT, CT'.作 $B'M \parallel CT$ 及 $B'N \parallel CT'$,取 CA 為 CT 及 CM 之比例中項,又取 CB 為 CN 及 CT' 之比例中項,則 CA 及

CB 卽爲所求之長軸及短軸的二分之一.

證　$\overline{CA'}^2 = CB' \cdot B'D$　(作圖)

$= TB' \cdot B'T'$.　(兩弦相交)

$\therefore$ CA 及 CB 爲互配二直徑.　(命題二九, 推論)

但 $\angle TCT'$ 爲直角,　(半圓周角)

故 CA 及 CB 爲兩軸的二分之一.

命題三一

212. 一直線截楕圓之二切線 TP, TQ 於 A 及 A', 割楕圓於 B, B', 交切點弦於 O, 則

$$\overline{AO}^2 : \overline{A'O}^2 = AB \cdot AB' : A'B \cdot A'B'.$$

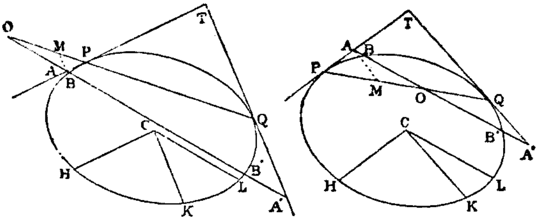

圖 95

作 $AM \parallel TQ$, 並作 CH, CK, 及 CL, 順次平行於 TA, TA', 及 AA'.

則　$\overline{AO}^2 : \overline{A'O}^2 = \overline{AM}^2 : \overline{A'Q}^2$,　(平行線)

$$= \begin{cases} \overline{AM}^2 : \overline{AP}^2 \\ \overline{AP}^2 : \overline{A'Q}^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overline{TQ}^2 : \overline{TP}^2 \\ \overline{AP}^2 : \overline{A'Q}^2 \end{cases}$$　(相似三角形)

$$=\left\{\begin{matrix}\overline{CK}^2 : \overline{CH}^2\\ \overline{AP}^2 : \overline{A'Q}^2\end{matrix}\right\}$$ (命題二二,推論二)

$$=\left\{\begin{matrix}\overline{CK}^2 : \overline{CL}^2\\ \overline{CL}^2 : \overline{CH}^2\\ \overline{AP}^2 : \overline{A'Q}^2\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\overline{A'Q}^2 : A'B\cdot A'B'\\ AB\cdot AB' : \overline{AP}^2\\ \overline{AP}^2 : \overline{A'Q}^2\end{matrix}\right\}$$

(命題二二,推論四)

$$\therefore\quad \overline{AO}^2 : \overline{A'O}^2 = AB\cdot AB' : A'B\cdot A'B'.$$

命題三二

213. 任意直線 TS, 平行於橢圓上兩切線之切點弦,則此直線為橢圓及切線截取之線分 AT 及 BS 必相等.

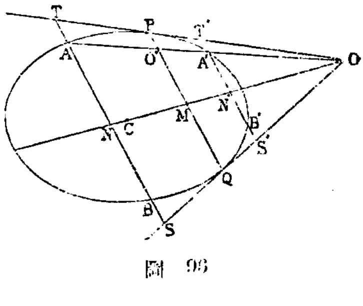

圖 96

作直徑平分 AB 及 PQ 二平行弦,則此直徑必過兩切線之交點 O. (命題二五,推論二

既有 $$PM=MQ,$$

$$\therefore\quad TN=NS.$$

但 $AN=NB,\quad \therefore\quad AT=BS.$ Q.E.D

命題三三

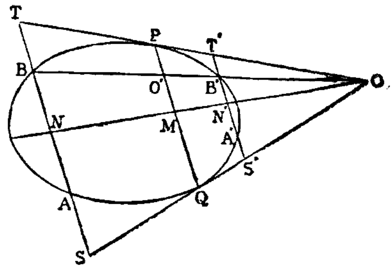

圖 97

214. 自橢圓上兩切線之交點任作直線,必為橢圓及切點弦所調分.

設 O 為兩切線 OP, OQ 之交點, PQ 為切點弦,過 O 點作任一直線,交橢圓於 B, B', 交 PQ 於 O'. 則

$$\overline{TP}^2:\overline{T'P}^2=TB\cdot TA:T'B'\cdot T'A'.$$

(命題二二,推論四)

但 $$TB=AS,\quad T'B'=A'S',$$ (命題三二)

$$\therefore\quad \overline{TP}^2:\overline{T'P}^2=TB\cdot BS:T'B'\cdot B'S'.$$

$$=\overline{OB}^2:\overline{OB'}^2.$$ (相似三角形)

但 $$PT:T'P=O'B:O'B'.$$ (平行線)

$$\therefore\quad OB:OB'=O'B:O'B'.$$ Q. E. D.

215. 推論 自橢圓外任一點 O, 作直線交橢圓於 B. B', 取 OO', 使 OO' 為 OB 及 OB' 之調和中項,則 O' 之軌跡為一直線,即從 O 點所作橢圓兩切線之切點弦.

命題三四

216. 過橢圓上兩切線之切點弦之中點,任作直線,必為橢圓及過二切線交點與切點弦平行之直線所調分.

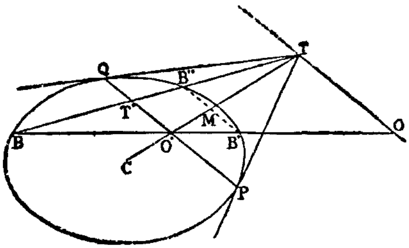

圖 98

設 O' 爲切點弦 PQ 之中點, $TO \parallel PQ$. 過 O' 作直線交橢圓於 B, B', 交 TO 於 O. 連 TB, 交 PQ 於 T', 交橢圓於 B''. 作 $B''M \parallel PQ$, 設其引長線交 BO 於 B_1.

連 TC, 則 TC 過 O'. (命題二五, 推論三)

$$B''M : B''B_1 = \left\{ \begin{matrix} B''M : O'T' \\ O'T' : B''B_1 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} B''T : TT' \\ BT' : BB'' \end{matrix} \right\} \qquad \text{(相似三角形)}$$

$$= B''T \cdot BT' : TT' \cdot BB''.$$

但 $$TT' \cdot BB'' = 2\, B''T \cdot BT',$$

$$\therefore \quad 2\, B''M = B''B_1.$$

故 M 爲 $B''B'$ 之中點, 故 B_1 應在橢圓上, 而與 B' 合.

今 $$BT : TB'' = BT' : T'B'', \qquad \text{(命題三三)}$$

$$\therefore \quad BO : OB' = BO' : O'B'. \qquad \text{(平行線)} \quad \text{Q. E. D.}$$

又法 設 TP TQ 爲切線, PQ 爲切點弦, 過 PQ 之中點 O', 作直線交橢圓於 B', B, 交過 T 點與 PQ 平行之直線於 O. 連 OC, 交

橢圓於R,連TC必過O'. (命題二五,推論三)

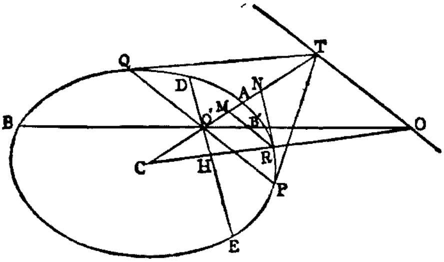

圖 99

在R點作切線RN,並作$RM \parallel PQ$.

則RM當爲CT之緯線.過O'作$DE \parallel RN$,

則 $$CT \cdot CO' = \overline{CA}^2 = CM \cdot CN;$$ (命題二五)

$$\therefore \quad CT : CM = CN : CO';$$

$$\therefore \quad CO : CR = CR : CH;$$ (平行線)

故D, E兩點之切線,必相交於O. (命題二五)

$$\therefore \quad BO : OB' = BO' : O'B'.$$ (命題三三)

217. 推論一 過橢圓內任一點O',作直線,交橢圓於B, B'於其上取一點O,使BB'爲OO'所調分,則O點之軌跡爲一直線.

218. 推論二 自O點作橢圓之二切線,則切點弦必過O'.

(命題三三)

命題三五

219. 過橢圓上任一點P,作直線POO'及QPQ',平行於內

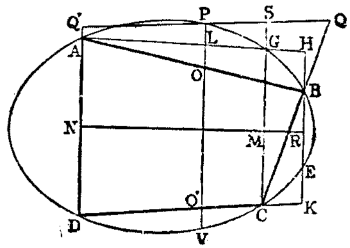

圖 100

接四邊形任意二鄰邊 DA, DC, 交對邊於 O, O' 及 Q, Q', 則 $PO \cdot PO'$: $PQ \cdot PQ'$ 之比值爲一定.

過 B, C 作 BE 及 CG 平行於 AD, 連 AG 引長交 EB 於 H, 作直徑 NMR 平分平行弦 AD, GC, 及 BE.

則 $$HR=RK,$$ (平行線

$$\therefore\ BH=EK.$$

今 $$OL:HB=LA:HA$$ (相似三角形

$$=O'D:DK.$$

$$\therefore\ OL:O'D=HB:DK,$$ (中項互換

又由相似三角形, 得

$$PO' \text{ 或 } SC:QS=BK:KC.$$

相乘: $$OL \cdot PO':O'D \cdot QS=HB \cdot BK:DK \cdot KC.$$

$$\therefore\ OL \cdot PO':PQ' \cdot QS=EK \cdot BK:DK \cdot KC$$

$$=O'V \cdot O'P:O'C \cdot O'D$$

$$=PL \cdot O'P:PS \cdot PQ'.$$

$$\therefore\ OL \cdot PO'+PL \cdot O'P:PQ' \cdot QS+PS \cdot PQ'=EK \cdot BK:DK \cdot KC,$$

或 $$PO \cdot PO':PQ \cdot PQ'=EK \cdot BK:DK \cdot KC.$$

今 A, B, C, D 爲定點, 故 E 爲定點.

$$\therefore\ EK \cdot BK:DK \cdot KC=\text{常數}.$$

故 $PO \cdot PO':PQ \cdot PQ'$ 之比值爲一定. Q. E. D

命題三六

220. 自橢圓上任一點 P，至一內接四邊形 $ABCD$ 之四邊作直線 PR, PR', PS, PS'，各與該邊夾定角，則至對邊上二線分相乘積之比爲一定.

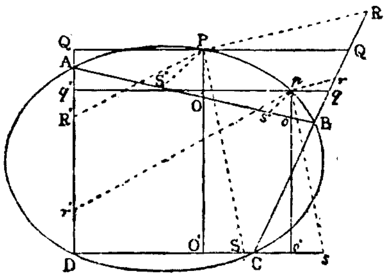

圖 101

在橢圓上任取他一點 p.

過 P 及 p 作 QPQ' 及 $qpq' \parallel DC$. 又作 POO' 及 poo' 平行於 AD，作 pr, pr', ps, ps' 順次平行於 PR, PR', PS, 及 PS'.

則
$$PR : pr = PQ : pq, \qquad \text{(相似三角形)}$$
$$PR' : pr' = PQ' : pq',$$
$$\therefore\ PR \cdot PR' : pr \cdot pr' = PQ \cdot PQ' : pq \cdot pq'.$$

同理可證:
$$PS \cdot PS' : ps \cdot ps' = PO \cdot PO' : po \cdot po'.$$

但
$$PQ \cdot PQ' : PO \cdot PO' = pq \cdot pq' : po \cdot po'. \qquad \text{(命題三五)}$$
$$\therefore\ PR \cdot PR' : PS \cdot PS' = pr \cdot pr' : ps \cdot ps'.$$

221. **推論一**　自橢圓上任一點，至內接四邊形對邊上所作兩垂線相乘積之比爲一定.

222. **推論二**　若 A, B 兩點相合，C, D 兩點亦相合，則 AB, CD 成橢圓之二切線，而 BC 與 AD 相合成一切點弦.

故自橢圓上任一點至二定切線作垂線,並至切點弦作垂線,則二切線上兩垂線相乘積,與切點弦上之垂線平方成定比.

223. **推論三**　設 AB, CD 交於 X, AC, BD 交於 Y, 又 $PR, PR', PS, PS', pr, pr', ps, ps'$ 皆在 XY 線上, 則以 $ABCD$ 為四邊形, 上述命題變為

$$\overline{PX}^2 : \overline{PY}^2 = \overline{pX}^2 : \overline{pY}^2.$$

或　$$PX : PY = pX : pY.$$

故 XY 為橢圓所調分.　Q. E. D.

命題三七

224. 橢圓上二定切線為一動切線所截,並為平行於切點弦之直徑所截,則二定切線上截取之線分相乘積為一定.

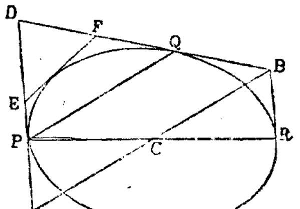

圖 102

設 DA, DB 為定切線, EF 為動切線, PQ 為切點弦. 過 C 點作直徑, 平行於 PQ, 交二定切線於 A, B. 連 PC, 引長交曲線於 R. 連 BR.

則　$$CA = CB.$$　(命題三二)

又　$$PC = CR, \quad \therefore \quad \triangle CPA = \triangle CRB.$$　(S. A. S.)

故　$$BR \parallel AP \text{ 且 } = AP.$$

故 BR 為切線.

$$\therefore\quad BR : PE = BF : FD. \quad \text{(命題二六, 推論二)}$$

$$\therefore\quad AP : PE = BF : FD.$$

$$\therefore\quad AP : AP+PE = BF : BF+FD.$$

$$\therefore\quad AP : AE = BF : BD.$$

$$\therefore\quad AE\cdot BF = AP\cdot BD.$$

因 A, B 爲定點, 故 $AP\cdot BD$ 因而 $AE\cdot BF$ 爲一定. Q. E. D.

預備定理

225. 在相交二直線之一上, 截取 AB, BC 等, 在他一直線上截取 $A'B'$, $B'C'$ 等, 使

$$AB : A'B' = BC : B'C' = \cdots\cdots = m : n,$$

則 AA', BB', CC' 等之中點軌跡爲一直線.

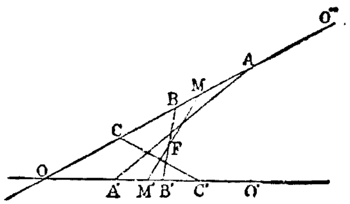

圖 103

取 $C'O'$ 及 AO'', 使

$$CO : C'O' = AO'' : A'O = m : n.$$

取 OO'' 及 OO' 之中點 M 及 M', 連 MM', 則此直線必過 AA', BB', CC' 等之中點.

證 因 $AB : A'B' = BC : B'C'$

$$= CO : C'O'$$

$$= AO'' : A'O = m : n.$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}(AB+BC+CO+AO'') : \tfrac{1}{2}(A'B'+B'C'+C'O'+A'O) = m : n.$$

即 $$OM : OM' = m : n.$$

又　　$AB+AO'':A'B'+A'O=m:n=MO'':M'O.$

$$\therefore\quad AB+AO''-MO'':A'B'+A'O-M'O=m:n.$$

即　　$$MB:M'B'=m:n.$$

觀$\triangle OBB'$, MM'爲截線,其三邊上之截點順次爲M, F, M'.

$$\therefore\quad \frac{BF}{FB'}\cdot\frac{B'M'}{M'O}\cdot\frac{OM}{MB}=1.$$

或　　$$\frac{BF}{FB'}\cdot\frac{B'M'}{MB}\cdot\frac{OM}{M'O}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{BF}{FB'}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}=1.$$

$$\therefore\quad BF=FB'.$$

故F爲BB'之中點,同理可證AA', CC'等之中點,亦必在MM'上.　　Q. E. D

命題三八

226. 連橢圓之外切四邊形兩對角線中點之直線,必過橢圓心.

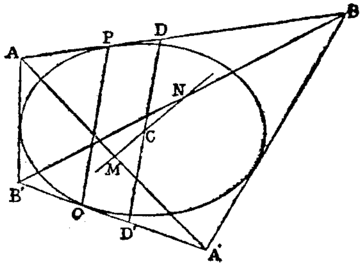

圖 104

設AA'及BB'爲外切四邊形之對角線,M, N爲其兩中點.

過橢圓心C作DD',平行於切點弦PQ.

$$\therefore\quad AD\cdot B'D'=BD\cdot A'D'\qquad\text{(命題三七)}$$

$$\therefore\quad AD : A'D' = BD : B'D'.$$

今M, N, C順次爲AA', BB', DD'之中點,

故M, N, C在一直線上.　　　　(命題三二,及預備定理.)

命題三九

227. 橢圓之外切四邊形兩對對邊切點之連線,及兩對角線爲共點線.

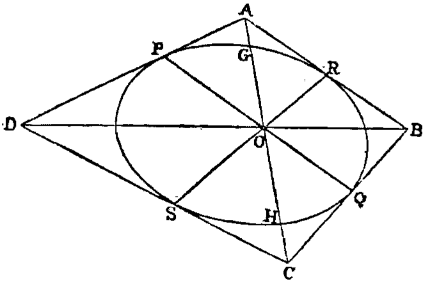

圖 105

設$ABCD$爲外切四邊形,AC, BD爲對角線,連對邊上之切點得切點弦PQ及RS.

設對角線AC與PQ交於O,則應有

$$\overline{AO}^2 : \overline{OC}^2 = AH \cdot AG : CH \cdot CG. \qquad \text{(命題三一)}$$

但AC又當爲RS所截,且截爲同比,

故RS必過O點.

依同理,可證對角線BD亦必經過PQ, RS之交點.　Q. E. D.

命題四〇

223. 橢圓與其輔圓面積之比,等於$CB : CA$.

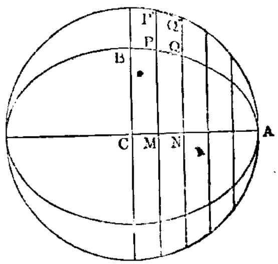

圖 106

分橢圓長軸爲任意若干等分,過分點作CB之平行線.

則 $PM : P'M = QN : Q'N = CB : CA$. (命題八,推論三)

$\therefore$ 四邊形$PMNQ$: 四邊形$P'MNQ' = CB : CA$.

準此類推,故橢圓內諸四邊形之和 : 輔圓內諸對應四邊形之和 $= CB : CA$.

若分長軸爲無限等分,則每一等分無限減小,上述之比例仍然成立.

此時橢圓內諸四邊形面積總和,以橢圓面積爲極限;輔圓內諸對應四邊形面積總和,以輔圓面積爲極限.依極限定理,其極限之比,亦等於$CB : CA$.

故 橢圓面積 : 輔圓面積 $= CB : CA$.

命題四一

229. 一平面截圓錐體頂點同側之所有旋轉線,則此截面,爲一橢圓.

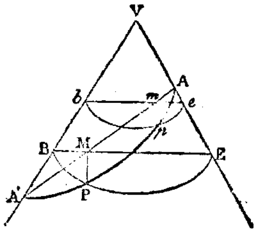

圖 107

設APA'爲題設之截面,過圓錐體之軸,作截面BVE,垂直於截面APA'. BPE爲底面,故BPE面$\perp$截面BVE.

故BPE與APA'之交線$PM \perp BVE$,因而$\perp BE$. (見立體幾何定理)

因底面是正圓,以BE爲直徑.

$$\therefore \quad BM \cdot ME = \overline{MP}^2.$$

今作與底面平行之截面bpe,交截面APA'於mp,同理可證

$$mp \quad be.$$

有 $$\overline{mp}^2 = bm \cdot me.$$

但 $$BM : bm = A'M : A'm,$$ (相似三角形)

又 $$ME : me = MA : mA.$$

$$\therefore \quad BM \cdot ME : bm \cdot me = A'M \cdot MA : A'm \cdot mA.$$

卽 $$\overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 = A'M \cdot MA : A'm \cdot mA.$$

故截面 APA' 爲橢圓. (命題九)

230. 推論一　過 A 及 A', 作與 BPE 平行之截面,得一平截旋轉圓錐體,則橢圓截面之短軸,爲此體兩底直徑之比例中項.

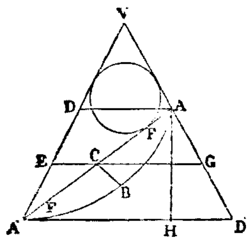

圖 108

過 AA' 中點 C, 作截面 EBG 平行於兩底,

則 $$CE = \tfrac{1}{2}AD, \quad CG = \tfrac{1}{2}A'D'.$$ (相似三角形)

$$\therefore \quad CE \cdot CG = \tfrac{1}{4}AD \cdot A'D'.$$

但 $$CE \cdot CG = \overline{CB}^2, \quad \overline{CB}^2 = \text{短軸平方}.$$

故橢圓短軸爲 AD 及 $A'D'$ 之比例中項.

231. 推論二　橢圓截面之正焦點弦,爲 AA', AD, 及 $A'D'$ 之第四比例項.

因　正焦點弦 $L \cdot AA' = 4\overline{CB}^2 = AD \cdot A'D'$. (命題九,推論一)

$$\therefore \quad AA' : AD = A'D' : L.$$ Q. E. D.

232. 推論三　在 AA' 上截取 $CF = CF' = \frac{1}{2}AD' = AG$. 則 F, F'

必為橢圓之兩焦點.

作 $AH \perp A'D'$, 則 $\overline{AA'}^2 - \overline{AD'}^2 = \overline{A'H}^2 - \overline{HD'}^2$

$$= (A'H + HD')(A'H - HD')$$

$$= A'D' \cdot AD = 4\,\overline{CB}^2. \qquad \text{(推論一)}$$

$$\therefore \quad \overline{CA}^2 - \overline{AG}^2 = \overline{CB}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{AG}^2 = \overline{CF}^2 = \overline{CF'}^2.$$

故 F, F' 為橢圓截面之二焦點. (命題二,推論三)

233. 推論四 若橢圓截面切於錐面之內切球,則其切點即為此橢圓之焦點.

因 $$AF = AC - CF = AC - AG = \tfrac{1}{2}(AA' - AD')$$

$$= \tfrac{1}{2}(AA' + AV - VD - AD')$$

$$= \tfrac{1}{2}(AA' + AV - VD').$$

故 F 為 $\triangle VAA'$ 之內切圓與 AA' 之切點.

同理可證 F' 亦為一焦點.

橢圓問題

1. 橢圓內以長軸為最大之弦.

提示: 任作一弦,作其兩端點之焦點半徑,則四個焦點半徑之和,必大於此弦之二倍,故此弦必小於長軸.

2. 橢圓內以短軸為最短之弦.(參閱命題一六,推論五.)

3. 已知橢圓兩焦點,求作橢圓切於一定直線.(參閱命題四)

4. 橢圓上任一切線與過焦點之直線夾定角,求交點之軌跡.

提示: 若三角形有一角頂固定,一底角頂點移動於一定圓周上,則他一底角頂點之軌跡爲一圓.(參閱命題四)

5. 過焦點弦兩端點作切線,則此兩切線所夾角,等於此弦在他一焦點之對角之補角的二分之一.

提示: 自焦點弦兩端點作法線.(參閱命題三,推論二.)

6. 連橢圓上任一點與一直徑兩端點,則與此兩弦平行之直徑必互配.(參閱命題一七,推論二.)

7. 作橢圓之外切矩形,則其二對角線,可決定橢圓之二等配徑.

8. 試用命題三六,證明命題三三.

9 過一焦點弦兩端點作法線,則經此二法線之交點,且平行於長軸之直線,必平分此弦.(參閱命題一三,及三角形之內切圓外接圓及旁切圓之性質.)

10 求作互配兩直徑,(1) 使其和爲極小.(2) 使其和爲極大.(參閱命題一六,推論五;命題二一推論,及命題二九.)

第三篇

雙曲線

234. 定義 一動點與一定點之距離及其與一定直線之距離之比,爲大於1之常數ϵ,則此動點之軌跡,稱爲雙曲線.

此定點稱爲焦點,定直線稱爲準線.

雙曲線之軸,頂點,中心,直徑,配直徑,切線,法線,緯線,經線,弦,焦點弦,正焦點弦等之定義,與拋物線及橢圓中所述之定義同.

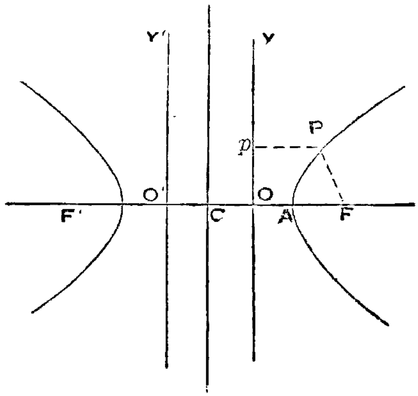

圖 109

命題一

235. 已知雙曲線之焦點,準線,及距離比ϵ,試決定曲線上之若干點.

設 F 爲焦點, OY 爲準線,作 $FO\perp OY$,

內外分 FO 於 A 及 A', 使

$FA:AO=FA':A'O=\epsilon:1.$

則 A, A' 爲雙曲線之頂點, AA' 爲其軸.

在準線上任取一點 p, 聯 Fp. 自 A, A', 作 AA' 之垂線,交 Fp 及其引長線於 H 及 H'.

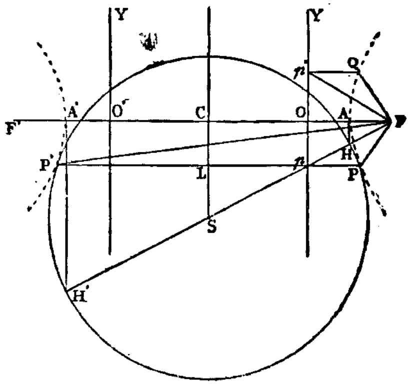

圖 110

以 HH' 爲直徑,作一圓, 過 p, 作 AA' 之平行線,交此圓於 P 及 P', 則 P 及 P' 必爲雙曲線上之兩點.

證　連 PF 及 $P'F$, 則因 AH 及 $A'H'$ 各平行於 Op.

$$\therefore\quad FA:AO=FH:Hp,$$

$$FA':A'O=FH':H'p.$$

$$\therefore\quad FH:Hp=FH':H'p$$

Fp 旣爲 H, H' 所調分, 依 § 101 之預備定理, 應有

$$PF:Pp=FH:Hp=FA:AO=\epsilon:1.$$

故 P 爲雙曲線上之一點.

同理, $$P'F:P'p=\epsilon:1.$$

故 P' 亦爲雙曲線上之一點.

準此理,若在準線上任取諸點,則可得雙曲線上任意若干點

236. 推論一 若於準線上取 $Cp'=Op$, 則依同法, 可決定雙曲線上之一點 Q, 且有 $Qp'=Pp$; 此 Q, P 兩點, 對 AA' 爲對稱. 準此, 知在雙曲線上任取一點 P, 則在軸之異側必存在一對稱點 Q. 反之亦然.

故雙曲線對稱於其軸

237. 推論二 過雙曲線軸 AA' 之中點 C, 作 AA' 之垂線 CLS, 則雙曲線亦對稱於 CLS.

因 $CLS \perp AA'$, 故 $\mid PP'$.

而 $$AH \parallel CS \parallel A'H', \quad \therefore \quad SH=SH'.$$

故 S 爲 HPH' 圓之圓心, $\quad \therefore \quad LP=LP'$.

即 P, P' 兩點對稱於 CLS. 準此知雙曲線上有一點 P, 則於 CLS 之異側必存在一對稱點 P', 反之亦然. 故雙曲線對 CLS 爲對稱.

238. 推論三 雙曲線對稱於 AA' 之中點 C, 故稱 C 點爲雙曲線心.

因雙曲線對稱於 AA', 且對稱於 CS, 故對稱於其交點 C.

239. 推論四 雙曲線之焦點有二, 準線亦有二.

若於軸上取 $CF'=CF$, 取 $CO'=CO$, 作 $O'Y' \perp AA'$, 則依同理, 可以 F' 爲焦點, $O'Y'$ 爲準線, 作出雙曲線.

240. 推論五 $$CA : CO=\epsilon : 1.$$

因 $$PF : Pp=AF : AO=A'F : A'O=\epsilon : 1,$$

$$\therefore \quad A'F-AF : A'O-AO=\epsilon : 1.$$

$$\therefore\quad CA : CO = \epsilon : 1.$$

241. 推論六　CA 是 CF 及 CO 的比例中項.

因　　$A'F : A'O = AF : AO.$

$$\therefore\quad A'F + AF : A'F - AF = A'O + AO : A'O - AO.$$

即　　$2CF : 2CA = 2CA : 2CO$

$\therefore$　　$\overline{CA}^2 = CF \cdot CO.$

命題二

242. 雙曲線上任一點與兩焦點距離之差為常數,且等於其軸 AA'.

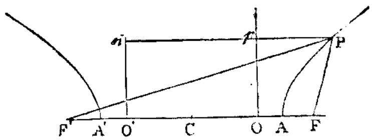

圖 111

因　　$PF' : Pp' = CA : CO,$

(命題一,推論五)

$PF : P\rho = CA : CO$

$$\therefore\quad PF' - PF : Pp' - P\rho = CA : CO.$$

但　　$Pp' - P\rho = CO' = 2CO.$

$\therefore$　$PF' - PF = 2CA = AA'.$　　Q. E. D.

243. 推論一　準命題二,可得雙曲線之機械作圖法:

以兩針固定於 F 及 F',用一鉛筆緊繫於一線上,一線端穿過 F, F' 兩針孔,他一端僅過 F' 一針孔,將兩線頭並齊,同時收放,則 P 筆拉緊,畫出之圖線,即

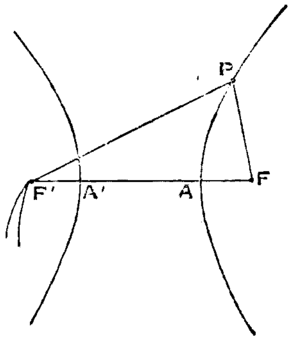

圖 112

爲雙曲線之一部分,因 PF 與 PF' 之差,恆不變也.

若知雙曲線之軸 AA',則令 $PF'-PF=AA'$,依上法行之,則作出之雙曲線,其軸長必爲 AA'.

244. 推論二　一點與二焦點距離之差,大於或小於其軸 AA',則視此點在雙曲線之凹側,或凸側而定.

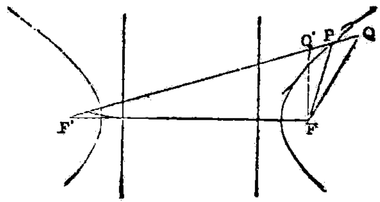

圖 113

設 Q 爲雙曲線凹側之一點,連 QF 及 QF' 交雙曲線於 P,連 PF.

則 $$QF'=QP+PF',$$

但 $$QF<QP+PF,$$

$$\therefore\quad QF'-QF>PF'-PF$$

$$>AA'.$$ Q. E. D.

又設 Q' 爲雙曲線凸側之一點,連 $Q'F$ 及 $Q'F'$,交曲線於 P,連 PF.

則 $$Q'F'=PF'-PQ',$$

但 $$Q'F>PF-PQ'.$$

$$\therefore\quad Q'F'-Q'F<PF'-PF$$

$$<AA'.$$ Q. E. D.

245. 推論三　反之,一點與二焦點距離之差,大於或小於 AA',視此點在雙曲線之凹側或凸側而定.

命題三

246 (a) 自雙曲線上任一點,作二焦點半徑,則其所夾角之平分線,必全在雙曲線外.

(b) 過此點任作他一直線,必與曲線相割.

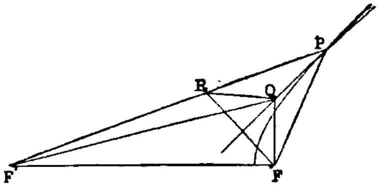

圖 114

(a) 設 PH 爲 PF 及 PF' 所夾角之平分線,在 PH 上任取一點 Q, 截取 $PR=PF$, 連 QR 及 QF.

則 $$\triangle PQR=\triangle PQF, \qquad \text{(S. A. S.)}$$

$$\therefore \quad QR=QF.$$

但 $$QF'-QR<F'R,$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad QF'-QF&<PF'-PR\\&<PF'-PF\\&<AA'.\end{aligned}$$

故 Q 在雙曲線外.

(b) 過 P 點任作直線 PK, 並作 PL, 使 $\angle KPL=\angle KPF$. 截取 $PL=PF$, 連 $F'L$ 引長交 PK 於 Q, 連 QF.

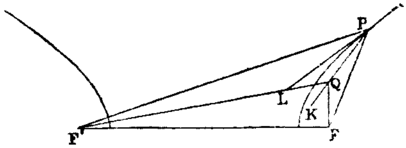

圖 115

則 $$\triangle QPL=\triangle QPF, \qquad \text{(S. A. S.)}$$

$$\therefore \quad QL=QF.$$

但　　$F'L > F'P - PL$

$> F'P - PF$

$> AA'.$

即　　$FQ - QF > AA'.$

故 Q 在雙曲線之凹側.　　(命題二,推論三)

247. **推論一**　自雙曲線上任一點,作二焦點半徑,則其所夾角之平分線,爲雙曲線之切線.

248. **推論二**　雙曲線頂點之切線,必垂直於其軸.

249. **推論三**　雙曲線上任一點之法線,必爲該點兩焦點半徑所夾外角之平分線.

命題四

250. 自焦點至雙曲線上任一切線作垂線,則垂足之軌跡,爲以 AA' 作直徑之一圓.

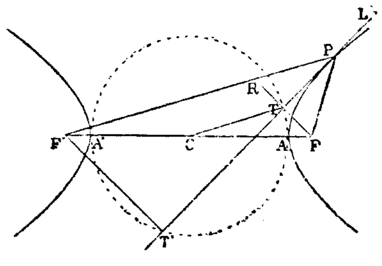

圖 116

設 PT 爲任意切線. $FT \perp PT$. 其垂足爲 T, 其引長線交 PF' 於 R, 連 TC.

則　　$\triangle PTF = \triangle PTR,$　　(A. S. A.)

$$\therefore \quad TR = TF, \quad PR = PF$$

$$\therefore \quad CT = \tfrac{1}{2}F'R$$

$$= \tfrac{1}{2}(F'P - PF)$$

$$= \tfrac{1}{2}AA'.$$

故T點在以C爲圓心,$\frac{1}{2}AA'$爲半徑之圓周上.

若$F'T'\perp PT'$,則依同理可證T'亦在此圓周上.

251. 定義 以雙曲線軸AA'爲直徑之圓,稱爲輔圓.

252. 推論一 設直角FTL之直角頂點,移動於一定圓周上,有一足經過圓外一定點F,則他一足常接於一雙曲線.

過F作此圓之直徑,截取$CF'=CF$,引長FT至R,使$TR=TF$,連$F'R$,其引長線交TL於P,則P點卽爲TL切於雙曲線之切點.

證 連FP及CT.

則
$$\triangle FTP=\triangle RTP.$$
$$\therefore\quad FP=RP.$$

又
$$FT=TR,\quad CF=CF',$$
$$\therefore\quad CT\parallel F'R\text{ 且 }=\tfrac{1}{2}F'R.$$
$$\therefore\quad PF'-PF=PF'-PR=F'R$$
$$=2CT=2CA.$$

故P點在以F,F'爲焦點,AA'爲軸之雙曲線上.

253. 定義 一直線切一曲線於無窮遠點,則稱此直線爲曲線之漸近線(Asymptote).

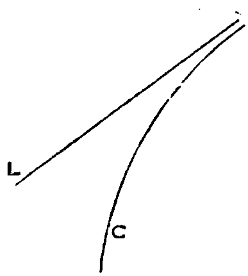

圖 117

254 推論二 若FT切於輔圓,則CT當垂直於FT,且與TR同方向.故$F'R$旣與CT平行,當交TL於無窮遠點.卽CTL

直線,切雙曲線於無窮遠點,故CTL為雙曲線之幾近線.

若從F作輔圓之另一切線FT',則CT'亦為雙曲線之一幾近線.

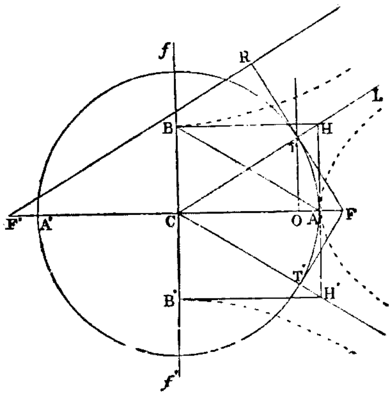

圖 118

255 推論三 自T作$TO\perp AA'$,則TO為準線.

因CFT為直角三角形,有$TO\perp CF$.

$$\therefore \quad CF\cdot CO=\overline{CT}^2=\overline{CA}^2.$$

故O點在準線上.

(命題一,推論四)

256. 定義 雙曲線軸AA'又稱為主軸,(Transverse axis)在AA'之垂直平分線上取$CB=CB'$,使

$$\overline{CB}^2=\overline{CB'}^2=\overline{CF}^2-\overline{CA}^2,$$

則稱BB'為雙曲線之配軸(Conjugate axis).通常所云之雙曲線軸,均指主軸而言.

257. 推論四 作$AH\perp CF$,交CL於H,則AH為雙曲線配軸二分之一.

因 $$\triangle CFT=\triangle CHA, \qquad \text{(A.S.A.)}$$

$$\therefore \quad FT=HA$$

但 $$\overline{FT}^2=\overline{CF}^2-\overline{CT}^2,$$

$$\therefore \quad \overline{HA}^2=\overline{CF}^2-\overline{CA}^2. \qquad \text{Q.E.D}$$

258　推論五　$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=\overline{CF}^2,$

$$\therefore\quad AB=CF.$$

259.　推論六　在 BB' 之引長線上，截取 $Cf=Cf'=CF$. 則以 f,f' 爲焦點，BB' 爲主軸之雙曲線，必以 AA' 爲配軸．

因　$$\overline{CA}^2=\overline{CF}^2-\overline{CB}^2=\overline{Cf}^2-\overline{CB}^2,$$

故 AA' 爲此雙曲線之配軸．　(定義)

260.　定義　若此雙曲線之主軸，爲彼雙曲線之配軸，此雙曲線之配軸，爲彼雙曲線之主軸，則二雙曲線稱爲**互配雙曲線** (Conjugate hyperbolas).

261.　推論七　雙曲線兩軸端點之連線，必爲一幾近線所平分，而平行於另一幾近線

因 $CAHB$ 爲矩形，故 AB 爲 CH 所平分．

又 $CB=AH=AH'$，且有 $CB\parallel AH'$.

故 $ABCH'$ 爲平行四邊形，故 $AB\parallel CT'$.

262　推論八　自焦點作幾近線之垂線，則其長等於雙曲線配軸之半．

$$FT=AH=CB=\tfrac{1}{2}BB'.$$

命題五

263.　自雙曲線上任一點，作直線，與一幾近線平行，爲一準線截取之線分，等於該點與一對應焦

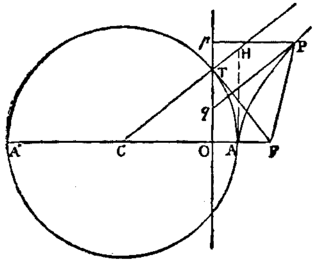

圖　119

點之距離.

以 AA' 軸爲直徑,作一圓,自 F 作此圓之切線 FT. 連 CT, 再作 $TO \perp CA$, 則 OT 爲準線, CT 爲幾近線. (命題四,推論二,三.)

又 $$Pq : Pp = CT : CO \qquad \text{(相似三角形)}$$
$$= CA : CO$$
$$= PF : Pp. \qquad \text{(命題一,推論五)}$$

故 $$PF = Pq. \qquad \text{Q. E. D.}$$

264. 推論 若知雙曲線之距離比 ϵ, 則可決定兩幾近線所夾角.

$$CT : CO = CA : CO = PF : Pp = \epsilon : 1.$$

故直角三角形 CTO 爲一定,故可決定 $\angle OCT$ 因而兩幾近線所夾角 $(= 2\angle COT)$ 可決定.

命題六

265. 雙曲線之配軸二分之一,爲自兩焦點至任一切線所作兩垂線之比例中項.

設 FT 及 $F'T'$ 爲垂直於雙曲線上任一點 P 之切線. 連 TC, 引長交 $F'T'$ 於 S.

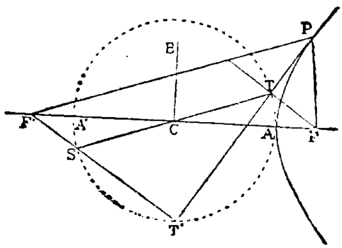

圖 120

則 $$\triangle FCT = \triangle F'CS. \qquad \text{(A. S. A.)}$$

$$\therefore \quad FT = F'S.$$

$$CS = CT = CA. \qquad \text{(命題四)}$$

故 S 在輔圓上.

$$\therefore \quad F'A' \cdot F'A = F'S \cdot F'T' \qquad \text{(割線定理)}$$

$$= FT \cdot F'T'.$$

但
$$F'A' \cdot F'A = (F'C - A'C)(F'C + A'C)$$

$$= \overline{F'C}^2 - \overline{A'C}^2 = \overline{BC}^2. \qquad \text{(命題四,推論四)}$$

$$\therefore \quad \overline{BC}^2 = FT \cdot F'T'. \qquad \text{Q. E. D.}$$

命　題　七

266. 雙曲線上正交兩切線之交點軌跡爲一圓.

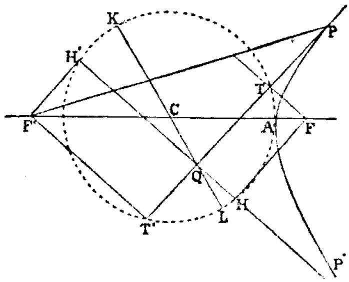

圖 121

設 QP 及 QP' 爲正交二切線,順次交輔圓於 T, T', 及 H, H'.

連 FT, FH, $F'T'$, 及 $F'H'$.

又連 CQ, 交輔圓於 K 及 L.

則 FT 及 $F'T'$ 必垂直於 QP. (命題四)

故 FT 及 $F'T'$ 平行於 QP'.

同理, FH 及 $F'H'$ 垂直於 QP', 而平行於 QP.

故
$$F'T' = QH', \quad FT = QH.$$

今
$$\overline{CQ}^2 = (CL - QL)^2 = \overline{CL}^2 - QL(2CL - QL)$$

$$= \overline{CL}^2 - QL \cdot KQ$$

$$= \overline{CL}^2 - QH' \cdot QH$$

$$=\overline{CA}^2-F'T'\cdot FT$$

$$=\overline{CA}^2-\overline{CB}^2. \qquad \text{(命題六)}$$

因$\overline{CA}^2-\overline{CB}^2$爲常數,故$CQ$爲定長,故$Q$之軌跡是以$C$爲圓心,$CQ$爲半徑之一圓.

通常稱此圓爲雙曲線之**方向圓**(Director circle).

命題八

267. 自雙曲線上任一點P,作法線PN,並作主軸之緯線PM,則

$$\overline{CA}^2:\overline{CF}^2=CM:CN.$$

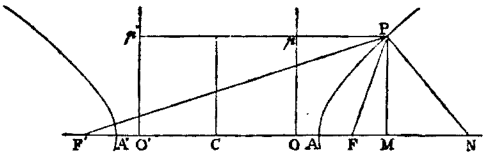

圖 122

連PF及PF',並作Ppp'平行於主軸,交準線於p,p'因PN爲PF'及PF所夾外角之平分線.

$$\therefore \quad F'N:NF=PF':PF$$

$$=Pp':Pp.$$

$$\therefore \quad F'N+NF:F'N-NF=Pp'+Pp:Pp'-Pp.$$

即 $$2CN:2CF=2CM:2CO.$$

交換中項, $$CN:CM=CF:CO.$$

$$=\overline{CF}^2 : CF\cdot CO$$

$$=\overline{CF}^2 : \overline{CA}^2. \qquad \text{(命題一,推論四)}$$

268. 推論　$CM : MN = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2.$

因　$CM : MN = CM : CN - CM$

$$=\overline{CA}^2 : \overline{CF}^2 - \overline{CA}^2$$

$$=\overline{CA}^2 : \overline{CB}^2.$$

命題九

269. 自雙曲線上任一點 P, 作切線,交主軸於 T, 作縱線 PM, 則 CA 為 CM 及 CT 之比例中項.

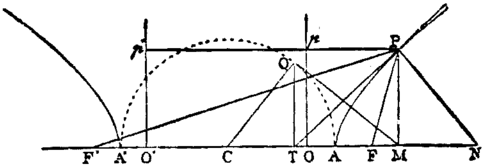

圖 123

作 Ppp' 平行於主軸, 連 PF 及 PF'.

則因 PT 是 PF' 及 PF 所夾角的平分線,

故　$F'T : FT = F'P : PF$ 　(命題三,推論一)

$$= Pp' : Pp.$$

$$\therefore\ F'T + FT : F'T - FT = Pp' + Pp : Pp' - Pp,$$

即　$2CF : 2CT = 2CM : 2CO$

$$\therefore\ CT\cdot CM = CF\cdot CO = \overline{CA}^2. \qquad \text{(命題一,推論四)}$$

270. 推論一　作輔圓, 並作 TQ, 垂直於主軸, 則 QM 必為輔

圓之切線.

連CQ,則 $$CT:CA=CA:CM,$$

$$\therefore\quad CT:CQ=CQ:CM,$$

$$\therefore\quad \triangle CQT\sim\triangle CMQ,$$

$$\therefore\quad \angle CQM=\angle CTQ=\angle R.$$ Q. E. D.

271. 推論二 自雙曲線上任一點,作主軸之緯線,則自緯線足至輔圓之切線,與此緯線之比爲一定,且等於$CA:CB$

作法線PN,則因$\triangle TPN$爲直角三角形,

$$\therefore\quad PM\perp TN,\quad \overline{PM}^2=TM\cdot MN.$$

又因$\triangle CQM$爲直角三角形,

$$\therefore\quad QT\perp CM,\quad \overline{QM}^2=CM\cdot TM.$$

$$\therefore\quad \overline{QM}^2:\overline{PM}^2=CM:MN$$

$$=\overline{CA}^2:\overline{CB}^2.$$ (命題八,推論.)

$$\therefore\quad QM:PM=CA:CB.$$

272. 推論三 作QA,引長交PM之引長線於K,則$MK=MQ$, $PM:MK=CB:CA$

因 $\angle MQA=\angle QA'A$

(以同弧測度)

$=\angle AQT$

(相似三角形)

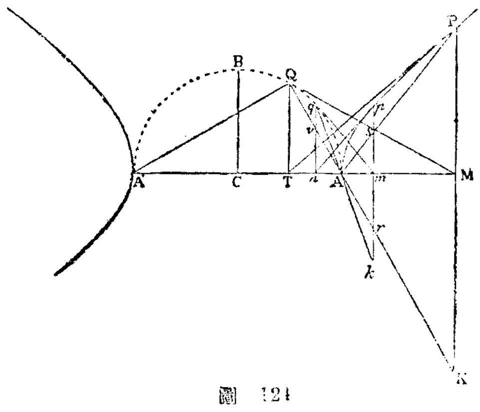

圖 124

$$= \angle AKM.$$

$$\therefore \quad MQ = MK.$$

又 $$PM : QM = CB : CA,$$

$$\therefore \quad PM : MK = CB : CA. \qquad \text{Q. E. D.}$$

273. 推論四　雙曲線對其主軸成凹形.

見上圖,在A, P間,任取一點p,作$pm \perp AA'$,交AP於s,交QK於r,自m作輔圓之切線mq,作$qn \perp AA'$,連np,引長qA交pr之引長線於K.

則 $$PM : MK = CB : CA = pm : mk. \qquad (\text{推論二})$$

但 $$PM : MK = sm : rm. \qquad (\text{相似三角形})$$

$$\therefore \quad pm : mk = sm : rm,$$

$$\therefore \quad pm : sm = mk : rm = qn : vn,$$

但 $$qn > vn \qquad (\text{因 } v \text{ 在圓內})$$

$$\therefore \quad pm > sm.$$

故於A, P之間任作主軸之垂線,則為AP及主軸所截之線分,恆小於其為曲線及主軸所截之線分,故雙曲線對其主軸成凹形.

命題一〇

274. 雙曲線之軸為任一緯線截成兩線分之相乘積,與此緯線平方之比為一定,且等於$\overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$.

見前圖;由命題九,推論二,

$$PM : QM = CB : CA,$$

但 $$\overline{QM}^2=MA\cdot MA',$$

$$\therefore\quad \overline{PM}^2:MA\cdot MA'=\overline{CB}^2:\overline{CA}^2. \qquad \text{Q. E. D.}$$

275. 推論一 雙曲線之正焦點弦,爲主軸及配軸之第三比例項

由命題一〇,知 $\left(\frac{L}{2}\right)^2:AF\cdot FA'=\overline{CB}^2:\overline{CA}^2,$

但 $$\overline{CB}^2=AF\cdot FA',$$

$$\therefore\quad \left(\frac{L}{2}\right)^2:\overline{CB}^2=\overline{CB}^2:\overline{CA}^2$$

$$\therefore\quad CA:CB=CB:\frac{L}{2}.$$

276. 推論二 自雙曲線上任一點作切線,並作配軸之垂線,順次交配軸於 T' 及 M',則

$$\overline{CB}^2=CM'\cdot CT'.$$

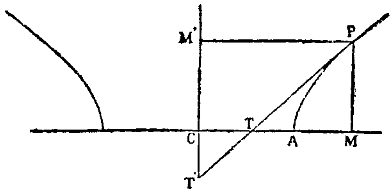

圖 125

因 $$\overline{CA}^2=CM\cdot CT \qquad \text{(命題九}$$

$$\therefore\quad \overline{CM}^2:\overline{CA}^2=CM:CT.$$

$$\therefore\quad \overline{CM}^2-\overline{CA}^2:\overline{CA}^2=CM-CT:CT$$

而 $$\overline{CM}^2-\overline{CA}^2=(CM+CA)(CM-CA)=A'M\cdot AM.$$

$$\therefore\quad \overline{PM}^2:\overline{CB}^2=TM:CT. \qquad \text{(命題一〇)}$$

$$=PM:CT' \qquad \text{(相似三角形)}$$

$$=\overline{PM}^2:PM\cdot CT',$$

$$\therefore\quad \overline{CB}^2=CM'\cdot CT'. \qquad \text{Q. E. D.}$$

命題一一

277. 自雙曲線上任一點作切線,並作切點之焦點半徑,過焦點作此半徑之垂線,則此垂線與該切線之交點軌跡爲一準線.

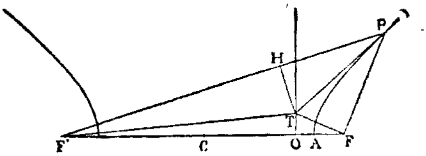

圖 126

設 PT 爲切線, $FT\perp PF$, 作 $TO\perp AA$ 及 $TH\perp PF'$.

則 $$\triangle PTH=\triangle PTF$$

$$\therefore\quad PF=PH,\quad TF=TH.$$

$$F'H=F'P-HP=F'P-PF=AA'.\qquad\text{(命題二)}$$

今 $$\overline{F'H}^2=\overline{F'T}^2-\overline{TH}^2=\overline{F'T}^2-\overline{TF}^2.$$

$$=\overline{F'O}^2-\overline{OF}^2=(F'O+OF)(F'O-OF).$$

$$=2CF\cdot 2CO.$$

$$\therefore\quad \overline{AA'}^2=4CF\cdot CO.$$

$$\therefore\quad \overline{CA}^2=CF\cdot CO.$$

故 OT 爲準線　　(命題一,推論四)

278. **推論**　反之,自準線上任一點作雙曲線之切線,則此點與焦點之連線必垂直於切點之焦點半徑.

命題一二

279. PP' 爲雙曲線之任一弦,交準線於 D, 若 F 爲此準線

之對應焦點，則 FD 必為 $\angle PFP'$ 之外角平分線.

作 Pp 及 $P'p'$ ⊥ 準線.

則 $PF : Pp = P'F : P'p'$,

$\therefore \quad PF : P'F = Pp : P'p'$

$= PD : P'D.$

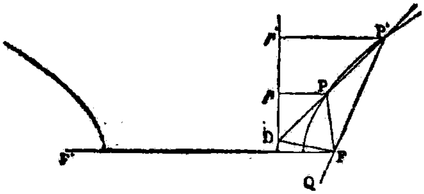

圖 127

故 FD 為 $\triangle PFP'$ 之頂角 PFP' 之外角平分線.

280. 推論一 若知雙曲線之焦點 F，及曲線上之三點 P, P'，及 P''，則能決定準線及軸

因 $\angle PFP'$ 之外角平分線與 PP' 弦交於準線上.同理 $\angle PFP''$ 之外角平分線,亦交 PP'' 弦於此準線上，由此兩交點，可決定該準線.

過 F，作此準線之垂線.即得雙曲線軸.

281. 推論二 若曲線上兩點無限接近.則過此兩點之割線,成為切線.由本定理，知雙曲線上任一點之切線與準線相交，則交點與一對應焦點之連線,必垂直於切點之焦點半徑.

因 P, P' 相合時.則 $\angle PFP'$ 為零,而其外角則為一平角,故其平分線當垂直於切點之焦點半徑.

此切線又平分切點之兩焦點半徑所夾角.

見下圖；　　$PF : PF' = Pp : Pp'$

$= PD : PD'$.　　（相似三角形）

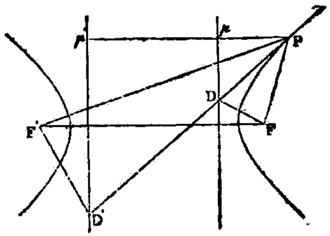

圖 128

而 $$\angle PFD = \angle PF'D' = \angle R,$$

$$\therefore\quad \triangle PFD \sim \triangle PF'D',$$

$$\therefore\quad \angle FPD = \angle F'PD'.$$ Q. E. D.

命題一三

282. 設 P, P' 為雙曲線上兩定點, O 為其上之動點, PO 及 $P'O$ 之引長線截取準線之線分為 pp', 若 F 為該準線之對應焦點, 則 $\angle pFp'$ 為一定.

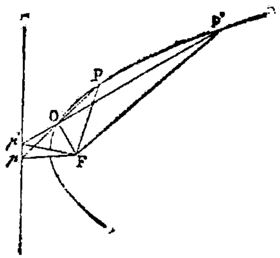

圖 129

因 Fp 是 $\angle PFO$ 之外角平分線, Fp' 是 $\angle P'FO$ 之外角平分線.

$$\therefore\quad \angle OFp + \tfrac{1}{2}\angle OFP = 90^\circ.$$

$$\angle OFp' + \tfrac{1}{2}\angle OFP' = 90^\circ.$$

$$\therefore\quad \angle OFp + \tfrac{1}{2}\angle OFP = \angle OFp' + \tfrac{1}{2}\angle OFP',$$

$$\therefore\quad \angle OFp - \angle OFp' = \tfrac{1}{2}(\angle OFP - \angle OFP').$$

即 $$\angle pFp' = \tfrac{1}{2}\angle PFP'$$ 為定角. Q. E. D.

283. 推論 雙曲線上四定點及一動點構成線束之交比爲一定.

因 $O(P_1P_2P_2P_4)=O(p_1p_2p_3p_4)=F(p_1p_2p_3p_4)$ 爲一定.

命題一四

284. 雙曲線上兩切線之交點,與一焦點之連線,必平分兩切點之焦點半徑所夾角.

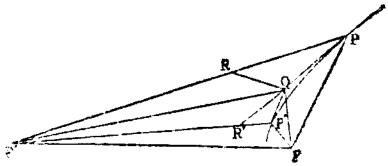

圖 130

設 QP 及 QP' 爲二切線,連 PF, PF', QF, QF', $P'F$, $P'F'$.

截取 $PR=PF$, $P'R'=P'F$. 連 QR 及 QR'.

則 $$\triangle QFP=\triangle QRP,$$

$$\therefore\quad QR=QF.$$

又 $$\triangle QFP'=\triangle QR'P',$$

$$\therefore\quad QR'=QF,$$

$$\therefore\quad QR=QR'.$$

但 $$F'R=F'P-RP$$

$$=F'P-PF=AA'.$$

$$F'R'=F'P'-R'P'$$

$$=F'P'-FP'=AA'.$$

$$\therefore\quad F'R=F'R'.$$

$$\therefore\quad \triangle F'QR=\triangle F'QR'. \qquad \text{(S. S. S.)}$$

$\therefore$ QF 平分 $\angle PF'P'$.　Q. E. D.

285. 推論 QF 必平分 $\angle PFP'$,

因 $$\angle PFQ = \angle PRQ = \angle QR'P'$$
$$= \angle QFP'.$$

命題一五

286 雙曲線上一動切線為二定切線截取之線分,於每一焦點之對角為一定.

設 QP 及 QP' 為定切線, RS 為動切線.

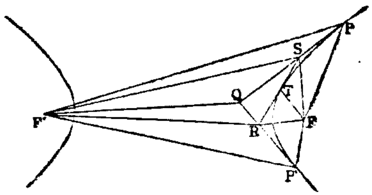

圖 131

連 FP, FS, FT, FR, FP'.

則 $$\angle TFS = \tfrac{1}{2}\angle TFP,\qquad \text{(命題一四)}$$
$$\angle TFR = \tfrac{1}{2}\angle TFP',\qquad \text{(同理)}$$

$\therefore$ $\angle TFS + \angle TFR = \frac{1}{2}\angle TFP + \frac{1}{2}\angle TFP'$, 為一定.

故 $\angle RFS$ 為定角.　Q. E. D.

287. 推論 雙曲線上一動切線為四定切線截成點列之交比為一定.

因動切線上截成各線分,在焦點之對角,各為定角也.

命題一六

288. 於雙曲線上任一點 P, 作切線,交其軸於 T, 再自頂點

A 作切線,交 CP 於 H. 則 $\triangle CPT$ 必與 $\triangle CAH$ 等積.

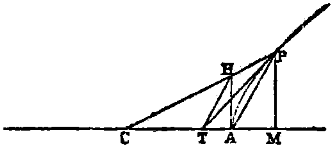

圖 132

作緯線 PM, 則

$CT : CA = CA : CM$ (命題九)

$= CH : CP$. (平行線)

$\therefore \quad TH \parallel AP$,

$\therefore \quad \triangle THP = \triangle THA$.

$\therefore \quad \triangle CPT = \triangle CAH$. Q. E. D.

289. 推論 $\triangle PMT =$ 梯形 $PHAM$.

命題一七

290. 自雙曲線上任一點 P, 作其軸之緯線,引長交二幾近線於 D 及 D'. 則 $PD \cdot PD'$ 等於半配軸之平方.

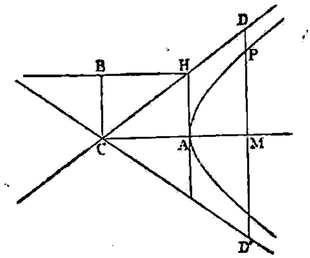

圖 133

因 $\overline{MD}^2 : \overline{MC}^2 = \overline{AH}^2$ 或 $\overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$, (相似三角形)

但 $\overline{PM}^2 : \overline{MC}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$, (命題一〇)

$\therefore \quad \overline{MD}^2 - \overline{PM}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$.

$$\therefore\quad \overline{MD}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{BC}^2.$$

即　$$PD \cdot PD' = \overline{BC}^2.$$　Q. E. D.

命題一八

291. 任一直線 PP', 爲雙曲線及其幾近線截取之線分 PQ 及 $P'Q'$ 必相等.

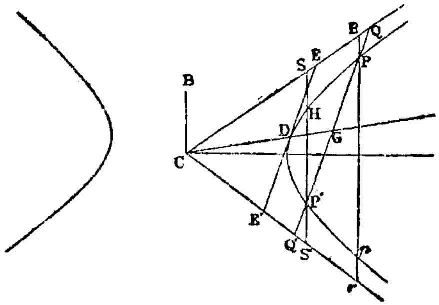

圖 134

過 P, P' 作軸之垂線 $RPpr$ 及 $SHP'S'$.

則　$$QP : PR = QP' : P'S,$$　(相似三角形)

又　$$PQ' : Pr = P'Q' : P'S';$$

$$\therefore\quad QP \cdot PQ' : PR \cdot Pr = QP' \cdot P'Q' : P'S \cdot P'S'.$$

但　$$PR \cdot Pr = P'S \cdot P'S' = \overline{CB}^2.$$　(命題一七)

$$\therefore\quad QP \cdot PQ' = QP' \cdot P'Q',$$

即　$$QP(PP' + P'Q') = Q'P'(QP + PP');$$

即　$$QP \cdot PP' + QP \cdot P'Q' = Q'P' \cdot QP + Q'P' \cdot PP',$$

$$\therefore\quad QP \cdot PP' = Q'P' \cdot PP',$$

$$\therefore \quad QP = Q'P'. \qquad \text{Q. E. D.}$$

292. 推論一 若G爲QQ'之中點,連CG交雙曲線於D,過D,作QQ'之平行線,必爲雙曲線之切線.

設此平行線交二幾近線於E及E',若此線爲雙曲線之割線,則當有第二割點D',由命題一八,則有$DE=D'E'$.

但由$\angle CQQ'$,既有$EE' \parallel QQ'$,G爲QQ'之中點,故D應爲EE'之中點.

$\therefore \quad DE=DE'$, 故D, D'表同一點.

293. 推論二 任意直線PP',必爲過其中點之直徑之緯線.雙曲線之任一切線,爲二幾近線所截之線分,必以切點爲中點.

294. 推論三 雙曲線之任一直徑,必平分其諸緯線,且平分與緯線平行之直線爲二幾近線所截之線分.

295. 推論四 $\qquad PQ \cdot PQ' = \overline{DE}^2.$

設過D點,作軸之垂線,交二幾近線於K, K',

則 $\qquad DK : DE = PR : PQ. \qquad$ (相似三角形)

又 $\qquad DK' : DE' = Pr : PQ'$,

$\therefore \quad DK \cdot DK' : DE \cdot DE' = PR \cdot Pr : PQ \cdot PQ'$,

但 $\qquad DK \cdot DK' = PR \cdot Pr = \overline{CB}^2$, $\qquad$ (命題一七)

$\therefore \quad PQ \cdot PQ' = DE \cdot DE' = \overline{DE}^2. \qquad$ (推論一)

296. 推論五 過雙曲線上任一點,作定向之直線,則該線爲此點及二幾近線截取之線分相乘積爲一定. (推論四)

命題一九

297 設CP及CP'爲互配二半直徑,過P, P'作互配雙曲線之切線順次交主軸及配軸於T及T',以CA, CB爲半徑,作兩圓,自T及T'順次作其軸之垂線,交兩圓於Q及Q',則

$$\angle QCA = \angle Q'CB.$$

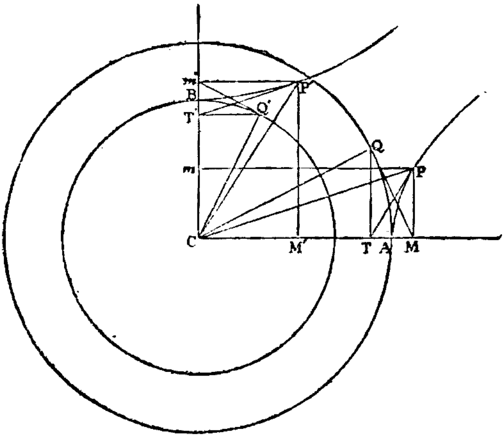

圖 135

連QM及$Q'm'$,則QM及$Q'm'$各切於一圓,Q, Q'爲切點.

(命題九,推論一.)

$$PM : MQ = CB : CA \qquad \text{(命題九,推論二.)}$$

同理,
$$P'm' : m'Q' = CA : CB.$$

$$\therefore \quad P'm' \cdot PM = Q'm' \cdot QM$$

但
$$CP' \parallel PT,$$

$$\therefore \quad PM : MT = Cm' : m'P'.$$

$$\therefore \quad PM \cdot m'P' = Cm' \cdot MT.$$

$$\therefore \quad Q'm' \cdot QM = Cm' \cdot MT.$$

$$\therefore \quad Cm' : Q'm' = QM : MT$$
$$= CM : MQ.$$

故 $$\triangle m'CQ \sim \triangle MCQ.$$

$$\therefore \quad \angle QCA = \angle Q'CB.$$

298. 推論一 CP 必平行於 P' 之切線.

因 $$P'm' : m'T' = \begin{Bmatrix} P'm' : m'Q' \\ m'Q' : m'T' \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} CA : CB \\ Cm' : m'Q' \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (\text{命題九, 推論二.}) \\ \overline{m'Q'}^2 = m'C \cdot m'T') \end{matrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} QM : MP \\ CM : QM \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (\text{命題九, 推論二.}) \\ (\text{命題一九.}) \end{matrix}$$

$$= CM : MP$$

$$= Pm : Cm.$$

$$\therefore \quad \triangle P'm'T' \sim \triangle CPm.$$

$$\therefore \quad CP \parallel P'T'.$$

故若 CP' 直徑為 CP 直徑之配徑, 則 CP 亦必為 CP' 之配徑.

299. 推論二 $$PM = Q'm' = Cm.$$

$$P'm' = QM = CM'.$$

因 $$\triangle Cm'Q' \sim \triangle CMQ.$$

$$\therefore \quad m'Q' : MQ = CQ' : CQ$$

$$=CB:CA.$$

但　$PM:MQ=CB:CA.$　(命題九,推論二)

$\therefore\quad m'Q':MQ=PM:MQ.$

$\therefore\quad m'Q'=PM.$

又　$P'm':m'Q'=CA:CB$

$=QM:Q'm'.$　(相似三角形)

$\therefore\quad P'm'=QM.$

300. 推論三　$\overline{CM}^2-\overline{CM'}^2=\overline{CA}^2.$

因　$\overline{CA}^2=\overline{CQ}^2=\overline{CM}^2-\overline{QM}^2=\overline{CM}^2-\overline{CM'}^2.$　(推論二)

301. 推論四　$\overline{P'M'}^2-\overline{PM}^2=CB^2.$

因　$\overline{CB}^2=\overline{CQ'}^2=\overline{Cm'}^2-\overline{m'Q'}^2=\overline{P'M'}^2-\overline{PM}^2.$　(推論二)

302. 推論五　互配兩半直徑之平方差,等於其主軸及配軸各二分之一之平方差.

因　$\overline{CA}^2-\overline{CB}^2=\overline{CM}^2-\overline{CM'}^2-(\overline{P'M'}^2-\overline{PM}^2)$　(推論三及四.)

$=\overline{CM}^2+\overline{PM}^2-(\overline{CM'}^2+\overline{P'M'}^2)$

$=\overline{CP}^2-\overline{CP'}^2.$

303. 推論六　$PM:CM'=CB:CA=P'M':CM.$

因　$PM:QM=CB:CA,$　(命題九,推論二)

但　$QM=m'P'=CM',$

$\therefore\quad PM:CM'=CB:CA,$

又　$Cm':CM=CQ':CQ.$　(相似三角形)

$\therefore\quad P'M':CM=CB:CA.$

304. **推論七**　三角形 CPM, 與三角形 $CP'M'$ 等積.

因　$$PM\cdot CM = P'M'\cdot CM'.\qquad\text{(推論六)}$$

305. **推論八**　Mm' 平行於一幾近線.

因　$$Cm' : CM = CQ' : CQ\qquad\text{(相似三角形)}$$
$$= CB : CA.$$

$\therefore$　$Mm' \parallel AB$, 故 $\parallel$ 一幾近線.　(命題四推論七.)

306. **推論九**　若 MP 及 $m'P'$ 引長,相交於 O, 則 CO 必為一幾近線.

因 $CMOm'$ 為一平行四邊形, CO 平分 Mm', 故平分 AB.

$(AB \parallel Mm')$

故 CO 為一幾近線.　(命題四,推論七.)

命題二〇

307. 設 CP 及 CP' 為互配二半直徑, PM 及 $P'M'$ 為雙曲線軸之緯線, PT 為 P 點之切線, 則

$$\triangle CVM' = \triangle PTM,\quad \triangle CPV = \triangle CPT.$$

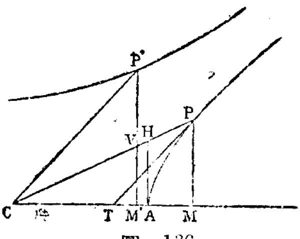

圖 136

因　$\triangle CPM \sim \triangle CHA \sim \triangle CVM'$,

$$\therefore\quad \triangle CPM : \triangle CHA : \triangle CVM' = \overline{CM}^2 : \overline{CA}^2 : \overline{CM'}^2$$

$$\therefore\quad \triangle CPM - \triangle CHA : \triangle CVM' = \overline{CM}^2 - \overline{CA}^2 : \overline{CM'}^2.$$

但　$$\overline{CM}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CM'}^2,$$

$$\therefore\quad \triangle CPM - \triangle CHA = \triangle CVM'.$$

即　　　　梯形 $PMAH = \triangle CVM'$.

但　　　　$\triangle PTM =$ 梯形 $PMAH$,（命題一六,推論）

$\therefore$　　$\triangle PTM = \triangle CVM'$.

又　　　　$\triangle CPM = \triangle CP'M'$.　（命題一九,推論七）

$\therefore$　$\triangle CPM - \triangle PTM = \triangle CP'M' - \triangle CVM'$,

$\therefore$　　$\triangle CP'V = \triangle CPT$.　　　Q. E. D.

命題二一

308. 設 Pp 爲雙曲線之任一直徑,自曲線上任一點 Q,作 Pp 之縱線 QG,交主軸於 L,又自 Q 作軸之縱線(或其引長線),交 Pp 於 K,AH 爲頂點之切線,則 $\triangle QLS =$ 梯形 $KSAH$.

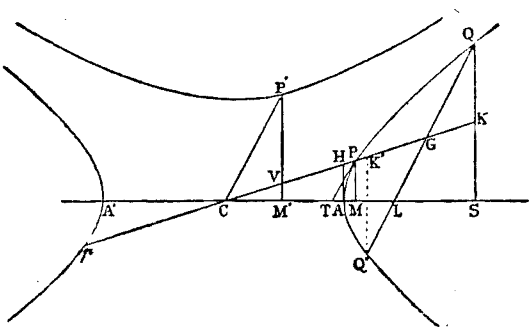

圖 137

設 CP' 爲 CP 之半配徑,作 PM 及 $P'M'$ 垂直於雙曲線軸.

則　　　$CA : CS : CM = AH : SK : MP$.　（相似三角形）

$\therefore$　$CA + CS : CA + CM = AH + SK : AH + MP$

即　　　$A'S : A'M = AH + SK : AH + MP$.

$$\therefore\quad A'S\cdot SA : A'M\cdot MA=(AH+SK)SA : (AH+MP)MA.$$

但 $$\overline{QS}^2 : A'S\cdot SA=\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2,$$ （命題一〇）

$$\overline{PM}^2 : A'M\cdot MA=\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2.$$ （同理）

$$\therefore\quad \overline{QS}^2 : \overline{PM}^2=A'S\cdot SA : A'M\cdot MA$$

$$=(AH+SK)SA : (AH+MP)MA$$

$$=\text{梯形 } KSAH : \text{梯形 } PMAH.$$

因 $QL \parallel PT$, $\therefore\ \triangle QSL\sim\triangle PMT.$

$$\therefore\quad \triangle QSL : \triangle PMT=\overline{QS}^2 : \overline{PM}^2$$

$$=\text{梯形 } KSAH : \text{梯形 } PMAH.$$

但 $\triangle PMT=$ 梯形 $PMAH$, （命題一六，推論）

$\therefore\ \triangle QSL=$ 梯形 $KSAH$. Q. E. D.

309. 推論一 $\triangle QGK=$ 梯形 $TPGL$.

因 $\triangle QSL=$ 梯形 $KSAH$.

$\therefore\ \triangle QGK=$ 四邊形 $GLAH=$ 梯形 $TPGL$. （命題一六）

310. 推論二 同理 $\triangle GQ'K=$ 梯形 $TPGL$

$$=\triangle GQK.$$

$$\therefore\quad GQ=GQ'.$$

故與雙曲線任一直徑之端點切線相平行之一切平行弦，必爲該直徑所平分. （參閱命題一八，推論三）

命題二二

311. 設 CP' 爲 CP 之半配徑，QG 爲 CP 之任一縱線，則

$$\overline{QG}^2 : PG\cdot Gp = \overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2.$$

見命題二一圖;

$$\triangle CPT : \triangle CGL = \overline{CP}^2 : \overline{CG}^2. \quad \text{(相似三角形)}$$

$\therefore$ $$\triangle CPT : \triangle CGL - \triangle CPT = \overline{CP}^2 : \overline{CG}^2 - \overline{CP}^2.$$

或 $$\triangle CPT : \text{梯形}\ GLTP = \overline{CP}^2 : \overline{CG}^2 - \overline{CP}^2.$$

或 $$\triangle CP'V : \triangle QGK = \overline{CP'}^2 : \overline{CG}^2 - \overline{CP}^2. \quad \text{(命題二〇)}$$

$\therefore$ $$\overline{CP'}^2 : \overline{QG}^2 = \overline{CP}^2 : PG\cdot Gp. \quad \text{(相似三角形)}$$

$\therefore$ $$\overline{QG}^2 : PG\cdot Gp = \overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2. \qquad \text{Q. E. D.}$$

312 推論一 任一直徑與雙曲線心等距離之二縱線必相等

因有相等的矩形 $PG\cdot Gp$ 故也.

313. 推論二 $\overline{QG}^2 : \overline{CG}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2.$

因 $$PG\cdot Gp = \overline{CG}^2 - \overline{CP}^2.$$

314. 推論三 引長縱線 GQ, 交配雙曲線於 Q', 則

$$\overline{Q'G}^2 : \overline{CG}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2.$$

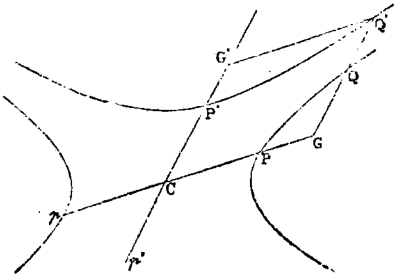

圖 128

作 CP' 之縱線 $Q'G'$, 則 $CGQ'G'$ 為平行四邊形.

$$\overline{Q'G'}^2 : \overline{CG'}^2 - \overline{CP'}^2 = \overline{CP}^2 : \overline{CP'}^2, \qquad \text{(推論二)}$$

即 $$\overline{CG}^2 : \overline{CG'}^2 - \overline{CP'}^2 = \overline{CP}^2 : \overline{CP'}^2.$$

或 $$\overline{CG}^2 : \overline{CP}^2 = \overline{CG'}^2 - \overline{CP'}^2 : \overline{CP'}^2, \qquad \text{(交換中項)}$$

$$\therefore \quad \overline{CG}^2 + \overline{CP}^2 : \overline{CP}^2 = \overline{CG'}^2 : \overline{CP'}^2,$$

或 $$\overline{CG'}^2 : \overline{CG}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2$$

即 $$\overline{Q'G'}^2 : \overline{CG}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2.$$

315. 推論四 雙曲線任意直徑之緯線平方,與該直徑爲此緯線分成兩線分相乘積成比例.

因 $$\overline{QG}^2 : pG\cdot PG = \overline{CP'}^2 : \overline{CP}^2. \qquad \text{(推論二)}$$

命題二三

316. 過雙曲線上任一點 P,作法線交主軸於 N,交配軸於 N',則

$$PN : CP' = CB : CA = CP' : PN'.$$

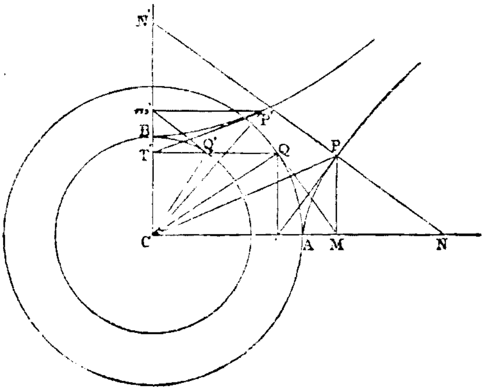

圖 139

因 CP' 與 CP 互爲配徑,故 P 點之切線 PT 必平行於 CP'

故　$\triangle CP'm' \sim \triangle PMT \sim \triangle NPM$.

$$\therefore \quad P'C : PN = P'm' : PL$$

$$= MQ : PM \quad (\text{命題一九,推論二})$$

$$= CA : CB. \quad (\text{命題九,推論二})$$

又　$PN' : PN = CM : MN$　(平行線)

$$= \overline{CA}^2 : CB^2. \quad (\text{命題八,推論})$$

$$\therefore \quad PN' \cdot PN : \overline{PN}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{P'C}^2 : \overline{PN}^2,$$

$$\therefore \quad PN \cdot PN' = \overline{P'C}^2.$$

或　$PN' : P'C = P'C : PN = CA : CB.$

317. 推論　$PN \cdot PN' = \overline{P'C}^2.$

命題二四

318. 雙曲線上任一點P之二焦點半徑相乘積,等於CP之半配徑CP'之平方.

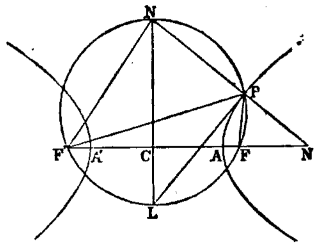

圖 140

PF及PF'爲焦點半徑,作$\triangle PFF'$之外接圓,交配軸於L,N'.連$F'N'$及PN',其引長線交雙曲線軸於N.

LN'是FF'的垂直平分線.故LN'爲此圓之直徑.

$$\therefore \quad \widehat{F'L} = \widehat{FL},$$

$$\therefore \quad \angle LPF = \angle LPF.$$

故PL爲切線.又$\angle LPN'$是直角,

故 PN 爲法線.

今　　$\angle FPN = \angle F'PN'$,　　　(等角之餘角)

$\angle PFN = \angle PN'F'$,　　　(同角之補角)

$\therefore\ \triangle FPN \sim \triangle F'PN'$,

$\therefore\ F'P : PN' = PN : PF$,

$\therefore\ PF \cdot PF' = PN' \cdot PN$

$= \overline{CP'}^2$.　　　(命題二三,推論)

又法　　$2\,CA = PF' - PF$,

$\therefore\ 4\,\overline{CA}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 - 2\,PF' \cdot PF$

$= 2\,\overline{CP}^2 + 2\,\overline{CF}^2 - 2\,PF' \cdot PF$　　　(中線定理)

$\therefore\ PF' \cdot PF = \overline{CF}^2 + \overline{CP}^2 - 2\,\overline{CA}^2$

$= \overline{CF}^2 - \overline{CA}^2 + CP^2 - CA^2$

$= CB^2 + \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$　　　(命題四推論五)

$= \overline{CP}^2 - \overline{CP}^2 + \overline{CP'}^2$　　　(命題一九推論五)

$= \overline{CP'}^2$.

319. 推論一　雙曲線上任一點,及其兩焦點所決定之一圓,必過該點之切線及法線與配軸之交點.

因 PL 爲切線 PN' 爲法線.

320. 推論二　若自 N' 作 PF' 或 PF 之垂線,令 K 爲垂足,則

$PK = \frac{1}{2}(PF' - PF) = CA$.

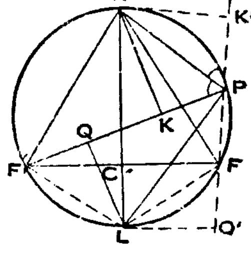

圖 111

因 $$\triangle PKN' \cong \triangle PK'N'.$$

$$\therefore \quad PK = PK'. \qquad (1)$$

又 $$\triangle N'KF' \cong \triangle N'K'F.$$

$$\therefore \quad KF' = K'F \qquad (2)$$

$$\therefore \quad PK + KF' = PK' + K'F = 2PK + PF.$$

即 $$PK = \tfrac{1}{2}(PF' - PF). \qquad \text{Q. E. D.}$$

321. 推論三 若自 L 作 PF' 之垂線 設垂足為 Q, 則

$$F'Q = \tfrac{1}{2}(PF' - PF) = CA.$$

作 $LQ' \perp PF$ 之引長線, 則 $\triangle LQF' \cong \triangle LQ'F.$

$$\therefore \quad F'Q = FQ', \quad \text{又} \quad \triangle PLQ \cong \triangle PLQ',$$

$$\therefore \quad PQ = PQ', \quad \therefore \quad F'Q + PQ = FQ' + PQ'.$$

$$\therefore \quad F'Q = FQ' = \tfrac{1}{2}(PF' - PF) = CA. \qquad \text{Q. E. D.}$$

319 推論四 $CA : CB = CP' : PN.$

因 PL 及 PN 為 $\triangle PFF'$ 之頂角的內外二分角線,

$$\therefore \quad PF' : PF = F'N : FN.$$

$$\therefore \quad PF' - PF : PF = F'N - FN : FN.$$

即 $$2CA : 2CF = PF : FN. \qquad \text{(中項交換)}$$

同理, $$2CA : 2CF = PF' : F'N.$$

$$\therefore \quad \overline{CA}^2 : \overline{CF}^2 = PF \cdot PF' : FN \cdot F'N.$$

$$\therefore \quad \overline{CA}^2 : \overline{CF}^2 - \overline{CA}^2 = PF \cdot PF' : FN \cdot F'N - PF \cdot PF'$$

但 $$FN \cdot F'N - PF \cdot PF' = PN \cdot NN' - PN' \cdot PN$$

$$= PN(NN' - PN') = \overline{PN}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{CP'}^2 : \overline{PN}^2.$$

$$\therefore \quad CA : CB = CP' : PN.$$

命題二五

323. 自雙曲線心,向任一切線作垂線CK; CP' 為 CP 之配徑,則

$$CK : CA = CB : CP'.$$

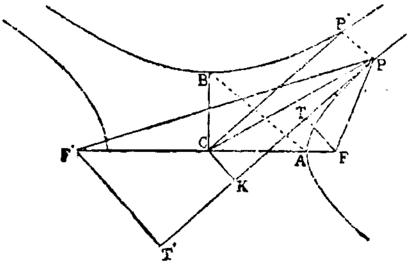

圖 142

連 PF, PF', 作 FT 及 $F'T'$ ⊥ 切線 PT.

則因 $\angle FPT = \angle F'PT'$, $\therefore$ $\triangle FPT \sim \triangle F'PT'$.

$$\therefore \quad FP : F'P = FT : F'T' = F'P - FP : F'T' - FT = CA : CK,$$

$$\therefore \quad FP \cdot F'P : FT \cdot F'T' = \overline{CA}^2 : \overline{CK}^2.$$

但 $$FP \cdot F'P = \overline{CP'}^2, \qquad \text{(命題二四)}$$

$$FT \cdot F'T' = CB^2, \qquad \text{(命題六)}$$

$$\therefore \quad \overline{CP'}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CK}^2.$$

$$\therefore \quad CP' : CB = CA : CK. \qquad \text{Q. E. D.}$$

324 **推論** 互配二半直徑 CP 及 CP' 端點連成之三角形面積為一定.

因　　$CP' \cdot CK = CB \cdot CA$,

故 $\triangle PCP' = \triangle BCA$ 爲一定.

命題二六

325. 過定點 O, 任作雙曲線之一弦 PP', 則其兩線分相乘積與其平行半直徑平方之比爲一定.

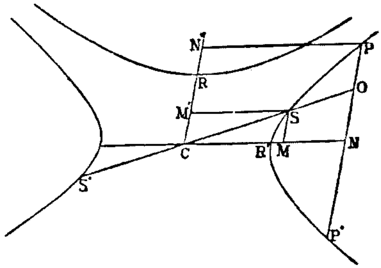

圖 143

過 O 點, 作直徑交曲線於 S; 自 S 作 CR 及 CR' 之緯線 SM 及 SM'.

因 CR 及 CR' 互爲配徑, 故 $CR \parallel PP'$.

$$\overline{PN}^2 : \overline{CR}^2 = \overline{CN}^2 - \overline{CR'}^2 : \overline{CR'}^2,\text{（命題二二,推論二）}$$

$$\therefore\quad \overline{PN}^2 + \overline{CR}^2 : \overline{CR}^2 = \overline{CN}^2 : \overline{CR'}^2.$$

交換中項, $$\overline{PN}^2 + \overline{CR}^2 : \overline{CN}^2 = \overline{CR}^2 : \overline{CR'}^2.$$

同理, $$\overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 : \overline{CM}^2 = \overline{CR}^2 : \overline{CR'}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{PN}^2 + \overline{CR}^2 : \overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 = \overline{CN}^2 : \overline{CM}^2$$

$$= \overline{ON}^2 : \overline{SM}^2.\qquad\text{（相似三角形）}$$

$$\therefore\quad \overline{PN}^2 + \overline{CR}^2 - \overline{ON}^2 : \overline{ON}^2 = \overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 - \overline{SM}^2 : \overline{SM}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{CR}^2 + PO \cdot OP' : \overline{ON}^2 = \overline{CR}^2 : \overline{SM}^2.$$

中項交換, $$\overline{CR}^2 + PO \cdot OP' : \overline{CR}^2 = \overline{ON}^2 : \overline{SM}^2$$

$$= \overline{CO}^2 : \overline{SC}^2.$$

$\therefore \quad PO \cdot OP' : \overline{CR}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{SC}^2 : \overline{SC}^2$, 爲一定. Q. E. D.

第二種情形 見下圖:

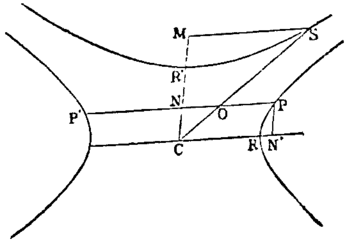

圖 114

作直徑 COS, 再作 CR 之緯線 PN' 及 CR' 之緯線 SM, 則

$$\overline{SM}^2 : \overline{CM}^2 - \overline{CR'}^2 = \overline{CR}^2 : \overline{CR'}^2, \qquad \text{(命題二二)}$$

$$\therefore \quad \overline{SM}^2 : \overline{CR}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{CR'}^2 : \overline{CR'}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 : \overline{CR}^2 = \overline{CM}^2 : \overline{CR'}^2.$$

或 $$\overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 : \overline{CM}^2 = \overline{CR}^2 : \overline{CR'}^2.$$

但 $$\overline{CN'}^2 - \overline{CR}^2 : \overline{PN'}^2 = \overline{CR}^2 : \overline{CR'}^2, \qquad \text{(命題二二)}$$

$$\therefore \quad \overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 : \overline{CN'}^2 - \overline{CR}^2 = \overline{CM}^2 : \overline{PN'}^2,$$

或 $$\overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 : \overline{PN}^2 - \overline{CR}^2 = \overline{CM}^2 : \overline{CN}^2$$

$$= \overline{SM}^2 : \overline{ON}^2 \qquad \text{(相似三角形)}$$

$$\therefore \quad \overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 - \overline{SM}^2 : \overline{SM}^2 = \overline{PN}^2 - \overline{ON}^2 - \overline{CR}^2 : \overline{ON}^2,$$

或 $$\overline{CR}^2 : PO \cdot OP' - \overline{CR}^2 = \overline{SM}^2 : \overline{ON}^2$$

$$= \overline{CS}^2 : \overline{CO}^2.$$

$\therefore \quad PO \cdot OP' : \overline{CR}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CS}^2 : \overline{CS}^2$, 爲一定.

第三種情形 見下圖:

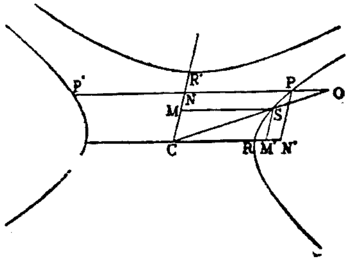

圖 145

作圖法同前.

$$\overline{PN'}^2 : \overline{CN'}^2 - \overline{CR}^2 = \overline{CR'}^2 : \overline{CR}^2, \qquad \text{(命題二二)}$$

又 $$\overline{SM'}^2 : \overline{CM'}^2 - \overline{CR}^2 = \overline{CR'}^2 : \overline{CR}^2, \qquad \text{(命題二二)}$$

$$\therefore \quad \overline{CM'}^2 - \overline{CR}^2 : \overline{CN'}^2 - \overline{CR}^2 = \overline{SM'}^2 : \overline{PN'}^2,$$

或 $$\overline{SM}^2 - \overline{CR}^2 : \overline{PN}^2 - \overline{CR}^2 = \overline{CM}^2 : \overline{CN}^2$$

$$= \overline{SM}^2 : \overline{ON}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{SM}^2 + \overline{CR}^2 - \overline{SM}^2 : \overline{ON}^2 - \overline{PN}^2 + \overline{CR}^2 = \overline{SM}^2 : \overline{ON}^2,$$

或 $$\overline{CR}^2 : OP \cdot OP' + \overline{CR}^2 = \overline{CS}^2 : \overline{CO}^2. \qquad \text{(相似三角形)}$$

$$\therefore \quad OP \cdot OP' : \overline{CR}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{CS}^2 : \overline{CS}^2,$$ 為一定.

326. **推論一**　設雙曲線之兩弦相交,則每一弦上兩線分相乘積之比,等於其平行之半直徑平方之比.

設 PP' 及 pp' 兩弦相交於 O, 令 Cr 爲平行於 pp' 之半直徑.

則 $$OP \cdot OP' : \overline{CR}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{CS}^2 : \overline{CS}^2 = Op \cdot Op' : \overline{Cr}^2,$$

$$\therefore \quad OP \cdot OP' : Op \cdot Op' = \overline{CR}^2 : \overline{Cr}^2.$$

327. **推論二**　自任一點作雙曲線之二切線,則此二切線之比,等於其平行之半直徑之比.

命題二七

328. 自雙曲線外一點,作雙曲線之二切線 OP, OR, 則與一切線平行之任一直線 AQ', 必爲曲線及切點弦截成之線分 AQ, AB, 及 AQ' 成幾何級數.

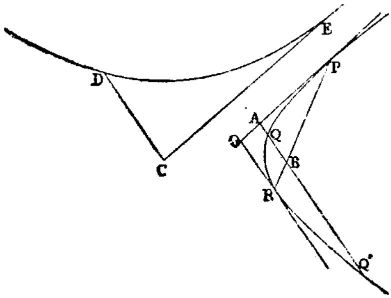

圖 146

作半直徑 $CD \parallel OR, CE \parallel OP$.

則 $AQ \cdot AQ' : \overline{AP}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{CE}^2$ (命題二六, 推論一)

$= \overline{OR}^2 : \overline{OP}^2$ (命題二六, 推論二)

$= \overline{AB}^2 : \overline{AP}^2.$ (相似三角形)

$\therefore\ AQ \cdot AQ' = \overline{AB}^2.$ Q. E. D.

命題二八

329. 設一圓交雙曲線於四點,則二公共弦必與雙曲線軸夾等角.

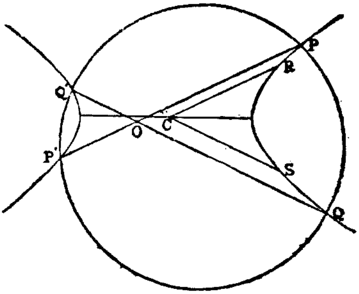

圖 147

設PP'及QQ'兩公共弦相交於O,作半直徑$CR\parallel PP'$,$CS\parallel QQ'$.

則　$OP\cdot OP':OQ\cdot OQ'$

$=CR^2:CS^2$,

(命題二六推論一)

但　$OP\cdot OP'=OQ\cdot OQ'$,

(兩弦交於圓內)

$\therefore\quad CR=CS.$

故CR, CS與雙曲線軸夾等角,因而PP'及QQ'與雙曲線軸夾等角

330 **推論**　同理可證PQ及$P'Q'$; PQ'及$P'Q$,亦與雙曲線軸夾等角.

命題二九

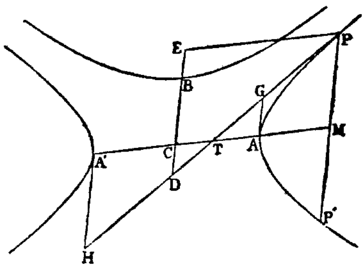

圖 148

331 自雙曲線上任一點,作切線,交任一直徑於T;PM爲緯線,則CA爲CM及CT之比例中項.

在A, A'兩點作切線,交P點切線於G, H,

則　$A'T:TA=A'H:AG.$　(相似三角形)

又　$A'M:MA=HP:PG,$　(平行線)

但 $$A'H : AG = HP : PG, \qquad \text{(命題二六推論二)}$$

$$\therefore \quad A'T : TA = A'M : MA.$$

$$\therefore \quad A'T + TA : A'T - TA = A'M + MA : A'M - MA.$$

卽 $$2CA : 2CT = 2CM : 2CA.$$

$$\therefore \quad CM \cdot CT = \overline{CA}^2. \qquad \text{Q. E. D.}$$

332. 推論一 若 PM 爲 AA' 之任一緯線,取 CT 爲 CA 及 CM 之第三比例項,則 PT 必切於雙曲線.

333. 推論二 一直徑之任意雙緯線兩端點之切線,必相交於該直徑上.

334. 推論三 經過二切線交點之直徑,必平分其切點弦.

335. 推論四 設 P 點切線交配雙曲線之直徑於 D; PE 爲該直徑之緯線,則 CB 爲 CD 及 CE 之比例中項.

因 $$CT : CM = TD : DP. \qquad \text{(平行線)}$$

$$= DC : DE, \qquad \text{(相似三角形)}$$

$$\therefore \quad CT \cdot CM : \overline{CM}^2 = DC : DE,$$

或 $$\overline{CA}^2 : \overline{CM}^2 = DC : DE.$$

$$\therefore \quad \overline{CA}^2 : \overline{CM}^2 - \overline{CA}^2 = DC : DE - DC.$$

$$\therefore \quad \overline{CB}^2 : \overline{PM}^2 (\text{或 } \overline{CE}^2) = DC : CE \qquad \text{(命題二二推論二)}$$

$$= DC \cdot CE : \overline{CE}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{CB}^2 = DC \cdot CE. \qquad \text{Q. E. D.}$$

336. 推論五 任一直徑,必爲切線及自切點所作該直徑之緯線所調分.

因　$CM:CA=CA:CT,$

$\therefore\quad CM+CA:CM-CA=CA+CT:CA-CT,$

或　$A'M:MA=A'T:TA.$

337. **推論六**　雙曲線之任一切線,必爲一直徑及其端點兩切線所調分.

因　$MA':MT:MA=PH:PT:PG.$

命題三〇

338. 雙曲線上一動切線,在二平行定切線上截取線分之乘積爲一定,且等於一平行半直徑之平方.

見圖148;設 PGH 爲動切線,交二平行定切線 $AG, A'H$ 於 G, H.

作半直徑 $CB\parallel AG$,或 $A'H$,並作其縱線 PE,

則　$CT:CA=CA:CM,$　(命題二九)

$\therefore\quad CT:TA=CA:AM.$　(減比定理)

$\therefore\quad CT:CA=TA:AM.$　(中項互換)

$\therefore\quad CT:TA'=TA:TM.$　(加比定理)

$\therefore\quad CD:A'H=AG:PM.$　(相似三角形)

$\therefore\quad A'H\cdot AG=CD\cdot PM.$

$=CD\cdot CE$

$=CB^2.$　(命題二九,推論四)

339. **推論**　設 CQ 爲與動切線 PGH 平行之半直徑,則

$$HP\ PG=CQ^2.$$

因　　$A'H:HP=CB:CQ=AG:PG,$

（命題二六，推論二）

$$\therefore\quad A'H\cdot AG:HP\cdot PG=\overline{CB}^2:\overline{CQ}^2.$$

但　　$A'H\cdot AG=\overline{CB}^2,\quad \therefore\quad HP\cdot PG=\overline{CQ}^2.$

命題三一

340. 任兩半直徑CP,CA端點之切線PT, AK，所構成之兩三角形CAK及CPT等積.

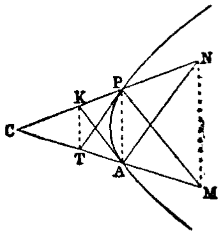

圖 149

作緯線PM，則

$TC:CA=CA:CM$　　（命題二九）

$=CK:CP$　　（相似三角形）

$$\therefore\quad KT\parallel PA.$$

$$\therefore\quad \triangle PTA=\triangle PKA.$$

$$\therefore\quad \triangle CPT=\triangle CAK.$$

341. 推論　自A作緯線AN，交CP之引長線於N，則

$$\triangle CMP=\triangle CAN.$$

因　　$AN\parallel PT,\quad \therefore\quad TC:CA=PC:CN.$

$$\therefore\quad CA:CM=PC:CN.$$

$$\therefore\quad MN\parallel PA$$

$$\therefore\quad \triangle PAM=\triangle PAN.$$

$$\therefore\quad \triangle CMP=\triangle CAN.$$

命題三二

342. 自相配二直徑 CP, CQ 端點, 作任一直徑 CA 之緯線 PM, QN, 則 $\overline{CN}^2=AM\cdot MA'$, $\overline{CM}^2=AM\cdot MA'+\overline{CA}^2$.

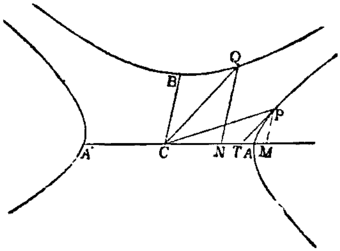

圖 150

因 $$\overline{PM}^2 : \overline{CM}^2-\overline{CA}^2=\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2,$$

(命題二二, 推論二.)

又 $$\overline{QN}^2 : \overline{CN}^2+\overline{CA}^2=\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2,$$

(命題二二, 推論三.)

$$\therefore\quad \overline{PM}^2 : \overline{QN}^2=\overline{CM}^2-\overline{CA}^2 : \overline{CN}^2+\overline{CA}^2.$$

但 $$PM : QN = TM : CN,$$ (相似三角形)

$$\therefore\quad \overline{TM}^2 : \overline{CN}^2=\overline{CM}^2-\overline{CA}^2 : \overline{CN}^2+\overline{CA}^2$$

$$=\overline{CM}^2-CT\cdot CM : \overline{CN}^2+\overline{CA}^2$$ (命題二九)

$$=CM\cdot TM : \overline{CN}^2+\overline{CA}\ .$$

$$\therefore\quad \overline{TM}^2 : CM\cdot TM=\overline{CN}^2 : \overline{CN}^2+\overline{CA}^2.$$

$$\therefore\quad TM : CM=\overline{CN}^2 : \overline{CN}^2+\overline{CA}^2.$$

$$\therefore\quad TM : CT=\overline{CN}^2 : \overline{CA}^2$$ (減比定理)

$$\therefore\quad TM\cdot CM : CT\cdot CM=\overline{CN}^2 : \overline{CA}^2.$$

但　$$CT\cdot CM=\overline{CA}^2,$$ （命題二九）

$$\therefore\quad TM\cdot CM=\overline{CN}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{CN}^2=\overline{CM}^2-CM\cdot CT$$

$$=\overline{CM}^2-\overline{CA}^2=AM\cdot MA'.$$

又　$$\overline{CM}^2=\overline{CN}^2+\overline{CA}^2=AM\cdot MA'+\overline{CA}^2.$$ Q. E. D.

343. **推論一**　$$\overline{CM}^2-\overline{CN}^2=\overline{CA}^2.$$

344. **推論二**　$$\overline{QN}^2-\overline{PM}^2=\overline{CB}^2.$$

因　$\overline{QN}^2:(\overline{CN}^2+\overline{CA}^2)$ 或 $\overline{CM}^2=\overline{CB}^2:\overline{CA}^2,$

又　$$\overline{PM}^2:\overline{CM}^2-\overline{CA}^2=\overline{CB}^2:\overline{CA}^2,$$

（命題二二，推論二）

$$\therefore\quad \overline{QN}^2-\overline{PM}^2:\overline{CA}^2=\overline{CB}^2:\overline{CA}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{QN}^2-\overline{PM}^2=\overline{CB}^2.$$

345. **推論三**　$CN:PM=CA:CB=CM:QN.$

因　$$\overline{CA}^2:\overline{CB}^2=\overline{CM}^2-\overline{CA}^2:\overline{PM}^2=\overline{CN}^2+\overline{CA}^2:\overline{QN}^2,$$

或　$$\overline{CA}^2:\overline{CB}^2=\overline{CN}^2:\overline{PM}^2=\overline{CM}^2:\overline{QN}^2,$$ （推論一）

$$\therefore\quad CA:CB=CN:PM=CM:QN.$$

346. **推論四**　$$\triangle CMP=\triangle CNQ.$$

因　$$CN:PM=CM:QN,$$ （推論三）

而　$$\angle CMP=\angle CNQ,$$

$$\therefore\quad \triangle CMP=\triangle CNQ.$$

命題三三

347. 雙曲線之任一切線，遇互配二直徑 CP, CQ 於 T, T'，則

CT, CT' 相乘積,等於與該切線平行之半直徑之平方.

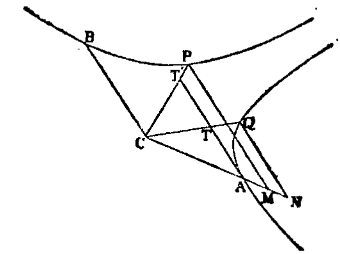

圖 151

設 A 爲切點,作直徑 CA,並作其緯線 PM, QN, 則

$$CM : PM = CA : AT'.$$

(相似三角形)

$$\therefore \quad CM \cdot AT' = CA \cdot PM,$$

$$= CB\ CN. \quad \text{(命題三二,推論三)}$$

$$\therefore \quad CM : CN = CB : AT'.$$

又 $$CN : NQ = CA : AT, \quad \text{(相似三角形)}$$

$$\therefore \quad CN \cdot AT = CA \cdot NQ$$

$$= CB \cdot CM. \quad \text{(命題三二,推論三)}$$

$$\therefore \quad CM : CN = AT : CB.$$

故 $$CB : AT' = AT : CB,$$

$$\therefore \quad AT \cdot AT' = \overline{CB}^2.$$

命題三三

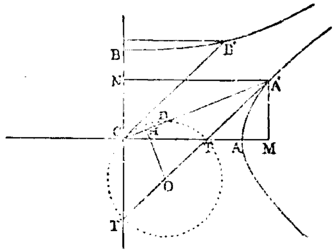

圖 152

343. 已知雙曲線二互配半直徑之長及位置,求雙曲線軸.

設 CA', CB' 爲二已知互配半直徑,作 CA', CB' 之第三比例項 $A'D$.

過 CD 之中點 H, 作 CD 之垂線

HO,交切線$A'O$於O.以O爲圓心,OC爲半徑,作圓,交$A'O$於T,T'.連CT,CT',並作$A'M$及$A'N$,順次垂直CT及CT'之引長線.取CT,CM之比例中項CA,並取CT',CN之比例中項CB.則CA及CB卽爲雙曲線之兩軸.

因 $$\overline{CB'}^2=CA'\cdot A'D \qquad \text{(作圖)}$$
$$=TA'\cdot T'A', \qquad \text{(割線定理)}$$

故CA,CB爲互配二直徑.　　(命題三三)

但$\angle TCT'$爲直角,故兩軸之位置與CA,CB合.

又 $$\overline{CA}^2=CT\cdot CM,\quad \overline{CB}^2=CT'\cdot CN.$$

故CA,CB卽爲雙曲線兩軸二分之一.　　(命題九)

命題三五

349. 與雙曲線任意二切線之切點弦平行任作直線.則此線爲曲線及切線所截之線分恆相等.

作平行弦AB,PQ之直徑.則此直徑必過兩切線之交點O.

(命題二九推論二)

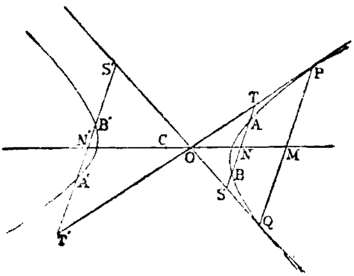

圖 153

因 $$PM=MQ, \qquad \text{(命題二一推論二)}$$

$$\therefore\ TN=NS.$$

但 $$AN=NB, \qquad \text{(命題二一推論二)}$$

$$\therefore \quad AT = BS.$$

350. **推論一**　與二切線之切點弦平行之切線,爲該兩切線所截之線分,必爲切點所平分.

351. **推論二**　任一直線平行於二切線之切點弦,爲該二切線所截之線分,必爲過二切線交點之直徑所平分.

命題三六

352. 過雙曲線上二切線交點之任意直線OA,必爲曲線及切點弦所調分.

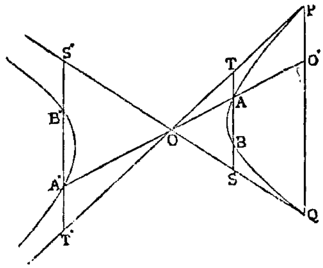

圖 154

過A, A',作切點弦PQ之平行線TS及$T'S'$,則

$$\overline{TP}^2 : \overline{T'P}^2 = TA \cdot TB : T'A' \cdot T'B'.$$

(命題二六 推論)

但 $\qquad TB = AS, \quad T'B' = A'S'.$ (命題三五)

$$\therefore \quad \overline{TP}^2 : \overline{T'P}^2 = TA \cdot AS : T'A' \cdot A'S'.$$

但 $\qquad TA : T'A' = OA : OA' = AS : A'S'.$ (相似三角形)

$\therefore \qquad \overline{TP}^2 : \overline{T'P}^2 = \overline{OA}^2 : \overline{OA'}^2.$

$$\therefore \quad TP : T'P = OA : OA'.$$

$$\therefore \quad AO' : A'O' = OA : OA'.$$ (平行線)

命題三七

353. 過雙曲線任意二切線之切點弦中點,任作直線必爲

曲線及過二切線交點平行於切點弦之直線所調分.

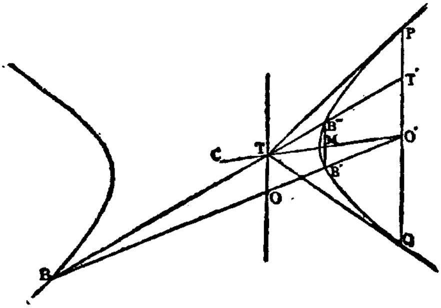

圖 155

設 TP, TQ 爲切線, O' 爲切點弦 PQ 之中點. $TO \parallel PQ$. 過 O' 任作直線, 交雙曲線於 B, B', 交 TO 於 O. 連 BT, 交曲線於 B'', 交 PQ 於 T', 過 B'', 作 PQ 之平行線, 交 BO' 於 B_1.

今先證 B_1 與 B' 相合:

連 CT, 引長必過 PQ 之中點 O'. (命題二九, 推論三.)

$$B''M : B''B_1 = \left\{ \begin{array}{c} B''M : O'T' \\ \cdot \\ O'T' : B''B_1 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} B''T : TT' \\ \\ BT' : BB'' \end{array} \right\} \quad \text{(相似三角形)}$$

$$= B''T \cdot BT' : TT' \cdot BB''.$$

但 $$TT' \cdot BB'' = 2\, B''T \cdot BT'.$$

$$\therefore \quad B''B_1 = 2\, B''M.$$

故 B_1M 爲 CO' 之緯線, 故 B_1 與 B' 表同一點.

今 $$TB : BT' = B''T : B''T'.$$

$$\therefore \quad OB : BO' = OB' : B'O'. \qquad \text{(平行線)}$$

命題三八

354. 過雙曲線上任一點P,作直線,交二幾近線於Q, Q',則PQ及PQ'相乘積,等於其平行之半直徑CB'平方.

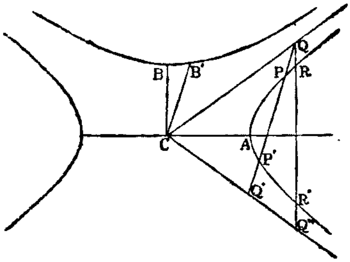

圖 156

作配軸CB,自Q,作$QRR' \parallel CB$,

則 $$QP \cdot QP' : QR \cdot QR' = \overline{CB'}^2 : \overline{CB}^2.$$

(命題二六,推論一)

但 $$QP' = PQ', \quad QR' = RQ'', \qquad \text{(命題一八)}$$

$$\therefore \quad QP \cdot QP' : QR \cdot QR' = QP \cdot PQ' : QR \cdot RQ''$$

$$= \overline{CB'}^2 : \overline{CB}^2.$$

但 $$QR \cdot RQ'' = \overline{CB}^2, \qquad \text{(命題一七)}$$

$$\therefore \quad QP \cdot PQ' = \overline{CB'}^2.$$

355. 推論 雙曲線之任意切線,爲二幾近線所截之線分,必等於其平行之直徑.

因 $$\overline{CB'}^2 = QP \cdot PQ' = \overline{DE}^2. \qquad \text{(見命題一八,推論四)}$$

命題三九

356. 雙曲線及其二幾近線間之內接平行四邊形必等積.

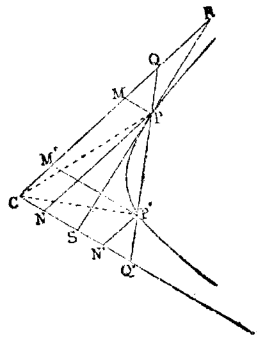

圖 157

設 $CMPN$ 及 $CM'P'N'$ 爲平行四邊形.

連 PP', 交二幾近線於 Q, Q'.

則 $\quad \square CMPN : \square CM'P'N'$

$$=\begin{Bmatrix} PM : P'M' \\ PN : P'N' \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix} PQ : P'Q \\ PQ' : P'Q' \end{Bmatrix} \quad \text{(相似三角形)}$$

但 $\qquad PQ = P'Q', \quad PQ' = P'Q, \qquad$ (命題一八)

$\therefore \quad \square CMPN = \square CM'P'N'. \qquad$ Q. E. D.

357. 推論一 雙曲線上任兩點,與中心之連線,所成扇形之面積,等於曲線一幾近線,及過該兩點平行於他一幾近線之二直線所圍之面積.

因 $\quad \triangle CP'N' = \triangle CPN, \qquad$ (爲等積平行四邊形之半)

$\therefore$ 扇形 $CPP' = NPP'N'$ 圖形之面積.

358. 推論二 雙曲線與其幾近線逐漸接近,但在任何有限距離之內,絕不能相遇.

因 $\square CMPN$ 之面積爲一定,故 PM 與 PN 或 CM 成反變.

故 CM 增長,則 PM 縮短,若 CM 增至無窮大,則 PM 可減至無

窮小.

359. **推論三**　雙曲線之任一切線,與其二幾近線所包之三角形,其面積爲一定.

因雙曲線上任一點P之切線,爲二幾近線截取之線分,以P爲中點.　(命題一八)

$\therefore$　$\triangle RCS=2\square CMPN$ 爲一定.

360 **推論四**　設兩雙曲線有共同之幾近線,則平行於一幾近線之任一直線,爲曲線及他一幾近線截取線分之比爲一定.

設第二雙曲線交PN於p,交$P'N'$於p'.

則　$$\square CP : \square Cp = \square CP' : \square Cp'.$$

$$\therefore \quad PN : pN = PN' : pN'.$$

命題四〇

361. 過雙曲線上任一點P,作直線OPO'及QPQ',順次平行於一內接四邊形之二鄰邊AD, DC,交對邊於O, O'及Q, Q',則

$$PO \cdot PO' : PQ \cdot PQ' \text{ 爲一定.}$$

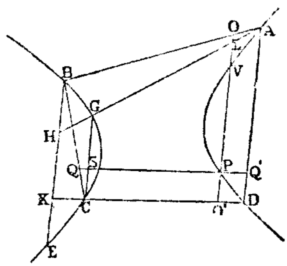

圖 158

過B, C,作BE, $CG \parallel AD$;連AG,引長交BE於H.

平分平行弦BE, CG之直徑,必平分AD,故亦平分HK及LO'.

$$\therefore\quad BH=KE,\quad O'V=PL.$$

今 $$OL:BH=AL:AH=DO':DK.$$ (平行線)

$$\therefore\quad OL:O'D=BH:DK.$$

又 PO' 或 $SC:SQ=BK:KC.$ (相似三角形)

$$\therefore\quad OL\cdot PO':O'D\cdot SQ=BH\cdot BK:DK\cdot KC.$$

$$\therefore\quad OL\cdot PO':PQ'\cdot SQ=EK\cdot BK:DK\cdot KC$$

$$=O'V\cdot O'P:O'C\cdot O'D$$

$$=PL\cdot O'P:PS\cdot PQ'.$$

$$\therefore\quad OL\cdot PO'+PL\cdot O'P:PQ'\cdot SQ+PS\cdot PQ'=EK\cdot BK:DK\cdot KC.$$

或 $$PO\cdot PO':PQ\cdot PQ'=EK\cdot BK:DK\cdot KC.$$

因 A, B, C, D 為定點,故 E 為定點.

$\therefore$ $EK\cdot BK:DK\cdot KC$ 為定比,因而 $PO\cdot PO':PQ\cdot PQ'$ 之比為一定.

命題四一

362. 自雙曲線上任一點 P,向一內接四邊形之四邊作直線 PR, PR', PS, PS',各與該邊夾定角,則對邊上兩線分相乘積之比為一定.

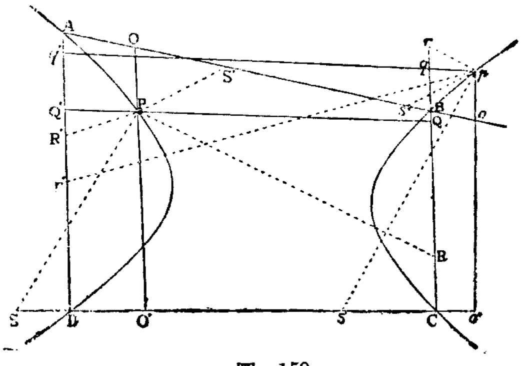

圖 159

設 $ABCD$ 爲內接四邊形,過 P 點,作 $OPO' \parallel AD$, $QPQ' \parallel DC$.

在雙曲線上任取一點 p, 作 $poo' \parallel AD$, $pqq' \parallel DC$, 並作 pr, pr', ps, ps' 順次平行於 PR, PR', PS, PS'.

則　$$PR : pr = PQ : pq \qquad \text{(相似三角形)}$$

又　$$PR' : pr' = PQ' : pq',$$

$$\therefore \quad PR \cdot PR' : pr \cdot pr' = PQ \cdot PQ' : pq \cdot pq'.$$

同理可證:

$$PS \cdot PS' : ps \cdot ps' = PO \cdot PO' : po \cdot po'.$$

但　$$PQ \cdot PQ' : PO \cdot PO' = pq \cdot pq' : po \cdot po'.$$

$$\therefore \quad PR \cdot PR' : PS \cdot PS' = pr \cdot pr' : ps \cdot ps'.$$

故爲定比.

363. **推論一**　自雙曲線上任一點,向內接四邊形之四邊作垂線,則對邊上兩垂線相乘積之比爲一定.

364　**推論二**　若 A 點與 D 合, B 點與 C 點合,則 AD 及 BC 成雙曲線之切線,而 AB 與 CD 合成切點弦.故自雙曲線上任一點,至二定切線及切點弦作垂線,則二切線上兩垂線相乘積,與切點弦上之垂線平方成定比.

365　**推論三**　設 AB, CD 交於 X, CA, BD 交於 Y, 又設 PR, PR', PS, PS', pr, pr', ps, ps' 皆在 XY 上,則上述比例,爲

$$\overline{PX}^2 : \overline{PY}^2 = \overline{pX}^2 : \overline{pY}^2.$$

即　$$PX : PY = pX : pY.$$

故 XY 爲雙曲線所調分.

命題四二

366. 設雙曲線上二定切線 DP, DQ, 爲一動切線 EF, 及平行於切點弦 PQ 之直徑 AB 所截，則二定切線上截取之兩線分相乘積爲一定.

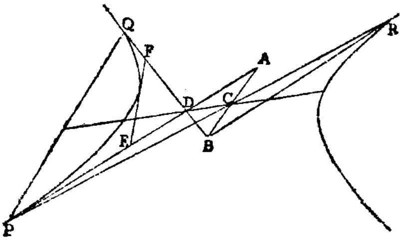

圖 160

連 PC, 引長交曲線於 R, 連 BR.

因 $CA=CB$. (命題三五,推論二)

$\therefore \quad \triangle ACP=\triangle BCR.$

$\therefore$ BR 與 AP 平行且相等, 故 BR 爲切線.

設 BR 引長, 交 FE 於 Z.

則 $RB:PE=RZ:PD$ (命題三〇)

$$=RZ-RB:PD-PE$$

$$=BZ:ED.$$

$$\therefore \quad AP:PE=BF:FD.$$

$$\therefore \quad AP:AP-PE=BF:BF-FD.$$

$$\therefore \quad AP:AE=BF:BD.$$

$\therefore \quad AE\cdot BF=AP\cdot BD$ 爲一定.

命題四三

367　過五定點求作一圓錐曲線.

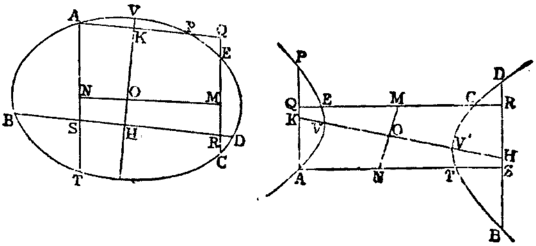

圖 161

設 A, B, C, D, E 爲已知五定點. 連 BD 及 CE, 過 A, 作 $AQ \parallel BD$. $AS \parallel CE$.

在 AQ 上定一點 P, 在 AS 上定一點 T, 使

$$BR \times RD : CR \times RE = AQ \times PQ : CQ \times EQ.$$

及

$$BR \times RD : CR \times RE = BS \times SD : AS \times ST.$$

則 P, T 當爲曲線上之兩點.(第二篇,命題二二;及第三篇命題二六,推論一.)

故若平分 AT 於 N, CE 於 M, 則 MN 之連線.必過曲線之中心.同理 AP 及 BD 之中點連線 KH, 亦過此中心.若 $MN \parallel KH$. 則該曲線爲拋物線.若 MN 與 KH 相交則交點卽爲曲線之中心.

今於 HK 定 OV, 使

$$\overline{PK}^2 : \overline{DH}^2 = \overline{OV}^2 \sim \overline{OK}^2 : \overline{OV}^2 \sim \overline{OH}^2,$$

則由命題二二,推論二,OV 當爲一半直徑,而以 PK 及 DH 爲緯線,準此,可決定任意諸緯線及曲線上任意若干點,並能決定其兩軸.(第二篇命題三〇,及第三篇命題三四.)

命題四四

368. 求作圓錐曲線,切於已知五直線.

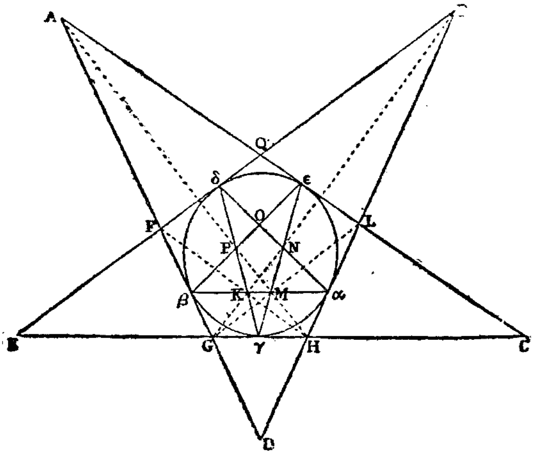

圖 162

先就五線中任意四直線,做成之四邊形 $BFGH$,作其對角線,得交點 K. 再就四邊形 $AGHL$ 作其對角線,得交點 M.

如是進行,仍可得三個四邊形 $EHLQ$, $DLQF$, 及 $CQFG$, 其對角線之交點,順次命爲 N, O, P.

連 KM, 引長交切線於 α, β. 連 KP, 引長交切線於 γ, δ. 則此諸點應在曲線上.

由命題四〇,四邊形 $BFGH$ 兩對角線之交點 K 應在一圓錐曲線以 FG, LH 爲切線之切點弦上.同理,四邊形 $AGHL$ 之對角線交點 M 亦應在此二直線爲切線之圓錐曲線的切點弦上.故 α, β 必爲所求圓錐曲線與此兩直線之切點,應在曲線上.同理可證 γ, δ, ϵ 皆爲曲線上之點.由此五點,可決定一圓錐曲線.

命題四五

369　設二對頂正圓錐體,爲同一平面所截,則其截面爲一雙曲線.

過正圓錐體之軸,作平面 BVE,垂直於截面.則 BVE 面必垂直於底面 BPE.

故 BVE 垂直於截面及底面之交線 MP.

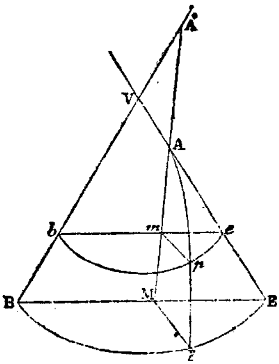

圖 163

$$\therefore\quad MP\perp BE.$$

$$M\cdot ME=\overline{MP}^2.$$

任作底面之平行平面 bpe,交截面於 mp,則依同理,可證 $mp\perp be$,且有

$$bm\cdot me=\overline{mp}.$$

但　$$BM:bm=A'M:A'm.$$　(相似三角形)

又　$$ME:me=MA:mA.$$

$$\therefore\quad BM\cdot ME:bm\cdot me=A'M\cdot MA:A'm\cdot mA.$$

或 $$\overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 = A'M \cdot MA : A'm \cdot mA.$$

故截面爲雙曲線. (命題一〇)

370. **推論一** 過 A, A' 作截面, 與底面平行, 則其兩直徑以配軸爲比例中項. (參閱101頁)

371. **推論二** 此錐體之內切球, 與此圓平面之切點, 可決定雙曲線之兩焦點.