大學叢書

微積分學

孫光遠 孫叔平著

商務印書館發行

大學叢書

微積分學

孫光遠
孫叔平 著

商務印書館發行

自序

本書供大學理工科一年級學生之用,凡曾習代數與解析幾何者,閱讀是書當無若何困難.

微積分中之基本定理爲極限之存在與連續函數之特性,此種定理本書僅有敍述而略其證明,惟書中之重要定理大都發軔於此,幸讀者三致意焉.

微積分爲算學之基本課程,讀者對此每多片段之智識而缺全局之瞭解,是以本書力求前後呼應,提綱挈領,以免支離破碎,冀爲讀者一貫之助.惟自愧淺學,疵謬之處,在所不免,倘希海內高明有以教正之.

本書承中央大學算學系主任胡坤陞博士多所是正,謹此誌謝.

孫光遠

孫叔平

一九三七年四月十六日

目　次

第一章　函數及極限

第二章　微分法

第三章 導數之性質及其應用

第四章 逐次微分法

第五章 平面曲線

第六章 無窮級數

第七章 函數之展開

第八章 不定積分

第九章 定積分

第十章　積分法

第十一章　偏微分法

第十二章 幾何上的應用

第十三章 重積分

第十四章　微分方程式

中英名詞對照表

微積分學

第一章

函數及極限

1. 常數，變數 有一種數量，在計算的時候，其數值是永遠不變的，這種數量叫做常數．我們以後常用 $a, b, c, \cdots A, B, C, \cdots \alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 來代表常數．又有一種數量，在計算的時候，其數值在一定範圍之內可以變易的，這種數量叫做變數．我們以後常用 $x, y, z, \cdots, X, Y, Z, \cdots$ 來代表變數．

在算學中，我們常用一直線上的點，來表示種種數值．如在一直線上，任擇一點 O 使其代表零，這點叫做原點．又任擇一段之長如 OU，叫

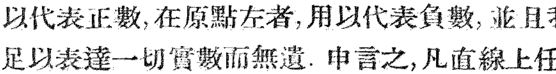


圖 1

做單位．設 P 爲直線上的一點，OP 之長便代表一數 a．凡點之在原點右者，用以代表正數，在原點左者，用以代表負數，並且我們認爲直線上的點，足以表達一切實數而無遺．申言之，凡直線上任何一點，都表示一個實數．任何實數，必有直線上的一點爲其代表．

設變數 x 在 a, b 二數之間 $(a<b)$，可以任意變易，但不能小於 a，也不能大於 b，我們就寫如

$$a \leqq x \leqq b.$$

若用直線上的點來講，變數 x 可以代表 ab 段中一切的點．a, b 二數

所以限制變數 x 的範圍，這種範圍叫做變數 x 的間隔，我們常用記號 (a, b) 或 $a \leqq x \leqq b$ 以表示之.

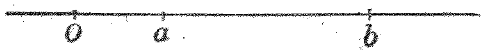


圖 2

2. 函數及其圖表 設 x 與 y 表示兩個變數，若 x 之值既定，y 之值就隨之而定，x 與 y 之間有一種相倚相應的關係，那末 y 就叫做 x 的函數. 這時 x 叫做自變數，y 也叫做因變數. 例如 $y=x-3$，當 $x=3$ 時，y 之值爲零. x 等於其他之數如 $1, 2, 4, 5, \cdots$ 時，y 之值爲 $-2, -1, 1, 2, \cdots$. y 與 x 之間有一種相倚相應的關係，至爲顯然. 在自然科學中，函數的例，所在皆是. 如氣體所佔的容量，當温度不變之時，與其所受的壓力成比例，如以 p 表壓力，v 表容量，c 表一常數，則有

$$v=\frac{c}{p}.$$

根據這個關係，我們可以從 p 知 v. 又如物體受地心吸力而下墮，其所經的途徑，自然是時間的函數，如以 S 表其所經的途徑，t 表時間，g 表引力常數，那末 S 隨 t 而變的情形可由下式表達之，

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

有了這個關係，物體下墮時所處的地位，就可以推知了. x 與 y 中間的關係常用記號表之如下，

$$y=f(x), \quad y=g(x), \quad y=F(x), \quad y=\varphi(x).$$

令 $x=a$ 則函數 $f(x)$ 之值即以 $f(a)$ 表示之，例如

$$f(x)=x^2-9x+10,$$

則
$$f(a)=a^2-9a+10,$$
$$f(0)=0^2-9\cdot 0+10=10,$$
$$f(3)=3^2-9\cdot 3+10=-8.$$

爲明瞭函數的性質起見,我們往往用製圖之法. 先畫兩條互相垂直的直線, 作爲座標軸, 其一叫做 x 軸, 其他叫做 y 軸. 既知 y 與 x 的函數關係 $y=f(x)$, 那末當 x 既得一値, y 必有一値與之相應, 我們把這種 x 及與之相應之 y 作爲座標, 就得種種不同之點, 諸點相連, 就得一條曲線, 這條曲線叫做函數 $y=f(x)$ 的圖表. 例如函數

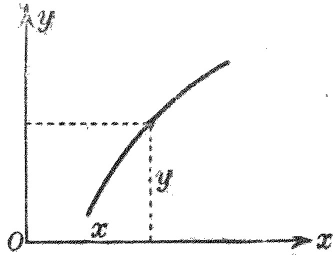


圖 3

$$y=+\sqrt{1-x^2}$$

當 $x=0$ 時, y 等於 1. x 無論爲正爲負, y 始終爲正. 因此其圖表必居於 x 軸之上, 不但如此, 當 $-1\leqq x\leqq 1$ 時, 如將 x 換爲 $-x$, y 之値不變, 因此之故, 其圖表對於 y 軸成對稱. 又當 x 自 -1 漸漸變大而達於零, y 隨之變大, 此時函數 y 隨 x 增大而增大. 當 x 自零漸漸變大而達於 1, y 隨之變小, 此時函數 y 隨 x 變大而變小.

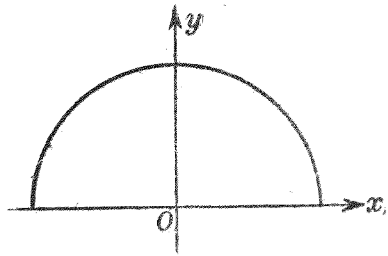


圖 4

根據這種性質, 就可推知 $y=+\sqrt{1-x^2}$ 的圖表了. 又如方程式

$$2xy-y+5=0$$

也足以表示 y 爲 x 的函數, 不過並未將 y 解出罷了. 這時 y 便叫做 x 的隱函數, $y=f(x)$ 便叫做 x 的顯函數. 上面的隱函數也可寫成顯函數如下:

$$y=\frac{5}{1-2x}.$$

隱函數 y 與自變數 x 的關係, 常用記號如 $f(x, y)=0$ 表示之.

單調函數　設函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內之値, 隨 x 增大而增大, 那末在這間隔內, $f(x)$ 叫做 x 的增函數. 反之, 如 y 之値隨 x 增大而

減少，那末在這間隔內，$f(x)$ 叫做 x 的減函數．令 x_1, x_2 爲這間隔內的任意二數，若常有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0,$$

$f(x)$ 便是 x 的增函數，若常有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0,$$

$f(x)$ 便是 x 的減函數．增函數與減函數統叫做單調函數．由前例言之，函數 $y=+\sqrt{1-x^2}$ 在間隔 $(-1, 0)$ 內，爲 x 的增函數，在間隔 $(0, 1)$ 內，爲 x 的減函數．

反函數　我們若由方程式

$$y=\frac{5}{1-2x}$$

把 x 解出，則得

$$x=\frac{y-5}{2y}.$$

前者的意思表示 y 是 x 的函數，後者所表示的，x 是 y 的函數，因此之故，我們名後者爲前者的反函數．普遍言之，若將方程式中 $y=f(x)$ 的 y 視爲自變數，x 視爲因變數，於是由 $y=f(x)$ 解出 x 而得 $x=\varphi(y)$，那末函數 $\varphi(x)$ 就叫做 $f(x)$ 的反函數．但 $\varphi(x)$ 與 $f(x)$ 的關係是相對的，所以 $f(x)$ 也可以叫做 $\varphi(x)$ 的反函數，例如 $\log_a x$ 爲 a^x 的反函數，$\arcsin x$ 爲 $\sin x$ 的反函數，$\pm\sqrt{x}$ 爲 x^2 的反函數．

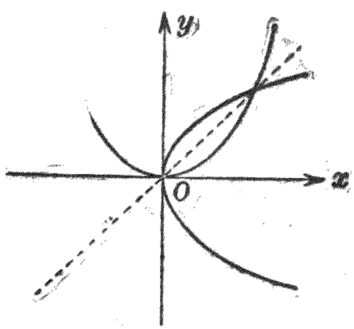


圖 5

$y=f(x)$ 與 $x=\varphi(y)$ 所代表的曲線原屬相同，今將 $x=\varphi(y)$ 中的 x 易

爲 y, 則 $y=f(x)$ 與 $y=\varphi(x)$ 所代表的曲線, 對於直線 $y=x$ 便成對稱. 圖 5 就是 $y=x^2$ 與其反函數 $y=\pm\sqrt{x}$ 所代表的曲線.

3. 初等函數

有理函數　$y=x^n$ (n 爲一正整數) 要算最簡單的函數. 又如函數

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

乃由 x 與常數 a, b, c, d 施以加減乘除的運算而得, 這種函數叫做有理整函數, 或叫做多項式, 其一般形式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

又如函數

$$y=\frac{1}{ax+b}+\frac{x+d}{x^2+cx}$$

乃由變數 x 與常數 a, b, c, d, 施以加減乘除的運算而得, 這種函數叫做有理分函數, 其一般形式爲

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}.$$

如 $b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}$ 皆等於零, 而 $b_m\neq 0$, 則函數便爲有理整函數, 所以有理整函數實在是有理分函數的特例罷了.

有理整函數與有理分函數, 統叫做有理函數.

無理函數　最簡單的無理函數爲 $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ (n 爲一正整數). 又如

$$y=x+\sqrt{x^2+1},\qquad y=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-x^2}},\qquad y=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

都是 x 的無理函數. 這種函數皆能滿足一代數方程式如下

$$A_0(x)y^m+A_1(x)y^{m-1}+\cdots+A_m(x)=0,$$

其中 $A_0(x), A_1(x), \cdots A_m(x)$ 皆爲 x 的有理函數. 例如

$$y=x+\sqrt{x^2+1}$$

便能滿足代數方程式

$$y^2-2xy-1=0.$$

有理函數 $y=f(x)$ 顯然也能滿足一代數方程式. 有理函數與無理函數統叫做代數函數.

我們在 §2 已經說明方程式

$$F(x, y)=y^2-2y+x^2=0$$

也足以表示 y 爲 x 的函數, 今與 x 以一定值 $(-1\leqq x\leqq 1)$, y 便得二相應值

$$y=1\pm\sqrt{1-x^2},$$

在這種情形, y 叫做 x 的二值函數.

設 y 爲 x 的函數, 若 x 之值旣定, y 祇有一值與之相應, 那末 y 就叫做 x 的單值函數. 若 x 之值旣定, 而 y 有數個値與之相應, 那末 y 就叫做 x 的多值函數.

例如有理整函數是單值函數, $\pm\sqrt{x}$ 是二值函數, $\arcsin x$ 是多值函數. 本書以後所謂函數, 都指單值函數而言.

三角函數 在高等算學中, 角度的單位多用弧度, 本書以後計算角的大小, 都用這個單位. 設以 O 爲圓心, 以 1 爲半徑作一圓, 取圓上二點 A, B, 使 AB 弧之長等於 1. 取 $\angle AOB$ 作爲角度的單位, 這個單位便叫做一弧度. 當半徑等於 1 時, 圓周之長等於 2π, 所以全圓周 360° 等於 2π 弧度, 180° 等於 π 弧度, 90° 等於 $\frac{\pi}{2}$ 弧度,

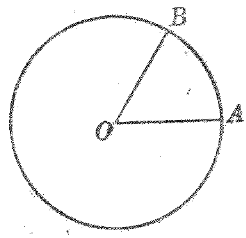
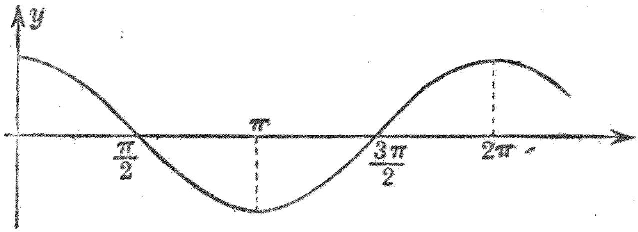


圖 6

$$1\text{ 弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ\,17'\,45''$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}0.017453\text{ 弧度}.$$

三角函數 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ 也叫做週期函數，因為把 x 換為 $x+2\pi$ 或 $x-2\pi$, 函數之值依然不變，其中 $\tan x$,



cos x

圖　7

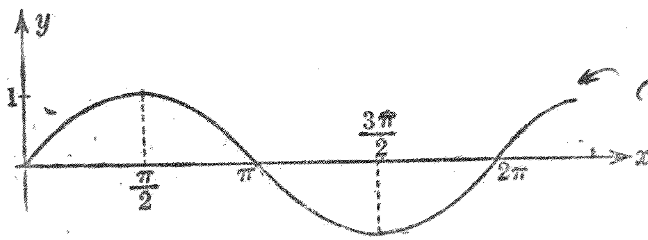
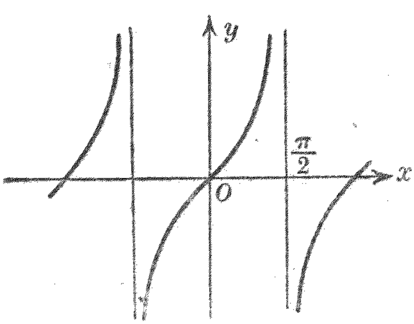


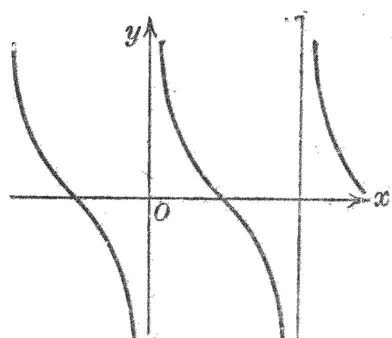
圖　8

$\cot x$, 二函數，如將 x 換為 $x\pm\pi$, 函數之值仍不變，



$y=\tan x$

圖　9



$y=\cot x$

圖　10

$$\tan(x\pm\pi)=\tan x, \qquad \cot(x\pm\pi)=\cot x$$

所以 2π 是 $\sin x, \cos x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ 的週期，π 是 $\tan x, \cot x$ 的週期.

反三角函數　三角函數既爲週期函數，所以自變數可有無窮個數值使其函數得同一數值. 由此言之，三角函數的反函數乃是一種多值函數.

函數 $y=\arcsin x$ 所以表示 $\sin x$ 的反函數. 每與 x 以一定值 $(-1\leqq x\leqq 1)$，y 有無窮個數值與之相應. $y=\arcsin x$ 就是 $x=\sin y$. 今令 y 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增至 $\frac{\pi}{2}$，x 祇有一值與 y 相應，且其值由 -1 增至 $+1$，所以 x 在 -1 與 $+1$ 之間，每取一值，y 在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，祇有一值與之相應，此時 y 便是 x 的單值函數，也叫做函數 $y=\arcsin x$ 的主值（或稱主支）.

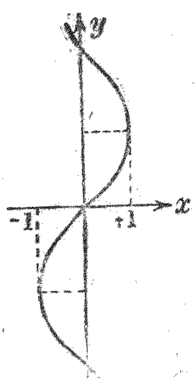


圖 11

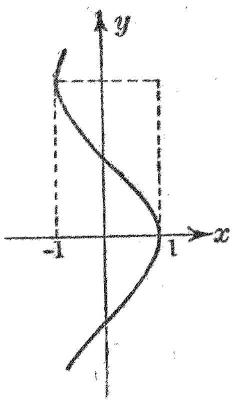


圖 12

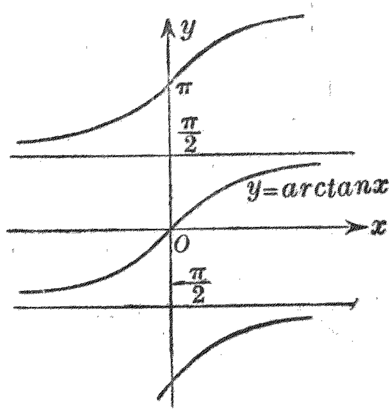


圖 13

函數 $y=\arccos x$ 所以表示 $\cos x$ 於反函數，x 與 y 的關係也可寫如

$$x=\cos y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right).$$

故
$$\frac{\pi}{2}-y=\text{arc}\sin x,$$

$$y=\text{arc}\cos x=\frac{\pi}{2}-\text{arc}\sin x.$$

arc sin x 的主值在 $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ 之間，所以 arc cos x 的主值當在 O 與 π 之間.

函數 $y=\text{arc}\tan x$ 所以表示 $\tan x$ 的反函數，每與 x 以一定值 arc tan x 在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，即

$$-\frac{\pi}{2}<\text{arc}\tan x<\frac{\pi}{2},$$

祇有一值與之相應，此值叫做函數 arc tan x 的主值. 至於其他的反三角函數，可由上述的三個函數表達之.

$$\text{arc}\cot x=\frac{\pi}{2}-\text{arc}\tan x,$$

$$\text{arc}\sec x=\text{arc}\cos\frac{1}{x},$$

$$\text{arc}\operatorname{cosec} x=\text{arc}\sin\frac{1}{x}.$$

以後所講的反三角函數，除另有說明者外，均指其主值而言. 三角函數，反三角函數，指數函數 a^x $(a>0)$，對數函數 $\log_a x$ $(a>0)$，叫做初等超越函數. 有理函數，無理函數與初等超越函數統叫做初等函數.

4. 極限 無窮個數依一定的法則而排列者叫做數列.

例如

[1] $x_1=0.3,\quad x_2=0.33,\quad x_3=0.333,\quad x_4=0.3333,\quad\cdots$

便是一個數列，當 n 愈大時，x_n 與 $\frac{1}{3}$ 相差愈微，因此之故，$\frac{1}{3}$ 叫做數列 (1) 的極限，或謂數列 (1) 向極限 $\frac{1}{3}$ 收斂. 精確言之，設 ϵ 爲一任意選定其值甚小之正數，如能求得另一正數 $N=N(\epsilon)$，當 $n\geqq N$ 時，使恆有

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\epsilon,$$

那末 $\frac{1}{3}$ 就叫做數列 (1) 的極限. 又如數列

[2] $x_1=0,\quad x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=\frac{2}{3},\quad\cdots,\quad x_n=\frac{n-1}{n},\quad\cdots$

其極限顯然是 1. 若我們選定 $\epsilon=0.01$，在此祇要 $n\geqq101$，即 $N=101$，就有

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<0.01.$$

若 ϵ 選定爲 0.001，那末祇要 n 大於 1001，即 $N=1001$，就可以使 $\frac{n-1}{n}-1$ 的絕對值小於 0.001. 故無論 ϵ 如何選擇，必有一 N 存在，N 常因 ϵ 之趨小而趨大. 當 $n\geqq N$ 時，x_n 與 1 相差之絕對值必能小於 ϵ.

<u>定義</u> 有數列於此，

[3] $x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad\cdots,\quad x_n,\quad\cdots$

設 ϵ 爲一任意選定其值甚小之正數，如能求得另一正數 N，當 $n\geqq N$ 時，使恆有

$$|x_n-a|<\epsilon,$$

那末 a 就叫做數列 (3) 的極限. 通常寫如

$$x_n\to a,$$

或
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a}$$

再就數列 (3) 言之, 設 A 爲任意選定其值甚大之正數, 如能求得另一正數 N, 當 $n \geqq N$ 時, 恆能使 $x_n > A$, 那末數列 (3) 便以正無窮大 ∞ 爲其極限, 以記號表之如下:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

凡數列不一定有極限, 例如數列

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad 3, \quad \frac{1}{4}, \quad 5, \quad \frac{1}{6}, \quad 7, \quad \cdots,$$

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{1}{3}, \quad 1, \quad \frac{1}{4}, \quad 1, \quad \cdots$$

便無極限.

設有數列

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots, \quad x_n, \quad \cdots,$$

不論 n 爲任何正整數, 如常有 $x_n \leqq x_{n+1}$, 那末這數列叫做增數列. 反之, 如常有 $x_n \geqq x_{n+1}$, 那末這數列叫做減數列.

定理* 若 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 爲一增數列, 且其普通項 x_n 小於一定數 A, 那末這數列必向一極限 ($\leqq A$) 收斂.

若 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 爲一減數列, 且其普通項 x_n 大於一定數 B, 那末這數列必向一極限 ($\geqq B$) 收斂.

例 1. 有數列

$$x_1 = a, \quad x_2 = a^2, \quad x_3 = a^3, \quad \cdots, \quad x_n = a^n, \quad \cdots,$$

若 $a > 1$, 則 $a^{n+1} > a^n$, 這時 a^n 隨 n 增大而增大, 令

$$a = 1 + h,$$

---

* 定理的證明非本書程度所能允許.

h 爲一正數，於是

$$a^n=(1+h)^n>1+nh.$$

當 $n\to\infty$ 時，$nh\to\infty$，故

$$\lim_{n\to\infty} a^n=\infty.$$

若 $0<a<1$，則 $a^{n+1}<a^n$，這時 a^n 隨 n 增大而減小，且 $a^n>0$，故數列必向一極限收斂．令

$$a=\frac{1}{1+h},$$

h 爲一正數，於是

$$a^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}.$$

當 $n\to\infty$ 時，$\frac{1}{nh}$ 向極限零收斂，故

$$\lim_{n\to\infty} a^n=0.$$

若 $-1<a<0$，因 $\lim_{n\to\infty}|a|^n=0$，故仍有 $\lim_{n\to\infty} a^n=0$.

例 2. 有數列

$$x_1=a,\quad x_2=a^{\frac{1}{2}},\quad x_3=a^{\frac{1}{3}},\quad \cdots,\quad x_n=a^{\frac{1}{n}},\quad \cdots$$

若 $a>1$，則 $a^{\frac{1}{n}}$ 也大於 1，可令 $a^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$ $(\alpha_n>0)$，於是

$$a=(1+\alpha_n)^n>1+n\alpha_n,$$

由此得

$$0<\alpha_n<\frac{a-1}{n}.$$

當 $n\to\infty$ 時，α_n 便向零收斂，故

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)=1.\quad (a>1)$$

且 $a^{n+1}>a^n$，故 $a^{\frac{1}{n}}>a^{\frac{1}{n+1}}$，$a^{\frac{1}{n}}$ 隨 n 增大而減小．當 $n\to\infty$ 時，$a^{\frac{1}{n}}$ 向極限 1 收斂.

若 $0<a<1$, 則 $a^{\frac{1}{n}}$ 也小於 1, 可令 $a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+a_n}$, 於是

$$a=\frac{1}{(1+a_n)^n}<\frac{1}{1+na_n}.$$

由此得
$$1+na_n<\frac{1}{a},$$

即
$$0<a_n<\frac{\frac{1}{a}-1}{n}.$$

故
$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

於是
$$\lim a^{\frac{1}{n}}=1. \qquad (0<a<1)$$

且 $a^{n+1}<a^n$, 故 $a^{\frac{1}{n}}<a^{\frac{1}{n+1}}$, 可知 $a^{\frac{1}{n}}$ 隨 n 增大而增大, 當 $n\to\infty$ 時, $a^{\frac{1}{n}}$ 向極限 1 收斂.

例 3. 有數列

$$x_1=1, \quad x_2=\sqrt{2}, \quad x_3=\sqrt[3]{3}, \quad \cdots, \quad x_n=\sqrt[n]{n}, \quad \cdots$$

設 $y_n=\sqrt{x_n}$, 則

$$y_n=\sqrt{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\sqrt{n}}.$$

當 $n>1$ 時, y_n 也大於 1, 故可令 $y_n=1+a_n$, 於是

$$\sqrt{n}=(y_n)^n=(1+a_n)^n\geqq 1+na_n,$$

$$a_n\leqq\frac{\sqrt{n}-1}{n}\leqq\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

故有

$$1\leqq x_n=y_n^2=1+2a_n+a_n^2\leqq 1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}.$$

當 $n\to\infty$ 時, 上式的右邊趨近於 1, 故知

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例 4.　求數列

$$x_1=\sqrt{2},\quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\quad \cdots\cdots$$

的極限.

因　$$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}},\quad x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},$$

故　$$x_{n+1}^2-x_n^2=x_n-x_{n-1}.$$

由是可知 $x_n>x_{n-1}$ 時, x_{n+1} 也必大於 x_n, 然易知 $x_2>x_1$, 故數列 $x_1, x_2, \cdots$ 爲一增數列. 又由 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, 可知 $x_{n-1}<2$ 時, x_n 也必小於 2. 然易知 $x_1<2$, 故 $x_2, x_3, \cdots$ 各小於 2. 根據上述定理, 可知這數列必向一極限 $(\leqq 2)$ 收斂, 令這極限爲 x, 則有

$$x=\sqrt{2+x},$$

或　$$x^2-x-2=0.$$

解之, 得 $x=2$ 或 $x=-1$. 後者顯然非本題之解, 故這數列的極限爲 2.

5.　函數之極限　變數 x 能取得 a, b 間之一切數值者, 叫做連續變數, 或簡稱變數.

<u>定義</u>　設 ϵ 爲一任意選定其值甚小之正數, 如能求得另一正數 $\delta=\delta(\epsilon)$, 當

$$0<|x-a|<\delta$$

時, 使恆有

$$|f(x)-b|<\epsilon$$

那末我們便說 x 趨近於 a 時, 函數 $f(x)$ 趨近於極限 b, 以記號表之如下:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b}$$

注意 1.　不等式 $0<|x-a|$ 是表示 x 不能等於 a 的意思，雖則 $x=a$ 時，$|f(x)-b|<\epsilon$ 能成立之例甚多，然按極限的意義來說，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 時的情形如何，可以置之不問.

注意 2.　δ 與 ϵ 的函數關係，可置之不論，然無論 ϵ 如何擇定，必有 δ 數存在，ϵ 愈小，δ 亦愈小.

例 1.
$$\lim_{x\to 1}(1+2x)=3.$$

設 ϵ 爲任意選定其值甚小之正數，當 x 之值合於不等式
$$0<|x-1|<\frac{\epsilon}{2}$$
時，我們就有
$$|(1+2x)-3|<\epsilon.$$
依定義，故知 $x\to 1$ 時，$1+2x$ 趨近於極限 3. 在此例 $x=1$ 時，$1+2x=3$.

例 2.
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x}=2.$$

當 x 不等於 1 時，我們知道
$$\frac{1-x^2}{1-x}=1+x,$$
故 $x\to 1$ 時，$1+x$ 趨近於 2.

例 3.
$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\ \text{存在否?}$$

設 ϵ 爲任意選定其值甚小之正數，我們很容易求得一正整數 n，使
$$0<\frac{1}{2(n+1)\pi}<\frac{1}{2n\pi}<\epsilon.$$
今令 x 在
$$\frac{1}{2(n+1)\pi}\leqq x\leqq\frac{1}{2n\pi}$$
間隔內變動，$\frac{1}{x}$ 就在 $2n\pi$ 與 $2(n+1)\pi$ 之間變動，$\sin\frac{1}{x}$ 就在 -1

與 $+1$ 之間變動. 倘 $n\to\infty$, x 便趨近於零, 但 $\sin\frac{1}{x}$ 並不趨近於一極限.

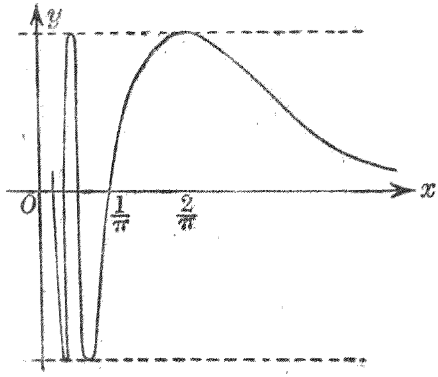


圖 14

設 A 爲一任意選定其值甚大之正數, 如能求得另一正數 δ, 當

$$0<|x-a|<\delta$$

時, 使恆有

$$|f(x)|>A,$$

那末我們便說 $x\to a$ 時, 函數 $f(x)$ 趨於無窮大, 以記號表之如下:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

在幾何方面, 這個意思, 就是說直線 $x=a$ 爲曲線 $y=f(x)$ 的漸近線, 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$. (圖 15)

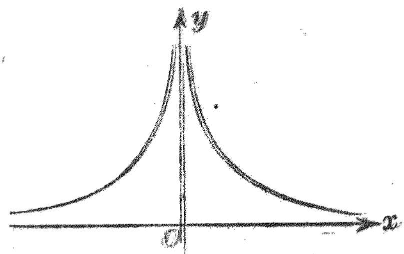


圖 15

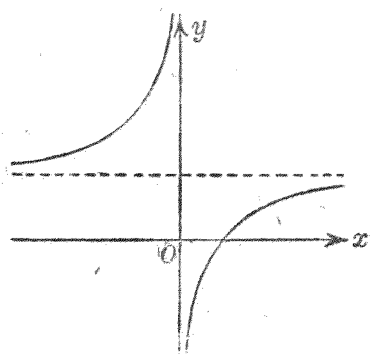


圖 16

設 ϵ 爲任意選定其值甚小之正數, 如能求得另一正數 N, 當 $|x|>N$

時，使恆有

$$|f(x)-b|<\epsilon,$$

那末我們便說 x 趨近於無窮大時，函數 $f(x)$ 趨近於極限 b，以記號表之如下：

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b.$$

在幾何方面，這個意思就是說直線 $y=b$ 爲曲線 $y=f(x)$ 的漸近線．例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$（圖 16），因 $x>\dfrac{1}{2\epsilon}$ 時，就得

$$\left|\frac{x-1}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\epsilon.$$

變數 x 趨近於 a 的方式，有 x 之值始終小於 a 者，有 x 之值始終大於 a 者．前者寫如 $x\to a-0$，後者寫如 $x\to a+0$．例如

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty,\qquad \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=+\infty,\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty.$$

6. 關於極限值的定理

設二函數 $y=f(x)$，$z=g(x)$ 在同一間隔內有

$$\lim_{x\to a} y=\lim_{x\to a} f(x)=b,$$

$$\lim_{x\to a} z=\lim_{x\to a} g(x)=c,$$

a, b, c 都是有限數．

可令 $$y=b+\beta,\qquad z=c+\gamma,$$

當 $x\to a$ 時；β, γ 二變數各趨近於零．

定理 1. $$\lim_{x\to a}(y+z)=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=b+c.$$

證： $$(y+z)-(b+c)=\beta+\gamma,$$

故 $$|(y+z)-(b+c)|=|\beta+\gamma|\leqq|\beta|+|\gamma|.$$

令 ϵ 爲任意選定其值甚小之正數，當 x 之值充分與 a 接近時，可使

$$|\beta|<\frac{\epsilon}{2},\qquad |\gamma|<\frac{\epsilon}{2},$$

由此得

$$\left|(y+z)-(b+c)\right|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

故 $$\lim_{x\to a}(y+z)=b+c.$$

系. $$\lim_{x\to a}(y-z)=b-c.$$

定理 2. $$\lim_{x\to a}yz=\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=bc.$$

證: $$\begin{aligned}yz-bc&=(b+\beta)(c+\gamma)-bc\\&=b\gamma+c\beta+\beta\gamma,\end{aligned}$$

故 $$|yz-bc|\leqq|b\gamma|+|c\beta|+|\beta\gamma|,$$

當 x 之值充分與 a 接近時，可使

$$|b\gamma|<\frac{\epsilon}{3},\qquad |c\beta|<\frac{\epsilon}{3},\qquad |\beta\gamma|<\frac{\epsilon}{3}.$$

故 $$|yz-bc|<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon,$$

即 $$\lim_{x\to a}yz=bc.$$

定理 3. $$\lim_{x\to a}\frac{y}{z}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}.\quad (c\neq 0)$$

證: $$\frac{y}{z}-\frac{b}{c}=\frac{b+\beta}{c+\gamma}-\frac{b}{c}=\frac{c\beta-b\gamma}{c(c+\gamma)},$$

故 $$\begin{aligned}\left|\frac{y}{z}-\frac{b}{c}\right|&=\left|\frac{c\beta-b\gamma}{c(c+\gamma)}\right|\\&\leqq\frac{|c\beta|+|b\gamma|}{|c|(|c|-|\gamma|)}.\end{aligned}$$

當 x 之值充分與 a 接近時，可使

$$\frac{|\beta|}{|c|-|\gamma|}<\frac{\epsilon}{2},\qquad \frac{|b\gamma|}{|c|(|c|-|\gamma|)}<\frac{\epsilon}{2},$$

由此得

$$\left|\frac{y}{z}-\frac{b}{c}\right|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

故

$$\lim_{x\to a}\frac{y}{z}=\frac{b}{c}.$$

定義．　設 z 為 y 的函數 $z=g(y)$，而 y 又為 x 的函數 $y=f(x)$，則 z 之值隨 y 而定，而 y 之值又隨 x 而定．因此之故，z 與 x 自必發生一種相倚相應的關係，所以 z 也是 x 的函數．這種函數，叫做<u>函數的函數</u>．申言之，函數 z 是函數 y 的函數．

定理 4.　　設　$z=g(y)$，　$y=f(x)$，　若

$$\lim_{x\to a}y=\lim_{x\to a}f(x)=b,$$

$$\lim_{y\to b}z=\lim_{y\to b}g(y)=c,$$

并且 $g(b)=c$，那末

$$\lim_{x\to a}z=\lim_{x\to a}g\{f(x)\}=c,$$

由此得

$$\boxed{\lim_{x\to a}g\{f(x)\}=g\{\lim_{x\to a}f(x)\}}$$

但 a, b, c 都是有限數．

證：　令 ϵ, ϵ' 為任意二正數，δ, δ' 為適當的二正數，當

$$0<|x-a|<\delta' \qquad [1]$$

時，恆能使

$$|y-b|<\epsilon', \qquad [2]$$

又當

$$0<|y-b|<\delta \qquad [3]$$

時，恆能使

$$|z-c|<\epsilon. \qquad [4]$$

然原設 $g(b)=c$, 因此我們可把 (3) 式以 $|y-b|<\delta$ 代之. 又 ϵ 原爲任意選定的正數, 可令 $\epsilon'=\delta$, 於是 (4) 式便得隨 (1) 式而成立, 故

$$\lim_{x\to a} z=\lim_{x\to a} g\{f(x)\}=c.$$

即
$$\lim_{x\to a} g\{f(x)\}=g\{\lim_{x\to a} f(x)\}.$$

注意. 若 $a=\infty$, 以上的四定理亦能成立.

7. 兩個重要極限值

1° $\underline{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}$. 以 O 爲圓心, 以 1 爲半徑, 作一圓弧 AB, 那末當 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 時,

$$\Delta OAB<\text{扇形 } OAB<\Delta OAC,$$

即
$$\sin x<x<\tan x,$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

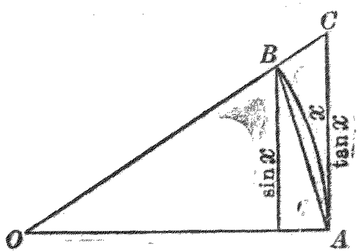


圖 17

若把 x 易爲 $-x$, 這個不等式仍然是正確的. 當 $x\to 0$ 時, $\cos x$ 趨近於 1, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$$

於是
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

因此便得下列兩個極限值如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,$$

又
$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0.$$

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

令
$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

則
$$a_1=2,\quad a_2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=2.25,\quad a_3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=2.37037\cdots,$$
$$a_4=\left(\frac{5}{4}\right)^4=2.4414\cdots,$$

若把 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 依二項式展開，便得

$$1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}\frac{1}{n^p}+\cdots$$
$$=1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdots p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)+\cdots,$$

項數與各項之值，皆隨 n 增而增，故

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

爲一增數列．又因

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots p}<\frac{1}{2^{p-1}},$$

故 $$a_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} < 3.$$

根據 §4 的定理，當 $n\to\infty$ 時，a_n 應向一極限值 ($\leqq 3$) 收斂．這個極限值，Euler* 氏以 e 字表之，

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

就上所論，可知 $2<e\leqq 3$，e 的近似值 (計算法見 §53) 爲

$$e = 2.718281828459\cdots\cdots.$$

今設 x 爲一大於 1 的連續變數，并設 n 爲不大於 x 的最大整數，於是

$$n\leqq x<n+1,$$

$$1+\frac{1}{n}\geqq 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1},$$

由此得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \qquad \text{(見 §11)}$$

故 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 介於

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{與} \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\div\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

二數之間．當 $n\to\infty$ 時，此二數各趨近於 e，故

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

若 x 爲小於 -1 的連續變數，可令 $y=-x$，於是

* Leonhard Euler, 1707–1783.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right),$$

故 $$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right\}=e.$$

若把式中的 x 代以 $\frac{1}{x}$, 便得結果如下:

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

以 e 爲底數的對數叫做自然對數, 也叫做 Napier 氏的對數. A 的自然對數本書寫如 $\log A$, 其底數 e 省略不寫.

8. 函數的連續性 當 $x\to a$ 時, 若函數 $f(x)$ 的極限值與 $x=a$ 時函數所得之值 $f(a)$ 相一致, 卽

[1] $$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=f(a)}$$

那末我們說函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 是連續的. 由此言之, 欲一函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 是連續的, 必要而只要

1° $f(x)$ 在 $x=a$ 爲一有限數 $f(a)$,

2° 當 $x\to a$ 時, $f(x)$ 向一極限值收斂,

3° 這極限值與函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 之值 $f(a)$ 是相等的.

當 $x\to a$ 時, 若函數的極限值不定, 或爲無窮大, 或則 $f(x)$ 雖趨近於一確定的數值, 而卻不等於 $f(a)$, 或則 $f(a)$ 之值不定, 在這類情形, 我們說函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 是不連續的, 或說 a 點爲函數的不連續點.

下圖便是函數 $y=f(x)$ 的圖表在 $x=a$ 不連續的情形.

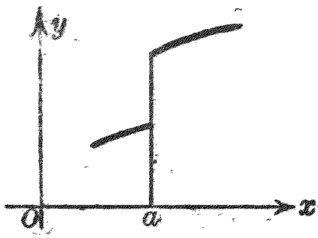


圖 18

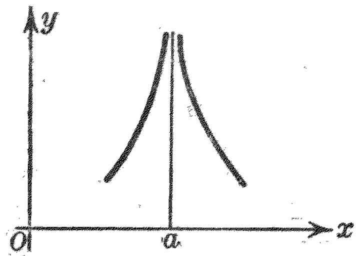


圖 19

(1) 式也可寫如

[2] $$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a),$$

或 $$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(x)\}=0.$$

換言之，設 ϵ 爲一任意選定其值甚小的正數，如能求得另一正數 $\delta=\delta(\epsilon)$，當

$$|x-a|<\delta$$

時，使恆有 $$|f(x)-f(a)|<\epsilon,$$

那末函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 是連續的.

注意 1. $0<|x-a|$ 的條件可以不用，因這裏與函數極限的定義，情形迥不相同.

注意 2. $f(x)$ 在 $x=a$ 是連續的意思，簡單言之，若 x 在 a 稍稍變動，$f(x)$ 亦隨之發生極微的變動.

若在 $a\leqq x\leqq b$ 間隔內，函數 $f(x)$ 處處連續，那末 $f(x)$ 叫做這間隔內的連續函數.

例 1. x^2 是 x 的連續函數，不論 x 之值如何.

例 2. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$. 當 $x\neq 1$ 時，$f(x)=1+x$，函數常爲連續. 若就 $x=1$ 時言之，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$，而 $f(1)=\dfrac{0}{0}$，其值不定，故 $f(x)$ 在

$x=1$ 是不連續．在這種情形，若把 $f(x)$ 在 $x=1$ 之值加以適當的規定，如

$$當\ x\neq 1\ 時，\qquad f(x)=\frac{1-x^2}{1-x},$$

$$當\ x=1\ 時，\qquad f(x)=2,$$

那末函數 $f(x)$ 便處處連續了．

函數不連續的情形，最普通者，有下列二種：

1° 無窮大．設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，則函數在 $x=a$ 便是不連續．例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 就是不連續，圖 20 即其圖表．

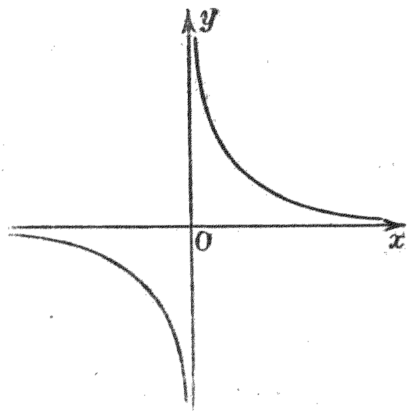


圖 20

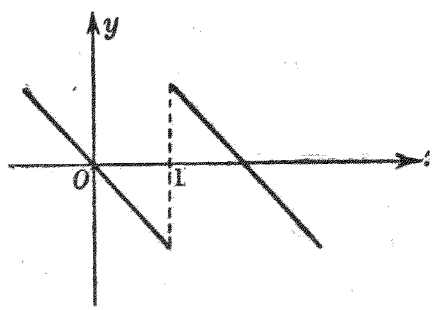


圖 21

2° 斷點．若 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ 則函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 有一斷點．例如函數

$$f(x)=1-x+\frac{x-1}{|x-1|}$$

祇在 $x=1$ 尙未確定，今令

$$f(1)=1,\qquad f(x)=1-x+\frac{x-1}{|x-1|},\qquad (x\neq 1)$$

那末函數在間隔 $(-\infty, \infty)$ 內完全確定了. 然

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=-1, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1.$$

當 x 之値經過 1 時, 函數之値驟然由 -1 而至 $+1$. 圖 21 卽其圖表.

9. 關於連續函數的基本定理

<u>定理 1.</u> 設函數 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=a$ 是連續的, 那末

$$f(x)\pm g(x), \qquad f(x)\,g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

在 $x=a$ 也是連續的. 惟在函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$, 須設 $g(a)\neq 0$.

已知 $$\lim_{x\to a} f(x)=f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x)=g(a).$$

根據 §6 的定理 1 及系, 則有

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=f(a)\pm g(a),$$

故 $f(x)\pm g(x)$ 在 $x=a$ 是連續的.

同樣得證明 $f(x)\,g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 也是連續的.

例如 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,$$

(m, n 爲二正整數) 都是 x 的連續函數. 若 $x=a$ 非方程式 $g(x)=0$ 之根, 則函數

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

在 $x=a$ 是連續的.

<u>定理 2.</u> 設 $z=g(y)$ 爲 y 的連續函數, 而 $y=f(x)$ 又爲 x 的連續函數, 那末 z 也是 x 的連續函數.

由 §6 的定理 4, 則有

$$\lim_{x\to a} z=\lim_{x\to a} g\{f(x)\}=g\{\lim_{x\to a} f(x)\}=g\{f(a)\}.$$

故 $z=g\{f(x)\}$ 在 $x=a$ 是連續的.

同樣得證明一定理如下: 在間隔 (a, b) 內取一數列如次:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots.$$

設這數列向一極限 a 收斂, 并設函數 $g(x)$ 在 a 是連續的, 那末就有

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} g(x_n)=g(a)}$$

這個結果, 不過將上面的 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 代以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 罷了.

10. 連續函數的特性

定理 1. 設 $f(x)$ 在間隔 $a\leqq x\leqq b$ 內爲一連續函數, 則函數在這間隔內, 有一最大值 M 與一最小值 m. (Weierstrass).*

定理 2. 設 $f(x)$ 在間隔 $a\leqq x\leqq b$ 內爲一連續函數, 若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號, 則 a, b 之間至少有一數 c 使 $f(x)=0$, 即 $f(c)=0$.

由此便得一定理如下:

定理 3. 設 $f(x)$ 在間隔 $a\leqq x\leqq b$ 內爲一連續函數, 則 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間的一切數值, 函數 $f(x)$ 在這間隔內至少必取得一次.

設 N 爲 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間的一數, 令 $\varphi(x)=f(x)-N$, 則 $\varphi(a)\varphi(b)<0$, 故在 a 與 b 之間至少有一數 c 使 $\varphi(x)=0$, 即 $f(c)=N$.

定理 1 與定理 2 就函數 $f(x)$ 的圖表觀之, 是很顯明的, 至於嚴密的證明, 非本書的程度所能允許了.

應用: 反函數的連續性. 設函數 $y=f(x)$ 在間隔 (a, b) 內, 爲 x 的連續增函數 (減函數), 那末反函數 $x=\varphi(y)$ 在間隔 $[f(a), f(b)]$ 內爲 y 的連續增函數 (減函數).

* Karl Weierstrass (1815–1897), 德國大算學家.

因 $f(x)$ 在 (a, b) 間隔內爲 x 的連續增函數，故在這間隔內 $f(a)$ 與 $f(b)$ 依次爲函數的最小值與最大值．在 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間每與 y 以一值 y_0，x 在 (a, b) 內必有一值 x_0，且祇有此一值與之相應．由此言之，在間隔 $[f(a), f(b)]$ 內 x 是 y 的單值函數．

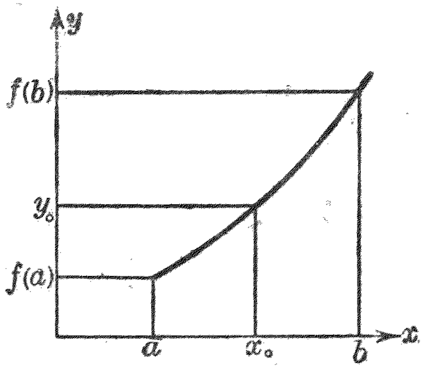


圖 22

1° $\varphi(y)$ 是增函數．令 x_1, x_2 爲 (a, b) 內的任意二數，因 $f(x)$ 在 (a, b) 爲一增函數，所以

$$(x_1 - x_2)\{f(x_1) - f(x_2)\} > 0.$$

今以

$$x_1 = \varphi(y_1), \qquad x_2 = \varphi(y_2),$$

$$f(x_1) = y_1, \qquad f(x_2) = y_2$$

代入上式，便得

$$(y_2 - y_2)\{\varphi(y_2) - \varphi(y_2)\} > 0.$$

故 $\varphi(y)$ 在 $[f(a), f(b)]$ 內是一增函數．

2° $\varphi(y)$ 是連續函數．設 ϵ 爲任意選定其值甚小之正數，幷設 $y_0 = f(x_0)$，於是 $x_0 = \varphi(y_0)$．又令

$$y_0 - \delta_1 = f(x_0 - \epsilon),$$

$$y_0 + \delta_2 = f(x_0 + \epsilon).$$

當 x 由 $x_0 - \epsilon$ 變至 $x_0 + \epsilon$，y 由 $y_0 - \delta_1$ 增至 $y_0 + \delta_2$，因爲 y 是 x 的連續函數，所以 y 必要經過 $y_0 - \delta_1$ 與 $y_0 + \delta_2$ 之間的一切數值．今令 y 由 $y_0 - \delta_1$ 增至 $y_0 + \delta_2$，函數 $\varphi(y)$ 必由 $x_0 - \epsilon$ 增至 $x_0 + \epsilon$，所以欲

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \epsilon,$$

祇要 $|y - y_0|$ 小於 δ_1, δ_2 二數中較小的一數就是了．

11. 指數函數　設 $a>0$, 則記號 a^x 所代表的意義已爲我們所知道者如下:

1° 若 x 爲一正整數則 a^x 就是 x 個 a 自乘之積.

2° 若 x 爲一分數 $\frac{p}{q}$, 則

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

3° 若 x 爲一負數, 則

$$a^x=\frac{1}{a^{-x}}.$$

若 x 爲一無理數 α, 則 a^α 的意義我們規定之如下: 設 $a>1$, 并設

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

爲一有理數所組成的增數列. 若這數列向一極限 α 收斂, 則

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ a^{x_3},\ \cdots,\ a^{x_n},\ \cdots$$

也必爲一增數列, 且這增數列也必向一極限收斂 (§4), 這個極限, 我們就以記號 a^α 表達之.

若

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \cdots,\ x'_n,\ \cdots$$

爲另一有理數所組成的數列, 且這數列也向極限 α 收斂, 那末數列

$$a^{x'_1},\ a^{x'_2},\ a^{x'_3},\ \cdots\ a^{x'_n},$$

也必向極限 a^α 收斂, 因*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x'_n-x_n}=1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a^{x'_n}=\lim_{n\to\infty}\{a^{x_n}\cdot a^{x'_n-x_n}\}=a^\alpha.$$

---

*當 n 充分大時, x'_n-x_n 可介於 $-\frac{1}{N}$ 與 $\frac{1}{N}$ 之間 (N 爲一正整數), 故

$$a^{\frac{-1}{N}}<a^{x'_n-x_n}<a^{\frac{1}{N}}$$

當 $N\to\infty$ 時, 則 $\lim a^{\frac{-1}{N}}=\lim a^{\frac{1}{N}}=1$ (§4, 例 2), 故 $\lim a^{x'_n-x_n}=1$.

例如無理數 $\sqrt{2}$ 可視爲數列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots$$

的極限，如 $a>1$，則

$$a,\ a^{1.4},\ a^{1.41},\ a^{1.414},\ \cdots$$

顯然爲一增數列，且各項都小於 a^2，故數列有一極限，這極限便以 $a^{\sqrt{2}}$ 表達之.

設 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$; $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 爲有理數所組成的二數列，前者確定一無理數 x，後者確定一無理數 y. 根據有理數的指數定理，我們恆有

$$a^{x_n}a^{y_n}=a^{x_n+y_n}.$$

故
$$\lim a^{x_n}a^{y_n}=\lim a^{x_n+y_n}.$$

因 x_n+y_n 的極限爲 $x+y$，由上式便得

$$\lim a^{x_n}a^{y_n}=a^x a^y=a^{x+y}.$$

$a^x(a>0)$ 叫做指數函數. 茲將指數函數 a^x 的特性述之如下:

仍設 $a>1$，則有

1° $a^x>0$，x 爲任何實數.

證: 令實數 x 以有理數 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 所組成的增數列確定之，則 $a^{x_1}, a^{x_2}, \cdots, a^{x_n}, \cdots$ 亦爲一增數列，故

$$\lim a^{x_n}=a^x>a^{x_1}>0.$$

依同法可證明函數 a^x 的下列諸特性.

2° 若 $x>0$，則 $a^x>1$；若 $x<0$，則 $a^x<1$.

3° a^x 爲一增函數. 因

$$a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1),$$

第一因子 a^x 常大於零，第二因子 a^h-1 常與 h 同號，故

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}>0.$$

4° 當 $x\to0$，a^x 趨近於極限 1.

取一正整數 N 使

$$-\frac{1}{N}<x<\frac{1}{N},$$

於是
$$a^{-\frac{1}{N}}<a^x<a^{\frac{1}{N}}.$$

當 $N\to\infty$, $x\to0$, $a^{-\frac{1}{N}}$ 與 $a^{\frac{1}{N}}$ 各趨近於 1, 故 $a^x\to1$.

5° a^x 是一連續函數 $(-\infty<x<\infty)$. 因

$$\lim_{h\to0}(a^{x+h}-a^x)=a^x\lim_{h\to0}(a^h-1)=0.$$

又當 $x\to+\infty$ 時, $a^x\to+\infty$; 當 $x\to-\infty$ 時, $a^x=\frac{1}{a^{-x}}\to0$.

若 $a<1$, 令 $a=\frac{1}{a'}$ $(a'>1)$, 則 $a^x=\frac{1}{a'^x}$, 故此時函數 a^x 的性質可由 a'^x 的性質求得之.

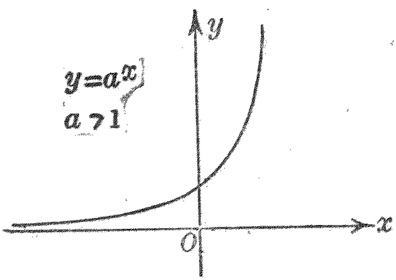


圖 23

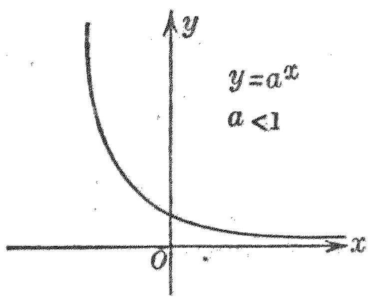


圖 24

12. 對數函數 就方程式

$$a^y=x \qquad (a>0)$$

細考之, 我們已知 x 是 y 的連續單調函數. 今若先給 x 以一定值 $(x>0)$, y 也必有一值且只有一值與之相應 (§9). 所以 y 也可看作 x 的函數. 函數 y 叫做 x 的對數或叫做 x 的對數函數, a 叫做底數, 我們以記號表之如下:

$$y=\log_a x.$$

由是便得恆等式

$$a^{\log_a x} \equiv x.$$

若 $a=e$, $\log x$ 便叫做 x 的自然對數，或 Nepier 氏對數．今設 $a>1$，那末由指數函數 $x=a^y$ 的性質，我們就可知道

1° 數之大於 1 者，其對數爲正數．

2° 數之小於 1 者 (但大於零)，其對數爲負數．

3° $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty$.

若 $0<a<1$，其結果適與上相反．然無論如何，1 的對數總是零，$\log_a 1=0$.

$y=\log_a x$ 爲 $x=a^y$ 的反函數，故 $a>1$ 時，$\log_a x$ 是 x 的連續增函數，當 $0<a<1$ 時，$\log_a x$ 是 x 的連續減函數．

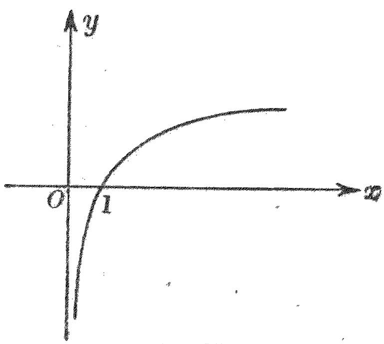


圖 25

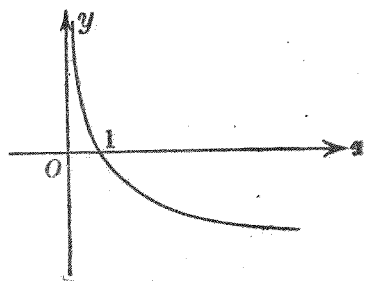


圖 26

應用： 設在間隔 (a, b) 內，u, v 爲 x 的二連續函數，且 $u>0$，那末 u^v 在這間隔內也是 x 的連續函數．

就恆等式

$$u^v=e^{v\log u}$$

言之，$\log u$ 是 x 的連續函數，$v\log u$ 也是 x 的連續函數，故 $e^{v\log u}$ 是 x 的連續函數．在特例，若 v 等於一常數 m，則 u^m 是 x 的連續函數．

又當 $x\to a$ 時，若 u, v 依次趨近於極限 α, β $(\alpha>0)$，那末 u^v 趨近於極限 α^β.

習題 1

1. $f(x)=x^3-3x+2$，試求 $f(0), f(1), f(-1), f(2)$.
2. $f(x)=x^5-x^3+3x^2-x+4$，試求 $f(0), f(1), f(3)$.
3. $f(x)=x^n$，則 $f(x)f(y)=f(xy)$.
4. $f(x)=a^x$ $(a>0)$，則 $f(x)f(y)=f(x+y)$.
5. $f(x)=\log x$，試證 $f(x)+f(y)=f(xy)$; $f(x^n)=nf(x)$.
6. 若 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，試證 $f^2(x)=f(x^2)+2$, $f^3(x)=f(x^3)+3f(x)$.
7. 試表 y 爲 x 的隱函數

$$\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a\sec t \\ y=b\tan t \end{cases}$$

其中 t 爲參變數.

8. 下列數列收斂否?

(1) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots$

(2) $1,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{1}{4},\ 1,\ \dfrac{1}{8},\ \cdots\cdots$

(3) $1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{4}},\ \cdots\cdots$

9. 求下列極限值:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x(x+1)}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$, $a\neq 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-x)$.　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{2x^2+1}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$. (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\tan bx}$. (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-\frac{4}{3}}$. (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$.

10. 試述下列函數的連續性:

(1) $\dfrac{x}{x^2-2}$. (2) $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

(3) $\sqrt{x-1}$. (4) $\cos x$.

(5) $\sin x$. (6) $\tan x$.

(7) $\arcsin x$. (8) $e^{\frac{1}{x}}$.

11. 設有函數 $f(x)$,

當 $x\neq 0$ 時, $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$;

當 $x=0$ 時, $f(x)=0$.

試證 $f(x)$ 在 $x=0$ 是連續的.

12. 試求 δ 之值, 當 $|x-2|<\delta$ 時, 下列函數之值與 10 相差小於 0.001,

$$3x+4,\qquad \frac{17x-4}{x+1}.$$

13. 試求 δ 之值, 當 $|x-1|<\delta$ 時, 下列函數之值與 4 相差小於 0.01,

$$\sqrt{15x+1},\qquad \sqrt{7x^2+18}-x.$$

14. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$. $S=1+2\cdots n$ 代入

15. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)=0$.

因 $\frac{n}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{n}{n^2}$.

16. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

17. 證明 數列 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\cdots$ 向一極限收斂, 試求此極限.

第 二 章

微 分 法

13. 導數 設 $y=f(x)$ 在間隔 (a, b) 內爲一連續函數，x 爲這間隔內的任意一值，今給 x 以一增量 $\Delta x=h$（或正或負），令 y 的相當增量爲 $\Delta y=f(x+h)-f(x)$. 當 $h\to 0$ 時，如這二增量之比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

趨近於一極限，那末這極限就叫做函數 $f(x)$ 的導數* $y=f(x)$ 的導數，Lagrange 用記號 $y'=f'(x)$ 表示之，Leibnitz 用記號 $\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$ 表示之，因此函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的導數** 可寫如

$$f'(x_0) \quad 或 \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

依定義，所謂 $f(x)$ 的導數實乃二增量之比值

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

當 h 向零收斂時所有的極限罷了．即

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

我們更詳考 $f'(x)$ 的意義，實爲 y 隨 x 而變的速度．如以 y 代表某

* $f(x)$ 的導數也叫做導來函數，或微分係數．

** $f(x)$ 在 x_0 有一導數，意謂這導數是一確定而且有限之值．

種物體運動的途程，x 爲時間，則途程自爲時間的函數，而其導數，適所以表示其瞬息變化之速度.

欲 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限存在，Δy 必須隨 Δx 趨於零而趨於零，即

$$\lim_{h\to 0}\{f(x+h)-f(x)\}=0.$$

若函數 $f(x)$ 在 x 有一導數 $f'(x)$，那末這函數在 x 是連續的.

設 η 隨 h 趨於零而趨於零，可令

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\eta.$$

故 $$\lim_{h\to 0}\{f(x+h)-f(x)\}=\lim_{h\to 0}h\{f'(x)+\eta\}=0.$$

反之，$f(x)$ 在 x 雖是連續的，然不一定有導數. 例如函數

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ f(x)=0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 是連續的，但

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\sin\frac{1}{h},$$

當 $h\to 0$ 時，$\sin\dfrac{1}{h}$ 不趨近於一極限. 故函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 無導數.

若 $f(x)$ 爲一常數，則其導數恆等於零，因

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

若 $f(x)=x$，則其導數等於 1，因

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.$$

14. 導數的幾何意義 我們知道直線 PQ 的方向是始終不變的. 經過直線的任何一點 P，畫一與 x 軸相平行之直線，則其間之

角必始終相等；因此之故，我們即以此不變之角，來測量直線 PQ 的方向．如圖中之直線，其方向完全隨 θ 角而定；但欲量 θ 角之大小，我們常在此直線上另擇一點如 Q，以 P 與 Q 兩點縱橫座標相差之比 $\frac{RQ}{PR}$ 量之，不論 Q 點在此直線上之地位如何，$\frac{RQ}{PR}$ 之值常等於 $\tan\theta$．所以這個比值可用以規定 θ 之大小，同時亦可用以規定此直線的方向，因此這個比值叫做此直線的角係數或叫做斜率．

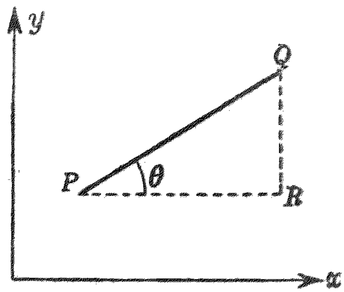


圖 27

設 C 爲代表函數 $y=f(x)$ 的曲線，P, Q 爲曲線上的兩點，x, y 爲 P 點的座標，$x+\Delta x$, $y+\Delta y$ 爲 Q 點的座標，於是直線的斜率就等於

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{NQ-MP}{MN}=\frac{RQ}{PR}.$$

令直線 PQ 與 x 軸所作之角爲 θ，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\theta$．今使 $\Delta x\to 0$，

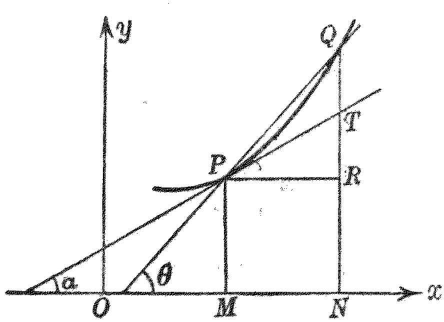


圖 28

換言之，使 Q 點沿 C 線趨近於 P，則直線 PQ 漸漸改變其方向而

達於一極限的位置 PT, 同時 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 趨近於極限 $f'(x)$. 直線 PT 叫做曲線 C 在 P 點的切線. 故 $f'(x)$ 即所以表示這切線的斜率. 今令這切線與 x 軸所作之角等於 α, 便有

$$f'(x)=\tan\alpha.$$

由此可知這切線的方程式爲

$$\boxed{Y-y=f'(x)(X-x)}$$

我們以後就把切線 PT 的方向, 來代表曲線在 P 點的方向, 於是方程式 $f'(x)=\tan\alpha$ 便表示曲線的方向隨 P 點而變的關係.

例. $\qquad f(x)=x^2.$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

若 $\quad x=1, \quad f'(1)=2.$

若 $\quad x=-1, \quad f'(-1)=-2.$

圖 29 即 $y=x^2$ 的曲線. 曲線在 P 點的切線, 其斜率等於 2. 在 $P_1(-1, 1)$ 點的切線其斜率等於 -2.

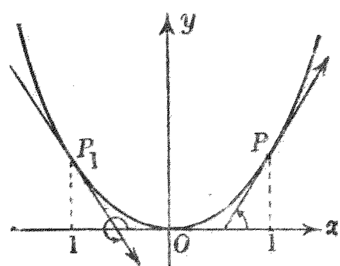


圖 29

15. 微分 設 y 爲 x 的函數 $f(x)$, 當 $\Delta x\to 0$ 時, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 之極限爲 $f'(x)$, 故可令

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\eta,$$

或 $$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\eta\cdot\Delta x.$$

η 隨 Δx 趨近於零而趨近於零, 而 $f'(x)\cdot\Delta x$ 則與 Δx 成正比例.

$f'(x)\Delta x$ 叫做函數 $y=f(x)$ 的微分，Leibnitz 用記號 dy 或 $df(x)$ 表示之，

$$dy=f'(x)\Delta x,$$

或 $$df(x)=f'(x)\Delta x.$$

定義． 函數 $y=f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 與 x 的任意增量 Δx 相乘之積叫做函數 y 的微分．

在特例，若 $y=f(x)=x$，則 $f'(x)=1$，於是

$$dx=\Delta x,$$

爲勻稱起見，故得將 $dy=f'(x)\Delta x$ 寫如

$$dy=f'(x)dx,$$

或 $$df(x)=f'(x)dx.$$

以 dx 除上式兩邊，得

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

由此言之，所謂函數 $y=f(x)$ 的導數，實乃變數 x 的微分 dx 除函數 y 的微分 dy 所得的商罷了．

在圖 30，

$$df(x)=f'(x)\,dx=\tan\alpha\cdot PR$$
$$=RT,$$
$$\eta\cdot\Delta x=\Delta y-dy=TQ.$$

當 $|\Delta x|$ 之值甚小時，dy 殆與 Δy 相等，故在實際應用問題上，得以 dy 代替 Δy．

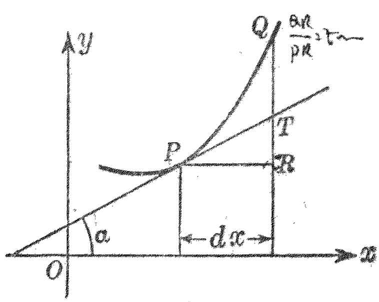


圖 30

例． 設已知 $\sqrt{10}=3.16228$，求 $\sqrt{10.01}$．

$$y=\sqrt{x}, \qquad \Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

故　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,　$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\approx\dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$.

令 $x=10$, $\Delta x=0.01$, 便得

$$\sqrt{10.01}\approx 3.16386.$$

16.　簡單函數的導數　由一已知函數去求其導數,這種運算叫做微分法.茲將幾種簡單函數的導數述之如下:

1.　$y=x^n$ (n 爲一正整數),

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right\}=nx^{n-1}.$$

故

$$\boxed{\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}}$$

或

$$\boxed{dx^n=nx^{n-1}dx}$$

2.　$y=a^x$ ($a>0$),

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}.$$

令 $a^h-1=\epsilon$, 則 $h\log a=\log(1+\epsilon)$.　於是

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\log(1+\epsilon)}\log a=\log a.$$

故

$$\boxed{\frac{da^x}{dx}=a^x\log a}$$

或

$$\boxed{da^x=a^x\log a\,dx}$$

特例 $a=e$，則

$$\boxed{\frac{de^x}{dx}=e^x}$$

3. $y=\log_a x$，$(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

故

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e}$$

或

$$\boxed{d\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e dx}$$

特例 $a=e$，

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}}$$

4. $y=\sin x$，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\cos x.$$

故

$$\boxed{\frac{d\sin x}{dx}=\cos x}$$

同樣得
$$\boxed{\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x}$$

17. 關於導數的基本定理.

1° 和之導數, $y=f(x)+g(x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

故
$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f'(x)+g'(x)}$$

系. 若 $y=f(x)-g(x)$, 則

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)-g'(x).$$

2° 積之導數, $y=f(x)\,g(x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}$$

$$=f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

故
$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x)\,g'(x)+f'(x)\,g(x)}$$

系 1. 若上式兩邊各以 $y=f(x)\,g(x)$ 除之, 便得

$$\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

若 $y=f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x)$, 則

$$\frac{y'}{y}=\frac{f'_1(x)}{f_1(x)}+\frac{\{f_2(x)f_3(x)\}'}{f_2(x)f_3(x)}=\frac{f'_1(x)}{f_1(x)}+\frac{f'_2(x)}{f_2(x)}+\frac{f'_3(x)}{f_3(x)}.$$

就一般情形而論，若 $y=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$，則

$$\frac{y'}{y}=\frac{f'_1(x)}{f_1(x)}+\frac{f'_2(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}.$$

系 2. 若 $g(x)$ 等於一常數 c，則

$$\frac{d}{dx}\{cf(x)\}=c\cdot f(x).$$

例如
$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

$$\frac{dy}{dx}=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

又如
$$y=x^2\sin x.$$

$$\frac{dy}{dx}=x^2\cos x+2x\sin x.$$

3° 商之導數，$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left\{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\cdot\frac{1}{h}$$

$$=\frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)}.$$

故
$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

系. $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

例 1. $y=x^{-m}$ (m 爲一正整數).

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-\frac{m}{x^{m+1}}=-mx^{-m-1}.$$

例 2. 其他三角函數的導數.

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

$$\frac{d}{dx}\cot x=\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\frac{d}{dx}\sec x=\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x=\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec} x\cdot\cot x.$$

4° **函數的函數之導數.** 設 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 各爲連續函數, 且各有導數 $f'(u)$, $\varphi'(x)$, 於是 y 也是 x 的連續函數,

$$y=f\{\varphi(x)\}.$$

令
$$\Delta y=[f'(u)+\eta_1]\Delta u,$$
$$\Delta u=[\varphi'(x)+\eta_2]\Delta x,$$

則
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=[f'(u)+\eta_1][\varphi'(x)+\eta_2].$$

當 Δx 趨近於零時, η_1 與 η_2 同趨近於零. 故

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x),$$

即
$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

系. 若 $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, 則

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}}$$

例 1. $y=\log(ax+b)$.

令 $u=ax+b$, 則 $y=\log u$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{a}{u}=\frac{a}{ax+b}.$$

例 2. $y=x^n$ (n 爲任何實數).

$y=x^n=e^{n\log x}$.

令 $u=n\log x$, 則 $y=e^u$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot\frac{n}{x}=nx^{n-1}.$$

例 3. $y=a^x$.

$y=a^x=e^{x\log a}$.

令 $u=x\log a$, 則 $y=e^u$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\log a=a^x\log a.$$

5° **反函數之導數** 設 $x=\varphi(y)$ 爲函數 $y=f(x)$ 的反函數, 且 $f(x)$, $\varphi(y)$ 各有導數 $f'(x)$, $\varphi'(y)$. 若 $\frac{dy}{dx}\neq 0$, 則

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

故

$$\boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}}\qquad\left(\frac{dy}{dx}\neq 0\right)$$

即

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

由是我們得求 arc sin x, arc tan x 等函數的導數如下:

$y=\text{arc sin}\,x$, 其主值爲

$$-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}.$$

因 $$x=\sin y,$$

故 $$\frac{dx}{dy}=\cos y.$$

此時 $\cos y \geqq 0$，故 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$ 代入上式，則得

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{1-x^2}.$$

由是得 $$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

同樣可得 $$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cos x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad (0\leqq \operatorname{arc}\cos x\leqq \pi)$$

$y=\operatorname{arc}\tan x$，其主值爲

$$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}.$$

因 $$x=\tan y,$$

故 $$\frac{dx}{dy}=1+\tan^2 y=1+x^2.$$

由是得 $$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\tan x=\frac{1}{1+x^2}}$$

同樣可得 $$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot x=\frac{-1}{1+x^2}}$$

例題. 試證

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sec x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

6° $x=\varphi(t),\ y=\psi(t).$

由 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 消去 t, 可得 $y=f(x)$, 然實際運算時, 這種消去很不容易. 今設 $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$, 則 $\dfrac{dt}{dx}$ 存在, 且 t 可視爲 x 的連續函數. 申言之, 這時 y 是 t 的函數, 而 t 又是 x 的函數, 故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}.$$

由是得

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

例如 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot t.$$

若先由原式中消去 t, 則得

$$x^2+y^2=a^2 \qquad 或 \qquad y=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\mp\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{y}=-\cot x,$$

結果與上相同.

7° **對數微分法** 有時欲求一函數的導數, 應先取其對數, 較爲便利, 然後由這函數的對數求其導數.

例 1. 求 $$y=\frac{(x-a)^p(x-b)^q}{(x-c)^r}$$

的導數.

兩邊各取對數, 得

$$\log y=p\log(x-a)+q\log(x-b)-r\log(x-c).$$

左邊的 $\log y$ 爲 y 的函數，而 y 又爲 x 的函數，故

$$\frac{d\log y}{dx}=\frac{d\log y}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

由此得
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}-\frac{r}{x-c}.$$

故
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-a)^p(x-b)^q}{(x-c)^r}\left\{\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}-\frac{r}{x-c}\right\}.$$

例 2. 求 $y=f(x)^{g(x)}$ 的導數.

兩邊各取對數，得

$$\log y=g(x)\log f(x),$$

故
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=g'(x)\log f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)},$$

由是得
$$\frac{dy}{dx}=f(x)^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x)+\frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right\}.$$

習 題 2

求下列函數的導數.

1. $x(1-x)^2$.
2. $(5+3x)\sqrt{4x-6}$.
3. $(2a^2+3x^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3}$.
4. $(3x^2+5ay-2a^2)\sqrt{a^2+3x^2}$.
5. $(4x-7)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}$.
6. $\left(\frac{2}{3x^2}+\frac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2-9}$.
7. $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$.
8. $\frac{a+x}{(b+x)^n}$.
9. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.
11. $\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$.
12. $\sqrt[3]{a^2+a}$.

13. $\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$.

14. $\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

15. $\sin ax \cos bx$.

16. $(x \tan x)^2$.

17. $x^n \sin ax$.

18. $\dfrac{2a \sin x}{1+2a \cos x+a^2}$.

19. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{(a \cos x)^2+(b \sin x)^2}}$.

20. $(x-\operatorname{arc} \tan x)^2$.

21. $\tan x \cdot \operatorname{arc} \tan x$.

22. $\operatorname{arc} \sin \dfrac{x+1}{2}$.

23. $\operatorname{arc} \cos \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

24. $\operatorname{arc} \tan \dfrac{2x}{1+x^2}$.

25. $\dfrac{x-\operatorname{arc} \sin x}{\sin^3 x}$.

26. $\operatorname{arc} \tan \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

27. $\operatorname{arc} \cos \dfrac{b+a \cos x}{a+b \cos x}$.

28. $\operatorname{arc} \tan \left\{\dfrac{\sqrt{a^2-b^2} \sin x}{b+a \cos x}\right\}$.

29. xe^{-x}.

30. $x^n e^{-x^2}$.

31. $e^{(a+x)^2} \sin x$.

32. $e^{-a^2x^2} \cos bx$.

33. $\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$.

34. $\dfrac{x}{e^x-1}$.

35. $e^x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

36. $\sqrt{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$.

37. $\dfrac{e^{a \operatorname{arc} \tan x}(ax-1)}{\sqrt{1+x^2}}$.

38. $x \log x-x$.

39. $\log(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b})$.

40. $\log \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

41. $\log \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

42. $\log(x+a+\sqrt{x^2+2ax+b^2})$.

43. $\log\sqrt{\dfrac{1-\cos^n x}{1+\cos^n x}}$.

44. $\log(\sqrt{ae^x+b}+\sqrt{ae^x})$.

45. $\log\sqrt{\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}}$.

46. x^x.

47. $\sqrt[x]{x}$.

48. $a^{-\frac{1}{x}}$.

49. e^{e^x}.

50. e^{x^x}.

51. $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\log\sqrt{1-x^2}$.

52. $\log\dfrac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+2\arctan\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

53. $\log(\log x)$.

54. $x^{\cos x}$.

55. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

56. $\begin{cases} x=4a\cos^3 t, \\ y=4a\sin^3 t. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x=\dfrac{a}{t}\cos t, \\ y=\dfrac{a}{t}\sin t. \end{cases}$

58. $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t), \\ y=a(2\sin t-\sin 2t). \end{cases}$

第 三 章

導數之性質及其應用

18. 函數之增減與其導數之關係 設函數 $y=f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 是正的，那末當 $\Delta x\to 0$ 時，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

趨近於一正數，所以當 $|\Delta x|$ 之值充分小時，Δy 與 Δx 同號，這時 $f(x)$ 在 x 叫做增函數．反之，若 $f'(x)$ 是負的，那末當 $|\Delta x|$ 之值充分小時，Δy 與 Δx 異號，這時 $f(x)$ 在 x 叫做減函數．例如 $y=x^2$，$y'=2x$，在 $x=1$，$y'=2>0$．這時 y 是增函數，在 $x=-1$，$y'=-2<0$，這時 y 是減函數（圖 31）．

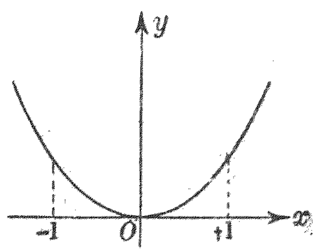


圖 31

19. Rolle 氏定理* 設函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內連續而且有導數，若 $f(a)=0$，$f(b)=0$，則 x 在 a, b 之間至少有一數如 c，使

$$f'(c)=0. \qquad (a<c<b).$$

若函數 $f(x)$ 在 (a, b) 內恆等於零，那末 $f'(x)$ 在這間隔內顯然也等於零，定理便不證自明．

* Michel Rolle, 1652–1719.

若函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內不恆等於零. 設 M 及 m 爲 $f(x)$ 在這間隔內的最大值與最小值, 則 M 與 m 必有一異於零. 令 $M \neq 0$, 那末 a, b 之間必有一數如 c (§9) 使

$$f(c)=M.$$

令 $c \pm h$ 爲 (a, b) 內的二數, 若 $h>0$, 則有

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0 \quad \text{與} \quad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geqq 0.$$

由第一式可得 $f'(c) \leqq 0$, 由第二式可得 $f'(c) \geqq 0$, 故 $f'(c)=0$ (圖 32).

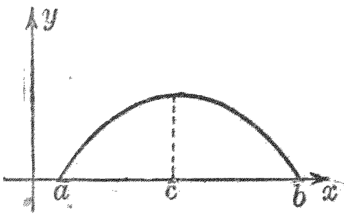


圖 32

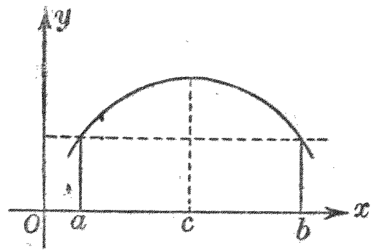


圖 33

若 $f(a)=f(b)$, 則 a, b 之間至少有一數如 c 使 $f'(c)=0$ (圖 33).

令 $\qquad \varphi(x)=f(x)-f(a),$

則 $\qquad \varphi(a)=0, \qquad \varphi(b)=0.$

故 $\qquad \varphi'(c)=f'(c)=0, \qquad (a<c<b).$

20. 中值定理 (Lagrange)* 設函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內連續而且有導數, 那末在 a, b 之間至少有一數如 c, 使

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).}$$

* Joseph Louis Lagrange, 1736-1813, 法國大算學家.

茲先述此式在幾何方面的意義. 設 A, B 爲曲線 $y=f(x)$ 上的兩點, $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ 依次爲這兩點的座標, 則

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

就是直線 AB 的斜率. 但 $f'(c)$ 是曲線在某點 P 的切線的斜率, 因 $a<c<b$, 故 P 點當在 AB 弧上. 依定理而言, AB 弧上至少有一點如 P, 曲線在這點的切線與 AB 平行.

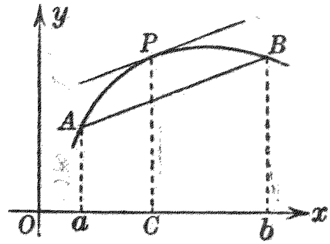


圖 34

證: 令 $\varphi(x)=(b-a)\{f(x)-f(a)\}-(x-a)\{f(b)-f(a)\}$,

則 $$\varphi(a)=0, \qquad \varphi(b)=0.$$

依 Rolle 氏定理, x 在 a, b 之間至少有一數如 c, 使

$$\varphi'(x)=(b-a)f'(x)-\{f(b)-f(a)\}$$

等於零, 故有

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

令 $$\frac{c-a}{b-a}=\theta, \qquad 0<\theta<1,$$

則 $$c=a+\theta(b-a).$$

故 $$f(b)-f(a)=(b-a)f'\{a+\theta(b-a)\}, \qquad 0<\theta<1.$$

令 $b=a+h$, 則上式可寫如

$$\boxed{f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),} \qquad 0<\theta<1.$$

由此可得一

系 1. 若 $f'(x)$ 在間隔 (a, b) 恆等於零, 那末在這間隔內 $f(x)$ 是一常數.

設 x, $x+h$ 爲 (a, b) 內的任意二數, 我們常有

$$f(x+h)-f(x)=0,$$

或
$$f(x+h)=f(x),$$

故知函數 $f(x)$ 爲一常數.

系 2. 設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的導數在 (a, b) 間隔內是相等的,那末在這間隔內 $f(x)$ 與 $g(x)$ 僅差一常數罷了.

因函數 $f(x)-g(x)$ 的導數恆等於零,故 $f(x)-\varphi(x)$ 是一常數 C,即

$$f(x)=g(x)+C.$$

21. 增函數,減函數 定理. 若在間隔 (a, b) 內 $f'(x)\geqq 0$,但 $f'(x)$ 不恆等於零,那末 $f(x)$ 在這間隔內是 x 的增函數,故

$$f(b)>f(a).$$

設 x 爲 a, b 間之任意一數,依中值定理則有

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(c_1)\geqq 0, \qquad (a<c_1<x)$$

$$f(b)-f(x)=(b-x)f'(c_2)\geqq 0, \qquad (x<c_2<b)$$

故
$$f(b)\geqq f(x)\geqq f(a),$$

且
$$f(b)>f(a).$$

此時 $f(b)\neq f(a)$; 不然,函數 $f(x)$ 便恆等於常數而與原設 $f'(x)\neq 0$ 不合了.

同樣,若在間隔 (a, b) 內 $f'(x)\leqq 0$,但 $f'(x)$ 不恆等於零,那末 $f(x)$ 在這間隔內是 x 的減函數,故 $f(b)<f(a)$.

22. Cauchy 氏定理* 設二函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在間隔 (a, b) 內連續而且各有導數 $f'(x)$, $g'(x)$. 1°, 若 x 在 a, b 之間無一值能使 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 同等於零, 2°, $g(a)\neq g(b)$, 那末

[1]
$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

* Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, 法國大算學家.

c 是 a, b 間的一數.

令 $$\varphi(x)=f(x)\{g(b)-g(a)\}-g(x)\{f(b)-f(a)\},$$

則 $$\varphi(a)=\varphi(b).$$

應用 Rolle 氏定理, x 在 a, b 之間, 至少有一數如 c, 使

$$f'(c)\{g(b)-g(a)\}-g'(c)\{f(b)-f(a)\}=0$$

然 $g'(c)\neq 0$ [否則, $f'(c)$ 與 $g'(c)$ 將同等於零], 故以

$$g'(c)\{g(b)-g(a)\}$$

除上式兩邊便得 Cauchy 氏公式.

令 $$g(x)=b^m-(b-x)^m,$$

式中 m 爲一正數, 於是得

$$g(b)-g(a)=(b-a)^m, \qquad g'(x)=m(b-x)^{m-1}.$$

函數 $g(x)$, $g'(x)$ 顯然滿足了定理中的條件. 又 c 可寫如

$$c=a+\theta(b-a), \qquad 0<\theta<1.$$

故 $$g'(c)=m(1-\theta)^{m-1}(b-a)^{m-1}.$$

代入 (1) 式得

[2] $$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{m(1-\theta)^{m-1}}f'\{a+\theta(b-a)\}.$$

若 $m=1$, 便得

[3] $$f(b)-f(a)=(b-a)f'\{a+\theta(b-a)\}.$$

所以中值定理是 Cauchy 氏定理的一個特例罷了.

23. 函數之極大值與極小值　設 $f(x)$ 在一間隔內爲 x 的連續函數, $x=a$ 爲這間隔內的一值. 若我們能求得一適當的正數 δ, 當

$$|h|<\delta$$

時, 恆能使

$$f(a+h)-f(a)>0,$$

那末 $f(a)$ 比 $f(x)$ 在 $x=a$ 鄰近* 的值要小些，這時 $f(a)$ 叫做 $f(x)$ 的極小值，或稱極小.

反之，當

$$|h|<\delta$$

時，恆能使

$$f(a+h)-f(a)<0,$$

那末 $f(a)$ 比 $f(x)$ 在 $x=a$ 鄰近的值要大些，這時 $f(a)$ 叫做 $f(x)$ 的極大值，或稱極大. 極大值與極小值統叫做極值.

就曲線 $y=f(x)$ 言之 (圖 35)，P_1 與 P_3 為 $f(x)$ 極大值所在之點. P_2 與 P_4 為 $f(x)$ 極小值所在之點. 由是言之，所謂函數 $f(x)$ 的極大值 (或極小值)，並不一定是 $f(x)$ 的最大值 (或最小值) 了.

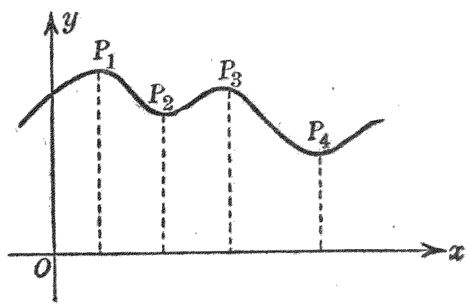


圖 35

茲再就函數 $f(x)$ 的極值的意義申說之，設 h 為一正數，當 x 在 $(a-h, a)$ 內時，$f(x)$ 為 x 之增函數；當 x 在 $(a, a+h)$ 內時，$f(x)$ 為 x 之減函數，那末 $f(a)$ 就叫做 $f(x)$ 的極大值. 反之，$f(a)$ 就叫做 $f(x)$ 的極小值.

定理. 設 $f(x)$ 在一間隔內連續而且有導數，$x=a$ 為這間隔內的一值，欲 $f(a)$ 為 $f(x)$ 的極大值，必要而充足的條件為

1° $f'(a)=0$.

2° $f'(x)$ 在 $(a-h, a)$ 內為正，在 $(a, a+h)$ 內為負.

---

*所謂 a 的鄰近就是間隔 $a-h\leqq x\leqq a+h$ 的意思.

(h 爲一適當的正數)

x	$a-h$	a	$a+h$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

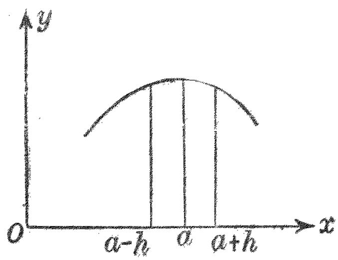


圖 36

條件是必要的. $f(a)$ 爲 $f(x)$ 的極大值, 依定義有

$$f(a-h)<f(a),$$
$$f(a)>f(a+h).$$

故
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0,$$
$$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}>0,$$

於是
$$f'(a)=\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leqq 0,$$
$$f'(a)=\lim_{h\to+0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\geqq 0.$$

故
$$f'(a)=0.$$

條件是充足的. 若 $f'(x)$ 在 $(a-h, a)$ 內爲正, 則 $f(x)$ 在這間隔內爲 x 的增函數; 若 $f'(x)$ 在 $(a, a+h)$ 內爲負, 則 $f(x)$ 在這間隔內爲 x 的減函數 (§18), 所以 $f(a)$ 就是 $f(x)$ 的極大值.

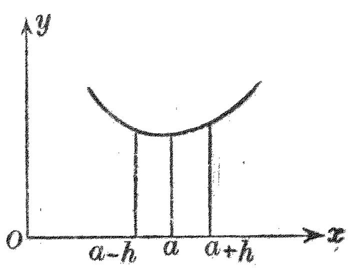


圖 37

同樣可證明

定理. 設 $f(x)$ 在一間隔內連續而且有導數 $f'(x)$, $x=a$ 爲這間隔內的一

值，欲 $f(a)$ 爲 $f(x)$ 的極小值，必要而充足的條件爲

1° $f'(a)=0$,

2° $f'(x)$ 在 $(a-h,\ a)$ 內爲負，在 $(a,\ a+h)$ 內爲正.

x	$a-h$		a		$a+h$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

例 1.　求 $y=f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的極值.

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

x		-1		$+1$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

故 $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的極小值，$f(1)=\dfrac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的極大值(圖 38).

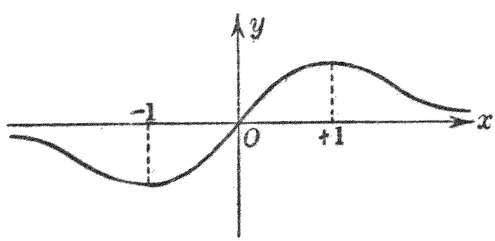


圖　38

例 2.　求 $y=f(x)=x^3$ 的極值.

$$f'(x)=3x^2.$$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$

故 $f(x)$ 無極值 (圖 39).

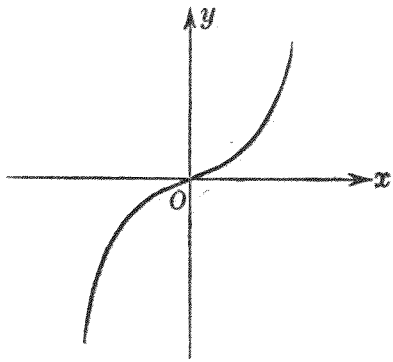


圖 39

有時 $f'(x)$ 在 $x=a$ 雖不連續, 但 $f'(a-h)$ 與 $f'(a+h)$ 異號, 這時 $f(a)$ 往往仍為 $f(x)$ 的極值.

例 3. 求 $y=f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的極值.

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

$f'(x)$ 在 $x=1$ 並不連續, 但

$$f(1\pm h)=\sqrt[3]{h^2}>0,$$

$$f(1)=0.$$

故 $f(1)=0$ 是 $f(x)$ 的極小值 (圖 40).

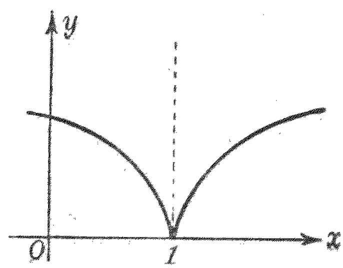


圖 40

例 4. 設矩形之周長為一常數, 求其中面積之最大者.

設矩形之周長等於 $4a$, x 為其一邊之長, 則其面積等於

$$f(x)=x(2a-x), \quad (0\leqq x\leqq 2a)$$

$$f'(x)=2(a-x).$$

x	0	a	$2a$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

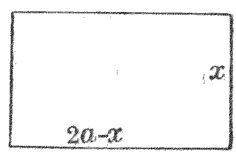


圖 41

故所求之矩形為一正方形, 其面積等於

$$f(a)=a^2.$$

例 5. 設 A 為圓外一定點, P 為圓周上一動點, 求 $\overline{AP}^2$ 之極大值及極小值.

設原點 O 爲圓心，r 爲半徑，A 點在 x 軸上，$OA=a$，於是

$$\overline{AP}^2=f(x)=a^2+r^2-2ax,$$
$$f'(x)=-2a.$$

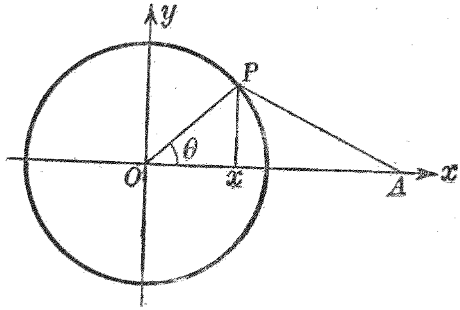


圖 42

此時方程式 $f'(x)=0$ 無根，然就題意細考之，變數 x 必須合於下不等式

$$-r\leqq x\leqq r.$$

所以 $f(x)$ 在間隔 $(-r, r)$ 內之極大值爲 $f(-r)=(a+r)^2$，其極小值爲 $f(r)=(a-r)^2$，實卽 $f(x)$ 在這間隔內的最大值與最小值罷了.

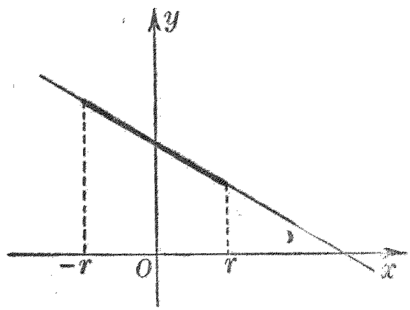


圖 43

今若以 $\angle AOP=\theta$ 爲變數，則

$$\overline{AP}^2=\varphi(\theta)=a^2+r^2-2ar\cos\theta.$$

這時 θ 之值，並無限制. 解方程式

$$\varphi'(\theta)=2ar\sin\theta=0,$$

得 $\theta=2n\pi,\quad \theta=(2n+1)\pi,$

n 爲任意正整數. 由是得結果如下：

θ		$2n\pi$		$(2n+1)\pi$	
$\varphi'(\theta)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\varphi(\theta)$		$(a-r)^2$ 極小		$(a+r)^2$ 極大	

24. 函數之近似値 設 $f(x)$, $f'(x)$ 皆爲 x 的連續函數, $|h|$ 爲一甚小之正數, 由中値定理

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h), \qquad 0<\theta<1,$$

得 $f(x+h)$ 的近似値如下*

$$f(x+h)\approx f(x)+hf'(x).$$

其誤差値 E 爲

$$E=h\{f'(x+\theta h)-f'(x)\}.$$

若 $f'(x)$ 不變號, 在 x, $x+h$ 間, 令 $f'(x)$ 之最大値爲 G, 最小値爲 L, 於是得誤差之最大限度爲

$$|E|\leqq|h|(G-L).$$

例 1. 已知 $\log 100=4.60517$, 求 $\log 101$.

$$\log(x+h)\approx\log x+\frac{h}{x},$$

$$\left|E\right|=\left|h\left(\frac{1}{x+\theta h}-\frac{1}{x}\right)\right|<\left|h\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)\right|=\frac{h^2}{x(x+a)},$$

$$\log 101=\log 100+\frac{1}{100}=4.60517+0.01=4.61517.$$

其誤差値小於

$$\frac{h^2}{x(x+h)}=0.00010.$$

(由表檢得 $\log 101=4.61512$)

例 2. 已知 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, 求 $\sin 31^\circ$.

$$\sin(x+h)\approx\sin x+h\cos x, \quad \text{若} \quad 0<x<\frac{\pi}{2},$$

$$|E|=|h\{\cos(x+\theta h)-\cos x\}|<|h\{\cos(x+h)-\cos x\}|$$
$$=\left|2h\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right|<\left|2h\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}\right|=h^2\left|x+\frac{h}{2}\right|.$$

---

* 記號 $\approx$ 是"幾乎等於"的意思.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ (弧度)},$$

故 $$\sin 31^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.50000 + 0.01511 = 0.51511.$$

其誤差得小於

$$h^2\left(x+\frac{h}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{180}\right)^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right) = 0.00016.$$

(查表 $\sin 31^\circ = 0.51504$)

例 3.　設一鐵桿在溫度 0 度時其長爲 l_0，在溫度 t 時其長爲 $l = l_0(1+\alpha t)$，α 叫做漲性係數．今有一有擺之鐘於此，當溫度 t_1 時，此鐘所表的時間適爲正確．若溫度升至 t_2 時，問此鐘每天要慢幾秒鐘?

我們知道鐘擺的振動週期爲

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

故 $$\frac{dT}{dl} = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}.$$

由是得

$$\Delta T = T(l+\Delta l) - T(l) \approx \frac{\pi \Delta l}{\sqrt{l_1 g}}.$$

式中 $l_1 = l_0(1+\alpha t_1)$，$\Delta l = \alpha l_0(t_2 - t_1)$，$\Delta T$ 就是每一週期內要慢的時間，

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta l}{2l_1}$$

這就是每秒鐘要慢的時間，故此鐘每天要慢

$$43200 \times \frac{\Delta l}{l_1} \text{ 秒}.$$

習 題 3

1. 證明 $f(x)=x+\sin x$ 爲增函數.

2. 證明 $f(x)=\dfrac{x+4}{3x+2}$ 爲減函數.

3. 求 $f(x)=x^4-10x^3-41$ 爲增函數之間隔與減函數之間隔.

4. 應用中值定理於函數 $f(x)=x^3$, 幷求 θ 之值.

5. 證明下列不等式

(1) $x>\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$. $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $x>\arctan x>x-\dfrac{x^3}{3}$. $\left(0<\arctan x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

6. 設 $x>0$, 證明下列不等式

(1) $x>\log(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$.

(2) $(x-1)e^{2x}+x+3>0$.

7. 求下列函數之極值

(1) $(x-a)^2(x-2a)^3$, $(a>0)$. (2) $x^4-8x^3+22x^2-24x+12$.

(3) $4x^3-18x^2+27x-7$. (4) $12x^5-45x^4+40x^3+6$.

(5) $\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$. (6) $\dfrac{x}{(a+x)(b+x)}$.

(7) $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{a-x}$, $(a>0,\ a>0)$. (8) $\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

(9) $(x-a)^{\frac{7}{5}}$. (10) $x\sqrt{ax-x^2}$.

(11) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$. (12) $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

(13) $(x-a)^{\frac{2}{5}}$. (14) $2\sin x+\cos x$.

(15) xe^{-x}.　　(16) $e^x \cos x$.

(17) $x \log x$.　　(18) $\dfrac{e^x}{\sin(x-a)}$.

8. 過一定點 P 引一直線與座標軸 Ox, Oy 相交於 A, B 二點, 使 AB 線段之長最小.

9. 有正方形的厚紙一塊, 邊長等於 a, 今於其四隅各切去一等大的正方形, 使其殘餘部分造成一容積最大之箱 (無蓋).

10. 在圓內的內接矩形中求
    (1) 其周之最大者.
    (2) 其面積之最大者.

11. 在橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 內的內接矩形中, 求其面積之最大者.

12. 在球內的內接直圓錐中, 求其體積之最大者.

13. 於等面積的矩形中, 求
    (1) 其周之最短者.
    (2) 其對角線之最短者.

14. 求雙曲線上 $y^2-\frac{1}{2}x^2=1$ 之一點, 使這點與一點 $(0, 3)$ 之距離最近.

15. 三角形二邊之長爲 a 與 b, 試求其第三邊之長, 使這三角形的面積最大.

16. 於等周二等邊三角形中, 求其面積之最大者.

17. 已知四邊形每邊之長, 當其二對角之和等於 $180°$ 時, 其面積爲最大.

18. 求 $x^k(c-x)$ 的極大值, 其中 k 爲正數.

19. 證明函數

$$f(x)=m_1(x-a_1)^2+m_2(x-a_2)^2+\cdots+m_n(x-a_n)^2$$

之極小值爲

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

20. 設 $0 \leqq x \leqq \pi$, 證明

$$x \cos x - \sin x \leqq 0.$$

21. 證明 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在間隔 $0 \leqq x \leqq \pi$ 內爲一減函數.

22. 當 $|h|$ 甚小時, 試證

(1) $(a+h)^5 \approx a^5 + 5a^4 h.$

(2) $\dfrac{1}{(a+h)^3} \approx \dfrac{1}{a^3} - \dfrac{3h}{a^4}.$

(3) $\sin(a+h) \approx \sin a + h \cos a.$

(4) $\tan(a+h) \approx \tan a + h \sec^2 a.$

23. 試證直線 $y = 2x - 1$ 與曲線

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$$

相切於二點.

24. 經過原點試作曲線 $y = 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x$ 的切線.

第四章

逐次微分法

25. 逐次導數　函數 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$, 就一般情形言之, 仍爲 x 的函數, 若這函數 $f'(x)$ 復有一導數, 我們遂以函數 $f(x)$ 的第二次導數稱之, 幷用記號 $f''(x)$ 表示之.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x).$$

同樣 $f''(x)$ 的導數叫做函數 $f(x)$ 的第三次導數, 我們以記號 $f'''(x)$ 表示之. $f(x)$ 的第 n 次導數以記號 $f^{(n)}(x)$ 表示之. $f'(x)$ 也叫做 $f(x)$ 的初次導數.

令 $y=f(x)$, 則各次導數

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\ \cdots\cdots,\ f^{(n)}(x),$$

也可用記號

$$y',\quad y'',\quad y''',\ \cdots,\ y^{(n)}$$

表之. y 之導數又可用記號 $\dfrac{dy}{dx}$ 表示之, 故

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ 略記之如 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. 依同理

$$y'''=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

例 1. $y=x^m$. (m 爲任何實數)

$$y'=mx^{m-1},$$
$$y''=m(m-1)x^{m-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}.$$

例 2. $y=e^{ax}$.

$$y'=ae^{ax},$$
$$y''=a^2e^{ax},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y^{(n)}=a^ne^{ax}.$$

例 3. $y=\log x$.

$$y'=\frac{1}{x}, \qquad y''=-\frac{1}{x^2},$$
$$y'''=\frac{2!}{x^3}, \qquad y^{(4)}=-\frac{3!}{x^4},$$
$$\cdots\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

例 4. $y=\sin x$.

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$
$$y'''=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

同樣　$y=\cos x$.

$$y^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

例題 1.　求函數 a^x, $\log ax$, $(ax+b)^m$ 的第 n 次導數.

例題 2.　求 $\sin ax$, $\cos ax$ 的第 n 次導數.

26. 關於逐次導數的定理　設二函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在同一間隔內各有第 n 次導數, 由 §17 便得下述定理.

1°　和之逐次導數

$$y=f(x)+g(x),$$

$$y'=f'(x)+g'(x),$$

$$y''=f''(x)+g''(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x).$$

若 $y=f(x)-g(x)$, 則有

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x).$$

例.　求函數 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的第 n 次導數.

因　$$y=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right\},$$

故　$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1+x}+\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1-x}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right\},$$

即　$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{1}{(1+x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1-x)^{n+1}}\right\}.$$

2° 積之逐次導數

$$y=f(x)\,g(x),$$
$$y'=f'g+fg',$$
$$y''=f''g+2f'g'+fg'',$$
$$y'''=f'''g+3f''g'+3f'g''+fg''',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於是我們得假定 $y^{(n)}$ 之形式爲

$$y^{(n)}=A_0f^{(n)}g+A_1f^{(n-1)}g'+A_2f^{(n-2)}g''+\cdots\cdots$$
$$+A_{n-1}f'g^{(n-1)}+A_nfg^{(n)}.$$

$A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 爲未知常數,但其數值當與 f, g 二函數無關.

今令 $f(x)=e^{ax}$, $g(x)=e^{bx}$, 則 $y=e^{(a+b)x}$.

$$y'=(a+b)e^{(a+b)x},\qquad f'=ae^{ax},\qquad g'=be^{bx}.$$
$$y''=(a+b)^2e^{(a+b)x},\qquad f''=a^2e^{ax},\qquad g''=b^2e^{bx},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots\cdots,$$
$$y^{(n)}=(a+b)^ne^{(a+b)x},\qquad f^{(n)}=a^ne^{ax},\qquad g^{(n)}=b^ne^{bx}.$$

代入上式,然後將兩邊之公因子 $e^{(a+b)x}$ 約去,便得

$$(a+b)^n=A_0a^n+A_1a^{n-1}b+A_2a^{n-2}b^2+\cdots+A_{n-1}ab^{n-1}+A_nb^n.$$

比較兩邊各項的係數,得

$$A_0=1,\quad A_1=n,\quad A_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\quad A_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\quad \cdots\cdots,$$
$$A_{n-1}=n,\qquad A_n=1.$$

故
$$\boxed{\begin{aligned}y^{(n)}=f^{(n)}g+nf^{(n-1)}g'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f^{(n-2)}g''\\ +\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}f^{(n-3)}g'''+\cdots+fg^{(n)}\end{aligned}}$$

這叫做 Leibnitz 氏的公式.*

* Gottfried Wilhelm Leibnitz 1646–1716, 微積分之發明者.

例.　求 $y=x^2e^{ax}$ 的第 n 次導數.

令　$f(x)=x^2,\qquad g(x)=e^{ax},$

則　$f'(x)=2x,\qquad g'(x)=ae^{ax},$

$f''(x)=2,\qquad g''(x)=a^2e^{ax},$

$f'''(x)=0,\qquad g'''(x)=a^3e^{ax},$

$\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots,$

$f^{(n)}(x)=0,\qquad g^{(n)}(x)=a^ne^{ax}.$

代入 Leibnitz 氏公式, 得

$$y^{(n)}=x^2a^ne^{ax}+2na^{n-1}xe^{ax}+n(n-1)a^{n-2}e^{ax}$$
$$=a^{n-2}e^{ax}\{a^2x^2+2nax+n(n-1)\}.$$

例題.　求 $a^x\sin x$, $\cos ax\cos bx$, $x\log x$ 的第 n 次導數.

27. 求逐次導數之特別方法

求一函數的第 n 次導數, 就一般情形言之, 多不容易, 然有時把函數的寫法改變之後, 其 n 次導數, 往往較易求得.

例 1.　$y=\sin^3 x.$

$$y=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x).$$

故　$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}.$$ ✓

例 2.　$y=e^x\sin x.$

若直接用 Leibnitz 氏公式卽得

$$y^{(n)}=e^x\left\{\sin x+n\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)+\cdots\cdots\right.$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\cdots\cdots$$
$$\left.+\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}.$$

先求 $y=e^x\sin x$ 的初次導數.

$$y'=e^x\sin x+e^x\cos x$$

$$=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

於是
$$y''=(\sqrt{2})^2 e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

例 3.　　$y=\operatorname{arc}\sin x.$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即
$$y'\sqrt{1-x^2}=1. \tag{1}$$

兩邊再求導數, 得

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

即
$$y''(1-x^2)-y'x=0. \tag{2}$$

上式左邊的二項各用 Leibnitz 氏公式以求其第 n 次導數, 便得

$$y^{(n+2)}(1-x^2)-(2n+1)y^{(n+1)}x-n^2y^{(n)}=0. \tag{3}$$

由 (1), (2), (3) 三式, 於是 $y', y'', y''', \cdots$ 便可順次求得.

令 $f(x)=\operatorname{arc}\sin x$. 試求 $f'(0), f''(0), \cdots f^{(n)}(0)$.

由 (1) 式得 $f'(0)=1$, 由 (2) 式得 $f''(0)=0$, 由 (3) 式得

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0).$$

由是知

$$f'''(0)=1^2,\quad f^{(5)}(0)=1^2\cdot3^2,\quad \cdots\cdots,$$

$$f^{(2m+1)}(0)=1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2m-1)^2,$$

$$f^{(4)}(0)=0,\quad f^{(6)}(0)=0,\quad \cdots\cdots,\quad f^{(2m)}(0)=0.$$

28. 反函數的逐次導數　設函數 $y=f(x)$ 在一間隔內具有各次導數，且 $f'(x)\neq 0$，并設 $x=\varphi(y)$ 爲其反函數，那末（§17, 5°）

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)},$$

$\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$ 爲 x 的函數，而 x 又爲 y 的函數，故依 §17, 4° 的方法得

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\right)\frac{dx}{dy},$$

即
$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}=-\frac{f''(x)}{f'(x)^3}.$$

若已求得 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, ……, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$，那末 $\dfrac{d^nx}{dy^n}$ 也就可以求得了.

例.　$x=\operatorname{arc}\tan y$，求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

$$y=\tan x,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

故
$$\frac{d^2x}{dy^2}=-2\sin x\cos^3 x.$$

29.　$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$，求 y 對於 x 的逐次導數

設 $\varphi(t)$, $\psi(t)$，在同一間隔內具有各次導數，且 $\varphi'(t)\neq 0$，那末

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

依 §17, 4°, 則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\cdot\frac{dt}{dx}.$$

即
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\ \frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\ \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3}.$$

$\frac{d^3y}{dx^3}$, …, $\frac{d^ny}{dx^n}$, 亦得同樣求得之.

例. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t,$$

$$\frac{dy}{dt}=a\cos t,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-a\sin t,$$

故
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t}{-a^3\sin^3t}=-\frac{1}{a\sin^3t}.$$

30. 逐次微分 函數 $y=f(x)$ 的微分爲 $dy=f'(x)dx$, 前已言之, 這個微分叫做 y 的第一次微分. dy 的微分 $d(dy)$ 叫做 y 的第二次微分, 餘類推.

dx 是變數 x 的微分, 其值可任意規定而與 x 不生關係, 因此當我們求 $f'(x)dx$ 的導數時, 可視 dx 爲常數.

故
$$\frac{d(dy)}{dx}=f''(x)dx,$$

即
$$d(dy)=f''(x)dx^2.$$

若把 $d(dy)$ 寫如 d^2y, 便有

$$d^2y=f''(x)dx^2,$$

由是得
$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x).$$

同樣 d^2y 的微分
$$d(d^2y)=d^3y=f'''(x)dx^3.$$

由是得
$$\frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x).$$

同樣
$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n,$$

由是得
$$\frac{d^ny}{dx^n}=f^n(x).$$

d^ny 叫做 y 的第 n 次微分.

若 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 由 §17, 4° 我們知道 y 的微分是
$$dy=f'(u)\,\varphi'(x)\,dx.$$

然 $du=\varphi'(x)dx$, 故
$$dy=f'(u)\,du.$$

這個公式與 u 爲自變數時所得者一樣.

至於求 y 的第二次微分時, du 便不能視爲常數而應視爲一函數, 由是我們求得 d^2y 如下:
$$\begin{aligned}d^2y&=d\,[f'(u)]\,du+f'(u)\,d(du)\\&=f''(u)\,du^2+f'(u)\,d^2u.\end{aligned}$$

由此觀之, d^2y 的公式與 u 爲自變數時所得者便不一樣了.

31. 無窮小　以零爲極限的變數叫做無窮小.

例如 $x\to 0$, x 就是無窮小. 如 $x\to a$, $x-a$ 就是無窮小. 又如 $y(x)$ 爲 x 的函數, 若
$$\lim_{x\to a} y=0,$$

那末 $x\to a$ 時, 函數 y 就是無窮小; 例如 $x\to 0$ 時, x^2, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $1-\cos x$ 都是無窮小.

無窮小與零不同，所謂零乃一確定不易之常數，而無窮小之數，則爲變數而非常數.

設 x 趨近於零時，y 也趨近於零，爲研究無窮小 y 與無窮小 x 的關係起見，我們稱 x 爲主無窮小. 若有一正數 p，當 $x\to 0$ 時，能使

$$\frac{y}{x^p}$$

趨近於一不等於零的極限，那末 y 叫做 p 級無窮小. 例如 $y=x^2$ 爲二級無窮小，$\sqrt{x}$ 爲 $\frac{1}{2}$ 級無窮小，$\sin x$ 爲一級無窮小.

又 $$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{x^2}{2},$$

故 $1-\cos x$ 爲二級無窮小.

設 $$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^p}=A,$$

那末可令 $$\frac{y}{x^p}=A+\eta.$$

當 $x\to 0$ 時，$\eta\to 0$. 換言之，η 也是一個無窮小，於是

$$y=(A+\eta)x^p.$$

令 $z=Ax^p$，則

$$\frac{y}{z}=\frac{A+\eta}{A},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{z}=1.$$

所以當 $|x|$ 之值甚小時，無窮小 z 便是 y 的近似値，所以 $z=Ax^p$

叫做無窮小 y 的主要部分. 例如無窮小 $\sin x$ 的主要部分爲 x, 無窮小 $1-\cos x$ 的主要部分爲 $\frac{x^2}{2}$. 今以 O 爲圓心, a 爲半徑, 作一圓弧 AC, 若令 θ 爲主無窮小, $AB=a\sin\theta$ 便是一級無窮小, $BC=a(1-\cos\theta)$ 便是二級無窮小.

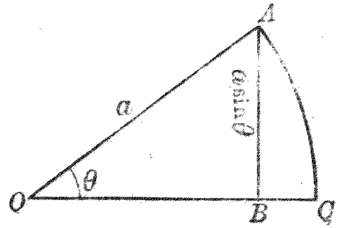


圖 44

設 $y=f(x)$, 則有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\eta,$$

或
$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\eta\cdot\Delta x.$$

依定義 $f'(x)\Delta x$ 叫做 y 的微分,

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x=f'(x)dx.$$

若 $f'(x)\neq 0$, 則

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1.$$

所以除 $f'(x)=0$ 之情形外, dy 不過是無窮小 Δy 的主要部分罷了. 今若以 dx 爲主無窮小, 就一般情形言之, dy 是一級無窮小, d^2y 是二級無窮小, d^ny 是 n 級無窮小.

32. 不定形　設二函數 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=a$ 是連續的, 并且 $f(a)=0$ $g(a)=0$, 那末函數

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

在 $x=a$ 之值 $\frac{0}{0}$ 完全不定, 然當 $x\to 0$ 時, 如 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 趨近於一有限而且確定的極限, 我們可把這極限值做爲函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 的值

設 $f(x)$, $g(x)$ 及其導數 $f'(x)$, $g'(x)$ 在 $x=a$ 鄰近俱爲 x 的連續函數. 取 a 鄰近的一値 $a+h$. 若 $g'(x)$ 在 a 與 $a+h$ 之間不等於零, 於是根據 Cauchy 氏公式 (§22) 便得

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}, \quad 0<\theta<1,$$

故
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}.$$

若 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ 爲一確定之値, 則

[1]
$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

若 $f'(a)$, $g'(a)$ 皆等於零, 但在 $x=a$ 鄰近 $f(x)$, $g(x)$ 具有第二次連續導數 $f''(x)$, $g''(x)$, 且 $g''(a)\neq 0$, 於是再用上述規則便得

[2]
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(a)}{g''(a)}.$$

就一般情形言之, 若

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(n-1)}(a)=0,$$

且 $\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 在 $x=a$ 是連續的, 則

[3]
$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}}$$

例.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

設 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, 那末

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

呈不定形 $\frac{\infty}{\infty}$, 然

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

於是右邊之極限呈不定形 $\frac{0}{0}$. 依上述規則便得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^2\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不等於零, 由上式得

[4] $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 將上述規則應用於函數

$$\frac{f(x)}{g(x)}+1=\frac{f(x)+g(x)}{g(x)},$$

於是 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}+1=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)+g'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}+1.$$

由此仍得 (4) 式如上.

推廣言之, 若 $f(x)$, $g(x)$ 及其前 $n-1$ 次導數同等於 ∞, 且

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

爲一確定之值, 則

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}}$$

例.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x+1}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1.$$

若 $a=\infty$, 上述規則仍可適用. 令 $y=\frac{1}{x}$, 當 $x\to\infty$ 時, $y\to 0$, 故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

當 $x\to a$ 時, 若 $f(x)\,g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)^{g(x)}$ 呈下列不定形時

$$0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty.$$

我們應先把 $f(x)\,g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)^{g(x)}$ 的寫法, 加以適當的變更, 使其在 $x=a$ 時函數呈不定形 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 然後用上述規則以求其極限.

例如
$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

又如
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0.$$

又如求 $\lim_{x\to+0} x^x$ 之值，先把 x^x 寫如 $e^{x\log x}$，因

$$\lim_{x\to+0} x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

故
$$\lim_{x\to+0} x^x=e^0=1.$$

33. 方程式論上之應用

1° 重根　設有 n 次方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,\quad a_0\neq 0$$

若 $x=a$ 爲其 m 重根，則有

$$f(x)=(x-a)^m\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ 中不復含有 $(x-a)$ 因子. 將上式兩邊各求其導數，便得

$$f'(x)=(x-a)^{m-1}\{m\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)\}.$$

$\varphi(x)$ 既不含有因子 $(x-a)$，那末 $m\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$ 也就不含有因子 $(x-a)$，所以 $x=a$ 爲方程式 $f'(x)=0$ 的 $m-1$ 重根.

由是得定理如下：

方程式 $f(x)=0$ 的 m 重根 $x=a$，必爲方程式 $f'(x)=0$ 的 $m-1$ 重根. 把上述定理，繼續應用於 $f''(x)$，$f'''(x)$，$\cdots$ 便得結果如下：

方程式 $f(x)=0$ 的 m 重根 $x=a$，必爲方程式 $f(x)=0$，$f'(x)=0$，$f''(x)$，$\cdots$，$f^{(m-1)}(x)=0$ 的公根，但 $x=a$ 不能爲方程式 $f^{(m)}(x)=0$ 之根.

2° 根的近似值

設方程式 $f(x)=0$ 之一實根 x_0 與一已知數 a 相差甚小，令

$$x_0=a+h,$$

則
$$f(a+h)=0,$$

由中值定理，得

$$f(a)+hf'(a+\theta h)=0,\qquad 0<\theta<1.$$

然 h 的絕對值甚小，故 h 之近似值可由

$$f(a)+hf'(a)=0$$

計算之，若 $f'(a)\neq 0$，則

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)},$$

由是得根 x_0 之第一近似值為

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

根 x_0 之第二近似值便為

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_2)}.$$

如此繼續運算，便可得更精確的近似值了． 這個方法叫做 Newton 氏* 的近似法． 此法的幾何意義如下：

設已知方程式 $f(x)=0$ 在 a, b 之間有一實根，并設導數 $f'(x)$, $f''(x)$ 在 a, b 之間保持常號，** 於是曲線 $y=f(x)$ 在 a, b 之間祇與 x 軸相交於一點 x_0 如圖 45． 令 $[a, f(a)]$ 為 A 點之座標，由 A 點作曲

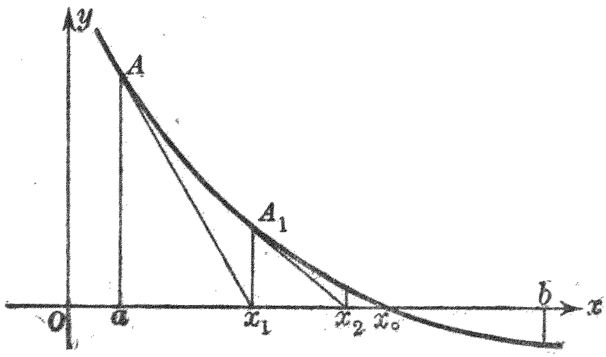


圖 45

* Isaac Newton 1642–1727 英國大科學家，與 Leibnitz 同為微積分的發明者．

** 見 §37．

線之切線，其方程式爲

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

這切線與 x 軸相交，其交點的橫標爲

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

令 $[x_1, f(x_1)]$ 爲 A_1 點之座標，由 A_1 點復作曲線之切線

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1).$$

這切線與 x 軸相交，其交點的橫標爲

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

如此繼續運算若干次，則 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 等值與 x_0 漸漸相近.

例
$$f(x)=x^3-2x-5=0.$$

因 $f(2)<0$, $f(2.1)>0$ 故方程式在 2 與 2.1 之間有一根. 又

$$f'(x)=3x^2-2, \qquad f''(x)=6x,$$

在間隔 $2<x<2.1$ 內保持常號.

故
$$x_1=2-\frac{f(2)}{f'(2)}=2.1,$$

$$x_2=2.1-\frac{f(2.1)}{f'(2.1)}=2.0946.$$

注意 Newton 氏近似法也可應用於非代數方程式.

例題 1.　求方程式 $x^5-10x^2+15x-6=0$ 之重根.

例題 2.　已知方程式 $x^3-3x+1=0$ 在 0.34 與 0.35 之間有一實根，試求其更精確之近似値.（答 $x=0.34729$）

34.　物理學上之應用

一質點 P 在 x 軸上運動，其座標 x 可爲時間 t 的函數

$$x=\varphi(t).$$

今以 x 與 $x+\Delta x$ 表示 P 點在 t 時與 $t+\Delta t$ 時的座標，則 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 就是 P 點在 t 與 $t+\Delta t$ 時間內的平均速度．當 $\Delta t\to 0$，其極限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 叫做 P 點在 t 時的速度．以 v 表此時的速度，則

$$v=\frac{dx}{dt}.$$

今以 v 與 $v+\Delta v$ 表示 P 點在 t 時與 $t+\Delta t$ 時的速度，極限值 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ 叫做 P 點在 t 時的加速度．以 a 表此時的加速度，則

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

今設一質點 P 在一平面曲線上運動，P 點在 t 時的位置，以其座標 (x, y) 表之，那末 x, y 顯然各自爲 t 的函數，

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t).$$

這兩個方程式亦即表示 P 點運動時的路線．當 P 點運動時，P 點在 x 軸與 y 軸上的二投影點 A 與 B 亦隨之而運動，這二點的速度及其加速度我們以 v_x, v_y, a_x, a_y 表示之．

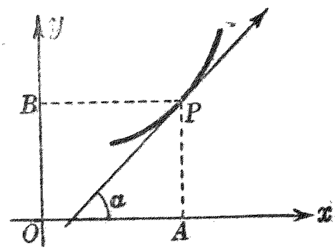


圖 46

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\varphi'(t),\qquad v_y=\frac{dy}{dt}=\psi'(t),$$

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi''(t),\quad a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\psi''(t).$$

v_x, v_y 也叫做 P 點的分速度，a_x, a_y 也叫做 P 點的分加速度．

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},\qquad a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2},$$

叫做 P 點在 t 時的合速度與合加速度．

P 在 t 時的運動方向，就是路線在 P 點的切線的方向，設此時切線與 x 軸所作之角爲 α，則

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

故

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}\\ \sin\alpha&=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}\end{aligned}\right\}$$

例 1.　設 P 點以等角速度 ω 在一圓周上運動，試求 P 點之速度及其加速度.

設 O 爲圓心，r 爲半徑.　當 $t=0$ 時，P 點在 x 軸上之一點 $(a, 0)$，在 t 時 P 點的位置由下二式表示之：

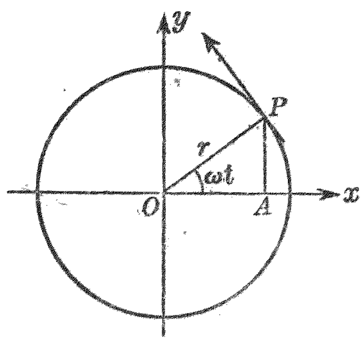


圖 47

[1]　$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t.$

依二軸方向的分速度爲

[2]　$$\frac{dx}{dt}=-r\omega\sin\omega t,$$

$$\frac{dy}{dt}=r\omega\cos\omega t,$$

故 P 點的合速度爲一常數

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=r\omega.$$

設其方向與 x 軸所作之角爲 α, 則

$$\tan\alpha=-\cot\omega t,$$

即
$$\alpha=\omega t+\frac{\pi}{2}.$$

故其運動方向與半徑 OP 相正垂. 又

[3] $$\frac{d^2x}{dt^2}=-r\omega^2\cos\omega t,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-r\omega^2\sin\omega t.$$

故 P 點的合加速度爲

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=r\omega^2.$$

設其方向 (合加速度的方向) 與 x 軸所作之角爲 β, 則

$$\tan\beta=\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\dfrac{d^2y}{dt^2}}=\tan\omega t.$$

因 (3) 式之符號與 (1) 式之符號各各相反, 故

$$\beta=\omega t+\pi.$$

又因 $v=r\omega$, 故 $r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}$. 由是得結果如下:

一點在圓周上作等速度運動, 設圓周之半徑爲 r, 速度爲 v, 則此點時時受着向圓心的加速度爲 $\dfrac{v^2}{r}$.

例 2. 若將空氣的阻力略去不計, 拋物體的運動方程式爲 (在與地平面垂直的平面內)

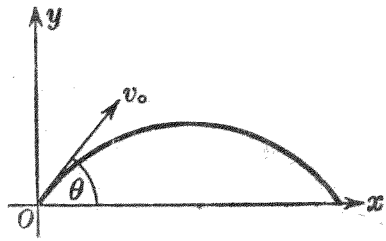
[1] $$x=v_0t\cos\theta,$$

[2] $$y=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2.$$

v_0 爲物體的初速度，θ 爲其射出角（即物體拋出時的方向與地平線 x 軸所作之角）．其分速度爲

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{dt}=v_0\sin\theta-gt.$$



圖．48

當物體達於最高點時，$\frac{dy}{dt}=0$，即 $v_0\sin\theta-gt=0$.

此時
$$t=\frac{v_0\sin\theta}{g}.$$

代入 (2) 式得最高之縱標爲

$$H=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}.$$

當物體落地時 $y=0$，即 $v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2=0$，於是得 $t=0$（出發時）及 $t=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$（落地時）之二解，把後一解代入 (1) 式得物體落地處之橫標（稱爲射程）爲

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}.$$

若初速度 v_0 爲一常數，射出角 θ 爲一變數，欲射程達其最大值，必須

$$\frac{dR}{d\theta}=\frac{2v_0^2\cos 2\theta}{g}=0,$$

由是知
$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

習 題 4

1. 求下列函數之第二次導數：

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$.　　(2) $\tan x+\sec x$.

(3) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.　　(4) $x\log x$.

(5) $\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.　　(6) $\arctan\dfrac{x}{a}$.

2. 求 $(x^2+a^2)\arctan\dfrac{x}{a}$ 之第三次導數.

3. 求下列函數之第四次導數：

(1) $x^3\log x$.　　(2) $e^{ax}\sin bx$.

4. $y=a\cos\log x+b\sin\log x$，證明

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

5. $y=(x+\sqrt{x^2-1})^m$，證明

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-m^2y=0.$$

6. $y=e^{ax}\sin bx$，證明

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)y=0.$$

7. $y=\sin(m\arcsin x)$，證明

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0.$$

8. 求下列函數之第 n 次導數：

(1) $x(a+bx)^n$.　　(2) $(1-x^2)^n$.

(3) $\dfrac{1}{a^2+b^2x^2}$.　　(4) $\sin^2 x$.

(5) $\sin x\cos^3 x$.　　(6) x^2a^x.

(7) $\dfrac{1+x}{1-x}$.　　(8) $\dfrac{x}{a^2-b^2x^2}$.

(9) $(ax+b)e^x$.　　(10) $x^2\log x$.

(11) $\log\dfrac{a+bx}{a-bx}$.　　(12) $(1-\cos x)\cos x$.

9. $y=x^nf(x)$，證明

$$y^{(n)}=x^nf^{(n)}(x)+n^2x^{n-1}f^{(n-1)}(x)+\frac{\{n(n-1)\}^2}{2!}f^{(n-2)}(x)+\cdots+n!f(x).$$

10. $y=(a+bx^2)^m$，證明

$$(a+bx^2)y^{(n+2)}=b\{(2m-2n-2)xy^{(n+1)}+(n+1)(2m-n)y^{(n)}\}.$$

11. $f(x)=(\arcsin x)^2$，證明

$$f^{(n+1)}(0)-(n-1)^2f^{(n-1)}(0)=0.$$

12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$，證明

$$f^{(n)}(0)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}.$$

13. $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$，$y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

14. $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

15. 求下列極限之值：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{3x}-x}{1-\cos 2x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\cos 2x-1}$. (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan x$. (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\log x}{x\log x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$. (8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$. (10) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\log 2x)$.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\log(1+x)\right\}$. (12) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right\}$.

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. (14) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. (16) $\lim\limits_{x\to+0}(\cot x)^{\sin x}$.

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$. (18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{\frac{x}{n}}}$.

(19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{\sqrt[n]{x}}$. (20) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[n]{x}\log x$.

16. 試證方程式 $x^4+px^2+q=0$ 不能有三重根.

17. 試證方程式

$$x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n!=0$$

不能有等根.

18. 求一七次多項式 $f(x)$, 使 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 除盡, $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 除盡. 答 $f(x)=\dfrac{1}{16}(5x^7-21x^5+35x^3-35x)$.

19. 已知方程式 $x^3-2x-7=0$ 在 2 與 3 之間有一根，試求此根之值至小數第三位.　答　2.258.

20. 求方程式 $x^3-5x-3=0$ 之正根.　答　2.4908.

21. 令 $x=\cos t$，試變下方程式之形狀

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1-x^2}=0.$$

22. 令 $x=e^t$，試變下方程式之形狀

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

23. 令 $x=\frac{1}{t}$，試變下方程式之形狀

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\frac{a^2y}{x^2}=0.$$

24. 令 $y=\tan z$，試變下方程式之形狀

$$\frac{d^2y}{dx^2}=1+\frac{2(1+y)}{1+y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

第五章

平面曲線

35. 切線，法線 設 $y=f(x)$ 爲曲線 C 的方程式（在正交座標制），$P(x, y)$ 爲 C 上的一點，則曲線在 P 點的切線，其斜度爲

$$\tan\alpha=f'(x).$$

令 X, Y 爲切線上點的位標，於是切線方程式爲

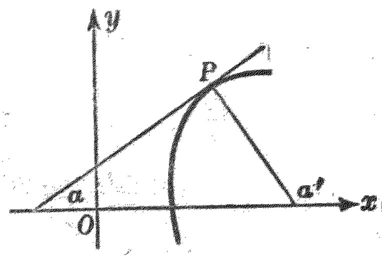


圖 49

$$\boxed{Y-y=f'(x)(X-x)}$$

或 $$\boxed{Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)}$$

定義. 經過切點 P 而與切線垂直之直線叫做曲線在 P 點的法線. 依定義，法線的斜度爲

$$\tan\alpha'=\tan(\alpha+90^\circ)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{1}{f'(x)}.$$

故法線的方程式爲

$$\boxed{(X-x)+f'(x)(Y-y)=0}$$

或 $$\boxed{(X-x)+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0}$$

若曲線的方程式爲 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, 則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

故此時切線方程式爲

$$\boxed{\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}}$$

法線方程式爲

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)=0}$$

設曲線 C 在 P 點的切線及法線與 x 軸依次相交於 T 及 N, 則 PT 叫做切線長, PN 叫做法線長, TA 叫做次切線長, AN 叫做次法線長, 且

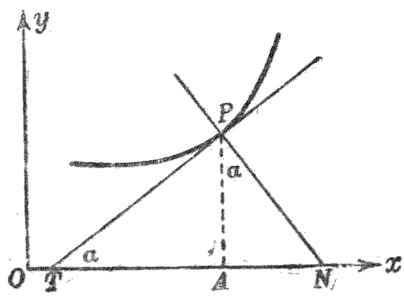


圖 50

$$TA=|y\cot\alpha|=\left|\frac{y}{y'}\right|,$$

$$AN=|y\tan\alpha|=|yy'|,$$

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},$$

$$PN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

例. 設抛物線的方程式爲

$$y^2=2px$$

或 $$y=\pm\sqrt{2px}.$$

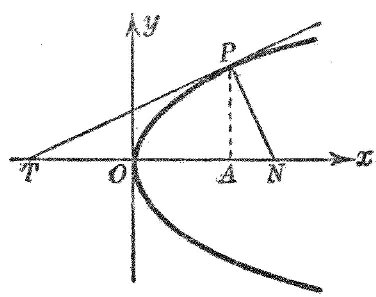


圖 51

若 P 點的縱標是正的, 則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}=\frac{p}{\sqrt{2px}}=\frac{p}{y}.$$

$$TA=\frac{y^2}{p}=2x, \qquad AN=y\cdot\frac{p}{y}=p.$$

36. 弧微分 在曲線 C 上 $y=f(x)$, 自 A 點至 P 點的弧長* 我們以 s 表之. 令 A 爲這弧的起點, 那末弧長 s 當然視 P 點在 C 上的地位而定. 換言之, 這 s 是 x (P 的橫標) 的函數, $s=g(x)$. 現在我們來求這弧長 s 的微分 ds.

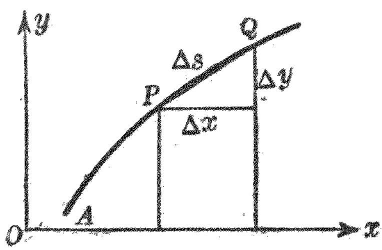


圖 52

在 C 上另取一點 Q, 令 $x+\Delta x$ 爲 Q 點的橫標, $s+\Delta s$ 爲 AQ 的弧長, 設弧長 s 隨 x 增而增, 則 $\frac{\Delta s}{\Delta x}>0$, 當 Q 沿 C 趨近於 P, 我們假定弧長 Δs 與弦長 PQ 的比值趨近於 1.** 即

$$\lim\left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)=1.$$

於是
$$\frac{ds}{dx}=\lim\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim\left(\frac{\Delta s}{PQ}\cdot\frac{PQ}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim\left(\frac{PQ}{\Delta x}\right)=\lim\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

---

* 定義見 §78.

** 證明見 §78.

故曲線 C 的弧微分爲

$$\boxed{ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\pm\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

設曲線在 P 點的切線 PT* 與 x 軸所作之角爲 α, 與 y 軸所作之角爲 β, 則

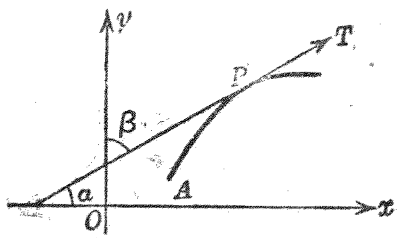


圖 53

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}.$$

故 $$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

或 $$\cos\alpha=\frac{dx}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

然 $ds=\pm\sqrt{dx^2+dy^2}$, $\sin\alpha=\cos\beta$, 故**

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{dx}{ds}}\qquad\boxed{\cos\beta=\frac{dy}{ds}}$$

是卽切線 PT 的方向餘弦.

例. 令一圓在一直線上滾轉, 這圓周上任一點的軌跡叫做擺線. 設 a 爲圓的半徑, x 軸作爲定直線, 圓周上 A 點的座標爲 (x, y), 其初

* 取 PT 的方向與弧長增加的方向相同.

** 因 ds 與 dx 同號.

A 點與原點 O 相合. 令 $\angle ACB=t$ (圖 54), 那末 A 點的座標

$$x=OD,\quad y=AD$$

為

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$$

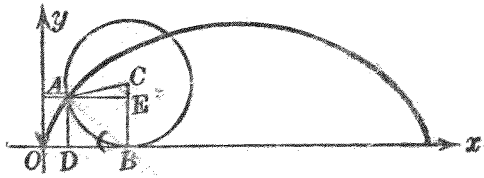


圖 54

這就是擺線的方程式. 又

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\qquad \frac{dy}{dt}=a\sin t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\cot\frac{t}{2},\qquad \frac{ds}{dx}=\frac{1}{\sin\frac{t}{2}},$$

故 法線長 $=2a\sin\frac{t}{2}$, 次法線長 $=a\sin t$.

但 $DB=AE=a\sin t$ 所以擺線在 A 點的法線, 必經過圓與定直線相切之點 (卽 B 點).

37. 曲線之凹凸 設曲線 C 在 P 點的切線不與 y 軸平行, 若曲線在 P 點的近傍位於切線之上, 那末我們說曲線在 P 的近傍凹

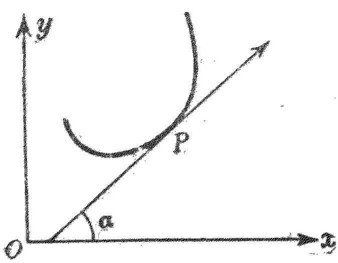


圖 55

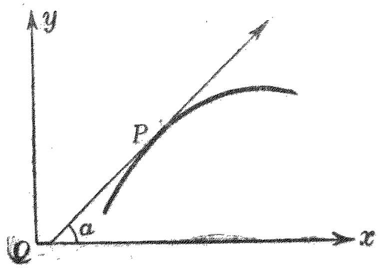


圖 56

向上 (凸向下); 若曲線在 P 的近傍位於切線之下, 那末我們說曲線在 P 的近傍凹向下 (凸向上).

若曲線在 P 的近傍凹向上, 那末導數 $f'(x)=\tan\alpha$ 在 P 處是 x 的增函數, 故 $f''(x)$ 爲正, 反之 $f''(x)$ 爲負.

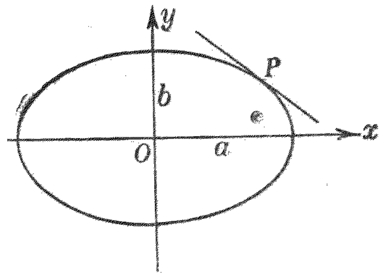


圖 57

例.　設橢圓的方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

或　$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

設橢圓上一點 P 的縱座標爲正, 這時

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{ab}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}.$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 在 P 點是負, 故橢圓在 P 的近傍凹向下.

以上所述是假設曲線 C 在 P 點的切線不與 y 軸平行, 如在這種情形, 我們可視 x 爲 y 的函數, 然後考察 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ 之號以決定曲線之凹凸.

反曲點　今仍設曲線 C 在 P 點有一切線不與 y 軸平行. 若曲線在 P 點的左邊凹向上而右邊凹向下, 或者左邊凹向下而右邊凹向上, 那末 P 點叫做曲線的反曲點.

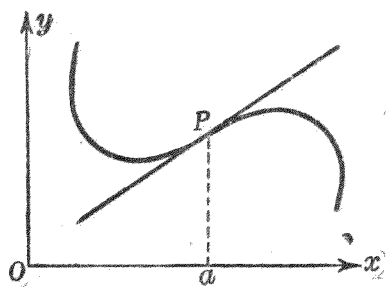


圖 58

由定義卽可得定理如下:

令 x 之值漸增, 當其值經過 a 時,

若 $f''(x)$ 之值由正而零而負，或由負而零而正，那末曲線 C 在 $x=a$，$y=f(x)$ 爲一反曲點，此時必有

$$f''(a)=0.$$

例如函數 $y=\sin x$ 的二級導數是 $y''=-\sin x$，所以曲線 $y=\sin x$ 與 x 軸相交之點都是反曲點.

38. 切觸圓 設 P, P_1, P_2 爲曲線 C 上的三點，經過這三點可作一圓，令 P_1, P_2 相繼沿 C 線趨近於 P，於是圓的位置也隨之變動而趨近於一極限的位置，這個極限的位置，叫做曲線在 P 點的切觸圓；換言之，所謂切觸圓實乃經過曲線上三隣接點的一個圓罷了. 今設 $y=f(x)$ 爲曲線 C 的方程式，$f'(x)$, $f''(x)$ 均爲 x 的連續函數，(x, y)，(x_1, y_1) (x_2, y_2) 依次爲 P，P_1, P_2 的座標，且設

$$x<x_1<x_2.$$

令 (α, β) 爲經過 P, P_1, P_2 三點的圓的圓心，R 爲其半徑，又令

$$F(x)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2,$$

其中 y 是 x 的函數 $f(x)$. 今曲線上的三點 P, P_1, P_2 同時又在圓周上，故

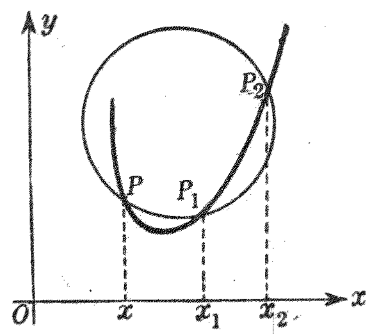


圖 59

$$F(x)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0,$$
$$F(x_1)=(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2-R^2=0,$$
$$F(x_2)=(x_2-\alpha)^2+(y_2-\beta)^2-R^2=0.$$

依 Rolle 氏定理，可知 $F'(x)=0$ 必有一根 ξ 介於 x 與 x_1 之間，其他一根 ξ' 介於 x_1 與 x_2 之間，依同理 $F''(x)=0$ 必有一根 ξ_1，介於 ξ 與 ξ' 之間，即

$$F(x)=0, \qquad F'(\xi)=0, \qquad F''(\xi_1)=0.$$

當 x_1, x_2 趨近於 x 時，ξ, ξ_1 也跟着趨近於 x，所以切觸圓的圓心 (α, β) 及其半徑 R，當由下列三式確定之，

$$F(x)=0, \qquad F'(x)=0, \qquad F''(x)=0,$$

即
$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2, \\ (x-\alpha)+(y-\beta)\,y'=0, \\ 1+y'^2+(y-\beta)\,y''=0.\end{cases}$$

若 $y''\neq 0$，由後二式便得

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha&=x-\frac{(1+y'^2)\,y'}{y''}\\ \beta&=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{aligned}}$$

代入第一式，得

$$\boxed{R=\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|}$$

39. 曲率 設 P, Q 爲曲線上相隣的二點，令曲線在 P, Q 二點的切線與 x 軸所作之角爲 φ, $\varphi+\Delta\varphi$，P 與 Q 間之弧長爲 Δs. 當一點由 P 沿曲線至 Q，切線所改變的方向爲 $\Delta\varphi$，此點所經過的途程爲 Δs，於是

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

卽表示一單位弧長內切線所改變的方向，這個數值叫做 PQ

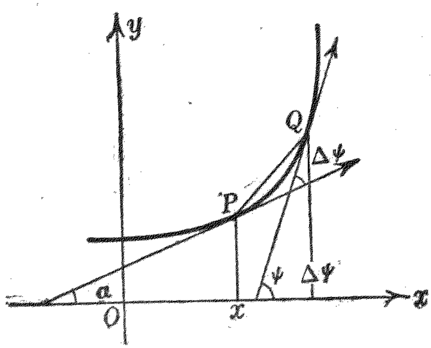


圖. 60

弧的平均曲率. 當 Q 沿曲線趨近於 P 時,

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{ds}$$

的絕對值叫做曲線在 P 點的曲率, 普通用記號 K 表示之,

$$\boxed{K=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|}$$

例如直線的曲率顯然處處等於零; 又如以 r 為半徑的圓, 在圓周上任何一點, 其曲率等於

$$\lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim\frac{\Delta\varphi}{r\,\Delta\varphi}=\frac{1}{r}.$$

所以圓周在任何一點的曲率處處相同, 且其值等於半徑的倒數.

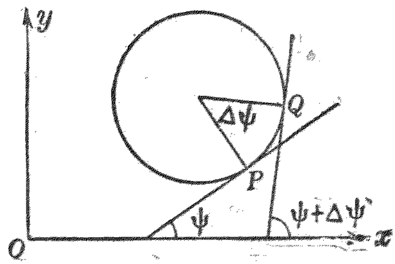


圖 61

設 $y=f(x)$ 為曲線的方程式, 則

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\dfrac{d\varphi}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}.$$

然 $\tan\varphi=\dfrac{dy}{dx}$, $\varphi=\operatorname{arc}\tan\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, 故

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}.$$

又
$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

故曲線 $y=f(x)$ 在 $P(x, y)$ 點的曲率等於

$$\boxed{K=\left|\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right|}$$

或

$$\boxed{K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|}$$

由此言之，曲線在 P 點的切觸圓，其曲率適與曲線在 P 點的曲率相等，因此之故，切觸圓也叫做曲率圓，切觸圓的圓心也叫做曲率中心，切觸圓的半徑 R 也叫做曲率半徑，曲率半徑 R 與曲率 K 的關係爲

$$\boxed{K=\frac{1}{R}}$$

若 P 點是曲線的反曲點，則 $y''=0$，於是 $R=\infty$，這時曲線在 P 點的曲率圓就變成在 P 點的切線，所以在反曲點的切線，可以說是經過曲線的三隣接點.

若曲線的方程式爲

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t).$$

由 §29 可知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\,\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\,\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}.$$

故
$$\boxed{K=\left|\frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}}{\left\{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right|}$$

或
$$\boxed{K=\left|\frac{dx\,d^2y-d^2x\,dy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right|}$$

例. 求纜線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

在 $P(0,a)$ 點之曲率半徑.

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$y''=\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

在 P 點 $\quad y'=0,\ y''=\frac{1}{a}.$

若 $\quad a>0,\quad R=a.$

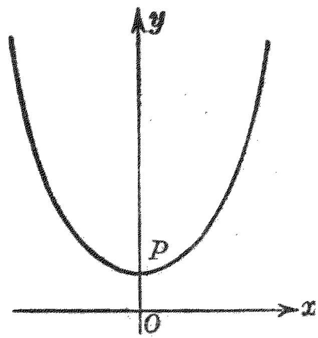


圖 62

40. 縮閉線及伸開線 曲線 C 的曲率中心的軌跡叫做曲線 C 的縮閉線，曲線 C 對於其縮閉線而言叫做伸開線.

若曲線 C 的方程式爲 $y=f(x)$，那末縮閉線的方程式爲 (§38)

$$\begin{cases} X=x-\dfrac{(1+y'^2)\,y'}{y''} \\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

其中 y 是 x 的函數 $f(x)$，故 X, Y 可視爲參變數 x 的函數.

定理 1. 設曲線 C 在 P 點的曲率中心爲 Q, 那末曲線 C 在 P 點的法線是其縮閉線在 Q 點的切線. Q 點的座標 (X, Y) 既爲 x 的函數, 故

$$\frac{dX}{dx}=1-\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)y'-\frac{1+y'^2}{y''}y''$$

$$=-\left\{y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\right\}y',$$

$$\frac{dY}{dx}=y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right).$$

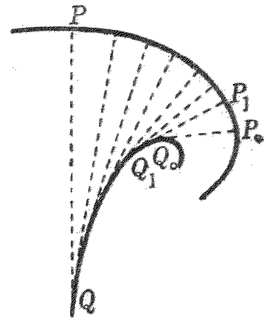


圖 63

由是得 $$\frac{dY}{dX}=-\frac{1}{y'}.$$

$$\left[\text{設 } y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\neq 0\right]$$

定理 2. 設 $d\sigma$ 爲縮閉線的弧微分, dR 爲相應於 $d\sigma$ 曲率半徑的微分, 則 $d\sigma=\pm dR$.

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2=\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2=(1+y'^2)\left(\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}\right)^2$$

上式右邊等於 $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$, 故

$$(d\sigma)^2=(dR)^2,$$

即 $$d\sigma=\pm dR.$$

若 σ 隨 R 增大而增大, 則 $d\sigma=dR$, 故 (§20)

$$\sigma=R+k.$$

k 爲一常數, 設曲線 C 在 P_0, P_1 二點的曲率中心及其曲率半徑順次爲 Q_0, Q_1, R_0, R_1, 并設縮閉線自 A 點至 Q_0 點的弧長爲 σ_0, 自 A 點至 Q_1 點的弧長爲 σ_1, 則

$$\sigma_0 = R_0 + k,$$

$$\sigma_1 = R_1 + k.$$

故 $$\sigma_1 - \sigma_0 = R_1 - R_0,$$

卽 $$\text{弧 } Q_0Q_1 = P_1Q_1 - P_0Q_0.$$

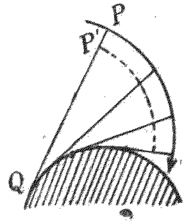


圖 64

設縮閉線的切線 QP 是一支可以彎曲的線，令 QP 的一端 Q 不動，然後把這線緊貼縮閉線而圍繞之，那末 P 點所畫的曲線就是原曲線 C (卽伸開線). 直線 QP 上的另一點 P' 自然也畫另一支伸開線，所以一支曲線可以有無窮支伸開線.

例 1. 求拋物線 $y^2 = 2px$ 的縮閉線.

$$X = 3x + p,$$

$$Y = -\frac{2xy}{p},$$

由此二式與拋物線方程式消去 x, y, 得

$$Y^2 = \frac{8}{27p}(X-p)^3.$$

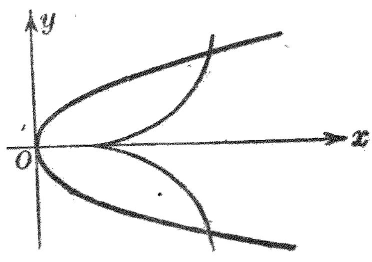


圖 65

例 2. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的縮閉線.

$$X = \frac{c^2x^3}{a^4}, \qquad Y = -\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

$$(c^2 = a^2 - b^2)$$

由此二式與橢圓方程式消去 x, y 便得

$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

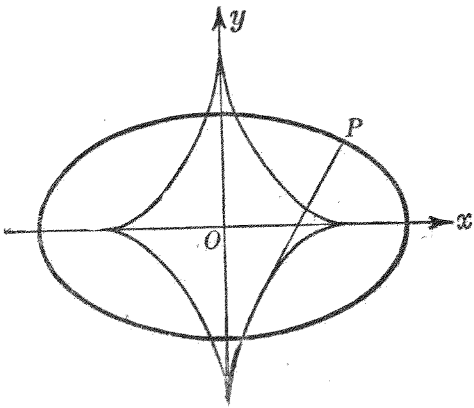


圖 66

41. 極座標 以原點 O 爲極, Ox 爲極軸, 則 P 點的位置可由 $r=OP$, $\theta=\angle xOP$ 二數決定之, (θ, r) 叫做 P 點的極座標. 設 P 點的直角座標爲 (x, y), 則

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

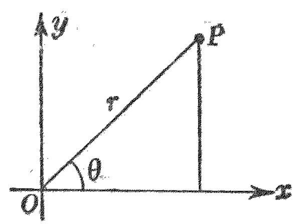


圖 67

由是可得

$$\begin{cases} \theta=\arctan\dfrac{y}{x}, \\ r=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

設曲線在極座標的方程式爲 $r=f(\theta)$, 那末

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta,$$

可視爲這曲線在直角座標中的方程式, θ 就是參變數, 故

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta,$$
$$dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta;$$

由是得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta}=\frac{\tan\theta+r\dfrac{d\theta}{dr}}{1-r\tan\theta\dfrac{d\theta}{dr}}.$$

令 OP 與曲線在 P 點的切線所作之角爲 V，則

$$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha=\tan(\theta+V)$$

$$=\frac{\tan\theta+\tan V}{1-\tan\theta\tan V}.$$

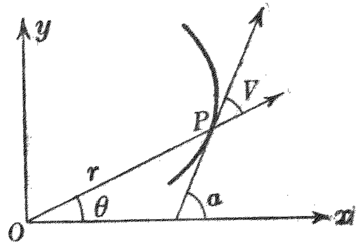


圖 68

與前式相比較，便得

$$\boxed{\tan V=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}}$$

令 $\dfrac{dr}{d\theta}$ 以 r' 記之，則

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{r+r'\tan\theta}{r'-r\tan\theta},$$

$$\frac{dy'}{dx}=y''=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{r+r'\tan\theta}{r'-r\tan\theta}\right)\frac{d\theta}{dx}.$$

然
$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{r'\cos\theta-r\sin\theta},$$

令 $\dfrac{d^2r}{d\theta^2}$ 以 r'' 記之，則

$$y''=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^3}.$$

故曲線 $r=f(\theta)$ 在 P 點的曲率半徑爲

$$\boxed{R=\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|=\left|\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}\right|}$$

又弧微分 ds 與 $d\theta$, dr, r 的關係如下：

$$\boxed{ds^2=dx^2+dy^2=dr^2+r^2\,d\theta^2}$$

習　題　5

1. 求曲線 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ 在 $(a,\,a)$ 點的切線與法線方程式.

2. 求曲線 $y=\dfrac{8a^3}{4a^2+x^2}$ 在 $x=2a$ 的切線與法線方程式.

3. 求曲線 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 在 $(x,\,y)$ 點的切線與法線方程式.

4. 求曲線 $y=\dfrac{a}{2}\,(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 在 $(x,\,y)$ 點的法線長及次法線長.

5. 設曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在任一點的切線與二軸相交於 A, B 二點，試證 AB 之長等於 a.

6. 試求下列曲線在 $(x,\,y)$ 點的 (1) 次切線長，(2) 次法線長，(3) 切線長，(4) 法線長.

$$\begin{cases} x=a\,(\cos t+t\sin t),\\ y=a\,(\sin t-t\cos t).\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a\,(2\cos t-\cos 2t),\\ y=a\,(2\sin t-\sin 2t).\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3},\\[2ex] y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}.\end{cases}$$

7. 證明曲線 $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$ 有三反曲點在一直線上.

8. 試求下列曲線在反曲點的切線:

(1) $y=e^{-x^2}$.　　(2) $y=\dfrac{a^3}{x^2+3a^2}$.

(3) $y=x-2\cos x$.　　(4) $y=\log(1+x^2)$.

9. 求下列曲線在 (x, y) 點的曲率半徑:

(1) $y=-\log\cos x$.　　(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

(3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.　　(4) $r=a\theta$.

(5) $r=a(1-\cos\theta)$.　　(6) $r=2a\cos\theta-a$.

(7) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$

10. 求下列曲線的縮閉線:

(1) $y^3=a^2x$.　　(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(3) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$

11. 在正形雙曲線 $2xy=a^2$, 試證

$$\alpha+\beta=\frac{(y+x)^3}{a^2},\qquad \alpha-\beta=\frac{(y-x)^3}{a^2}.$$

(α, β) 代表曲率中心的座標.

12. 試證擺線

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t)$$

的縮閉線仍爲一擺線.

13. 設曲線 $y=f(x)$ 經過原點, 並與 x 軸在原點相切, 試證曲線在原點的曲率半徑 R 等於

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}.$$

由此求曲線 $a^2y^2=x^3(a-x)$ 在 $(a, 0)$ 點的曲率半徑.

14. 試證明曲線 $y=ke^{ax}$ 在 (x, y) 點的次切線長等於常數，次法線長等於 ay^2.

15. 證明曲線

$$y=e^{-ax}\sin bx, \qquad y=e^{-ax}$$

在 $x=\frac{1}{b}\left(2n\pi+\frac{1}{2}\pi\right)$ 相切，其中 n 爲整數.

16. 求下列曲線的極大點，極小點及反曲點:

(1) $y=xe^{-x}$.　　(2) $y=xe^{-x^2}$.

(3) $y=4\sin x-\sin 2x$.

17. 由下列二式 (§ 36)

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds}=\sin\alpha,$$

證明

$$\frac{1}{R}=-\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}}.$$

又

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

第六章

無窮級數

42. 無窮級數　把數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 依次相加

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

就叫做無窮級數，或簡稱級數，我們常以記號 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 表示之，或單以 Σa_n 表示之．令 S_n 爲級數前 n 項之和，

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{n=1}^{n} a_n,$$

若 $n \to \infty$, S_n 趨近於一確定的有限數 S, 那末級數叫做收斂級數．否則，級數叫做發散級數．在收斂級數，S_n 的極限值 S 叫做級數之和．例如等比級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}=1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots,$$

其前 n 項之和爲

$$S_n=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}.$$

故
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n,$$

當 $-1<r<1$ 時，$\lim r^n=0$，故級數向極限值 $\dfrac{1}{1-r}$ 收斂；當 $r \leqq -1$ 或 $r \geqq 1$ 時，級數是發散的．

又如級數

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots,$$

其前 n 項之和

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

故級數是發散的.

43. 關於級數的基本定理 由極限與級數的定義, 便得下列諸定理:

1° 由一收斂級數加上或除去有限個數的項, 則所得之級數, 仍爲收斂的.

2° 由一發散級數加上或除去有限個數的項, 則所得之級數, 仍爲發散的.

3° 級數 Σa_n 中的各項, 以常數 $k(\neq 0)$ 乘之, 若 Σa_n 是收斂的, 且其和爲 S, 則 Σka_n 也是收斂的, 且其和爲 kS; 若 Σa_n 是發散的, 則 Σka_n 也是發散的.

4° 設 Σa_n, Σb_n 爲二收斂級數, 其和依次爲 S, T; 那末 $\Sigma(a_n+b_n)$ 也是收斂的, 其和等於 $S+T$.

5° 設 Σa_n 爲一收斂級數, 若施用締合定律於級數之各項, 但不變更級數各項之原有次序, 如是所得之新級數也是收斂的, 且其和不變. 例如

$$(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)+a_6+(a_7+a_8)+\cdots$$

仍是收斂級數, 且其和仍等於級數 Σa_n 之和.

注意: 這定理的逆定理並不眞確, 例如級數

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots$$

是收斂的, 但級數

$$1-1+1-1+\cdots$$

是發散的.

6° 若級數 Σa_n 是收斂的，則

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

a_n 可寫如

$$a_n=S_n-S_{n-1}.$$

設級數之和爲 S，則

$$\lim S_n=\lim S_{n-1}=S,$$

故 $$\lim a_n=\lim S_n-\lim S_{n-1}=0.$$

注意： $\lim a_n=0$ 爲級數 Σa_n 收斂的必要條件，而非充足條件. 例如級數

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots,$$

雖 $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，但是一發散級數.

44. 正項級數 級數的各項，都是正數者，叫做正項級數. 在這種級數，其前 n 項之和 S_n，跟着 n 增加而增加，所以欲一正項級數爲一收斂級數，祇要 S_n 常小於一有限數便是了 (§4).

定理 1. 設 Σa_n, Σb_n 爲二正項級數，

1° 若 Σa_n 是收斂的，且 $a_n\geqq b_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，則級數 Σb_n 也是收斂的.

2° 若 Σa_n 是發散的，且 $a_n\leqq b_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，則級數 Σb_n 也是發散的.

證： 令 S_n, T_n 依次爲級數 Σa_n, Σb_n 前 n 項之和，1° 因 Σa_n 是收斂的，令 S 爲其和，則

$$T_n\leqq S_n<S.$$

然 T_n 跟着 n 增大而增大，故 $n\to\infty$ 時，T_n 應向一極限 $(\leqq S)$ 收斂 (§4). 2° 因 $T_n\geqq S_n$，故

$$\lim T_n\geqq\lim S_n=\infty.$$

例. 級數 $\Sigma\frac{1}{n^p}$.

(1) 若 $p\leqq 1$, 則

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}\geqq 1+\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

....

$$\frac{1}{(2^m+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1})^p}>\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{2}.$$

由是得

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1})^p}>1+\frac{m+1}{2},$$

故此時級數是發散的.

$p=1$ 時, $\Sigma\frac{1}{n}$ 叫做調和級數.

(2) 若 $p>1$, 則

$$\frac{1}{1^p}=1,$$

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{4}{4^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2,$$

....

$$\frac{1}{(2^m)^p}+\frac{1}{(2^m+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^p}<\frac{2^m}{(2^m)^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m,$$

故 $$1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^p}<1+\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m.$$

然 $$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m+\cdots,$$

為一公比小於 1 的等比級數,所以這級數是收斂的,因此級數 $\Sigma\frac{1}{n^p}$ 也是收斂的.

定理 2. 設 Σa_n, Σb_n 為二正項級數,若 $n\to\infty$ 時,$\frac{b_n}{a_n}$ 趨近於一有限數 $l\ (l\neq 0)$,那末這二級數或同是收斂的或同是發散的.

證: 設 ϵ 為任意選定之正數,因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l,$$

故必能求得一正數 N,當 $n\geqq N$ 時,使恆有

$$l-\epsilon<\frac{b_n}{a_n}<l+\epsilon.$$

即 $$b_n<a_n(l+\epsilon),$$
$$b_n>a_n(l-\epsilon).$$

由前一式,可知 Σa_n 為收斂級數時,Σb_n 亦為收斂級數. 由後一式,可知 Σa_n 為發散級數時,Σb_n 亦為發散級數.

例. 級數 $\Sigma\sin\frac{1}{n}$ 是發散的.

由這級數的第 n 項,$\sin\frac{1}{n}$,與級數 $\Sigma\frac{1}{n}$ 的第 n 項,$\frac{1}{n}$,便得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1.$$

定理 3. (D'Alembert)* 在正項級數 Σa_n, 若各項與其前一項之比恆小於一常數 r, 且此常數 r 為小於 1 者, 那末級數是收斂的; 反之, 若各項與其前一項之比恆等於 1 或大於 1, 那末級數是發散的.

證: 若
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r<1, \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

則
$$\begin{aligned} &a_1=a_1,\\ &a_2<ra_1,\\ &a_3<ra_2<r^2a_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n+1}<ra_n<r^na_1, \end{aligned}$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<a_1(1+r+r^2+\cdots)=\frac{a_1}{1-r}.$$

若
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqq 1, \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

則
$$\begin{aligned} &a_1=a_1,\\ &a_2\geqq a_1,\\ &a_3\geqq a_2\geqq a_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ &a_{n+1}\geqq a_n\geqq a_1, \end{aligned}$$

故級數 Σa_n 是發散的.

定理 4. 設 Σa_n 為一正項級數, 當 $n\to\infty$ 時, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 向一極限 λ 收斂,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda.$$

---

* D'Alembert, 1717–1783.

若 $\lambda<1$, 則 Σa_n 是收斂的; 若 $\lambda>1$, 則 Σa_n 是發散的; 若 $\lambda=1$, 級數 Σa_n 的性質不能即行決定.

$\lambda<1$. 取一數 r 使 $\lambda<r<1$, 因 $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda<r$, 故必有一正數如 N, 當 $n>N$ 時, 恆能使

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r<1,$$

故級數 Σa_n 是收斂的.

$\lambda>1$. 此時 $\lim a_n=\infty$, 故級數是發散的.

注意: 雖 $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, 如 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 恆大於 1, 則級數是發散的.

例 1. $$\Sigma a_n=\Sigma \frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots,$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim \frac{n!}{(n+1)!}=\lim \frac{1!}{n+1}=0,$$

故級數是收斂的.

例 2. $$\Sigma a_n=\Sigma \frac{2^n}{n}=\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\cdots,$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim \frac{2n}{n+1}=2,$$

故級數是發散的.

例題. 試證下列級數是收斂的:

$$\Sigma \frac{n}{3^n}, \qquad \Sigma \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{4\cdot 7\cdot 10\cdot\cdots\cdot(3n+1)}, \qquad \Sigma \frac{n^3}{n!}.$$

定理 5. (Dirichlet)* 設 Σa_n 爲一正項收斂級數, 如將其中各項

* Lejeune Dirichlet, 1805–1859.

前後之位置任意變更，則其結果 $\Sigma a'_n$ 依然爲一收斂級數，且其和等於原級數之和.

證：
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n,$$
$$S'_m=a'_1+a'_2+a'_3+\cdots+a'_m,$$
級數 $\Sigma a'_n$ 既由變更 Σa_n 之各項前後之位置而得，對於任何一整數 m，我們總可求得另一整數 n，使 S_n 中含有 S'_m 的各項，於是
$$S'_m\leqq S_n.$$
令 Σa_n 之和爲 S，則
$$S'_m<S,$$
故 $\Sigma a'_n$ 爲一收斂級數．今令 S' 爲其和，則有
$$S'\leqq S,$$
既知 $\Sigma a'_n$ 爲一收斂級數，同樣可證明
$$S\leqq S',$$
故
$$S=S'.$$

45. 交錯級數　設 $a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ 爲正數，級數
$$\sum(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$$
叫做交錯級數.

定理．(Leibniz)　若數列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\ \cdots$ 單調的減小，且 $\lim a_n=0$，則交錯級數 $\Sigma(-1)^{n-1}a_n$ 是一收斂級數.

證：令
$$S_n=a_1-a_2+a_3-\cdots+(-1)^{n-1}a_n,$$
則
$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n}),$$
右邊的各項皆爲正數，故 S_{2n} 跟着 n 增大而增大．然另一方面
$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\leqq a_1,$$
故 $n\to\infty$ 時，S_{2n} 應向一極限 S 收斂 (§4)．又因
$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1},$$
$$\lim a_{2n+1}=0,$$

故 $n\to\infty$ 時, S_{2n+1} 亦應向同一極限 S 收斂.

例 1. $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$.

數列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 是單調的減小, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 故這交錯級數是收斂的.

例 2. 交錯級數

$$2-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\cdots+\frac{2}{2m-1}-\frac{1}{2m}+\frac{2}{2m+1}-\cdots$$

$$=\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{5}{3\cdot 4}+\frac{7}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{2m+1}{2m(2m-1)}+\cdots$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2m}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\cdots\right)\to\infty$$

是發散的. 雖 $\lim a_n=0$, 但數列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \cdots, \frac{2}{2m-1}, \frac{1}{2m}, \frac{2}{2m+1}, \cdots$$

并不單調的減小.

46. 絕對收斂級數 取級數 Σa_n 各項之絕對值而組成一新級數 $\Sigma|a_n|$, 若 $\Sigma|a_n|$ 爲一收斂級數, 則 Σa_n 叫做絕對收斂級數; 若 Σa_n 爲一收斂級數, 而 $\Sigma|a_n|$ 爲一發散級數, 則 Σa_n 叫做半收斂級數.

例如 $$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots$$

爲一絕對收斂級數, 因 $\Sigma\frac{1}{n^2}$ 爲一收斂級數. 又如

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

爲一半收斂級數，因 $\Sigma\frac{1}{n}$ 爲一發散級數.

定理 1.　絕對收斂級數必爲收斂級數，且其和等於 $P-N$, P 爲級數中正項之和，$-N$ 爲負項之和.

證：　設 Σa_n 爲一絕對收斂級數，令

$$a_n=\alpha_n-\beta_n,$$

當 $a_n>0$ 時，$\alpha_n>0$, $\beta_n=0$；當 $a_n<0$ 時，$\alpha_n=0$, $\beta_n>0$. 無論 n 如何，

$$\sum_{n=1}^{n}\alpha_n, \qquad \sum_{n=1}^{n}\beta_n$$

各小於級數 $\Sigma|a_n|$ 之和，故正項級數 $\Sigma\alpha_n$, $\Sigma\beta_n$ 皆爲收斂級數，因此 (§43，定理 4°)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n-\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$$

亦爲一收斂級數. 令 $\Sigma\alpha_n=P$, $\Sigma\beta_n=N$, 則 $\Sigma a_n=P-N$.

定理 2.　設 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 爲一絕對收斂級數，倘將其中各項先後之位置任意變更，則所得之結果

$$\sum_{n=1}^{\infty}a'_n=a'_1+a'_2+a'_3+\cdots+a'_n+\cdots,$$

依然爲一絕對收斂級數，且其和等於原級數之和.

證：　如前定理，令

$$a_n=\alpha_n-\beta_n,$$
$$a'_n=\alpha'_n-\beta'_n,$$

則 $\Sigma\,\alpha'_n$, $\Sigma\,\beta'_n$ (由變更 $\Sigma\,\alpha_n$, $\Sigma\,\beta_n$ 之項之順序而得) 各爲收斂級數, 且 $\Sigma\,\alpha'_n=\Sigma\,\alpha_n$, $\Sigma\,\beta'_n=\Sigma\,\beta_n$ (§45), 故

$$\sum|a_n|=\sum(\alpha_n+\beta_n)=\sum\alpha_n+\sum\beta_n$$
$$=\sum\alpha'_n+\sum\beta'_n=\sum(\alpha'_n+\beta'_n)=\sum|a'_n|.$$

由定理 1, 便得

$$\sum a_n=\sum\alpha_n-\sum\beta_n=\sum\alpha'_n-\sum\beta'_n=\sum a'_n.$$

若 $\Sigma\,a_n$ 爲一半收斂級數, 則其和每隨各項先後位置之變更而異其值. 例如

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=S$$

$$\frac{1}{2}\qquad-\frac{1}{4}\qquad+\frac{1}{6}\qquad-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}S$$

相加便得

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}S.$$

定理 3. 設 $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots,$$

爲二絕對收斂級數, A 及 B 依次爲這二級數之和, 則級數

$$a_1b_1+(a_2b_1+a_1b_2)+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)+\cdots\cdots$$
$$+(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)+\cdots\cdots$$

亦為一絕對收斂級數，且其和等於 AB.

證： 令
$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$
$$B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

則
$$\lim_{n\to\infty} A_n=A, \qquad \lim_{n\to\infty} B_n=B.$$

$$\begin{aligned}A_nB_n&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=a_1b_1+a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2+\cdots\\&\qquad+a_nb_1+a_nb_2+\cdots+a_1b_n.\end{aligned}$$

故 $n\to\infty$ 時，A_nB_n 向極限 AB 收斂. 換言之，級數

[1]
$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2+\cdots\\&\qquad+a_nb_1+a_nb_2+\cdots+a_1b_n+\cdots\end{aligned}$$

為一收斂級數，且其和等於 AB.

原設 Σa_n, Σb_n 皆為絕對收斂級數，故

[2]
$$\begin{aligned}&|a_1b_1|+|a_2b_1|+|a_2b_2|+|a_1b_2|+\cdots\\&\qquad+|a_nb_1|+|a_nb_2|+\cdots+|a_1b_n|+\cdots\end{aligned}$$

亦為一收斂級數. 由此言之，級數 (1) 是一絕對收斂級數，依定理 2 及 §42 的定理 5°，雖把級數 (1) 各項之順序變更，但其和依然不變，故

$$\begin{aligned}AB&=a_1b_1+a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2+\cdots\\&\qquad+a_nb_1+a_nb_2+\cdots+a_1b_n+\cdots\\&=a_1b_1+a_2b_1+a_1b_2+a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3+\cdots\\&\qquad+a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n+\cdots\\&=a_1b_1+(a_2b_1+a_1b_2)+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)+\cdots\\&\qquad+(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n).\end{aligned}$$

47. 複數項級數 設 a, b 為二實數，則 $c=a+ib\,(i=\sqrt{-1})$ 叫做複數，其絕對值 $|c|$ 等於 $\sqrt{a^2+b^2}$. 令 $c_n=a_n+i\,b_n$, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i\, b_n)$$

叫做複數項級數，其中 a_n 與 b_n 都是實數. 若級數 Σa_n, Σb_n 各為收斂級數, Σc_n 便叫做收斂級數; 若 Σa_n 或 Σb_n 為一發散級數, 則 Σc_n 亦為一發散級數.

定理. 若 Σa_n, Σb_n 皆為絕對收斂級數, 則 $\Sigma |c_n|$ 為一收斂級數, 此時 Σc_n 叫做絕對收斂級數.

因 $$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqq |a_n| + |b_n|,$$

原設 $\Sigma |a_n|$, $\Sigma |b_n|$ 是收斂級數, 故 $\Sigma |c_n|$ 也是收斂級數.

又因 $$|c_n| > |a_n|, \qquad |c_n| > |b_n|,$$

若 $\Sigma |c_n|$ 為一收斂級數, $\Sigma |a_n|$, $\Sigma |b_n|$ 也為一收斂級數.

例. 設 $a = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad q = r(\cos\theta + i\sin\theta).$

由 de Moivre 氏定理, 得

$$q^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

則級數 $$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

的前 n 項之和為

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q},$$

若 $|q| = r < 1$, 則

$$\lim S_n = S = \frac{a}{1-q},$$

即 $$S = \frac{a}{1-q} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(1 - r\cos\theta + ir\sin\theta)}{(1 - r\cos\theta - ir\sin\theta)(1 - r\cos\theta + ir\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\alpha - r\cos(\theta-\alpha) + i\{\sin\alpha + r\sin(\theta-\alpha)\}}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

把級數 Σaq^{n-1} 中的實數部分與 i 的係數分開, 便得

$$\cos\alpha+r\cos(\theta+\alpha)+\cdots+r^n\cos(n\theta+\alpha)+\cdots=\frac{\cos\alpha-r\cos(\theta-\alpha)}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

$$\sin\alpha+r\sin(\theta+\alpha)+\cdots+r^n\sin(n\theta+\alpha)+\cdots=\frac{\sin\alpha+r\sin(\theta-\alpha)}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

48. 冪級數　設 x 爲變數, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 等爲確定的常數, 則級數

[1] $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

叫做冪級數.

定理 1. 若級數 (1) 在 $x=x_0$ 是收斂的, 那末當 x 的絕對值小於 $|x_0|$ 時, 級數 (1) 是絕對的收斂.

證: 設 $$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots$$
爲一收斂級數, 令正數 M 大於級數中任何一項之絕對值,

$$|a_nx_0^n|<M,$$

由此得

$$|a_nx^n|<M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

當 $|x|<|x_0|$ 時, 級數

$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\cdots+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\cdots$$

是一收斂級數, 因此級數 (1), 當 $|x|<|x_0|$ 時, 是一絕對收斂級數.

系. 設 x_0 爲一正數, 若級數 (1) 在 $x=x_0$ 是收斂的, 則級數在間隔 $-x_0<x<x_0$ 內是絕對的收斂. 若級數 (1) 在 $x=x_0$ 是發散的則級數在間隔 $-\infty<x<-x_0$ 及 $x_0<x<+\infty$ 內是發散的.

綜上所論, 關於冪級數之收斂與發散, 不外乎下列三種情形:

1° 除 $x=0$ 以外級數常是發散的, 例如

$$x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots+n!\,x^n+\cdots.$$

2° 無論 x 如何, 級數常是絕對的收斂, 例如

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

3° 有一正數 r 存在, 當 $|x|<r$ 時, 級數是絕對的收斂; 當 $|x|>r$ 時, 級數是發散的 (在 $x=\pm r$, 級數或收斂或發散). 這時 $(-r, r)$ 叫做級數的收斂間隔.

定理 2. 在級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

若 $n\to\infty$ 時,

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

向一極限 r 收斂, 那末當 $|x|<r$ 時, 級數是絕對的收斂; 當 $|x|>r$ 時, 級數便是發散的.

證: 就正項級數

$$[2] \qquad |a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots$$

而論, 當

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|<1,$$

即

$$|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=r,$$

級數 (2) 是收斂的, 故級數 Σa_nx^n 是絕對的收斂. 當 $|x|>r$ 時, 級數 (2) 是發散的, 由定理 1, 可知此時級數 Σa_nx^n 也是發散的.

注意: 若 $x, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 爲複數時, 以上二定理亦能適用.

例 1. 對數級數

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

因
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

故當 $|x|<1$ 時，級數是絕對的收斂；當 $|x|>1$ 時，級數便是發散了．又當 $x=-1$ 時，級數是發散的；當 $x=1$ 時，級數是收斂的．

例 2.　二項級數

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}x^n+\cdots,$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}\div\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n(n+1)}=\frac{n+1}{m-n},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1.$$

當 $|x|<1$ 時，級數是絕對的收斂；當 $|x|>1$ 時，級數是發散的．

下列級數

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots$$

也叫做冪級數，前者叫做 $x-a$ 的冪級數，後者叫做 $\frac{1}{x}$ 的冪級數．

例題．　求下二冪級數的收斂間隔

$$3x+\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{3}+\cdots+\frac{(3x)^n}{n}+\cdots,$$

$$(x-2)+2^2(x-2)^2+3^2(x-2)^3+\cdots+n^2(x-2)^n+\cdots.$$

49.　冪級數之微分法　一冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在其收斂間隔內，可視為變數 x 的函數 $f(x)$，

[1]
$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

定理. 冪級數 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收斂間隔 $(-r, r)$ 內有一導數,這導數等於級數各項的導數之和, 即

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots.$$

證: 茲先證一定理如下: 若冪級數

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

在間隔內 $-r<x<r$ 內絕對的收斂, 則級數

[2] $$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

在這間隔內亦絕對的收斂.

令 x 爲這間隔 $(-r, r)$ 內的一值, ρ 爲 $|x|$ 與 r 之間的一值,

$$|x|<\rho<r,$$

則級數 Σa_nx^n 在 $x=\rho$ 是絕對的收斂, 所以我們可求得一正數 M, 使

$$|a_n\rho^n|<M, \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

因此 $$\left|na_nx^{n-1}\right|=\left|a_n\rho^n\cdot\frac{n}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-1}\right|<\frac{M}{\rho}n\left|\frac{x}{\rho}\right|^{n-1},$$

故級數

$$|a_1|+|2a_2x|+|3a_3x^2|+\cdots+|na_nx^{n-1}|+\cdots$$

的各項皆小於級數

$$\frac{M}{\rho}\left(1+2\left|\frac{x}{\rho}\right|+3\left|\frac{x}{\rho}\right|^2+\cdots+n\left|\frac{x}{\rho}\right|^{n-1}+\cdots\right)$$

之相當項, 然易知這級數是收斂的 $(|x|<\rho)$. 故級數 (2) 在間隔 $-r<x<r$ 內是絕對的收斂.

同樣可證明級數

[3] $$1\cdot2a_2+2\cdot3a_3x+\cdots+(n-1)na_nx^{n-2}+\cdots$$

在間隔 $-r<x<r$ 內也是絕對的收斂.

今令 $x, x+h$ 爲間隔 $(-r, r)$ 內的二值，則

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)$$

等於級數

$$[4]\qquad a_2\left\{\frac{(x+h)^2-x^2}{h}-2x\right\}+a_3\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}-3x^2\right\}+\cdots$$
$$+a_n\left\{\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right\}+\cdots.$$

用中値定理，得

$$(x+h)^n-x^n=nx_1^{\,n-1}h,$$

x_1 爲 x 與 $x+h$ 間的一値，於是

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n\left(x_1^{\,n-1}-x^{n-1}\right),$$

再用中値定理，則

$$n\left(x_1^{\,n-1}-x^{n-1}\right)=n(n-1)\,x_2^{\,n-2}(x_1-x),$$

x_2 爲 x 與 x_1 間的一値，所以也是 x 與 $x+h$ 間的一値．今取一數 ρ 如下

$$|x|<\rho<r,\qquad |x+h|<\rho<r,$$

則有
$$|x_2|<\rho,\qquad |x_1-x|<|h|,$$

故
$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|<n(n-1)\,\rho^{n-2}\,|h|.$$

應用此不等式於級數 (4) 之各項，便得

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right|<|h|\,\{1\cdot 2\,|a_2|+2\cdot 3\,|a_3\rho|+\cdots$$
$$+(n-1)\,n\,|a_n\rho^{n-2}|+\cdots\}.$$

我們已知級數 (3)，當 $|x|<r$ 時，是絕對的收斂，故

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right|=0,$$

即
$$f'(x)=\varphi(x).$$

系 1. $f(x)$ 在間隔 $-r<x<r$ 內是 x 的連續函數.

系 2. 設二級數 $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$ 在一含有 0 的間隔內恆相等, 則
$$a_n=b_n. \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

例題. 當 $|x|<1$ 時,
$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

試證 (1) $1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots=\dfrac{1}{(1-x)^2}.$

(2) $\dfrac{1\cdot2}{2}+\dfrac{2\cdot3}{2^2}+\dfrac{3\cdot4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2^n}+\cdots=8.$

習 題 6

1. 決定下列級數是否收斂

(1) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots.$

(2) $1+\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{3^2}{3!}+\dfrac{4^2}{4!}+\cdots+\dfrac{n^2}{n!}+\cdots.$

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}+\sqrt{\dfrac{4}{5}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}+\cdots.$

(4) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2^2}{3^3}+\dfrac{3^3}{4^4}+\dfrac{4^4}{5^5}+\cdots+\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}+\cdots.$

2. 決定下列級數是否收斂

(1) $\sum\dfrac{(n+1)^2}{n^3}.$ (2) $\sum\dfrac{n}{(n+1)^3}.$

(3) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1}.$ (4) $\sum\dfrac{8n}{(n+1)(n+2)}.$

(5) $\sum \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.　　(6) $\sum (\sqrt{n^2+1}-n)$.

(7) $\sum \frac{n+1}{n^p}$.　　(8) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

(9) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{1+\log n}$.　　(10) $\sum \frac{1+n}{1+n^2}$.

3. 在正項級數 Σa_n, 若無論 n 如何, $\sqrt[n]{a_n}<r<1$, 那末級數是收斂的; 若 $\sqrt[n]{a_n}\geqq 1$, 那末級數是發散的 (這叫做 Cauchy 氏的判定法).

令 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$. 若

$\lambda<1$,　　級數是收斂的;

$\lambda>1$,　　級數是發散的;

$\lambda=1$,　　級數之性質不能卽行決定.

4. 試證下列級數是收斂的 (用前題判定法).

(1) $\sum \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.　　(2) $\frac{r^n}{a^{\log n}}$. $(0<r<1,\ 0<a)$

5.
$$f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

$$g(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

x 不論如何, 以上二級數總是絕對收斂的, 幷證明下列等式:

$$f^2(x)+g^2(x)=1, \qquad f(2x)=2f(x)\,g(x).$$

6. 設 Σa_n 爲一絕對收斂級數, 證明

$$\Sigma a_n \sin n\theta, \qquad \Sigma a_n \cos n\theta$$

二級數, 無論 θ 如何, 也是絕對收斂的.

7. 求下列冪級數之收斂間隔:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^p}$.　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^{n+1}}$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n!}x^n$.　　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n!}}$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\tan\frac{a}{2^n}$.　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}x^n$.

8. 求下級數之收斂間隔:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}.$$

注意. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{1+x^n}$. 當 $|x|<1$ 時, 其極限爲 x. 當 $|x|>1$ 時, 其極限爲零. 當 $x=\pm1$ 時, 其極限值如何?

9. $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, 試證

(1) $f'(x)=f(x)$.　　(2) $f(x)f(y)=f(x+y)$.

10. 若 $0<a<b<1$, 則

$$a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$$

爲一收斂級數 (用 Cauchy 氏判定法, 見題 3).

11. 若 Σa_n 爲一收斂的正項級數, 則 Σa_n^2, $\Sigma\frac{a_n}{1+a_n}$ 亦爲收斂級數.

12. 若 Σa_n^2 爲收斂級數，則 $\Sigma \frac{a_n}{n}$ 亦爲收斂級數 $(a_n>0)$.

$$\left(\frac{2a_n}{n} \leqq a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

13. 試證

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right).$$

第七章

函數之展開

冪級數在其收斂間隔內是 x 的連續函數，這種函數，如何相加相減相乘，如何求其導數，已在前章中講過了．現在所欲討論者，為如何把一已知函數 $f(x)$ 以一冪級數表達之．

50. Taylor 氏定理* 設 $f(x)$ 為一 n 次有理整式

[1] $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

把其中的 x 代以 $x+h$，則

$$f(x+h)=a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2+\cdots+a_n(x+h)^n.$$

用二項定理把上式右邊的各項展開，然後依 h 的昇冪排列之，於是得

[2] $$f(x+h)=g_0(x)+g_1(x)h+g_2(x)h^2+\cdots+g_n(x)h^n.$$

欲求函數 $g_0(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)$，$\cdots$，我們暫時把 x 視為常數，h 視為變數，然後求 $f(x+h)$ 對於 h 的導數，得

[3] $$\begin{cases} f'(x+h)=g_1(x)+2g_2(x)h+3g_3(x)h^2+\cdots+ng_n(x)h^{n-1} \\ f''(x+h)=1\cdot 2\,g_2(x)+2\cdot 3\,g_3(x)h+\cdots+(n-1)ng_n(x)h^{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(x+h)=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n\,g_n(x) \end{cases}$$

令 $h=0$，則

$$f'(x)=g_1(x),\quad f''(x)=1\cdot 2\,g_2(x),\quad \cdots,\quad f^{(n)}(x)=n!\,g_n(x),$$

---

* Brook Taylor, 1685–1731.

或 $$g_k(x)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x),\qquad (k=1,2,3,\cdots,n)$$

由 (2) 式可直接得 $g_0(x)=f(x)$. 把求得之函數 $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \cdots$ 代入 (2) 式, 便有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1!}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}.$$

若把式中的 x 等於零, 然後復把 h 換爲 x, 於是得

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

今設 $f(x)$ 爲一任意函數, 自 x 至 $x_1=x+h$ 的間隔內 (x 與 $x+h$ 亦包括在內), 函數 $f(x)$ 及其導數 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ 都是連續的, 幷設 $f^{(n-1)}(x)$ 在這間隔內有一導數 $f^{(n)}(x)$, 令

[5] $$R_n=f(x+h)-f(x)-f'(x)\frac{h}{1!}-f''(x)\frac{h^2}{2!}-\cdots-f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}.$$

設 $f(x)$ 不爲一有理整式, 或 $f(x)$ 雖爲一有理整式而其次數大於 n, 我們爲明瞭 R_n 之值起見, 令 $h=x_1-x$, 然後把 x_1 視爲固定常數, x 爲變數, 於是 R_n 可視爲 x 的函數 $\varphi(x)$.

[6] $$R_n=\varphi(x)=f(x_1)-f(x)-f'(x)\frac{x_1-x}{1!}-f''(x)\frac{(x_1-x)^2}{2}-\cdots-f^{(n-1)}(x)\frac{(x_1-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

用 §22 的公式 (2), 令 $a=x$, $b=x_1$, 則有

$$\varphi(x_1)-\varphi(x)=\frac{x_1-x}{m(1-\theta)^{m-1}}\varphi'\{x+\theta(x_1-x)\}.$$

由 (6) 式知 $\varphi(x_1)=0$, 所以

$$[7] \qquad \varphi(x) = -\frac{x_1 - x}{m(1-\theta)^{m-1}}\varphi'\{x+\theta(x_1-x)\},$$

其中 m 是一個任意選定的正整數, θ 是 0 與 1 之間的一個數, 其值與 m, x, x_1, $f(x)$ 都有關係.

欲求 $\varphi'(x)$, 可將 (6) 式右邊的各項求其導數, 由是得

$$\varphi'(x) = -f^{(n)}(x)\frac{(x_1-x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

以 $x+\theta(x_1-x)$ 代 x, 則有

$$\varphi'\{x+\theta(x_1-x)\} = -f^{(n)}\{x+\theta(x_1-x)\}\frac{(x_1-x)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!},$$

代入 (7) 式中, 得

$$\varphi(x) = f^{(n)}\{x+\theta(x_1-x)\}\frac{(x_1-x)^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m},$$

式中的 x_1-x 復以 h 代之, 於是由 (5) 式得定理如下:

設函數 $f(x)$ 及其導數 $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n-1)}(x)$ 在 x 至 $x+h$ 的間隔內 (x, $x+h$ 亦包括在內) 都是連續的, 幷設 $f^{(n-1)}(x)$ 在這間隔內有一導數 $f^{(n)}(x)$, 則

$$[8] \qquad \boxed{\begin{gathered} f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1!} + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \\ R_n = f^{(n)}(x+\theta h)\frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m}, \quad 0<\theta<1 \end{gathered}}$$

R_n 叫做 Schlömilch* 的剩餘式, 其中 m 是任意選定的正整數, θ 是 0 與 1 之間的一個數, 其值與 m, n, x, h, $f(x)$ 都有關係, 當 $m=n$ 或 $m=1$ 時, R_n 的形式可寫如

---

* Schlömilch, 1823–1901.

$$\boxed{R_n=f^{(n)}(x+\theta h)\frac{h^n}{n!}}\qquad 0<\theta<1$$

$$\boxed{R_n=f^{(n)}(x+\theta h)\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}}\qquad 0<\theta<1$$

前者叫做 Lagrange 氏的剩餘式，後者叫做 Cauchy 氏的剩餘式，惟此二式中，θ 的值並不一定相等.

51. Maclaurin 氏定理* 令前節 (8) 式中的 x 等於零，然後復把 h 換爲 x，於是得定理如下.

設函數 $f(x)$ 及其導數 $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n-1)}(x)$ 在 0 至 x 的間隔內都是連續的 (0 與 x 亦包括在內)，并設 $f^{(n-1)}(x)$ 在這間隔內有一導數 $f^{(n)}(x)$，則

$$\boxed{\begin{array}{ll}\multicolumn{2}{l}{f(x)=f(0)+f'(0)\dfrac{x}{1!}+f''(0)\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n-1)}(x)\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n}\\ R_n=f^{(n)}(\theta x)\dfrac{x^n}{n!} & 0<\theta<1\\ R_n=f^{(n)}(\theta x)\dfrac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} & 0<\theta<1\end{array}}$$

這定理是 Taylor 氏定理的一特例罷了.

例. $f(x)=\log(1+x)$.

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

故 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$，又 $f(0)=0$，代入公式中，得

---

* Colin Maclaurin, 1698–1746.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n.$$

52. Taylor 氏級數及 Maclaurin 氏級數 今再就 §50 中的 (8) 式論之.

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1!}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+R_n.$$

令右邊前 n 項之和等於 S_n, 則

$$f(x+h)-S_n=R_n.$$

若函數 $f(x)$ 及其一切任何次導數, 在 x 至 $x+h$ 的間隔內, 都是連續的, 并且當 $n\to\infty$ 時, $R_n\to 0$, 那末

$$\lim_{n\to\infty} S_n=f(x+h).$$

換言之, 這時無窮級數

$$\boxed{f(x)+f'(x)\frac{h}{1!}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+\cdots}$$

便向極限 $f(x+h)$ 收斂. 這個 $f(x+h)$ 的展開式叫做 Taylor 氏級數.

又由 §51 可得一定理如下:

設函數 $f(x)$ 及其一切任何次導數, 在 0 至 x 的間隔內都是連續的, 并且當 $n\to\infty$ 時, $R_n\to 0$, 那末

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots}$$

這個 $f(x)$ 的展開式叫做 Maclaurin 氏級數.

在 Taylor 氏級數中，令 $x=a$，則

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\frac{h}{1!}+f''(a)\frac{h^2}{2!}+f'''(a)\frac{h^3}{3!}+\cdots,$$

然後令 $h=x-a$，於是得

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^2}{3!}+\cdots}$$

這個 Taylor 氏級數，叫做函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 隣近的展開式；因此 Maclaurin 氏級數，叫做函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 隣近的展開式.

53. 指數函數之展開　設 $f(x)=e^x$，則 $f^{(n)}(x)=e^x$，故

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{1!}+\cdots+R_n,$$

$$R_n=e^{\theta x}\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

因 $\frac{x^n}{n!}$ 爲收斂級數 $\Sigma\frac{x^n}{n!}$ 的普通項，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$；又因 $e^{\theta x}$ 爲一有限數，故 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$，於是函數 e^x 得展成冪級數如下：

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots}$$

其收斂間隔爲 $-\infty<x<+\infty$，卽 $|x|<\infty$.

又　$f(a+h)=f(a)\left\{1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}+\cdots\right\}=f(a)f(h),$

以 x 代 a，y 代 h，則有

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

即
$$\boxed{e^{x+y}=e^x\cdot e^y}$$

當 $x\to+\infty$ 時，e^x 趨於 $+\infty$，其理至爲顯然．惟 e^x 趨於 $+\infty$ 之情形如何，尙須討論罷了．由 e^x 的級數得

$$\frac{e^x}{x^n}=\frac{1}{x^n}+\frac{1}{1!\,x^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!\,x}+\frac{1}{n!}$$
$$+\frac{x}{(n+1)!}+\frac{x^2}{(n+2)!}+\cdots,$$

右邊的第一行的和，當 $x\to+\infty$ 時，趨近於極限 $\frac{1}{n!}$，而第二行的各項各趨於 $+\infty$，故

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$$

這就表示 $x\to+\infty$ 時，函數 e^x 的增大，較 x^n（n 爲一正整數）爲快*．

當 $x\to-\infty$ 時，e^x 趨近於零，且 x^ne^x（n 爲一正整數）亦趨近於零，令 $x=-x'$，則

$$x^ne^x=(-x')^ne^{-x'}=(-1)^n\frac{x'^n}{e^{x'}},$$

故
$$\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=(-1)^n\lim_{x'\to+\infty}\frac{x'^n}{e^{x'}}=0.$$

當 $x=1$ 時，

$$\boxed{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots}$$

* n 爲其他正數時，其理亦眞．

欲求 e 之值正確至小數第四位，可令 $a_0=1$，$a_n=\frac{1}{n!}$，則

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{n}.$$

由此很易算得

$$\begin{aligned}
a_0+a_1+a_2&=2.5\\
a_3&=0.16667^*\\
a_4&=0.04167^*\\
a_5&=0.00833\\
a_6&=0.00139^*\\
a_7&=0.00020^*\\
a_8&=0.00002\\
\hline
S_8&=2.71828
\end{aligned}$$

其中有星點之四項，其值較原值爲大，餘二項較原值爲小（用四捨五入法）故

$$2.71828-4\cdot\frac{0.5}{10^5}<S_8<2.71828+2\cdot\frac{0.5}{10^5},$$

又 $$R_8=\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+\cdots<\frac{1}{9!}\left\{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{a_8}{9}\cdot\frac{9}{8}=\frac{a_8}{8}.$$

然 $$a_8<\frac{3}{10^5},$$

故 $$R_8<\frac{3}{8\cdot 10^5}<\frac{4}{10^6}.$$

由是可知 e 之值當介於

$$2.71826 \quad 與 \quad 2.718294$$

之間，其值正確至小數第四位當爲 2.7182. 其近似值爲

$$2.718281828459\cdots.$$

若 $f(x)=a^x$, a^x 可寫如 $e^{x\log a}$, 故

$$\boxed{a^x=1+\frac{x\log a}{1!}+\frac{(x\log a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\log a)^n}{n!}+\cdots} \quad |x|<\infty$$

54. $\sin x$ 及 $\cos x$ 之展開 設 $f(x)=\sin x$, 則

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

故 $\quad f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad \cdots,$

又 $$|f^{(n)}(\theta x)|=\left|\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqq 1,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{n!}=0.$$

於是 $\sin x$ 得展成級數如下：

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots} \quad |x|<\infty$$

依同理，$\cos x$ 得展成冪級數如下：

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots} \quad |x|<\infty$$

這 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的展開式，都是交錯收斂級數，若以其前 n 項之和代 $\sin x$ 及 $\cos x$, 則誤差之絕對值必小於第 $n+1$ 項之絕對值 (§45).

55. Euler 氏公式　我們已知級數

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

爲一收斂級數 $(-\infty<x<\infty)$, 今將 x 易以一複數 z, 則

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

顯然爲一絕對收斂級數. 把這個級數的和, 作爲函數 e^z 的定義, 那是很自然的事. 今令 $z=ix$, x 爲一實數, 則

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+i(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$+i\left\{\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right\},$$

上式右端的實數部份等於 $\cos x$, 而 i 的係數等於 $\sin x$, 故

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

易 x 爲 $-x$, 則有

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

由是得

$$\boxed{\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}\qquad\boxed{\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

這就是 Euler 氏公式. 因

$$(e^{ix})^m=e^{mix},$$

由是便得 de Moivre 氏公式

$$(\cos x+i\sin x)^m=\cos mx+i\sin mx.$$

56. 雙曲線函數

$$\boxed{\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}} \qquad \boxed{\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}}$$

這兩個函數叫做雙曲線正弦及雙曲線餘弦. 由此卽得

$$\begin{cases} e^{x}=\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x \\ e^{-x}=\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x \end{cases}$$

及
$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

最後一式, 也像 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ 有一幾何的意義, 令

$$X=\operatorname{ch} x, \qquad Y=\operatorname{sh} x,$$

當 x 變時, 則 (X, Y) 點便畫一雙曲線 $X^2-Y^2=1$. 若把 e^x 與 e^{-x} 的展開式相加後以 2 除之, 便得

$$\boxed{\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots} \qquad |x|<\infty$$

依同理

$$\boxed{\operatorname{sh} x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots} \qquad |x|<\infty$$

下列二圖, 卽函數 $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ 的圖表.

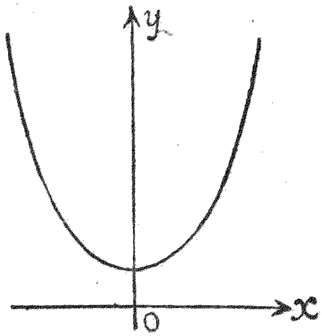


圖 69

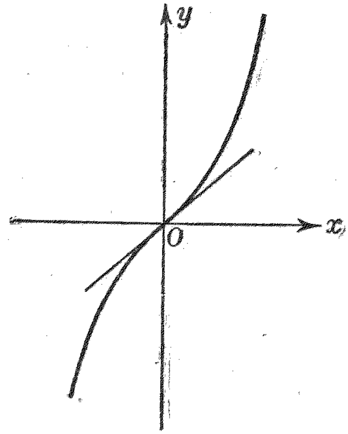


圖 70

由定義易知

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ch} x=\operatorname{sh} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sh} x=\operatorname{ch} x$$

正切 $\tan x$ 等於 $\dfrac{\sin x}{\cos x}$, 因此

$$\boxed{\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$$

叫做雙曲線正切, 三角函數 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 與雙曲線函數的關係如下:

$$\cos(ix)=\operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{ch}(ix)=\cos x,$$
$$\sin(ix)=i\operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{sh}(ix)=i\sin x,$$
$$\tan(ix)=i\operatorname{th} x, \qquad \operatorname{th}(ix)=i\tan x.$$

57. $\log(1+x)$ 之展開　設 $f(x)=\log(1+x)$, 當 $x>-1$ 時, 函數 $f(x)$ 是連續的, 且其各級導數爲

$$f(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3},\quad \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad \cdots.$$

函數 $\log(1+x)$ 及其各級導數，在 0 至 x 的間隔內是連續的，這時剩餘式 R_n 爲 (§51)

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta_1 x}\right)^n, \qquad [1]$$

或

$$R_n=\left(\frac{-x+\theta_2 x}{1+\theta_2 x}\right)^{n-1}\frac{x}{1+\theta_2 x}. \qquad [2]$$

若 $0<x\leqq 1$，則 $0<x<1+\theta_1 x$，故

$$0<\frac{x}{1+\theta_1 x}<1.$$

又當 $n\to\infty$ 時，$\frac{1}{n}\to 0$，故由 (1) 便知 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

若 $-1<x<0$，則 $0<-x<1$，此時 $x<-x^2$，故

$$0<-x(1-\theta_2)<-x-\theta_2 x^2,$$

$$0<-x+\theta_2 x<-x(1+\theta_2 x),$$

$$0<\frac{-x+\theta_2 x}{1+\theta_2 x}<-x<1.$$

由 (2) 便知 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

於是函數 $\log(1+x)$ 可展成冪級數如下：

$$\boxed{\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots}\qquad -1<x\leqq 1$$

當 $|x|>1$ 時，級數顯然是發散的；當 $x=-1$ 時，級數也是發散的

(§44)；當 $x=1$ 時，級數是收斂的 (§45)，且有

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

58. 對數之計算 我們已知

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$
$$+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n,$$

令 $x=\frac{1}{N}$，N 代表一正整數，於是

$$\log(N+1)=\log N+\frac{1}{N}-\frac{1}{2N^2}+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)N^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{N+\theta}\right)^n.$$

從這個式子，我們可以逐步求得一切正整數的自然對數，換言之，我們知道了 $\log N$，就可推算 $\log(N+1)$.

如果把上式右端的末項略去不算，那末這樣算得的近似值，或比 $\log(N+1)$ 爲大，或比 $\log(N+1)$ 爲小，要看 n 是偶數還是奇數而定，但無論如何，誤差之值決不會大於 $\frac{1}{nN^n}$.

另有一個公式，用以計算對數，較爲便利，把

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots,$$

二式相減，得

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots,\qquad |x|<1.$$

若 $0<x<1$, 可令

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{p^2}{p^2-1},\qquad x=\frac{1}{2p^2-1}$$

代入級數中便得

$$\log p=\frac{1}{2}\log(p-1)+\frac{1}{2}\log(p+1)+\frac{1}{2p^2-1}$$
$$+\frac{1}{3(2p^2-1)^3}+\frac{1}{5(2p^2-1)^5}+\cdots.$$

其中 $2p^2-1>1$, 即 $p^2>1$. 設 p 爲一整數, 且設 $p+1$ 可分解爲二整數的乘積, 那末 $\log p$ 便得以小於 p 的整數的對數及一收歛甚快的級數表達之. 若我們已算得 $\log 2$ 之值, 由上式便得計算一切素數的對數; 因此一切數的對數也就得算出了.

令級數中自 $\dfrac{1}{n(2p^2-1)^n}$ 以後諸項的和爲 R_n, 那末

$$R_n<\frac{1}{(n+2)(2p^2-1)^{n+2}}\left\{1+\frac{1}{(2p^2-1)^2}+\frac{1}{(2p^2-1)^4}+\cdots\right\}$$
$$=\frac{1}{(n+2)(2p^2-1)^n}\cdot\frac{1}{(2p^2-1)^2-1}.$$

由此便得計算 $\log p$ 的近似值的正確程度了.

例. 用級數的前四項以求 $\log 7$ 的近似值.

令 $p=7$, 則 $2p^2-1=97$, 故

$$\log 7=2\log 2+\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{97}+\frac{1}{3.97^3}+\cdots,$$

$$\frac{1}{97}\approx 0.01030928,\qquad \frac{1}{3.97^3}\approx 0.00000037,$$

$$2\log 2 \approx 1.38629436, \qquad \frac{1}{2}\log 3 \approx 0.54930614.$$

由是得

$$\log 7 \approx 1.94591015.$$

又
$$R_n < \frac{1}{5.97^3} \times \frac{1}{97^2-1} < \frac{1}{36\times 10^9},$$

以上的四項，每項的誤差俱小於 5×10^{-9}，故 $\log 7$ 的末位小數可以差 2. 但實際這末位小數是正確的.

例題. 求 $\log 5$ 之値正確至小數第六位.

答　1.609438.

59. 二項級數 設 $f(x)=(1+x)^m$，m 爲一任意實數，當 $x>-1$ 時，$f(x)$ 及其導數

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

都是連續的，由是得

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

$$R_n=f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}x^{n-1}$$
$$\cdot\, mx(1+\theta x)^{m-1}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

當 $-1<x<1$ 時，$-\theta<\theta x$，故有

$$0<1-\theta<1+\theta x,$$

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1.$$

無論 n 如何，$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ 必小於一常數，且 $mx(1+\theta x)^{m-1}$ 爲一有

限數. 又

$$\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}x^{n-1},$$

爲一收斂級數的普通項 (§48), 故其極限爲零, 由是知

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0.$$

於是函數 $(1+x)^m$ 在 $-1<x<+1$ 間隔內可展成冪級數如下:

$$\boxed{(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots}$$

這個級數叫做二項級數.*

若 m 爲一正整數, 則級數祇有 $m+1$ 項, 其末項爲 x^m, 這時上式便是 Newton 氏的二項定理了.

當 $|x|>1$ 時,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}x\right|>1.$$

故此時級數是發散的.

例 1. $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots,\qquad |x|<1.$$

---

*若 $x=1$, 且 $m>-1$, 則級數向極限 2^m, 收斂; 若 $x=-1$, 且 $m>0$, 則級數向極限 0 收斂; 若 $x=\pm 1$, 且 $m\leqq -1$, 則級數是發散的, 見 de la Vallée Pousin: Cours d'Analyse, p. 440.

例 2.　$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}=\frac{7}{5}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^4+\frac{3\cdot5}{2\cdot3}\left(\frac{1}{10}\right)^6\right.$$

$$\left.+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{1}{10}\right)^8+\cdots\right\}$$

$$=1.4142135\cdots.$$

60. 展開之特別方法　欲求一函數 $f(x)$ 的展開式，第一須先求 $f^{(n)}(x)$，第二須證明 x 在某一間隔內，$\lim_{n\to\infty} R_n=0$. 這兩種計算，在一般情形而論，很不容易，然有時可利用某種函數的展開式，以求 $f(x)$ 的展開式．茲舉例如下：

例 1.　展開

$$f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{2-(1-x)}{(-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}.$$

右邊的二項各得展成級數如下：

$$\frac{2}{(1-x)^3}=2\left\{1+3x+\frac{3\cdot4}{1\cdot2}x^2+\frac{3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{3\cdot4\cdots(n+2)}{1\cdot2\cdots n}x^n+\cdots\right\},\qquad |x|<1.$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+\frac{2\cdot3}{1\cdot2}x^2+\frac{2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots$$

$$+\frac{2\cdot3\cdots(n+1)}{1\cdot2\cdots n}x^n+\cdots,\qquad |x|<1.$$

二式相減，得

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=1+4x+9x^2+\cdots+(n+1)^2x^n+\cdots, \qquad |x|<1.$$

例 2. 展開 $f(x)=\cos^3 x$.

$$(\cos x+i\sin x)^3=\cos 3x+i\sin 3x.$$

令二邊的實數部份相等，便得

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$$

$$=1-\frac{3^2+3}{4\cdot 2!}x^2+\frac{3^4+3}{4\cdot 4!}x^4-\frac{3^6+3}{4\cdot 6!}x^6+\cdots.$$

例 3. 展開 $f(x)=\text{arc}\sin x$ (§27).

設 $\text{arc}\sin x$ 在一間隔內可展開成一冪級數如下:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

則 $$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^3+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots.$$

然 $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^{2n}+\cdots,$$

比較這二級數同次項之係數，則有

$$a_1=1, \quad a_2=0, \quad a_3=\frac{1}{2\cdot 3}, \quad \cdots,$$

$$a_{2n}=0, \quad a_{2n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}, \quad \cdots.$$

又 $x=0$ 時，$f(0)=0$，故 $a_0=0$，於是得 $\text{arc}\sin x$ 之展開式如下:

$$\boxed{\begin{aligned}\text{arc}\sin x=x+\frac{4}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots\\ +\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\end{aligned}}$$

依 D'alembert 氏的判定法, 可知級數的收斂間隔為 $-1<x<1$.

令 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 則 $\arcsin x=\frac{\pi}{4}$, 於是得一計算 π 之級數如下:

$$\pi=2\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^3}+\cdots\right),$$

由關係式 $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$ 便得 $\arccos x$ 的展開式.

依同法, 得

$$\boxed{\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots}\qquad -1<x\leqq 1$$

令 $x=1$, 得

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots.$$

例 4.　展開　$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot x,$$

即　$$(1-x^2)f'(x)=1+xf(x),$$

設　$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

則　$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

代入上關係式, 則有

$$a_1+2a_2x+(3a_3-a_1)x^2+\cdots+\{(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_{n-1}\}x^n+\cdots$$
$$=1+a_0x+a_1x^2+\cdots+a_{n-1}x^n+\cdots,$$

比較兩邊同次項的係數, 便得

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{a_0}{2},\quad a_3=\frac{2}{3}a_1,\quad \cdots,\quad a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_{n-1},\quad \cdots.$$

然 $f(0)=0$，故 $a_0=0$，因此

$$a_0=0,\quad a_2=0,\quad a_4=0,\quad a_6=0,\quad \cdots,$$
$$a_1=1,\quad a_3=\frac{2}{3},\quad a_5=\frac{2\cdot4}{3\cdot5},\quad a_7=\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7},\quad \cdots.$$

故
$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}x^5+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}x^7+\cdots,\quad |x|<1.$$

61. 函數展開之應用 1° 函數之近似值.

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),$$
$$0<\theta<1.$$

令 S_n 為右邊前 n 項之和，M_n 為 $|f^{(n)}(x)|$ 在 $(a,a+h)$ 間隔內的最大值，當 $|h|$ 甚小時，倘以 S_n 之值代 $f(a+h)$，誤差 E 之絕對值，應不大於 $M_n\frac{h^n}{n!}$，即

$$|E|\leqq M_n\frac{h^n}{n!}.$$

在 Maclaurin 氏展開式，若以

$$f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)$$

代 $f(x)$ 之值，誤差 E 之絕對值應不大於 $M_n\frac{x^n}{n!}$，即

$$|E|\leqq M_n\frac{h^n}{n!},$$

M_n 為 $|f^{(n)}(x)|$ 在間隔 $(0,x)$ 內的最大值.

例.
$$f(x)=\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\cdots,$$

當 $0<x\leqq\frac{1}{4}$ 時，若以 $1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ 代 $\sqrt{1-x}$，試求誤差之限度.

因
$$f'''(x)=\frac{-3}{8\sqrt{(1-x)^5}},$$

故
$$M_3=\frac{3}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{2}}=0.7698,$$

$$|E|<\frac{0.7698}{6.4^3}=0.002005.$$

2° <u>不定形之極限值</u>.

例 1.　當 $x\to 0$ 時，求函數 $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}$ 的極限值.

$$f(x)=\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\frac{\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\cdots}{x^3-\dfrac{x^5}{3!}+\cdots},$$

故
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{6}.$$

例 2.　證明
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,$$

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)=n\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\cdots\right),$$

於是
$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=x,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

例 3.　當 $x=+\infty$ 時，求函數 $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x^2+x}$ 的極限值.

因
$$\sqrt[3]{x^3+x^2}=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=x\left(1+\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}+\cdots\right),$$

$$\sqrt{x^2+x}=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=x\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\cdots\right),$$

由此得

$$\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x^2+x}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{72x}+\cdots,$$

故

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\frac{1}{6}.$$

3° **極值之判定**. 函數之極值前已講過 (§23). 今所討論者, 乃應用 Taylor 氏之展開式以判定函數之極值.

設函數 $f(x)$ 在一間隔內具有第一次及第二次導數 $f'(x)$, $f''(x)$, 并設 a 與 $a+h$ 為這間隔內的二值. 由 Taylor 氏定理; 得

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h), \qquad 0<\theta<1.$$

若 $f'(a)=0$, $f''(a)\neq 0$, 則

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h).$$

設 $f''(x)$ 在 a 的隣近是 x 的連續函數, 那末上式可寫如

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2!}\{f''(a)+\epsilon\},$$

ϵ 隨 h 趨近於零而趨於零, 因此我們可求得一適當的正數 δ, 當 $|h|<\delta$ 時, 使 ϵ 的絕對值小於 $|f''(a)|$, 這時 $f''(a)+\epsilon$ 便與 $f''(a)$ 同號, 因此 $f(a+h)-f(a)$ 與 $h^2f''(a)$ 同號.

若 $f''(a)>0$, 則

$$f(a+h)-f(a)>0,$$

此時 $f(a)$ 為函數的極小值.

若 $f''(a)<0$, 則

$$f(a+h)-f(a)<0,$$

此時 $f(a)$ 為函數的極大值.

其次, 若 $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, 而 $f'''(a)\neq 0$, 則

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta h), \qquad 0<\theta<1.$$

設 $f'''(x)$ 在 $x=a$ 的隣近是 x 的連續函數，我們同樣可求得一適當的正數 δ，當 $|h|<\delta$ 時，能使 $f'''(a+\theta h)$ 與 $f'''(a)$ 同號，因此

$$f(a+h)-f(a)$$

與 $h^3f'''(a)$ 同號，且隨 h 變號而變號，所以此時 $f(a)$ 非函數之極值.

普遍言之，若 $f(x)$ 在一間隔内具有導數 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$，令 $x=a$ 爲這間隔内的一值，若

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0, \qquad f^{(n)}(a)\neq 0,$$

且 $f^{(n)}(x)$ 在 a 的隣近是 x 的連續函數，則

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h), \qquad 0<\theta<1.$$

如 n 爲一偶數 $\begin{cases} f^{(n)}(a)>0, & \text{則 } f(a) \text{ 爲一極小值.} \\ f^{(n)}(a)<0, & \text{則 } f(a) \text{ 爲一極大值.} \end{cases}$
如 n 爲一奇數，則 $f(a)$ 非函數之極值.

例. 求 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})$ 的極值.

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \qquad f''(x)=\frac{2+3x^2-x^4}{x^3(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

若 $x=1$, $f'(1)=0$, $f''(1)>0$; $f(1)=\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)$ 爲 $f(x)$ 的極小.

若 $x=-1$, $f'(-1)=0$, $f''(-1)<0$; $f(-1)=-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)$ 爲 $f(x)$ 的極大.

習 題 7

1. 將下列函數展開成 x 的冪級數.

(1) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$.　　(2) $\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$.

(3) $(1-ax)^{\frac{-b}{a}}$.　　(4) $(x-\tan x)\cos x$.

(5) $\frac{\sin 4x}{\sin x}$　　(6) $\frac{(1+x)^2}{x}\log(1+x)$.

2. 把 $\log x$ 展成 $\frac{1-x}{1+x}$ 的冪級數.

3. 由級數 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$, 求 e^2 之值至小數第四位.

$$e^2=1+2+\frac{4}{2!}+\cdots+\frac{2^n}{n!},$$

$$R<\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left\{1+\frac{2}{n+2}+\left(\frac{2}{n+2}\right)+\cdots\right\}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n}.$$

令 $n=10$, $e^2=7.38899$, $R<0.000062$, 故 $e^2=7.3890$.

4. 若 $0<x<1$, 試證

$$1+x<e^x<\frac{1}{1-x}.$$

若 $x>1$, 則有

$$\frac{1+x}{x}<e^{\frac{1}{x}}<\frac{x}{x-1}.$$

由是得
$$\log\frac{1+x}{x}<\frac{1}{x}<\log\frac{x}{x-1}.$$

5. 試證明

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots.$$

6. 當 $|x|$ 極小時，試證明下列諸式.

(1) $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}\approx 1-x+x^4.$

(2) $\dfrac{\arcsin x}{1+x^2}\approx x-\dfrac{5}{6}x^3.$

(3) $(1+x)^{\frac{1}{x}}\approx e\left(1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{24}x^2\right).$

7. 設 $f'''(x)$ 在一間隔內爲一連續函數，$x=a$ 爲這間隔內的一值，由 Taylor 氏定理

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h),\qquad 0<\theta<1.$$

試證明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{3}.$

8. 求 $\sqrt[5]{1000}$, $(998)^{-2}$ 之近似值.

答　3.981071, 0.001002.

9. 求下列極限值:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}.$

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\cos x}.$　　(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\{\sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x(x-1)}\}.$

10. 求下列函數之極值.

(1) $x^m(a-x)^n$, $a>0$, m 與 n 皆爲正整數.

(2) $\sin x(1+\cos x).$　　(3) $e^x+e^{-x}+2\cos x.$

11. $x\to 0$ 時，問下列二數

$$\arctan x-\frac{x}{1+x^2},\qquad \log(1+x)-\frac{12x}{12+6x+x^2},$$

爲第三級無窮小，求其主要部分.

12. 把下列函數在 $x=0$ 鄰近展開至第三項:

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$. (2) $\log\cos x$.

(3) $\cot x-\dfrac{1}{x}$. (4) $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$.

(5) $\log\dfrac{1}{\cos x}$. (6) $\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$.

(7) $e^{\sin x}$. (8) $(1+x)^{1+x}$.

第八章

不定積分

62. 不定積分　由已知函數 $f(x)$ 去求另一函數 $\varphi(x)$, 使 $\varphi'(x)=f(x)$, 這便是積分學的基本問題.

由
$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x),$$

得

$$[1]\qquad d\varphi(x)=f(x)\,dx.$$

換言之, 基本問題的意義, 是去求另一函數 $\varphi(x)$, 使其微分 $d\varphi(x)$ 等於 $f(x)\,dx$ 罷了. 求函數 $\varphi(x)$ 的運算叫做積分法, $\varphi(x)$ 叫做微分 $f(x)\,dx$ 的積分或叫做 $f(x)$ 的積分, 我們以記號

$$[2]\qquad \varphi(x)=\int f(x)\,dx$$

表達之. $\int$ 叫做積分號, $f(x)$ 叫做被積函數, 例如

$$\int 3x^2\,dx=x^3,$$

x^3 便是 $3x^2$ 的積分. 由 (1), (2) 二式得

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx,$$

或

$$[3]\qquad \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x),$$

故積分法也可以說是微分法的反運算.

設有二函數 $\varphi(x)$, $g(x)$ 同爲 $f(x)$ 的積分，則

$$\varphi'(x)=g'(x)=f(x).$$

令 $$F(x)=\varphi(x)-g(x),$$

則 $$F'(x)=\varphi'(x)-g'(x)=0.$$

故函數 $F(x)$ 應是一常數 (§ 20). 令這常數爲 C, 則

$$g(x)=\varphi(x)+C.$$

由此言之，若已知 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的積分，那末 $\varphi(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的積分，常數 C 叫做積分常數，$\varphi(x)+C$ 叫做 $f(x)$ 的不定積分，或叫做 $f(x)$ 的原函數.

例. $$\int 3x^2\,dx=x^3+C,$$

其中 C 之值，或爲 2 或爲 5，均無不可.

有許多函數的積分，我們很易知道，而且也很重要，例如

(1) $\displaystyle\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$, $(m\neq-1)$, (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\log x+C.$

(3) $\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C.$ (4) $\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+C.$

(5) $\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$ (6) $\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C.$

(7) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C.$ (8) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C.$

(9) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,sin} x+C.$ (10) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tan} x+C.$

63. 積分的基本定理 因

$$d\varphi(x)=\varphi'(x)\,dx, \qquad d\psi(x)=\psi'(x)\,dx,$$

故

[1] $$d\{\varphi(x)\pm\psi(x)\}=\{\varphi'(x)\pm\psi'(x)\}\,dx.$$

令　$\varphi'(x)=f(x),\qquad \psi'(x)=g(x),$

則　$\varphi(x)=\int f(x)\,dx,\qquad \psi(x)=\int g(x)\,dx,$

由 (1) 得　$\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\varphi(x)\pm\psi(x).$　故

[2]　$$\boxed{\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx}$$

令 a 為一常數，則

$$d\{a\varphi(x)\}=a\varphi'(x)\,dx=af(x)\,dx,$$

故　$$\int af(x)\,dx=a\varphi(x).$$

由是得

[3]　$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx.$$

例 1.　$\int(a_0+a_1x+a_2x^2)\,dx=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+C.$

例 2.　$\int\left(2x^3-\frac{7}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\frac{1}{2}x^4-14\sqrt{x}+3\arcsin x+C$

64.　代換積分法　欲求 $f(x)$ 的積分，我們往往引入一新變數 t,

使　$x=\varphi(t),\qquad dx=\varphi'(t)\,dt,$

則　$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt}$$

於是問題變為求 $f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)$ 的積分了．設求得其積分為 $F(t)$，然後把 t 由 $x=\varphi(t)$ 解出，代入 $F(t)$ 中，便得所求的積分了．這種方法叫做代換積分法．

例.
$$\int \sin(ax+b)\,dx.$$

令 $ax+b=t$, 則
$$dx=\frac{1}{a}dt,$$

故
$$\int \sin(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int \sin t\,dt=-\frac{\cos t}{a}+C=-\frac{\cos(ax+b)}{a}+C.$$

下列積分，均用這個方法求得的.

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+C,\qquad ax+b=t.$$

$$\int \frac{dx}{x+a}=\log(x+a)+C,\qquad x+a=t.$$

$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C,\qquad ax=t.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a}+C,\qquad x=at.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}+C,\qquad x=at.$$

$$\int \tan x\,dx=-\log\cos x+C,\qquad \cos x=t.$$

65. 部份積分法 因
$$d\{f(x)\,g(x)\}=f(x)\,g'(x)\,dx+f'(x)\,g(x)\,dx,$$

故
$$f(x)\,g(x)=\int f(x)\,g'(x)\,dx+\int f'(x)\,g(x)\,dx,$$

由是得
$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int f'(x)\,g(x)\,dx}$$

或寫如
$$\boxed{\int f\,dg=f\,g-\int g\,df}$$

欲求 $f(x)\,g'(x)$ 的積分，那末問題變而爲求 $f'(x)\,g(x)$ 的積分了，如把 $f'(x)\,g(x)$ 的積分求出後，代入上式，便得 $f(x)\,g'(x)$ 的積分．這種方法叫做部份積分法．玆舉數例於下：

例 1.　求 $\int \log x\,dx.$

令
$$f(x)=\log x, \qquad g(x)=x,$$

則
$$\int \log x\,dx=x\log x-\int dx=x\log x-x+C.$$

例 2.　求 $\int x\cos x\,dx.$

令
$$f(x)=x, \qquad g'(x)\,dx=\cos x\,dx,$$

則
$$g(x)=\sin x,$$

故
$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

例 3.　求 $\int \operatorname{arc\,tan} x\,dx.$

令
$$f(x)=\operatorname{arc\,tan} x, \qquad g(x)=x,$$

則
$$\int \operatorname{arc\,tan} x\,dx=x\operatorname{arc\,tan} x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$$
$$=x\operatorname{arc\,tan} x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C.$$

例 4.　求 $\int x\,e^x\,dx.$

令
$$f(x)=x, \qquad g(x)=e^x,$$

則
$$\int x\,e^x\,dx=x\,e^x-\int e^x\,dx=e^x(x-1)+C.$$

66. 幾個重要積分

1° $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$，先把 $\frac{1}{x^2-a^2}$ 分成二個分數之和，則有

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right),$$

故
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx.$$

若 $\frac{x-a}{x+a}>0$ 時，即 $x^2>a^2$，則

$$\boxed{\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+C}$$

若 $\frac{x-a}{x+a}<0$ 時，即 $x^2<a^2$，則

$$\boxed{\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{a-x}{a+x}+C}$$

2° $\int\frac{dx}{\sin x}$.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{-d(\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+C.$$

因
$$\frac{1+\cos x}{2}=\cos^2\frac{x}{2},\qquad \frac{1-\cos x}{2}=\sin^2\frac{x}{2},$$

故
$$\boxed{\int\frac{dx}{\sin x}=\log\tan\frac{x}{2}+C}$$

3° $\int\frac{dx}{\cos x}$，令 $x=t-\frac{\pi}{2}$，則

$$\cos x=\sin t, \qquad dx=dt,$$

故
$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dt}{\sin t}=\log\tan\frac{t}{2}+C,$$

由是得

$$\boxed{\int\frac{dx}{\cos x}=\log\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C}$$

4° $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，令 $\sqrt{x^2-a^2}=t-x$，則

$$x^2-a^2=(t-x)^2=t^2-2xt+x^2,$$

$$x=\frac{t^2+a^2}{2t}, \qquad dx=\frac{t^2-a^2}{2t^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=t-x=t-\frac{t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2-a^2}{2t},$$

故
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{dt}{t}=\log t+C.$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C}$$

注意　$x=a\sec t$，也是一個很好的代換法.

5° $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$，令 $\sqrt{x^2+a^2}=t-x$，同樣可得

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C}$$

注意：令 $x=a\tan t$，也可得到同樣的結果.

茲將以前講過的幾個重要積分，列表於下：

1.	$\int x^n\,dx, \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
2.	$\int \dfrac{1}{x}\,dx$	$\log\lvert x\rvert$
3.	$\int e^x\,dx$	e^x
4.	$\int a^x\,dx, \quad (a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\log a}$
5.	$\int \sin x\,dx$	$-\cos x$
6.	$\int \cos x\,dx$	$\sin x$
7.	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$	$-\cot x$
8.	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx$	$\tan x$
9.	$\int \dfrac{dx}{\sin x}$	$\log\left\lvert \tan\dfrac{x}{2}\right\rvert$
10.	$\int \dfrac{dx}{\cos x}$	$\log\left\lvert \tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
11.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad (x^2<a^2)$	$\operatorname{arc\,sin}\dfrac{x}{a}$
12.	$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\dfrac{x}{a}$
13.	$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} \begin{cases} x^2>a^2 \\ x^2<a^2 \end{cases}$	$\dfrac{1}{2a}\log\dfrac{x-a}{x+a}$ $\dfrac{1}{2a}\log\dfrac{a-x}{a+x}$
14.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert$

67. 雜例

1° $\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c}$.

若 $b^2-ac>0$, 則所求之積分, 得以對數函數表達之.

$$\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\int\frac{adx}{(ax+b)^2-(b^2-ac)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\log\left|\frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}}\right|+C.$$

若 $b^2-ac<0$, 則所求之積分得以函數 arc tan 表達之.

$$\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\int\frac{d(ax+b)}{(ax+b)^2+(ac-b^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}+C.$$

例如

$$\int\frac{dx}{x^2-2x-3}=\int\frac{dx}{(x-1)^2-4}=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

$$\int\frac{x-3}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-8}{x^2+2x+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-4\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+2x+3)-2\sqrt{2}\operatorname{arc\,tan}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

2° $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$.

若 $a>0$, 則

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\int\frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{(ax+b)^2-(b^2-ac)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d(ax+b)}{\sqrt{(ax+b)^2-(b^2-ac)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(ax+b+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}\right)+C.$$

若 $a<0$, 則

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\int\frac{\sqrt{-a}\,dx}{\sqrt{b^2-ac-(ax+b)^2}}.$$

在此可分二種情形論之:

(a) $b^2-ac>0$, 則

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\frac{\sqrt{-a}}{a}\int\frac{d(ax+b)}{\sqrt{b^2-ac-(ax+b)^2}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}+C.$$

(b) $b^2-ac<0$, 則 $ax^2+2bx+c$ 常小於零(因 $a<0$), 此時 $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ 便爲虛數了.

例如

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}=\log\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right)+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(x-1)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

3° $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\sec^3 x\,dx$, 用部份積分法, 令

$$f(x)=\sec x, \qquad g'(x)\,dx=\sec^2 x\,dx,$$

則 $$f'(x)\,dx=\sec x\tan x\,dx, \qquad g(x)=\tan x.$$

代入 §64 的公式，便得

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx.$$

然 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$，故

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \log \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + 2C.$$

把右邊的積分移於左邊，然後以 2 除兩邊，卽得

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\log \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C.$$

4° $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$. 令 $x = a\sin t$，則 $dx = a\cos t\, dt$，故

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

因 $t = \arcsin \frac{x}{a}$, $\quad \frac{\sin 2t}{2} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$,

故 $$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C}$$

這個積分也可用部份積分法求得之（參看例 5°）.

5° $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx$. 用部份積分法，便得

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

故 $$2\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+2C,$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$$

這個積分也可用代換法 $x=a\sec t$ 求得之.

依同理, 可得

$$\boxed{\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C}$$

6° $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ 及 $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

用部份積分法, 得

$$\begin{cases}\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx,\\ \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx.\end{cases}$$

由是解得所求之積分爲

$$\begin{cases}\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2},\\ \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}.\end{cases}$$

7° $\int\sin^2 x\,dx$ 及 $\int\cos^2 x\,dx$. 用三角公式

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

便得

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C,$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

習　題　8

求下列積分

1. $\int x^5\,dx$,　$\int x\sqrt{3x}\,dx$,　$\int \sqrt[3]{x}\,dx$,　$\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$,

$\int x(2x-5)(x+1)\,dx$.

2. $\int\frac{dx}{3x-1}$,　$\int\frac{dx}{x\log x}$,　$\int\sin^2 x\cos x\,dx$,　$\int\sin 2x\cos 2x\,dx$,

$\int\frac{x\,dx}{2-x^2}$,　$\int\frac{2\cos x}{3+\sin x}dx$,　$\int\frac{x^2-4}{x-3}dx$,　$\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$,

$\int\frac{e^x+a}{e^x-a}dx$,　$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$,　$\int\frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{5-x^2}}$,

$\int\frac{(\log x)^2\,dx}{3x}$,　$\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$.

3. $\int x\,e^{x^2}\,dx$,　$\int e^{-2x}\,dx$,　$\int e^{\cos x}\sin x\,dx$,

$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$,　$\int 5^{-x}\,dx$.

4. $\int\cos(3x-2)\,dx$,　$\int\tan 3x\,dx$,　$\int\sec^2(3x+1)\,dx$,

$\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$,　$\int x\tan x^2\,dx$,

$\int\frac{dx}{1+\cos x}$　(分子，分母同以 $1-\cos x$ 乘之)，

$\int\frac{dx}{1+\sin x}$　(分子，分母同以 $1+\cos x$ 乘之)，

$\int\frac{\sec^2 x\,dx}{1+\tan x}$.

5. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$, $\int \frac{dx}{2x^2+1}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$, $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$,

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$.

6. 試證明

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C, \quad \int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C.$$

7. $\int x \log x\,dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C.$

8. $\int x^2 \log x\,dx = \frac{x^3}{3}\left(\log x - \frac{1}{3}\right) + C.$

9. $\int x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

10. $\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx = x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

11. $\int x^3 \operatorname{arc\,tan} x\,dx = \frac{1}{4}(x^4-1) \operatorname{arc\,tan} x + \frac{1}{12}(3x-x^3) + C.$

12. $\int \frac{\operatorname{arc\,tan} x}{x^2}\,dx = \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{\operatorname{arc\,tan} x}{x} + C.$

13. $\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right) + C.$

14. $\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$

15. $\int e^{-x} \sin 3x\,dx = -\frac{e^{-x}}{10}(\sin 3x + 3 \cos 3x) + C.$

16. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C.$

試證明下列各式

17. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+3}=-\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x+3}+C.$

18. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-6x+12}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-3}{\sqrt{3}}\right)+C.$

19. $\displaystyle\int\frac{dx}{4x-x^2}=\frac{1}{4}\log\left(\frac{x}{x-4}\right)+C.$

20. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+3x+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C.$

21. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4+2x^2+2}=\frac{1}{2}\arctan(x^2+1)+C.$

22. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x-1}{4}\right)+C.$

23. $\displaystyle\int\frac{2dx}{\sqrt{5-4x-3x^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{3x+2}{\sqrt{19}}\right)+C.$

24. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}}=\log(x-3+\sqrt{11-6x+x^2})+C.$

25. $\displaystyle\int\frac{2x+3}{4x^2+1}dx=\frac{1}{4}\log(4x^2+1)+\frac{3}{2}\arctan 2x+C.$

26. $\displaystyle\int\frac{(3x-2)\,dx}{1-6x-9x^2}=-\frac{1}{6}\log(1-6x-9x^2)$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\log\left(\frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}\right)+C.$$

27. $\displaystyle\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}}=\sqrt{x^2+2x}+2\log(x+1+\sqrt{x^2+2x})+C.$

28. $\displaystyle\int\frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}=-\sqrt{4x-x^2}+4\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C.$

29. $\displaystyle\int\sqrt{5-3x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{5-3x^2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}x+C.$

30. $\int\sqrt{4x^2+9}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{4x^2+9}+\frac{9}{4}\log(2x+\sqrt{4x^2+9})+C$

31. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx=\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$

32. $\int\sqrt{5-2x+x^2}\,dx=\frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2}$

$$+2\log(x-1+\sqrt{5-2x+x^2})+C.$$

試求下列積分

33. $\int\frac{(2x+3)\,dx}{x^2-x+5}.$

34. $\int\frac{x\,dx}{x^2+x-3}.$

35. $\int\frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$

36. $\int\frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{15-2x-x^2}}.$

37. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$

38. $\int x\sqrt{5-3x^2}\,dx.$

39. $\int(x+4)\sqrt{x^2+2x+3}\,dx.$

40. $\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

41. $\int\sin^3 x\,dx.$

42. $\int\cos^5 x\,dx.$

43. $\int\cos^2 x\sin^3 x\,dx.$

44. $\int\sin^4 x\,dx.$

45. $\int\cos x\sin 3x\,dx.$

46. $\int\sin 5x\sin 6x\,dx.$

47. $\int\cos 2x\cos 3x\,dx.$

48. $\int\cos^2 x\sin 2x\,dx.$

第九章

定積分

68. 定積分　設 $y=f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 間隔內是 x 的連續函數，在這間隔內任意取 $n-1$ 個分點 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，幷令 ξ_i 爲 x_i 與 x_{i+1} 之間的任意一值，即

$$a=x_0\leqq\xi_1\leqq x_1,\quad x_1\leqq\xi_2\leqq x_2,\quad\cdots,\quad x_{n-1}\leqq\xi_n\leqq x_n=b,$$

由是作和數如下：

$$\begin{aligned}I_n&=(x_1-x_0)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\cdots\\&\quad+(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)+\cdots+(x_n-x_{n-1})f(\xi_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i).\end{aligned}$$

令
$$x_1-x_0=\Delta x_1,\qquad x_2-x_1=\Delta x_2,\qquad\cdots,$$
$$x_i-x_{i-1}=\Delta x_i,\qquad\cdots,\qquad x_n-x_{n-1}=\Delta x_n,$$

則
$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

今將間隔 (a, b) 內的分點無限增多，使一切 Δx_i 都趨近於零，則 I_n 當向一極限收斂．這個極限就叫做函數 $f(x)$ 的定積分，我們以記號

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

表示之．由此言之，所謂定積分者無他，實卽和數 I_n 的極限罷了．

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx}$$

a 與 b 叫做積分限, a 爲下限, b 爲上限.

設 $f(x)$ 在 (a, b) 間隔內常爲正數, 則曲線 AB, $y=f(x)$, 完全在 x

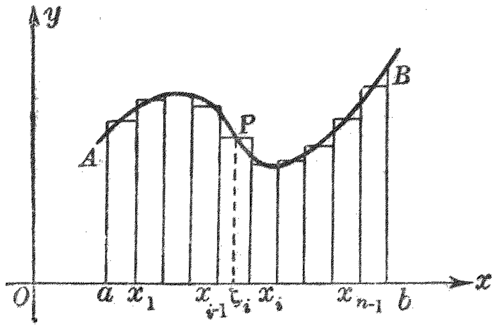


圖 71

軸之上, 那末乘積

$$(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

便是以 $x_{i-1}x_i$ 爲底, $P\xi_i$ 爲高的長方形的面積, I_n 便是 n 個小長方形面積之和. 若 (a, b) 內的分點無限增多, 使一切底邊 $x_{i-1}x_i$ 之長都趨於零, 則 I_n 的極限 I 就叫做 $aABb$ 的面積.

$$\text{面積 } aABb = \int_a^b f(x)\,dx.$$

若 $f(x)$ 在 a, b 之間常爲負數, 則積分所代表者, 便是 $aABb$ 的面積反號, 若 $f(x)$ 在 (a, b) 內之值, 有正有負, 設曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸相交於 c 點, 如圖 72, 則

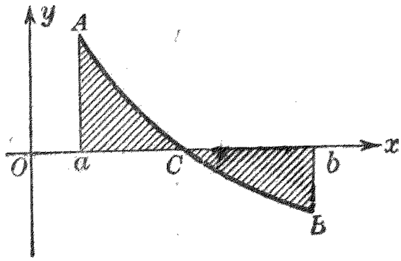


圖 72

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \text{面積 } aAc - \text{面積 } cBb.$$

例 1.　求積分

$$\int_0^b x^2\,dx, \quad (b>0).$$

就幾何的意義言之，這個積分是表示拋物線 $y=x^2$ 與直線

$$y=0, \quad x=b$$

所圍成的面積．今將間隔

$$0\leqq x\leqq b$$

平分爲 n 個小間隔，每一小間隔的長爲

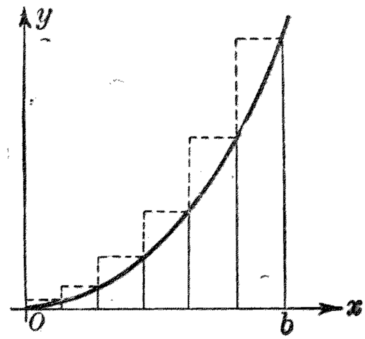


圖 73

$$x_i-x_{i-1}=\Delta x_i=\frac{b}{n}=h. \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

令　$$\xi_i=x_i,$$

則　$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=(h^2+2^2h^2+3^2h^2+\cdots+n^2h^2)\,h$$

$$=(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)\,h^3$$

$$=\frac{b^3(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)}{n^3}.$$

然　$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

代入上式，得

$$I_n=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

當 $n\to\infty$，I_n 向極限 $\frac{b^3}{3}$ 收斂，所以

$$\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}.$$

例 2. 求積分 $\int_a^b \sin x\,dx$.

把間隔 $a \leqq x \leqq b$ 平分爲 n 個小間隔，每一小間隔之長爲

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h.$$

仍令 $\xi_i = x_i$，於是

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \{\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \cdots + \sin(a+nh)\}\,h.$$

以 $2\sin\frac{h}{2}$ 乘上式右邊，並利用三角公式

$$2\sin u \sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v),$$

於是得

$$I_n = \frac{h}{2\sin\frac{n}{2}}\left\{\begin{aligned} &\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{3}{2}h\right) + \cos\left(a+\frac{3}{2}h\right) \\ &\qquad - \cos\left(a+\frac{5}{2}h\right) + \cdots \\ &\qquad + \cos\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right) \\ &\qquad - \cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right) \end{aligned}\right\}$$

因 $a+nh=b$，故

$$I_n = \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right\}.$$

當 $n\to\infty$ 時，$h\to 0$，I_n 向極限 $\cos a - \cos b$ 收斂，故

$$\int_a^b \sin x\,dx = -(\cos b - \cos a).$$

69. 積分值之存在 欲證明極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

之存在，我們應該知道連續函數 $f(x)$ 尚有一重要的特性如下：

定理. 設 $f(x)$ 在間隔 $a\leqq x\leqq b$ 內爲 x 的連續函數，任給一正數 ϵ，必另可求得正數 $\delta=\delta(\epsilon)$. 當間隔內的任意二數 x', x'' 適合於不等式

$$|x'-x''|<\delta$$

時，恆能使

$$|f(x')-f(x'')|<\epsilon.$$

這就叫做函數 $f(x)$ 在間隔 $a\leqq x\leqq b$ 內的一致連續性 (證明從略).

明乎此，我們便可進而討論 I_n 的極限問題了.* 令 M_i 及 m_i 爲函數 $f(x)$ 在 (x_{i-1}, x_i) 間隔內的最大值與最小值，復令

$$S_n=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\cdots+M_n\Delta x_n,$$

$$s_n=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\cdots+m_n\Delta x_n.$$

1° 先證 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0.$

設 ϵ 爲任意選定的正數，根據連續函數的一致連續性，祇要 n 適當的大，同時 Δx_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 適當的小，便有

$$M_i-m_i<\epsilon, \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

故
$$0\leqq S_n-s_n=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\epsilon(b-a),$$

卽
$$\lim_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0.$$

2° 次證 S_n 有一極限.

如在間隔 (x_{i-1}, x_i) 內再加分點，於是 n 增大，而 S_n 之值，或隨之減小，或依然不變. 但其值始終不能小於任何 s_i，所以 S_n 必向一極限

* 德國算學家 Bernhard Riemann (1826–1866)，首先證明這極限值的存在.

I 收斂 (§4). 今在間隔 (a, b) 內, 另取 $m-1$ 個分點 $z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$, 於是復得二數 S'_m, s'_m. 若就分點 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 與 $z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$ 合而言之, 復得二數 S''_l, s''_l $(l \leqq m+n)$, 然後令 m 適當的大, 同時令 Δz_k $(k=1, 2, \cdots, m)$ 適當的小, 便有

$$S'_m - s'_m < \epsilon(b-a)$$

在分點 $a, x_1, x_2, \cdots$ 中, 加入了分點 $z_1, z_2, \cdots$, 故有

$$s_n \leqq S''_l \leqq S_n.$$

就另一方面來說, 在分點 $a, z_1, z_2, \cdots$ 中, 加入了分點 $x_1, x_2, \cdots$, 故有

$$s_m \leqq S''_l \leqq S_m.$$

由是得
$$S_n - S''_l \leqq S_n - s_n < \epsilon(b-a),$$

$$S'_m - S''_l \leqq S'_m - s'_m < \epsilon(b-a).$$

但
$$S_n - S'_m = (S_n - S''_l) - (S'_m - S''_l),$$

故
$$|S_n - S'_m| \leqq |S_n - S''_l| + |S'_m - S''_l| < 2\epsilon(b-a).$$

即
$$\lim_{m\to\infty} S'_m = \lim_{n\to\infty} S_n = I.$$

然
$$s_n \leqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq S_n,$$

故
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = I.$$

70. 關於定積分的定理 在定積分的定義中曾經假定 $a<b$. 今若 $a>b$, 我們作一規定如下:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

若 c 為 (a, b) 內的一值, 根據定積分的定義, 便有

[1] $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx}$$

若 c 爲 (a, b) 外的一值，設 $a<b<c$，但 $f(x)$ 在 (a, c) 間隔內仍爲連續函數，則有

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.$$

由此得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

結果與 (1) 式相同.

設 $f(x)$, $g(x)$ 爲間隔 (a, b) 內的二連續函數，則有

[2] $$\boxed{\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx}$$

若在 (a, b) 間隔內恆有

$$f(x)\geqq g(x),$$

則

[3] $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx\geqq\int_a^b g(x)\,dx}$$

當 $a\leqq x\leqq b$ 時，若 $f(x)\geqq 0$，則

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqq 0.$$

又由不等式 $|A+B|\leqq|A|+|B|$，我們便易知道

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

設 $f(x)$, $g(x)$ 在間隔 $a\leqq x\leqq b$ 內爲 x 的連續函數．在這間隔內，令 M 爲 $f(x)$ 的最大值，m 爲其最小值，且 $g(x)$ 常爲正數，則有

$$mg(x) \leqq f(x)\, g(x) \leqq Mg(x),$$

於是 $$m\int_a^b g(x)\, dx \leqq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqq M\int_a^b g(x)\, dx.$$

故 $$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx. \qquad (m \leqq \mu \leqq M)$$

在間隔 (a, b) 內, $f(x)$ 原爲 x 的連續函數, 故 $f(x)$ 由最小值 m 變到最大值 M; 至少必經過 μ 值一次 (§10). 申言之, 在 (a, b) 間隔內至少有一值如 ξ 使 $f(\xi) = \mu$, 於是

[5] $$\boxed{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx} \qquad a \leqq \xi \leqq b)$$

若 $g(x)$ 在間隔 (a, b) 內常爲負數, (4) 式顯然亦能成立.

中值定理. 設 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a, b) 間隔內爲 x 的連續函數, 在這間隔內 $g(x)$ 保持常號, 則 a, b 之間至少有一值如 ξ, 能使 (5) 式成立.

在特例 $g(x) = 1$, 則

[6] $$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(\xi)} \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

或 $$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f\{a + \theta(b-a)\}} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1)$$

由此言之, 第 71 圖 $aABb$ 的面積便等於以 ab 爲底, $f(\xi)$ 爲高的長方形的面積. 所以 $f(\xi)$ 叫做 $f(x)$ 在 (a, b) 間隔內的中值.

取 $n-1$ 個分點 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, 把間隔 $a \leqq x \leqq b$ 平分爲 n 個小間隔. 令每一小間隔之長爲

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h,$$

則 $$f(x_1), \quad f(x_2), \quad \cdots, \quad f(x_n),$$

$(x_n=b)$ 的平均值應是

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}, \quad \text{或} \quad \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{nh}\cdot h.$$

但
$$nh=b-a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)h=\int_a^b f(x)\,dx.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}=f(\xi).$$

例. 函數 $\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 間隔內的中值為

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

71. 定積分與不定積分的關係　今把定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

中的上限 b 代以變數 x. 設 $x>a$, 則其積分值當為上限 x 的函數

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

今給 x 以一增量 Δx, 則有

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx=\int_a^x f(x)\,dx+\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx,$$

由是得

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx=\Delta x\,f(x+\theta\Delta x).$$

原設 $f(x)$ 為連續函數, 故 $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$ 隨 Δx 趨近於零而趨於零, 所以 $\Phi(x)$ 也是 x 的連續函數. 以 Δx ~~得~~上式兩邊, 得

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x+\theta\Delta x),$$

除

當 $\Delta x \to 0$ 時，便有

$$\boxed{\Phi'(x)=f(x)}$$

今設 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的不定積分，

$$\int f(x)\,dx=F(x),$$

則 $\Phi(x)$ 與 $F(x)$ 不過相差一常數罷了 (§20). 設

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

或
$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)+C,$$

式中的 C 是待定常數. 令上限 x 等於 a, 則

$$0=F(a)+C,$$

故
$$C=-F(a).$$

於是
$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a).$$

若上限 x 等於 b, 則

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)}$$

例.
$$\int_1^3 x^2\,dx=\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^3=9-\frac{1}{6}$$
$$=8\frac{2}{3}.$$

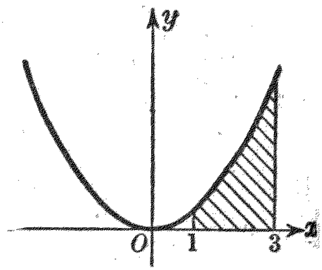


圖 74

72. 由不定積分求定積分

1° 基本公式. 設已知函數 $f(x)$ 的不定積分為 $F(x)$, 則

[1]
$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

這個基本公式常寫如

[2] $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big|\overset{*}{F}(x)\Big|_a^b}$$

若 $\overset{*}{F}(x)$ 爲一多値函數，我們選定其中之一支（函數分支），於是這一支在 (a, b) 間隔內爲一單値連續函數，然後由此計算

$$F(b) - F(a).$$

例如 $$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tan} b - \operatorname{arc\,tan} a,$$

$\operatorname{arc\,tan} a$ 與 $\operatorname{arc\,tan} b$ 之値應在同一分支中，其最簡單者便是 $\operatorname{arc\,tan} x$ 的主支* $\left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tan} x < \frac{\pi}{2}\right)$. 如 $a=0$, $b=1$, 則

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

2° 代換積分法 設 $f(x)$ 在 (a, b) 間隔內爲一連續函數，令

$$x = \varphi(t).$$

若 (i) 當 t 由 t_1 變至 t_2, x 由 $a=\varphi(t_1)$ 連續的變到 $b=\varphi(t_2)$, (ii) $\varphi'(t)$ 在 (t_1, t_2) 間隔內爲一連續函數，(iii) $f\{\varphi(t)\}$ 在 (t_1, t_2) 間隔內亦爲一連續函數，那末

[3] $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt}$$

這便是代換積分法的公式．今就下列兩個 t 的函數考察之，

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx, \qquad \int_{t_1}^{t} f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt,$$

我們可以證明這兩個積分對於 t 的導數是相等的，第二積分的導數顯然是 $f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)$ (§71)，至於第一積分可視爲 φ 的函數，而 φ 又

* 見 §3.

是 t 的函數，故其導數應是這積分對於 φ 的導數與 φ 對於 t 的導數相乘之積．前者爲 $f\{\varphi(t)\}$，後者爲 $\varphi'(t)$，由此可知第一積分的導數亦爲 $f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)$．這二積分的導數既然相同，僅相差一常數罷了．但 $t=t_1$ 時，這二積分同等於零，故

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx=\int_{t_1}^{t} f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)\,dt.$$

令 $t=t_2$，便得 (3) 式．

例 1．求 $I=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

令 $$x=a\sin t, \qquad 0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}.$$

當 t 由 0 增至 $\frac{\pi}{2}$，x 由 0 連續的變到 a，於是

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, \qquad dx=a\cos t\,dt.$$

故 $$I=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi a^2}{4}.$$

若令 $$x=a\sin t, \qquad \frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi,$$

當 t 由 π 變至 $\frac{\pi}{2}$，x 由 0 連續的變到 a，這時 $\cos t<0$，故

$$\sqrt{a^2-x^2}=-a\cos t, \qquad dx=a\cos t\,dt.$$

$$I=-a^2\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi a^2}{4}.$$

例 2．易知 $\int_{-1}^{+1}x^2\,dx=\frac{2}{3}$，若令 $x^2=t$，則

$$dx=\frac{dt}{2x}=\frac{dt}{\pm 2\sqrt{t}},$$

式中之分母，當 x 由 0 變至 1，應取正號；當 x 由 -1 變至 0，應取負號，於是

$$\int_{-1}^{+1} dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}\,dt+\frac{1}{2}\int_1^0(-\sqrt{t})\,dt=\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}.$$

3° 部份積分法．設 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a, b) 間隔內有連續導數 $f'(x)$, $g'(x)$，那末

$$\int_a^b\{f(x)\,g'(x)+f'(x)\,g(x)\}\,dx=\Big|f(x)\,g(x)\Big|_a^b.$$

由是得

[4]
$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx=\Big|f(x)\,g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

例．設 n 爲大於 1 之整數，則

[5]
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\left|-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx$$
$$=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx.$$

由這個關係式便得下列二公式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\frac{\pi}{2}, &&(n\text{ 爲偶數})\\&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}. &&(n\text{ 爲奇數})\end{aligned}}$$

以 $\cos x$ 代 $\sin x$ 可得同樣結果．

注意：若以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx$ 除 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx$（$m$ 爲正整數），便有

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdots\cdots\frac{2m\cdot2m}{(2m-1)(2m+1)}\cdot\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx},$$

在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 間隔內，

$$0<\sin^{2m+1}x\leqq\sin^{2m}x\leqq\sin^{2m-1}x,$$

由是得

[6] $$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\,dx.$$

令 (5) 式中之 n 等於 $2m+1$，則得

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx}=\frac{2m+1}{2m}=1+\frac{1}{2m},$$

以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx$ 除 (6) 式，則

$$1<\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx}<1+\frac{1}{2m}.$$

因此當 $m\to\infty$ 時，式中二積分之比趨近於極限 1，故

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdots\cdots\frac{2m\cdot2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

又因 $$\frac{2\cdot2}{1\cdot3}=1+\frac{1}{3},\qquad\frac{4\cdot4}{3\cdot5}=1+\frac{1}{15},\qquad\cdots,$$

$$\frac{2m\cdot2m}{(2m-1)(2m+1)}=1+\frac{1}{4m^2-1},$$

故 $$\frac{\pi}{2}\approx\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{35}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4m^2-1}\right).$$

73. 冪級數的積分法　定理. 設 $(-r, r)$ 爲級數

$$f(x)=a_0+a_1x_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

的收斂間隔，x 爲這收斂區內的一值，則

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x a_0\,dx+\int_0^x a_1 x\,dx+\int_0^x a_2 x^2\,dx+\cdots$$
$$=a_0 x+\frac{1}{2}a_1 x^2+\frac{1}{3}a_2 x^3+\cdots.$$

證：令　$R_n(x)=a_n x^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots,$

那末

$$\int_0^x f(x)\,dx=a_0 x+\frac{1}{2}a_1 x^2+\frac{1}{3}a_2 x^3+\cdots+\int_0^x R_n(x)\,dx.$$

令 x_0 爲 $|x|$ 與 r 間的一數，$|x|<x_0<r$，則級數 $\Sigma a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 是絕對的收斂，所以祇要 n 適當的大，便可使

$$|a_n x_0{}^n|+|a_{n+1}x_0{}^{n+1}|+\cdots<\epsilon,$$

ϵ 爲任意選定的正數．然

$$|R_n(x)|\leqq|a_n x^n|+|a_{n+1}x^{n+1}|+\cdots<\epsilon,$$

故
$$\left|\int_0^x R_n(x)\,dx\right|<\epsilon|x|,$$

卽
$$\lim_{n\to 0}\int_0^x R_n(x)\,dx=0.$$

故
$$\int_0^x f(x)\,dx=a_0 x+\frac{1}{2}a_1 x^2+\frac{1}{3}x_2 x^3+\cdots.$$

例．
$$\log(1+x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x},\qquad |x|<1.$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,$$

故
$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

又如
$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad x^2<1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots,$$

故 $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

他如 $\arctan x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$, $(x^2<1)$ 亦得依同法展開之.

74. 無窮積分 以前所述的定積分, 是假定 a, b 二數爲有限數, 今若 $b=\infty$, 我們應爲

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

立一定義如下: 若 $x\to+\infty$ 時,

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

趨近於一有限數, 那末這個極限便叫做

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

的積分值. 此時積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 叫做收斂的, 否則叫做發散的. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 常叫做無窮積分.

依同理我們得確定了

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

的意義.

例 1. $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-x}\,dx=\lim_{x\to\infty}\Big|-e^{-x}\Big|_0^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1-e^{-x})=1.$$

例 2.　證明 $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ 爲一有限值.

我們知道 $e^{-x^2}<1$, 且於 $x>1$ 時, $e^{-x^2}<xe^{-x^2}$, 所以

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx+\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx<\int_0^1 dx+\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx.$$

然
$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2e},$$

故
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx<1+\frac{1}{2e}.$$

又因 $e^{-x^2}>0$, 故積分值應爲一正數, 這個積分值等於 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (見 §102).

例 3.　求積分 $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, $(a>0,\ p>0)$.

$$\int_a^x \frac{dx}{x^p}=\int_a^x x^{-p}\,dx=\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

若 $p>1$, 則 $1-p$ 爲一負數. 當 $x\to\infty$ 時, $x^{1-p}\to 0$. 故

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}=\frac{a^{1-p}}{p-1}, \qquad (p>1).$$

若 $p=1$, 則

$$\int_a^x \frac{dx}{x}=\log x-\log a.$$

若 $p<1$, 則 $1-p$ 爲一正數. 當 $x\to\infty$ 時, $x^{1-p}\to\infty$. 故

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}=\infty. \qquad (p\leqq 1)$$

75.　收斂性的決定　今欲決定無窮積分

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

之收斂與否, 先設函數 $f(x)$ 在 (a,∞) 間隔內常大於零, 且 $x\to\infty$

時, $f(x) \to 0$, 那末這時 $x^p f(x)$, $(p>0)$, 便呈不定形 $\infty \times 0$.

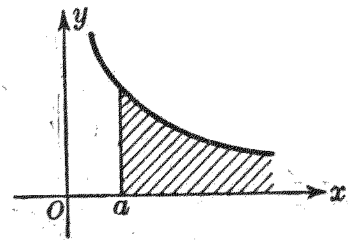


圖 75

1° 若有一數 p 大於 1, 當 $x\to\infty$ 時, $x^p f(x)$ 趨近於一有限數 l, 即

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l.$$

設 M 爲一大於 l 之數, 那末當 x 之值適當的大時, $x \geqq c$ 時, $x^p f(x)$ 之值必能常小於 M,

$$x^p f(x) < M,$$

或
$$f(x) < \frac{M}{x^p}.$$

故
$$\int_c^\infty f(x)\,dx < M\int_c^\infty \frac{dx}{x^p}.$$

原設 $p>1$, 所以積分 $\int_c^\infty \frac{dx}{x^p}$ 爲一有限數, 故

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

是收斂的.

2° 若有一數 p 小於 1 或等於 1, 當 $x\to\infty$ 時, $x^p f(x)$ 趨近於一有限數 l, $(l \neq 0)$, 即

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \neq 0.$$

設 m 爲一小於 l 的正數, $0<m<l$, 那末當 x 之值適當的大時, $x \geqq c$ 時, $x^p f(x)$ 必能常大於 m,

$$x^p f(x) > m,$$

或
$$f(x) > \frac{m}{x^p},$$

故
$$\int_c^\infty f(x)\,dx > m\int_c^\infty \frac{dx}{x^p}.$$

原設 $p\leqq 1$, 所以積分 $\int_c^\infty \frac{dx}{x^p}=\infty$. 故

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^\infty f(x)\,dx$$

是發散的.

例 1.
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+1}}.$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+1}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}.$$

當 $x\to\infty$ 時, 乘積

$$x^{\frac{3}{2}}f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}$$

向極限 1 收斂, 此時 $p=\frac{3}{2}>1$, 故積分是收斂的.

例 2.
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\frac{1}{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}.$$

當 $x\to\infty$ 時, 乘積

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}$$

向極限 1 收斂, 此時 $p=1$, 故積分是發散的.

76. 瑕積分　設函數 $f(x)$ 在 (a, b) 間隔內, 除 $x=c$ 以外, 是 x 的連續函數. 當 $x=c$ 時, 函數 $f(x)$ 變爲無窮. 若極限

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\lim_{\epsilon'\to+0}\int_{c+\epsilon'}^b f(x)\,dx$$

爲一有限數，那末這極限值便叫做 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的積分值．此時積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 叫做收斂的；否則叫做發散的．$\int_a^b f(x)\,dx$ 常叫做瑕積分．

例 1. $$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-1}^{\epsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\epsilon'\to+0}\int_{\epsilon'}^{+1}\frac{dx}{x^2}$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\left(-1+\frac{1}{\epsilon}\right)+\lim_{\epsilon'\to+0}\left(-1+\frac{1}{\epsilon'}\right),$$

由是可知所求的積分是發散的，如不照上法演算，便得一錯誤結果如下：

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}=\left|-\frac{1}{x}\right|_{-1}^{+1}=-2.$$

例 2. $\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^n}$, $(n>0)$. 此時 $c=b$.

$$\int_a^{b-\epsilon}\frac{dx}{(b-x)^n}=-\frac{\epsilon^{1-n}}{1-n}+\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}.$$

若 $n<1$，則 $1-n$ 爲一正數．當 $\epsilon\to+0$ 時，$\epsilon^{1-n}\to0$，故

$$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^n}=\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n},\qquad(n<1)$$

若 $n>1$，則 $1-n$ 爲一負數．當 $\epsilon\to+0$ 時，$\epsilon^{1-n}\to\infty$，故積分是發散的．

若 $n=1$，則

$$\int_a^{b-\epsilon}\frac{dx}{b-x}=-\log\epsilon+\log(b-a).$$

當 $\epsilon\to0$ 時，$\log\epsilon\to-\infty$，故此時積分也是發散的．

設 $$\lim_{\epsilon\to+0}f(b-\epsilon)=\infty.$$

今欲決定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

之收斂與否，先設函數 $f(x)$ 在 (a, b) 間隔內常大於零，那末當 $x \to b$ 時，

$$(b-x)^n f(x), \quad (n>0)$$

便呈不定形 $0\times\infty$.

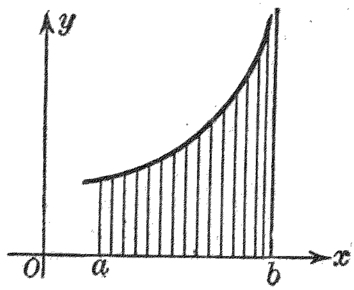


圖 76

1° 若有一數 n 小於 1，當 $x \to b$ 時，$(b-x)^n f(x)$ 趨近於一有限數 l，那末這積分是收斂的.

2° 若有一數 n 大於 1，或等於 1，當 $x \to b$ 時，$(b-x)^n f(x)$ 趨近於一有限數 l $(l \neq 0)$，那末這積分是發散的.

這法則的證明與前節相仿，讀者可自證之.

例如積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log x}.$$

$$f(x) = \frac{1}{\log x}, \qquad (1-x)^n f(x) = \frac{(1-x)^n}{\log x}.$$

令 $n=1$，則

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\log x} = -1 \neq 0,$$

故積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\log x}$ 是發散的.

又如積分

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad (a<b)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

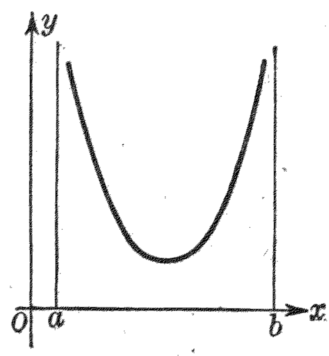


圖 77

當 $x \to a$ 時，乘積 $(x-a)^{\frac{1}{2}} f(x)$ 趨近於極限 $\frac{1}{\sqrt{b-a}}$. 當 $x \to b$ 時，乘積 $(b-x)^{\frac{1}{2}} f(x)$ 也趨近於極限 $\frac{1}{\sqrt{b-a}}$. 故積分是收斂的，且易知 $I=\pi$.

77. 平面形之面積 在直角座標制，設有一曲線 C: $y=f(x)$，幷設 $f(x)$ 在 (a, b) 間隔內連續而且常大於零，則由直線 $x=a$, $x=b$ $y=0$, 與曲線 C 所圍成的面積 A 爲 (§68)

$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

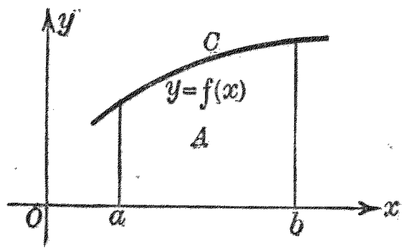


圖 78

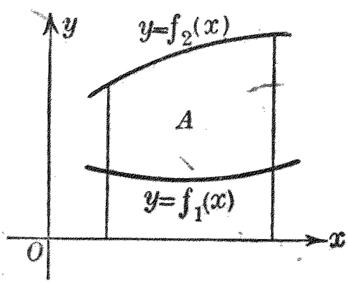


圖 79

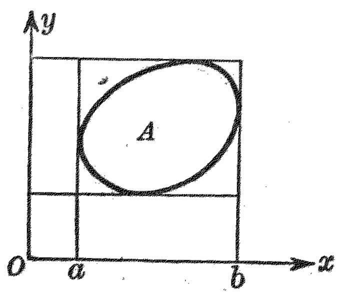


圖 80

若函數 $f_2(x)$ 在 (a, b) 間隔內常大於 $f_1(x)$，則由直線 $x=a$, $x=b$, 與曲線 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ 所圍成的面積 A 等於

$$\boxed{A=\int_a^b \{f_2(x)-f_1(x)\}\,dx}$$

在極座標制，設 P, Q 爲曲線 $r=f(\theta)$ 上的任意二點．作 OP, OQ 二直線，命 OP, OQ 與 ox 所夾之角依次爲 α, β, $(\alpha<\beta)$，并設 $f(\theta)$ 在變區 $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ 內連續而且爲正．在曲線 PQ 上任意取 $n-1$ 點 P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}，命 OP_{i-1}, OP_i 與 ox 所夾之角依次爲

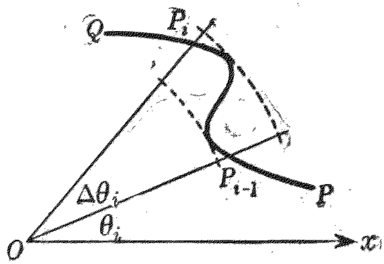


圖 81

$$\theta_i,\quad \theta_i+\Delta\theta_i,$$

則
$$\frac{1}{2}m_i^2\,\Delta\theta_i\leqq \text{面積 } OP_{i-1}P_i\leqq\frac{1}{2}M_i^2\,\Delta\theta_i,$$

m_i, M_i 爲間隔 $(\theta_i,\ \theta_i+\Delta\theta_i)$ 內 r 之最小值與最大值．應用中值定理於函數 $r=f(\theta)$，便得

$$\text{面積 } OP_{i-1}P_i=\frac{1}{2}f^2(\xi_i)\,\Delta\theta_i,$$

$$[m_i\leqq f(\xi_i)\leqq M_i].$$

故面積 OPQ 等於

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f^2(\xi_i)\,\Delta\theta_i.$$

當 $n\to\infty$ 時，其值等於定積分 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$．今命所求之面積 OPQ 爲 A，便有

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta,$$

或
$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta}$$

例 1.　求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之面積.

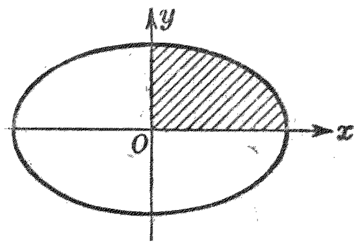


圖 82

橢圓在 x 軸以上的一部分，其方程式應爲

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

則橢圓在第一象限的面積等於

$$A=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{2a}\left| x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right|_0^a=\frac{\pi ab}{4}.$$

故橢圓之全面積等於 πab.

例 2.　求拋物線 $y^2=x$ 與直線 $x-y=1$ 所圍成之面積.

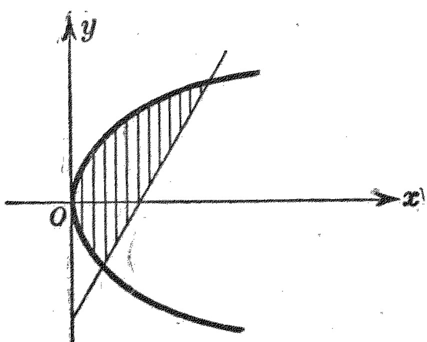


圖 83

先求拋物線與直線交點之橫標，得

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

在 $\left(0,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 間隔內，求 $y=\sqrt{x}$ 與 $y=-\sqrt{x}$ 之間之面積；在 $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 間隔內，求 $y=\sqrt{x}$ 與 $y=x-1$ 之間之面積．故

$$A=\int_0^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} 2\sqrt{x}\,dx+\int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(\sqrt{x}-x+1)\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\left|\sqrt{x^3}\right|_0^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}+\left|\frac{2}{5}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}x^2+x\right|_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{5\sqrt{5}}{6}.$$

在本題如取 y 爲自變數，則積分較爲簡單．先求直線與拋物線之交點縱標，得

$$y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

在間隔 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq y\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 內，求 $x=y+1$ 與 $x=y^2$ 之間之面積，故

$$A=\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(y+1-y^2)\,dx$$

$$=\left|\frac{1}{2}y^2+y-\frac{1}{3}y^3\right|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{5\sqrt{5}}{6}.$$

例 3. 求擺線 (§36)

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} \quad 0\leqq t\leqq 2\pi$$

與 x 軸所圍成之面積.

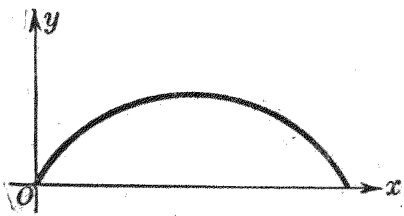


圖 84

因 $$\int y\,dx=\int y\frac{dx}{dt}dt,$$

故 $$A=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$

$$=a^2\left|\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

由此可知面積 A 等於旋轉圓面積的三倍.

例 4. 求連珠線 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 之全面積.

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\,d\theta=a^2\left|-\sin 2\theta\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

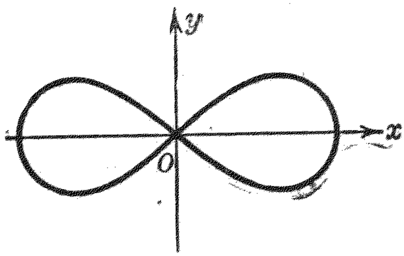


圖 85

注意：　就極座標與直角座標的關係言之，有

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\arctan\frac{y}{x},$$

$$d\theta=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

$$r^2\,d\theta=x\,dy-y\,dx,$$

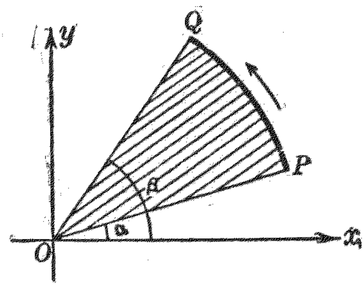


圖 86

故
$$dA=\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\frac{1}{2}(x\,dy-y\,dx).$$

設曲線 PQ 的方程式，得寫如 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. 當 t 由 t_1 變至 t_2 時，(x, y) 點由 P 點至 Q 點，那末

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt}$$

例如橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面積，先把橢圓的方程式寫如

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t.$$

則
$$x\,dy-y\,dx=ab(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=ab\,dt$$

故 $$A=\frac{1}{2}\int(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi\,ab.$$

又如求曲線 $x^3+y^3-3a\,xy=0$ 在環內部份的面積. 先令 $y=tx$, 那末曲線的方程式便可寫如

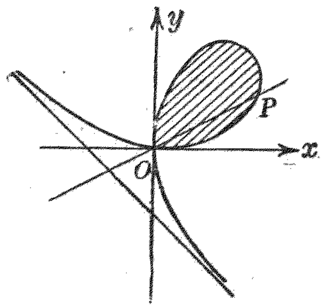


圖 87

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

於是 $x\,dy-y\,dx=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)}dt$, 故

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt=\frac{3}{2}a^2.$$

78. 平面曲線之長 設

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t)$$

為曲線 PQ 的方程式, 在 P 點 $t=t_0$, 在 Q 點 $t=T$. 今在曲線 PQ 上任意取 $n-1$ 點 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$, 由是作折線 $PP_1P_2\cdots P_{n-1}Q$, 令

$$x_i=\varphi(t_i),\qquad y_i=\psi(t_i)$$

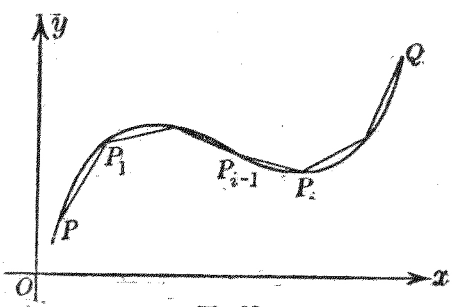


圖 88

為 P_i 點的座標, 則

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T,$$

$$P_{i-1}P_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}.$$

又令 s_n 爲折線 $PP_1P_2\cdots P_{n-1}Q$ 之長，則

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}P_{i-1}P_i. \qquad (P_0=P,\ P_n=Q)$$

今令 n 無限增大，同時令各線段 $PP_1,\ P_1P_2,\ \cdots$ 之長都趨近於零，若 s_n 向一極限 s 收斂，那末這極限 s 便叫做曲線 PQ 之長.

設在 $t_0\leqq t\leqq T$ 間隔內，函數 $\varphi(t),\ \psi(t)$ 及其導數 $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ 都是 t 的連續函數，由中值定理得

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})\,\varphi'(\xi_i), \qquad (t_{i-1}\leqq\xi_i\leqq t_i),$$

$$\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})\,\psi'(\eta_i), \qquad (t_{i-1}\leqq\eta_i\leqq t_i).$$

故 $$P_{i-1}P_i=\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\eta_i)^2}\,(t_i-t_{i-1}).$$

令 $$\alpha_i=\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\eta_i)^2}-\sqrt{\varphi'(t_{i-1})^2+\psi'(t_{i-1})^2}$$

$$=\frac{\{\varphi'(\xi_i)+\varphi'(t_{i-1})\}\{\varphi'(\xi_i)-\varphi'(t_{i-1})\}+\{\psi'(\eta_i)-\psi'(t_{i-1})\}\{\psi'(\eta_i)+\psi'(t_{i-1})\}}{\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\eta_i)^2}+\sqrt{\varphi'(t_{i-1})^2+\psi'(t_{i-1})^2}}$$

因 $$\left|\frac{\varphi'(\xi_i)+\varphi'(t_{i-1})}{\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\eta_i)^2}+\sqrt{\varphi'(t_{i-1})^2+\psi'(t_{i-1})^2}}\right|\leqq 1,$$

$$\left|\frac{\psi'(\eta_i)+\psi'(t_{i-1})}{\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\eta_i)^2}+\sqrt{\varphi'(t_{i-1})^2+\psi'(t_{i-1})^2}}\right|\leqq 1,$$

故 $$|\alpha_i|\leqq|\varphi'(\xi_i)-\varphi'(t_{i-1})|+|\psi'(\eta_i)-\psi'(t_{i-1})|.$$

原設 $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ 在 $t_0\leqq t\leqq T$ 間隔內爲 t 的連續函數，任與一正數 ϵ，必可另求得一正數 δ，當

$$t_i-t_{i-1}<\delta$$

時，使恆有

$$|\varphi'(\xi_i)-\varphi'(t_{i-1})|<\frac{\epsilon}{2}, \qquad |\psi'(\eta_i)-\psi'(t_{i-1})|<\frac{\epsilon}{2}.$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

故 $|\alpha_i|<\epsilon,\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t_i-t_{i-1})\leqq\epsilon(T-t_0),$

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\{\sqrt{\varphi'(t_{i-1})^2+\psi'(t_{i-1})^2}+\alpha_i\}(t_i-t_{i-1}).$$

當 $n\to\infty$ 時，s_n 的極限 s 便等於

$$\boxed{s=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt}$$

若曲線的方程式爲 $y=f(x)$，則

$$\boxed{S=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$$

如改 b 爲變數 x，由是可得

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

或 $$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

在極坐標，若曲線的方程式爲 $r=f(\theta)$，則有

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$
$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta,$$
$$dy=\sin\theta\,d\theta+r\cos\theta\,d\theta,$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{r^2\,d\theta^2+dr^2}$$

故 $$\boxed{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$$

同樣可得空間曲線

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad z=X(t)$$

弧長的公式爲

$$\boxed{s=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+X'(t)^2}\,dt}$$

如改 T 爲變數 t, 由是可得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+X'(t)^2}.$$

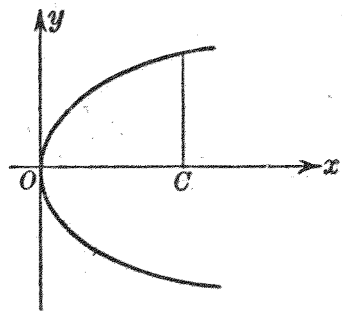


圖 89

例 1. 求拋物線

$$y^2=4ax$$

在二點 $(0,\,0)$, $(c,\,2\sqrt{ac})$ 間之長

$$(a>0,\ c>0).$$

$$y=2\sqrt{ax}, \qquad y'=\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

$$\begin{aligned} s&=\int_0^c\sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dx\\ &=\Big|\sqrt{x(x+a)}+a\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)\Big|_0^c\\ &=\sqrt{c(c+a)}+a\log\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c+a}}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

例 2. 求纜線

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

在 $A(0,a)$ 與 $P(x,y)$ 二點間之長.

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

$$s=\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\sqrt{y^2-a^2}=AB.$$

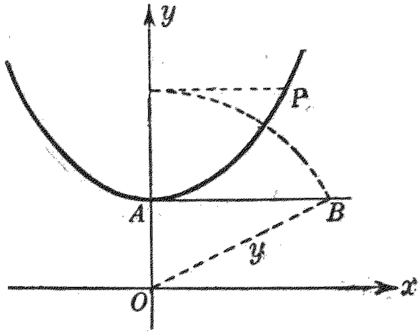


圖 90

例 3. 求星形線

$$x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t$$

之全長.

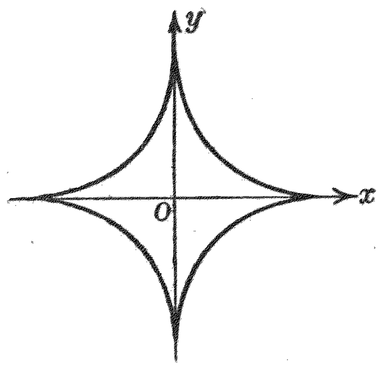


圖 91

$$\frac{dx}{dt}=-3a\sin t\cos^2 t,$$

$$\frac{dy}{dx}=3a\cos t\sin^2 t.$$

故 $$s=4\cdot 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt$$

$$=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=6a.$$

例 4. 求心形線

$$r=a(1+\cos\theta), \quad a>0,$$

之全長.

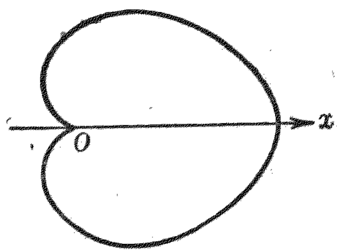


圖 92

$$r'=-a\sin\theta,$$

$$r^2+r'^2=a^2\{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}$$

$$=2a^2(1+\cos\theta)=4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

當 θ 自 0 變至 π, $\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0$, 故

$$\sqrt{r^2+r'^2}=2a\cos\frac{\theta}{2}.$$

由是得
$$s=2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|_0^\pi=8a.$$

注意：　有了曲線之長的定義，我們就得證明 AB 弦與 AB 弧之比，當 B 點趨近於 A 點時，其極限爲 1 (§36).

設在 A 點與 B 點參變數 t 之值順次爲 t_0 與 t_1 $(t_0<t_1)$, 那末

$$AB\text{ 弦}=\sqrt{\varphi'(t')^2+\psi'(t')^2}\,(t_1-t_0),$$
$$AB\text{ 弧}=\sqrt{\varphi'(t'')^2+\psi'(t'')^2}\,(t_1-t_0),$$

其中 t' 與 t'' 俱爲間隔內 $t_0\leqq t\leqq t_1$ 的二值. 當 $t_1\to t_0$ 時，t' 與 t'' 也各趨近於 t_0, 故

$$\lim\frac{AB\text{ 弦}}{AB\text{ 弧}}=\lim\frac{\sqrt{\varphi'(t')^2+\psi'(t')^2}}{\sqrt{\varphi'(t'')^2+\psi'(t'')^2}}=1.$$

79. 定積分之近似值 Simpson 氏之法則. 當不定積分 $\int f(x)\,dx$ 不易求得或不能求得時，我們常用 Simpson 氏之法則以求定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之近似值.

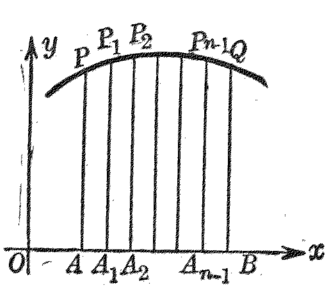


圖 93

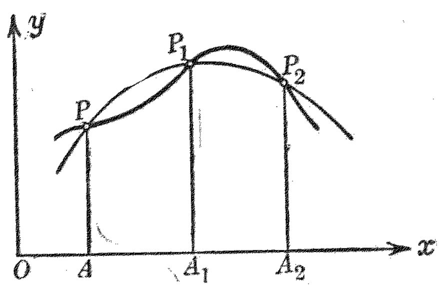


圖 94

設曲線 PQ 爲連續函數 $f(x)$ 的圖表，在圖中 $OA=a$，$OB=b$，且在間隔 (a, b) 內 $f(x)>0$． 今欲求 $APQB$ 的面積，先把 AB 分爲 n 個等分

$$AA_1=A_1A_2=\cdots=A_{n-1}B=h.$$

令　$OA=a=x_0,\quad OA_1=x_1,\quad OA_2=x_2,\quad \cdots,\quad OB=b=x_n.$

$$PA=y_0,\quad P_1A_1=y_1,\quad P_2A_2=y_2,\quad \cdots,\quad QB=y_n.$$

$$PP_1A_1A=S_1,\quad P_1P_2A_2A_1=S_2,\quad \cdots,\quad P_{n-1}QBA_{n-1}=S_n,$$

則 $APQB$ 的面積 S 等於

$$S=S_1+S_2+\cdots+S_n.$$

今作一拋物線經過 P, P_1, P_2 三點，其軸與 y 軸相平行，於是這拋物線的方程式可寫如

$$y=px^2+qx+r,$$

p, q, r 可由下三式求得之

$$\begin{cases} y_0=px_0{}^2+qx_0+r, \\ y_1=px_1{}^2+qx_1+r, \\ y_2=px_2{}^2+qx_2+r. \end{cases}$$

今把 P 與 P_2 間的一段曲線以這拋物線代之，則 S_1+S_2 的近似值爲

$$\begin{aligned} S_1+S_2 &\approx \int_{x_0}^{x_2}(px^2+qx+r)\,dx \\ &=\frac{1}{3}p(x_2{}^3-x_0{}^3)+\frac{1}{2}q(x_2{}^2-x_0{}^2)+r(x_2-x_0) \\ &=\frac{1}{6}(x_2-x_0)\{2p(x_2{}^2+x_2x_0+x_0{}^2)+3q(x_2+x_0)+6r\}. \end{aligned}$$

因 $x_2-x_0=2h$，$2x_1=x_2+x_0$，故

$$S_1+S_2\approx\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2).$$

令 n 爲一偶數 $2m$，那末同樣可得

$$S_3+S_4\approx\frac{1}{3}h(y_2+4y_3+y_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{2m-1}+S_{2m}\approx\frac{1}{3}h(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}).$$

由是得

$$\boxed{\begin{aligned}S\approx\frac{1}{3}h\{&y_0+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2m-1})\\&+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2m-2})+y_{2m}\}\end{aligned}}$$

令上式右邊的數值等於 T, 那末我們知道 S 與 T 相差的絕對值小於 $\frac{1}{180}(b-a)h^4\cdot M$, M 爲間隔 (a,b) 內 $|f^{(4)}(x)|$ 的最大值. 這個結果讀者可用 Taylor 氏的公式自證之.

例. 求 $\log 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$ 之值.

把 $2-1$ 分爲十等分, 則 $h=0.1$, 依上計算得結果如下:

$x_1=1.1$	$y_1=0.90909$	$x_2=1.2$	$y_2=0.83333$
$x_3=1.3$	$y_3=0.76923$	$x_4=1.4$	$y_4=0.71429$
$x_5=1.5$	$y_5=0.66667$	$x_6=1.6$	$y_6=0.62500$
$x_7=1.7$	$y_7=0.58824$	$x_8=1.8$	$y_8=0.55556$
$x_9=1.9$	$y_9=0.52632$		2.72818×2
	3.45955×4		5.45636
	13.83820		13.83820
		$x_0=1.0$	$y_0=1.0$
		$x_{10}=2.0$	$y_{10}=0.5$
			$20.79456\times\frac{1}{30}$
			$\log 2\approx 0.69315$

而事實上 $$\log 2=0.693147\cdots$$

習 題 9

1. 用積分法求下列極限值

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-0}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)$.

2. 試證下列諸式

(1) $\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{2}-1.$ (2) $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log(2+\sqrt{3}).$

(3) $\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$ (4) $\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}-1.$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}=1.$ (6) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}.$

(7) $\int_0^1\arcsin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1.$ (8) $\int_0^{2\pi}\cos 3x\cos 2x\,dx=0.$

3. 證明下列不等式

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}<1,\qquad (n>0).$

(2) $\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{\pi}{6}.$

(3) $0.5<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}<0.524.$

(4) $\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}}<\frac{\pi}{6}.$

4.　設函數 $f(x)$ 在間隔 $-a \leqq x \leqq a$ 內 $f(-x)=f(x)$，則有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

若 $f(-x)=-f(x)$，則有

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0.$$

5.　證明下列三式.

(1)　$\displaystyle\int_{0}^{a} f(a-x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

(2)　$\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\,dx = a\int_{0}^{1} f(ax)\,dx.$

(3)　$\displaystyle\int_{0}^{m\pi} f(\cos^2 x)\,dx = m\int_{0}^{\pi} f(\cos^2 x)\,dx$, ($m$ 爲一整數).

6.　試求下列定積分.

(1)　$\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x+x^2}.$　　(2)　$\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}.$

(3)　$\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin^2 x\cos x\,dx.$　　(4)　$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx.$

(5)　$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx.$　　(6)　$\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^3 x\cos^4 x\,dx.$

(7)　$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^3 x\,dx.$　　(8)　$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx.$

7.　$f(x)=px^2+qx+r$，令 $y_1=f(a)$，$y_2=f(a+h)$，$y_3=f(a+2h)$，試證

$$\int_{a}^{a+2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3).$$

8.　證明下式

(1)　$\displaystyle\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$.

9. 將下列二函數展開成 x 的冪級數.

(1) $\arctan\frac{a-x}{a+x}$. (2) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$.

10. 下列定積分那幾個是收斂的?

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}},\qquad \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}},\qquad \int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{a^2+x^2},\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{a^2+x^2},\qquad \int_1^{\infty}\frac{x^2\,dx}{2+x^4}.$$

11. 試求下列積分值.

(1) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$. (2) $\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

(3) $\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$. (4) $\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

(5) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2e^x+b^2e^{-x}}$. (6) $\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$.

(7) $\int_0^{2a}\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$. (8) $\int_0^1 x^n\log x\,dx$, $(n>-1)$.

12. 試證明

(1) $\int_0^{\infty}x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$, ($n$ 爲正整數).

(2) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$.

13. 求定積分 $\int_0^1(1-x^2)^n dx$, n 爲一正整數. 由是證明

$$1-\frac{n}{1\cdot 3}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 5}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7}+\cdots=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}.$$

14. 證明積分 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ 是收斂的.

15. 證明積分 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^p}$ 收斂的必要與充足條件爲 $p<1$.

16. 若 $p<2$, 積分 $\int_0^{a}\frac{\sin x}{x^p}dx\ (a>0)$ 是收斂的.

17. 證明積分 $\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}dx$ 是收斂的.

18. 求纜線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, 座標軸及直線 $x=a$ 所圍成的面積.

19. 求二拋物線 $y^2=4a(x+a)$, $y^2=4b(b-x)$ 所圍成的面積.

20. 求拋物線 $x^2=4ay$ 與曲線 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 所圍成的面積.

21. 有曲線 $y^2=(x-a)(x-b)^2$, 求其在環內的面積 $(a<b)$.

22. 求二拋物線 $y^2=4ax$, $x^2=4ay$ 所圍成的面積.

23. 求二橢圓內

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

公共部分的面積.

24. 求曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 所圍成的面積.

$$(x=a\cos^3 t, \quad y=b\sin^3 t.)$$

25. 求曲線 $r=a(1-\cos\theta)$ 所圍成的面積.

26. 求曲線 $r=a\cos n\theta$ 在一環內的面積.

27. 求擺線 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 在 $0\leqq t\leqq 2\pi$ 間之弧長.

28. 求曲線 $y=\log(1-x^2)$ 在 $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ 間之弧長.

29. 求曲線 $y=\log\sec x$ 在 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ 間之弧長.

30. 求曲線 $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$ 全部之長.

31. 用 Simpson 氏之法則, 試求

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

之近似值.

第十章

積分法

80. 有理函數之積分　二有理整式 $g(x)$, $f(x)$ 相除叫做 x 的有理函數，我們常以 $R(x)$ 表示之，

$$R(x)=\frac{g(x)}{f(x)}.$$

若 $f(x)$ 的次數 n 不大於 $g(x)$ 的次數 n'，我們先以 $f(x)$ 除 $g(x)$，俟餘式之次數小於 n 爲至．設所得之餘式爲 $h(x)$，商式爲 $G(x)$，則有

$$R(x)=G(x)+\frac{h(x)}{f(x)}.$$

$G(x)$ 應爲一 $(n-n')$ 次有理整式，其積分 $\int G(x)\,dx$ 如何求得，讀者已經知道，毋容復述．

欲求積分 $\int\frac{h(x)}{f(x)}dx$，須先知 $f(x)$ 之根．今分下列二種情形言之：

1°　$f(x)=0$ 之根皆爲實根．

2°　$f(x)=0$ 含有虛根．

1°　設 $f(x)\equiv k(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-l)^{\lambda}$，$a, b, \cdots, l$ 皆爲實數，幷設正整數 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ 之和等於 n．

令　$$f_1(x)\equiv k(x-b)^{\beta}\cdots(x-l)^{\lambda},$$

則 $f_1(x)$ 爲一 $(n-\alpha)$ 次有理整式，且 $f(x)\equiv(x-a)^{\alpha}f_1(x)$，於是

$$\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{h(x)}{(x-a)^{\alpha}f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{h(x)-A_1f_1(x)}{(x-a)^{\alpha}f_1(x)}.$$

A_1 爲一未定常數，$h(x)-A_1f_1(x)$ 爲一有理整式，其次數小於 n.

若命 $$A_1=\frac{h(a)}{f_1(a)},$$

則方程式 $h(x)-A_1f_1(x)=0$ 有一根爲 a. 換言之, $h(x)-A_1f_1(x)$ 有一一次因子 $(x-a)$,

$$h(x)-A_1f_1(x)=(x-a)h_1(x).$$

$h_1(x)$ 之次數當小於 $n-1$, 由是得恆等式如下.

$$\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{h(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{h_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}.$$

依同理, 得

$$\frac{h_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}=\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{h_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}f_1(x)}.$$

$A_2=h_1(a):f_1(a)$, $h_2(x)$ 之次數當小於 $n-2$. 如此繼續推算, 便得結果如下:

$$\begin{aligned}R(x)=G(x)&+\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_\alpha}{x-a}\\&+\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_\beta}{x-b}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{L_1}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{L_\lambda}{(x-l)}.\end{aligned}$$

2° 設 $a+bi$, $a-bi$ 爲 $f(x)=0$ 之 α 倍二共軛虛根, 則

$$f(x)=\{(x-a)^2+b^2\}^\alpha f_1(x),$$

於是

[1] $$\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{A_1x+B_1}{\{(x-a)^2+b^2\}^\alpha}+\frac{h(x)-(A_1x+B_1)f_1(x)}{\{(x-a)^2+b^2\}^\alpha f_1(x)}.$$

我們得選定 A_1, B_1 之值, 使方程式

[2] $$h(x)-(A_1x+B_1)f_1(x)=0$$

有二根 $a\pm bi$, 今命

$$\frac{h(a\pm bi)}{f_1(a\pm bi)}=M\pm iN.$$

若 $a\pm bi$ 爲方程式 (2) 之根，應有

$$A_1(a\pm bi)+B_1=M\pm iN.$$

由是得

$$A_1=\frac{N}{b},\qquad B_1=M-\frac{a}{b}N.$$

既求得 A_1, B_1 之值，則

$$h(x)-(A_1x+B_1)f_1(x)=\{(x-a)^2+b^2\}h_1(x),$$

$h_1(x)$ 仍爲一實係數有理整式，其次數當小於 $n-2$. 故 (1) 式可書如

$$\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{A_1x+B_1}{\{(x-a)^2+b^2\}^{\alpha}}+\frac{h_1(x)}{\{(x-a)^2+b^2\}^{\alpha-1}f_1(x)}.$$

依同理可得

$$\frac{h_1(x)}{\{(x-a)^2+b^2\}^{\alpha-1}f_1(x)}=\frac{A_2x+B_2}{\{(x-a)^2+b^2\}^{\alpha-1}}+\frac{h_2(x)}{\{(x-a)^2+b^2\}^{\alpha-2}f_1(x)}$$

$h_2(x)$ 仍爲一實係數有理整式，其次數當小於 $n-4$. 如此繼續推算，便得結果如下：

$$R(x)=G(x)+\frac{A_1x+B_1}{\{(x-a)^2+b^2\}^{\alpha}}+\frac{A_2x+B_2}{\{(x-a)^2+b^2\}^{\alpha-1}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{A_\alpha x+B_\alpha}{(x-a)^2+b^2}+\frac{h_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

$\dfrac{h_\alpha(x)}{f_1(x)}$ 復可依上述方法分解爲部分分數. 在實際運算時，我們常用未定係數法以求 $A_1, B_1, \cdots$ 之值.

例 1. 求積分 $\displaystyle\int\frac{x^2+4x-1}{x(2x-1)(x+2)}dx.$

設
$$\frac{x^2+4x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2},$$

則 $x^2+4x-1\equiv A(2x-1)(x-2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1).$

上式既爲恆等式，不論 x 爲什麼數值，兩端總是相等.

令 $x=0,$ 則 $-1=-2A,$ $A=\frac{1}{2},$

令 $x=\frac{1}{2},$ 則 $\frac{5}{4}=\frac{5}{4}B,$ $B=1,$

令 $x=-2,$ 則 $-5=10C,$ $C=-\frac{1}{2},$

故 $$\int\frac{x^2+4x-1}{x(2x-1)(x-2)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{2x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\log\left\{\frac{x(2x-1)}{x+2}\right\}^{\frac{1}{2}}+C.$$

例 2. 求積分 $\int\frac{x^2-4x+7}{(x-1)^2(x^2+1)}dx.$

設 $$\frac{x^2-4x+7}{(x-1)^2(x^2+1)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

則 $$\begin{aligned}x^2-4x+7&\equiv A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2\\&\equiv(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2\\&\qquad+(A+C-2D)x-A+B+D.\end{aligned}$$

令兩邊同次項之係數相等，便得

$$\begin{cases}A+C=0\\-A+B-2C+D=1\\A+C-2D=-4\\-A+B+D=7,\end{cases}$$

解之得

$$A=-3,\qquad B=2,\qquad C=3,\qquad D=2.$$

故 $$\int\frac{x^2-4x+7}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=-3\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{3x+2}{x^2+1}dx$$

$$=-3\log(x-1)-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{2}\log(x^2+1)+2\arctan x+C.$$

例 3. 求積分 $\int\frac{2x^3+x}{(x^2+1)^2}dx.$

設 $$\frac{2x^3+x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

則 $$2x^3+x\equiv Ax+B+(Cx+D)(x^2+1).$$

令兩邊同次項的係數相等，便得

$$C=2,\qquad D=0,\qquad A+C=1,\qquad B=0.$$

故 $$\int\frac{2x^3+x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-x}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\log(x^2+1)+C.$$

例 4. 求積分 $\int\frac{4x^2-6x-1}{(2x-1)^5}dx.$

令 $2x-1=t$，則 $x=\frac{1}{2}(1+t)$，於是

$$4x^2-6x-1=(1+t)^2-3(1+t)-1=t^2-t-3.$$

故積分

$$\int\frac{4x^2-6x-1}{(2x-1)^5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-t-3}{t^5}dt$$

$$=-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{6t^3}+\frac{3}{8t^4}+C$$

$$=\frac{-1}{4(2x-1)^2}+\frac{1}{6(2x-1)^3}+\frac{3}{8(2x-1)^4}+C.$$

綜上所論，計算 $\int R(x)\,dx$ 的問題，最後變而為下列四種的積分了.

$$\text{I.}\quad \int\frac{dx}{x-a},\qquad \text{II.}\quad \int\frac{dx}{(x-a)^m},\qquad \text{III.}\quad \int\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}dx,$$

$$\text{IV.}\quad \int\frac{Ax+B}{\{(x-a)^2+b^2\}^m}dx.$$

前二種積分我們已經知道,

$$\int\frac{dx}{x-a}=\log(x-a),$$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m}=-\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}.$$

欲求第三種積分, 可令 $x-a=bt$, 於是

$$\int\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2t\,dt}{1+t^2}+\frac{Aa+B}{b}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}A\log(1+t^2)+\frac{Aa+B}{b}\arctan t+A\log b.$$

末項只是一常數, 可以省去不寫.

故 $$\int\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}dx=\frac{1}{2}A\log\{(x-a)^2+b^2\}$$

$$+\frac{Aa+B}{b}\arctan\frac{x-a}{b}.$$

欲求第四種積分, 仍令 $x-a=bt$, 於是積分便呈下形

$$\int\frac{Ct+D}{(1+t^2)^m}dt=C\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}+D\int\frac{dt}{(1+t^2)^m}.$$

右端的第一個積分是

$$\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}=-\frac{1}{(2m-2)(1+t^2)^{m-1}}.$$

用部分積分法, 得

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}=\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}}+(2m-2)\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^m}.$$

又因 $$\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^m}=\int\frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}-\int\frac{dt}{(1+t^2)^m},$$

由上二式即得

$$\boxed{\int\frac{dt}{(1+t^2)^m}=\frac{1}{2m-2}\,\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}}$$

由是言之，計算 $\int\frac{dt}{(1+t^2)^m}$ 的問題，變而爲計算 $\int\frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$ 的問題．如此繼續推演，最後的一個積分顯然是

$$\int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc\,tan} t=\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

像這一類的公式叫做漸化式．

綜上所言，得一定理如下：

定理． 有理函數之不定積分，得以有理函數，對數函數，反三角函數表出之．

例． 求積分 $$I=\int\frac{x^4}{(x^2+1)^3}dx.$$

因 $$x^4=(x^2+1-1)^2=(x^2+1)^2-2(x^2+1)+1,$$ 故

[1] $$I=\int\frac{dx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

用漸化式，得

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

代入 (1) 式，得

[2] $$I=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{5}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

又用漸化式，得

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1},$$

代入 (2) 式，得

$$I = \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{5x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{-x(5x^2+3)}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\arctan x.$$

81. 無理函數之積分 一般無理函數的積分，多不能以初等函數表之．茲將重要的幾個特例，能以初等函數表出者，述之如下：

1° $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ 的積分．

R 爲 x 與 $\sqrt[n]{ax+b}$ 的有理函數，且 $a \neq 0$．令

$$ax+b=t^n,$$

則 $$x=\frac{t^n-b}{a}, \qquad dx=\frac{nt^{n-1}}{a}dt.$$

故 $$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}dt.$$

上式右端爲一有理函數的積分，我們可依前節方法求得之．

又如積分

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx.$$

可令 $$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n.$$

又如積分

$$\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b})\,dx,$$

可令 $$\sqrt[l]{ax+b}=t,$$

l 爲 m 與 n 的最小公倍數．

例 1. 求積分 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

令 $\sqrt[6]{x}=t$, 則 $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$, 故

$$I=\int\frac{1}{t^3(1+t^2)}6t^5\,dt=6\int\frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right)dt=6(t-\arctan t)$$

$$=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}).$$

2° $\underline{R(x,\sqrt{ax^2+2bx+c})\text{ 的積分}}$.

令 $$g(x)=ax^2+2bx+c.$$

我們可假定 $a\neq0$, 否則, $g(x)$ 便爲一次函數了. 我們又得假定 $g(x)=0$ 的二根並不相等, 不然, $R(x,\sqrt{g(x)})$ 便爲 x 的有理函數了.

茲先論函數 $g(x)$ 之性質:

若 $b^2-ac>0$, 則 $g(x)=0$ 有二實根 α, β, $(\alpha<\beta)$

$$g(x)=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

$a>0$ 時, 必須 $x\leqq\alpha$ 或 $x\geqq\beta$, $\sqrt{g(x)}$ 方爲實數

$a<0$ 時, 必須 $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\sqrt{g(x)}$ 方爲實數.

若 $b^2-ac<0$, 則 $g(x)=0$ 之二根爲虛數, 且

$$ag(x)=\{(ax+b)^2+ac-b^2\}>0.$$

這時不論 x 之值如何, $g(x)$ 常與 a 同號, 故必須 $a>0$, $\sqrt{g(x)}$ 方爲實數.

求 $R(x,\sqrt{g(x)})$ 之積分, 可分下列兩種情形言之.

1) $a>0$, 可令

$$\sqrt{g(x)}=t-\sqrt{a}\,x,\quad\text{則}\quad 2x=\frac{t^2-c}{b+\sqrt{a}\,t}.$$

由此得

$$\begin{cases}\sqrt{g(x)}=t-\dfrac{\sqrt{a}}{2}\cdot\dfrac{t^2-c}{b+\sqrt{a}\,t}\\ dx=\dfrac{\sqrt{a}\,t^2+2bt+c\sqrt{a}}{2(b+\sqrt{a}\,t)^2}dt\end{cases}$$

於是積分 $\int R(x,\sqrt{g(x)}\,dx$ 便變爲 t 的有理函數的積分了.

2) $a<0$, (且 $b^2-ac>0$), 可令

$$\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}=t,\quad 則\quad x=\frac{\beta+\alpha t^2}{1+t^2}.$$

這時必須 $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\sqrt{g(x)}$ 方爲實數. 由上式得

$$\begin{cases}\sqrt{g(x)}=\sqrt{-a}\,(\beta-\alpha)\dfrac{t}{1+t^2},\\ dx=2(\alpha-\beta)\dfrac{t\,dt}{(1+t^2)^2}.\end{cases}$$

於是積分 $\int R(x,\sqrt{g(x)})\,dx$ 又變爲 t 的有理函數的積分了.

注意: 求積分 $\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+2dx+c}}$, 可先令 $x=\frac{1}{t}$.

例 2. 求積分 $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

令 $$\sqrt{x^2-1}=t-x,$$

則 $$x=\frac{t^2+1}{2t},$$

由是得 $$\sqrt{x^2-1}=\frac{t^2-1}{2t},\qquad dx=\frac{t^2-1}{2t^2}dt.$$

故 $$I=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}dt=\frac{1}{2}\log t+\frac{1}{4t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{4}(x-\sqrt{x^2-1})^2.$$

例 3.　求積分　$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{5x-6-x^2}}$.

因 $5x-6-x^2=(3-x)(x-2)$，可令

$$\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}=t.$$

則
$$x=\frac{2t^2+3}{t^2+1},\qquad dx=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt,$$

$$\sqrt{5x-6-x^2}=(x-2)t=\frac{t}{t^2+1}.$$

故
$$I=\int\frac{1}{\frac{2t^2+3}{t^2+1}\cdot\frac{t}{t^2+1}}\cdot\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt=-\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\sqrt{\frac{2}{3}}t=-\sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}}.$$

(本題亦可先作變數代換 $x=\frac{1}{t}$).

又如積分

$$I=\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\,dx,$$

可令 $\sqrt{ax+b}=X$，則 $x=\frac{X^2-b}{a}$.　那末積分便呈下形

$$I=\int F(X,\sqrt{AX^2+B})\,dX.$$

F 表一 X 與 $\sqrt{AX^2+B}$ 的有理函數，其中

$$A=\frac{c}{a},\qquad B=\frac{ad-bc}{a}.$$

例 4.　求積分　$I=\int\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}dx$.

令 $\sqrt{1+x}=X$, 則

$$I=\int 2(1+\sqrt{2-X^2})\,dX=2X+X\sqrt{2-X^2}+2\arcsin\frac{X}{\sqrt{2}}.$$

3° $x^m(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}$ 的積分.

設 m, n, p, q 皆爲整數, 幷設 $q>0$. 令 $\sqrt[q]{ax^n+b}=t$, 則

$$x=\left(\frac{t^q-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{t^q-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}\frac{qt^{q-1}}{a}\,dt,$$

於是 $$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}\,dx=\frac{q}{na^{\frac{m+1}{n}}}\int t^{p+q-1}(t^q-b)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt.$$

若 $\dfrac{m+1}{n}$ 爲一整數, 則右邊的被積函數便爲 t 的有理函數了.

又令 $\sqrt[q]{a+bx^{-n}}=t$, 則

$$x=\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}}, \qquad dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1}\frac{qt^{q-1}}{b}dt,$$

$$(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{np}{q}}(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}=\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{-\frac{p}{q}}t^p,$$

故 $$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}\,dx=-\frac{q}{n}b^{\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}}\int t^{p+q-1}(t^q-a)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}\right)}\,dt.$$

若 $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{p}{q}$ 爲一整數, 則右邊的被積函數便又爲 t 的有理函數了.

綜上所論, 得結果如下:

若 $\dfrac{m+1}{n}$ 爲一整數, 可令 $\sqrt[q]{ax^n+b}=t$,
若 $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{p}{q}$ 爲一整數, 可令 $\sqrt[q]{a+bx^{-n}}=t$.

例 5.　求積分　$I=\int x^5(a^3+x^3)^{\frac{1}{2}}dx.$

$$m=5,\qquad n=3,\qquad \frac{m+1}{n}=2.$$

令　$$a^3+x^3=t^2,$$

則　$$3x^2\,dx=2t\,dt.$$

故　$$I=\int(t^2-a^3)t\cdot\frac{2}{3}t\,dt=\frac{2}{3}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{a^3t^3}{3}\right).$$

例 6.　求積分　$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}.$

$$m=0,\qquad n=3,\qquad \frac{p}{q}=-\frac{4}{3},$$

$$\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1.$$

令　$$\sqrt[3]{1+x^{-3}}=t,$$

則　$$x^3=\frac{1}{t^3-1},\qquad dx=\frac{-t^2\,dt}{x^2(t^3-1)^2}.$$

故　$$I=\int\frac{1}{x^6t^2}\cdot\frac{-dt}{(t^3-1)^2}=-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

82.　超越函數之積分　初等超越函數的積分如

$$e^x,\quad \log x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad \operatorname{arc\,sin} x,\quad \operatorname{arc\,cos} x$$

等已在第八章中講過．今設 $f(x)$ 爲一有理整式，那末積分

$$\int f(x)\,e^x\,dx,\qquad \int f(x)\sin x\,dx,\qquad \int f(x)\cos x\,dx$$

均可用部分積分法求得之．令 $\int f(x)\,dx=\varphi(x)$，下列積分

$$\int f(x)\log x\,dx=\varphi(x)\log x-\int\frac{\varphi(x)}{x}dx,$$

$$\int f(x)\,\text{arc}\sin x\,dx=\varphi(x)\,\text{arc}\sin x-\int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$\int f(x)\,\text{arc}\cos x\,dx=\varphi(x)\,\text{arc}\cos x+\int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

均可用前節方法求得之．他如積分

$$\int f(e^x)\,dx,\quad \int f(\log x)\,dx,\quad \int f(\sin x)\,dx,\quad \int f(\text{arc}\sin x)\,dx$$

得依次以 $e^x=t$, $\log x=t$, $\sin x=t$, $\text{arc}\sin x=t$ 代換法計算之．

1° $R(\sin x, \cos x)$ 的積分

$R(\sin x, \cos x)$ 表示一 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理函數．令

$$\tan\frac{x}{2}=t,$$

則
$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\,\text{arc}\tan t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

故
$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

於是右邊的被積函數便爲 t 的有理函數了．

例 1. 求積分 $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$.

令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 則

$$I=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}$$

$$=\log|t|=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.\quad (\text{見 §66})$$

若把 x 易作 $x+\dfrac{\pi}{2}$, 便得

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

例 2.　求積分　$I=\int \frac{\cos x}{2+\cos x}dx.$

令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 則

$$I=\int \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dx.$$

因
$$\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}=\frac{2}{1+t^2}-\frac{4}{3+t^2},$$

故
$$I=2\int\frac{dt}{1+t^2}-4\int\frac{dt}{2+t^2}=2\operatorname{arc\,tan} t-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{t}{\sqrt{3}}$$
$$=x-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right).$$

注意：　若在積分 $\int R(\tan x)\,dx$, 令 $\tan x=t$ 較爲簡捷.

2°　$\sin^m x\cos^n x$ 的積分

m, n 均設爲整數. 茲先述特例如下.

1)　若 $m=2k+1$, k 爲正整數, 令 $\cos x=t$, 則

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=-\int(1-t^2)^k t^n\,dt.$$

2)　若 $n=2k+1$, 令 $\sin x=t$, 則

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int t^m(1-t^2)^k\,dt.$$

3)　若 $m+n=-2k$, 令 $\tan x=t$ 或 $\cot x=u$, 則

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int t^m(1+t^2)^{k-1}\,dt=-\int u^n(1+u^2)^{k-1}\,du.$$

4)　若 $m+n=0$, 令 $\tan x=t$ 或 $\cot x=u$, 則

$$\int \tan^m x\,dx = \int \frac{t^m\,dt}{1+t^2}, \qquad (m>0)$$

$$= -\frac{u^n\,du}{1+u^2}. \qquad (n>0)$$

若就一般情形論之，我們須求得一漸化式．所求的積分可寫如

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^{m-1} x\,(\cos^n x \sin x\,dx).$$

用部分積分法可得

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx.$$

然 $\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x = \sin^{m-2} x \cos^n x - \sin^m x \cos^n x,$

代入上式後加以整理，便得

[1] $$\boxed{\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx}$$

同樣可得

[2] $$\boxed{\int \sin^m \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} dx}$$

以上二式須設 $m+n\neq 0$；若 $m>1$，用 (1) 式可把 $\sin^m x$ 的指數 m 減爲 $m-2$．若 $n>1$，當用 (2) 式．

(1) 式又可寫如

$$\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m-1} + \frac{m+n}{m-1}\int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

把式中之 m 代以 $m+2$, 便得

[3] $$\boxed{\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x \, dx}$$

同様由 (2) 式可得

[4] $$\boxed{\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x \, dx}$$

(3) 式須 $m \neq -1$, (4) 式須 $n \neq -1$. 若 $m<0$, 當用 (3) 式. 若 $n<0$, 當用 (4) 式.

例 3.　求積分　$I = \int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

用公式 (4), 得

$$I = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

故　$$I = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

例 4. 求積分 $I=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx.$

用公式 (3), 得

$$I=\frac{-\cos^5 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}dx.$$

又 $$\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin x}dx=\int\left(\sin^3 x-2\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x+\cos x+\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

故 $$I=-\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\cos^3 x-\frac{3}{2}\cos x-\frac{3}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

例 5. 求積分 $I=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$

用公式 (1), 得

$$I=\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}-2\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx=\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}-\frac{2}{3\cos^3 x}.$$

[又一法] $$I=\int\tan^3 x\sec x\,dx=\int\tan^2 x\,d(\sec x)$$

$$=\int(1+\sec^2 x)\,d(\sec x)=\sec x+\frac{1}{3}\sec^3 x.$$

習 題 10

求下列函數的積分

1. $\frac{5x^3+1}{x^2-3x+2}$.

2. $\frac{x^2-1}{x^2-4}$.

3. $\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}$.

4. $\frac{1}{x^3-1}$.

5. $\frac{1}{x^4+x^2+1}$.

6. $\frac{1}{x^2(1+x^2)}$.

7. $\dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}$.　　8. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

9. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x^3+1)}$.　　10. $\dfrac{x^3}{(1+x+x^2)^2}$.

11. $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2-6}$.　　12. $\dfrac{1}{1+x^3}$.

13. $\dfrac{1}{1+x^4}$.　　14. $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

15. $\dfrac{x+2}{x^4-1}$.　　16. $\dfrac{x^2}{1+x^4}$.

17. $\dfrac{1}{\sqrt{(a+bx)^3}}$.　　18. $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.

19. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.　　20. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x}}$.

21. $\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}$.　　22. $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

23. $\dfrac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.　　24. $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

25. $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$.　　26. $\dfrac{1}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}}$.

27. $\dfrac{2x+3}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.　　28. $\dfrac{1}{(1+x^3)^{\frac{4}{3}}}$.

29. $x^2(a+x^3)^{\frac{5}{3}}$.　　30. $x^3\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

31. $\dfrac{1}{x\sqrt{a^{2n}+x^{2n}}}$.　　32. $\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

33. $\dfrac{x}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$.　　34. $\dfrac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}$

35. $\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

36. $x^{-\frac{1}{4}}(1-x^{\frac{1}{3}})^{-2}$.

37. $x^{\frac{1}{2}}(1+x^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}$.

38. $\dfrac{x^2}{(a+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}$.

39. $\dfrac{1}{x^3+x\sqrt{x^4-1}}$.

40. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

41. $\dfrac{1}{\cos x-\cos a}$.

42. $\dfrac{1}{a+b\tan x}$.

43. $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

44. $\tan^3 x$.

45. $\dfrac{1}{\tan^3 x}$.

46. $\dfrac{1}{\sin^4 x}$.

47. $\dfrac{1}{\sin^3 x}$.

48. $\cos^4 x\sin^2 x$.

49. $\sin^4 x\cos^2 x$.

50. $\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

51. $\dfrac{1}{\sin^3 x\cos x}$.

52. $\dfrac{\cos^4 x}{\sin x}$.

53. $\dfrac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

54. $\dfrac{\operatorname{arc}\sin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

55. $\dfrac{1}{4-5\sin x}$.

56. $\dfrac{1}{5+4\sin 2x}$.

57. $\dfrac{1}{5+4\cos x}$.

58. $\dfrac{x\log x}{(1+x^2)^2}$.

59. $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

60. $\dfrac{1}{\sin x+3\cos x+1}$.

61. $\dfrac{1}{5+3\cos x}$.

62. $\dfrac{1}{3+\sin x}$.

63. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x\cos\varphi+1}}$.

64. $\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-4}}$.

65. $\dfrac{1}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}$.

66. $\dfrac{x}{(x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}}}$.

67. $\dfrac{1}{(x^2+2x-3)^3}$.

68. $\dfrac{1}{x^4\sqrt{x^2-2x-3}}$.

69. $\dfrac{1}{a+b\cos x}$.

70. $\tan^n x$, n 爲一正整數.

求下列積分值

71. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

72. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\cos^3 x+\sin^3 x}$.

73. $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x}-\log\frac{x}{1+x}\right)dx$.

74. $\displaystyle\int_0^a \frac{x\,dx}{(x+\sqrt{a^2-x^2})^2}$.

75. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\log x}{(1+x^2)^3}dx$.

76. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2}dx$.

77. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)+2\sqrt{1-x^2}}$.

78. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}dx$.

試證明

79. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}=\frac{4}{3}$.

80. $\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\log(1-x)\,dx=\frac{4}{5}\log 2-\frac{92}{75}$.

第 十 一 章

偏 微 分 法

83. 二變數的函數 設 x, y 爲二獨立自變數，每有一對 x, y 之値，另有一値 z 與之相應．申言之，變數 z 之値隨 x, y 之値定而定，z 與 x, y 之間有一種相倚相隨的關係，那末 z 叫做 x 與 y 的函數．函數 z 與自變數 x, y 的關係，常用記號表之如下：

$$z=f(x, y).$$

這時 z 也叫做 x 與 y 的顯函數；又如方程式

$$F(x, y, z)=0$$

所確定的函數 z 叫做 x 與 y 的隱函數．

變數 x, y 之値，常有一定的範圍，爲講解便利計，我們可視 x, y 爲平面上一點的座標．今設一迴線 C 在 xy 平面上圍成一區域 D (圖 95)，若 x, y 二數所代表的點祇限於 D 中的點 (迴線 C 通常視爲 D 的一部份)，那末 D 便叫做自變數 x, y 的變域．

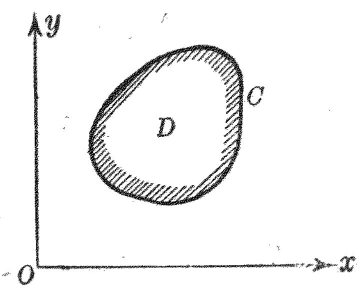


圖 95

若 x 在 a, b 之間，y 在 c, d 之間可以任意變易，即

$$a \leqq x \leqq b,$$
$$c \leqq y \leqq d,$$

這樣的變域叫做矩形變域．

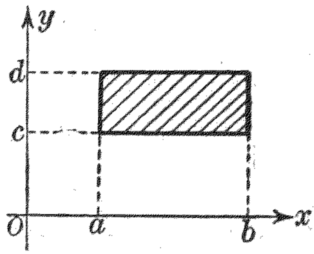


圖 96

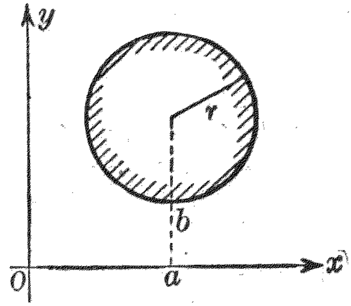


圖 97

又如不等式

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq r^2$$

所規定的變域叫做圓變域.

爲明瞭函數 z 的性質起見，我們往往用製圖之法，經過一點 0 畫三條互相垂直的直線，作爲座標軸 (x 軸，y 軸，z 軸). 既知 z 與 x, y 的函數關係，那末當 x, y 既各得一值，z 必有一值與之相應，我們把 x, y, z 作爲某點的座標，於是同樣可得種種不同之點，諸點相連，通常就得一曲面.

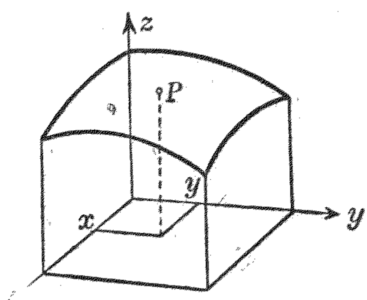


圖 98　$z=f(x, y)$

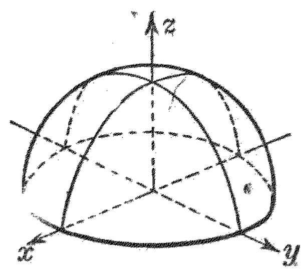


圖 99　$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

例如 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示半個球面 (圖 99). $z=x^2+y^2$ 表示一拋

物面 (圖 100). $z=x^2-y^2$ 表示一雙曲拋物面 (圖 101).

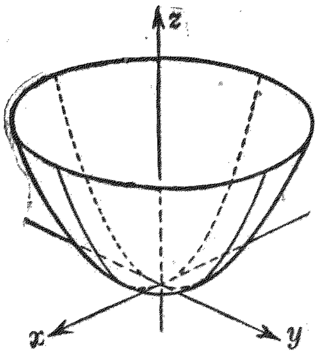


圖 100 $z=x^2+y^2$

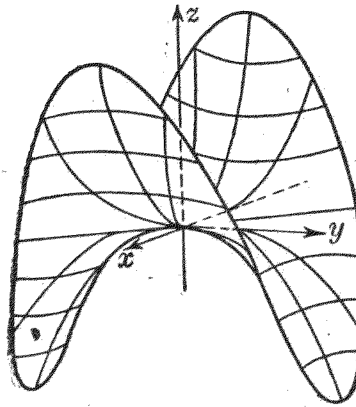


圖 101 $z=x^2-y^2$

設 ϵ 為一任意選定其值甚小之正數, 如另可求得一適當的正數 $\delta=\delta(\epsilon)$, 當

$$0<|x-a|<\delta, \qquad 0<|y-b|<\delta$$

時, 使恆有

$$|f(x, y)-c|<\epsilon,$$

那末我們便說 (x, y) 點趨近於 (a, b) 點時, 函數 $f(x, y)$ 趨近於極限 c. 以記號表之如下:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=c.$$

或簡寫如 $$\lim f(x, y)=c.$$

若 $$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=f(a, b),$$

那末函數 $f(x, y)$ 在 $x=a$, $y=b$ 是連續的, 或說 $f(x, y)$ 在 (a, b) 點是連續的. 申言之, 設 ϵ 為一任意選定其值甚小的正數, 如另可求得一適當的正數 $\delta=\delta(\epsilon)$, 當

$$|x-a|<\delta, \qquad |y-b|<\delta$$

時，使恆有

$$|f(x, y)-f(a, b)|<\epsilon,$$

那末函數 $f(x, y)$ 在 $x=a$, $y=b$ 是連續的.

例如函數 $f(x, y)=x^2+y^2$ 在 $(0, 0)$ 點是連續的. 又如函數

$$\begin{cases} f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{當} \quad x\neq 0, \quad y\neq 0. \\ f(x, y)=0, & \text{當} \quad x=0, \quad y=0. \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 點便不連續. 令 (x, y) 點由直線 $y=mx$ 趨近於原點 O, 則函數 $f(x, y)$ 趨近於極限 $\dfrac{m}{1+m^2}$. 因此函數所得之值隨 m 而異，故此時極限值

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$$

並不存在.

設函數 $f(x, y)$ 在一變域內處處連續，那末 $f(x, y)$ 在這變域內叫做連續函數. 如 §10, §69 的定理，在連續函數 $f(x, y)$ 亦能一一成立.

84. 偏導數　令 $z=f(x, y)$ 中的 y 等於一常數，那末 z 僅是變數 x 的函數了. 若極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}$$

存在，這極限就叫做函數 $z=f(x, y)$ 對於 x 的偏導數，常以下列記號

$$f_x(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}$$

表示之，依同理

$$f_y(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

便是函數 $z=f(x, y)$ 對於 y 的偏導數. $f(x, y)$ 在 $x=a$, $y=b$ 對於 x 的偏導數以 $f_x(a, b)$ 表之, 對於 y 的偏導數以 $f_y(a, b)$ 表之. 例如

$$f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2ax+by, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=bx+2cy.$$

在圖 101, 曲線 C 表示曲面 $z=f(x, y)$ 與平面 $y=0$ 之交線. 設

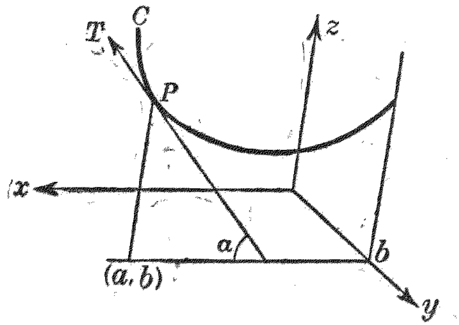


圖 102

$P(a, b, c)$ 為曲線 C 上的一點, α 為曲線 C 的切線 PT 與 x 軸所成之方向角, 那末

$$f_x(a, b)=\tan\alpha.$$

$f_y(a, b)$ 亦有同樣的幾何意義.

85. 逐次偏導數 設函數 $z=f(x, y)$ 的偏導數

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x, y)$$

復有偏導數, 我們便用記號表之如下:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_x{}^2(x, y)=f_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=f_{yx}(x,\,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{y^2}(x,\,y)=f_{yy}(x,\,y).$$

這種偏導數叫做 $f(x,y)$ 的第二次偏導數. f_x, f_y 叫做 $f(x,y)$ 的第一次偏導數. 依同理

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f_{x^3}(x,\,y)=f_{xxx}(x,\,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=f_{x^2y}(x,\,y)=f_{xxy}(x,\,y),$$

....

叫做 $f(x,y)$ 的第三次偏導數. 餘依此類推.

定理. 設函數 $z=f(x,y)$ 的第二次偏導數 f_{xy}, f_{yx} 皆為連續函數. 則 $f_{xy}=f_{yx}$.

令　$U=f(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\,y)+f(x,\,y)$,

復令　$\varphi(y)=f(x+\Delta x,\,y)-f(x,\,y)$,

則
$$U=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$$
$$=\Delta y\,\varphi_y(y+\theta\,\Delta y).\qquad 0<\theta<1$$

故　$U=\Delta y\,\{f_y(x+\Delta x,\,y+\theta\,\Delta y)-f_y(x,\,y+\theta\,\Delta y)\}$.

再用中值定理, 便得

$$U=\Delta y\,\Delta x\,f_{xy}(x+\theta'\Delta x,\,y+\theta\,\Delta y).\qquad 0<\theta'<1$$

同樣若令　$\psi(x)=f(x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y)$,

則　$U=\Delta x\,\Delta y\,f_{yx}(x+\theta'_1\,\Delta x,\,y+\theta_1\,\Delta y)$,

θ_1, θ'_1 亦為小於 1 的二正數.

令 U 之二值相等, 然後用 $\Delta x\,\Delta y$ 除等式兩邊, 得

$$f_{xy}(x+\theta'\Delta x,\,y+\theta\,\Delta y)=f_{yx}(x+\theta'_1\Delta x,\,y+\theta_1\,\Delta y).$$

原設 $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 爲連續函數，當 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, 上式兩邊各趨近於 $f_{xy}(x,y)$ 及 $f_{yx}(x,y)$, 故

$$\boxed{f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)}$$

或
$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}}$$

依同理，若 f_{x^2y}, f_{yx^2} 皆爲連續函數，則有 $f_{x^2y}=f_{yx^2}$.

86. 全微分 設 $z=f(x,y)$ 及其偏導數 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在一變域內皆爲連續函數，x, y 爲這變域內的一對數值，令 Δx, Δy 爲 x 與 y 的增量，Δz 爲 z 的相當增量，於是

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)\\&=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)+f(x,\ y+\Delta y)-f(x,y).\end{aligned}$$

由中值定理得

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)=f_x(x+\theta\,\Delta x,\ y+\Delta y)\,\Delta x,\quad 0<\theta<1$$
$$f(x,\ y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,\ y+\theta'\Delta y)\,\Delta y,\qquad 0<\theta'<1$$

故
$$\Delta z=f_x(x+\theta\,\Delta x,\ y+\Delta y)\,\Delta x+f_y(x,\ y+\theta'\Delta y)\,\Delta y.$$

原設 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 爲連續函數，得令

$$f_x(x+\theta\,\Delta x,\ y+\Delta y)=f_x(x,y)+\epsilon,$$
$$f_y(x,\ y+\theta'\Delta y)=f_y(x,y)+\epsilon'.$$

當 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 時，ϵ 與 ϵ' 各趨近於零，於是

$$\Delta z=f_x(x,y)\,\Delta x+f_y(x,y)\,\Delta y+\epsilon\,\Delta x+\epsilon'\Delta y.$$

$f_x(x,y)\,\Delta x+f_y(x,y)\,\Delta y$ 叫做 z 的全微分，常以記號 dz 表達之，

$$dz=f_x(x,y)\,\Delta x+f_y(x,y)\,\Delta y.$$

當 $z=x$ 時，$dx=\Delta x$；當 $z=y$ 時，$dy=\Delta y$. 爲勻稱起見，故得將上式寫如

$$\boxed{dz=f_x(x,\ y)\,dx+f_y(x,\ y)\,dy}$$

或
$$\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

$\frac{\partial z}{\partial x}dx$ 與 $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 叫做函數 z 的偏微分.

dz 的全微分 $d(dz)$ 叫做 z 的第二級全微分，以記號 d^2z 表示之，

$$d^2z=\frac{\partial dz}{\partial x}dx+\frac{\partial dz}{\partial y}dy.$$

因　$\frac{\partial dz}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dy,\quad \frac{\partial dz}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy,$

故
$$\boxed{d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}$$

依同理可以求得 $d^3z,\ d^4z,\ \cdots$ 等高級微分.

87.　函數的函數之偏導數　設有函數

$$z=f(u,\ v)$$

於此，其中 u 與 v 復為 x 與 y 的函數，$u=u(x,\ y),\ \ v=v(x,\ y)$.

設這二函數在同一變域 D 內，具有各次偏導數，并設函數 $f(u,\ v)$ 在對應於 D 的變域內具有各次連續偏導數.

先令 y 為常數，x 為變數，當 x 得一增量 Δx 時，u 與 v 依次得一增量 Δu 與 Δv，因此 z 亦得一增量 Δz，

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-f(u,\ v)\\&=f(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-f(u,\ v+\Delta v)+f(u,\ v+\Delta v)-f(u,\ v)\\&=f_u(u+\theta\,\Delta u,\ v+\Delta v)\,\Delta u+f_v(u,\ v+\theta'\Delta v)\,\Delta v,\end{aligned}$$

$$0<\theta<1,\qquad 0<\theta'<1.$$

由此得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=f_u(u+\theta\,\Delta u,\ v+\Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x}+f_v(u,\ v+\theta'\Delta v)\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

當 $\Delta x\to 0$ 時，便有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u(u,\ v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_v(u,\ v)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

同樣有
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_u(u,\ v)\frac{\partial u}{\partial y}+f_v(u,\ v)\frac{\partial v}{\partial y}.$$

以上二式又可寫如

[1]
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}$$

[2]
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial y}$$

由 (1) 式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\&=\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\&\quad+\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

即
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\ \frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

[3]
$$+\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

由 (2) 式可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\;\frac{\partial u}{\partial y}\;\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

[4] $$+\frac{\partial z}{\partial v}\;\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

由 (1) 式或 (2) 式可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\;\frac{\partial u}{\partial x}\;\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\;\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\;\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

[5] $$+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\;\frac{\partial v}{\partial x}\;\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\;\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\;\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.$$

第三次以上的偏導數，也可同樣逐一求得之.

茲舉一二特例於下：

1° $z=f(u,v),\qquad u=\varphi(x),\qquad v=\psi(x).$

此時 z 祇是 x 的函數，故由 (1) 式便得

[6] $$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\;\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\;\frac{dv}{dx}}$$

由 (3) 式得

[7] $$\boxed{\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dx^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\;\frac{du}{dx}\;\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\\+\frac{\partial z}{\partial u}\;\frac{d^2 u}{dx^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\;\frac{d^2 v}{dx^2}\end{aligned}}$$

2° $z=f(x,y),\qquad y=\psi(x)$

把 (6) 式中的 u 等於 x，v 等於 y，則有

[8] $$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\;\frac{dy}{dx}}$$

又由 (7) 式得

[9] $$\boxed{\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\;\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}\;\frac{d^2y}{dx^2}}$$

注意: 以 dx 乘 (6) 式兩邊, 得

[10] $$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

故不論 u 與 v 爲自變數或爲其他變數的函數, (10) 式不因之而變.

例. $$z=f(x,\,y).$$

若 $$f(xt,\,yt)=t^n f(x,\,y),$$

則 $f(x,\,y)$ 叫做第 n 次的齊次函數. 令

$$xt=u, \qquad yt=v,$$

則 $$f(u,\,v)=t^n f(x,\,y).$$

兩邊對於 t 各求導數, 便有

$$f_u(u,\,v)\frac{\partial u}{\partial t}+f_v(u,\,v)\frac{\partial v}{\partial t}=nt^{n-1}f(x,\,y),$$

即 $$xf_u(u,\,v)+yf_v(u,\,v)=nt^{n-1}f(x,\,y).$$

兩邊再求對於 t 的導數, 便得

$$f_{u^2}(u,\,v)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+2f_{uv}(u,\,v)\frac{\partial u}{\partial t}\;\frac{\partial v}{\partial t}+f_{v^2}(u,\,v)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2$$
$$=n(n-1)\,t^{n-2}f(x,\,y).$$

今令 $t=1$, 即得 Euler 氏公式如下:

$$\boxed{\begin{gathered}x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,\,y),\\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f(x,\,y)\end{gathered}}$$

88. Taylor 氏定理 設函數 $f(x,\,y)$ 具有各次連續偏導數

今令

$$\varphi(t) \equiv f(x+ht,\ y+kt),$$

則
$$\frac{d\varphi}{dt}=h\frac{\partial}{\partial x}f(x+ht,\ y+kt)+k\frac{\partial}{\partial y}f(x+ht,\ y+kt)$$
$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+ht,\ y+kt),$$

於是
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{d\varphi}{dt}$$
$$=\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(kh\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

式中之 f 即 $f(x+ht,\ y+kt)$ 之簡寫. 因
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

故
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x+ht,\ y+kt).$$

今把右邊第一括弧內之式寫如 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}$, 則
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x+ht,\ y+kt).$$

今假設
$$\frac{d^n\varphi}{dt^n}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x+ht,\ y+kt),$$

$$\begin{cases}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}=h^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}+\cdots+C_n{}^p h^p k^{n-p}\frac{\partial^n}{\partial x^p\,\partial y^{n-p}}+\cdots+k^n\frac{\partial^n}{\partial y^n},\\ C_n{}^p=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot p},\end{cases}$$

則

$$\frac{d^{n+1}\varphi}{dt^{n+1}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x+ht,\ y+kt).$$

然 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}$

$$=h\left\{h^n\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}+\cdots+C_n{}^ph^pk^{n-p}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{p+1}\partial y^{n-p}}+\cdots+k^n\frac{\partial^{n+1}}{\partial x\,\partial y^n}\right\}$$

$$+k\left\{h^n\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^n\,\partial y}+\cdots+C_n{}^{p+1}h^{p+1}k^{n-p-1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{p+1}\partial y^{n-p}}+\cdots+k^n\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}}\right\},$$

因 $C_n{}^p+C_n{}^{p+1}=C_{n+1}{}^{p+1}$，故上式右邊等於 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}$，於是

$$\frac{d^{n+1}\varphi}{dt^{n+1}}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x+ht,\ y+kt).$$

今把 $\varphi(t)$ 依 Maclaurin 氏定理展開，

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{t}{1!}\varphi'(0)+\frac{t^2}{2!}\varphi''(0)+\cdots$$
$$+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)+\frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(\theta t),$$

式中之 θ 爲小於 1 之正數．令 $t=1$，則

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta).$$

是卽

$$\boxed{\begin{aligned}f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)&+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\&+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x,\ y)+\cdots\\&+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)}f(x,\ y)\\&+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x+\theta h,\ y+\theta k)\end{aligned}}$$

這就是對於函數 $f(x, y)$ 的 Taylor 氏公式.

當 $n=0$ 時,

$$\boxed{\begin{aligned} f(x+h, y+k)=f(x, y)&+h\frac{\partial}{\partial x}f(x+\theta h, y+\theta k)\\ &+k\frac{\partial}{\partial y}f(x+\theta h, y+\theta k)\end{aligned}}$$

這就是對於函數 $f(x, y)$ 的中值定理.

應用　1° 設函數 $f(x, y)$ 在變域 D 內具有偏導數 f_x, f_y, 今欲 $f(x, y)$ 在 D 內等於一常數. 必要而且充足的條件是 f_x, f_y 在 D 內恆等於零.

這條件顯然是必要的. 今令 (x, y) 爲 D 內一固定點, h, k 爲任意二數, 因

$$f(x+h, y+k)=f(x, y),$$

故無論 h 與 k 如何, $f(x+h, y+k)$ 必須等於一常數.

2° 設有二函數 $f(x, y)$ 與 $g(x, y)$, 若

$$f_x\,dx+f_y\,dy\equiv g_x\,dx+g_y\,dy,$$

即
$$(f_x-g_x)\,dx+(f_y-g_y)\,dy\equiv 0.$$

不論 dx, dy 如何, 那末 $f_x-g_x=0$, $f_y-g_y=0$. 故函數 $f(x,y)-g(x,y)$ 應該恆等於一常數. 換言之, $f(x, y)$ 與 $g(x, y)$ 相差一常數罷了.

3° 設函數 $f(x, y)$ 具有各次偏導數, 幷設 $|h|<\delta$, $|k|<\delta$ 時, 一切偏導數都小於一正數 M. 那末

$$\begin{aligned}\Big| f(x+h, y+k)-f(x, y)-\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y)-\cdots\\ -\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x, y)\Big|\\ <M\frac{(|h|+|k|)^{n+1}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

然 $\frac{(|h|+|k|)^{n+1}}{(n+1)!}$ 乃收斂級數的普通項，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(|h|+|k|)^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

因此 $f(x+h, y+k)$ 可寫成一收斂級數如下：

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k)=f(x, y)&+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y)\\ &+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x, y)+\cdots\\ &+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x, y)+\cdots. \end{aligned}$$

這就是 $f(x, y)$ 的 Taylor 氏級數．當 $|h|<\delta$, $|k|<\delta$ 時，這級數是收斂的．

89. 函數 $f(x, y)$ 之極值 設有一正數 δ，當

$$|h|<\delta, \qquad |k|<\delta$$

時 ($h=k=0$ 除外)，常能使

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)<0,$$

那末 $f(a, b)$ 叫做函數 $f(x, y)$ 的極大值；反之，若

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)>0,$$

$f(a, b)$ 叫做函數 $f(x, y)$ 的極小值．

設函數 $f(x, y)$ 及其第一次偏導數，在 (a, b) 點隣近都是連續的，$f(a, b)$ 既爲 $f(x, y)$ 的極值，亦必爲函數 $f(x, b)$ 與 $f(a, y)$ 的極值，故必有

$$f_x(a, b)=0, \qquad f_y(a, b)=0.$$

換言之，$x=a$, $y=b$ 必爲下二方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

的一組解．

若 $f(x, y)$ 的第二次及第三次偏導數，在 (a, b) 點的隣近都是連續的，依 Taylor 氏定理，則有

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)$$
$$=\frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(a, b)+2hk f_{xy}(a, b)+k^2 f_{yy}(a, b)\}+R_3.$$

令　$A=f_{xx}(a, b),\quad B=f_{xy}(a, b),\quad C=f_{yy}(a, b),$

則　$f(a+h, b+k)-f(a, b)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+R_3.$

當 $|h|$, $|k|$ 之值充分的小，* 使

$$\frac{1}{2}|Ah^2+2Bhk+Ck^2|>R_3,$$

則此時 $f(a+h, b+k)-f(a, b)$ 與 $\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$ 同號.

若 $A\neq 0$，便有

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}\{(Ah+Bk)^2-(B^2-AC)k^2\}.$$

1° $B^2-AC<0$，此時 $f(a+h, b+k)-f(a, b)$ 與 A 同號**.
若 $A>0 (C>0)$，$f(a, b)$ 爲函數 $f(x, y)$ 的極小值.
若 $A<0 (C<0)$，$f(a, b)$ 爲函數 $f(x, y)$ 的極大值.

2° $B^2-AC>0$，此時 $f(a+h, b+k)-f(a, b)$ 之號可正可負，故 $f(a, b)$ 非函數之極值.

注意：若 $B^2-AC=0$，$f(a, b)$ 是否爲極值，較難決定.

---

* $h=r\cos\varphi$，$k=r\sin\varphi$，則 $|Ah^2+2Bhk+Ck^2|=r^2|F(\varphi)|$，
$|R_3|=r^3|G(\varphi)|$，令 m 爲 $|F(\varphi)|$ 的最小值，M 爲 $|G(\varphi)|$ 的最大值，
欲 $\frac{1}{2}r^2m>Mr^3$，祇要 $r<\frac{m}{2M}$.

** 亦必與 C 同號.

例. 求函數 $f(x, y)=xy(a-x-y)$ 的極值, $(a>0)$.

$$f_x(x, y)=y(a-2x-y),$$

$$f_y(x, y)=x(a-x-2y),$$

$$f_{xx}(x, y)=-2y, \quad f_{xy}(x, y)=a-2x-2y, \quad f_{yy}(x, y)=-2x.$$

由 $f_x(x, y)=0$, $f_y(x, y)=0$ 二方程式, 得四組解如下:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=a, \end{cases} \quad \begin{cases} x=a \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{a}{3} \\ y=\dfrac{a}{3}. \end{cases}$$

若用首先的三組解, 得

$$f_{xy}^2(x, y)-f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)=a^2>0.$$

用第四組解, 得

$$f_{xy}^2(x, y)-f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)=-\frac{a^2}{3}<0,$$

且
$$f_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=-\frac{2a}{3}<0,$$

故函數 $f(x, y)$ 在 $x=\dfrac{a}{3}$, $y=\dfrac{a}{3}$ 有一極大值等於 $\dfrac{a^3}{27}$.

90. 隱函數之微分法 x 的函數 y 由方程式 $F(x, y)=0$ 規定者叫做隱函數. 今設 $F(x, y)$ 及其偏導數在一變域內都是連續的, 且 $F_y(x, y)\neq 0$. 把方程式 $F(x, y)=0$ 的兩邊對於 x 各求導數, 便得 (§87, 8)

[1]
$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}=0.$$

故

[2]
$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}}$$

再把 (1) 式兩邊對於 x 求導數，得

[3] $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}=0.$$

由 (2), (3) 二式，便有

[4] $$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^3}}$$

$\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$, … 等可同樣求得之.

若 x 與 y 的函數 z 由方程式 $F(x, y, z)=0$ 規定者，則有

[5] $$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

由此可得 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(5) 之第一式對於 x 與 y 的偏導數依次爲

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,$$

由此可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. 如把 (5) 之第二式對於 y 求偏導數，便可求得 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. 其他高級偏導數均可依同法求得之.

習題 11

1. $z=ax^m y^n$，求 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}.

2. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}.

3. $z=\dfrac{xy}{x+y}$, 試證 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

4. $z=\dfrac{e^{xy}}{e^x+e^y}$, 試證 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=(x+y-1)z$.

5. $z=\log(e^x+e^y)$, 試證 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

6. 於下列函數驗明

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

(1) $x^3y-3x^2y^3$. (2) $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

(3) $\sin(x^2y)$. (4) $e^x\cos y-e^y\sin x$.

7. 設

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad f(0,0)=0.$$

當 $x=0$, $y=0$ 時, 試證明

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

8. $z=f(x^2-y^2)$, 試證 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

9. $z=f(y+ax)+\varphi(y-ax)$, 試證明

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

10. $u=(y-z)(z-x)(x-y)$, 試證

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

11. $u=\log(\tan x+\tan y+\tan z)$, 試證

$$\sin 2x\frac{\partial u}{\partial x}+\sin 2y\frac{\partial u}{\partial y}+\sin 2z\frac{\partial u}{\partial z}=2.$$

12. 若 $f(tx, ty, tz)=t^n f(x, y, z)$, 試證

$$xf_x+yf_y+zf_z=nf.$$

13. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 試證明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

14. $u=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, 試證明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

15. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 試證明

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\,\partial z^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\,\partial x^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=0.$$

16. 若 $f(x, y)$ 爲一齊二次多項式, 用 Taylor 氏定理證明

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+hf_x+kf_y+f(h, k).$$

17. $f(t, x, y)=0$, $g(t, x, y)=0$. 求 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$.

18. 試證明下列各式

(1) $$\frac{1}{(1-x)(1-y)}=1+x+y+x^2+xy+y^2+\cdots+x^n+x^{n-1}y+\cdots+y^n+\cdots,$$
$$|x|<1,\quad |y|<1.$$

(2) $$\log(1-x)\log(1-y)=xy+\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\cdots+\frac{xy^{n-1}}{n-1}+\frac{x^2y^{n-2}}{2(n-2)}+\cdots+\frac{x^{n-1}y}{n-1}+\cdots.$$

(3) $\arctan\frac{x-y}{1+xy}=x-y-\frac{x^3-y^3}{3}+\frac{x^5-y^5}{5}-\cdots,$

$$-1<x\leqq 1,\quad -1<y\leqq 1$$

19. 求下列函數的極值.

(1) $x^4+y^4+4xy-2x^2-2y^2.$

(2) $x^2y^3(a-x-y).$

(3) $(a\cos x+b\cos y)^2+(a\sin x+b\sin y)^2.$

(4) $(2ax-x^2)(2by-y^2).$

20. 求下列函數 y 之極值.

(1) $x^3-3axy+y^3=0.$

(2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$

(3) $x^3y^3+y-x=0.$

21. 已知直圓錐之側面積等於 a^2, 求其體積之最大者.

22. 在圓內作一內接凸 n 角形, 求其面積之最大者.

23. 在一橢圓面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

內的內接正平行六面體中, 求其體積之最大者.

24. 證明函數 $xe^{y+x\sin y}$ 無極值.

25. $z=f(x, y),\ \varphi(x, y)=0$, 試求 $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}.$

26. 求二直線間

$$\begin{cases} y=2x \\ z=3x \end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} y=x+3 \\ z=x \end{cases}$$

的最短距離.

27. 平面 $x+y+z=0$ 與拋物面 $z=xx$ 相交得一雙曲線, 其中一支經過原點, 另一支不經過原點, 試求在第二支上與原點距離最近的點.

28. 在平面 $ax+by+cz+d=0$ 上，那一點與原點距離最近？
在直線上
$$\begin{cases} a\,x+b\,y+c\,z+d\;=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$
那一點與原點距離最近？

29. P, P' 二點順次在不相交的二曲面 S, S' 上，當 PP' 最短時，直線 PP' 必與 S, S' 相正交.

30. P, P' 二點順次在不相交的二空間曲線 C, C' 上，當 PP' 最短時，直線 PP' 必與 C, C' 相正交.

31. $z=f(x, y),\ x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.$　試證
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r}.$$

32. $u=f(x, y, z),\ x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta.$
試證
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{2u}{\partial\varphi}\right)^2.$$

第十二章

幾何上的應用

91. 切線, 法線, 特異點 設曲線之方程式爲 $f(x, y)=0$, 則曲線在 (x, y) 點的切線方程式爲

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)=0}$$

而曲線在 (x, y) 點的法線方程式爲

$$\boxed{\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$$

若曲線上 P 點的座標 (x, y), 能滿足下二方程式

[1] $$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

者, 那末 P 點叫做曲線的特異點.

設 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} 在 P 點不全等於零, 且這三個偏導數與第三次偏導數 $f_{x^3}\cdots$ 等, 在 P 點的隣近都是連續的. 今在曲線上另取一點 Q, 令 $x+h$, $y+k$ 爲其座標. 把 $f(x+h, y+k)$ 依 Taylor 氏定理展開, 即得

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+hf_x+kf_y$$
$$+\frac{1}{2}(h^2 f_{xx}+2hk f_{xy}+k^2 f_{yy})+R_3.$$

然 $f(x+h, y+k)=0$, $f(x, y)=0$, $f_x=0$, $f_y=0$, 故

[2] $$h^2 f_{xx}+2hk f_{xy}+k^2 f_{yy}+2R_3=0.$$

以 h^2 除上式兩邊，然後令 $h\to 0$，則 $h\to 0$ 時，$\dfrac{R_3}{h^2}\to 0$. 設 $\dfrac{k}{h}$ 趨近於極限 y'，於是由 (2) 式得

[3] $$f_{xx}+2y'f_{xy}+y'^2 f_{yy}=0,$$

此乃一 y' 的二次方程式. 令

$$\Delta=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}.$$

1° 若 $\Delta>0$，此時 (3) 式有二不同之實根，故曲線在 P 點有二相異之切線，此時 P 點叫做結點（圖 103）.

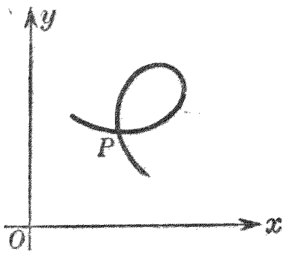


圖 103

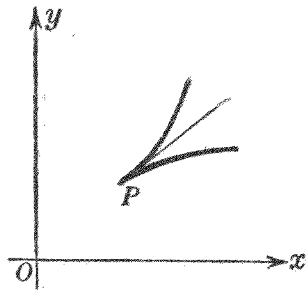


圖 104

2° 若 $\Delta=0$，(3) 式之二根相等，故曲線在 P 點有連切線相重合，此時 P 點叫做尖點（圖 104）.

3° 若 $\Delta<0$，(3) 式有二虛根，故曲線在 P 點無實切線，此時 P 點叫做弧立點.

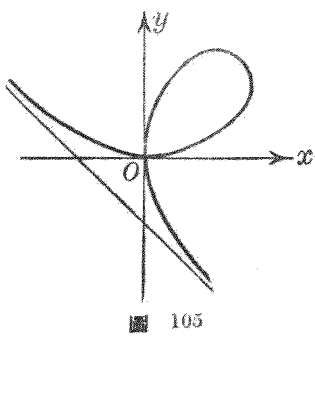


圖 105

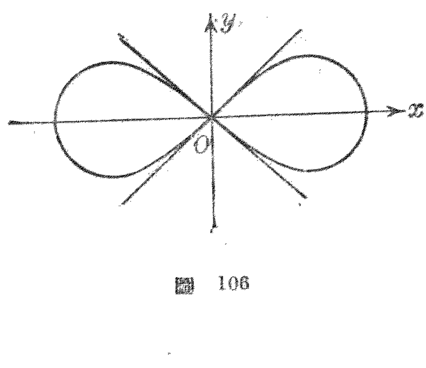


圖 106

例 1. 正葉線 $x^3+y^3-3axy=0$ 在原點有一結點(圖 105).

例 2. 連珠線 $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ 在原點亦有一結點(圖 106).

例 3. 曲線 $y^2(2a-x)-x^3=0$ 在原點有一尖點(圖 107).

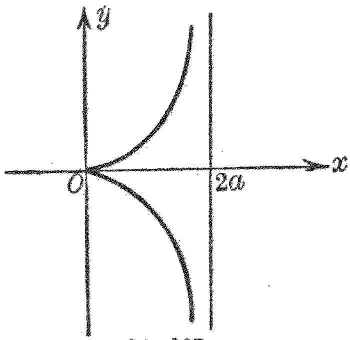


圖 107

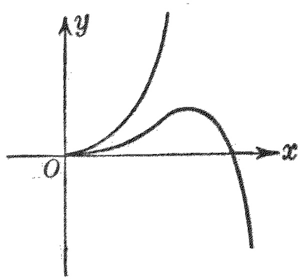


圖 108

例 4. 曲線 $(y-2x^2)^2-x^5=0$ 在原點亦有一尖點(圖 108).

例 5. 曲線 $x^2+y^2-x^3=0$, 在原點有一弧立點(圖 109).

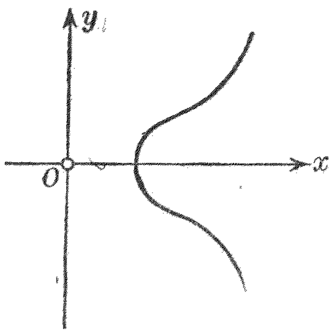


圖 109

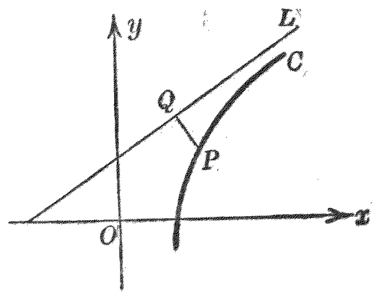


圖 110

92. 漸近線 設 L 表一直線, C 表一曲線, P 爲曲線上之一點, PQ 爲 P 點至直線 L 的距離. P 點在 C 上趨於無窮遠時, 若 PQ 趨近於零, 則直線 L 叫做曲線 C 的漸近線(圖 110).

1° 設直線 L 不與 y 軸平行. 令 $Y=mX+p$ 爲其方程式, 則 $P(x, y)$ 點至直線 L 的距離等於

$$PQ=\frac{|y-mx-p|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

L 既爲曲線的漸近線, 則有

[1] $$\lim_{x\to\infty}(y-mx-p)=0,$$

即 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}-m-\frac{p}{x}\right)=0.$$

由是得 $$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}.$$

代入 (1) 式, 得

[2] $$p=\lim_{x\to\infty}(y-mx).$$

若曲線之方程式爲 $y=f(x)$, 則

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}f'(x),$$

$$p=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-xf'(x)\},$$

於是得漸近線的方程式爲

$$\boxed{Y=X\lim_{x\to\infty}f'(x)+\lim_{x\to\infty}\{f(x)-xf'(x)\}}$$

2° 設直線 L 與軸平行, 若有

$$\lim_{x\to a}y=\infty,$$

則 $x=a$ 便是漸近線的方程式. 若有

$$\lim_{x\to\infty}y=b,$$

則 $y=b$ 便是漸近線的方程式.

在極座標，設 $r=f(\theta)$ 爲曲線之方程式．當 $\theta\to\alpha$ 時，r 趨近於無窮，於是過極點作一直線與原線成一 α 角．令曲線上的一點 $P(r,\theta)$ 與這直線的距離爲 PQ，則

$$PQ=r\sin(\alpha-\theta).$$

然後令 P 點沿着曲線的無限分支趨於無窮遠，此時

$$(\alpha-\theta)\to 0,\quad r\to\infty,$$

故 $a\sin(\alpha-\theta)$ 呈不定形 $\infty\cdot 0$．設 c 爲其極限值，即

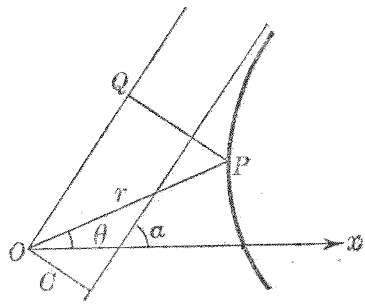


圖 111

$$c=\lim_{\theta\to\alpha} r\sin(\alpha-\theta).$$

由是得漸近線之方程式如下

$$\boxed{r\sin(\alpha-\theta)=c}$$

（c 之符號爲正抑爲負，與漸近線的位置很有關係，讀者務須注意．）

例．　求曲線 $r=\frac{a}{\theta}$ 的漸近線 $(a>0)$．

當 $\theta\to 0$ 時，$r\to\infty$．故 $\alpha=0$．

$$c=\lim_{\theta\to 0} r\sin(-\theta)=\lim_{\theta\to 0} a\frac{\sin(-\theta)}{\theta}=-a.$$

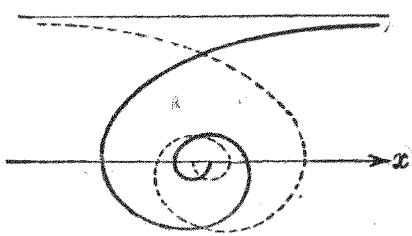


圖 112

故漸近線之方程式爲 $r\sin(-\theta)=-a$,

即
$$r=\frac{a}{\sin\theta}.$$

當 $\theta\to\infty$, $r\to 0$, 此時曲線與極點無限接近，這種點叫做漸近點.

93. 曲線之畫法 設已有一曲線的方程式，今欲知曲線的形狀，必須先知其重要的性質．例如

1° 曲線對於原點或座標軸，原線或其他直線，有否對稱.

2° 決定曲線所存在的區域.

3° 如曲線有無限分支，應求曲線的漸近線.

4° 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{dr}{d\theta}$ $\left(\text{有時須求 } r\dfrac{d\theta}{dr} \text{ 之值}\right)$ 以考察曲線方向的變遷.

例 1.
$$y^3=ax^2+x^3. \qquad (a>0)$$

曲線對於 x 軸或 y 軸都不對稱．原方程式可寫如
$$y^3=x^2(a+x).$$

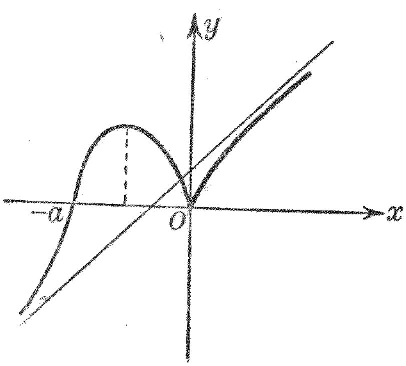


圖 113

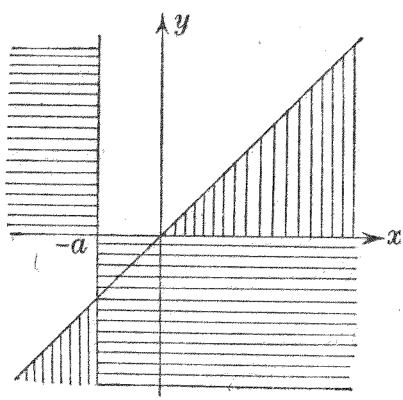


圖 114

若　　$x>-a$,　　則　　$y>0$;

若　　$x<-a$,　　則　　$y<0$.

故曲線之存在區域爲直線 $x=-a$ 之右，x 軸之上；及直線 $x=-a$ 之左，x 軸之下．原方程式又可寫如

$$y=x\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

若 $x>0$, 則 $y>x$.

若 $x<-a$, 則 $|y|<|x|$.

故在下列區域內

$$x>y>0,$$

及

$$y<x<-a,$$

曲線不能存在．

當 $|x|$ 之值甚大時，

$$y=x\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{a}{x}-\frac{1}{9}\,\frac{a^2}{x^2}+\cdots\right)=\left(x+\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{9}\,\frac{a^2}{x}+\cdots,$$

由是知直線 $y=x+\frac{a}{3}$ 爲曲線之漸近線．當 $x\to+\infty$ 時，$-\frac{a^2}{9x}<0$，故曲線在漸近線之下．當 $x\to-\infty$ 時，$-\frac{a^2}{9x}>0$，故曲線在漸近線之上．

又

$$y'=\frac{2a+3x}{3\sqrt[3]{x(a+x)^2}}.$$

茲將 y' 之符號隨 x 之值而變的情況列表如下：

x	$-\infty$		$-a$		$-\frac{2a}{3}$		0		$+\infty$
y'			$+$		0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}a$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

當 $|x|$ 之值甚小時，曲線在原點附近的形狀與 $y^3=ax^2$ 相似，故曲線在原點有一尖點.

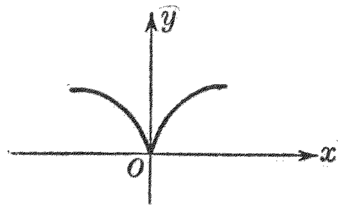


圖 115

注意：　曲線的方程式也可先寫成 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 的形式，然後求其圖形．令 $y=tx$，則 $x=\dfrac{a}{t^3-1}$,　　$y=\dfrac{at}{t^3-1}$.

例 2.

$$x=\frac{t^2}{t-1},\qquad y=\frac{t}{t^2-1}.$$

當 $t=1$ 時，

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2},$$

又

$$2y-x=t\frac{2-t-t^2}{t^2-1}=-t\frac{t+2}{t+1}=-\frac{3}{2},$$

故 $2y=x-\dfrac{3}{2}$ 爲曲線之漸近線.

當 $t=-1$ 時，$y=\infty$, $x=-\dfrac{1}{2}$，故曲線有一漸近線與 y 軸平行；

當 $t=\infty$ 時，$x=\infty$, $y=0$，故 x 軸亦爲曲線的漸近線．又

$$\frac{dx}{dt}=t\frac{t-2}{(t-1)^2},\qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}<0.$$

茲把 t 變動時，x, y, $\dfrac{dx}{dt}$ 變動的情形列表如下：

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$			$+$		0		$-$		0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

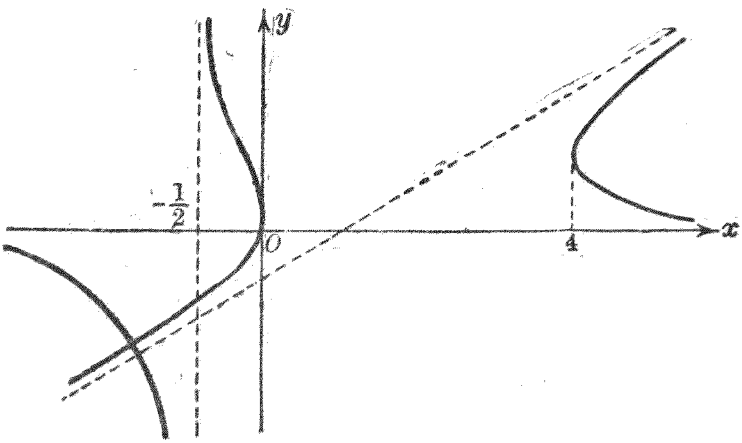


圖 116

曲線有一重點, 欲求其座標, 令

$$\frac{t'^2}{t'-1}=\frac{t^2}{t-1}, \qquad \frac{t'}{t'^2-1}=\frac{t}{t^2-1}.$$

或 $$t'^2t-t^2t'=t'^2-t^2, \qquad t't^2-tt'^2=t'-t.$$

以 $t-t'$ 除上式兩邊, 得

$$tt'=t+t', \qquad tt'=-1.$$

由是知 $$t+t'=-1.$$

故 t 與 t' 為方程式 $t^2+t-1=0$ 的二根, 由是得重點的座標為

$$x=\frac{1-t}{t-1}=-1, \qquad y=\frac{t}{-t}=-1.$$

例 3.　$x^3+y^3-3axy=0$ (正葉線).

令 $y=tx$, 則

$$x=\frac{3at}{t^3+1}, \qquad y=\frac{3at^2}{t^3+1}.$$

當 $t=-1$ 時, $\frac{y}{x}=t=-1$; 又

$$y+x=\frac{3at}{t^2-t+1}=-a.$$

故 $x+y+a=0$ 爲曲線的漸近線.

原方程式又可寫如

$$x+y=\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}.$$

即
$$x+y+a=\frac{a(x+y)^2}{x^2-xy+y^2}.$$

若 $a>0$, 則 $x+y+a>0$. 今將漸近線 $x+y+a=0$ 分全平面爲正負二區域, 於是知曲線全在正區域內.

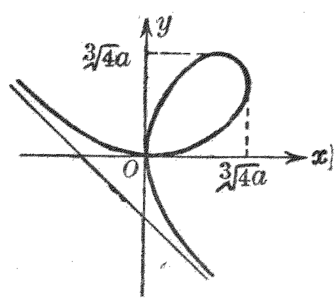


圖 117

茲將函數 x 及 y 的變遷列表如下

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3a(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{3at(2-t^3)}{(t^3+1)^2}.$$

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$			$+$		$3a$	$+$	0		$-$		
x	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}\,a$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}\,a$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$			$-$		0			$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}\,a$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}\,a$	$\searrow$	0

例 4.　$r^2=a^2\cos 2\theta\ (a>0)$.

方程式可書爲

$$r=\pm a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

把 θ 換爲 $-\theta$ 或 $\pi-\theta$, 方程式不變, 故知曲線對於原線成對稱, 對於 Oy (垂直於原線) 也成對稱, 所以祇要知道曲線在

$$r>0,\qquad 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$$

範圍内的形狀就夠了.

由原方程式, 易知 $|r|\leqq a$, 故曲線當在以 O 爲中心, a 爲半徑的圓周内. 又當 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 時, $\cos 2\theta<0$, 故此處曲線也不存在 (圖中縱線部份).

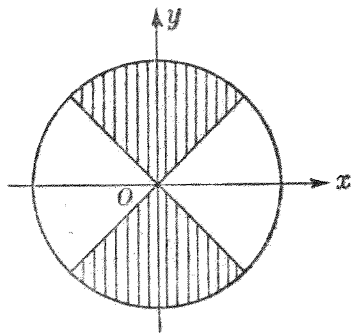


圖　118

今就 $\frac{dr}{d\theta}$ 觀之,

$$\frac{dr}{d\theta}=-\frac{a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

當 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ 時, $\frac{dr}{d\theta}<0$. 故 r 隨 θ 之增加而減少. 又此時

$$r\frac{d\theta}{dr}=-\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\leqq 0,$$

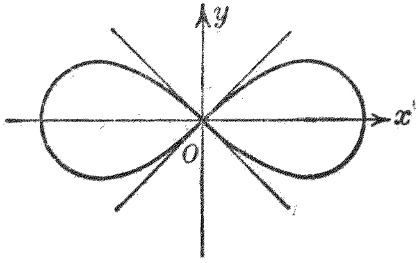


圖　119

由是知 $\theta=0$ 時, 曲線與原線相正交. $\theta=\frac{\pi}{4}$ 時, 曲線與直線 $y=x$ 相切.

94. 包線 設曲線的方程式另含一參變數 α, 如

[1] $$f(x, y, \alpha)=0,$$

當 α 之值依次遞變時, 方程式 (1) 便表示一族曲線. 例如

$$(x-\alpha)^2+y^2=1$$

就表示一族圓線 (圖 120).

$$y=(x-\alpha)^2$$

就表示一族拋物線 (圖 121).

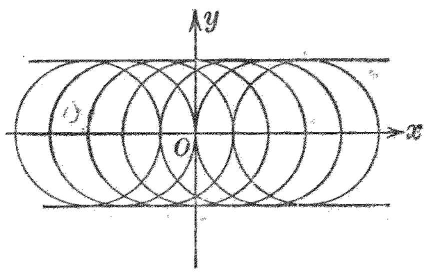


圖 120

定義 若曲線族中, 每一曲線均與一曲線 E 相切, 那末這曲線 E 就叫做這族曲線的包線.

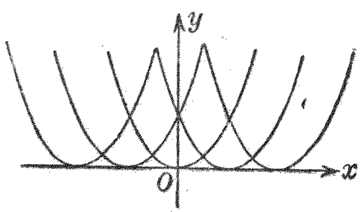


圖 121

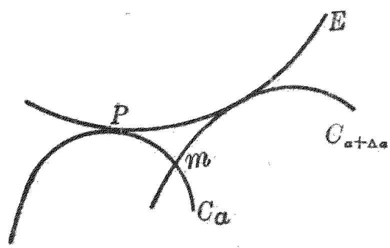


圖 122

設曲線族中的一曲線 C_α 與包線 E 相切於 P 點, 那末 P 點的位置顯然隨 α 之值而變更. 換言之, P 點的座標是 α 的函數,

[2] $$x=\varphi(\alpha), \quad y=\psi(\alpha).$$

視 α 爲變數, 上式就是包線 E 的方程式, 故曲線 E 在 P 點的斜率爲

$$\frac{dy}{d\alpha}=\frac{\dfrac{d\psi}{d\alpha}}{\dfrac{d\varphi}{d\alpha}}.$$

今設 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\neq 0$, 那末曲線 C_α 在 P 點的斜率爲

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

因 C_α 與 E 相切於 P 點, 故

[3] $$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\varphi}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{d\alpha}=0.$$

又把 (2) 式中 x, y 之值代入 (1) 式, 得

$$f\{\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha\}=0,$$

無論 α 如何, 上式常爲眞確, 故

[4] $$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0.$$

由 (3), (4) 二式便得

[5] $$\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial\alpha}=0.$$

由此言之, P 點的座標, 當滿足 (1) (5) 二式. 故曲線 E 的方程式可由下二式

[6] $$\begin{cases} f(x, y, \alpha)=0, \\ f_\alpha(x, y, \alpha)=0, \end{cases}$$

消去 α 而得, 或寫如叄變數方程式

$$\begin{cases} x=\varphi(\alpha), \\ y=\psi(\alpha). \end{cases}$$

注意 1.　若 P 點爲 C_α 的特異點, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 那末 P 點的

座標，亦必滿足 (1), (5) 二式，此時 (6) 式所代表者便是曲線族 $f(x, y, \alpha)=0$ 中各曲線特異點的軌跡.

注意 2. 曲線 C_α 與 $C_{\alpha+\Delta\alpha}$ 的交點 m，其座標當由下列二式

$$f(x, y, \alpha)=0, \qquad f(x, y, \alpha+\Delta\alpha)=0$$

得之，此二式之同解方程式為

$$f(x, y, \alpha)=0, \qquad \frac{f(x, y, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha}=0.$$

當 $\Delta\alpha\to 0$, m 點便趨近於 P 點，於是第二式變為 $f_\alpha(x, y, \alpha)=0$，由此可知包線上的各點，就是二鄰接曲線的交點的極限位置.

注意 3. $f(x, y, \alpha)$ 對於 α 為一二次式時，$f_\alpha(x, y, \alpha)=0$ 乃表示 $f(x, y, \alpha)=0$ 對於 α 有二等根的充要條件. 如

$$f(x, y, \alpha)\equiv A(x, y)\alpha^2+2B(x, y)\alpha+C(x, y)=0,$$

那末包線的方程就可寫如

$$A(x, y)C(x, y)=B^2(x, y).$$

例 1. 求直線族

[1] $$f(x, y, \alpha)\equiv\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=a$$

的包線 (圖 123).

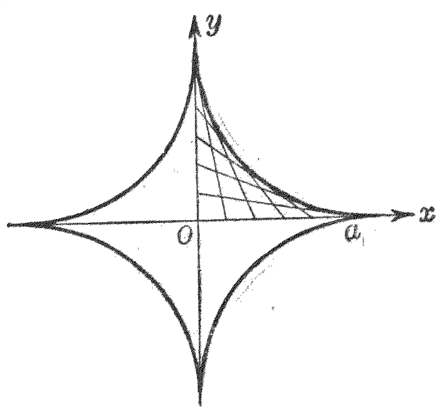


圖 123

[2] $$f_a(x, y, a) \equiv \frac{x \sin a}{\cos^2 a} - \frac{y \cos a}{\sin^2 a} = 0.$$

由 (1), (2) 二式得

$$x = a \cos^3 a, \qquad y = a \sin^3 a,$$

或 $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

是卽星形線的方程式.

例 2. 求曲線族

[1] $$f(x, y, a) \equiv (x-1)(y-a)^2 + x^2(x+1) = 0$$

的包線 (圖 124).

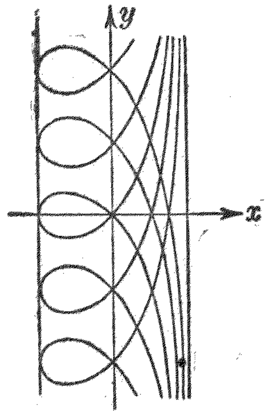


圖 124

[2] $$f_a \equiv -2(x-1)(y-a) = 0.$$

由 (1), (2) 二式消去 a, 得

$$x = 0, \qquad x = -1.$$

直線 $x = -1$ 爲曲線 (1) 的包線; y 軸 $x = 0$ 爲曲線 (1) 重點的軌跡 $[f_x(0, a, a) = 0,\ f_y(0, a, a) = 0]$.

例 3. 求曲線族

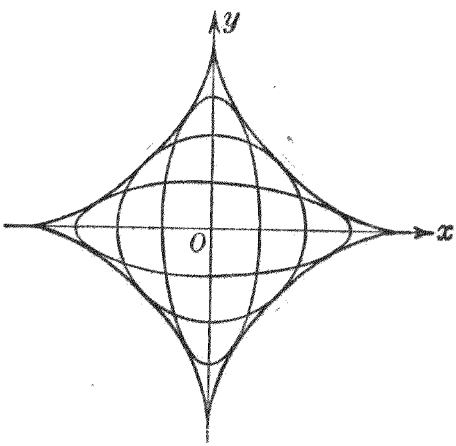


圖 125

[1] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的包線，但已知 a 與 b 之和等於常數 c.

b 可視爲 a 的函數，即

[2] $$a+b=c,$$

故 $$da+db=0.$$

又由曲線方程式得

$$\frac{x^2da}{a^3}+\frac{y^2db}{b^3}=0,$$

故

[3] $$\frac{x^2}{a^3}=\frac{y^2}{b^3}.$$

由 (1), (2), (3) 三式消去 a, b 便得包線的方程式

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}.$$

例 4.　法線的包線.

曲線 $y=f(x)$ 在 $P(x, y)$ 點的法線爲

[1] $$X-x+y'(Y-y)=0,$$

其中 y 爲 x 的函數，故這法線的位置依參變數 x 的值而變易. 令上式左邊對於 x 的導數等於零，便有

[2] $$-1-y'^2+(Y-y)y''=0.$$

由 (1), (2) 二式解出 X 與 Y，得

$$\begin{cases} X=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$

是即曲線 $y=f(x)$ 的漸縮線.

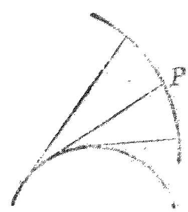


圖 126

95. 空間曲線的切線及法平面 在直角座標，方程式

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad z=X(t)$$

即表示一空間曲線，其中 t 是參變數．設 $P(x, y, z)$，$P_1(x_1, y_1, z_1)$ 爲曲線上的鄰近二點，

$$x_1=\varphi(t+\Delta t)=x+\Delta x,$$
$$y_1=\psi(t+\Delta t)=y+\Delta y,$$
$$z_1=X(t+\Delta t)=z+\Delta z,$$

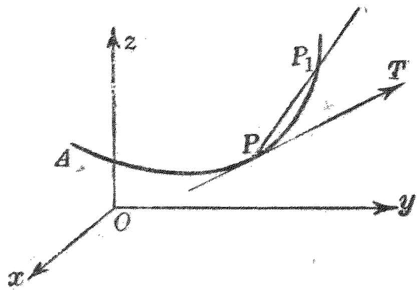


圖 127

於是直線 PP_1 的方程式爲

$$\frac{X-x}{x_1-x}=\frac{Y-y}{y_1-y}=\frac{Z-z}{z_1-z}.$$

以 Δt 除上式分母，得

$$\frac{X-x}{\dfrac{x_1-x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\dfrac{y_1-y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\dfrac{z_1-z}{\Delta t}}.$$

令 P_1 點沿曲線趨近於 P 點，PP_1 的極限位置 PT 叫做曲線在 P 點的切線．令 $\Delta t\to 0$，即得切線的方程式如下：

[1]

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{X-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dz}{dt}}\\ \frac{X-x}{\varphi'(t)}=\frac{Y-y}{\psi'(t)}=\frac{Z-z}{X'(t)}\end{gathered}}$$

在 P 點若 $\varphi'(t)=0,\ \psi'(t)=0,\ \chi'(t)=0$, P 點便叫做曲線的特異點.
直線 PP_1 的方向餘弦, 按解析幾何理, 與

$$x_1-x,\qquad y_1-y,\qquad z_1-z$$

三數成正比例. 今令 $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ 爲直線 PP_1 的方向餘弦, 則

$$\cos\alpha':\cos\beta':\cos\gamma'=\frac{x_1-x}{\Delta t}:\frac{y_1-y}{\Delta t}:\frac{z_1-z}{\Delta t}.$$

當 P_1 點沿曲線趨近於 P, $\Delta t\to 0$, 於是 x_1-x, y_1-y, z_1-z 都趨近於零, 所以切線 PT 的方向餘弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 與 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ 成正比例, 卽

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}:\frac{dz}{dt},$$

或

[2]
$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}.$$

討論曲線時, 我們應於曲線上取定一向爲其弧之正向, 另取一點 A 爲弧之原點. AP 弧之長 s 爲正或爲負, 應視 A 至 P 之向爲正或爲負而定. 今令切線 PT 之向與弧之正向相同, 那末由 (2) 式得

$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\pm\frac{1}{ds}.$$

設 α 爲一銳角, 則 s 隨 x 增大而增大, 此時式中之 $\pm$ 號應取正號. 設 α 爲一鈍角, 則 x 增大時, s 反而減小, 故 $\frac{dx}{ds}$ 爲負, 此時式中之 $\pm$ 號仍應取正號, 所以無論如何, 恆有

[3]
$$\boxed{\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}}$$

過 P 點作一平面與 PT 相垂直，這個平面叫做曲線在 P 點的法平面. 其方程式易知爲

$$[4] \qquad \boxed{\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0}$$

若空間曲線的方程式爲

$$F(x, y, z)=0, \qquad G(x, y, z)=0,$$

換言之，空間曲線可視爲二曲面 $F=0$, $G=0$ 的交線. 今我們設想這曲線得以方程式

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad z=X(t)$$

表達之，把這三函數 x, y, z 代入 F 與 G 中，則 F 與 G 都恆等於零，然後對於 t 求導數，便得

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0.$$

由此得

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z}}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}.$$

由 (1) 式得曲線在 $P(x, y, z)$ 點的切線方程式如下:

$$[5] \qquad \boxed{\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}}$$

例. 求螺線 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$. 在 $P(x, y, z)$ 點的切線與法平面.

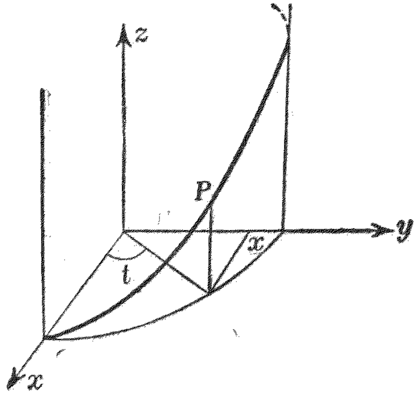


圖 128

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\qquad \frac{dy}{dt}=a\cos t,\qquad \frac{dz}{dt}=b.$$

故切線的方程式爲

$$\frac{X-x}{-y}=\frac{Y-y}{x}=\frac{Z=z}{b}.$$

法平面的方程式爲

$$-y(X-x)+x(Y-y)+b(Z-z)=0,$$

即
$$yX-xY-b(Z-z)=0.$$

96. 曲面的切平面與法線　設 P, Q 爲曲面上的鄰近二點，令 Q 沿曲面趨近於 P，則直線 PQ 的極限位置 PT 叫做曲面在 P 點的切線.

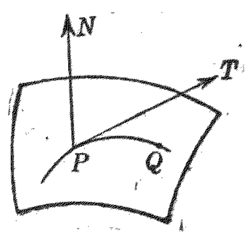


圖 129

定理.　曲面在 P 點的所有切線，皆在一平面上，這個平面叫做曲面在 P 點的<u>切平面</u>.

設

[1]
$$F(x, y, z)=0$$

爲曲面的方程式，$P(x, y, z)$ 爲曲面上的一

點. 在曲面上經過 P 點作一曲線 C, 令

[2] $$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad z=X(t)$$

爲這曲線的方程式, 把這 x, y, z 之值代入 (1) 式, 便得一恆等式

$$F\{\varphi(t),\ \psi(t),\ X(t)\}\equiv 0.$$

故 F 對於 t 的導數也等於零, 即

[3] $$\frac{\partial F}{\partial x}\ \frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\ \frac{dz}{dt}=0.$$

但曲線 C 在 P 點的切線爲

$$\frac{X-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dz}{dt}}.$$

由 (3) 式便知這切線在下列平面上

[4] $$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0}$$

然原設 C 爲曲面上經過 P 點的一任意曲線, 故曲面在 P 點的所有切線都在平面 (4) 上. 這個平面依定義就是曲面在 P 線的切平面. 經過 P 點而與這切平面相正垂的直線, 叫做曲面在 P 點的法線. 其方程式易知爲

(2) $$\boxed{\frac{X-x}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

若曲面的方程式爲 $z=f(x, y)$, 即

$$F(x, y, z)\equiv f(x, y)-z=0,$$

此時 $$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y},\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=-1.$$

故切平面的方程式爲

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

法線的方程式爲

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

在 P 點若 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ 全等於零, 那末 P 點叫做曲面的特異點.

曲面在特異點的所有切線, 並不在一平面上.

例.　橢圓面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

在 (x, y, z) 點的切平面爲

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

97.　切觸面　設 P 點爲空間曲線上的一點, P_1 P_2 爲其鄰近二點, 當 P_1, P_2 二點沿着曲線無限趨近於 P 點時, 平面 PP_1P_2 的極限位置叫做曲線在 P 點的切觸面.

設曲線的方程式爲

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad z=X(t),$$

(x, y, z) 爲 P 點的座標, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) 爲 P_1, P_2 二點的座標, 且

$$x_1=\varphi(t+h), \qquad y_1=\psi(t+h), \qquad z_1=X(t+h);$$
$$x_2=\varphi(t+k), \qquad y_2=\psi(t+k), \qquad z_2=X(t+k).$$

經過 P 點的平面方程式爲

[1]　$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

今欲這個平面也經過 P_1, P_2 二點, 應有

$$A\{\varphi(t+h)-\varphi(t)\}+B\{\varphi(t+h)-\psi(t)\}+C\{X(t+h)-X(t)\}=0,$$
$$A\{\varphi(t+k)-\varphi(t)\}+B\{\varphi(t+k)-\psi(t)\}+C\{X(t+k)-X(t)\}=0.$$

把上式左邊各依 Taylor 氏公式展開，然後以 h 除第一式，以 k 除第二式，便得

[2]
$$\begin{aligned}&A\varphi'(t)+B\psi'(t)+CX'(t)+\frac{h}{2!}\{A\varphi''(t)+B\psi''(t)+CX''(t)\}\\&\qquad+\frac{h^2}{3!}\{A\varphi'''(t)+\cdots\}+\cdots=0,\\&A\varphi'(t)+B\psi'(t)+CX'(t)+\frac{k}{2!}\{A\varphi''(t)+B\psi''(t)+CX''(t)\}\\&\qquad+\frac{k^3}{3!}\{A\varphi'''(t)+\cdots\}+\cdots=0.\end{aligned}$$

二式相減後以 $h-k$ 除之，便有

[3] $$A\varphi''(t)+B\psi''(t)+CX''(t)+\frac{h+k}{3}\{A\varphi'''(i)+\cdots\}+\cdots=0.$$

今令 $h\to0$, $k\to0$, 於是 (2), (3) 二式便變爲

$$A\varphi'(t)+B\psi'(t)+CX'(t)=0,$$
$$A\varphi''(t)+B\psi''(t)+CX''(t)=0.$$

由是得

$$\frac{A}{\psi'X''-X'\psi''}=\frac{B}{X'\varphi''-\varphi'X''}=\frac{C}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}.$$

於是方程式 (1) 可寫如

[4] $$\boxed{\begin{aligned}(\psi'X''-X'\psi'')(X-x)+(X'\varphi''-\varphi'X'')(Y-y)\\+(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')(Z-z)=0\end{aligned}}$$

或可寫如

$$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \varphi' & \psi' & X'\\ \varphi'' & \psi'' & X''\end{vmatrix}=0.$$

這就是曲線在 P 點的切觸面方程式.

例如螺線 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ (見圖 127) 在 $P(x, y, z)$ 點的切觸面爲

$$b(yX-xY)+a^2(Z-z)=0.$$

曲線在 P 點的切觸面與在這點的法平面相交得一直線, 這直線叫做曲線在 P 點的主法線. 過 P 點作一直線與切觸面相垂直, 這直線叫做曲線在 P 點的副法線.

習題 12

1. 試畫下列方程式所表的曲線:

(1) $y=\dfrac{a^x}{x^2}$.　　(2) $y=\dfrac{1+e^x}{x}$.

(3) $y=\dfrac{x-e^x}{x-2}$.　　(4) $y=xe^{\frac{1}{x-2}}$.

(5) $y=x\log x$.　　(6) $y=\dfrac{x}{x-1}\log x$.

(7) $y=\log x-x(x+1)$.　　(8) $y=\cos x+x\sin x$.

2. 試畫下列方程式所表的曲線:

(1) $r=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\theta}{3}}$.　　(2) $r=\cos^2\dfrac{\theta}{2}$.

(3) $r=4\cos\theta-\dfrac{1}{\cos\theta}$.　　(4) $r=2\sin 2\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}$.

(5) $r=\dfrac{1+\sin\theta}{1-2\cos\theta}$.　　(6) $r=\dfrac{\sin 2\theta}{1-\tan\theta}$.

3. 試畫下列方程式所表的曲線:

(1) $\begin{cases} x=\sqrt{3}(t^2-1)+t, \\ y=1-t^2. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\cos 2t+2\cos t, \\ y=\sin 2t+2\sin t. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=\dfrac{at^3}{t^2-1}, \\ y=a\cdot\dfrac{t+4}{t^2+t}. \end{cases}$

4. 試求曲線 $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的漸近線.

5. 求曲線 $x=t^2(3+2t)$, $y=-3t(2+t)$ 與 x 軸所圍成之面積.

6. 試畫下列方程式所表的曲線:

(1) $(3x-y)(x^2+y^2)=x^2$.

(2) $x(x^2+y^2)-x^2+4y^2=0$.

(3) $ax(x-y)^2=y^4$.

7. 求直線 $y=\alpha x+\alpha^3$ 的包線, 並試求這包線的縮閉線.

8. 求直線 $y=\alpha x\pm\sqrt{a^2\alpha^2+b^2}$ 的包線.

9. 一圓的圓心在拋物線 $y^2=4ax$ 上移動, 但其圓周必經過原點, 試求這族圓的包線.

10. 一圓的圓心在雙曲線 $x^2-y^2=a^2$ 上移動, 但其圓周必經過原點, 試求這族圓的包線.

11. 求一族橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a^2+b^2=l^2$ (l 爲一常數) 的包線.

12. 求空間曲線

$$x=t^2, \qquad y=t^3, \qquad z=t^4$$

在 (x, y, z) 點的切線, 法平面, 切觸面, 主法線及副法線.

13. 求空間曲線

$$x=e^t\cos t, \qquad y=e^t\sin t, \qquad z=e^t$$

在 (x, y, z) 點的切線, 法平面, 切觸面, 主法線及副法線.

14. 在曲線 $x=at$, $y=bt^2$, $z=ct^3$ 上三點 A, B, C 作三個切觸面，試證這三個平面與平面 ABC 同經過一點.

15. 試作一平面與直線

$$\begin{cases} x+y-\ \ z+1=0 \\ 2x-1+3z-2=0 \end{cases}$$

相垂直，並與球面 $x^2+y^2+z^2-4=0$ 相切.

16. 求下列曲面

(1) $xy=cz$,　　　　(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$,

在 (x, y, z) 點的切平面與法線.

17. 試證曲面 $f(y-ax, z-bx)=0$ 的切平面常與一定線平行.

18. 求一柱面，其母線與 z 軸平行，且與曲面 $2xz+z^2+y=0$ 相切.

19. 設二曲面 $F(x, y, z)=0$, $G(x, y, z)=0$ 在公共點 P 的二法線互相正垂，那末這二曲面在 P 點互相正交. 試證在 P 點有

$$\frac{\partial F}{\partial x}\ \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\ \frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\ \frac{\partial G}{\partial z}=0.$$

20. 試求曲線

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$$

與曲面 $\Phi(x, y, z)=0$ 在 (x, y, z) 點相切的條件.

第十三章

重積分

98. 重積分 設 $f(x, y)$ 在變域 D 內是一 x 與 y 的連續函數，把變域 D 任意分作 N 個小變域 $a_1, a_2, \cdots, a_N$，設此等小變域各能放在以 ρ 爲半徑的圓內，令 $\Delta\sigma_i$ 爲變域 a_i 的面積，M_i 與 m_i 爲 $f(x, y)$ 在 a_i 內的最大值與最小值，(ξ_i, η_i) 爲 a_i 內的任意一點，當 $N \to \infty$，$\rho \to 0$ 時，我們知道下列二和數

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \Delta\sigma_i, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta\sigma_i$$

各向同一極限收斂.* 這個極限我們以記號

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma \qquad \text{或} \qquad \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

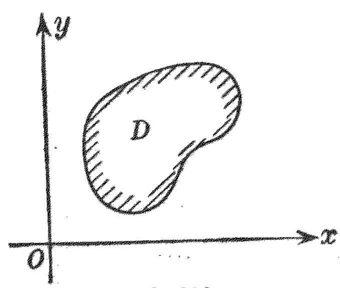


圖 130

表示之. D 又叫做積分域，$\iint_D f(x, y)\, d\sigma$ 叫做函數 $f(x, y)$ 展布於 D 域的重積分.

* 證明見高等微積分.

又因

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \Delta\sigma_i \leqq \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i \leqq \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta\sigma_i,$$

故
$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y)\,d\sigma}$$

設迴線 C 在 xy 平面上圍成一變域 D, 以 C 爲正截線* 作一柱面

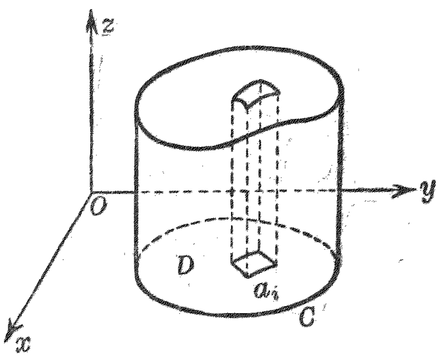


圖 131

(圖 131). 若函數 $f(x, y)$ 在 D 內常爲正數, 則曲面 $z=f(x, y)$, 平面 $z=0$ 與這柱面圍成一立體 E. $\Sigma m_i \Delta\sigma_i$ 與 $\Sigma M_i \Delta\sigma_i$ 的公共極限就叫做 E 的體積.

99. 函數 $F(x)=\int_a^\beta f(x, y)\,dy$.

設函數 $f(x, y)$ 在四直線

$$x=a, \qquad x=b, \qquad y=\alpha, \qquad y=\beta$$

所圍成的矩形內是連續的, 那末

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy$$

* 正截線 Right section.

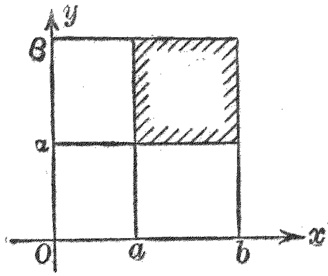


圖 132

顯然是一 x 的函數，令這函數為 $F(x)$. 因 $f(x, y)$ 在上述變域內是一致連續，故任與一正數 ϵ，必能求得另一正數 $\delta=\delta(\epsilon)$，其值與 x, y 無關，當 $|\Delta x|<\delta$ 時，使恆有

$$|f(x+\Delta x, y)-f(x, y)|<\epsilon.$$

由是得

$$|F(x+\Delta x)-F(x)|\leqq\int_\alpha^\beta|f(x+\Delta x, y)-f(x, y)|\,dy$$

$$<\int_\alpha^\beta\epsilon\,dy=\epsilon(\beta-\alpha).$$

即
$$\lim_{\Delta x\to 0}F(x+\Delta x)=F(x).$$

故函數 $F(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 間隔內是一連續函數.

復次，若偏導數 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在上述變域內也是連續的，於是

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\int_\alpha^\beta\frac{\{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)\}\,dy}{\Delta x}$$

$$=\int_\alpha^\beta f_x(x+\theta\,\Delta x, y)\,dy,$$

故

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x}-\int_\alpha^\beta f_x(x, y)\,dy\right|\leqq\int_\alpha^\beta\{f_x(x+\theta\,\Delta x, y)-f_x(x, y)\}dy,$$

因函數 $f_x(x, y)$ 在上述變域內是一致連續，故任與一正數 ϵ，必能求

得另一正數 δ, 當 $|\Delta x|<\delta$ 時, 使恆有

$$|f_x(x+\theta\,\Delta x,\,y)-f_x(x,\,y)|<\epsilon.$$

故 $\Delta x\to 0$ 時, $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}$ 的極限等於 $\int_\alpha^\beta f_x(x,\,y)\,dy$, 即

$$\boxed{\frac{dF(x)}{dx}=\int_\alpha^\beta \frac{\partial f(x,\,y)}{\partial x}\,dy.}$$

復次, 設函數 $f(x,\,y)$ 在三直線 $x=a$, $=b$, $y=0$, 及一曲線 $y=\varphi(x)$

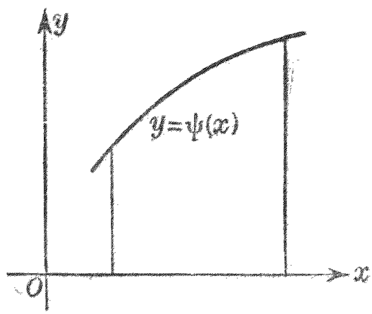


圖 133

(φ 在 $a\leqq x\leqq b$ 間隔內是 x 的連續函數) 所圍成的變域內是連續的, 那末

$$\int_0^y f(x,\,y)\,dy$$

既爲 x 的連續函數, 復爲 y 的連續函數 (§71), 令 $y=\varphi(x)$, 則

$$\int_0^{\varphi(x)} f(x,\,y)\,dy$$

在 $a\leqq x\leqq b$ 間隔內, 便是 x 的連續函數.

100. 重積分的求法

特例. 設積分域 D 是一矩形

$$a\leqq x\leqq b,\qquad \alpha\leqq y\leqq \beta.$$

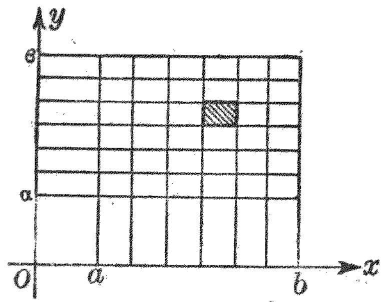


圖 134

把 x 的間隔平分爲 n 等分，y 的間隔平分爲 m 等分，令

$$h=\frac{b-a}{n},\qquad k=\frac{\beta-\alpha}{m}.$$

然後以直線

$$x=a+\mu h,\qquad (\mu=0,1,2,\cdots,n)$$
$$y=\alpha+\nu k\qquad (\nu=0,1,2,\cdots,m)$$

分 D 爲 mn 個小矩形，令 $nm=N$, $h=\Delta x$, $k=\Delta y$, 則

$$\Delta\sigma_i=hk=\Delta x\,\Delta y.$$

復令變域 a_i 內所取之一點爲

$$\xi_i=a+\mu h,\qquad \eta_i=\alpha+\nu k,$$

於是
$$\sum_{i=1}^{N}f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta\sigma_i=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}f(a+\mu h,\alpha+\nu k)\,\Delta x\,\Delta y.$$

故
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}f(a+\mu h,\alpha+\nu k)\,\Delta x\,\Delta y.$$

令
$$\Phi_\mu=\sum_{\nu=1}^{m}f(a+\mu h,\alpha+\nu k)\,\Delta y,$$

於是 $$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m} f(a+\mu h,\ \alpha+\nu k)\,\Delta x\,\Delta y=\sum_{\mu=1}^{n}\Phi_\mu\,\Delta x.$$

設 ϵ 爲任意選定其值甚小的正數，那末我們可求得另一正數 N，當 $n \geqq N$ 時，使恆有

$$\left|\iint_D f(x,\ y)\,d\sigma-\Delta x\sum_{\mu=1}^{n}\Phi_\mu\right|<\epsilon,$$

其中 m 可以任意的大，但亦須大於 N 罷了．今暫令 n 固定不變，而令 $m\to\infty$，則 Φ_μ 趨近於極限

$$\int_\alpha^\beta f(a+\mu h,\ y)\,dy=\varphi(a+\mu h).$$

由是得

$$\left|\iint_D f(x,\ y)\,d\sigma-\sum_{\mu=1}^{n}\varphi(a+\mu h)\,\Delta x\right|\leqq\epsilon,$$

$$n\geqq N(\epsilon).$$

今令 $n\to\infty$，$(\Delta x\to 0)$ 我們根據了 $\int_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy=\varphi(x)$ 的連續性 (§99) 及定積分的定義，便有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{n}\varphi(a+\mu h)\,\Delta x=\int_a^b\varphi(x)\,dx,$$

由是得

$$\left|\iint_D f(x,\ y)\,d\sigma-\int_a^b\varphi(x)\,dx\right|\leqq\epsilon.$$

上式左邊爲一固定數，而右邊之 ϵ 爲一任意選定其值甚小之正數．所以這個不等式衹能在左邊等於零時方可成立，是卽

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.}$$

依同理可知

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx}$$

故

$$\boxed{\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx}$$

就幾何的意義言之，先設 $f(x, y)$ 在變域

$$a \leqq x \leqq b, \qquad \alpha \leqq y \leqq \beta$$

內常為正數，那末曲面 $z=f(x, y)$ 與平面 $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$, $z=0$ 圍成一立體 E，其體積 V 等於重積分

$$V = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.$$

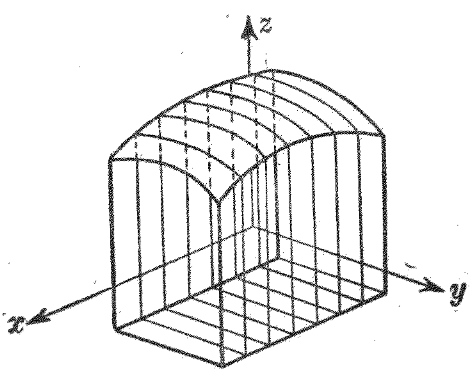


圖 135

今將立體 E 以平面

$$x=a+\mu h, \qquad (\mu=0,1,2,\cdots,n)$$

切成 n 個薄片，那末第 μ 個薄片的體積殆等於其厚 Δx 與一底面積相乘之積，即

$$\Delta x\int_{\alpha}^{\beta} f(a+\mu h, y)\,dy=\varphi(a+\mu h)\,\Delta x.$$

然

$$\sum_{\mu=1}^{n}\varphi(a+\mu h)\,\Delta x$$

是 n 個薄片體積之和，當 $n\to\infty$ 時，其極限就等於

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b dx\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dy.$$

故立體 E 的體積，可視爲無窮個無限薄的薄片疊合而成．若變域 D 爲一凸迴線所圍成，設直線 $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$ 與迴線相切於 A, B, P, Q 四點，這樣的迴線與 x 軸或 y 軸平行的直線，只能相交於兩點．令

$$y=\varphi_1(x),\quad y=\varphi_2(x);\quad x=\psi_1(y),\quad x=\psi_2(y)$$

依次爲曲線 APB, AQB, PAQ, PBQ 的方程式，這時函數 $f(x,y)$

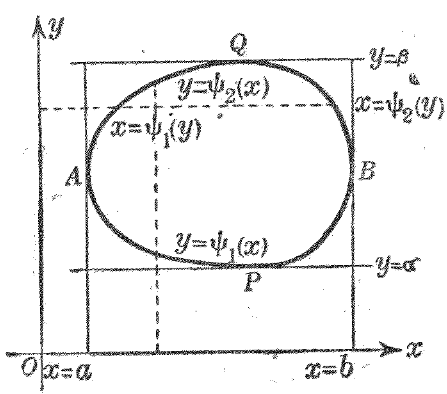


圖 136

展布於變域 D 的重積分為

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,d\sigma &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \\ &= \int_\alpha^\beta dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\end{aligned}}$$

如 $f(x,y)\equiv 1$, 則 $\iint_D d\sigma$ 就等於 D 的面積.

欲證明此式, 先在弧線 $y=\varphi_2(x)$ 上取一點列, 使二相鄰點的距離俱小於一正數 δ, 然後以與軸平行的二線段連接二相鄰點 (見圖 137),

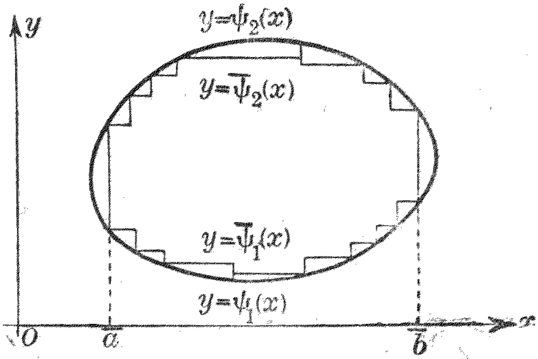


圖 137

在弧線 $y=\varphi_1(x)$ 上亦以同法處理之. 於是在變域 D 內我們得了另一變域 $\bar{D}$, 這變域 $\bar{D}$ 是由有限個長方形組織而成. $\bar{D}$ 的界線是由連續曲線 $y=\bar{\varphi}_2(x)$, $y=\bar{\varphi}_1(x)$ 圍成, 故有

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y)\,d\sigma = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} dx \int_{\bar{\varphi}_1(x)}^{\bar{\varphi}_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

因 $\varphi_1(x)$ 與 $\varphi_2(x)$ 是一致的連續函數，所以當 $\delta\to 0$ 時，$\bar{\varphi}_1(x)$ 與 $\bar{\varphi}_2(x)$ 一致的趨近於 $\varphi_1(x)$ 與 $\varphi_2(x)$，故

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\bar{\varphi}_1(x)}^{\bar{\varphi}_2(x)} f(x,y)\,dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

$$a\leqq x\leqq b.$$

由是便得

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} dx\int_{\bar{\varphi}_1(x)}^{\bar{\varphi}_2(x)} f(x,y)\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

在另一方面，當 $\delta\to 0$ 時，$\bar{D}\to D$，故

$$\lim_{\delta\to 0}\iint_{\bar{D}} f(x,y)\,d\sigma=\iint_D f(x,y)\,d\sigma.$$

由上三式即得

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

若變域 D 的界線不為一凸迴線，如圖 138 所表示者．茲設與軸平行的直線祇與界線相交於有限個點，那末我們只要作幾支輔助線，把變

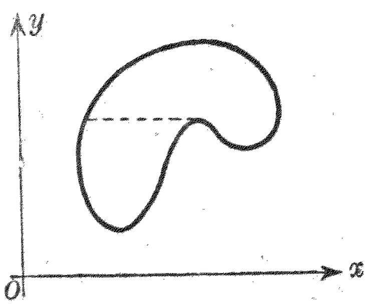


圖　138

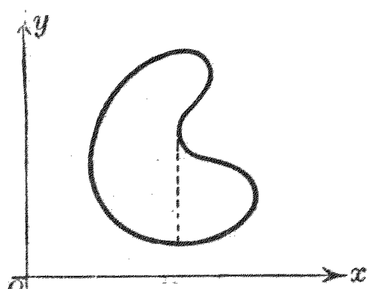


圖　139

域 D 分爲幾個小變域，使這種小變域的界線俱爲凸迴線便是了.

例. 函數 $f(x, y)$ 展布於二圓（圖 140）

$$x^2+y^2=1, \qquad x^2+y^2=4$$

之間的重積分爲

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma=\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy+\int_{-1}^{+1} dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy$$

$$+\int_{-1}^{+1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy+\int_{1}^{2} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy.$$

又如函數 $f(x, y)$ 展布於三角形 $y=x$, $y=0$, $x=a$, $(a>0)$ 內的重積分爲（圖 141）

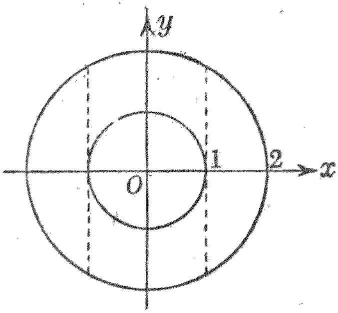


圖 140

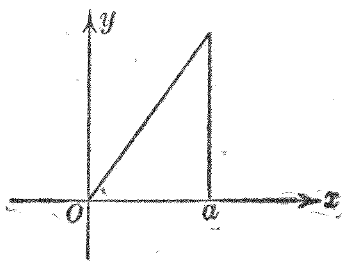


圖 141

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma=\int_0^a dx\int_0^x f(x, y)\,dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x, y)\,dx.$$

重積分的意義，更可推廣於三自變數的函數 $f(x, y, z)$. 如

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

叫做函數 $f(x, y, z)$ 展布於 D 域的三重積分．當 $f(x, y, z)=1$ 時，

$$\iiint_D dx\,dy\,dz$$

就等於積分域 D 的體積．

例如函數 $f(x, y, z)$ 展布於球 $x^2+y^2+z^2 \leqq R^2$ 內的三重積分爲

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz.$$

球體積等於

$$\iiint_D dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

101.　體積　設函數 $f(x, y)$ 在變域 D 內常爲正數．今作一柱

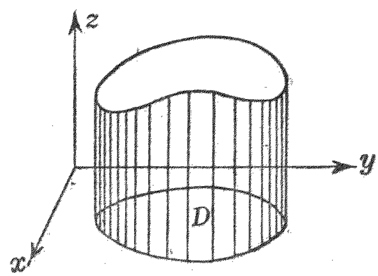


圖　142

面，其母線與 z 軸平行，其底面爲 D，那末曲面 $z=f(x, y)$，平面 $z=0$ 與這柱面所圍成的立體的體積等於重積分

$$V=\iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

若 D 由一凸迴線所圍成（如 §100），則

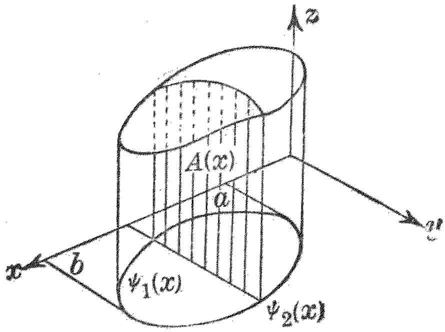


圖 143

$$V=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

以平面 $x=$常數，截立體得一截面，這截面的面積就等於

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

$$V=\int_a^b A(x)\,dx.$$

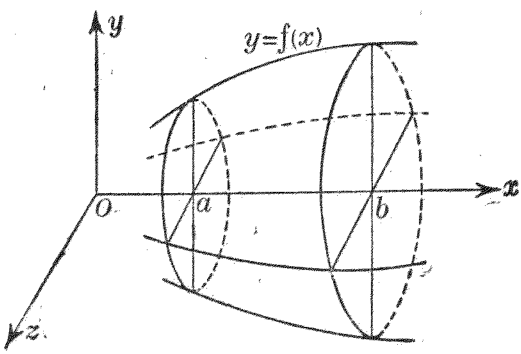


圖 144

這個公式的意思，是表明體積 V 由無窮個無限薄的薄片的體積相加而得 (§100).

令曲線 $y=f(x)$ 向 ox 軸旋轉，由是得一旋轉面，這旋轉面與平面 $x=a$, $x=b$ 所圍成的立體的體積 V, 因 $A(x)=\pi f(x)^2$, 故

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.}$$

例 1.　求橢圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 內的體積.

因三個座標面平分所求的體積爲八等分，又因橢圓面與 xy 平面的交線爲一橢圓，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

故全體積的八分之一，就等於

$$\frac{V}{8}=\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

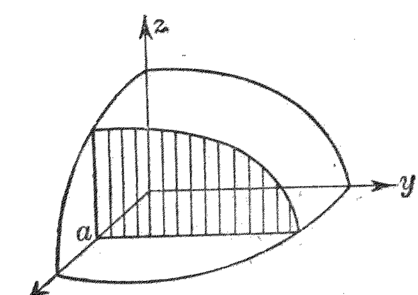


圖 145

然 $$\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

$$=\frac{bc}{2}\left|\frac{y}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}+\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

$$=\frac{\pi bc}{4}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$\frac{V}{8}=\frac{\pi bc}{4}\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{\pi bc}{4}\left|x-\frac{x^3}{3a^2}\right|_0^a=\frac{\pi abc}{6},$$

故 $$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

以平面 $x=$常數，與橢圓面相交得一橢圓如下

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

這個橢圓的面積等於（§ 77）

$$\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\;c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

故所求的體積等於

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

例 2. 令圓 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b>a>0)$ 向 x 軸旋轉，求這旋轉面內的體積（即環體的體積）.

半圓弧 APB 的方程式為

$$y=b-\sqrt{a^2-x^2},$$

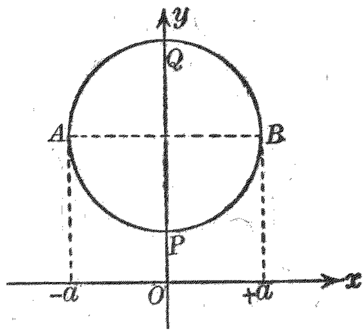


圖 146

半圓弧 AQB 的方程式為

$$y=b+\sqrt{a^2-x^2},$$

故
$$V=\pi\int_{-a}^{+a}\{(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^3-x^2})^2\}\,dx$$
$$=4\pi b\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi a^2\cdot 2\pi b.$$

這個圓的方程式又可寫如

$$x=a\sin t,\qquad y=b+a\cos t,$$

於是
$$V=\pi a\int_0^{2\pi}(b+a\cos t)^2\cos t\,dt=\pi a^2\cdot 2\pi b.$$

設一閉曲面 S 圍成一立體 E, 欲求這 E 的體積, 先設與 z 軸平行的直線至多祇能交 S 於兩點, 設這兩點的座標為

$$x,\quad y,\quad z=f_1(x,y);$$
$$x,\quad y,\quad z=f_2(x,y).$$

今令曲面 S 在 xy 平面上的正投影為 D, 於是得 E 之體積為

$$\boxed{V=\iint_D\{f_2(x,y)-f_1(x,y)\}\,dx\,dy}$$

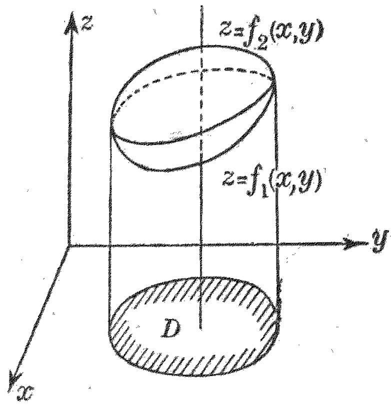


圖 147

例 3. 求拋物面 $z=x^2+y^2$ 與平面 $z=2$ 所圍成的體積.

先由
$$z=x^2+y^2, \qquad z=2$$
二式消去 z 得 $x^2+y^2=2$, 這就是曲面 $z=x^2+y^2$ 與平面 $z=2$ 的

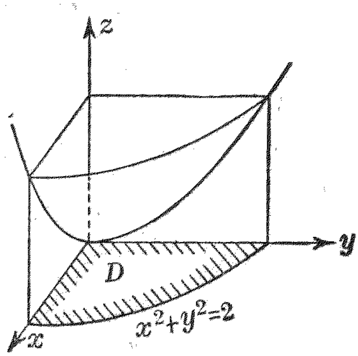


圖 148

交線在 xy 平面上的正投影. 故

$$\frac{V}{4}=\iint_D (2-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2-x^2-y^2)\,dy=\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

令 $x=\sqrt{2}\sin t$, 則 $dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$, 故

$$\frac{V}{4}=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{8}{3}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}, \qquad V=2\pi.$$

102. 變數之更換　計算重積分 $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ 時, 我們常以與軸平行的兩組直線, 分變域 D 爲許多小變域, 今以其他兩組曲線來分變域 D, 自然亦無不可. 設方程式

[1] $$u=\Phi(x, y), \qquad v=\Psi(x, y)$$

代表這兩組曲線, Φ 與 Ψ 均爲單值函數, 并設由此二式可得唯一的一組解

[2] $$x=\varphi(u, v), \qquad y=\psi(u, v).$$

於是由 xy 平面上的 D 域, 在 uv 平面上得一相應的變域 D', 當 u

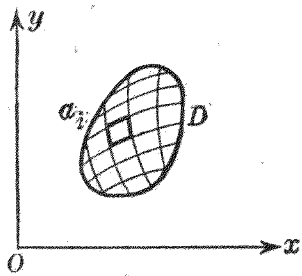


圖 149

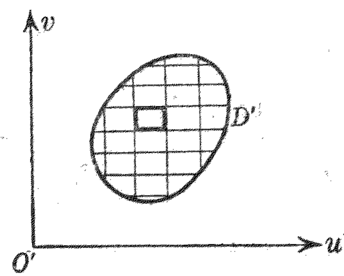


圖 150

爲常數, v 爲變數時, (2) 式便表示一曲線, 這曲線以記號 (u) 表之. 依同理, 當 v 爲常數, u 爲變數時, (2) 式所代表的曲線以記號 (v) 表之. 令 a_i 爲曲線 (u), $(u+\Delta u)$, (v), $(v+\Delta v)$ 所圍成的曲四邊形*

* 曲四邊形 Curvilinear quadrilateral.

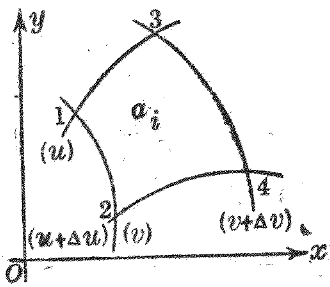


圖 151

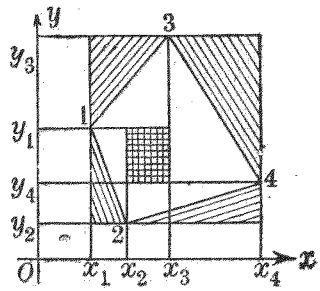


圖 152

(圖 148), 其頂點以 1, 2, 3, 4 數字表示之, 然後以直線連接頂點得一四邊形如圖 152, 這個四邊形面積的兩倍, 等於

$$(x_3-x_1)(y_3-y_1)+(x_4-x_3)(y_3-y_4)+(x_4-x_2)(y_4-y_2)$$
$$+(x_2-x_1)(y_1-y_2)+2(x_3-x_2)(y_1-y_4)$$

[3] $$=(x_4-x_1)(y_3-y_2)+(x_2-x_3)(y_4-y_1).$$

但 $$x_4-x_1=\varphi(u+\Delta u,\, v+\Delta v)-\varphi(u,\, v)$$
$$x_2-x_3=\varphi(u+\Delta u,\, v)\qquad -\varphi(u,\, v+\Delta v)$$
$$y_4-y_1=\psi(u+\Delta u,\, v+\Delta v)-\psi(u,\, v)$$
$$y_3-y_2=\psi(u,\, v+\Delta v)\qquad -\psi(u+\Delta u,\, v).$$

設函數 φ 及 ψ 在變域 D' 內有連續偏導數, 當 $|\Delta u|$, $|\Delta v|$ 甚小時, 上述的四個差數, 我們可用

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}du-\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv,\qquad -\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv,$$

代之, 於是 (3) 式所代表的數 (即 a_i 的面積), 殆與

[4] $$\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right|du\,dv$$

相等. 括弧內的數又可寫如

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

這種行列式叫做函數行列式.* 由是得公式** 如下:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\,d\sigma=\iint_{D'} f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\}\,|J|\,du\,dv}$$

如由直角座標變爲極座標, 因

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta,$$

故
$$J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r.$$

由是得公式如下:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\,d\sigma=\iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta}$$

例 1. 求橢圓面 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 內的體積.

橢圓面與 xy 平面的交線爲一圓 $x^2+y^2=a^2$; 又

$$z=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

* 函數行列式又叫做 Jacobian.

** 嚴密的證明見高等微積分.

故體積的一半爲

$$\frac{V}{2}=\frac{b}{a}\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

積分域 D 爲 $x^2+y^2\leqq a^2$. 今若用極座標, 則所求的重積分就變爲

$$\frac{b}{a}\iint\limits_{D'}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta.$$

積分域 D' 當由下列二不等式確定之,

$$0\leqq r\leqq a,\qquad 0\leqq\theta\leqq 2\pi.$$

故 $$\frac{V}{2}=\frac{b}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=\frac{2\pi b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=\frac{2}{3}a^2b\pi,$$

$$V=\frac{4}{3}a^2b\pi.$$

例 2. 求橢圓面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 內的體積.

作變數更換

$$x=a\rho\cos\theta,\qquad y=b\rho\sin\theta,$$

則 $$|J|=\left|\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\theta}-\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\rho}\right|=ab\rho.$$

故體積的一半爲

$$\frac{V}{2}=c\iint\limits_{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=abc\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

積分域 D' 當由下列二不等式確定之,

$$0\leqq\rho\leqq 1,\qquad 0\leqq\theta\leqq 2\pi.$$

故 $$\frac{V}{2}=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{2}{3}abc\pi,\qquad V=\frac{4}{3}abc\pi.$$

例 3. 求四拋物線 $y^2=x$, $y^2=2x$, $x^2=y$, $x^2=3y$ 所圍成的面積.

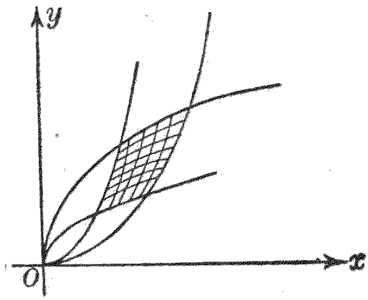


圖 153

令 $$y^2=ux,\qquad x^2=vy,$$

則 $$x^3=uv^2,\qquad y^3=u^2v,$$

$$3x^2\frac{\partial x}{\partial u}=v^2,\qquad 3x^2\frac{\partial x}{\partial v}=2uv,$$

$$3y^2\frac{\partial y}{\partial u}=2uv,\qquad 3y^2\frac{\partial y}{\partial v}=u^2,$$

故 $$9x^2y^2|J|=3u^2v^2,$$

是由得 $$|J|=\frac{1}{3}.$$

故所求的面積等於 $\displaystyle\iint_D dx\,dy=\frac{1}{3}\int_1^2 du\int_1^3 dv=\frac{2}{3}.$

例 4.　求重積分

$$I=\iint_D\frac{y}{\sqrt{x}}\log(1-x-y)\,dx\,dy,$$

積分域 D 爲三直線 $x=0,\ y=0,\ x+y=1$ 所圍成的三角形.

令 $$y=ux,\qquad x+y=v,$$

則 $$x=\frac{v}{1+u},\qquad y=\frac{uv}{1+u},$$

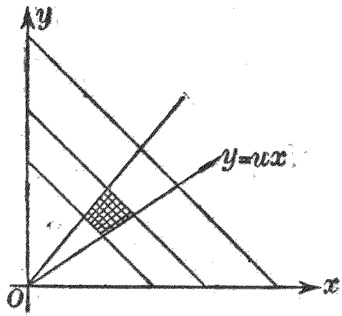


圖 154

故 $$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{-v}{(1+u)^2} & \dfrac{1}{1+u} \\ \dfrac{v}{(1+u)^2} & \dfrac{u}{1+u} \end{vmatrix}=\frac{-v}{(1+u)^2}.$$

然 $0\leqq v\leqq 1$; 故 $|J|=\dfrac{v}{(1+u)^2}$. 於是(第十章習題 79, 80)

$$I=\int_0^{\infty}\frac{u}{(1+u)^{\frac{5}{2}}}du\int_0^1 v^{\frac{3}{2}}\log(1-v)\,dv$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{5}\log 2-\frac{92}{75}\right)=-0\cdot 896\cdots.$$

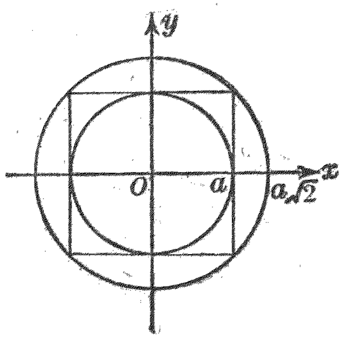


圖 155

例 5.　求積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ 之值.

令
$$I=\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx,$$

則
$$I^2=\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx \int_{-a}^{+a} e^{-y^2}\,dy=\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

若用極座標, 便得關係如下
$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\iint_{D'} e^{-r^2}\,r\,yr\,d\theta$$

因 $e^{-(x^2+y^2)}>0$, 所以 D 愈大, 積分值 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ 亦愈大, 由此可知

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} e^{-r^2}\,r\,dr<I^2<\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}\,a} e^{-r^2}\,r\,dr,$$

即
$$\pi(1-e^{-a^2})<I^2<\pi(1-e^{-2a^2}).$$

當 $a\to\infty$ 時, $I^2\to\pi$　$I\to\sqrt{\pi}$, 故
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

由此得
$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

103.　旋轉體的體積　在重積分 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, 若 $f(x,y)=1$, 則 $\iint_D dx\,dy$ 就是變域 D 的面積; 在三重積分

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

若 $f(x, y, z)=1$, 則 $\iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ 就是變域 D 的體積, 前已言之.

今有一旋轉面於此, 其方程式為

$$x^2+y^2=\varphi(z)^2.$$

這個旋轉面乃由 xz 平面上的曲線

$$x=\varphi(z),$$

向 z 軸旋轉而得. 今欲求這旋轉面與二平面 $z=a$, $z=b$ 所圍成的立體 (旋轉體) 的體積, 可先令

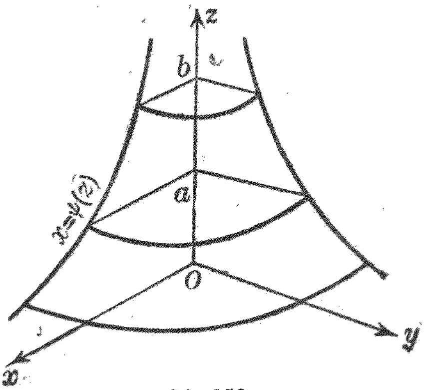


圖 156

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta,$$

則
$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho=\varphi(z).$$

然問題中的立體, 當由下列不等式規定之,

$$\begin{cases} a\leqq z\leqq b, \\ 0\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq\varphi(z). \end{cases}$$

故
$$V=\iiint\limits_D dx\,dy\,dz=\int_a^b dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi(z)}\rho\,d\rho=\pi\int_a^b\varphi(z)^2\,dz.$$

這與 §101 的公式的意義完全相同.

104. 曲面的面積 設

$$z=f(x, y)$$

為曲面的方程式, S 為這曲面上的一區域, D 為 S 在 xy 平面上的正投影, 并設函數 $f(x, y)$ 在變域 D 內具有連續偏導數 f_x, f_y. 今把變域 D 任意分作 N 個小變域 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_N, 此等小變域各

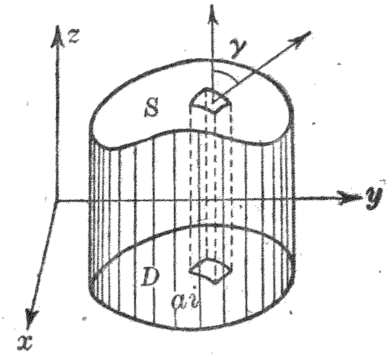


圖 157

能放在以 ρ 爲半徑的圓內. 令 $\Delta\sigma_i$ 爲變域 a_i 的面積, (ξ_i, η_i) 爲 a_i 內的任意一點.

$$Z-\zeta_i=f_x(\xi_i, \eta_i)(X-\xi_i)+f_y(\xi_i, \eta_i)(Y-\eta_i)$$

爲曲面在 (ξ_i, η_i, ζ_i) 點的切平面方程式, 在這切面上取一區域面積爲 ΔS_i, 其在 xy 平面上的正投影適爲 a_i. 令切平面與 xy 平面所作之銳角爲 γ, 那末

$$\Delta\sigma_i=\Delta S_i \cos\gamma.$$

由切平面方程式, 可知

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(\xi_i, \eta_i)+f_y^2(\xi_i, \eta_i)}},$$

故
$$\Delta S_i=\sqrt{1+f_x^2(\xi_i, \eta_i)+f_y^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta\sigma_i.$$

就和數
$$\sum_{i=1}^{N}\Delta S_i$$

言之, 若 $N\to\infty$, $\rho\to 0$, 則極限

$$\lim_{N=\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta S_i$$

便等於重積分

$$\boxed{A=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma}$$

或

$$\boxed{A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy}$$

這個積分值就叫做曲面上 S 的面積.

例 1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 爲柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截取部份的面積.

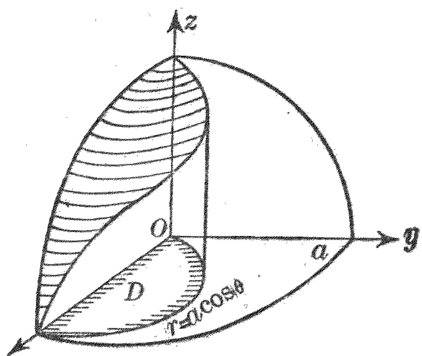


圖 158

由球面方程式, 得 $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$,

故 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

$$\frac{A}{4}=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy$$

$$=\iint_D\frac{a}{z}\,dx\,dy=\iint_D\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

積分域 D 為 $x^2+y^2 \leqq ax$. 今作變數更換

$$x = r\cos, \qquad y = r\sin\theta,$$

則變域 D' 當由下不等式規定之,

$$\begin{cases} 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqq r \leqq a\cos\theta. \end{cases}$$

故

$$\frac{A}{4} = \iint\limits_D \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\sin\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2.$$

$$A = 2(\pi-2)a^2.$$

例 2. 求柱面 $x^2+y^2=ax$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 內的面積. 面

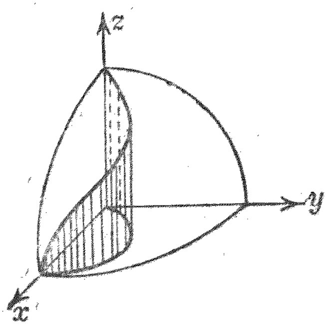


圖 159

積的四分之一等於

$$\frac{A}{4} = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz.$$

柱面與球面的交線, 在 xz 平面上的正投影為 $ax+z^2=a^2$, 故 xz 平面上的變域 D, 乃由拋物線 $ax+z^2=a^2$ 與二直線 $x=0$, $z=0$ 圍合

而成. 由柱面的方程式, 得

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a-2x}{2y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z}=0,$$

故 $$\frac{A}{4}=\int_0^a dz\int_0^{\frac{a^2-z^2}{a}}\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2}\,dx=\int_0^a dz\int_0^{\frac{a^2-z^2}{a}}\sqrt{1+\frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}}\,dx$$

$$=\int_0^a dz\int_0^{\frac{a^2-z^2}{a}}\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}}=\frac{a}{2}\int_0^a\left\{\frac{\pi}{2}+\text{arc sin}\left(1-\frac{2z^2}{a^2}\right)\right\}dz$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^a\frac{2z\,dz}{\sqrt{a^2-z^2}}=a^2, \qquad A=4a^2.$$

注意. 柱面與 xy 平面的交線為一圓 $x^2+y^2=ax$, 其圓心 C 在 x

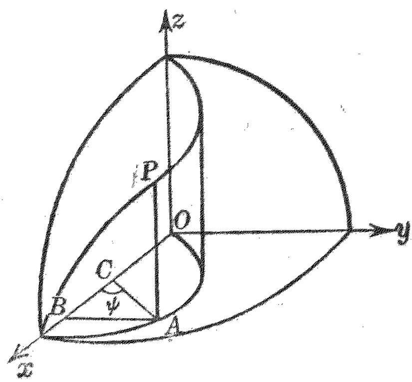


圖 160

軸上. 令在此圓周上取一點 A, 柱面上過 A 點的母線與球面相交於 P 點, 復由 A 點引 x 軸之垂線 AB, 令 $\varphi=\angle ACB$, 則 P 點的座標為

$$\begin{cases} x=OC+CB=\dfrac{a}{2}(1+\cos\varphi), \\ y=AB=\dfrac{a}{2}\sin\varphi, \\ z=AP=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=a\sin\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

又圓線在 A 點的弧微分爲 $\dfrac{a}{2}d\varphi$，故

$$A=4\int_0^{\pi} a\sin\frac{\varphi}{2}\left(\frac{a}{2}d\varphi\right)=4a^2.$$

105. 旋轉面的面積　設將曲線 $z=\varphi(x)$ 向 z 軸旋轉，由是得一旋轉面，其方程式爲

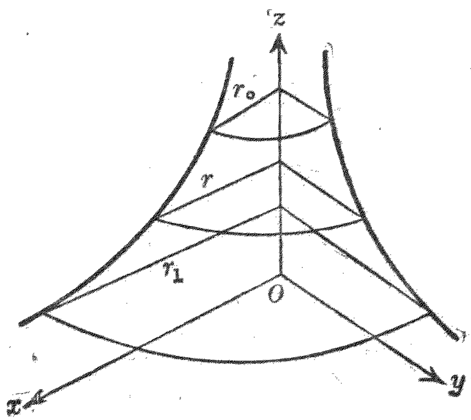


圖 161

$$z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

令 $$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

則 $$z=\varphi(r).$$

今欲求二平面 $z=\varphi(r_0)$，$z=\varphi(r_1)$ 間旋轉面的面積，應先求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'(r),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'(r),$$

由是得 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\varphi'(r)^2}$$

故 $$A=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{1+\varphi'(r)^2}\,r\,dr$$

$$=2\pi\int_{r_0}^{r_1}r\sqrt{1+\varphi'(r)^2}\,dr.$$

今以 ds 表示旋轉母線 $z=\varphi(x)$ 的弧微分，則

$$\sqrt{1+\varphi'(r)^2}\,dr=ds,$$

故 $$A=2\pi\int_{s_0}^{s_1}r\,ds.$$

這個公式的幾何意義，甚爲顯明. $2\pi r\,ds$ 就是截頭圓錐的側面積，ds 是其斜高，r 是其二底面的平均半徑. 今令與 xy 平面平行的二平面無限接近，若將旋轉面在這二平面間的側面積，以 $2\pi r\,ds$ 代之，便得公式如上.

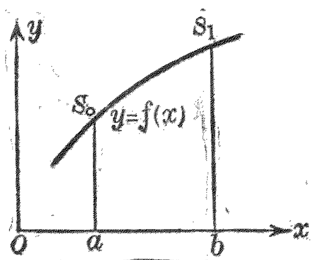


圖 162

若曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ 向 x 軸旋轉，那末這旋轉面的面積，便

等於

$$A=2\pi\int_{s_0}^{s_1} y\,ds.$$

或

$$\boxed{A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

例．求旋轉橢圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ 的全面積．

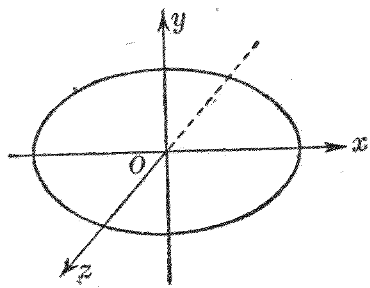


圖 163

這個橢圓面乃由橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 向 x 軸旋轉而得，故

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

代入上述公式，得

$$A=2\pi\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=4\pi\int_0^a y\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\,dx$$

$$=\frac{4\pi}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}\,dx=\frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\,dx.$$

1°　$a>b$.

$$A=\frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx$$

$$=\frac{2\pi b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}\left| x\sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2}+\frac{a^4}{a^2-b^2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x\right|_0^a$$

$$=\frac{2\pi b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{a^4}{a^2-b^2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).$$

令 e 爲橢圓的偏心率, 則 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, 故

$$A=2\pi\left(b^2+\frac{ab}{e}\arcsin e\right).$$

2° $a<b$.

$$A=\frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\,dx$$

$$=\frac{2\pi b}{a^2}\sqrt{b^2-a^2}\left| x\sqrt{\frac{a^4}{b^2-a^2}+x^2}+\frac{a^4}{b^2-a^2}\log\left(x-\sqrt{\frac{a^4}{b^2-a^2}+x^2}\right)\right|_0^a$$

$$=\frac{2\pi b}{a^2}\sqrt{b^2-a^2}\left(\frac{a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}+\frac{a^4}{b^2-a^2}\log\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right).$$

這時橢圓的偏心率爲 $e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$, 又因

$$\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^2=\frac{1+e}{1-e},$$

故
$$A=2\pi b^2+\frac{a^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}.$$

在上述兩種情形, 若 $b\to a$, 則 $e\to 0$, $A\to 4\pi a^2$, 這就是以 a 爲半徑的球面積.

106. Euler 氏積分

[1] $$\boxed{B(p,\,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}$$

叫做 Euler 氏第一種積分. 函數 $B(p,\,q)$ 叫做 betâ 函數, 當 $p-1>-1,\ q-1>-1$ 時, (卽 $p>0,\ q>0$) 這積分是收斂的 (§76). 作變數更換 $x=1-t$, 便得

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_1^0 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt.$$

由是知道 $$\boxed{B(p,q)=B(q,p)}$$

令 $x=\sin^2\varphi$, 則

$$B(p,\,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Euler 氏的第二種積分爲

[2] $$\boxed{\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx}$$

函數 $\Gamma(p)$ 叫做 gamma 函數. 當 $p-1>-1$ 時 (卽 $p>0$), 這積分是收斂的. 把積分寫如

$$\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx,$$

因 $p>0$, 故第一個積分是收斂的, 當 x 之値充分大時, 便有

$$e^x>x^{p+1},$$

於是 $$x^{p-1}e^{-x}<\frac{1}{x^2},$$

故第二個積分也是收斂的.

用部份積分法於 (2) 式, 得

$$\Gamma(p)=\frac{1}{p}\left|x^p e^{-x}\right|_0^{\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{\infty} x^p e^{-x}\,dx.$$

由是卽得
$$\boxed{\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)}$$

若 p 介於二整數 n 與 $n+1$ 之間，由上關係便有

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)=(p-1)(p-2)\Gamma(p-2)=\cdots$$
$$=(p-1)(p-2)\cdots(p-n)\Gamma(p-n),$$
$$0<p-n<1.$$

若 p 等於一整數 $n+1$，那末

$$\Gamma(n+1)=n!\,\Gamma(1).$$

然
$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=1,$$

故
$$\Gamma(n+1)=n!.$$

令 $x=t^2$，於是 $\Gamma(p)$ 可寫如

[3]
$$\Gamma(p)=2\int_0^{\infty} t^{2p-1}e^{-t^2}\,dt,$$

故
$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty} x^{2p-1}e^{-x^2}\,dx\int_0^{\infty} y^{2q-1}e^{-y^2}\,dy.$$

今引 $x=a$, $y=a(a>0)$ 二直線與 ox, oy 圍成一正方形 D，那末上式

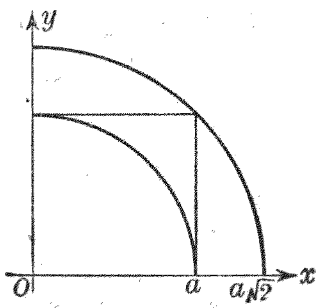


圖 164

右邊可視爲重積分

$$I=4\iint_D x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

於 $a\to\infty$ 時所趨近的極限，因 $x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}>0$，所以 D 愈大，I 之值亦愈大，今作變數更換

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

則

$$\iint_D x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\iint_{D'} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,dr\,d\theta,$$

故 $$2\int_0^a r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta<I,$$

$$I<2\int_0^{a\sqrt{2}} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta.$$

當 $a\to\infty$ 時，$2\int_0^a r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr$，$2\int_0^{a\sqrt{2}} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr$ 各趨近於同一極限 $\Gamma(p+q)$；同時 I 趨近於 $\Gamma(p)\Gamma(q)$，故

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q)}$$

令 $p=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$，則

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\pi,$$

故 $$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\pi.$$

由 (3) 式得 $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx.$$

故 $$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (\S\ 102)$$

107. 重心 設有一有質量的平面形於此，今以與軸相平行的二組平行直線，分此平面形爲許多小矩形，令 $\Delta\sigma_i$ 爲一小矩形的面

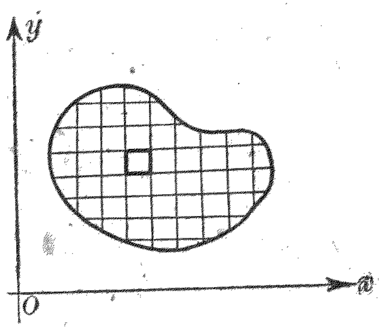


圖 165

積，$(x_i\ y_i)$ 爲這小矩形內的一點，$\rho(x_i\ y_i)$ 爲 $(x_i,\ y_i)$ 點的密度，當 $\Delta\sigma_i$ 甚小時，$\rho\cdot\Delta\sigma_i$ 殆等於這小矩形的質量，令 $\rho\cdot\Delta\sigma_i=m_i$，今將以上的二組平行直線無限增多，使各矩形的高與闊都趨近於零，那末

$$\overline{x}=\frac{\lim\Sigma\, m_i x_i}{\lim\Sigma\, m_i}=\frac{\iint\limits_D \rho\, x d\sigma}{\iint\limits_D \rho\, d\sigma},$$

$$\overline{y}=\frac{\lim\Sigma\, m_i y_i}{\lim\Sigma\, m_i}=\frac{\iint\limits_D \rho\, y d\sigma}{\iint\limits_D \rho\, d\sigma}$$

叫做這平面形的重心，D 爲平面形所佔有的區域．令 M 爲這平面形的全質量，則 $M=\iint_D \rho\, d\sigma$．故

$$\overline{x}=\frac{\iint_D \rho\, x d\sigma}{M},\qquad \overline{y}=\frac{\iint_D \rho\, y d\sigma}{M},$$

或

$$\overline{x}=\frac{\iint_D \rho\, x\, dx\, dy}{M},\qquad \overline{y}=\frac{\iint_D \rho\, y\, dx\, dy}{M}.$$

在極座標

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

$$\overline{x}=\overline{r}\cos\overline{\theta}=\frac{\iint_{D'} \rho\, r^2\cos\theta\, dr\, d\theta}{M},$$

$$\overline{y}=\overline{r}\sin\overline{\theta}=\frac{\iint_{D'} \rho\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta}{M}.$$

有質量的曲線，曲面及立體的重心均可同樣求得之．

例．設有一密度平均，半徑等於 a 的半圓面，試求其重心．

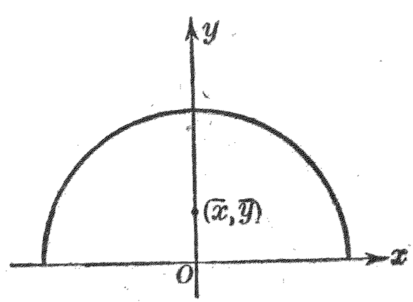


圖 166

設半圓的方程式爲

$$y=\sqrt{a^2-x^2}.$$

因對稱的關係, $\overline{x}=0$,

$$\overline{y}=\frac{\int_{-a}^{+a}dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}y\,dy}{\frac{\pi a^2}{2}}=\frac{4}{3\pi}a.$$

108. 慣性能率 如圖 165, $\Sigma\, m_i x_i^2$ 的極限叫做平面形對於 y 軸的慣性能率, 常以記號 I_y 表示之, 故

$$I_y=\iint_D \rho\, x^2\, d\sigma=\iint_D \rho\, x^2\, dx\, dy.$$

同樣, 平面形對於 x 軸的慣性能率爲

$$I_x=\iint_D \rho\, y^2\, d\sigma=\iint_D \rho\, y^2\, dx\, dy.$$

又 $\Sigma\, m_i(x_i^2+y_i^2)$ 的極限叫做平面形對於原點 0 的慣性能率, 常以記號 I_0 表示之. 因

$$I_0=\iint_D \rho(x^2+y^2)dx\,dy=\iint_D \rho\, x^2\,dx\,dy+\iint_D \rho\, y^2\,dx\,dy,$$

故 $$I_0=I_x+I_y.$$

例. 求橢圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\leqq 0$ 對於 x 軸的慣性能率. (ρ 爲一常數)

$$I_x=\rho\iint_D y^2\,dx\,dy=4\,\rho\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y^2\,dy$$

$$=\frac{4}{3}\rho b^3\int_0^a\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^3}dx.$$

令 $x=a\sin t$, 得

$$I_x=\frac{4}{3}\rho b^2 a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{4}{3}\rho b^3 a\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\rho\pi a b^3.$$

令 M 爲橢圓面的全質量, 則 $M=\rho\pi ab$, 故

$$I_x=\frac{1}{4}Mb^2.$$

依同理, 一立體對於 $y0z$ 平面的慣性能率爲

$$I_{yz}=\iiint\limits_V\rho x^2\,dx\,dy\,dz.$$

對於 z 的慣性能率爲

$$I_z=\iiint\limits_V\rho(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=I_{yz}+I_{zx}.$$

對於原點 0 的慣性能率爲

$$I_0=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=I_{yz}+I_{zx}+I_{xy}.$$

習 題 13

1. 有曲線 $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$, 求其環內的面積.
2. 求曲線 $x^2y^2=a^2(y^2-x^2)$ 與其漸近線間的面積.
3. 求曲線 $y^2(a+x)=(a-x)^3$ 與其漸近線間的面積.
4. 求曲線 $a^2y^2=a^2x^2-x^4$ 內的面積.
5. 求曲線 $y^2=x^2\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ 內的面積.

6. 求曲線 $(p^2x^2+q^2y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ 內的面積.

7. 求曲線 $r=a(\sec\theta+\cos\theta)$ 與其漸近線間的面積.

8. 求曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所圍成的體積.

9. 求二圓柱面 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+z^2=r^2$ 所圍成的體積.

10. 求二曲面 $y^2+z^2=4ax$, $x^2+y^2=2ax$ 所圍成的體積.

11. 求二曲面 $y^2=x+1$, $y^2=-x+1$ 與二平面 $z=-2$, $z=x+4$ 所圍成的體積.

12. 求二拋物面 $x^2+y^2=3z$, $x^2+y^2=4-z$ 所圍成的體積.

13. 求二曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

內公共部分的體積. 答 $\frac{5}{4}\pi abc\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

14. 求二曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1$$

內公共部分的體積. 答 $\frac{2}{3}\pi abc\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

15. 有曲線 $y^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$, 把其環內的面積繞 x 軸旋轉, 試求這旋轉體的體積.

16. 把曲線 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ 繞其漸近線旋轉, 試求這旋轉面內的體積.

答 $2\pi^2a^3$

17. 把曲線 $(a-x)y^2=a^2x$ 繞其漸近線旋轉, 試求這旋轉面內的體積. 答 $\frac{1}{2}\pi^2a^3$

18. 把心形線 $r=2a(1+\cos\theta)$ 以內, 拋物線 $r(1+\cos\theta)=2a$ 以

外的面積繞 x 軸旋轉, 試求這旋轉體的體積.　答 $18\pi a^3$.

19. 有曲線 $2ay^2=x(x-a)^2$, 把其環內的面積繞直線 $y=a$ 旋轉, 試求這旋轉體的體積.　答 $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{15}$

20. 把連珠線 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 繞直線 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 旋轉, 試求這旋轉面內的體積.　答 $\frac{1}{4}\pi^2 a^3$

21. 求曲面 $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$ 挾在平面 $y=x$, $y=0$, $x=a$ 間的面積.

22. 求曲面 $2az=x^2+y^2$ 挾在平面 $z=0$, $z=c$ 間的面積.

23. 求曲面 $z=b\arctan\frac{y}{x}$ 在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 內的面積

24. 求曲面 $2az=x^2+y^2+z^2$ 在錐面 $x^2+y^2=z^2$ 內的面積.

25. 求曲面 $4az=x^2+y^2$ 挾在柱面 $az=y^2$ 與平面 $z=3a$ 之間的面積.　答 $\frac{56}{9}\pi a^2$.

26. 求曲面 $az=y^2$ 挾在拋物面 $4az=x^2+y^2$ 在平面 $z=3a$ 之間的面積.　答 $(13\sqrt{13}-1)\frac{a^2}{\sqrt{3}}$

27. 二柱面 $y^2=ax-x^2$ 與 $z^2=4\,ax$ 圍成一立體, 求這立體的全面積.　答 $(8+\pi)a^2$

28. 心形線 $r=a(1+\cos\theta)$ 繞極軸旋轉得一旋轉面, 求這旋轉面的面積.　答 $\frac{32}{5}\pi a^2$

29. 連珠線 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 繞極軸旋轉, 試求這旋轉面的面積.

答 $4a^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

30. 求拋物面 $2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}$ 在柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$ 內的面積.

答 $\frac{2\pi}{3}ab\left\{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$

31. 求橢圓面在第一象限部分的重心.

32. 求擺線 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ 與 x 軸所圍成的面積的重心.

33. 求心形線 $r=a(1+\cos\theta)$ 內的面積的重心.

34. 求星形線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 內的面積對於 x 軸的慣性能率.

35. 求拋物線 $y^2=4ax$ 與直線 $x+y=3a$, $y=0$ 所圍成的面積對於原點的慣性能率.

36. 求心形線 $r=a(1-\cos\theta)$ 內的面積對於原點的慣性能率.

第十四章

微分方程式

109. 定義 設 y 爲 x 的函數，若 x, y, 及 y 的導數之間，有關係如下方程者，

[1] $$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$$

或 $$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots,\ y^{(n)})=0,$$

這種關係便叫做第 n 級微分方程式．函數 y 之能滿足 (1) 式者，叫做方程式的解或叫做積分．例如

$$(x-C)^2+y^2=a^2$$

爲方程式

[2] $$y^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=a^2$$

的解．

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$$

爲方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$$

的解．解中 C, C_1, C_2 都是任意常數．

設方程式

$$\varphi(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)=0$$

含有 n 個任意常數，并且由此式所確定的函數 y 能滿足微分方程式

(1) 者，那末這函數 y 就叫做 (1) 式的通解. 例如

$$y^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=a^2$$

爲第一級微分方程式，其通解

$$(x-C)^2+y^2=a^2$$

含有一個任意常數 C.

又如

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$$

爲第二級微分方程式，其通解

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$$

含有二個任意常數 C_1, C_2.

若通解中的常數爲一定值時，便叫做特解. 例如

$$y+\cos ax,$$

$$y+2\cos ax+3\sin ax$$

都是方程式 (3) 的特解.

注意：不包含於通解內的解叫做異解. 例如 $y=\pm a$ 便是方程式 (2) 的異解. 關於異解之討論，讀者須看微分方程式的專著. 就幾何的觀點言之，(4) 式所代表的曲線叫做方程式 (1) 的積分曲線.

110. 第一級微分方程式

玆將這種微分方程式之易解者，述之如下：

1° 變數可分離的方程式. 設微分方程式的形式爲

$$\frac{dy}{dx}=X(x)Y(y).$$

把此式寫如

$$\frac{dy}{Y(y)}=X(x)\,dx,$$

於是即得其解爲

$$\int\frac{dy}{Y(y)}=\int X(x)\,dx+C.$$

例.　解方程式

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}=xy.$$

把變數分離，便得

$$\frac{dy}{y}=\frac{x\,dx}{x^2-1},$$

於是得其解爲

$$\log y^2=\log(x^2-1)+\log C$$

即

$$y^2=C(x^2-1).$$

2°　齊次方程式.　設微分方程式的形式爲

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

如把 x 換爲 kx, y 換爲 ky, (k 爲一常數) 方程式依然不變，這種方程式叫做齊次方程式

令

$$y=vx,$$

則

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}.$$

於是原方程式變爲

$$v+x\frac{dv}{dx}=f(v),$$

即

$$\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x}.$$

其解爲

$$\int\frac{dv}{f(v)-v}=\log x+C.$$

例.
$$(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0.$$

令　$y=vx$, 原方程式變爲
$$\frac{dx}{x}=\frac{1-v^2}{v(1+v^2)}dv.$$

其解爲
$$\log x=\log\frac{v}{1+v^2}+\log C,$$

即
$$x=\frac{Cv}{1+v^2}.$$

以 $\frac{y}{x}$ 代 v, 得
$$x^2+y^2=Cy.$$
這表示圓心在 y 軸上的一族圓.

3°　線性方程式　方程式
$$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

叫做第一級線性方程式, 其中 P 與 Q 皆爲 x 的函數, 以 $e^{\int P\,dx}$ 乘上式兩邊, 得
$$\frac{dy}{dx}e^{\int P\,dx}+yPe^{\int P\,dx}=Qe^{\int P\,dx},$$

即
$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P\,dx}\right)=Qe^{\int P\,dx}.$$

故
$$ye^{\int P\,dx}=\int Qe^{\int P\,dx}dx+C,$$

即
$$y=e^{-\int P\,dx}\left\{\int Qe^{\int P\,dx}dx+C\right\}.$$

例．
$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\sin x}=\cos x-1.$$

$$e^{\int P\,dx}=e^{-\int\frac{dx}{\sin x}}=e^{-\log\tan\frac{x}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}},$$

$$\int Qe^{\int P\,dx}dx=\int\frac{\cos x-1}{\tan\frac{x}{2}}dx.$$

以 $2\sin^2\frac{x}{2}$ 代 $1-\cos x$，則

$$\int\frac{\cos x-1}{\tan\frac{x}{2}}dx=-\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=2\cos^2\frac{x}{2},$$

故
$$y=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+C\tan\frac{x}{2}=\sin x+C\tan\frac{x}{2}.$$

注意．
$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$$

叫做 Bernoulli 氏方程式，以 y^n 除方程式兩邊，則得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q,$$

即
$$\frac{1}{1-n}\frac{d(y^{1-n})}{dx}+Py^{1-n}=Q.$$

以 z 代 y^{1-n}，於是得一線性方程式如下：

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)Pz=(1-n)Q.$$

例．
$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\log x.$$

以 y^2 除上式兩邊，得

$$xy^{-2}\frac{dy}{dx}+y^{-1}=\log x.$$

令 $y^{-1}=z$, 則

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}.$$

於是原方程式變爲一線性方程式

$$-x\frac{dz}{dx}+z=\log x,$$

或
$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=\frac{-\log x}{x}.$$

因
$$e^{\int P\,dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x},$$

故
$$\int Qe^{\int P\,dx}dx=-\int\frac{1}{x^2}\log x\,dx=\frac{1}{x}\log x+\frac{1}{x},$$

$$z=\log x+1+Cx,$$

$$y=\frac{1}{z}=\frac{1}{\log x+1+Cx}.$$

111. 常數係數第二級線性方程式 方程式之形爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=X(x),$$

式中 a, b 代表二常數, $X(x)$ 代表一 x 的函數, 這函數叫做方程式的右端.

1° 缺右端之方程式.

[1]
$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0.$$

茲先求一形如

$$y=e^{rx}$$

之特解，其中 r 爲一常數.

於是
$$\frac{dy}{dx}=re^{rx},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=r^2e^{rx},$$
代入 (1) 式之左端，得
$$e^{rx}(r^2+ar+b).$$
欲 e^{rx} 爲 (1) 之解，必要而充足的條件爲

[2]
$$f(r)=r^2+ar+b=0.$$
方程 (2) 叫做輔助方程式．若 (2) 式有相異二根 α,β, 那末
$$e^{\alpha x},\qquad e^{\beta x}$$
皆爲方程式 (1) 之二特解，故其通解爲
$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}.$$
例 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=0.$

令
$$y=e^{rx},$$
則得
$$e^{rx}(r^2-4)=0.$$
解之得二根如下:
$$r=2,\qquad r=-2.$$
故方程式之解爲
$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}.$$
例 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0.$

令
$$y=e^{rx},$$
則得
$$e^{rx}(r^2+4)=0,$$
解之得二根如下:
$$r=2i,\quad r_1=-2i.\quad (i=\sqrt{-1})$$
故方程式之通解爲
$$y=C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix}.$$
然
$$e^{2ix}=\cos 2x+i\sin 2x,$$

$$e^{-2ix}=\cos 2x-i\sin 2x,$$

故 $$y=(C_1+C_2)\cos 2x+i(C_1-C_2)\sin 2x.$$

令 $$C_1+C_2=A, \qquad i(C_1-C_2)=B,$$

則 $$y=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

A, B 也是二任意常數.

若 (2) 式之二根相等, $\alpha=\beta$, 那末

$$e^{\alpha x}, \qquad xe^{\alpha x}$$

皆爲方程式 (1) 之特解, 故其通解爲

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}.$$

證: 令 $y=e^{rx}$, 則

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{rx}+a\frac{d}{dx}e^{rx}+be^{rx}=e^{rx}f(r).$$

上式兩邊對於 r 各求導數, 則得

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{rx}\right)+a\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dx}e^{rx}\right)+b\frac{d}{dr}e^{rx}=e^{rx}\{f'(r)+xf(r)\}.$$

然 $$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{rx}\right)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d}{dr}e^{rx}\right)=\frac{d^2}{dx^2}(xe^{rx}),$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dx}e^{rx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dr}e^{rx}\right)=\frac{d}{dx}(xe^{rx}),$$

代入上式得

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^{rx})+a\frac{d}{dx}(xe^{rx})+b(xe^{rx})=e^{rx}\{xf(r)+f'(r)\}.$$

若 α 爲方程式 $f(r)=0$ 之重根, 則有

$$f(\alpha)=0, \qquad f'(\alpha)=0.$$

由是得

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^{\alpha x})+a\frac{d}{dx}(xe^{\alpha x})+bxe^{\alpha x}=0.$$

故 $xe^{\alpha x}$ 也是方程式 (1) 的特解.

例．
$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0.$$

令
$$y=e^{rx},$$

則
$$e^{rx}(r^2-2r+1)=0.$$

其二根都等於 1，故知方程式之通解爲
$$y=C_1e^x+C_2xe^x.$$

2° 有右端之方程式．
$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=X(x).$$

設已知方程式之任意一解 $\varphi(x)$．

令
$$y=Y+\varphi(x),$$

則方程式變爲
$$\frac{d^2Y}{dx^2}+a\frac{dY}{dx}+bY=0.$$

求 Y 的問題就是解方程式
$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

的問題，設此式之通解爲 $C_1y_1+C_2y_2$，則原方程式之通解爲
$$y=C_1y_1+C_2y_2+\varphi(x).$$

例．
$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=e^x.$$

易知
$$\varphi(x)=\frac{1}{2}e^x$$

爲方程式之一特解．

令
$$y=Y+\frac{1}{2}e^x,$$

則方程式變爲

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+Y=0.$$

此式之通解為

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

故原方程式之通解為

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x.$$

有右端的常係數方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=X(x),$$

其特解之易於求得者，為下列二特例：

1. $X(x)$ 等於一多項式 $P(x)$,
2. $X(x)$ 等於 Ae^{kx}.

特例 1. 設方程式之右端為一 n 次多項式 $P(x)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=P(x).$$

若 $b\neq 0$, 可設一 n 次多項式

$$y=\varphi(x)=\lambda_0x^n+\lambda_1x^{n-1}+\cdots\cdots+\lambda_n$$

為方程式之特解. 代入方程式後，其左端也為一 n 次多項式. 令左右兩端同次項之係數相等，便得 $n+1$ 個方程式以決定 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 之值.

若 $b=0$, $a\neq 0$, 可設一 $(n+1)$ 次多項式

$$y=\varphi(x)=\lambda_0x^{n+1}+\lambda_1x^n+\cdots\cdots+\lambda_{1+n}$$

為方程式之特解.

若 $b=0$, $a=0$, 則方程式化為

$$\frac{d^2y}{dx^2}=X(x),$$

其通解祇須用兩次單積分便可求得了.

例.
$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=x^2+1.$$

設方程式之特解爲
$$y=\varphi(x)=\lambda_0x^2+\lambda_1x+\lambda_2,$$
則得
$$2\lambda_0-(\lambda_0x^2+\lambda_1x+\lambda_2)=x^2+1,$$
$$\lambda_0=-1,\quad \lambda_1=0,\quad \lambda_2=-3,$$
故
$$\varphi(x)=-x^2-3.$$
易知方程式
$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$$
之通解爲
$$C_1e^x+C_2e^{-x},$$
故原方程式之通解爲
$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2-3.$$
特例 2.　設方程式之右端爲一指數函數 Ae^{kx},
$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=Ae^{kx}.$$

1° 若 k 非輔助方程式
$$f(r)=r^2+ar+b=0$$
之根, 可設
$$y=\lambda e^{kx}$$
爲方程式之一特解 (λ 爲一待定常數).
代入方程式, 得
$$\lambda e^{kx}f(k)=Ae^{kx},$$
由是得
$$\lambda=\frac{A}{f(k)}.$$
故此時
$$y=\frac{A}{f(k)}e^{kx}$$

爲方程式之一特解.

2° 若 k 爲輔助方程式之單根, 可設

$$y=\lambda xe^{kx}$$

爲方程式之一特解. 代入方程式, 得

$$\lambda\left\{\frac{d^2}{dx^2}(xe^{kx})+a\frac{d}{dx}(xe^{kx})+bxe^{kx}\right\}=Ae^{kx},$$

即 $$\lambda e^{kx}\{f'(k)+xf(k)\}=Ae^{kx}.$$

然 $$f(k)=0,$$

故 $$\lambda=\frac{A}{f'(k)}.$$

此時 $$y=\frac{Ax}{f'(k)}e^{kx}$$

爲方程式之一特解.

3° 若 k 爲輔助方程式之重根, 可設

$$y=\lambda x^2e^{kx}$$

爲方程式之一特解, 代入方程式得

$$\lambda\left(\frac{d^2}{dx^2}(x^2e^{kx})+a\frac{d}{dx}(x^2e^{kx})+bx^2e^{kx}\right)=Ae^{kx},$$

即 $$\lambda e^{kx}\{f''(k)+2xf'(k)+x^2f(k)\}=Ae^{kx}.$$

然 $$f(k)=0, \qquad f'(k)=0,$$

故 $$\lambda=\frac{A}{f''(k)}.$$

此時 $$y=\frac{Ax^2}{f''(k)}e^{kx}$$

爲方程式之一特解.

例 1. $$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^x.$$

1 爲方程式 $f(r)=r^2-3r+2=0$ 之單根, 故可令

$$y=\lambda xe^x$$

爲方程式之一特解．代入方程式卽得 λ 之值 $\lambda=-1$, 故方程式之通解爲

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-xe^x.$$

例 2. $$\frac{d^2y}{dx^2}+y=2x+\cos x.$$

因 $$\cos x=\frac{1}{2}e^{ix}+\frac{1}{2}e^{-ix},$$

故 $$\frac{d^2y}{dx^2}+y=2x+\frac{1}{2}e^{ix}+\frac{1}{2}e^{-ix}.$$

玆先求下列三方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=2x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{2}e^{ix},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{2}e^{-ix}$$

之特解．

第一式之特解爲 $2x$, 第二式之特解爲

$$\frac{Ax}{f'(k)}e^{kx}=\frac{\frac{1}{2}x}{f'(i)}e^{ix}=\frac{1}{4i}xe^{ix},$$

第三式之特解爲

$$\frac{Ax}{f'(k)}e^{kx}=\frac{\frac{1}{2}x}{f'(-i)}e^{-ix}=-\frac{1}{4i}xe^{-ix}.$$

故 $$2x+\frac{1}{4i}x(e^{ix}-e^{-ix})=2x+\frac{1}{2}x\sin x$$

爲原方程式之一特解，其通解爲

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+2x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

112. 微分方程組 設兩個第一級微分方程式

[1] $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx}=g(x, y, z) \end{cases}$$

規定二未知函數 y, z. 那末這兩個方程式就叫做微分方程組. 欲解這方程組, 先將第一式對於 x 求導數, 則得

[2] $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

由 (1), (2) 三式消去 z 及 $\dfrac{dz}{dx}$, 便得一第二級微分方程式

[3] $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0.$$

設其通解爲

$$y=\varphi_1(x, C_1, C_2),$$

那末代入 (1) 之第一式中, 就得一 x, z, C_1, C_2 四數間的關係, 由此解得

$$z=\varphi_2(x, C_1, C_2).$$

例.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=x+y+2z, \\ \dfrac{dz}{dx}=x+z+2y. \end{cases}$$

由第一式得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=1+\frac{dy}{dx}+2\frac{dz}{dx},$$

由上三式消去 z 與 $\dfrac{dz}{dx}$, 得

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=1+x,$$

其通解爲

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}.$$

又由方程組之第一式，得

$$z=\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y,$$

故
$$z=-C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}.$$

習 題 14

試解下列微分方程式.

1. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$
2. $xy^2\,dy=(x^3+y^3)\,dx.$
3. $(x^2-2y^2)\,dx+2xy\,dy=0.$
4. $(x^2+y^2)\,dx=2xy\,dy.$
5. $x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=y\cos\frac{y}{x}-x.$
6. $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx+x\,dy)=y\sin\frac{y}{x}(x\,dy-y\,dx).$
7. $dy-\frac{xy\,dx}{1+x^2}=\frac{a\,dx}{1+x^2}.$
8. $\frac{dy}{dx}\cos x+y\cos x=1.$
9. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$

10. $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^x x^n.$

11. $\frac{dy}{dx}+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}.$

12. $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{e^x}.$

13. $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y=1.$

14. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=axy^2.$

15. $3y^2\frac{dy}{dx}-ay^3=x+1.$

16. $\frac{dy}{dx}(x^2y^3+xy)=1.$

17. $(y\log x-1)y\,dx=x\,dy.$

18. $y-\cos x\frac{dy}{dx}=y^2\cos x(1-\sin x).$

19. $\frac{d^2y}{dx^2}+12y=7\frac{dy}{dx}.$

20. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0.$

21. $\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{dy}{dx}=0.$

22. $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+13y=0.$

23. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-10y=0.$

24. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+10y=0.$

25. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-7\dfrac{dy}{dx}+12y=x.$

26. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-a^2y=x+1.$

27. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=e^x.$

28. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\cos ax.$

29. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2a\dfrac{dy}{dx}+a^2y=e^x.$

30. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=e^{2x}.$

31. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=e^{nx}.$

32. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=xe^{nx}.$

33. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-9\dfrac{dy}{dx}+20y=x^2e^{3x}.$

34. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=x\sin^2 x.$

試解下列方程組：

35. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-7y+z,\\[2ex]\dfrac{dz}{dx}=-2y-5z\end{cases}$

36. $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{x+z}=\dfrac{dz}{y-x}.$

37. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 + yz, \\ \dfrac{dz}{dx} = z^2 + yz. \end{cases}$$

38. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z. \end{cases}$$

中英名詞對照表

第一章

常數 constant
間隔 interval
自變數 independent variable
圖表 graph
顯函數 explicit function
減函數 decreasing function
反函數 inverse function
有理整函數 rational integral function
有理分函數 rational fractional function
無理函數 irrational function
二值函數 two-valued function
多值函數 many-valued function
弧度 radian
主值 principal value
極限 limit
增數列 increasing sequence
有限數 finite number
連續函數 continuous function
對數函數 logarithmic function
變數 variable
函數 function
因變數 dependent variable
隱函數 implicit function
增函數 increasing function
單調函數 monotonic function
初等函數 elementary function
多項式 polynomial
有理函數 rational function
代數函數 algebraic function
單值函數 one-valued function
三角函數 trigonometric function
反三角函數 inverse trigonometric f.
超越函數 transcendental function
數列 sequence
減數列 decreasing sequence
函數的函數 function of function
自然對數 natural logarithm
指數函數 exponential function

第二章

導數 derivative
導來函數 derived function
角係數 angular coefficient
微分 differential
增量 increment
微分係數 differential coefficient
斜率 slope

第 三 章

中值定理 theorem of mean value
極小值 minimum value
極大值 maximum value
極值 extreme value

第 四 章

逐次導數 successive derivative
逐次微分 successive differential
主無窮小 principal infinitesimal
不定形 indeterminate form
第 n 次導數 n-th derivative
無窮小 infinitesimal
主要部分 principal part

第 五 章

切線 tangent
次切線 sub-tangent
弧微分 differential of arc
凹, 凸 concavity, convexity
切觸圓 osculating circle
曲率圓 circle of curvature
曲率半徑 radius of curvature
伸開線 involute
法線 normal
次法線 sub-normal
擺線 cycloid
反曲點 point of inflexion
曲率 curvature
曲率中心 center of curvature
纜線 catenary
縮閉線 evolute

第 六 章

無窮級數 infinite series
發散級數 divergent series
交錯級數 alternating series
半收斂級數 semi-convergent series
複數項級數 series of complex terms
收斂間隔 interval of convergence
收斂級數 convergent series
正項級數 series of positive terms
絕對收斂 absolute convergence
複數 complex number
冪級數 power series

第 七 章

雙曲線正弦 hyperbolic sine
雙曲線正切 hyperbolic tangent
雙曲線餘弦 hyperbolic cosine
二項級數 binomial series

第八章

不定積分 indefinite integral
積分 integral
被積函數 integrand
代換積分法 integration by substitution
積分法 integration
積分號 integral sign
積分常數 constant of integration
部分積分法 integration by parts

第九章

定積分 definite integral
上限 upper limit
無窮積分 infinite integral
面積 area
正葉線 folium descartes
星形線 astroid
下限 lower limit
一致連續 uniform continuity
瑕積分 improper integral
連珠線 lemniscate
心形線 cardioid

第十章

部分分數 partial fraction
漸化式 reduction formula

第十一章

變域 domain
全微分 total differential
偏導數 partial derivative
偏微分 partial differential

第十二章

特異點 singular point
尖點 cusp
漸近線 asymptote
包線 envelope
方向餘弦 direction cosine
切平面 tangent plane
切觸面 osculating plane
副法線 binormal
結點 node
孤立點 isolate point
漸近點 asymptotic point
法平面 normal plane
螺線 helix
橢圓面 ellipsoid
主法線 principal normal

第 十 三 章

重積分 double integral
柱面 cylindric surface
旋轉面 surface of revolution
拋物面 paraboloid
旋轉體 solid of revolution
偏心率 eccentricity
慣性能率 moment of inertia
積分域 field of integration
體積 volume
環體 torus
函數行列式 functional determinant
錐面 cone
重心 center of gravity

第 十 四 章

微分方程式 differential equation
特解 particular solution
輔助方程式 auxiliary equation
通解 general solution
異解 singular solution
線性方程式 linear equation
微分方程組 system of differential equations

微積分學勘誤表

頁	行	誤	正
i	10	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
iii	5	切觸圓	最切圓
vi	13	切觸面	最切面
vii	6	常數係數	常係數
2	17	x 與 y 中間	此五字移至第 18 行之首
5	6	加減乘除的	加減乘的
6	末	$\frac{\pi}{180}0$	$\frac{\pi}{180}=0$
8	13	於反函數	的反函數
9	6	定値	定値，
11	6	例如數列	例如下面的二數列
13	14	$\geqq$	$>$
	15	$\leqq\frac{\sqrt{n}-1}{n}\leqq$	$<\frac{\sqrt{n}-1}{n}<$
	17	$1\leqq x_n$	$1<x_n$
		$\leqq 1$	<1
20	1	又 ϵ 原	又 ϵ' 原
24	3	$f(x)$	$f(a)$
24	10	週	迴
26	18	$+\cdots\cdots a_n$	$+\cdots+a_n$
28	16	$(y_2-y_2)\{\phi(y_2)-\phi((y_2)\}$	$(y_1-y_2)\{\phi(y_1)-\phi(y_2)\}$
29	末	$x'-x_n$	x'_n-x_n
32	3	Nepier	Napier
33	19	$\frac{x^3-x^2-x+1}{x(x+1)}$	$\frac{x^3-x^2-x+1}{x(x-1)}$
36	5	的導數*$y=$	的導數*. $y=$
41	2	便得	便得*
	末	末行下添一橫線,橫線下添: *記號 $\approx$ 是"幾乎等於"的意思	
44	5	$=cf(x)$	$=cf'(x)$
45	5	$-\text{cosec}\,x\cdot\tan x$	$-\text{cosec}\,x\cdot\cot x$
48	3	很不	多不

頁	行	誤	正
	11	$-\cot x$	$-\cot t$
49	13	$3x^2+5ay$	$3x^2+5ax$
49	末	$\sqrt[3]{a^2+a}$	$\sqrt[3]{a^2+x^2}$
54	21	可得－	可得
55	6	$f(x)-\phi(x)$	$f(x)-g(x)$
57	11	所在之點 P_2	所在之點，P_2
61	13	罷了	罷了(圖 43)
62	4	如下*	如下
	末	*記號≃是"幾乎等於"的意思	這十一個字删去
	13	$\frac{h^2}{x(x+a)}$	$\frac{h^2}{x(x+h)}$
64	16	$a>0$, $a>0$	$a>0$, $b>0$.
65	22	正數	正整數
	25	之極小值爲	當 x 等於下數時函數爲一極小值
78	末	那米	那末
80	13	$\frac{1}{\pi\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}}$	$\frac{2}{\pi\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}}$
82	8	$\frac{f(x_1)}{f'(x_2)}$	$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
84	3	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$
90	5	(12) $\lim\limits_{x\to 0}$	(12) $\lim\limits_{x\to 1}$
92	8	$y-y-$	$y-y=$
97	4	反之 $f'(x)$	反之 $f''(x)$
98	2	$f(x)$ 爲	$f(a)$ 有
	6	切觸圓,…切觸圓	最切圓,…;最切圓
	10	切觸圓	最切圓
99	1	切觸圓	最切圓
	圖60	圖中的 a 與 ψ	應改爲 ϕ
100	圖61	圖中的 ψ	應改爲 ϕ
100	3	極小值	絕對值
101	3	切觸圓	最切圓
	4	切觸圓	最切圓
	5	切觸圓	最切圓

頁	行	誤	正
109	1	在$(a, 0)$	在$(0, 0)$
	4	證明曲線	證明二曲線
111	3	之和	之和爲
117	3	證	證：令
	12	同樣可證明	則級數 Σa_n 亦可由變更 $\Sigma a'_n$ 各項前後之位置而得，故同樣可證明
119	5	令	令 $\alpha_n=\frac{\|a_n\|+a_n}{2}$, $\beta_n=\frac{\|a_n\|-a_n}{2}$，則
120	4	(§ 45)故	(§ 44, 定理 5)，故
121	16	§ 42	§ 43
121	23	$a_1 b_n)$.	$a_1 b_n)+\cdots$.
122	10	爲一收斂	爲收斂
126	6	在間隔內	在間隔
127	4	$-3x^3$	$-3x^2$
130	10	$\frac{x^n}{n!}$,	$\frac{x^n}{n!}+\cdots$,
131	5	缺一題	14. 試證級數 $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{1}{2n+1}+\cdots$ 是收斂的。
133	4	$f(x-h)$	(4) $f(x+h)$
137	4	$\frac{(x-a)^2}{3!}$	$\frac{(x-a)^3}{3!}$
	8	$\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{1!}$	$\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$
140	14	都是交錯收斂級數	當 $\|x\|$ 小於 1 時
144	1	$f(x)=$	$f'(x)=$
146	10	一切數	一切整數
148	註	向 2^m, 收斂	向 2^m 收斂
	註	Pousin	Poussin

	行	誤	正
149	11	$\frac{2-(1-x)}{(-x)^3}$	$\frac{2-(1-x)}{(1-x)^3}$
150	10	$3a_3x^3$	$3a_3x^2$
	17	$\frac{4}{2}\cdot\frac{x^3}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}$
151	1	D'alembert	D Alembert
	3	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3\cdot 2}+$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2}$
	6	$-1<x\leqq 1$	$-1\leqq x\leqq 1$
156	9	$\left(\frac{2}{n+2}\right)+\cdots$	$\left(\frac{2}{n+2}\right)^2+\cdot$
157	9	$(998)^{-2}$	$(998)^{-1}$
	12	(3) $\lim\limits_{x\to\infty}$	(3) $\lim\limits_{x\to 0}$
	17	問下列二數	下列二數
160	3	$F(x)=\phi(x)-g(x)$	$F(x)=g(x)-\phi(x)$
	4	$F'(x)=\phi'(x)-g'(x)$	$F'(x)=g'(x)-\phi'(x)$
164	10	$\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$	$\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$
169	1	§ 64	§ 65
	10	$\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$	$\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$
171	14	以 $1+\cos x$	以 $1-\sin x$
172	12	$\frac{e^3}{2}$	$\frac{e^x}{2}$
173	1	$=-\frac{1}{2}\log$	$=\frac{1}{2}\log$
175	2	爲 x_i	爲 x_{i-1}
	3	與 x_{i+1} 之間	與 x_i 之間
176	[illegible]71	$x_{i-1}\xi_i x_i$	$x_{i-1}\ \xi_i\ x_i$
178	10	$\frac{h}{2\sin\frac{n}{2}}$	$\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}$
180	10	$s_m\leqq S''_l\leqq S_m$	$s'_m\leqq S'_l\leqq S'_m$
181	16	脫落一字	加(4)字於第十六行之首。
183	17	以 Δx 得	以 Δx 除

頁	行	誤	正
184	14	$9-\frac{1}{6}$	$9-\frac{1}{3}$
187	3	$\int_{-1}^{+1} dx=$	$\int_{-1}^{+1} x^2dx=$
188	2	$0<\sin$	$0\leqq\sin$
	4	$\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x dx\leqq$	$<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x dx<$
	末	$c_0+a_1x_2x^2+$	$a_c+a_1x+a_2x^2+$
189	1	這收歛區	這間隔
	14	$\frac{1}{3}x_2x^3$	$\frac{1}{3}a_2x^3$
193	15	$x=c$ 時	$x\to c$ 時
197	5	在變區	在間隔
199	6	$+\left\vert \frac{2}{5}\sqrt{x^3}\right.$	$+\left\vert \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right.$
	7	拋物線之交	拋物線交
	8	點縱標	點之縱標
200	末	$\left\vert -\sin 2\theta\right\vert_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\left\vert +\sin 2\theta\right\vert_0^{\frac{\pi}{4}}$
202	6	$=\frac{9t^2t^2}{(1+t^3)}dt$	$=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt$
204	6	$S=\int_a^b$	$s=\int_a^b$
	13	$dy=\sin\theta\, d\theta+$	$dy=\sin\theta\, dr+$
205	14	求纜線	求纜線(圖 90)
205	末	$\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$	$\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$
206	5	$\frac{dy}{dx}=$	$\frac{dy}{dt}=$
2 7	7	$\sqrt{\phi'(t')^2+\psi'(t')^2}(t_1-t_0)$	$\sqrt{\phi'(t')^2+\psi'(t'')^2}(t_1-t_0)$
	8	$\sqrt{\phi'(t'')^2+\psi'(t'')^2}(t_1-t_0)$	$\sqrt{\phi'(t''')^2+\psi'(t''')^2}(t_1-t_0)$
	9	其中 t' 與 t''	其中 t', t'', t'''

頁	行	誤	正
	9	的二値	的三値
	11	$\lim\frac{\sqrt{\phi'(t')^2+\psi'(t')^2}}{\sqrt{\phi'(t'')^2+\psi'(t'')^2}}$	$\lim\frac{\sqrt{\phi'(t')^2+\psi'(t'')^2}}{\sqrt{\phi'(t''')^2+\psi'(t''')^2}}$
	12	近似直	近似値,
215	5	爲至。	爲止
	7	$(n-n')$	$n'-n$
216	14	$+\frac{L_\lambda}{(x-l)}$	$\mp\frac{L_\lambda}{x-l}$
218	1	$=A(2x-1)(x-2)$	$=A(2x-1)(x+2)$
	6	$\int\frac{x^2+4x-1}{x(2x-1)(x-2)}dx$	$\int\frac{x^2+4x-1}{x(2x-1)(x+2)}dx$
	13	令兩端	令兩邊
220	8	$\arctan t+A\log b$	$\arctan t$
	9	"末項只是一常數可以省去不寫"	這十三字移下二行
	11	$\arctan\frac{x-a}{b}$	$\arctan\frac{x-a}{b}+A\log b$
223	4	$=6\int\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right)dt$	$=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$
224	4	$\int R(x,\sqrt{g(x)}dx$	$\int R(x,\sqrt{g(x)})dx$
	11	$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+2dx+c}}$	$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+2bx+c}}$
227	9	$\sqrt[3]{1+x^{-2}}=t$	$\sqrt[3]{1+x^{-3}}=t$
229	4	$\int\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}dx$	$\int\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$
	6	$-4\int\frac{dt}{2+t^2}$	$-4\int\frac{4t}{3+t^2}$
230	2	$=-\frac{u^2du}{1+u^2}$	或 $\int\cot^n x dx=-\int\frac{u^n du}{1+u^2}$
230	13	$\int\sin^m\cos^n x dx$	$\int\sin^m x\cos^n x dx$
233	8	$\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$	$\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})}$
	11	$\frac{2x+3}{x^5\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{2x+3}{x^2\sqrt{x^2-1}}$
236	末	形變域	形變域(圖 96)

頁	行	誤	正
237	3	圓變域	圓變域(圖 97)
	8	曲面	曲面(圖 98)
240	6	在圖 101，曲線	在圖 102，曲線
	6	$y=0$	$y=b$
241	21	令 U 之二値	令 U 之二値
248	4	$=C_{n+1}\quad^{p+1}$	$=C_{n+1}^{p+1}$
249	2	$n=0$ 時	$n=1$ 時
256	23	$z=xx$	$z=xy$
257	15	$\frac{2u}{\partial\phi}$	$\frac{\partial u}{\partial\phi}$
259	8	有連切線	有二切線
	11	弧立點	孤立點
260	6	弧立點	孤立點
262	6	無限分支	無窮遠分支
	9	$a\sin$	$r\sin$
	11	$\lim r\sin(\alpha-\theta)$	$\lim[r\sin(\alpha-\theta)]$
263	8	無限分支	無窮遠分支
264	16	$y'=\frac{2a+3x}{3^3\sqrt{x(a+x)^2}}$	$y'=\frac{2a+3x}{3\sqrt[3]{x(a+x)^2}}$
369	2	相切	相切.這曲線叫做連珠線(圖119)
270	i	$\frac{dy}{da}$	$\frac{dy}{dx}$
273	末	漸縮線	縮閉線(§4 0)
275	18	純角	鈍角
277	3	$\frac{Z=z}{b}$	$\frac{Z-z}{b}$
278	15	(2)	(5)
279	10	切觸面	最切面
	10	P, P_2 爲其	P_1, P_2 爲其
279	12	切觸面	最切面
280	8	$\frac{k^3}{3!}$	$\frac{k^2}{3!}$
281	1	切觸面	最切面
	2	(見圖 127)	(見圖 128)

頁	行	誤	正
	3	切觸面	最切面
	5	切觸面	最切面
	6	切觸面	最切面
	10	$y=\frac{a^x}{x^2}$	$y=\frac{a^x}{x^2},(a>1)$
282	20	切觸面	最切面
	23	切觸面	最切面
283	1	切觸面	最切面
	5	$2x-1+3z-2$	$2x-y+3z-2$
	10	一定線	一定直線
286	10	復次	其次
	13	$\{f_x(z+\theta\Delta x,y)-f_x(x,y)\}$	$\|f_x(x+\theta\Delta x,y)-f_x(x,y)\|$
287	5	$x=a,=b$	$x=a,\ x=b$
	圖133	$y=\psi(x)$	$y=\phi(x)$
289	2	N	N_0
	3	N	N_0
	5	N	N_0
	10	N	N_0
29	10	爲一凸迴線	爲一迴線
	11	這樣的迴線	并設這迴線
	圖136	$y=\psi_2(x)$	$y=\phi_2(x)$
		$y=\psi_1(x)$	$y=\phi_1(x)$
292	3	$\int_\alpha^\beta dy\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}f(x,y)dx$	$\int_\alpha^\beta dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx$
	圖137	$y=\psi_2(x)$	$y=\phi_2(x)$
		$y=\bar{\psi}_2(x)$	$y=\bar{\phi}_2(x)$
		$y=\bar{\psi}_1(x)$	$y=\bar{\phi}_1(x)$
		$y=\psi_1(x)$	$y=\phi_1(x)$
	9	圍成，故有	與直線 $x=\bar{a},\ x=\bar{b}$ 所圍成，故有
293	9	由上三式	由上二式
	11	不爲一凸迴線	爲一迴線
	11	如圖138所表示	如圖 138，139 所表示
294	1	俱爲凸迴線便是了	合於上述的條件
296	圖143	$\psi_1(x)$	$\phi_1(x)$

頁	行	誤	正
		$\psi_2(x)$	$\phi_2(x)$
296	4	$V=$	故所求的體積 $V=$
297	8	爲一橢圓	爲一橢圓(圖 145)
298	6	橢圓如下	橢圓如下(圖 145)
302	1	(圖 148),其	(圖 151),其
	14	所代表的數	右邊的一半
307	5	$e^{-r^2}ryrd\theta$	$e^{-r^2}rdrd\theta$
	6	由此可知	區域 D 爲一正方形,其邊長等於 $2a$,今作此正方形之內切圓與外接圓(圖 155)則有
308	圖156	$x=\psi(x)$	$x=\phi(x)$
309	3	f_n	fx
	4	一區域面積	一區域,其面積
311	2	$x=r\cos,$	$x=r\cos\theta,$
312	圖160	ψ	ϕ
314	圖162	S_0	s_0
		S_1	s_1
316	11	$A=2\pi b^2+\frac{a^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}$	$A=2\pi\left(b^2+\frac{a^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}\right)$
321	10	密度平均	密度均勻
323	8	Z 的	Z 軸的
324	3	體積	體積(參看習題 9—24)
325	12	在平面	與平面
	19	$4a^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$4\pi a^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
328	7		加(3)字於第 7 行之首
	12	$y+\cos ax$	$y=\cos ax$
	13	$y+2\cos ax+$	$y=2\cos ax+$
	17	(4)式	(2)式
332	11	常數係數	常係數
334	13	$\{f'(x)+xf(x)\}$	$\{f'(r)+xf(r)\}$
	18	$\phi(x)=0$	$f(x)=0$
336	6	常數係數	常係數
	9	多項 $P(x)$	多項式 $P(x)$

頁	行	誤	正
	22	$\frac{d^2y}{dx^2}\Big\vert = X(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2} = X(x)$
338	17	$\lambda = \frac{A}{f''(k)}$	$\lambda = \frac{A}{f''(k)} = \frac{A}{2}$
	18	$y = \frac{Ax^2}{f''(k)} e^{kx}$	$y = \frac{A}{2} x^2 e^{kx}$
346	14	切觸圓	最切圓
347	19	isolate	isolated
	24	切觸面	最切面

書中算式前之數字，用以表算式之次第者，數字外之方括弧，應全改為圓括弧

例如〔1〕應改為(1)

三十五年六月　孫光遠

孫叔平

書號 52283·2
基價 20·00