CURS

DE

TRIGONOMETRIE

DE

SPIRU C. HARET

FOST PROFESOR LA FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN BUCUREŞTI

EDIŢIA VI

REVĂZUTĂ ŞI PUSĂ ÎN ACORD CU PROGRAMELE ACTUALE DE LICEU

DE

I. TUTUC

PROFESOR DE CURSUL SECUNDAR

BUCUREŞTI

Inst. de Arte Grafice CAROL GÖBL S-r Ion St. Rasidescu

16, Strada Doamnei, 16.

1912.

PREŢUL 3,75 LEI.

CURS

DE

TRIGONOMETRIE

DE

SPIRU C. HARET
FOST PROFESOR LA FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN BUCUREŞTI

EDIŢIA VI
REVĂZUTĂ ŞI PUSĂ ÎN ACORD CU PROGRAMELE ACTUALE DE LIÇEU

DE

I. TUTUC
PROFESOR DE CURSUL SECUNDAR

BUCUREŞTI
Inst. de Arte Grafice CAROL GÖBL S-r Ion St. Rasidescu
16, Strada Doamnei, 16.
81.238
1912.

CURS DE TRIGONOMETRIE

CARTEA I.

STUDIUL FUNCŢIUNILOR CIRCULARE

CAPITOLUL I.

Noţiuni preliminarii şi definiţiuni.

1. *Trigonometria* are de obiect a găsì *prin calcul* elementele necunoscute ale unui poligon, plan sau sferic când se cunoaşte un număr suficient din aceste elemente. Această operaţiune se numeşte *rezolvirea* poligonului.

Însă orice poligon poate să se descompună în un număr oarecare de triunghiuri, prin linii duse dintr'un punct oarecare la toate vìrfurile lui; rezolvind aceste triunghiuri, poligonul însuşi va fi rezolvit. Prinurmare, obiectul trigonometriei se reduce la *rezolvirea triunghiurilor,* rectilinii sau sferice. De acì îi vine şi numele, precum şi diviziunea sa naturală în *Trigonometrie plană* sau *rectilinie* şi *Trigonometrie sferică.*

2. Pentru a rezolvì un triunghiu, este necesar mai întâiu a găsì relaţiunile ce există între diferitele sale elemente; astfel că dacă unele din aceste elemente ar fi necunoscute, să le putem află prin nişte simple rezolviri de ecuaţiuni. Însă elementele unui triunghiu sun-

laturile şi unghiurile lui, cantităţi neomogene unele cu altele, şi de aceea relaţiunile ce am puteà găsì între dânsele nu pot fi destul de simple şi lesnicioase, pentru a face cu uşurinţă o rezolvire de triunghiuri. Din această cauză, în trigonometrie, unghiurile se înlocuesc prin nişte linii drepte, numite *linii trigonometrice* şi se caută relaţiuni, nu între *laturile şi unghiurile triunghiului*, ci *între laturi şi liniile trigonometrice ale unghiurilor lui*.

Când unghiul variează, liniile trigonometrice corespunzătoare variează de asemenea, prinurmare liniile trigonometrice sunt *funcţiuni* ale unghiului corespunzător. Pe de altă parte, fiindcă aceste linii s'au născut din consideraţiunea cercului pe care se măsoară unghiul li s'a dat numirea de *funcţiuni circulare directe.*

Principiul lui Descartes.

3. Mai înainte de a intrà în studiul liniilor trigonometrice, vom face convenţiunea următoare, datorată lui Descartes, care simplifică foarte mult formulele trigonometrice, şi înlesneşte generalizarea lor.

Fie XY (fig. 1) o linie indefinită dreaptă sau curbă şi O un punct fix pe dânsa numit *origină,* şi dela care se măsoară distanţele. Luăm punctul A pe această linie, şi însemnăm distanţa OA cu a. *Se admite ca această distanţă să se considere ca pozitivă, şi să se însemneze cu* $+$, *dacă se socoteşte dela origină într'un sens oarecare*, s. ex. la dreapta, în sensul săgeţii; şi ca *negativă cu semnul* $-$, *dacă se consideră în sensul opus.*

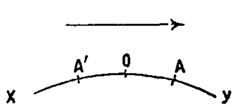


Fig. 1.

Pentruca poziţia punctului A pe linia XY să fie determinată, trebue să se cunoască trei date: 1° poziţia pe această linie a punctului fix O, 2° mărimea a a distanței punctului A dela această origină și 3° sensul în care această distanță este socotită dela origină. Inadevăr, dacă cunoaștem poziția originii, pentru a găsì poziția punctului A, la distanța $+a$ dela origină, n'avem decât pe linia XY, în sensul săgeții, să luăm o distanță $OA = a$, și A va fi poziția punctului căutat. Dacă ni s'ar cere să găsim poziția unui punct, situat la distanța $-a$ dela origină, am luà distanța $OA' = a$, în sens contrar săgeții, și punctul căutat ar fi A'.

De acì urmează principiul: *Dacă considerăm pe o linie oarecare, dreaptă sau curbă, diferite distanțe măsurate dela o origină comună, fixă pe această linie și dacă voim a le întroduce în calcul, vom afectà cu semnul + valorile numerice ale distanțelor cari sunt îndreptate într'un sens, și cu — pe acele cari vor fi îndreptate în sensul contrar.*

Cu toate acestea nu vom pierde din vedere că acest principiu este numai convențional, și că pentru a admite generalitatea unei formule, tot va trebuì a demonstrà cu rigurositate, că ea există în toate ipotezele posibile.

Arcele de cerc.

4. Se știe că un unghiu se măsoară cu arcul descris între laturile sale, cu centrul în vârful unghiului, și cu o rază arbitrară. Astfel, măsura unghiului ABC va fi arcul AC (fig. 2).

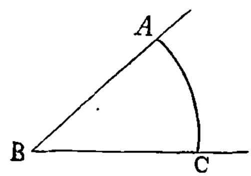


Fig. 2.

In trigonometrie, în general unghiurile se înlocuesc cu arcele de cerc cari le măsoară. Aceste arce se măsoară și ele pe un cerc a cărui rază se ia de ordinar ca unitate ($R = 1$); prinurmare lungimea unui cerc cu raza R fiind $2\pi R$, în trigonometrie, ea va fi totdeauna egală cu 2π; un semicerc va fi π, și un sfert de cerc $\frac{\pi}{2}$.

Ducând în cerc două diametre perpendiculare AC și BD, (fig. 3) acest cerc va fi împărțit în patru părți egale, numite *cadrane*, cari poartă fiecare numele de *întâiul, al doilea, al treilea, al patrulea cadran.*

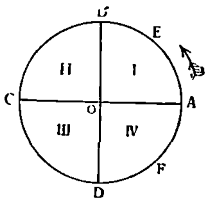


Fig. 3.

Fiecare cadran al cercului se împarte în câte 90 părți egale numite *grade;* fiecare grad se împarte în 60 *minute;* fiecare minută în 60 *secunde.* Prinurmare, un cerc întreg are 360 grade, sau 21.600 minute, sau 1.296.000 secunde.

Aceste diferite sub-împărțiri ale cercului, se însemnează respectiv cu ^{0},$'$,$''$; astfel, un arc de 15 grade 39 minute 51 secunde și 0,4 din o secundă, se însemnează: $15^0 39' 51'',4$.

De câtva timp a început să se întrebuințeze o împărțire *centesimală* a cercului, în locul diviziunii *sexagesimale,* expusă mai sus. După această nouă diviziune, un cadran se împarte în 100 grade; un grad în 100 minute; o minută în 100 secunde; așà că cercul întreg cuprinde 400 grade, sau 40.000 minute, sau 4 000.000 secunde.

Origina dela care vom socotì arcele pe cerc va fi în general punctul A, la începutul primului cadran. Sensul în care vom considerà arcele ca pozitive va fi cel arătat de săgeată, dela primul către al doilea cadran. Arcele socotite în sensul contrar vor fi privite ca negative. Astfel, arcul AE va fi pozitiv, iar AF negativ.

Arce complimentare şi suplimentare.

5. Se numesc *arce complimentare*, două arce a căror sumă este egală cu un cadran, sau $\frac{\pi}{2}$; astfel sunt arcele AE şi EB, căci $AE + EB = \frac{\pi}{2}$.

Se numesc *arce suplimentare* două arce a căror sumă este egală cu două cadrane, sau π; astfel sunt arcele AE şi EC, căci $AE + EC = \pi$.

Prinurmare, dacă lungimea unui arc est a, arcul complimentar va fi $\frac{\pi}{2} - a$ şi arcul suplimentar $\pi - a$.

LINIILE TRIGONOMETRICE

6. Liniile trigonometrice sunt în număr de şase: *sinus*, *tangenta*, *secanta*, *cosinus*, *cotangenta şi cosecanta.*

Liniile trigonometrice nu se consideră niciodată în valoare absolută, ci sunt date totdeauna prin raportul lor către rază: aşà când se zice că tangenta unui arc este 3,7, aceasta însemnează că raportul între lungimea absolută a acelei tangente şi rază este 3,7.

Sinus.

7. Se numeşte *sinus* al unui arc, *perpendiculara lăsată din o extremitate a arcului pe diametrul care trece prin cealaltă extremitate.* Astfel sinusul arcului AE (fig. 4) este EI, şi se însemnează: EI = sin AE.

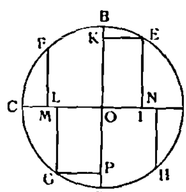


Fig. 4.

Ducând EK paralel cu AC avem: EI = KO, ca paralele cuprinse între paralele; prinurmare putem zice că şi KO este sinusul arcului AE.

Sinusurile se socotesc pe diametrul BD, dela origina

O (3). In tot cursul acestei scrieri vom considerà ca pozitive sinusurile socotite pe raza OB, şi ca negative pe cele considerate pe OD. Astfel se vede pe figură că

$$\sin AE = EI = OK, \ \sin ABG = GM = OP$$

şi însemnând cu a şi b lungimile segmentelor OK şi OP vom aveà:

$$\sin AE = +a; \ \sin ABG = -b$$

8. Când arcul merge crescând dela A pânăla B, adică dela zero pânăla $\frac{\pi}{2}$, valoarea sinusului rămâne totdeauna pozitivă, şi merge şi ea crescând dela zero în sus. Când arcul este AB sau $\frac{\pi}{2}$, valoarea sinusului este BO, adică raza însăş; deci

$$\sin \frac{\pi}{2} = BO = +1.$$

Extremitatea arcului trecând în al doilea cadran şi mergând dela B pânăla C, valoarea sinusului este tot pozitivă, însă merge descrescând dela 1 în jos.

Arcul ABC $= \pi$ are drept sinus pe zero, aşà că

$$\sin \pi = 0.$$

Când extremitatea arcului intră în cadranul al treilea, sinusul devine negativ, după convenţiunea de mai sus; însă valoarea arcului crescând dela ABC pânăla ABCD, adică dela π pânăla $\frac{3\pi}{2}$, *valoarea absolută* a sinusului creşte şi ea dela zero pânăla 1, aşà că

$$\sin \frac{3\pi}{2} = OD = -1.$$

Extremitatea arcului fiind în cadranul al patrulea, sinusul rămâne tot negativ, însă descreşte în *valoare absolută* dela 1 pânăla 0, adică:

$$\sin 2\pi = 0.$$

Prinurmare, în rezumat:

In primul cadran, sinusul este *pozitiv*, şi variează dela zero pânăla $+1$.

In al doilea cadran, sinusul este *pozitiv*, şi variează dela $+1$ pânăla zero.

In al treilea cadran, sinusul este *negativ*, şi variează dela zero pânăla -1.

In al patrulea cadran, sinusul este *negativ*, şi variează dela -1 pânăla zero.

De aci vedem că toate valorile sinusului sunt cuprinse între limitele -1 şi $+1$. Orice valoare a sinusului mai mare decât $+1$ sau mai mică decât -1 este o valoare *absurdă*. La o asemenea valoare de sinus nu corespunde nici un arc real.

9. Dacă ne-am imaginà că arcul, după ce a percurs un cerc întreg, ar trece de punctul A, şi ar percurge din nou cercul în acelaş sens de mai multe ori, am vedeà că sinusul în aceleaşi cadrane reià neîncetat aceleaşi valori cu aceleaşi semne, *în mod periodic:* după fiecare trecere de un cerc întreg, valorile şi semnele sinusului se repetă. Prinurmare, *sinusul este o funcţiune circulară periodică, şi perioada sa este un cerc sau* 2π.

Putem exprimà acest principiu prin formula următoare:

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x,$$

în care k însemnează un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ.

Tangenta.

10. Se numeşte *tangenta* unui arc, *porţiunea tangentei geometrice dusă la una din extremităţile ar-*

cului cuprinsă între această extremitate și diametrul ce trece prin cealaltă extremitate.

Astfel, tangenta arcului AE (fig. 5) este AF, și se însemnează:

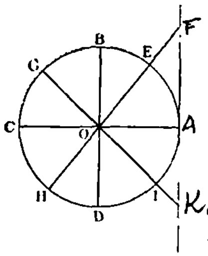


Fig. 5.

$$AF = \text{tg}\, AE.$$

Tangentele trigonometrice se socotesc pe tangenta geometrică FK, și punctul A este considerat ca origina lor (3). Se consideră ca pozitive tangentele socotite dela origina A pe partea AF a tangentei geometrice, și ca negative cele considerate pe partea AK. Astfel se vede pe figură că:

$$\text{tg}\, AE = AF, \text{ și } \text{tg}\, AI = AK,$$

și însemnând cu *a* și *b* lungimile segmentelor AF și AK vom aveà:

$$\text{tg}\, AE = + a, \ \text{tg}\, AI = - b$$

11. Când arcul merge crescând dela A pânăla B, adică dela zero pânăla $\frac{\pi}{2}$, valoarea tangentei rămâne totdeauna pozitivă, și merge și ea crescând dela zero în sus. Când arcul este AB sau $\frac{\pi}{2}$, diametrul ce trece prin extremitatea B a arcului, fiind paralel cu tangenta AF, o întâlnește la infinit; prinurmare:

$$\text{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$$

Când extremitatea arcului este în cadranul al doilea, de ex. arcul AG, diametrul ce trece prin extremitatea G a lui întâlnește linia tangentelor în partea sa inferioară AK; prinurmare în acest cadran, tangenta este negativă. Arcul crescând dela B spre C, tangenta descrește *în valoare absolută;* și când arcul devine ABC, sau π, ea devine zero; deci

$$\text{tg}\, \pi = 0.$$

Arcul ABH având extremitatea în cadranul al treilea, tangenta AF se află pe partea pozitivă a linii tangentelor, şi creşte când creşte şi arcul, şi când acesta are valoarea $\frac{3\pi}{2}$, tangenta este iarăş infinită; adică

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} = \infty$$

Indată ce extremitatea arcului intră în cadranul al patrulea, tangenta trece deodată dela valorile pozitive la cele negative; şi când creşte arcul, tangenta descreşte în *valoare absolută*, aşà că, arcul ajungând la valoarea 2π, avem:

$$\operatorname{tg} 2\pi = 0.$$

In rezumat:

In cadranul întâiu, tangenta este *pozitivă*, şi variează dela zero pânăla $+\infty$.

In cadranul al doilea, tangenta este *negativă*, şi variează dela ∞ pânăla zero.

In cadranul al treilea, tangenta este *pozitivă* şi variează dela zero pânăla $+\infty$.

In cadranul al patrulea, tangenta este *negativă*, şi variează dela $-\infty$ pânăla zero.

Vedem dar că tangenta poate să ieà toate valorile posibile dela $-\infty$ pânăla $+\infty$, şi prinurmare la orice valoare reală a tangentei corespunde o valoare reală pentru arc.

12. Dacă am presupune că arcul, după ce a percurs cercul întreg ar trece de punctul A şi ar percurge din nou cercul în acelaş sens şi de mai multe ori, am vedeà că tangenta, din două în două cadrane, reieà neîncetat aceleaşi valori cu aceleaşi semne, *în mod periodic*. Prinurmare, *tangenta este o funcţiune circulară periodică, şi perioada sa este un semi-cerc sau* π.

Putem exprimà acest principiu prin formula următoare:

$$\operatorname{tg}(k\pi + x) = \operatorname{tg} x,$$

în care k reprezintă un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ.

Secanta.

13. Se numeşte *secantă* a unui arc *distanța dela centrul acelui arc pânăla extremitatea tangentei sale trigonometrice.* Astfel tangenta arcului AE este AF, (fig. 5), iar secanta lui este OF, şi se notează:

$$OF = \sec AE.$$

Originea secantelor este centrul O.

Secanta se măsoară deci pe dreapta, care trece prin centrul cercului şi extremitatea arcului. Sensul pozitiv pe această dreaptă este dela O spre extremitatea arcului, sensul negativ este cel contrar. Astfel (fig. 6), raportându-ne la arcul AM sensul pozitiv pe dreapta X'X este dela O spre X şi cel negativ dela O spre X'; raportându-ne la arcul ABM' sensul pozitiv este dela O spre X' şi cel negativ dela O spre X.

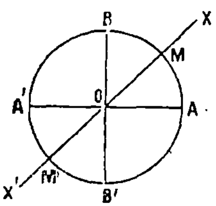


Fig. 6.

14. Când arcul este zero, (fig. 5) secanta este OA sau $+1$; adică:

$$\sec 0 = +1.$$

Arcul crescând în cadranul întâiu pânăla B, secanta creşte şi ea, rămânând neîncetat pozitivă; şi când arcul devine $\frac{\pi}{2}$ sau AB, extremitatea tangentei fiind la infinit, dupăcum ştim (11) avem:

$$\sec \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Când extremitatea arcului intră în cadranul al doilea, secanta trece deodată dela valorile pozitive la cele negative, şi când creşte arcul, ea descreşte în *valoare absolută*. Când arcul devine ABC sau π, secanta este OA sau -1, adică

$$\sec \pi = -1.$$

Dacă extremitatea arcului este în cadranul al treilea, secanta este tot negativă, însă merge crescând în *valoare absolută*, când arcul creşte, aşà că dacă arcul este de 3 cadrane, secanta este iarăş infinită, adică

$$\sec \frac{3\pi}{2} = -\infty$$

Extremitatea arcului intrând în cadranul al patrulea, secanta trece deodată la valorile pozitive, şi descreşte dela $+\infty$, pânăcând arcul ajungând la valoarea 2π, avem:

$$\sec 2\pi = +1.$$

In rezumat:

In primul cadran, secanta este *pozitivă*, şi variează dela $+1$ pânăla $+\infty$.

In al doilea cadran, secanta este *negativă*, şi variează dela $-\infty$ pânăla -1.

In al treilea cadran, secanta este *negativă*, şi variează dela -1 pânăla $-\infty$.

In al patrulea cadran, secanta este *pozitivă*, şi variează dela $+\infty$ pânăla $+1$.

Vedem dar că secanta poate să aibă toate valorile posibile dela $-\infty$ pânăla $+\infty$ afară de cele cuprinse între -1 şi $+1$. Orice valoare a secantei cuprinsă între -1 şi $+1$ este o valoare *absurdă*, şi niciun arc real nu corespunde la o asemenea valoare a secantei.

15. Presupunând că arcul ar percurge cercul de mai multe ori şi în acelaş sens, am vedeà îndată că secanta reia neîncetat aceleaşi valori, cu aceleaşi semne *în mod periodic*, după fiecare interval de un cerc în-

treg. Prinurmare, *secanta este o funcţiune circulară periodică, şi perioada sa este un cerc întreg, sau* 2π.

Putem exprimà acest principiu prin formula

$$\sec(2k\pi + x) = \sec x,$$

în care k reprezintă un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ.

Cosinus.

16. Se numeşte *consinus* al unui arc *sinusul arcului său complimentar.*

Fie s. ex. arcul AE (fig. 4); arcul complimentar al acestuia este EB; după definiţiunea sinusului avem:

$$EK = \sin EB,$$

prinurmare

$$EK = \cos AE.$$

Observăm că $EK = IO$; prinurmare putem încă defini cosinusul că este *distanţa dela centru pânăla piciorul sinusului.*

Cosinusurile se socotesc pe diametrul AC, dela origina O (3). Sunt pozitive cosinusurile socotite pe partea din dreapta, OA, a diametrului, şi negative cele socotite pe partea OC. Astfel, se vede pe figură că:

$$\cos AE = OI, \text{ şi } \cos AF = OL,$$

şi însemnând cu a şi b lungimile segmentelor OI şi OL avem:

$$\cos AE = +a; \ \cos AF = -b$$

17. Dacă arcul este zero, cosinusul fiind distanţa dela centru la extremitatea sinusului, avem:

$$\cos 0 = OA, \text{ sau } \cos 0 = +1.$$

Arcul crescând în primul cadran, cosinusul rămâne neîncetat pozitiv însă descreşte, aşà încât, când arcul este AB sau $\frac{\pi}{2}$, sinusul BO căzând chiar în centru, avem:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Extremitatea arcului fiind în cadranul al doilea, cosinusul este negativ, şi când creşte arcul, creşte şi el *în valoare absolută;* când arcul este ABC sau π, avem:

$$\cos \pi = OC, \text{ sau } \cos \pi = -1.$$

Extremitatea arcului fiind în cadranul al treilea, cosinusul este tot negativ; însă când creşte arcul, el descreşte *în valoare absolută;* aşà că, dacă arcul este ABCD sau $\frac{3\pi}{2}$, avem:

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Extremitatea arcului fiind în cadranul al patrulea, cosinusul este pozitiv şi când creşte arcul, creşte şi el; când arcul este 2π, avem:

$$\cos 2\pi = +1.$$

In rezumat:

In cadranul întâiu, cosinusul este *pozitiv,* şi variează dela $+1$ pânăla zero.

In cadranul al doilea, cosinusul este *negativ,* şi variează dela zero pânăla -1.

In cadranul al treilea, cosinusul este *negativ,* şi variează dela -1 pânăla zero.

In cadranul al patrulea, cosinusul este *pozitiv,* şi variează dela zero pânăla $+1$.

Toate valorile cosinusului sunt cuprinse, ca şi ale sinusului, între $+1$ şi -1. Orice valoare a cosinusului mai mare decât $+1$ sau mai mică decât -1 este absurdă, şi niciun arc real nu corespunde la o asemenea valoare de cosinus.

18. Dacă arcul, trecând de punctul A, ar percurge cercul de mai multe ori şi în acelaş sens, am vedeà că cosinusul, după fiecare trecere de un cerc întreg, reià aceleaşi valori cu aceleaşi semne, *în mod periodic.*

Prinurmare, *cosinusul este o funcțiune circulară periodică și perioada sa este* 2π.

Acest principiu se exprimă prin formula:

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x,$$

k fiind un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ.

Cotangenta.

19. *Cotangenta* unui arc este *tangenta arcului său complimentar*. Astfel complimentul arcului dat AE (fig. 7) este EB, a cărui tangentă este BI, considerând punctul B ca origină; prinurmare:

$$BI = \operatorname{tg} BE, \text{ sau } BI = \cot AE.$$

Cotangetele se socotesc pe tangeta KI, dusă la începutul celui de al doilea cadran. Origina este punctul B. Cotangentele socotite la dreapta de acest punct, pe partea BI, sunt pozitive, iară cele socotite la stânga, pe partea BK, sunt negative. Astfel, se vede pe figură că avem:

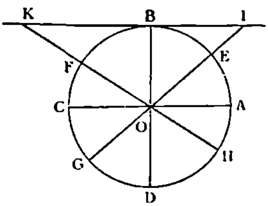


Fig. 7

$$\cot AE = BI \text{ și } \cot AF = BK,$$

și însemnând cu a și b lungimile segmentelor BI și BK vom aveà:

$$\cot AE = +a; \ \cot AF = -b$$

20. Arcul dat fiind zero, avem:

$$\cot 0 = +\infty,$$

căci

$$\cot 0 = \operatorname{tg} \pi = +\infty.$$

Arcul crescând în primul cadran, cotangenta rămâne pozitivă și descrește neîncetat pânăla zero, adică

$$\cot \frac{\pi}{2} = 0.$$

Extremitatea arcului fiind în cadranul al doilea, cotangenta este negativă, și crește *în valoare absolută* dela zero pânăla $-\infty$; această valoare o are când arcul este ABC sau π, adică

$$\cot \pi = -\infty.$$

Când extremitatea arcului trece în cadranul al treilea, de ex. arcul ABG, cotangenta trece deodată dela valorile negative la cele pozitive; însă când crește arcul, ea descrește; așà că, dacă arcul este ABCD sau $\frac{3\pi}{2}$ avem:

$$\cot \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Extremitatea arcului fiind în cadranul al patrulea cotangenta este iarăș negativă, și crește *în valoare absolută* dela zero în sus, pânăcând, arcul fiind 2π, avem:

$$\cot 2\pi = -\infty.$$

In rezumat:

In cadranul întâiu, cotangenta este *pozitivă*, și variează dela $+\infty$ pânăla zero.

In cadranul al doilea, cotangenta este *negativă*, și variează dela zero pânăla $-\infty$.

In cadranul al treilea, cotangenta este *pozitivă*, și variează dela $+\infty$ pânăla zero.

In cadranul al patrulea, cotangenta este *negativă*, și variează dela zero pânăla $-\infty$.

Prinurmare cotangenta, ca și tangenta, este susceptibilă de a primì toate valorile posibile dela $-\infty$ până la $+\infty$, și la orice valoare reală a cotangentei corespunde un arc real.

21. Dacă arcul ar percurge de mai multe ori cercul în acelaș sens, am vedeà că valorile cotangentei revin cu aceleași semne din două în două cadrane *în mod periodic;* așà dar *cotangenta este o funcțiune circu-*

iară periodică cu perioada π, principiu ce se poate exprimà prin formula:

$$\cot(k\pi + x) = \cot x,$$

unde k este iarăş un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ.

Cosecanta.

22. *Cosecanta* unui arc se numeşte *secanta arcului său complimentar.* Aşà secanta arcului BE (fig. 7), complimentar arcului dat AE, este OI, aceasta este dar cosecanta arcului AE, şi se notează:

$$OI = \text{cosec } AE.$$

După figură, vedem că cosecanta se poate încă definì: *distanţa dela centru pânăla extremitatea cotangentei.*

Origina cosecantelor este centrul O.

Cosecanta, ca şi secanta se măsoară tot pe dreapta care trece prin *centrul cercului* şi extremitatea arcului. Am văzut acolo cum se fixează sensul pozitiv pe această dreaptă.

23. Când arcul este zero, extremitatea cotangentei fiind la infinit, avem:

$$\text{cosec } 0 = +\infty.$$

Insă când arcul creşte în primul cadran, cosecanta descreşte, rămânând neîncetat pozitivă; şi când arcul este AB sau $\frac{\pi}{2}$, avem:

$$\text{cosec } \frac{\pi}{2} = OB, \text{ sau cosec } \frac{\pi}{2} = +1.$$

Extremitatea arcului intrând în cadranul al doilea, cosecanta este tot pozitivă, şi creşte neîncetat, până când arcul ajunge a fi ABC sau π; atunci avem:

$$\text{cosec } \pi = +\infty.$$

Extremitatea arcului intrând în cadranul al treilea, cosecanta trece deodată la valorile negative, şi descreşte în *valoare absolută* dela $-\infty$ pânăla -1, când arcul creşte dela π pânăla $\frac{3\pi}{2}$, având:

$$\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Infine, extremitatea arcului fiind în cadranul al patrulea, cosecanta fiind tot negativă, creşte *în valoare absolută* dela -1 pânăla $-\infty$, având această din urmă valoare când arcul este 2π, adică:

$$\operatorname{cosec} 2\pi = -\infty.$$

In rezumat:

In primul cadran, cosecanta este *pozitivă*, şi variează dela $+\infty$ pânăla $+1$.

In al doilea cadran, cosecanta este *pozitivă*, şi variează dela $+1$ pânăla $-\infty$.

In al treilea cadran, cosecanta este *negativă,* şi variează dela $-\infty$ pânăla -1.

In al patrulea cadran, cosecanta este *negativă*, şi variează dela -1 pânăla $-\infty$.

Prinurmare cosecanta, ca şi secanta, primeşte toate valorile posibile dela $-\infty$ pânăla $+\infty$, afară de cele cuprinse între -1 şi $+1$. Orice valoare a cosecantei cuprinsă între -1 şi $+1$ este absurdă, şi niciun arc real nu corespunde la o asemenea valoare a cosecantei.

Presupunând că arcul percurge de mai multe ori cercul în acelaş sens, vedem că cosecanta reià neîncetat aceleaşi valori cu aceleaşi semne, *în mod periodic,* la fiecare interval de un cerc întreg. Prinurmare *cosecanta este o funcţiune circulară periodică, şi perioada sa este un cerc întreg, sau* 2π.

Acest principiu se exprimă prin formula:

$$\operatorname{cosec} (2k\pi + x) = \operatorname{cosec} x,$$

k fiind un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ.

Exerciții. In ipoteza $R = 1$, care este lungimea arcelor de 45^0, $22^0 \frac{1}{2}$, 30^0, 60^0, 135^0, 18^0, 9^0, 1^0?

2. In aceeaş ipoteză, de câte grade sunt arcele, cari au respectiv ca lungimi:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}?$$

3. Se consideră trei arce, cari au aceeaş origină A şi extremităţile respective în cadranele I, II şi III; să se construiască liniile lor trigonometrice.

4. Cari sunt valorile liniilor trigonometrice ale arcelor de 0^0, 90^0, 180^0, 270^0?

5. Să se arate geometriceşte că tang 45^0 1; aplicând teorema lui Pitagora să se găsească sec 45^0. Din considerarea a două triunghiuri asemenea să se găsească sin 45^0 şi cos 45^0.

6. Să se arate geometriceşte că sec $60^0 = 2$; aplicând teorema lui Pitagora să se găsească tang 60^0; din considerarea a două triunghiuri asemenea să se găsească sin 60^0 şi cos 60^0. Să se deducă valorile lui sin 30^0 şi cos 30^0.

Liniile trigonometrice ale arcelor egale şi de semne contrare.

25. Teoremă. *Arcele egale şi de semne contrare au liniile trigonometrice egale şi de semne contrare, afară de cosinus şi secantă, cari sunt şi de acelaş semn.*

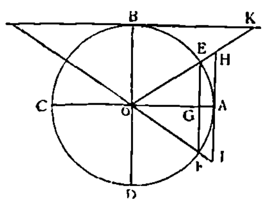


Fig. 8.

Fie arcele AE şi AF, (fig. 8) egale şi de semne contrare (4). Avem:

$$\begin{aligned} \sin AE &= EG, & \sin AF &= FG,\\ \cos AE &= OG, & \cos AF &= OG,\\ \operatorname{tg} AE &= AH, & \operatorname{tg} AE &= AI,\\ \sec AE &= OH, & \sec AF &= OI,\\ \cot AE &= BK, & \cot AF &= BL,\\ \operatorname{cosec} AE &= OK, & \operatorname{cosec} AF &= OL, \end{aligned}$$

Triunghiurile OEG şi OGF sunt egale, căci OE=OF, ca raze; unghiurile EOG şi GOF sunt egale, căci AE=AF; unghiurile EGO şi OGF sunt egale, ca drepte; prin urmare:

$$EG = GF,$$

adică, ţinând seamă de cele spuse la paragraful 7 în privinţa sensului sinusurilor:

$$\sin AE = -\sin AF.$$

Cele două arce AE şi AF au acelaş cosin OG, deci

$$\cos AE = \cos AF.$$

Triunghiurile OHA şi OAI sunt egale, căci OA este comun la amândouă; unghiurile HOA şi AOI sunt egale din date, şi HAO=OAI ca drepte; prinurmare:

$$AH=AI,$$

adică, ţinând seamă de cele spuse la paragraful 10 în privinţa sensului tangentelor:

$$\operatorname{tg} AE = -\operatorname{tg} AF.$$

Din aceleaşi triunghiuri avem:

$$OH = OI, \text{ sau } \sec AE = \sec AF.$$

Semnele ambelor secante sunt aceleaşi (13).

Triunghiurile dreptunghiuri OBK şi OBL sunt egale, căci OB este comun, şi BOK=BOL, din cauză că BOK $=90^0-$KOA, şi BOL$=90^0-$LOC$=90^0-$KOA. Din egalitatea acestor triunghiuri rezultă:

$$BK = BL.$$

Considerând însă semnele (19), avem:

$$\cot AE = -\cot AF.$$

Din egalitatea aceloraşi triunghiuri deducem:

$$OK = OL.$$

adică (22)

$$\text{cosec } AE = -\text{cosec } AF$$

Așà dar, pe baza acestei teoreme, putem pune relațiunile:

$$\sin x = -\sin(-x), \qquad \cot x = -\cot(-x),$$
$$\cos x = \cos(-x), \qquad \sec x = \sec(-x),$$
$$\text{tg } x = -\text{tg}(-x), \qquad \text{cosec } x = -\text{cosec}(-x).$$

Ținând seamă, că liniile trigonometrice sunt funcțiuni periodice, putem scrie următoarele șase relațiuni mai generale:

$$\begin{aligned}
\sin(2k\pi + x) &= -\sin(2k'\pi - x)\\
\cos(2k\pi + x) &= \cos(2k'\pi - x)\\
\text{tg}(k\pi + x) &= -\text{tg}(k'\pi - x)\\
\cot(k\pi + x) &= -\cot(k'\pi - x)\\
\sec(2k\pi + x) &= \sec(2k'\pi - x)\\
\text{cosec}(2k\pi + x) &= -\text{cosec}(2k'\pi - x).
\end{aligned}$$

Exercițiu. Să se demonstreze teorema, considerând arce mai mari de 90^0 în valoare absolută.

Liniile trigonometrice ale arcelor suplimentare.

26. **Teoremă.** *Două arce suplimentare au liniile trigonometrice egale și de semne contrare, afară de sinus și cosecantă, cari sunt și de aceleași semne.*

Fie arcele AE și EFC (fig. 9), astfel că $AE + EFC = \pi$.

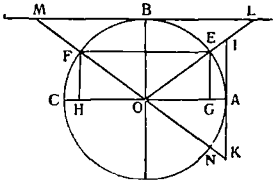


Fig. 9.

Ducând FE paralel cu AC, avem:

$$EFC = EF + FC, \quad AEF = AE + EF,$$
$$\text{și } FC = AE; \text{ deci:}$$

$$EFC = AEF.$$

Așà dar în locul arcelor date AE și EFC, putem considerà arcele AE și AEF.

După figură avem:

sin AE = EG,	sin AEF = FH,
cos AE = OG,	cos AEF = OH,
tg AE = AI,	tg AEF = AK,
sec AE = OI,	sec AEF = OK,
cot AE = BL,	cot AEF = BM,
cosec AE = OL,	cosec AEF = OM.

Triunghiurile dreptunghiuri OEG şi OFH sunt egale, căci OE = OF ca raze, şi unghiurile EOG şi FOH sunt egale, din cauză că EA = FC; prinurmare:

$$EG = FH, \text{ sau } \sin AE = \sin AEF,$$

şi semnele ambelor sinusuri sunt aceleaşi (7).

Din aceleaşi triunghiuri avem:

$$OG = OH,$$

şi considerând sensul ambelor cosinusuri (16),

$$\cos AE = -\cos AEF.$$

Triunghiurile dreptunghiuri OAI şi OAK sunt egale, căci OA este comun, şi unghiurile IOA şi AOK sunt egale, pentrucă AE = FC = AN; aşà dar:

$$AI = AK,$$

şi considerând sensul ambelor tangente (10),

$$\operatorname{tg} AE = -\operatorname{tg} AEF.$$

Din egalitatea aceloraşi triunghiuri rezultă:

$$OI = OK,$$

şi din consideraţia sensului ambelor secante (13),

$$\sec AE = -\sec AEF.$$

Triunghiurile OBL şi OBM sunt egale, căci OB este comun, şi unghiurile BOL şi BOM sunt egale pentrucă BOL$=90^0-$EOA, şi BOM$=90^0-$FOC, iar EOA$=$FOC, prinurmare:

$$BL = BM,$$

şi considerând sensul (19),

$$\cot AE = -\cot AEF.$$

Din egalitatea aceloraşi triunghiuri avem

$$OL = OM, \text{ sau } \operatorname{cosec} AE = \operatorname{cosec} AEF.$$

Semnele sunt aceleaşi la ambele cosecante (22).

Pe baza acestei teoreme putem dar pune relaţiunile:

$$\begin{array}{ll} \sin x = \sin(\pi - x), & \cot x = -\cot(\pi - x), \\ \cos x = -\cos(\pi - x), & \sec x = -\sec(\pi - x), \\ \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x), & \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(\pi - x). \end{array}$$

In mod mai general, observând că

$$2k\pi + \pi - x = (2k+1)\pi - x$$

şi

$$k\pi + \pi - x = (k+1)\pi - x$$

vom aveà formulele:

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi + x) &= \sin[(2k'+1)\pi - x] \\ \cos(2k\pi + x) &= -\cos[(2k'+1)\pi - x] \\ \operatorname{tg}(k\pi + x) &= -\operatorname{tg}[(k'+1)\pi - x] \\ \cot(k\pi + x) &= -\cot[(k'+1)\pi - x] \\ \sec(2k\pi + x) &= -\sec[(2k'+1)\pi - x] \\ \operatorname{cosec}(2k\pi + x) &= \operatorname{cosec}[(2k'+1)\pi - x] \end{aligned}$$

Exerciţiu. Să se demonstreze teorema considerând arcul AE mai mare decât 180^0 dar mai mic de 360^0.

Liniile trigonometrice ale arcelor cari diferă între ele cu un semicerc.

27. Teoremă. *Arcele cari diferă între ele cu un semicerc, au liniile trigonometrice egale şi de semne contrare, afară de tangentă şi cotangentă, cari au şi acelaş semn.*

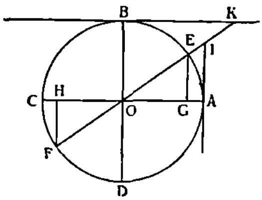


Fig. 10.

Fie arcele AE şi ABCF (fig. 10), astfel că ABCF — AE = ECF = π; avem:

sin AE = EG,	sin ABCF = FH,
cos AE = OG,	cos ABCF = OH,
tg AE = AI,	tg ABCF = AI,
sec AE = OI,	sec ABCF = OI,
cot AE = BK,	cot ABCF = BK,
cosec AE = OK,	cosec ABCF = OK.

Triunghiurile dreptunghiuri OEG şi OHF sunt egale căci OE=OF ca raze şi unghiurile EOG şi HOF sunt egale, ca opuse la vârf; prinurmare:

$$EG = FH,$$

şi luând în consideraţie semnele (7)

$$\sin AE = -\sin ABCF.$$

Din egalitatea aceloraşi triunghiuri, avem :

$$OG = OH,$$

şi din cauza sensului ambelor cosinusuri (16),

$$\cos AE = -\cos ABCF.$$

Tangenta arcului AE este AI, şi a arcului ABCF tot AI; prinurmare (10):

$$\text{tg } AE = \text{tg } ABCF.$$

Cotangenta arcului AE, precum şi a arcului ABCF, este BK; aşà dar (19):

$$\cot AE = \cot ABCF.$$

Secanta arcului AE este OI, care trece prin extremitatea E a arcului, secanta arcului ABCF este tot OI, însă nu trece prin extremitatea F a lui; prinurmare (13):

$$\sec AE = -\sec ABCF.$$

Asemenea OK este cosecanta şi a lui AE, şi a lui ABCF; însă fiindcă trece prin extremitatea primului arc, iar prin a celui de al doilea nu, avem (22):

$$\operatorname{cosec} AE = -\operatorname{cosec} ABCF.$$

Putem dar, pe baza acestei teoreme, să scriem relaţiunile următoare:

$$\begin{aligned} \sin x &= -\sin(\pi + x), & \cot x &= \cot(\pi + x), \\ \cos x &= -\cos(\pi + x), & \sec x &= -\sec(\pi + x), \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(\pi + x), & \operatorname{cosec} x &= -\operatorname{cosec}(\pi + x). \end{aligned}$$

In mod mai general avem relaţiunile:

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi + x) &= -\sin[(2k' + 1)\pi + x] \\ \cos(2k\pi + x) &= -\cos[(2k' + 1)\pi + x] \\ \operatorname{tg}(k\pi + x) &= \operatorname{tg}[(k' + 1)\pi + x] \\ \cot(k\pi + x) &= \cot[(k' + 1)\pi + x] \\ \sec(2k\pi + x) &= -\sec[(2k' + 1)\pi + x] \\ \operatorname{cosec}(2k\pi + x) &= -\operatorname{cosec}[(2k' + 1)\pi + x]. \end{aligned}$$

Reducerea arcelor la primul cadran.

28. Se întâmplă de multe ori să se ceară liniile trigonometrice ale unui arc mai mare decât un cadran, uneori cuprinzând mai multe cercuri. Cu ajutorul teoremelor precedente, putem însă totdeauna găsì un arc mai mic decât un cadran, ale cărui linii trig nometrice să aibă aceleaşi valori absolute ca şi liniile trigonometrice ale arcului dat.

Fie, spre exemplu, a găsì liniile trigonometrice ale arcului de 1953^0. Avem:

$$1953^0 = 5 \times 360^0 + 153^0,$$

prinurmare (9, 12, 15, 18, 21, 24):

$$\sin 1953^0 = \sin 153^0, \qquad \cot 1953^0 = \cot 153^0,$$
$$\cos 1953^0 = \cos 153^0, \qquad \sec 1953^0 = \sec 153^0,$$
$$\operatorname{tg} 1953^0 = \operatorname{tg} 153^0, \qquad \operatorname{cosec} 1953^0 = \operatorname{cosec} 153^0;$$

şi fiindcă $153^0 = 180^0 - 27^0$, avem (26):

$$\begin{aligned}
\sin 1953^0 &= \sin 153^0 = \sin 27^0, \\
\cos 1953^0 &= \cos 153^0 = -\cos 27^0, \\
\operatorname{tg} 1953^0 &= \operatorname{tg} 153^0 = -\operatorname{tg} 27^0, \\
\cot 1953^0 &= \cot 153^0 = -\cot 27^0, \\
\sec 1953^0 &= \sec 153^0 = -\sec 27^0, \\
\operatorname{cosec} 1953^0 &= \operatorname{cosec} 153^0 = \operatorname{cosec} 27^0.
\end{aligned}$$

Fieîncă arcul de 2375^0; avem:

$$2375^0 = 6 \times 360^0 + 215^0$$

şi

$$215^0 = 180^0 + 35^0;$$

prinurmare (27),

$$\begin{aligned}
\sin 2375^0 &= \sin 215^0 = -\sin 35^0, \\
\cos 2375^0 &= \cos 215^0 = -\cos 35^0, \\
\operatorname{tg} 2375^0 &= \operatorname{tg} 215^0 = \operatorname{tg} 35^0, \\
\cot 2375^0 &= \cot 215^0 = \cot 35^0, \\
\sec 2375^0 &= \sec 215^0 = -\sec 35^0, \\
\operatorname{cosec} 2375^0 &= \operatorname{cosec} 215^0 = -\operatorname{cosec} 35^0.
\end{aligned}$$

Fie înfine arcul de 1388^0; avem:

$$1388^0 = 4 \times 360^0 - 52^0$$

aşà dar (25),

$$\begin{aligned}
\sin 1388^0 &= \sin(-52^0) = -\sin 52^0, \\
\cos 1388^0 &= \cos(-52^0) = \cos 52^0, \\
\operatorname{tg} 1388^0 &= \operatorname{tg}(-52^0) = -\operatorname{tg} 52^0, \\
\cot 1388^0 &= \cot(-52^0) = -\cot 52^0, \\
\sec 1388^0 &= \sec(-52^0) = \sec 52^0, \\
\operatorname{cosec} 1388^0 &= \operatorname{cosec}(-52^0) = -\operatorname{cosec} 52^0.
\end{aligned}$$

Exerciții. 1. Să se reducă la primul cadran arcele:

$$1495^0 \quad 780^0 \quad 8560^0 \quad -2350^0.$$

2. Să se demonstreze următoarele relațiuni:

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{tg}(90^0 + x) \quad -\operatorname{cotg} x & \cot(90^0 + x) = -\cot x \\
\sec(90^0 + x) = -\operatorname{cosec} x & \operatorname{cosec}(90^0 + x) \quad \sec x \\
\sin(270^0 - x) = -\cos x & \cos(270^0 + x) \quad \sin x \\
\sin(360^0 - x) = -\sin x & \cos(360^0 - x) = \cos x.
\end{array}$$

Arcele cari corespund la o linie trigonometrică dată.

29. Când ni se dă un arc nu putem aveà decât o singură valoare pentru fiecare linie trigonometrică a sa. Nu este însă tot așà când ni se dă o linie trigonometrică, și se cere să se găsească arcul corespunzător ei. In adevăr, știm că funcțiunile circulare sunt toate periodice: prinurmare la o valoare a unei linii trigonometrice nu corespunde numai un arc, ci o infinitate de arce, cari diferă între dânsele cu câte un multiplu al perioadei.

Să se găsească, spre exemplu, arcul al cărui sinus are valoarea a; fie l un arc al cărui sinus are această valoare. Insă, de oarece sinusul are perioada 2π, nu numai arcul l va aveà sinusul a, ci și arcele $2\pi + l$, $4\pi + l$, $6\pi + l, \ldots$ Prinurmare găsim pentru arcul căutat o infinitate de valori cari împlinesc cererea. Acelaș lucru se întâmplă și pentru toate celelalte linii trigonometrice.

De ordinar însă, când se dă o linie trigonometrică, dintre toate arcele cari îi corespund nu se iau decât cele cuprinse între 0^0 și 360^0, și cu modul acesta se reduce numărul arcelor cari răspund la cerere.

30. Exemplul I. *Dându-se sinusul unui arc, să se găsească arcul.* — Dacă sinusul dat a este pozitiv, pe

raza OB (fig. 11) luăm OI $= a$, şi prin I ducem FE paralel cu CA; arcul căutat este AE sau AF; căci dacă din E şi F lăsăm EL şi FM perpendiculare pe AC,

EL = sin AE, şi FM = sin AF;

însă EL = FM = OI $= a$; prinurmare AE şi AF sunt înadevăr arcele al căror sinus este $+a$.

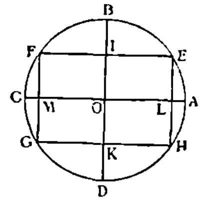


Fig. 11.

Dacă sinusul dat a este negativ, adică, dacă avem $a = -a'$, unde a' este un număr pozitiv, luăm pe raza OD o lungime OK $= a'$ şi ducând prin K linia GH paralelă cu AC, arcul căutat este ABG sau ABCDH, căci MG = OK = sin ABG, şi LH = OK = sin ABCDH şi deci sin ABG = sin ABCDH $= -a'$.

31. Exemplul II. — *Dându-se cosecanta unui arc, să se găsească arcul.* Dacă cosecanta dată a, este pozitivă, din centrul O (fig. 12) cu o rază egală cu a, descriem un arc care taie linia cotangentelor în punctele L şi M; unind LO şi MO, arcul căutat este AE sau AF.

Dacă cosecanta dată a este negativă, prelungind pe LO până în G şi pe MO până în H, arcul căutat este ABCG sau ABCDH.

32. R (*). Se vede, că dacă sinusul sau cosecanta sunt pozitive, la acelaş sinus sau aceeaş cosecantă corespund două arce cu extremităţile în I şi al II-lea cadran:

$$l \text{ şi } \pi - l$$

iar dacă sunt negative, corespund două arce cu extremităţile în cadranele III şi IV:

$$l \text{ şi } 2\pi - (l - \pi) = 3\pi - l.$$

Ţinând seamă, că sinusul şi cosecanta sunt funcţiuni periodice şi perioada este 2π, vom aveà, că toate

(*) Paragrafele notate cu R sunt destinate numai pentru cursul real.

arcele corespunzătoare unui sinus sau cosecantă date sunt cuprinse în formulele:

$$x_1 = 2k\pi + l$$
$$x_2 = (2k+1)\pi - l.$$

Din aceste formule se deduce:

$$x_1 - l = 2k\pi$$
$$x_2 + l = (2k+1)\pi$$

adică: *pentruca două arce să aibă acelaş sinus sau aceeaş cosecantă trebue şi este de ajuns ca diferenţa lor să fie egală cu un număr par de semicercuri sau ca suma lor să fie egală cu un număr impar de semicercuri.*

Aplicaţie. — *Să se găsească arcul x care verifică ecuaţia:*

$$\sin 3x = \sin (30^0 + x).$$

Vom aveà

$$3x - (30^0 + x) = 2k\, 180^0$$

deunde

$$x = k\,180^0 + 15^0$$

sau

$$3x + (30^0 + x) = (2k+1)\, 180^0$$

deunde

$$x = \frac{(2k+1)}{4}\, 180^0 - \frac{15^0}{2}.$$

33. Exemplul III. — *Dându-se cosinusul unui arc, să se găsească arcul.* Construcţiunea este analoagă cu cea dată pentru sinus. Dacă cosinusul a este positiv, luăm pe raza OA (fig. 11), lungimea $\mathrm{OL} = a$, şi ducând prin L pe EH paralel cu BD, arcul căutat este AE sau ABCDH. Dacă cosinusul dat a este negativ adică, dacă avem $a = -a'$, unde a' este un număr pozitiv, luăm pe OC lungimea $\mathrm{OM} = a'$ şi prin M ducem FG paralel la BD; arcul căutat este ABF sau ABCG.

34. Exemplul IV. — *Dându-se secanta unui arc, să se găsească arcul.* Dacă secanta a este pozitivă, din centrul O (fig. 12) cu o rază egală cu a, descriem un arc care tae linia tangentelor în punctele I şi K; unind IO şi KO, arcul căutat este AE sau ABCDH; în adevăr, secantele acestor două arce sunt $OI = + a$ şi $OK = + a$.

Dacă secanta a erà negativă, construcţiunea erà aceeaş; însă prelungind pe IO până în G şi pe KO până în F, arcul căutat ar fi fost AF sau ABCG.

35. R. Se vede, că dacă cosinul sau secanta sunt pozitive, la un acelaş cosinus sau aceeaş secantă, corespund două arce cu extremităţile în primul şi al IV cadran:

$$l \text{ şi } 2\pi - l$$

iar dacă sunt negative, corespund două arce cu extremităţile în al II şi al III cadran:

$$l \text{ şi } 2\pi - l$$

Toate arcele corespunzătoare unui cosin sau secante date sunt cuprinse în formulele:

$$x_1 = 2k\pi + l$$
$$x_2 = 2k\pi - l$$

deunde:

$$x_1 - l = 2k\pi$$
$$x_2 + l = 2k\pi$$

adică: *pentruca două arce să aibă acelaş cosin sau aceeaş cosecantă trebue şi e de ajuns ca suma sau diferenţa arcelor să fie egală cu un număr par de semicercuri.*

36. Exemplul V.— *Dându-se tangenta unui arc, să se găsească arcul.* Dacă tangenta dată a este pozitivă, pe partea pozitivă AI (fig. 12) a liniei tangentelor, luăm $AI = a$ şi prin I şi O ducem dreapta IG; arcul căutat este AE sau ABCG, căci dacă vom construì tan-

gentele acestor două arce, vom găsì că ambele au drept tangentă pe $AI = a$.

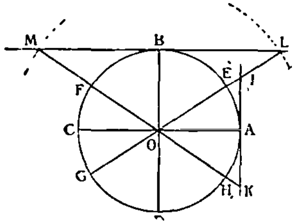


Fig. 12.

Dacă a este negativ, adică dacă avem $a = -a'$, unde a' este un număr pozitiv, luăm pe partea negativă AK a liniei tangentelor distanţa $AK = a'$, şi ducând dreapta KF prin centru, arcul căutat este AF sau ABCDH, căci amândouă aceste arce au drept tangentă pe AK.

37. **Exemplul VI.**— *Dându-se cotangenta unui arc să se găsească arcul.* Cotangenta a fiind pozitivă, luăm pe partea pozitivă BL (fig. 12) a liniei cotangentelor segmentul $BL = a$ şi ducând LG, arcul căutat este AE sau ABCG. — Dacă cotangenta dată este negativă, adică dacă avem $a = -a'$, unde a' este un număr pozitiv, luând pe partea negativă $BM = a'$, ducem MH; atunci arcul căutat este AF sau ABCDH.

38. R. Tangenta sau cotangenta fiind sau pozitive sau negative, la o aceeaş tangentă sau cotangentă corespund câte două arce

$$l \text{ şi } \pi + l.$$

Toate arcele corespunzătoare unei tangente sau cotangente date sunt cuprinse în formulele:

$$x_1 = k\pi + l$$
$$x_2 = (k + 1)\pi + l$$

cari în fond fac una singură

$$x = k\pi + l$$

deunde

$$x - l = k\pi$$

adică: *pentruca două arce să aibă aceeaş tangentă sau aceeaş cotangentă trebue şi este de ajuns ca diferenţa lor să fie egală cu un număr întreg de semicercuri.*

Exerciţii. 1. Să se rezolve următoarele ecuaţiuni:

$$\sin x - 0 \qquad \sin x \quad 1 \qquad \cos x = -1$$
$$\operatorname{tg} x = 0 \qquad \operatorname{tg} x = 1 \qquad \sec x = \quad 2$$
$$\sin x \quad \cos x \qquad \sin 5\,x \quad \sin(3\,x - 10^0)$$
$$\operatorname{tg} x = \cot x \qquad \cos 5\,x = \cos(3\,x - 10^0)$$
$$\operatorname{tg} 5\,x \quad \operatorname{tg}(3\,x - 10^0) \quad \operatorname{tg}(2\,\pi - x) = \cot(\pi - x)$$
$$\cot 5\,x = \cot(3\,x - 10^0) \qquad \cot x \quad \operatorname{tg}(3\,\pi - x)$$
$$\sec 5\,x \quad \sec(\pi - x) \qquad \operatorname{cosec} x = \sec(2\,x - \pi)$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad 4 \sin^2 x = 1$$

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0$$
$$2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0$$
$$\sin^2 x - \sin x \quad 0$$
$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

I. Pentru ultimele şase ecuaţiuni se va ţine seamă de exerciţiile 5 şi 6 dela începutul acestui capitol.

2. Se dă $\sin(a+b) = \frac{1}{2}$; $\cos(a-b) = \frac{1}{2}$. Să se găsească a şi b.

Funcţiuni circulare directe şi inverse.

39 R. Am considerat expresiuni de forma:

$$\sin x = a, \qquad \cos x = a, \text{ etc.}$$

Mai general putem pune

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \text{ etc.}$$

unde la fiecare valoare a arcului x, corespund pentru sinusul arcului, pentru cosinul lui etc. valori y unice pentru fiecare linie şi bine determinate. Aşà dar y este o funcţiune bine determinată de x.

Se obicinueşte să se scrie şi expresiuni de forma

$$x = \text{arc} \sin y, \qquad x = \text{arc} \cos y, \text{ etc.},$$

cari se citesc: x este arcul al cărui sinus e y, sau x este arcul al cărui cosin e y, etc.

La o valoare dată lui y corespunde o infinitate de valori pentru x; deci x nu este o funcţie bine determinată de y, adică expresiunile

$$\text{arc}\ \sin y,\ \text{arc}\ \cos y,\ \text{etc.}$$

nu sunt complet determinate. Se obicinueşte ca pentru expresiunile:

$$\text{arc}\ \sin y,\ \text{arc}\ \text{tg}\, y,\ \text{arc}\ \cot y,\ \text{arc}\ \text{cosec}\, y$$

să se considere totdeauna valorile cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$, şi pentru expresiunile:

$$\text{arc}\ \cos y\ \text{şi arc}\ \sec y$$

numai valorile cuprinse între 0 şi π.

Cu această restricţiune aceste şase expresiuni pot fi considerate ca funcţiuni de y şi au primit numele de *funcţiuni circulare inverse*, pecând liniile trigonometrice se numesc *funcţiuni circulare directe*.

CAPITOLUL II.

FORMULE FUNDAMENTALE

Relațiuni între liniile trigonometrice ale aceluiaș arc.

40. Fie arcul $AC = a$ un arc mai mic de 90^0 (fig. 13); liniile sale trigonometrice sunt:

$CD = \sin a$, $\quad BF = \cot a$,
$OD = \cos a$, $\quad OE = \sec a$,
$AE = \mathrm{tg}\, a$, $\quad OF = \mathrm{cosec}\, a$.

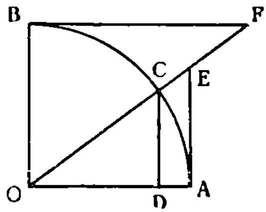


Fig. 13.

Triunghiul OCD fiind dreptunghiu în D, dă:

$$\overline{CD}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OC}^2,$$

sau

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \qquad (1)$$

căci OC este raza. Prinurmare *suma pătratelor sinusului și cosinusului unui arc este egală cu unitatea.*

Din (1) putem deduce încă:

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a, \text{ sau } \sin a = \pm \sqrt{1 - \cos^2 a}, \qquad (a)$$
$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a, \text{ sau } \cos a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 a} \qquad (b)$$

Triunghiurile OCD şi OEA sunt asemenea, căci au unghiul O comun, şi pe celelalte egale ca corespondente, prinurmare:

$$\frac{EA}{CD}=\frac{OA}{OD} \quad \text{sau} \quad \frac{\operatorname{tg} a}{\sin a}=\frac{1}{\cos a}$$

şi înmulţind ambii membrii cu sin a,

$$\operatorname{tg} a=\frac{\sin a}{\cos a} \tag{2}$$

adică *tangenta unui arc este egală cu raportul sinusului către cosinusul acelui arc.*

Din asemănarea aceloraşi triunghiuri avem:

$$\frac{OE}{OC}=\frac{OA}{OD} \quad \text{sau} \quad \frac{\sec a}{1}=\frac{1}{\cos a}$$

deunde:

$$\cos a \sec a=1. \tag{3}$$

Din (3) putem încă scoate, împărţind cu cos a:

$$\sec a=\frac{1}{\cos a} \tag{c}$$

şi împărţind cu sec a:

$$\cos a=\frac{1}{\sec a} \tag{d}$$

Din aceste două formule vedem că *cosinusul şi secanta unui arc sunt inverse una alteia.*

Triunghiurile OBF şi OCD sunt asemenea, căci unghiurile din B şi D sunt egale ca drepte, şi cele din F şi O ca alterne-interne, prinurmare:

$$\frac{BF}{OD}=\frac{OB}{CD} \quad \text{sau} \quad \frac{\cot a}{\cos a}=\frac{1}{\sin a},$$

deunde, înmulţind ambii membrii cu cos a,

$$\cot a=\frac{\cos a}{\sin a} \tag{4}$$

adică *cotangenta unui arc este egală cu raportul cosinusului către sinusul acelui arc.*

Din asemănarea acelorași triunghiuri avem încă:

$$\frac{OF}{OC}=\frac{OB}{CD} \quad \text{sau} \quad \frac{\operatorname{cosec} a}{1}=\frac{1}{\sin a}$$

deunde

$$\sin a \operatorname{cosec} a = 1 \tag{5}$$

Din (5) putem încă deduce, dacă împărțim cu cosec a:

$$\sin a=\frac{1}{\operatorname{cosec} a}, \tag{e}$$

iar împărțind cu sin a,

$$\operatorname{cosec} a=\frac{1}{\sin a}. \tag{f}$$

Din aceste două formule se vede că *sinusul și cosecanta unui arc sunt inverse una alteia.*

Inmulțind (2) și (4) membru cu membru, avem:

$$\operatorname{tg} a \cot a=\frac{\sin a \cos a}{\cos a \sin a}=1,$$

din care putem scoate următoarele două formule:

$$\operatorname{tg} a=\frac{1}{\cot a}, \tag{g}$$

$$\cot a=\frac{1}{\operatorname{tg} a}. \tag{h}$$

Prinurmare *tangenta și cotangenta unui arc sunt inverse una alteia.*

Formulele (1), (2), (3), (4), (5), împreună cu cele ce am derivat pânăacum dintr'însele, sunt de un uz foarte des în trigonometrie, din care cauză se și numesc *formule trigonometrice fundamentale.*

Rămâne să arătăm, că aceste relațiuni sunt adevărate oricare ar fi arcul a. Am văzut, că orice arc se poate reduce la primul cadran, adică se poate găsì un arc cuprins între 0^0 şi 90^0, ale cărui linii trigonometrice, abstracţie făcând de semn, să fie egale cu ale arcului dat. Prinurmare, dacă avem în vedere numai valorile absolute ale liniilor trigonometrice ale arcului dat, relaţiunile stabilite sunt adevărate. Să ţinem însă seamă şi de semne.

Relaţia (1) cuprinde sinusul şi cosinusul ridicate la patrat, deci este adevărată în toate cazurile.

Dacă arcul are extremitatea în cadranul al doilea sau al patrulea, tangenta lui este negativă, sinusul şi cosinusul sunt de semne contrare: egalitatea (2) este adevărată şi în acest caz. Dacă arcul are extremitatea în cadranul al treilea, tangenta lui este pozitivă, sinusul şi cosinusul amândouă negative: egalitatea (3) este deci generală.

Să ne ocupăm de egalitatea (c). Dacă arcul are extremitatea în cadranul al doilea sau al treilea, secanta lui, ca şi cosinusul, sunt negative: relaţia (c) este adevărată şi în acest caz. Ea este generală, căci e adevărată şi în cazul când arcul are extremitatea în cadranul al patrulea, căci atunci secanta şi cosinusul arcului sunt pozitive.

Tot astfel se arată că şi celelalte formule sunt generale.

Exerciţii. 1. Din relaţia (1) să se afle că $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. In relaţiile (a) şi (b), când vom luà semnul $+$ înaintea radicalului şi când semnul $-$?

3. Să se înlocuiască printr'un singur termen expresiunile:

$$1 - \cos^2 x, \qquad 1 - \sin^2 x, \qquad 1 + \tang^2 x$$

4. Să se verifice egalităţile:

$$\sec^2 a \operatorname{cosec}^2 a = \operatorname{tg}^2 a + \cot^2 a + 2$$
$$\sin^2 a \operatorname{tg} a + \cos^2 a \cot a + 2 \sin a \cos a = \operatorname{tg} a + \cot a.$$

Formule corelative.

41. Sub acest nume se înțelege *o serie de formule prin cari exprimăm o linie trigonometrică oarecare a unui arc în funcțiune de o altă linie trigonometrică a acelui arc.* Aceste formule sunt în număr de treizeci, și se deduc din formulele dejà aflate:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}, \tag{2}$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \tag{3}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}, \tag{4}$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}. \tag{5}$$

Dacă una din liniile trigonometrice ale arcului este cunoscută, celelalte cinci vor puteà să se afle rezolvând cele cinci ecuațiuni de sus. Prinurmare problema se poate deslegà totdeauna.

1⁰. *Dându-se sinusul unui arc, să se găsească celelalte linii trigonometrice ale arcului.*

Valoarea cosinusului se scoate din (1); avem:

$$\cos a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

Substituind această valoare a cosinusului în (2), (3) (4), vom aveà valoarea tangentei, secantei și cotangentei în funcțiune de sinus:

$$\operatorname{tg} a = \pm \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}, \qquad \sec a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}, \qquad \cot a = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a}$$

și după (5),

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}.$$

Exercițiu. Să se recunoască pe o figură, că la un sinus dat, corespunde o singură valoare pentru cosecantă și câte două valori egale și de semne contrare pentru celelalte linii trigonometrice.

2⁰. *Dându-se cosinusul, să se afle celelalte linii trigonometrice.*

Din (1) avem:

$$\sin a = \pm\sqrt{1-\cos^2 a},$$

expresiune a sinusului în funcțiune de cosinus. Substituind această valoare în (2), (4), (5), vom aveà și expresiunea tangentei, cotangentei și cosecantei în funcțiune de cosinus:

$$\operatorname{tg} a = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}, \qquad \cot a = \pm\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}, \qquad \cos a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$$

și după (3),

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}.$$

3⁰. *Dându-se tangenta, să se afle celelalte linii trigonometrice.*

Ecuațiunea (2) dă:

$$\sin a = \cos a \operatorname{tg} a, \tag{A}$$

sau

$$\sin^2 a = \cos^2 a \operatorname{tg}^2 a.$$

Punem această valoare în (1), și avem:

$$\cos^2 a \operatorname{tg}^2 a + \cos^2 a = 1, \text{ sau } \cos^2 a\,(1+\operatorname{tg}^2 a) = 1,$$

deunde:

$$\cos a = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$$

Punând această valoare în (A), vom aveà valoarea lui sin a:

$$\sin a = \pm\frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} \tag{B}$$

Din (3) avem:

$$\sec a = \frac{1}{\cos a};$$

substituind în locul lui $\cos a$ valoarea sa,

$$\sec a = \pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 a}.$$

Ecuaţiunea (5) dă:

$$\mathrm{cosec}\, a = \frac{1}{\sin a},$$

şi după (B)

$$\mathrm{cosec}\, a = \pm\frac{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 a}}{\mathrm{tg}\, a}$$

Infine ecuaţiunea (h) (10), dă:

$$\cot a = \frac{1}{\mathrm{tg}\, a}.$$

4°. *Dându-se cotangenta, să se afle celelalte linii trigonometrice.*

Din (4) avem:

$$\cos a = \sin a \cot a, \tag{C}$$

sau

$$\cos^2 a = \sin^2 a \cot^2 a.$$

Punând această valoare în (1), avem:

$\sin^2 a + \sin^2 a \cot^2 a = 1$, sau $\sin^2 a (1 + \cot^2 a) = 1$,

deunde:

$$\sin a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 a}} \tag{D}$$

Această valoare pusă în (C), dă:

$$\cos a = \pm \frac{\cot a}{\sqrt{1 + \cot^2 a}},$$

şi fiindcă: $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, avem:

$$\sec a = \pm \frac{\sqrt{1+\cot^2 a}}{\cot a}.$$

Din (5) avem:

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a},$$

şi punând în loc de sin a valoarea dată prin (D)

$$\operatorname{cosec} a = \pm \sqrt{1+\cot^2 a}$$

Infine ecuaţiunea (g) (40), dă:

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\cot a}$$

5°. *Dându-se secanta, să se găsească celelalte linii trigonometrice.*

Ecuaţiunea (b) (40), dă:

$$\cos a = \frac{1}{\sec a}.$$

Punând această valoare în (1), avem succesiv:

$$\sin^2 a + \frac{1}{\sec^2 a} = 1,$$

$$\sec^2 a \sin^2 a + 1 = \sec^2 a,$$

$$\sin^2 a = \frac{\sec^2 a - 1}{\sec^2 a},$$

$$\sin a = \pm \frac{\sqrt{\sec^2 a - 1}}{\sec a}$$

Punând aceste valori ale lui sin a şi cos a în (2), (4) şi (5) şi făcând reducerile, avem:

$$\operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\sec^2 a - 1}, \qquad \cot a = \pm \frac{1}{\sqrt{\sec^2 a - 1}}, \qquad \operatorname{cosec} a = \pm \frac{\sec a}{\sqrt{\sec^2 a - 1}}$$

6°. *Dându-se cosecanta, să se găsească celelalte linii trigonometrice.*

După (e) (40), avem:

$$\sin a = \frac{1}{\operatorname{cosec} a}.$$

Punând această valoare în (1), (2), (3), (4), vom aveà după nişte calcule analoage cu cele dela cazul trecut:

$$\cos a = \pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}}{\operatorname{cosec} a}, \qquad \operatorname{tg} a = \pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}},$$

$$\cot a = \pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}, \qquad \sec a = \pm \frac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}}$$

Tabelul alăturat cuprinde toate aceste rezultate. In prima coloană verticală la stânga, se află înscris numele liniei trigonometrice ce trebue să se exprime în funcţiune de alta; şi în prima coloană orizontală, este numele liniei în funcţiune de care trebue să se exprime linia considerată. La întâlnirea coloanelor respective ale ambelor linii trigonometrice se află expresiunea căutată.

	$\sin a$	$\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\cot a$	$\sec a$	$\operatorname{cosec} a$
$\sin a$	$\sin a$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$	$+\dfrac{\sqrt{\sec^2 a-1}}{\sec a}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec} a}$
$\cos a$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$	$\cos a$	$+\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\dfrac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$	$\dfrac{1}{\sec a}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}{\operatorname{cosec} a}$
$\operatorname{tg} a$	$\pm\dfrac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$	$\operatorname{tg} a$	$\dfrac{1}{\cot a}$	$\pm\sqrt{\sec^3 a-1}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\cot a$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$	$\pm\dfrac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$	$\cot a$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}$
$\sec a$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\dfrac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\cot^2 a}}{\cot a}$	$\sec a$	$\pm\dfrac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\operatorname{cosec} a$	$\dfrac{1}{\sin a}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 a}$	$\pm\dfrac{\sec a}{\sqrt{\sec^3 a-1}}$	$\operatorname{cosec} a$

Exerciții. 1. Se dă:

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze celelalte linii trigonometrice.
Avem:

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \pm\sqrt{3},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ccsec} x = \frac{1}{\sin x} = 2.$$

2. Se dă:

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}.$$

Să se calculeze celelalte linii trigonometrice.
Avem:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$$

sau

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{9}{16}.$$

Aplicând o proprietate a proporțiilor, avem:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{9 + 16}{16}$$

și

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{9 + 16}{9}$$

sau ținând seamă de relațiunea (1):

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{25}{16}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{25}{9}$$

deunde

$$\cos x = + \frac{4}{5}; \quad \sin x = \pm \frac{3}{5}.$$

Apoi

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{4}{3},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \pm \frac{5}{4},$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \pm \frac{5}{3}.$$

3. Se dă:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Să se calculeze celelalte linii trigonometrice.

4. Se dă:

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

Să se calculeze celelalte linii trigonometrice.

5. Se dă:

$$\cot x = \frac{3}{4}.$$

Să se calculeze celelalte linii trigonometrice.

6. Se dă:

$$\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

Să se calculeze celelalte linii trigonometrice.

7. Să se rezolve ecuațiunile:

a) $$2 \sin^2 x - 5 \cos x - 4 = 0.$$

Avem succesiv:

$$2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x - 4 = 0$$
$$2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$$

deunde:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ și } \cos = -2.$$

A doua valoare nu poate fi admisă, rămâne deci numai prima căreia îi corespund arcele :

$$x_1 = 120^0 \text{ şi } x_2 = 240^0,$$

sau în general:

$$x_1 = k.360^0 + 120^0 \text{ şi } x_2 = k.360^0 + 240^0.$$

b) $$2\sin^2 x = 3\cos x$$

c) $$\cot x = 2\cos x$$

d) $$\sin^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0$$

e) $$\operatorname{tg} x + \cot x = 2$$

f) $$\sin x + \cos x = 1$$

g) $$2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0$$

h) $$\sin^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0$$

I. — Vom căută să avem o singură linie trigonometrică în fiecare ecuaţie.

Despre proiecţiuni.

42. Se numeşte *proiecţiunea* unui punct A (fig. 14) pe o dreaptă XY, piciorul A′ al perpendicularei lăsate din punctul A pe dreapta XY. Această dreaptă se chiamă *axă de proiecţiune.* Proiecţiunea unei linii oarecare AB pe XY se numeşte porţiunea A′B′ a lui XY, cuprinsă între proiecţiunile A′ şi B′ ale extremităţilor A şi B ale liniei AB.

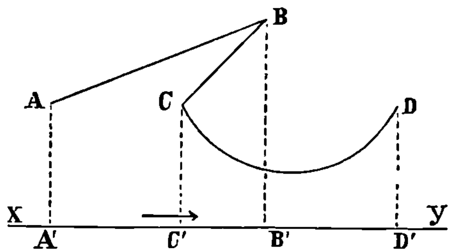


Fig. 14.

Să ne închipuim un mobil care se mişcă pe linia AB dela A spre B. Dacă considerăm în fiecare moment proiecţiunea mobilului aceluia pe axa XY, vedem că, pecând mobilul depe AB merge din A pânăîn B, proiecţiunea lui depe XY merge din A' pânăîn B'. Se cuvine a se consideră proiecţiunea A'B' ca *pozitivă*, dacă mobilul care o descrie se mişcă pe axa XY într'un sens oarecare determinat, spre exemplu în sensul săgeţii, şi ca *negativă*, în cazul contrar. Cu modul acesta, dacă presupunem că linia AB a fost străbătută de mobilul său în sensul dela A spre B, proiecţiunea sa A'B' este pozitivă; dacă însă mobilul s'ar fi mişcat din B spre A, proiecţiunea B'A' ar fi fost negativă, aşà că $A'B' = -B'A'$.

Proiecţiunile pot fi dar considerate că sunt cantităţi algebrice, susceptibile de a aveà semnul *plus* sau *minus*.

43. **Teorema I.** *Proiecţiunea pe o axă a unei linii formate din mai multe altele este egală cu suma algebrică a proiecţiunilor părţilor sale.*

Fie, spre exemplu, linia ABCD (fig. 14), formată din liniile AB, BC şi CD. Este evident că proiecţiunea A'D' a liniei totale se poate consideră ca formată în modul următor: proiecţiunea A' a mers mai întâiu în sensul pozitiv pânăîn B' descriind proiecţiunea liniei AB; pe urmă a revenit din B' în C', în sensul negativ, descriind proiecţiunea lui BC; înfine a mers din C' în D', în sensul pozitiv descriind proiecţiunea lui CD. Prinurmare putem scrie:

$$A'D' = A'B' - B'C' + C'D';$$

însă de vreme ce B'C' este în sine negativ, din cauza modului cum a fost descris, ecuaţiunea aceasta se poate scrie şi aşà:

$$A'D' = A'B' + B'C' + C'D',$$

în cari diferiţii termeni sunt consideraţi că sunt cantităţi algebrice.

44. Teorema II. *Proiecțiunea pe o axă a unui contur poligonul închis este zero.*

Fie conturul poligonal închis ABCDEF (fig. 15). Dacă considerăm un mobil care străbate acest contur, mergând din A în B, din B în C ....., proiecția pe XY a acestui mobil va merge din A′ în B′, din B′ în C′..., și când mobilul va terminà de străbătut dreapta FA și va ajunge în A, proiecția sa va ajunge și ea în A′, punctul său de plecare: prin urmare distanța între punctul de plecare și punctul de ajungere al proiecțiunii este zero; ceace demonstrează teorema.

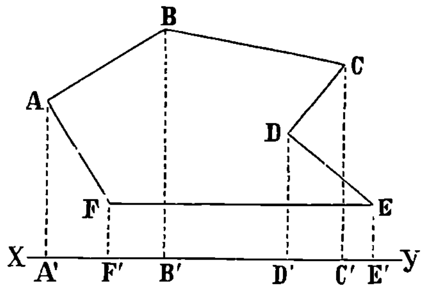


Fig. 15.

Corolar. *Proiecțiunea pe o axă a unei drepte care închide un contur poligonal este egală cu proiecțiunea acestui cont ır poligonal.*

După teorema II, avem (fig. 15):

$$\text{pr. } AB + \text{pr. } BC + \text{pr. } CD + \text{pr. } DE + \text{pr. } EF + \text{pr. } FA = 0,$$

deunde

$$-\text{pr. } FA = \text{pr. } AB + \text{pr. } BC + \text{pr } CD + \text{pr. } DE + \text{pr. } EF;$$

însă deoarece pr. FA = — pr. AF (42), această ecuație se poate scrie:

$$\text{pr. } AF = \text{pr. } AB + \text{pr. } BC + \text{pr. } CD + \text{pr. } DE + \text{pr. } EF.$$

45. Teorema III. *Proiecțiunea pe o axă a unei drepte este egală cu produsul lungimii acestei drepte prin*

cosinusul unghiului ce face ea cu axa de proiecţiune şi care se numeşte *unghiu de proiecţiune.*

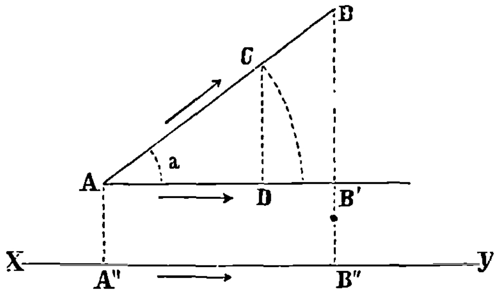


Fig. 16

Fie AB (fig. 16) dreapta dată şi XY axa de proiecţiune.

Proiecţiunea lui AB pe XY este A″B″; însă dacă ducem dreapta AB′ paralelă cu XY, avem:

$$AB' = A''B'',$$

ca parelele cuprinse între paralele; aşà că

$$AB' = \text{pr. } AB.$$

Din A, cu o rază AC egală cu 1, să descriem un arc şi din C să lăsăm perpendiculara CD pe AB′; după definiţiunea (16), avem:

$$AD = \cos\ BAB' = \cos a.$$

Din triunghiurile BAB′ şi CAD, avem:

$$\frac{AB'}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

sau:

$$\frac{\text{pr. } AB}{\cos\ a} = \frac{AB}{1},$$

deunde

$$\text{pr. } AB = AB \cos a,$$

ceeace demonstrează teorema.

46. Pentru a arătà că această teoremă este cu totul generală, e necesar a se precizà bine ce să înţelege prin mărimea unghiului de proiecţiune.

Am spus (42) că lungimile măsurate pe XY se consideră ca pozitive sau negative, dupăcum sunt socotite în sensul săgeţii, sau în sensul opus. Tot asemenea dacă dreapta AB este considerată ca descrisă de un mobil care merge din A în B, sensul AB se chiamă *sensul pozitiv* pecând BA este *sensul negativ*. Astfel fiind, *se consideră ca unghiu de proiecţiune, unghiul format de partea pozitivă a lui XY cu partea pozitivă a lui AB.*

Dacă definim astfel unghiul de proiecţiune, e uşor de văzut că formula (1) este cu totul generală, adică convine oricum ar fi aşezate dreptele AB şi XY una în raport cu alta.

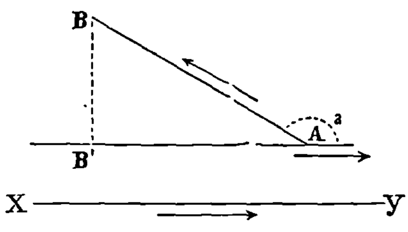


Fig. 17

In fig 17, repeţind raţionamentul de mai sus, vom găsì:

$$AB' = AB \cos BAB'.$$

Insă după sensul cum sunt socotite mărimile în figură, proiecţiunea AB' este negativă, iar unghiul de proiecţiune este a, care este suplimentar cu BAB' deci

$\cos a = -\cos BAB'$ (26).

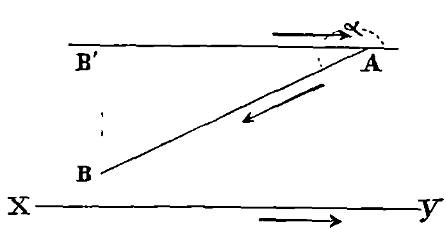


Fig. 18

Ecuaţia precedentă devine dar:

$$-AB' = -AB \cos a$$

care este chiar ecuaţia (1).

In fig. 18, unghiul a diferă de BAB' cu 180^0 aşà că avem iarăş:

$$\cos BAB' = -\cos a$$

prinurmare şi acì formula (1) este aplicabilă întocmai.

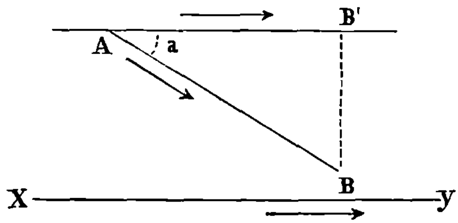


Fig. 19

Infine în fig. 19, proiecţiunea AB′ este pozitivă; unghiul a e negativ, fiindcă e socotit dela dreapta AB′ în jos; însă cosinusul său este egal cu cosinusul unghiului pozitiv, (25), şi prinurmare:

$$AB' = AB \cos BAB' = AB \cos a.$$

Formula (1) este dar cu totul generală.

Adunarea arcelor.

47. *Sinus şi cosinus.* Ne propunem a găsì expresiunea sinusului şi cosinusului sumei a două arce, cunoscând sinusul şi consinusul arcelor simple.

Fie $AB = a$ şi $BC = b$ (fig. 20) cele două arce date. Avem, după figură.

$$AC = a + b.$$

Ducem razele OB şi OC, şi perpendiculara CD pe OB. Avem după definiţiuni, (7, 16):

$$CD = \sin b, \quad OD = \cos b.$$

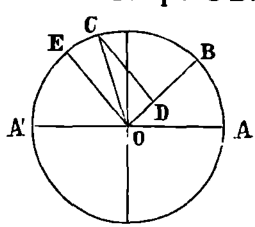


Fig. 20

Să proiectăm pe A′A conturul poligonul OCD: avem (44, *corolar*):

$$\text{pr. } OC. = \text{pr. } OD + \text{pr. } DC \text{ (a)}.$$

Insă (45)

$$\text{pr. } OC = OC \cos COA,$$
$$\text{pr. } OD = OD \cos DOA,$$
$$\text{pr. } DC = DC \cos (CD, OA).$$

Acì avem:

$$OC = 1, \text{ ca rază (4)}; \ OD = \cos b, \ DC = \sin b,$$
$$COA = a + b, \ DOA = a.$$

Pentru a evaluà şi unghiul (CD, OA), ducem raza OE paralelă cu DC; atunci

$$(CD, OA) = EOA = EOB + BOA = \frac{\pi}{2} + a.$$

Substituind succesiv toate aceste valori în (a) găsim:

$$\cos(a+b) = \cos b \cos a + \sin b \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$$

Insă

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(-a) = -\sin a \ (16, 25);$$

deci

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \qquad (1)$$

48. Formula (1) este cu totul generală, de oarece a fost stabilită cu ajutorul unei teoreme a cărei generalitate a fost stabilită (46); prinurmare ea subsistă oricari ar fi valorile unghiurilor a şi b. De aceea putem înlocuì într'însa pe b prin $-b$, ceeace dă:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b),$$

sau (25):

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \qquad (2)$$

Tot asemenea, în (1) şi (2) putem înlocuì pe a prin $\frac{\pi}{2} - a$, ceeace dă:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b,$$

sau:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$
$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

ori înfine:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b, \qquad (3)$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \qquad (4)$$

Formulele (1), (2), (3), (4) dau sinusul şi cosinusul sumei sau diferenţei a două arce în funcţie de sinusele şi cosinusele arcelor simple. Ele sunt cu totul generale.

49. Formulele (1) şi (4) ne dau sinusul şi cosinusul sumei a două arce; însă este lesne a le generalizà şi pentru mai multe arce.

Dacă în (1) şi (4) înlocuim pe b prin $c+d$, acele formule devin:

$$\sin(a + c + d) = \sin a \cos(c + d) + \sin(c + d) \cos a,$$
$$\cos(a + c + d) = \cos a \cos(c + d) - \sin a \sin(c + d),$$

sau:

$$\sin(a + c + d) = \sin a (\cos c \cos d - \sin c \sin d) + \cos a (\sin c \cos d + \sin d \cos c)$$
$$\cos(a + c + d) = \cos a (\cos c \cos d - \sin c \sin d) - \sin a (\sin c \cos d + \sin d \cos c),$$

deunde:

$$\sin(a + c + d) = \sin a \cos c \cos d + \sin c \cos a \cos d + \sin d \cos a \cos c - \sin a \sin c \sin d,$$
$$\cos(a + c + d) = \cos a \cos c \cos d - \cos a \sin c \sin d - \sin a \sin c \cos d - \sin a \sin d \cos c$$

Cu ajutorul acestora putem găsì sinusul şi cosinusul sumei a patru arce, şi aşà mai departe.

50. **Tangenta şi cotangenta.** Pentru a găsì tangenta sumei a două arce, vom recurge la formula (2) (40):

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)};$$

înlocuind pe sin $(a+b)$ şi cos $(a+b)$ cu valorile lor date prin (1) şi (4):

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

şi împărţind ambii termeni ai fracţiunii cu cos a cos b,

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\sin b\cos a}{\cos b\cos a}}{1-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$

sau

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b} \qquad (5)$$

Dacă în această formulă înlocuim pe b cu $-b$, avem (25):

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b} \qquad (6)$$

Pentru a găsì cotangeta sumei a două arce, vom aveà asemenea:

$$\cot(a+b)=\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\sin a\cos b+\sin b\cos a}$$

şi împărţind ambii termeni cu sin a sin b,

$$\cot(a+b)=\frac{\dfrac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b}-1}{\dfrac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b}+\dfrac{\sin b\cos a}{\sin a\sin b}},$$

sau

$$\cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}. \qquad (7)$$

Dacă acì înlocuim pe b cu $-b$ şi schimbăm semnele ambilor termeni ai fracţiunii, avem:

$$\cot(a-b)=\frac{1+\cot a\cot b}{\cot b-\cot a}. \qquad (8)$$

51. Prin formulele (5) şi (7) putem găsì tangenta şi cotangenta unei sume de mai mult decât două arce. Inadevăr, punând în aceste formule în loc de b pe $c+d$, avem:

$$\operatorname{tg}(a+c+d)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(c+d)}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(c+d)},$$

$$\cot(a+c+d)=\frac{\cot a \cot(c+d)-1}{\cot(c+d)+\cot a},$$

şi înlocuind pe $\operatorname{tg}(c+d)$ şi pe $\cot(c+d)$ cu valorile lor,

$$\operatorname{tg}(a+c+d)=\frac{\operatorname{tg} a+\dfrac{\operatorname{tg} c+\operatorname{tg} d}{1-\operatorname{tg} c \operatorname{tg} d}}{1-\operatorname{tg} a\dfrac{\operatorname{tg} c+\operatorname{tg} d}{1-\operatorname{tg} c \operatorname{tg} d}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} c+\operatorname{tg} d-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} c \operatorname{tg} d}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} d-\operatorname{tg} c \operatorname{tg} d};$$

$$\cot(a+c+d)=\frac{\cot a\dfrac{\cot c \cot d-1}{\cot c+\cot d}-1}{\dfrac{\cot c \cot d-1}{\cot c+\cot d}+\cot a}$$

$$=\frac{\cot a \cot c \cot d-\cot a-\cot c-\cot d}{\cot a \cot c+\cot a \cot d+\cot c \cot d-1}.$$

Exerciţii. Să se verifice identităţile:

1) $\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$

2) $\sin(a+b)\sin(a-b)+\sin(b+c)\sin(b-c)+\sin(c+a)\sin(c-a)=0$

3) $\cos(a+b)\sin(a-b)+\cos(b+c)\sin(b-c)+\cos(c+a)\sin(c-a)=0$

4) $\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0$

5) $\cos a\sin(b-c)+\cos b\sin(c-a)+\cos c\sin(a-b)=0$

6) $\sin(b+c-a)+\sin(a+c-b)+\sin(a+b-c)$
$-\sin(a+b+c)=4\sin a\sin b\sin c$

I. In dezvoltarea lui $\sin(a+b+c)$ se va înlocui succesiv a cu $-a$; b cu $-b$; c cu $-c$.

7) Se dă $\sin 30^0=\frac{1}{2}$, $\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, să se calculeze $\sin 75^0$.

8) Să se verifice identitatea:

$$\mathrm{tg}^2 a - \mathrm{tg}^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}.$$

9) $\cos a + \cos(120^0 - a) + \cos(120^0 + a) = 0.$

10) Să se verifice că:

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

I. Fie

$$a = \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2}, \text{ deci } \sin a = \frac{1}{2}$$

$$b = \operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \text{deci } \sin b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Relaţia de demonstrat devine

$$a + b = \frac{\pi}{4} \text{ sau } \sin(a+b) = \sin\frac{\pi}{4}$$

sau

$$\sin(a+b) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

11) Să se verifice în mod analog că:

$$a)\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$b)\ \operatorname{arc\,sin}\frac{3}{5} + \operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$c)\ \operatorname{arc\,cot}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,cot}\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$d)\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$e)\ \operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$f)\ \operatorname{arc\,tg}\frac{x\cos a}{1 - x\sin a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x - \sin a}{\cos a} = a$$

Inmulţirea arcelor.

52. Considerăm formulele:

$$\left.\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a, \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Făcând $a = b$, ele devin:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \tag{1}$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a. \tag{2}$$

Aceste formule ne dau sinusul şi cosinusul arcului îndoit $2a$, în funcţiune de sinusul şi cosinusul arcului simplu a.

Dacă în (1) şi (2) înlocuim pe rând pe $\sin a$ şi pe $\cos a$ cu valorile lor date prin relaţiunile (a) şi (b) dela § 40, avem alte formule, destul de des întrebuinţate:

$$\sin 2a = \pm 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a} = \pm 2 \cos a \sqrt{1 - \cos^2 a}, \tag{1'}$$
$$\left.\begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1, \\ \cos 2a &= 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

53 R. Din formulele (1′) şi (2′) se vede că pentru $\sin 2a$ găsim două valori egale şi de semne contrare, pecând pentru $\cos 2a$ găsim o singură valoare. Dacă atât $\sin a$ sau $\cos a$ cât şi arcul a sunt date, vom şti precis dacă $\sin 2a$ este pozitiv sau negativ şi deci vom şti ce semn să luăm înaintea formulei care ni-l dă.

Să vedem dece pentru $\sin 2a$ corespund două valori egale şi de semne contrare, pecând pentru $\cos 2a$ corespunde o singură valoare.

Să presupunem de ex. că cunoaştem:

$$\sin a = m,$$

fără a cunoaşte arcul a. Ştim că arcul este dat de formulele:

$$a_1 = 2k\pi + l, \qquad a_2 = (2k + 1)\pi - l,$$

unde l este un arc determinat, care are sinus pe m.

Prinurmare $\sin 2a$ este dat de formulele:

$$\sin 2a = \sin(4k\pi + 2l) = \sin 2l$$
$$\sin 2a = \sin[(4k + 2)\pi - 2l] = \sin(-2l) = -\sin 2l,$$

găsim deci pentru $\sin 2a$ valoarea dublă $\pm \sin 2l$.

Cos $2a$ e dat de formulele:

$$\cos 2a = \cos(4k\pi + 2l) = \cos 2l$$
$$\cos 2a = \cos[(4k+2)\pi - 2l] = \cos 2l,$$

Pentru $\cos 2a$ găsim deci o singură valoare $\cos 2l$.

54. Dacă în formulele:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b}, \quad \cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}, \quad (B)$$

facem asemenea $a = b$, avem:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}. \quad (3)$$

55. In formula (A) înlocuind pe b cu $2a$, avem:

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a,$$

şi substituind în locul lui $\sin 2a$ şi $\cos 2a$ valorile lor date prin (1) şi (2),

$$\sin 3a = \sin a(\cos^2 a - \sin^2 a) + 2\sin a \cos a \cos a$$
$$= 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$
$$\cos 3a = \cos a(\cos^2 a - \sin^2 a) - 2\sin a \sin a \cos a$$
$$= \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a.$$

Punând în prima relaţiune $1 - \sin^2 a$ în loc de $\cos^2 a$, şi în a doua $1 - \cos^2 a$ în loc de $\sin^2 a$, şi reducând,

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

Făcând şi în formulele (B) pe $b = 2a$, vom aveà asemenea:

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a} = \frac{\operatorname{tg} a + \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}{1 - \operatorname{tg} a \dfrac{2\operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a},$$

$$\cot 3a = \frac{\cot a \cot 2a - 1}{\cot a + \cot 2a} = \frac{\cot a \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a} - 1}{\cot a + \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}} = \frac{\cot^3 a - 3\cot a}{3\cot^2 a - 1},$$

56. Putem găsì formule generale cari să ne dea sinusul și cosinusul multiplului unui arc prin orice număr, întreg și pozitiv. Pentru aceasta considerăm relațiunile cunoscute:

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a,\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a.\\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b.\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b.
\end{aligned}$$

Adunând respectiv aceste relațiuni, avem:

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a \cos b,\\
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b.
\end{aligned}$$

Punem $a = mb$; atunci $a + b = (m+1)b$, $a - b = (m-1)b$, și ecuațiunile devin:

$$\left.\begin{aligned}
\sin(m+1)b &= 2\sin mb \cos b - \sin(m-1)b,\\
\cos(m+1)b &= 2\cos mb \cos b - \cos(m-1)b.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Aceste formule, numite formulele lui *Thoma Simpson*, ne dau mijlocul de a calculà sinusul și cosinusul multiplului unui arc prin un număr întreg și pozitiv $m + 1$, când se cunosc sinusele și cosinusele multiplilor acelui arc prin numerele m și $m - 1$.

Exemplu. Fie $b = 8^0\,13'\,32''$, $m = 5$; după (4) avem:

$$\begin{aligned}
\sin[(5+1)\times 8^0\,13'32''] &= 2\sin[5\times 8^0\,13'32'']\cos 8^0\,13'32''\\
&\quad - \sin[(5-1)\times 8^0\,13'32''],\\
\cos[(5+1)\times 8^0\,13'32''] &= 2\cos[5\times 8^0\,13'32'']\cos 8^0\,13'32''\\
&\quad - \cos[(5-1)\times 8^0\,13'32''],
\end{aligned}$$

și efectuând înmulțirile,

$$\begin{aligned}
\sin 49^0\,21'12'' &= 2\sin 41^0\,7'40''\cos 8^0\,13'32'' - \sin 32^0\,54'8'',\\
\cos 49^0\,21'12'' &= 2\cos 41^0\,7'40''\cos 8^0\,13'32'' - \cos 32^0\,54'8''.
\end{aligned}$$

Exerciţii. 1. Se dă $\sin x = \frac{3}{4}$, să se calculeze liniile trigonometrice ale arcelor $2x$ şi $3x$.

2. Se dă $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, să se calculeze liniile trigonometrice ale arcelor $2x$ şi $4x$.

3. Se dă $\sin x = \sqrt{2} - 1$, să se calculeze liniile trigonometrice ale arcului $2x$.

4. Să se verifice identităţile:

$$a)\ \operatorname{tg}(45^0 + a) - \operatorname{tg}(45^0 - a) = 2 \operatorname{tg} 2a$$

$$b)\ \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} = \operatorname{tg} 2a + \sec 2a$$

$$c)\ \sin 3a \operatorname{cosec} a - \cos 3a \sec a = 2$$

$$d)\ 2 \sin^2 a \sin^2 b + 2 \cos^2 a \cos^2 b = 1 + \cos 2a \cos 2b$$

$$e)\ \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(60^0 + a) + \operatorname{tg}(120^0 + a) = 3 \operatorname{tg} 3a.$$

5. Se dă $\operatorname{tg} x = 3$, să se calculeze $\sin 4x$.

Diviziunea arcelor.

57 R. Adunând relaţiunile (40, 50),

$$1 = \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

obţinem relaţiunea:

$$1 + \sin a = \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$= \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right)^2,$$

deunde

$$\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin a} \qquad (1)$$

Dacă, din contră, scădem una din alta relaţiunile de sus, avem:

$$1 - \sin a = \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} - 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$= \left(\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} \right)^2$$

deunde

$$\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin a} \qquad (2)$$

Adunând relațiunile (1) și (2) și împărțind cu 2 avem:

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 + \sin a}}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - \sin a}}{2}. \qquad (3)$$

Scăzând relațiunile (1) și (2) una din alta și împărțind cu 2, avem:

$$\cos \frac{a}{2} = + \frac{\sqrt{1 + \sin a}}{2} \mp \frac{\sqrt{1 - \sin a}}{2}. \qquad (4)$$

Formulele (3) și (4) ne dau *sinusul și cosinusul arcului pe jumătate în funcțiune de sinusul arcului întreg.*

In formulele (3) și (4) semnele superioare sau inferioare se corespund, adică, dacă pentru $\sin \frac{a}{2}$ luăm înnaintea primului radical semnul superior $+$ și înnaintea celui d'al doilea semnul inferior $-$, va trebuì să luăm pentru $\cos \frac{a}{2}$ tot semnul superior $+$ înnaintea primului radical și tot semnul inferior $+$ înnaintea celui d'al doilea.

Se vede astfel, că atât pentru $\sin \frac{a}{2}$ cât și pentru $\cos \frac{a}{2}$ corespund câte patru valori și că cele patru valori ale lui $\sin \frac{a}{2}$ sunt egale cu cele patru valori ale lui $\cos \frac{a}{2}$.

Exercițiu. Să se explice dece cele patru valori ale lui $\sin\frac{a}{2}$ sunt egale cu cele patru valori ale lui $\cos\frac{a}{2}$.

58. Considerăm relațiunile (52)

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1.$$

Rezolvându-le în raport cu $\sin\frac{a}{2}$ și cu $\cos\frac{a}{2}$ avem:

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \qquad (5)$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \qquad (6)$$

Impărțind (5) prin (6) membru cu membru, obținem

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}$$

sau, fiindcă în membrul al doilea se împart numai cantitățile de sub radical,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \qquad (7)$$

Formulele (5), (6) și (7) ne dau *sinusul, cosinusul și tangenta arcului pe jumătate în funcțiune de cosinusul arcului întreg.*

Observare. Dacă presupunem că $a < 180^0$, atunci $\frac{a}{2} < 90^0$, și prinurmare $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ și $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ sunt pozitive; deci, în ipoteza că $a < 180^0$, nu vom luà decât semnul

$+$ al radicalului din membrul al doilea al relaţiunilor (5), (6) şi (7) şi atunci aceste relaţiuni se scriu:

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\quad \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

59. Dacă în relaţiunea

$$\operatorname{tg} a=\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$$

ne scăpăm de numitor, avem:

$$\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} a\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}=2\operatorname{tg}\frac{a}{2},$$

au:

$$\operatorname{tg} a\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}+2\operatorname{tg}\frac{a}{2}-\operatorname{tg} a=0,$$

deunde, divisând peste tot cu $\operatorname{tg} a$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}+\frac{2}{\operatorname{tg} a}\operatorname{tg}\frac{a}{2}-1=0, \tag{8}$$

ecuaţiune de gradul al doilea în raport cu $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ care ne dă *valoarea lui* $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ *în funcţiune* de $\operatorname{tg} a$:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=-\frac{1}{\operatorname{tg} a}\pm\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 a}+1}=-\frac{1}{\operatorname{tg} a}\pm\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg}^2 a}}$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}.$$

In acelaş mod, din

$$\cot a = \frac{\cot^2 \frac{a}{2} - 1}{2 \cot \frac{a}{2}},$$

tragem:

$$2 \cot a \cot \frac{a}{2} = \cot^2 \frac{a}{2} - 1,$$

deunde

$$\cot^2 \frac{a}{2} - 2 \cot a \cot \frac{a}{2} - 1 = 0, \qquad (9)$$

ecuaţiune din care scoatem:

$$\cot \frac{a}{2} = \cot a \pm \sqrt{\cot^2 a + 1}.$$

Această relaţiune ne dă *valoarea cotangentei arcului pe jumătate în funcţiune de valoarea cotangentei arcului întreg.*

Din ecuaţiunile (8) şi (9) se vede, că produsul rădăcinilor fiind -1, cele două valori găsite pentru $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ sau $\cot \frac{a}{2}$ sunt de semne contrare. Cunoscând deci $\operatorname{tg} a$ şi arcul a ştim dacă $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ este pozitivă sau negativă şi ştim deci care din cele două valori trebue luată.

Acelaş lucru şi pentru $\cot \frac{a}{2}$.

Exerciţii. 1. Se dă $\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, să se calculeze liniile trigonometrice ale arcului de $22^0 1/_2$.

2. Se dă $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, să se calculeze liniile trigonometrice ale arcelor de 15^0 şi $7^0 1/_2$.

3. Se dă $\cos x = \frac{1}{9}$, să se calculeze $\sin \frac{a}{2}$ şi $\cos \frac{a}{2}$ arcul a fiind cuprins între 270^0 şi 360^0.

4. Se dă $\operatorname{tg} x = -\frac{24}{7}$; să se găsească $\sin\frac{x}{2}$ şi $\cos\frac{x}{2}$.

5. Se dă $\cos 4x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; să se calculeze $\cos 2x$ şi $\cos x$.

6. Să se verifice identităţile:

a) $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4\cos^2\frac{a-b}{2}$

b) $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 4\sin^2\frac{a-b}{2}$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \frac{\sin a}{\sqrt{1-\cos a}}$

Formule calculabile prin logaritmi.

60. Pentru înlesnirea calculelor, este bine totdeauna pe cât se poate, a înlocuì sumele şi diferinţele ce figurează în expresiunile algebrice şi trigonometrice, prin produse şi câturi pentrucă aceste din urmă, dupăcum ştim, se pot calculà prin logaritmi, pecând cele dintâiu nu.

Am găsit dejà (58), (5) şi (6):

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}, \qquad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}.$$

Insă putem găsì şi alte expresiuni foarte însemnate calculabile prin logaritmi.

Considerăm relaţiunile:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Adunând mai întâiu aceste două egalităţi, şi apoi scăzându-le membru cu membru, obţinem relaţiunile următoare:

$$\left.\begin{aligned} \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\sin b \cos a. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Punem:

$$a + b = p, \quad a - b = q \qquad \text{(a)}$$

Aceste două ecuaţiuni, mai întâiu adunate şi apoi scăzute, şi pe urmă împărţite cu 2, dau:

$$a = \frac{p+q}{2}, \qquad b = \frac{p-q}{2} \tag{b}$$

Valorile date de (a) şi (b) le substituim în (A), cari devin atunci:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \tag{1}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}. \tag{2}$$

Ecuaţiunea (1) exprimă că *suma sinusurilor a două arce este egală cu de două ori sinusul semisumei arcelor înmulţit prin cosinusul semidiferenţei lor.*

Ecuaţiunea (2) arată că *diferenţa sinusurilor a două arce este egală cu de două ori sinusul semidiferenţei arcelor înmulţit prin cosinusul semisumei lor.*

61. Relaţiunile

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

mai întâiu adunate şi apoi scăzute una din alta, dau:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b,$$
$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b,$$

şi făcând şi acì substituirile indicate de ecuaţiunile (a) şi (b),

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \tag{3}$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \tag{4}$$

Ecuaţiunea (3) exprimă că *suma cosinusurilor a două arce este egală cu de două ori cosinusul semisumei arcelor înmulţit prin cosinusul semidiferenţei lor.*

Ecuaţiunea (4) arată că *diferenţa cosinusurilor a două* *arce este egală cu de două ori sinusul semisumii arcelor înmulțit prin sinusul semidiferenței lor.*

62. Divizând una cu alta relațiunile (1), (2), (3) și (4) două câte două, obținem o serie de alte formule calculabile prin logaritmi:

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}=\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}\times\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}.$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}=\operatorname{tg}\frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p-q}{2}$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}=\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2}$$

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}.$$

63. Iacă o formulă însemnată, care se întrebuințează uneori în calcule.

Inmulţim una cu alta egalităţile:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

şi obţinem:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a.$$

Inlocuind în această egalitate mai întâiu pe $\cos^2 a$ şi $\cos^2 b$ cu $1-\sin^2 a$ şi $1-\sin^2 b$, şi apoi pe $\sin^2 a$ şi $\sin^2 b$ cu $1-\cos^2 a$ şi $1-\cos^2 b$, dobândim relaţiile:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\sin^2 a)$$
$$\sin(a+b)\sin(a-b) = (1-\cos^2 a)\cos^2 b - (1-\cos^2 b)\cos^2 a.$$

Efectuând înmulţirile din membrul al doilea şi făcând toate reducerile, ajungem la relaţiile:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b,$$
$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

64. Putem face calculabile prin logaritmi şi suma sau diferenţa a două tangente. Inadevăr:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

In acelaş mod avem:

$$\cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \sin b + \cos b \sin a}{\sin a \sin b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \sin b - \cos b \sin a}{\sin a \sin b} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$$

65. Să facem calculabile prin logaritmi suma sau diferenţa a două secante; avem:

$$\sec a + \sec b = \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos b} = \frac{\cos a + \cos b}{\cos a \cos b}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos a \cos b}$$

$$\sec a - \sec b = \frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\cos a \cos b}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}}{\cos a \cos b}$$

Asemenea :

$$\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} b = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin b} = \frac{\sin b + \sin a}{\sin a \sin b}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\sin a \sin b}$$

$$\operatorname{cosec} a - \operatorname{cosec} b = \frac{1}{\sin a} - \frac{1}{\sin b} = \frac{\sin b - \sin a}{\sin a \sin b}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{b-a}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{\sin a \sin b}.$$

66. Pentru a face calculabilă prin logaritmi expresiunea $\sin a + \cos b$, observăm că $\cos b = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ şi atunci:

$$\sin a + \cos b = \sin a + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

$$= 2 \sin \frac{a + \frac{\pi}{2} - b}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - b - a}{2}$$

sau

$$\sin a + \cos b = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2}\right).$$

Asemenea

$$\sin a - \cos b = \sin a - \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

$$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - b - a}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - b + a}{2}.$$

sau

$$\sin a - \cos b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2}\right).$$

67. Foarte adesea este necesar a se transformà expresiunile $1 - \sin a$ şi $1 + \sin a$. Pentru aceasta:

$$1 - \sin a = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right),$$

$$1 + \sin a = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right),$$

având în vedere formulele aflate (5) şi (6) (58).

Divizând una cu alta relaţiunile aflate şi extrăgând rădăcina pătrată, găsim:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}.$$

68. Expresiunea

$$1 + \operatorname{tg} a = 1 + \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \sin a}{\cos a}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\cos a}.$$

Asemenea:

$$1 - \operatorname{tg} a = 1 - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos a - \sin a}{\cos a}$$

$$=\frac{\cos a - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos a}$$

$$=\frac{2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\cos a};$$

şi fiindcă

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right).$$

avem:

$$1 - \operatorname{tg} a = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{\cos a}.$$

69. Uneori este necesar a transformà expresiunea $\sin a + \sin b + \sin c$, în care $a + b + c = \pi$.

Avem mai întâiu: (50)

$$\sin b + \sin c = 2 \sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{b-c}{2}. \qquad \text{(a)}$$

Insă din relaţiunea $a + b + c = \pi$, deducem:

$a = \pi - (b + c)$, şi prinurmare (26, 54)

$$\sin a = \sin (b + c) = 2 \sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{b+c}{2}.$$

Adăogând această ecuaţiune la (a),

$$\sin a + \sin b + \sin c = 2 \sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{b+c}{2} + 2 \sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{b-c}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{b+c}{2}\left(\cos \frac{b+c}{2} + \cos \frac{b-c}{2}\right).$$

Insă (61)

$$\cos \frac{b+c}{2} + \cos \frac{b-c}{2} = 2 \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2};$$

aşà dar

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$$

Pelângă acestea, din $a + b + c = \pi$ avem:

$$\frac{b+c}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2},$$

şi prinurmare $\sin \frac{b+c}{2} = \cos \frac{a}{2}$, deci relaţiunea din urmă devine:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}. \qquad \text{(b)}$$

70. Fie încă de transformat expresiunea $\sin a + \sin b - \sin c$ în care $a + b + c = \pi$. Vom avea, ca şi mai sus:

$$\sin b - \sin c = 2 \sin \frac{b-c}{2} \cos \frac{b+c}{2},$$

$$\sin a = \sin (b + c) = 2 \sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{b+c}{2},$$

adunând,

$$\sin a + \sin b - \sin c = 2 \cos \frac{b+c}{2} \left(\sin \frac{b+c}{2} + \sin \frac{b-c}{2} \right)$$

$$= 4 \cos \frac{b+c}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$$

sau

$$\sin a + \sin b - \sin c = 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}. \qquad \text{(c)}$$

71. Să facem calculabilă prin logaritmi expresiunea $\cot \frac{a}{2} + \cot \frac{b}{2} + \cot \frac{c}{2}$ în care $a + b + c = \pi$. Avem (64):

$$\cot \frac{b}{2} + \cot \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{b+c}{2}}{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}},$$

şi fiindcă $\frac{b+c}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}$,

$$\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

Insă

$$\cot\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}};$$

adunând,

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}+\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}.$$

Insă, după condiţiunea pusă, avem:

$$\sin\frac{a}{2}=\cos\frac{b+c}{2}=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2};$$

atunci

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}},$$

sau înfine,

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}.$$

O demonstraţiune identică ne va da, pentru $a+b+c=\pi$, că

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

Exerciţii. Să se facă calculabile prin logaritmi expresiunile:

1. $\sin 27^0+\sin 35^0$
2. $\sin 14^0 20'+\cos 15^0 15'$
3. $1+\sin 38^0 40'$
4. $\operatorname{tg} 27^0 40'+\operatorname{tg} 35^0 20'$
5. $1+\operatorname{tg} 42^0 8'$
6. $\cot 42^0 8'-\operatorname{tg} 42^0 8'$
7. $\sec a+\operatorname{cosec} b$
8. $1+\sin a+\cos a$
9. $1+\cos a+\cos 2a$
10. $\dfrac{\sin^3 a-\sin^3 b}{(\cos a+\cos b)^3}$
11. $\dfrac{\sin a+\cos b}{\sin a-\cos b}$

Metode generale pentru a face expresiunile calculabile prin logaritmi.

72. Pânăacum nu am urmat nicio regulă fixă în operaţiunile ce am făcut pentru a transformà expresiunile, ci am căutat numai a profità de forma lor particulară pentru a simplificà, pecât se poate, calculele. Sunt însă şi metode generale pentru a face această transformare.

Fie binomul A + B, în care cantităţile A şi B au orice fel de valori vom voì, însă pozitive. Punând pe A ca factor comun, vom aveà:

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right). \qquad (a)$$

Punem

$$\frac{B}{A}=\operatorname{tg}^2\varphi, \qquad (b)$$

φ fiind un unghiu ajutător oarecare; şi putem totdeauna găsì un unghiu φ care să satisfacă ecuaţiunea (b), căci ştim că tangenta unui arc poate să aibă toate valorile posibile. Substituind această valoare în (a)

$$A + B = A(1 + tg^2 \varphi) = A \sec^2 \varphi = \frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

Unghiul φ fiind determinat prin relaţiunea (b), expresiunea $\frac{A}{\cos^2\varphi}$, calculabilă prin logaritmi, va fi şi ea determinată.

73. Luăm binomul $A - B$, în care A şi B sunt pozitive însă $A > B$. Punând iarăş pe A ca factor comun,

$$A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right). \qquad \text{(c)}$$

Fiindcă $A > B$, $\frac{B}{A} < 1$; prinurmare putem pune:

$$\frac{B}{A} = \cos^2 \varphi, \qquad \text{(d)}$$

şi această relaţiune ne va da totdeauna o valoare reală pentru φ. Punând în (c) valoarea lui $\frac{B}{A}$ dată de (d) acea expresiune se face:

$$A - B = A(1 - \cos^2\varphi) = A \sin^2 \varphi.$$

Dacă în $A - B$ presupunem că $A < B$, avem:

$$A - B = -(B - A) = -B\left(1 - \frac{A}{B}\right),$$

şi punând iarăş $\frac{A}{B} = \cos^2 \varphi$,

$$A - B = -B(1 - \cos^2\varphi) = -B \sin^2 \varphi.$$

74. Fie binomul

$$m \sin a + n \cos a,$$

în care a este un unghiu oarecare, m şi n nişte monoame oarecari. Punând pe m ca factor comun,

$$m \sin a + n \cos a = m\left(\sin a + \frac{n}{m} \cos a\right)$$

Dacă luăm $tg\, \varphi = \frac{n}{m}$, avem:

$$m\sin a + n\cos a = m(\sin a + \operatorname{tg}\varphi\cos a) = m\left(\sin a + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos a\right)$$

$$= m\,\frac{\sin a\cos\varphi + \sin\varphi\cos a}{\cos\varphi},$$

sau înfine,

$$m\sin a + n\cos a = \frac{m\sin(\varphi + a)}{\cos\varphi}.$$

Asemenea am fi avut şi:

$$m\sin a - n\sin a = \frac{m\sin(\varphi - a)}{\cos\varphi}.$$

75. Binomul $A \pm B\operatorname{tg} a = B\left(\frac{A}{B} + \operatorname{tg} a\right)$ devine, dacă punem $\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\varphi$:

$$A \pm B\operatorname{tg} a = B(\operatorname{tg}\varphi \pm \operatorname{tg} a) = B\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \pm \frac{\sin a}{\cos a}\right)$$

$$= B\,\frac{\sin(\varphi + a)}{\cos\varphi\cos a}.$$

Asemenea se transformă şi $A \pm B\cot a$.

76. Fie încă expresiunea $m \pm n\sin a$, în care m şi n sunt nişte cantităţi oarecari, însă nu cuprind nicio linie trigonometrică; atunci

$$m \pm n\sin a = \frac{m}{\cos a}\cos a \pm n\sin a = n\left(\frac{m}{n\cos a}\cos a \pm \sin a\right);$$

punând $\frac{m}{n\cos a} = \operatorname{tg}\varphi$ obţinem:

$$m \pm n\sin a = n(\operatorname{tg}\varphi\cos a \pm \sin a)$$

$$= n\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos a \pm \sin a\right) = \frac{n(\sin\varphi\cos a \pm \sin a\cos\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{n\sin(\varphi \pm a)}{\cos\varphi}.$$

77. Pentru a reduce în un monom un polinom $a+b+c+d+\ldots$, reducem mai întâi cei doi termeni $a+b$ în unul singur m; apoi reducem pe m şi c în un termen n; pe n şi d în un termen p, şi aşà mai departe.

Exemple. 1°. Să se facă calculabilă prin logaritmi formula

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Punând ca factor comun pe $\sin b \cos A$, avem;

$$\cos a = \sin b \cos A \left(\frac{\cot b}{\cos A} \cos c + \sin c\right),$$

şi luând $\dfrac{\cot b}{\cos A} = \operatorname{tg} \varphi$,

$$\cos a = \sin b \cos A (\operatorname{tg} \varphi \cos c + \sin c)$$

$$= \sin b \cos A \frac{\sin \varphi \cos c + \sin c \cos \varphi}{\cos \varphi},$$

deci

$$\cos a = \sin b \cos A \frac{\sin(\varphi - c)}{\cos \varphi}.$$

2°. Să se facă calculabilă prin logaritmi ecuaţiunea

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Punem pe $\cot A$ factor comun:

$$\cot a \sin b = \cot A \left(\frac{\cos b}{\cot A} \cos C + \sin C\right)$$

şi luând $\dfrac{\cos b}{\cot A} = \operatorname{tg} \varphi$, avem:

$$\cot a \sin b = \cot A (\operatorname{tg} \varphi \cos C + \sin C)$$

$$= \cot A \frac{\sin \varphi \cos C + \cos \varphi \sin C}{\cos \varphi},$$

deunde

$$\cot a \sin b = \cot A \frac{\sin(\varphi + C)}{\cos \varphi}.$$

3°. Să transformăm ecuaţiunea

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C.$$

Această ecuaţiune este identică cu

$$\sin c \cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin C} \sin C - \sin a \cos b \cos C,$$

şi punând ca factor comun pe $\sin a \cos b$,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b \left(\frac{\cot a \operatorname{tg} b}{\sin C} \sin C - \cos C \right)$$

şi punând $\frac{\cot a \operatorname{tg} b}{\sin C} = \cot \varphi$,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b \, (\cot \varphi \sin C - \cos C)$$

$$= \sin a \cos b \frac{\cos \varphi \sin C - \sin \varphi \cos C}{\sin \varphi},$$

sau, înfine,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b \frac{\sin (C - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

78. Regulele pe cari le-am dat pentru a face o expresiune calculabilă prin logaritmi, de multe ori nu se pot aplicà când expresiunea are oarecari forme particulare. Am dat (60—71) mai multe exemple de acestea. Iacă încă o expresiune foarte însemnată, care se poate face calculabilă prin logaritmi nu după metoda generală:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Adăogând 1 la ambele membre, avem:

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}.$$

şi scăzând 1 din ambele membre ale acestei din urmă ecuaţiuni,

$$\cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} - 1.$$

Punem $\operatorname{tg}\varphi = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

atunci

$$\cos A = \operatorname{tg}\varphi - 1$$

şi fiindcă $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$,

$$\cos A = \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi}$$

căci

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Valorile liniilor trigonometrice a câtorva arce.

79. Să găsim valorile liniilor trigonometrice ale arcului AE de 30⁰.

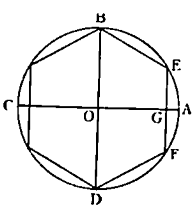


Fig 20.

Latura EF a unui exagon regulat înscris subîntinde un arc EAF de 60^0; raza OA, perpendiculară pe această latură, împarte arcul EAF în două părţi, EA şi AF, fiecare de câte 30^0; asemenea EG = GF. Insă EF = OE = 1; prinurmare $EG = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

Găsim cos 30⁰ prin relaţia

$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - \sin^2 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Impărţind expresiunea lui sin 30° cu a lui cos 30° avem:

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

80. Fie arcul AB = 45° (fig. 21); sin 45° este jumătate din latura patratului înscris în cerc; lungimea acelei laturi fiind $\sqrt{2}$ avem:

$$\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0.$$

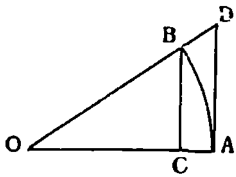


Fig. 21.

In OAD avem iarăşi AD = OA, adică tg 45° = 1.

81. Sin 60° este jumătate din latura triunghiului echilateral înscris, care latură se ştie că este $\sqrt{3}$; prinurmare:

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^0 = \sqrt{1 - \sin^2 60^0}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}.$$

82 R. Arcul de 18° este jumătate din arcul de 36°, subîntins de latura decagonului regulat înscris, şi valoarea acestei laturi se ştie din geometrie că este $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; prinurmare, după un raţionament analog cu cel de mai sus,

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \cos 72^0.$$

Atunci

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin^2 18^0} = \sqrt{1 - \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^0,$$

şi

$$\operatorname{tg} 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

83. După formula

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

avem:

$$\sin 36^0 = 2 \sin 18^0 \cos 18^0 = 2 \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

sau

$$\sin^2 36^0 = 4 \frac{(5 + 1 - 2\sqrt{5})\ (10 + 2\sqrt{5})}{16^2} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

deunde

$$\sin 36^0 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^0.$$

84 R. După formula: $\sin 3a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a$, avem încă:

$$\sin 54^0 = 3 \sin 18^0 \cos^2 18^0 - \sin^3 18^0$$

$$= 3 \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} - \frac{8\sqrt{5} - 16}{64}$$

deunde

$$\sin 54^0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \cos 36^0.$$

Combinând prin împărţire formulele aflate la § 83 şi 84, avem:

$$\operatorname{tg} 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1},\ \operatorname{tg} 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

85 R. Prin formulele

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a},$$

avem:

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^0} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^0},$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^0} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^0},$$

sau

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

ori

$$\sin 9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}} = \cos 81^0,$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}} = \sin 81^0.$$

Asemenea

$$\sin 27^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \cos 63^0,$$

$$\cos 27^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sin 63^0.$$

Exerciții. Să se demonstreze formulele:

a) $\sin x = \sin(36^0 + x) - \sin(36^0 - x) + \sin(72^0 - x) - \sin(72^0 + x)$
b) $\cos x = \sin(54^0 + x) + \sin(54^0 - x) - \sin(18^0 + x) - \sin(18^0 - x)$.

CAPITOLUL III.

TABLE TRIGONOMETRICE.

86. Proprietățile pe cari le-am studiat pânăacum nu vor puteà aveà niciun uz practic, dacă nu vom aveà mijlocul de a găsì îndată valoarea numerică a liniilor trigonometrice ale oricărui arc ce ni s'ar da. Insă *liniile trigonometrice sunt funcțiuni transcendente ale arcului*, adică nu se poate stabilì nici o ecuațiune algebrică întreagă care, pentru o valoare a liniei trigonometrice, să cuprindă toate valorile corespunzătoare ale arcului. Din această cauză, calculele prin cari aflăm valoarea liniilor trigonometrice ale unui arc dat sunt peste măsură de lungi și dificile, și ar fi peste putință a aplicà formulele trigonometriei la calculele practice, dacă ar trebuì ca la fiecare moment să calculăm și valoarea liniilor trigonometrice ce ar întrà în acele formule. Din această cauză se construesc *table* cari, pentru orice valoare dată a arcului, conțin valorile calculate ale tuturor liniilor sale trigonometrice.

87. Deșì arcele pot să aibă valori oricât de mari, tablele trigonometrice nu se calculează decât pentru arcele dela 0^0 pânăla 90^0; căci știm (29) că orice arc, oricât de mare ar fì, se poate reduce la primul cadran.

Pelângă acestea, dacă calculăm toate liniile trigonometrice ale arcelor dela 0^0 pânăla 45^0, nu mai este necesar a calculà valoarea lor și pentru arcele dela 45^0

pânăla 90^0; căci aceste din urmă arce sunt complimentele celor dintâiu, şi prinurmare liniile lor trigonometrice vor fi complimentare cu ale celor dintâiu. Dacă cunoaştem, spre exemplu, sin 36^0, cos 36^0, tg 36^0, cot 36^0, sec 36^0, cosec 36^0, vom cunoaşte şi cos 54^0 $=\sin 36^0$, $\sin 54^0=\cos 36^0$, $\cot 54^0=\operatorname{tg} 36^0$, $\operatorname{tg} 54^0=\cot 36^0$, $\operatorname{cosec} 54^0=\sec 36^0$, $\sec 54^0=\operatorname{cosec} 36^0$, căci $54^0=90^0-36^0$.

88. Tablele trigonometrice nu dau chiar valoarea numerică a liniilor trigonometrice, ci, fiindcă mai toate calculele trigonometriei se fac prin logaritmi, dau numai logaritmii acelor linii. Pelângă acestea, tablele nu cuprind logaritmii secantei şi cosecantei arcelor, căci din relaţiunile:

$$\sin x=\frac{1}{\operatorname{cosec} x}, \cos x=\frac{1}{\sec x}, \text{avem; } \log\sin x=-\log\operatorname{cosec} x,$$

$\log\cos x=-\log\sec x$. Prinurmare, pentru a găsì logaritmii secantei şi cosecantei unui arc, n'avem decât să luăm logaritmii cosinusului sau sinusului acelui arc cu semnul contrar.

Logaritmii liniilor trigonometrice se calculează prin nişte metode a căror expunere nu poate găsì loc acì.

Vom demonstrà totuş următoarele două teoreme, cari au aplicaţiuni şi în altă parte.

89. R. Teorema I. *Orice arc cuprins între* 0^0 *şi* 90^0 *este:* 1^0, *mai mare decât sinusul său, şi* 2^0 *mai mic decât tangenta sa.*

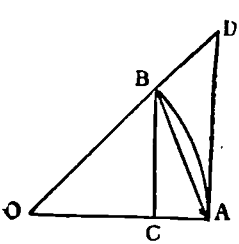


Fig. 22.

1^0. Fie arcul $AB=a$; avem $\sin a = BC$, $\operatorname{tg} a = DA$. Ducem coarda BA, şi avem: $BC<BA$, sau $\sin a<BA$, căci BC este perpendiculară iar BA oblică. De altă parte BA<arc BA, sau $BA<a$, căci arcele mai mici decât 90^0 sunt mai mari decât coardele lor; prinurmare *a fortiori*

$$\sin a<a. \qquad \text{(a)}$$

2. Aria sectorului circular OBA este:

$OBA = \frac{1}{2} OA \times \text{arc } BA = \frac{1}{2} OA \times a$. Aria triunghiului dreptunghiu ODA este:

$ODA = \frac{1}{2} OA \times AD = \frac{1}{2} OA \times \text{tg } a$; însă $ODA > OBA$;

prinurmare $\frac{1}{2} OA \text{ tg } a > \frac{1}{2} OA \times a$; și împărțind în ambii

membri cu $\frac{1}{2}$ OA,

$$\text{tg } a > a. \tag{b}$$

Relațiunile (*a*) și (*b*) se pot scrie în șir:

$$\sin a < a < \text{tg } a. \tag{1}$$

90. R. **Teorema II.** *Când arcul se micșorează peste măsură, raportul arcului către sinusul său tinde către* 1.

Punând în (1) în loc de tg a pe $\frac{\sin a}{\cos a}$, avem:

$$\sin a < a < \frac{\sin a}{\cos a}$$

Impărțind pe fiecare membru prin sin a, aceste relațiuni devin:

$$1 < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a}.$$

Insă dacă arcul se apropie de zero, cos a se apropie de 1, așà că dacă arcul este foarte mic, cos a se poate socotì egal cu 1; deci *la limită* relațiunea de mai sus devine:

$$\frac{a}{\sin a} = 1, \text{ sau } a = \sin a. \tag{2}$$

91 R. **Observare.** In calcul, unghiurile se exprimă sau prin gradele, minutele și secundele pe cari le cuprind, sau prin lungimea absolută a arcelor cari le măsoară,

aceste arce fiind luate pe un cerc cu raza 1. Aşà se poate zice că un unghiu este de 22°30', sau că este măsurat cu un arc de lungimea 0,39269908... Insă de multe ori este trebuinţă ca, cunoscând expresiunea unui unghiu în un fel, să găsim expresiunea sa în celalt fel.

Fie *a lungimea liniară* a unui arc care măsoară un unghiu oarecare, şi *a″ numărul întreg de secunde* ce cuprinde acel arc; este evident că arcul a este egal cu de a'' ori arcul de $1''$; adică $a = a'' \times$ arc $1''$. Insă arcul de $1''$ fiind foarte mic, avem, după (2) arc $1'' =$ sin $1''$; şi atunci

$$a = a'' \sin 1'', \tag{3}$$

deunde

$$a'' = \frac{a}{\sin 1''}. \tag{4}$$

Relaţia (3) ne arată că *pentru a aflà lungimea absolută a unui arc, trebue a înmulţì numărul de secunde ce conţine el cu sin 1″*; *şi* (4) *că pentru a aflà numărul de secunde conţinut în un arc, trebue a împărţì lungimea absolută a arcului cu sin 1″*.

Tablele lui Callet.

92. Tablele trigonometrice cele mai uzitate sunt *tablele lui Lalande*, calculate cu cinci zecimale pentru arcele din primul cadran, din minut în minut, şi *tablele lui Callet*, calculate cu şapte zecimale, din secundă în secundă, pentru arcele dela 0° pânăla 5°, şi din 10 secunde în 10 secunde pentru toate arcele de la 0° pânăla 90°.

Amândouă aceste table, editate şi perfecţionate de J. Dupuis, prezintă o dispoziţiune analoagă. Vom da descrierea şi uzul tablelor lui Callet, şi tot ce vom zice despre acestea se va aplicà şi la ale lui Lalande.

93. Prima parte a tablelor lui Callet, dă logaritmii

sinusului şi tangentei arcelor dela 0⁰ pânăla 5⁰, din secundă în secundă. Insă sinusul şi tangenta unui arc fiind egală cu cosinusul şi cotangenta arcului complimentar, această tablă ne dă în acelaş timp şi cosinusul şi cotangenta arcelor dela 90⁰ pânăla 85⁰.

Această tablă se împarte în două: tabla de sinusuri şi tabla de tangente. Sinusurile sunt date pe *verso* al foii, iar tangentele pe *recto*, aşà că deschizând tabla sinusurile se află pe pagina stângă şi tangentele pe pagina dreaptă. Dispoziţiunea ambelor pagine este cu totul analoagă.

Reproducem acì o parte din tabla sinusurilor. Numărul gradelor este înscris d'asupra şi dedesubtul ta-

Sinus 3⁰

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
″	36′	37′	38′	39′	40′	41′	″
0	$\bar{2}$,7978941	$\bar{2}$,7999974	$\bar{2}$,8018915	$\bar{2}$,8038764	$\bar{2}$,4058523	$\bar{2}$,8078197	60
1	979275	999307	019247	039095	058850	078119	9
2	979610	999640	010578	039495	059189	078846	8
3	979945	$\bar{2}$,7999973	019910	039755	059509	079173	7
4	980279	$\bar{2}$,8000306	029241	040085	059837	079500	6
5	980614	000639	020573	040414	060166	079827	5
6	980948	000972	020904	040744	060494	080154	4
7	981283	001305	021235	041074	060823	080481	3
8	981617	001238	021567	041404	061151	080808	2
9	981952	001971	021898	041734	061479	081135	1
10	982286	002304	022230	042064	061808	081462	50
1	982620	002637	022561	042394	062136	081788	9
2	982955	002970	022892	042723	062464	082115	8
3	983289	003302	023223	043053	062792	082442	7
4	983624	003635	023555	043383	063121	082769	6
5	983958	003968	023886	043713	063449	083095	5
6	984292	004301	024217	044042	063777	083422	4
7	984626	004633	024538	044373	064105	083849	3
8	984961	004966	024829	044702	064433	084075	2
9	985295	005299	025211	045031	064701	084402	1
″	23′	22′	21′	20′	19′	18′	″

Cosinus 86⁰

blei, afară din cadru. Pagina este împărțită în opt coloane verticale, dintre cari cele două dela margini, *a* și *h*, cuprind numărul de secunde, în coloana *a* crescând de sus în jos, dela o pânăla 60, iar în coloana *h* de jos în sus; pentru simplicitate, zecimile se scriu numai odată, iar încolo se subînțeleg. Coloanele dela mijloc, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, poartă sus și în jos numărul minutelor.

Când arcul dat este cuprins între 0^0 și 5^0, logaritmii *sinusului* sau *tangentei* sale se află pe pagina ce poartă în partea *de sus*, afară din cadru, numărul de grade al arcului, în coloana verticală care poartă în capătul *de sus* numărul de minute al arcului, și pe linia orizontală care trece prin numărul de secunde al arcului, înscris în coloana *dela stânga a*.

Când arcul dat este cuprins între 90^0 și 85^0, logaritmii *cosinusului* sau *cotangentei* sale se află pe pagina ce poartă în partea *de jos*, afară din cadru, numărul de grade al arcului, în coloana verticală, care poartă în capătul său *de jos* numărul de minute al arcului, și pe linia orizontală care trece prin numărul de secunde al arcului, înscris în coloana *dela dreapta h*.

Când mai mulți logaritmi succesivi, înscriși în aceeaș coloană, au primele lor cifre comune, de ordinar se subînțeleg cele două dela început, afară numai de logaritmii extremi, și de cei scriși în capul coloanei. Astfel, când în tablă găsim numai șase cifre ale unui logaritm, trebue să-l completăm, scriindu-i la stânga cifrele excedente pe cari le conține logaritmul cel mai apropiat, urcând sau coborând.

1^0. Fie a se căută logsin $3^0 37' 12''$. Deschidem tablele la o pagină care, în partea *de sus* are scris: *sinus* 3^0, și anume căutăm pe aceea în care a treia coloană verticală, *c*, poartă *sus* titlul $37'$. Descindem pe această coloană pânăîn rândul orizontal care trece prin numărul 12, înscris la stânga în coloana *a* a secundelor.

Acolo găsim cifrele 002970. Pentru a completà logaritmul, vom adăogì la începutul acestui număr cifrele $\bar{2}$,8 cari se află înscrise la logaritmul cel mai apropiat urcând sau pogorând, şi atunci

$$\log\sin 3^0 37' 12'' = \bar{2},8002970.$$

Cu totul asemenea se face şi pentru a găsì

$$\log tg\ 3^0 37' 12'',$$

care este:

$$\log tg\ 3^0 37' 12'' = \bar{2},8011644.$$

2⁰ Fie a se căutà logcos $86^0 20' 53''$. Deschidem tabla la o pagină care în partea *de jos* să poarte scris: *cosinus* 86^0, şi căutăm pe aceea anume în care a cincea coloana verticală *e* poartă *jos* titlul: $20'$. Ne urcăm pe această coloană pânăîn rândul orizontal care trece prin numărul 53, înscris *la dreapta* în coloana *h* a secundelor. Acolo găsim cifrele 041074; şi pentru a completà logaritmul, adăogăm la începutul acestui număr şi cifrele $\bar{2}$,8, care se află înscrise la logaritmul cel mai apropiat urcând sau pogorând, şi avem:

$$\log\cos 86^0 20' 53'' = \bar{2},8041074.$$

Tot asemenea se face şi pentru a găsì logcot $86^0 20' 53''$, care este

$$\log\cot 86^0 20' 53'' = \bar{2},8049902.$$

94. A doua parte a tablelor lui Callet dă logaritmii sinusului, tangentei, cotangentei şi cosinusului arcelor dela 0^0 pânăla 90^0, din $10''$ în $10''$.

Reproducem acì o pagină din a doua parte a tablelor lui Callet. Numărul gradelor, *dacă este mai mic de* 45, este scris *in susul* paginii, afară din cadru; iar *dacă este mai mare de* 45, se scrie *in josul* paginii. Numărul minutelor este scris în coloanele verticale A

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
′	″	Sin	D.	Tang.	D.c.	Cotg.	Cos.	D.	″	′
10	0	$\overline{1}$,6739769	393	$\overline{1}$,7287161	506	$\overline{0}$,2712839	$\overline{1}$,9452609	113	0	50
	10	740162	394	287667	506	712333	452496	113	50	
	20	740556	393	288173	506	711827	452383	113	40	
	30	740945	393	2886 9	505	711321	452270	113	30	
	40	741342	393	289184	506	710816	452157	112	20	
	50	741735	393	289690	506	710310	452046	113	10	
11	0	742128	393	290196	506	709804	451932	113	0	49
	10	742521	393	290702	505	709298	451819	113	50	
	20	742914	392	291207	506	708793	451706	113	40	
	30	743306	393	291713	506	708287	451593	113	30	
	40	743699	393	292219	505	707781	451480	112	20	
	50	744092	393	292724	506	707276	451368	113	10	
12	0	744485	392	293230	506	706770	451255	113	0	48
	10	744877	393	293736	505	706264	451142	113	50	
	20	745270	393	294241	506	705759	451029	113	40	
	30	745663	392	294747	505	705253	450916	113	30	
	40	746055	393	295252	505	704748	450803	113	20	
	50	746448	392	295757	506	704243	450690	113	10	
13	0	746840	392	296263	505	703737	450577	113	0	47
	10	747232	393	296768	506	703232	450464	113	50	
	20	747625	392	297274	505	702726	450351	113	40	
	30	748017	392	297779	505	702221	450238	113	30	
	40	748409	392	298284	5 5	701716	450125	113	20	
	50	748801	393	298789	506	701211	450012	113	10	
14	0	749194	392	299295	505	700705	449899	113	0	46
	10	749586	362	299800	505	700200	449786	113	50	
	20	749978	392	300305	505	699695	449673	113	40	
	30	750370	392	300810	505	699190	449560	113	30	
	40	750762	392	301315	505	698685	449447	113	20	
	50	751154	392	301820	505	698180	449334	114	10	
15	0	751546	391	302325	505	697675	449220	113	0	45
	10	751937	392	302830	505	697170	449107	113	50	
	20	752529	392	303335	505	696665	448994	113	40	
	30	752721	392	303840	505	696160	448881	113	30	
	40	753113	391	304345	505	695655	448768	113	20	
	50	753504	392	304850	504	695150	448655	114	10	
16	0	753896	391	305354	505	694646	448541	113	0	44
	10	754287	392	305859	505	694141	448428	113	50	
	20	754676	391	306364	505	693636	448315	113	40	
	30	755070	392	306869	504	693131	448202	114	30	
	40	755492	391	307373	505	692627	448088	113	20	
	50	755853	392	307878	505	692122	447975	113	10	
17	0	756245	391	308383	504	691617	447862	113	0	43
	10	756636	390	308887	505	691113	447749	114	50	
	20	757027	391	309392	504	690608	447635	113	40	
	30	757418	391	309896	505	690104	447522	113	30	
	40	757809	391	310401	504	689599	447409	114	20	
	50	758200	392	310905	505	689095	447295	113	10	
18	0	758592	391	311410	504	688590	447182	113	0	42
	10	758983	391	311914	504	688086	447069	114	50	
	2.	759394	390	312418	505	687582	446955	113	40	
	30	759764	391	312923	504	687077	446842	114	30	
	40	760155	391	313427	504	686573	446728	113	20	
	50	760564	391	313931	505	686069	446615	114	10	
19	0	760937	391	314436	504	685564	446501	113	0	41
	10	761328	390	314940	504	685060	446388	113	50	
	20	761718	391	315444	504	684556	446275	114	40	
	30	762109	391	315948	504	684052	446161	113	30	
	40	762500	390	316452	504	683548	446048	114	20	
	50	762890	391	316956	504	683044	445934	113	10	
20	0	$\overline{1}$,6763281		$\overline{1}$,7317460		$\overline{0}$,2682540	$\overline{1}$,9445821		0	40
′	″	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.		″	′

M

506	
1	50.6
2	101.2
3	151.8
4	202.4
5	253.0
6	303.6
7	354.2
8	404.8
9	455.4

505	
1	50.5
2	101.0
3	151.5
4	202.0
5	252.5
6	303.0
7	353.5
8	404.0
9	454.5

504	
1	50.4
2	100.8
3	151.2
4	201.6
5	252.0
6	302.4
7	352.8
8	403.2
9	453.6

393	
1	39.3
2	78.6
3	117.9
4	157.2
5	196.5
6	235.8
7	275.1
8	314.4
9	353.7

392	
1	39.2
2	78.4
3	117.6
4	156.8
5	196.0
6	235.2
7	274.4
8	313.6
9	352.8

391	
1	39.1
2	78.2
3	117.3
4	156.1
5	195.5
6	234.6
7	273.7
8	312.8
9	351.9

390	
1	39
2	78
3	117
4	156
5	195
6	234
7	273
8	312
9	351

113	
1	11.3
2	22.6
3	33.9
4	45.2
5	56.5
6	67.8
7	79.1
8	99.4
9	101.7

şi L, la stânga şi la dreapta paginii, şi merge crescând *de sus în jos în* A, şi *de jos în sus în* L.

Numărul secundelor se află scris în coloanele verticale B şi K, cari vin după ale minutelor, şi acest număr merge crescând *de sus în jos în* B, şi *de jos în sus în* K.

Sinusurile, pentru arcele *mai mici de* 45^0, se găsesc în coloana C, întitulată *sus* sin, iar pentru arcele *mai mari* de 45^0, în coloana H, întitulată *jos* sin.

Tangentele, pentru arcele *pânăla* 45^0, se află în coloana E întitulată *sus* tang, şi pentru arcele *mai mari* de 45^0, în coloana G, întitulată *jos* tang.

Asemenea cotangentele şi cosinusurile arcelor *până la* 45^0 se vor găsì în coloanele G şi H, întitulate *sus* cotg şi cos; şi pentru arcele *mai mari* de 45^0, în coloanele E şi C întitulate *jos* cotg şi cos.

Coloana cea mai mică D cuprinde *diferenţe tabulare* între logaritmii consecutivi înscrişi în coloana C. Asemenea coloana F conţine diferenţe între logaritmii consecutivi înscrişi în coloanele E şi G, şi coloana I diferenţele logaritmilor din coloana H.

Fie acum: 1^0 a se găsì logsin $28^0\ 13'\ 30''$. Considerând că arcul dat este mai mic decât 45^0, vom deschide tablelele la pagina întitulată *sus* 28^0 şi în coloana A vom căutà numărul minutelor, 13; apoi în B vom căutà şi numărul de secunde, 30, corespondente la $13'$. Atunci, pe rândul orizontal care trece prin acest număr de secunde, în coloana C, întitulată *sus* sin, vom găsì cifrele 748017; şi adăogând la început şi cifrele subînţelese $\bar{1},6$, avem:

$$\text{logsin } 28^0\ 13'\ 30'' = \bar{1},6748017.$$

2^0 Să găsim logsin $61^0\ 46'\ 40''$. Arcul fiind mai mare de 45^0 pe pagina întitulată *jos* 61^0, vom căutà minutele 46, în coloana *dela dreapta* L, iar secundele 40, în coloana alăturată K. Logaritmul căutat îl vom găsì în coloana H, în dreptul numărului secundelor 40; acest logaritm este:

$$\log\sin 61^0 46' 40'' = \bar{1},9450351.$$

3⁰ Fie încă a se găsì logtg 28⁰ 15′ 20″. Vom căutà pagina intitulată *sus* 28⁰, şi în coloana A, *dela stânga* acestei pagine, vom căutà 15′; apoi în coloana alăturată B, 20″. Pe linia orizontală ce trece prin acest număr de secunde. 20, vom găsì:

$$\log\mathrm{tg}\ \ 28^0 15' 20 = \bar{0},7303335.$$

Tot asemenea vom găsì:

$$\log\mathrm{tg}\ \ 61^0 41' 30'' = 0,2687077,$$
$$\mathrm{locgot}\ 28^0 14' 50'' = 0,2698180,$$
$$\log\mathrm{cot}\ 61^0 49' 10'' = \bar{1},7289690,$$
$$\log\cos 28^0 15' 40'' = \bar{1},9448768,$$
$$\log\cos 61^0 44' 0' = \bar{1},6753896.$$

Intrebuinţarea tablelor.

95. Două sunt problemele ce se pot prezintà când voim a ne servì cu tablele trigonometrice: 1⁰ se dă un arc şi se cere să găsim logaritmul uneia din liniile sale trigonometrice; 2⁰ se dă logaritmul unei linii trigonometrice a unui arc necunoscut, şi se cere a găsì acel arc.

96. **Problema I.** *Dându-se un arc, să găsim logaritmul uneia din liniile sale trigonometrice.*

Am văzut (93 şi 94) cum trebue a proceda pentru a găsì logaritmul liniei trigonometrice a unui arc care se găseşte în table. Nu vom mai revenì asupra acestei probleme, ci ne vom ocupà numai de cazul când arcul dat nu se află în table.

1⁰. *Să se găsească logaritmul sinusului unui arc,* Fie a se găsì logsin $28^0 14' 36'',5$. Fiindcă arcul dat nu se află în table, vom căutà logaritmii sinusului arcelor ce se află în table şi între cari este cuprins arcul dat, adică:

$$\log\sin 28^0 14' 30'' = \bar{1},6750370$$

şi

$$\log\sin 28^0 14' 40'' = \bar{1},6750762.$$

In coloana D, vedem că diferenţa Δ între aceşti doi logaritmi este 392; de altă parte, diferenţa între cel mai mic din aceste arce şi arcul dat este de $6'',5$. Insă pentru intervale foarte mici, ca cele din cazul de faţă, putem considerà creşterile logaritmilor sinusurilor ca fiind proporţionale cu creşterile arcelor însăşi; aşà dar putem face raţionamentul următor: la o creştere de $10''$ a arcului, corespunde o adăogire de 392 unităţi de al şaptelea ordin la logaritm; la o creştere de $6'',5$ a arcului, ce adăogire se cuvine logaritmului? Proporţiunea:

$$10'' : 392 = 6'',5 : x, \text{ ne dă} : x = \frac{392 \times 6,5}{10} = 254,8,$$

valoarea cantităţii cu care trebue crescut logsin $28^0 14' 30''$, pentru a aveà logsin $28^0 14' 36'',5$; prinurmare

$$\log\sin 28^0 14' 36'',5 = \bar{1},67506248,$$

Iacă dispoziţiunea calculului:

$$\begin{array}{llrl} \log\sin & 28^0\,14'\,30'' & = \bar{1},6750370 & \Delta = 392 \\ \text{pentru} & 6'',5 & 2548 & \dfrac{392 \times 65,}{10} = 254,8. \\ \hline \log\sin & 28^0\,14'\,36'',5 & = \bar{1},67506248 & \end{array}$$

Observare. Când diferenţa găsită pentru logaritm prezintă o parte fracţionară, a cărei primă zecimală este mai mică decât 5, toată partea fracţionară se leapădă; iar dacă prima zecimală e mai mare decât 5, partea fracţionară tot se leapădă, mărind însă cu o unitate ultima cifră a întregilor. Aşà, în exemplul precedent, diferenţa fiind 254,8, după transformare ea va deveni 255, şi atunci logsin $28^0 14' 36'',5$ va fi $\overline{1},6750625$. Dacă diferenţa ar fi fost 254,31, spre exemplu, nu am fi introdus în calcul decât partea 254.

Această observare este aplicabilă la toate calculele ce se fac cu logaritmii.

96. Calculul părţii proporţionale 254,8 se poate face cu mult mai mare înlesnire, cu ajutorul tablelor de diferinţe proporţionale, aşezate pe marginea paginei afară din cadru. Aceste table cuprind creşterile logaritmului corespunzătoare la fiecare creştere de $1''$, $2''$..... $9''$ a arcului. Să găsim spre exemplu, care este creşterea logaritmului ce corespunde la creşterea $6'',5$ în arc, diferenţa tabulară fiind 392. Tabelul întitulat 392 ne arată că la creşterea $6''$ a arcului corespunde diferenţa 235,2. Pentru a găsì şi diferenţa corespunzătoare la creşterea de $0'',5$, observăm că această diferenţă este a zecea parte din diferenţa corespunzătoare la $5''$, căci şi $0'',5$ este a zecea parte din $5''$, deci această diferenţă va fi 19,6, pe care adăogându-o la 235,2 aflăm 254,8.

Tot asemenea vom operà şi pentru a găsì *logaritmul tangentei unui arc oarecare;* aşà

$$\text{logtg}\, 61^0 43' 48'',3 = 0,2694055.$$

97. 2^0. *Să se găsească logaritmul cosinusului unui arc.*

Fie a se găsì logcos $61^0 41' 37'',8$. Acest arc este cuprins între $61^0 41' 30''$ şi $61^0 41' 40''$, şi tablele dau:

$$\text{logcos}\, 61^0 41' 30'' = \overline{1},6759764,$$
$$\text{logcos}\, 61^0 41' 40'' = \overline{1},6759374,$$

cu diferenţa tabulară 390. Observăm că

$$\text{logcos}\, 61^0 41' 30'' > \text{logcos}\, 61^0 41' 40''.$$

căci ştim că, în primul cadran, cosinusul descreşte cu cât creşte arcul; prinurmare vom raţionà în modul următor: la o *descreştere* de $10''$ în arc, corespunde *creş-*

terea la logaritm de 390; la o *descreștere* în arc de 2″,2 (diferența între arcul dat și arcul cel mai mare din celelalte două), ce *creștere* va corespunde la logaritm?

Tabela părților proporționale ne dă:

$$
\begin{array}{lr}
\text{creștere corespunzătoare la } 2'' = & 78 \\
\text{creștere corespunzătoare la } 0'',2 = & \underline{7,8} \\
 & 85,8
\end{array}
$$

Această diferență, fiind adăogită la logcos 61°41′40, dă:

$$\text{logcos } 61^\circ 41' 37'',8 = \bar{1},6759460.$$

Tot astfel găsim și

$$\text{logcot } 28^\circ 18' 38'',4 = 0,2686654.$$

Observare. Din acestea vedem că, pentru sinus și tangentă, calculul diferenței logaritmilor se face *prin exces*, adică se ieà în considerare diferența între arcul dat și un arc *mai mic* decât dânsul. Pentru cosinus și cotangentă, acel calcul se face *prin lipsă*, căci se ieà diferența între arcul dat și un alt arc *mai mare* decât dânsul.

Restul calculului este identic în ambele cazuri.

98. In calculele precedente, am presupus că creșterile logaritmilor sunt proporționale cu creșterile arcelor. Când însă arcele sunt foarte mici, aceasta nu mai este exact pentru logsin și logtg, și atunci nu mai putem aplicà metoadele ce am dat. Iată cum operăm în cazul acesta:

Fie un arc dat $a = h$, exprimat prin un număr întreg a de secunde, și prin o fracțiune h de secundă. Pentru a găsì $\text{logsin}(a+h)$ și $\text{logtg}(a+h)$, arcele fiind foarte mici, putem admite că raportul între arcele a și $a+h$ este egal cu raportul între sinusurile sau între tangentele lor, adică:

$$\frac{\sin(a+h)}{\sin a} = \frac{(a+h)}{a}, \quad \frac{\text{tg}(a+h)}{\text{tg}\, a} = \frac{a+h}{a}.$$

și luând logaritmii,

$$\left.\begin{aligned} \log\sin(a+h) &= \log\sin a + \log(a+h) - \log a. \\ \log\mathrm{tg}\ (a+h) &= \log\mathrm{tg}\ a + \log(a+h) - \log a. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Acì logsin a şi logtg a se află din *prima parte a tabelelor trigonometrice*, căci a este un număr întreg de secunde; log $(a+h)$ şi log a se află din tabla logaritmilor *numerelor*. Valorile găsite pentru aceste diferite cantităţi fiind întroduse în relaţiile (1), vom obţine pe logsin $(a+h)$ şi logtg $(a+h)$.

1⁰ Să aflăm logsin 0°2′38″, 7254. Acest arc, redus în secunde, este 158″,7254. Prinurmare, în acest exemplu $a = 158$, $h = 0{,}7254$, şi relaţia întâia din (1) devine:

$$\log\sin 158'',7254 = \log\sin 158'' + \log 158{,}7254 - \log 158$$

Insă, după table,

$$\begin{aligned} \log\sin\ 158'' &= \bar{4}{,}8842319, \\ \log\ 158{,}7254 &= 2{,}2006464, \\ \log\ 158 &= 2{,}1986571; \end{aligned}$$

prinurmare

$$\log\sin 0^0 2' 38'',7254 = \bar{4}{,}8862212.$$

Asemenea şi

$$\log\mathrm{tg}\, 0^0 2' 38'',7254 = \bar{4}{,}8862213.$$

Pentru a găsi logcot a unui arc foarte mic trebue mai întâiu a calculà logtg; căci, din $\cot x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$, avem: $\log\cot x = -\log\mathrm{tg}\, x$. Aşà:

$$\log\cot 0^0 2' 38'',7254 = -(\bar{4}{,}8862213) = 3{,}1137787.$$

2⁰. Să se afle logaritmul cosinusului unui arc foarte mic $a + h$.

Din relaţia

$$\mathrm{tg}\,(a+h) = \frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)},$$

deducem:

$$\text{logcos}\,(a+h) = \text{logsin}\,(a+h) - \text{logtg}\,(a+h),$$

formulă prin care am puteà calculà logcos $(a+h)$, cunoscând pe logsin $(a+h)$ şi logtg $(a+h)$. Insă dacă vom înlocuì pe logsin $(a+h)$ şi logtg $(a+h)$ cu valorile lor date prin (1) şi vom reduce termenii asemeni, vom ajunge la

$$\text{logcos}\,(a+h) = \text{logsin}\,a - \text{logtg}\,a,$$

sau

$$\text{logcos}\,(a+h) = \text{logcos}\,a. \qquad (a)$$

Prinurmare, dacă arcele $a+h$ şi a sunt foarte mici logaritmii cosinusurilor lor sunt aproape egale. Aceasta se poate vedeà şi din table. Arcul $0^0 2' 38'',7254$ este cuprins între $0^0 2' 30''$ şi $0^0 2' 40''$; însă a doua parte a tablelor arată că toate arcele dela $0^0 1' 40''$ pânăla $0^0 2' 50''$ au acelaş logcos; aşà dar

$$\text{logcos}\,0^0 2' 38'',7254 = \text{logcos}\,0^0 2' 30''.$$

Observare. Din relaţiunea (a) rezultă că arcele foarte mici sunt foarte rău determinate prin cosinusurile lor; aşà, în exemplul precedent, am văzut că la un acelaş logcos corespundeà toate arcele dela $1' 40''$ pânăla $2' 50''$, ceeace produce o incertitudine de $1' 10''$.

Pe de altă parte avem:

$$\cos a = \sin\,(90^0 - a);$$

dacă a este foarte mic, $90^0 - a$ diferă prea puţin de 90^0; relaţiunea aceasta ne arată dar că arcele vecine de 90^0 sunt foarte rău determinate prin sinusurile lor, cari variează prea încet.

Nu este tot aşà pentru tangentă şi cotangentă. Aceste linii trigonometrice variează mult mai repede decât sinusul şi cosinusul, căci ştim că, în primul cadran, ele iau toate valorile dela 0 pânăla ∞. Observând diferenţele tabulare ale lor, vedem că valoarea cea mai mică a acestor diferenţe este la 45^0; aşà dar acolo tangenta şi cotangenta variează mai încet, şi acolo se poate produce eroarea cea mai mare. Insă cu tablele lui Callet, chiar această valoare maximum a erorii este aşà de neînsemnată (0'',03), încât se poate neglige. Prinurmare din toate liniile trigonometrice, cele mai avantagioase pentru a reprezintà arcele cu exactitate sunt tangenta şi cotangenta,

99. **Problema II.** *Dându-se logaritmul unei linii trigonometrice a unui arc să se găsească arcul.*

Fie a se găsì arcul x al cărui logsin este $\bar{1},0451480$. Căutăm în table la coloana intitulată sin, pânăcând dăm peste logaritmul dat, şi vedem că acest logaritm se află în coloana H, întitulată *jos* sin prinurmare, pentru a găsì secundele şi minutele arcului, le vom lua *la dreapta*, în coloanele L şi K, iar gradele le vom lua *dejos*. Astfel, arcul căutat este $x = 61^0 48' 20''$.

Asemenea vom face şi pentru a găsì un arc corespunzător la un logcos, logtg, logcot dat, *când aceşti logaritmi se află în table.* Astfel se găseşte:

$$\text{pentru } \log\operatorname{tg} x = \bar{1},7027779, \quad x = 28^0 13' 30'',$$
$$\text{pentru } \log\cot x = \bar{1},7307373, \quad x = 61^0 43' 20'',$$
$$\text{pentru } \log\cos x = \bar{1},9449107, \quad x = 28^0 15' 10''.$$

100. *Dacă logaritmul dat nu se află în table*, vom căutà doi logaritmi între cari să fie cuprins logaritmul dat, şi vom găsì arcul corespunzător la acest logaritm prin o proporţie.

Astfel, fie $\log\sin x = \bar{1},6756418$. Căutând în table, vedem că acest logaritm este cuprins între

$$\bar{1},6756245 = \log\sin 28^0 17' 0'',$$

şi

$$\bar{1},6756636 = \log\sin 28^0 17' 10''.$$

Diferenţa tabulară între aceşti doi logaritmi este

391, iar între cel mai mic din aceştia şi logaritmul dat 173. Zicem dar: dacă o diferenţă a logaritmilor de 391 unităţi de al şaptelea ordin zecimal corespunde la o creştere în arc de $10''$, o diferenţă în logaritm de 173 unităţi de acelaş ordin zecimal, la ce creştere în arc va corespunde?

Răspunsul este dat prin proporţiunea:

$$391 : 10'' = 173 : \delta, \text{ deunde } \delta = \frac{173 \times 10''}{391} = 4'',4.$$

Adăogând această creştere la arcul cel mai mic, găsim arcul căutat

$$x = 28^0 17' 4'',4.$$

Iacă dispoziţiunea calculului:

$$\begin{array}{ll} \bar{1},6756418 = \text{logsin}\, x & \Delta = 361 \\ \underline{\bar{1},6756245} = \text{logsin}\, 28^0 17' 0'' & \delta = \dfrac{173 \times 10''}{391} = 4'',4: \\ \quad 173 & \end{array}$$

$$x = 28^0 17' 0'' + 4'',4 = 28^0 17' 4'',4.$$

101. Creşterea în arc de $4'',4$ se poate găsì şi prin tablele diferenţelor proporţionale depe margine. Pentru aceasta, în tabelul intitulat *391*, căutăm cea mai mare diferenţă care se cuprinde în 173, şi aceasta este 156,4, corespunzătoare la $4''$. Scăzând apoi pe 156,4 din 173, găsim diferenţa 16,6. Impărţind în minte numerele din tabel cu 10, vedem că din toate câturile obţinute, cel mai mare care încape în 16,6 este 15,64, corespunzător la creşterea în arc $0'',4$. Oprind aproximaţiunea la părţile din 10 ale secundei, creşterea totală în arc va fi dar de $4'',4$.

Tot asemenea, dându-se: $\text{logtg}\, x = \bar{1},7297543$, găsim $x = 28^0 13' 25'',3$.

102. *Să găsim arcul* x *al cărui logcos este* $\bar{1},9447589$. Tablele ne arătă că acest logaritm este cuprins între

$$\bar{1},9447635 = \text{logcos } 28^0 17' 20'',$$
şi
$$\bar{1},9447522 = \text{logcos } 28^0 17' 30'',$$

a căror diferenţă tabulară este 113; diferenţa între logaritmul cel mai mic $\bar{1},9447522$ şi cel dat este 67. Zicem dar: dacă la o *adăogire* de 113 unităţi de al şaptelea ordin zecimal la logaritm, corespunde o *descreştere* de 10″ în arc, la o *adăogire* de 67 unităţi la logaritm, ce *descreştere* în arc va corespunde? Proporţiunea:

$$113 : 10'' = 67 : \delta, \text{ dă} : \delta = \frac{67 \times 10''}{113} = 5'',9.$$

Scăzând această *descreştere* din arcul $28^0 17' 30''$, găsim arcul căutat: $x = 28^0 17' 24'',1$.

Valoarea descreşterii arcului, 5″,9, se poate găsì şi prin tabla părţilor proporţionale. In tabelul intitulat *113*, vedem că numărul cel mai apropiat de 67 este 56,5 la care corespunde descreşterea 5″. Apoi numărul din tabel divizat cu 10 care se apropie mai mult de diferenţa 67 — 56,5 = 10,5 este 10,17, la care corespunde descreşterea 0″,9. Prinurmare descreşterea totală în arc este de 5″,9.

Tot astfel, pentru logcot $x = 1,7310740$, vom găsì:

$$x = 61^0 42' 12'',3.$$

103. In lucrările precedente, am presupus că variaţiunile arcelor sunt proporţionale cu variaţiunile logaritmilor liniilor lor trigonometrice. Insă aceasta nu mai este adevărat pentru arcele foarte mici, când este vorba să le determinăm prin logsin sau logtg. In acest caz, vom căutà în *prima parte a tablelor trigonometrice* logaritmul care se apropie mai mult de logaritmul dat, vom luà arcul corespunzător la acest logaritm, şi-l vom reduce în secunde. Fie a acest număr întreg de secunde, $a + h$ numărul de secunde şi frac-

ţiune de secundă al arcului necunoscut ce corespunde la logaritmul dat. Relaţiunile (1) (98) ne dau:

$$\left.\begin{aligned} \log(a+h) &= \log\sin(a+h) - \log\sin a + \log a \\ \log(a+h) &= \log\mathrm{tg}\,(a+h) - \log\mathrm{tg}\ a + \log a \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Acì logsin $(a+h)$ sau logtg $(a+h)$ sunt cantităţile date, logsin a se află în *prima parte a tablelor trigonometrice*, şi log$a$ în tabla de logaritmi a numerelor. Prinurmare log $(a+h)$ este determinat precum şi $a+h$, arcul căutat.

Fie a se determinà, spre exemplu, arcul al cărui log sin este $\overline{3},3325473$.

Prima parte a tablelor trigonometrice ne arată că logsin cel mai apropiat de acesta este $\overline{3},3319783$, corespunzător la arcul $0^0 7' 23'' = 443''$. Prinurmare, în prima din formulele (2), avem: $a = 443$, logsin $(a+h) = \overline{3},3325473$, logsin $a = \overline{3},3319783$, şi tablele ne dau: log $a = \log 483 = 2,6464037$. Prima din formulele (2) devine dar:

$$\log(a+h) = \overline{3},3325473 - \overline{3},3319783$$
$$+ 2,6464037 = 2,6469727,$$

şi calculând pe $a+h$, găsim: $a+h = 443'',5807 = 0^0 4' 23'',5807$. Aceasta este valoarea arcului căutat.

Asemenea vom găsì: $a+h = 0^0 8' 10'',4995$, pentru logtg $(a+h) = \overline{3},3762143$.

Tot aşà se operează când se cere a se găsì un arc mic, cunoscând logaritmul cotangentei sale; căci acest logaritm este egal şi de semn contrar cu al tangentei (100).

Dacă însă se cere a se calculà un arc mic cunoscând logaritmul cosinusului său, acest calcul nu se poate face cu preciziune. Fie spre exemplu, a se găsì arcul al cărui logcos este $\overline{1},9999998$. Tabelul arată că acest logcos corespunde la toate arcele cuprinse între $0^0 3' 0''$ și $0^0 3' 40''$; prinurmare determinarea ce ni se cere nu se poate face decât cu o nesiguranță de $40''$.

Exerciții. I. Să se găsească logaritmii expresiunilor:

1) $\sin 5^0$
2) $\sin 35^0 24'$
3) $\sin 45^0 27' 40''$
4) $\sin 35^0 0' 7''$
5) $\cos 83^0 25'$
6) $\cos 175^0 2' 30''$
7) $\cos 145^0 23' 12''$
8) $\text{tg } 37^0 20'$
9) $\text{tg } 143^0 8'$
10) $\cot 7'^0 32'$
11) $\sec 57^0 2'$
12) $\text{cosec } 35' 8''$

II. Să se găsească unghiurile corespunzătoare la:

1) $\log \sin x = \bar{1},64184$
2) $\log \text{tg } x = \bar{1},69677$
3) $\log \sin x = \bar{2},74680$
4) $\log \cos x = \bar{1},78468$
5) $\log \text{tg } x = \bar{1},62188$
6) $\log \text{tg } x = \bar{2},78863$
7) $\log \text{tg } x = 2,57612$
8) $\log \cot x = 0,78543$
9) $\log \sin x = 0$
10) $\log \sin x = -\infty$;
11) $\log \text{tg } x = 0$;
12) $\log \text{tg } x = -\infty$;
13) $\log \text{tg } x = +\infty$.
14) $\log \cot x = +\infty$

III. Să se găsească arcele x cuprinse între 0^0 și 360^0 date de ecuațiunile:

1) $\sin x = \frac{1}{3}$
2) $\sin x = 0,72$
3) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{5}$
4) $\sin^2 x = 0,34$
5) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$
6) $\cos x = -\frac{2}{3}$
7) $\sec x = \frac{9}{7}$
8) $\sec^2 x = 3$
9) $\text{tg } x = \frac{16}{15}$
10) $\cot x = -\frac{8}{9}$,

I. Se iau în ambii membrii logaritmii, se găsește arcul mai mic de 90^0 corespunzător acelui logaritm și apoi se deduc și celelalte arce mai mari ca 90^0, dar mai mici ca 360^0.

Dacă membrul al doilea al ecuațiunilor propuse este negativ, se găsește arcul corespunzător, când luăm membrul al doilea pozitiv și apoi deducem arcul cerut.

IV. Să se găsească valorile lui:

1) $\sin 17^\circ$
2) $\sin 15^\circ 27'$
3) $\sin 145^\circ 28' 30''$
4) $\operatorname{tg} 85^\circ 27'$
5) $\sin^2 25^\circ 35' \operatorname{tg} 7^\circ 6'$
6) $\operatorname{tg}^2 23^\circ 8' - \operatorname{tg}^2 85^\circ 6'$
7) $\sec 25^\circ 8'$
8) $\operatorname{cosec} 10^\circ$.

I. Luăm logaritmi expresiunilor date, şi apoi căutăm la acei logaritmi numerele corespunzătoare.

Identităţi şi ecuaţiuni trigonometrice.

104. Insemnarea cuvintelor *identitate* şi *ecuaţiune* este cunoscută din algebră. O egalitate între una sau mai multe din liniile trigonometrice ale unuia sau mai multor arce, poate fi o identitate sau o ecuaţiune.

Va fi o identitate, când acea egalitate este adevărată pentru orice valoare a arcului sau arcelor, cari intră acolo; va fi o ecuaţiune, când egalitatea este adevărată numai pentru anumite valori ce trebuesc date arcelor, cari intră acolo.

Egalităţile:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

sunt identităţi.

Egalităţile:

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}, \quad \sin^2 x - 4 \sin x - 2 = 0, \quad \sin x + \cos x = 0{,}5$$

sunt ecuaţiuni.

Am văzut pânăacum exemple de identităţi şi am rezolvit ecuaţiuni trigonometrice, ale căror soluţiuni se aflau uşor. De multe ori pentru a rezolvì o ecuaţie trigonometrică avem nevoe de table de logaritmi.

Iată cum procedăm:

Dacă unghiul nu figurează în ecuaţiune decât prin una singură din liniile sale trigonometrice, această linie se consideră ca necunoscută, şi se rezolvă ecuaţia în raport cu dânsa. Dacă însă mai multe linii trigonometrice ale unghiului figurează în ecuație, se înlocuesc mai întâiu toate acele linii prin valoarea lor în funcție de una singură, prin ajutorul formulelor corelative (41).

105. **Exemple.** 1°. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 x - 4\sin x - 2 = 0.$$

De vreme ce unghiul necunoscut x nu figurează aci decât numai prin una din liniile sale trigonometrice, rezolvăm ecuația în raport cu dânsa și avem:

$$\sin x = 2 \pm \sqrt{6}.$$

Cele două rădăcini sunt $2+\sqrt{6}$ și $2-\sqrt{6}$.

Cea dintâiu, nu dă nicio valoare reală pentru x, pentru că este mai mare decât 1. Cea de a doua, calculată în zecimale, este $-0,449$. Această valoare fiind negativă, corespunde ori la un unghiu negativ care se termină în primul sau în al doilea cadran, ori la un unghiu pozitiv care se termină în al treilea sau al patrulea cadran.

Să căutăm pe primul din acestea.

Avem:

$$\log \sin x = \log 0,449 = \bar{1},6522463,$$

și tablele arată că unghiul care are acest log sin, este unghiul de $26^0\,40'\,46''$. Prinurmare

$$x = -26^0\,40'\,46''.$$

Dar, fiindcă unghiurile suplimentare au acelaş sinus, avem încă

$$x = -153^0\,19'\,14'.$$

Acestea sunt soluțiile negative din primul și al doilea cadran.

Unghiurile pozitive din al treilea și al patrulea cadran, cari au acelaş sinus, sunt apoi:

$$x = 333^0\,19'\,14'' \quad \text{și} \quad x = 206^0\,40'\,46''.$$

In mod general vom aveà soluţiunile:

$$x = k.360^0 + 333^0\,19'\,14''$$
$$x = k.360^0 + 206^0\,40'\,46''$$

106. R. 2⁰. Să se rezolve ecuaţia

$$m \sin(a - x) = n \sin(b - x).$$

Punând în loc de $\sin(a - x)$ şi de $\sin(b - x)$ valorile lor, ecuaţia devine:

$$m(\sin a \cos x - \sin x \cos a) = n(\sin b \cos x - \sin x \cos b),$$

care conţine pe $\sin x$ şi pe $\cos x$. S'ar putea substitui în locul lor valorile lor în funcţie de una oarecare din liniile trigonometrice ale lui x. Dar fiindcă ecuaţia este omogenă în raport cu $\sin x$ şi $\cos x$, e de ajuns să o împărţim cu $\cos x$, ceeace dă:

$$m \sin a - m \cos a \operatorname{tg} x = n \sin b - n \cos b \operatorname{tg} x,$$

şi această ecuaţie, rezolvită în raport cu $\operatorname{tg} x$, dă:

$$\operatorname{tg} x = \frac{n \sin b - m \sin a}{n \cos b - m \cos a}.$$

3⁰ Să se rezolve ecuaţia

$$a \sin x + b \cos x = c. \tag{1}$$

Primul membru se poate înlocuì prin o expresie calculabilă prin logaritmi (74), dacă se întroduce unghiul ajutător φ, dat prin ecuaţia

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Atunci ecuaţia dată se înlocueşte prin

$$\frac{a \sin(\varphi + x)}{\cos \varphi} = c,$$

din care scoatem

$$\sin(\varphi + x) = \frac{c \cos \varphi}{a},$$

care ne dă unghiul $\varphi + x$, şi prinurmare chiar unghiul x, de oarece φ este deja determinat prin formula

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Pentruca problema propusă să fie posibilă, trebue să avem pe

$$\frac{c\cos\varphi}{a}$$

cuprins între -1 şi $+1$, adică trebue să avem:

$$\frac{c^2\cos^2\varphi}{a^2} < 1.$$

Din

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

deducem:

$$\cos^2\varphi = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

prinurmare condiţiunea precedentă devine:

$$c^2 < a^2 + b^2.$$

Dacă această condiţiune este îndeplinită, vom găsì cu ajutorul tablelor un unghiu x_0, care să verifice ecuaţiunea (2); o a doua soluţie va fi $180^0 - x_0$. Vom aveà deci:

$$\begin{array}{lll} \varphi + x = x_0 & \text{deunde} & x = x_0 - \varphi \\ \text{şi} \quad \varphi + x = 180^0 - x_0 & \text{deunde} & x = 180^0 - x_0 - \varphi. \end{array}$$

Soluţiunile generale ale ecuaţiunei (1) vor fi deci date de formulele:

$$x = k\,.\,360^0 + x_0 - \varphi$$
$$x = k\,.\,360^0 + 180^0 - x_0 - \varphi.$$

Rezoluția prin logaritmi a ecuației de gradul II.

107 R. Ecuația de gradul II de forma

$$x^2 + p\,x + q = 0, \tag{1}$$

are două rădăcini, date prin formula:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{2}$$

Aceste două rădăcini se pot calculà cu ajutorul tablelor trigonometrice.

1°. Dacă $\frac{p^2}{4} - q > 0$, și dacă q este pozitiv, vom determinà un unghiu ajutător φ prin formula

$$\sin\varphi = -\frac{2\sqrt{q}}{p}, \tag{3}$$

care ne dă pentru φ o valoare reală, deoarece $\frac{p}{2}$ fiind mai mare decât $\sqrt{q}$, fracția $\frac{2\sqrt{q}}{p}$ este subunitară. Unghiul e astfel determinat se poate calculà prin logaritmi, căci formula (3) dă:

$$\log(-\sin\varphi) = \log 2 + \frac{1}{2}\log q - \log p \tag{4}$$

dacă p este pozitiv, și

$$\log\sin\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log q - \log(-p), \tag{5}$$

dacă p este negativ. In ambele cazuri logaritmii din membrul al doilea sunt reali, căci numerele sunt pozitive, și formulele (4) sau (5) vor da pentru φ o valoare reală, cuprinsă între -90^0 și $+90^0$.

Din (3) deducem:

$$\frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}, \quad \frac{p^2}{4} = \frac{q}{\sin^2\varphi}$$

aşà că ecuaţia (2) devine:

$$x = \sqrt{q}\,\frac{1 \pm \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Insă

$$\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \cot\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Prinurmare soluţiile ecuaţiei (1) sunt:

$$x_1 = \sqrt{q}\cot\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = \sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}. \tag{I}$$

Dacă q este negativ, vom determinà unghiul ajutător φ prin formula:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\sqrt{-q}}{p},$$

din care deducem

$$\log(-\operatorname{tg}\varphi) = \log 2 + \frac{1}{2}\log(-q) - \log p.$$

dacă p este pozitiv, şi

$$\log\operatorname{tg}\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log(-q) - \log(-p)$$

dacă p este negativ. Ambele aceste formule dau pentru φ câte o valoare reală, cuprinsă între -90^0 şi $+90^0$. Scoţând din (6) valoarea lui $\frac{p}{2}$ şi substituind-o în (2), această ecuaţie devine:

$$x = \sqrt{-q}\,\frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi},$$

din care scoatem, ca şi mai sus,

$$x_1 = -\sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad x_2 = +\sqrt{-q}\,\cot\frac{\varphi}{2}.$$

2⁰. Dacă $\frac{p^2}{4} - q < 0$, adică dacă rădăcinile ecuației (1) sunt imaginare, vom determinà unghiul φ prin ecuația

$$\cos^2\varphi = \frac{p^2}{4q} \tag{7}$$

din care scoatem

$$\log\cos\varphi = \log(\pm p) - \frac{1}{2}\log q - \log 2$$

formulă care ne va dà pe φ. Substituind în (2) valoarea

$$q = \frac{p^2}{4\cos^2\varphi}$$

dată de (7) avem:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2\varphi}}$$

sau

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

108 R. **Exemplu.** Să se rezolve ecuațiunea:

$$x^2 - 10{,}84\,x + 26{,}69 = 0$$

Cantitatea

$$\frac{p^2}{4} - p = 5{,}42^2 - 26{,}99$$

fiind pozitivă, şi $q = 26{,}99$ deasemenea, vom determinà unghiul ajutător φ cu formula (3):

$$\sin\varphi = -\frac{2\sqrt{26{,}99}}{-10{,}84} = \frac{\sqrt{26{,}99}}{5{,}42}.$$

Luând logaritmii, avem;

$$\log\sin\varphi = \frac{\log 26{,}99}{2} - \log 5{,}42$$

$$\log\sin\varphi = 0{,}71560 - 0{,}73400$$
$$\log\sin\varphi = \bar{1}{,}98160.$$

Căutând în table arcul corespunzător găsim:

la $\bar{1}{,}98159$	corespunde	arcul	$73^0 26'$
la $\bar{1}{,}98162$	»	»	$73^0 27'$
la creşterea 3	»	creşterea	$60''$
la creşterea 1	»	»	$\frac{60''}{3} = 20''$

deci $\varphi = 73^0 26' \, 20''$.

Soluţiile ecuaţiunei sunt, comform formulelor (I):

$$x_1 = \sqrt{26{,}99}\ \cot\ 36^0 43' 10'$$

$$x_2 = \sqrt{26{,}99}\ \mathrm{tg}\ 36^0 43' 10''.$$

Luând logaritmii avem:

$$\log x_1 = \frac{\log 26{,}99}{2} + \log\cot 36^0 43' 10''$$

$$\log x_2 = \frac{\log 26{,}99}{2} + \log\mathrm{tg}\ 36^0 43' 10''$$

sau

$$\log x_1 = 0.71560 + 0.12732 = 0.84292$$
$$\log x_2 = 0.71560 + \bar{1}.87268 = 0.58828$$

Căutând în table numerele corespunzătoare, găsim:

$$x_1 = 6{,}965 \text{ şi } x_2 = 3{,}875.$$

Exerciţii. Să se verifice următoarele identităţi:

1) $$\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \cos^3 2x$$

2) $$\cos^3 x \frac{\sin 3x}{3} + \sin^3 x \frac{\cos 3x}{3} = \sin 4x$$

3) $$\sec^2 \frac{x}{2} - \sec x \left(\cot^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{3\varphi}{2}\right) = 8\left(1 + \cot^2 \frac{3\varphi}{2}.\right)$$

4) $$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)} + \frac{\sin \beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)} + \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)} = 0.$$

5) $$\frac{1 - \mathrm{tg}^2 (45^0 - x)}{1 + \cot^2 (45^0 + x)} = \sin 2x$$

6) $$\mathrm{tg}^2 x + \cot^2 x = 2\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}$$

7) $$\mathrm{tg}\, 3x - \mathrm{tg}\, 2x - \mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, 3x\, \mathrm{tg}\, 2x\, \mathrm{tg}\, x.$$

Să se rezolve următoarele ecuaţiuni:

1) $$\cos x - \mathrm{tg}\, x = 0.$$
2) $$\mathrm{tg}(45^0 - x) + \cot(45^0 - x) - 4 = 0.$$
3) $$3 \sec^4 x - 10 \sec^2 x + 8 = 0.$$
4) $$\mathrm{tg}^2 x + \cot^2 x = 2.$$
5) $$\cos x + \sin x = \sqrt{2}.$$
6) $$\cos x - \sin x = -\sqrt{2}.$$
7) $$\sqrt{5}\sin x - \cos x = \sqrt{2}.$$
8) $$6 \sin(40^0 - x) = 5 \sin(15^0 - x).$$
9) $$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}(45^0 + x) = 2.$$
10) $$x^2 - 87{,}56\, x - 14{,}2 = 0.$$
11) $$x^2 + 375{,}86\, x + 28{,}436 = 0.$$

Sisteme de ecuaţiuni cu două necunoscute.

109. R. Sistemele de ecuaţiuni propuse mai jos se obţin tratând chestiunile cuprinse în următorul enunţiu general:

Cunoscând suma sau diferenţa a două arce şi suma, sau diferenţa, sau produsul, sau câtul a două linii trigonometrice de acelaş fel a acestor două arce, să se găsească arcele.

1. Se dă:

$$x + y = a$$
$$\sin x + \sin y = b$$

Inlocuim membrul întâiu al ecuaţiunii a doua printr'o formulă calculabilă prin logaritmi. Vom găsì astfel pe $\cos\frac{x-y}{2}$, şi deci diferenţa $x-y$.

Să se aplice la cazul când $a=90^0$, $b=\frac{3}{4}$

2. Se dă:

$$x-y=a$$
$$\sin x+\sin y=b$$

Procedeu analog. Să se facă aplicaţia $a=27^0$, $b=\frac{3}{4}$

3. Se dă:

$$x+y=a$$
$$\sin x-\sin y=b$$

Procedeu analog. Aplicaţie: $a=90^0$, $b=\frac{1}{7}$

4. Se dă:

$$x-y=a$$
$$\sin x-\sin y=b$$

Procedeu analog. Aplicaţie: $a=27^0$, $b=\frac{1}{7}$

5. Se dă:

$$x+y=a$$
$$\sin x\sin y=b$$

Ecuaţia întâia dă

$$\cos(x+y)=\cos a,$$

desvoltând în membrul întâiu şi ţinând seamă de ecuaţia a doua, găsim produsul $\cos x\cos y$, care combinat

cu ecuaţiunea a doua dă $\cos(x-y)$ şi deci pe $x-y$.
Aplicaţie: $a = 90^0$, $b = \frac{3}{8}$

6. Se dă:

$$x - y = 10^0$$

$$\sin x \sin y = \frac{3}{8}$$

Procedeu analog.

7. Se dă:

$$x + y = a$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = m$$

Din ecuaţiunea a doua se deduce

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{m-1}{m+1}$$

şi se înlocueşte membrul întâiu printr'o formulă calculabilă prin logaritmi; se găseşte $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}$ şi deci $x-y$.
Aplicaţie: $a = 90^0$, $m = 2$.

8. Se dă:

$$x - y = 10^0$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = 2$$

Procedeu analog.

9. Se dă:

$$x + y = 90^0$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 2$$

Procedeu analog.

10. Se dă:

$$x - y = 10^0$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 2$$

Procedeu analog.

11. Se dă:

$$x + y = a$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b$$

Se înlocueşte membrul întâiu al ecuaţiunei a doua printr'o formulă calculabilă prin logaritmi; apoi se înlocueşte numitorul obţinut $\cos x \cos y$ prin

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

şi ţinând seamă de prima ecuaţiune, găsim pe $\cos(x-y)$ şi deci pe $x-y$.

Aplicaţie: $a = 45^0$, $b = 8$.

12. Se dă:

$$x - y = 10^0$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 3$$

Procedând în mod analog ajungem la o ecuaţie de forma

$$A \sin(x+y) + B\cos(x+y) = C$$

care ne va da pe $x+y$.

13. Se dă:

$$x - y = 10^0$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2$$

Se procedează ca în 11.

14. Se dă:

$$x + y = 120^0$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2$$

Se procedează ca în 12.

15. Se dă:

$$x+y=a$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} x=b$$

Din ecuația a doua, pusă forma

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}=b$$

se deduce.

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{1+b}{1-b}$$

deunde găsim pe cos $(x-y)$ și deci pe $x-y$.

Aplicație.

$$a=60^0;\ b=\frac{3}{5}.$$

16. Se dă:

$$x-y=10^0$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=\frac{3}{5}$$

Procedeu analog.

17. Se dă:

$$x+y=a$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=b$$

Ecuațiunea a două pusă sub forma.

$$\frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y}=\frac{m}{1}$$

dă:

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=\frac{m-1}{m+1}$$

şi ţinând seamă de prima ecuaţiune, găsim pe sin $(x-y)$ şi deci arcul $x-y$.

Aplicaţie: $a=120^0$; $b=2$.

18. Se dă:

$$x-y=5^0$$
$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=3$$

Procedeu analog.

19, 20, 21, 22, 23 şi 24. Să se rezolve sistemele obţinute înlocuind linia *tg* prin *cot* în exemplele 12, 13, 14, 15, 16 şi 17.

CARTEA II.

TRIGONOMETRIA RECTILINIE

CAPITOLUL I.

Proprietățile triunghiurilor rectilinii.

110. Vom însemnà cele trei unghiuri ale unui triunghiu cu literele majuscule A, B, C, iar laturile cu literele minuscule a, b, c, corespunzătoare la unghiurile opuse. Dacă triunghiul este dreptunghiu, unghiul drept se va însemnà cu litera A și ipotenusa cu a.

Triunghiuri dreptunghe.

111. Teorema I. *In orice triunghiu dreptunghiu, o latură a unghiului drept este egală cu ipotenusa înmulțită cu sinusul unghiului opus.*

Relațiunea ce trebue demonstrată este

$$b = a \sin B.$$

Din vârful unghiului B (fig. 23) cu o rază BD = 1, descriem arcul DF, și ducem DE perpendiculară pe BA. Triunghiurile asemeni BCA și BDE dau:

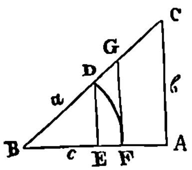


Fig. 23

$$\frac{CA}{DE}=\frac{BC}{BD};$$

însă $CA = b$, $DE = \sin DF = \sin B$, $BC = a$, $BD = 1$; prinurmare relațiunea se reduce la

$$\frac{b}{\sin B}=a,$$

sau

$$b = a \sin B. \qquad (1)$$

C.C.T.D

Asemenea vom aveà și

$$c = a \sin C. \qquad (1')$$

111. Teorema II. *In orice triunghiu dreptunghiu, o latură a unghiului drept este egală cu ipotenusa înmulțită cu cosinusul unghiului alăturat.*

Trebue a demonstrà relația

$$c = a \cos B.$$

Triunghiurile asemeni BCA și BDE, de mai sus, dau:

$$\frac{BA}{BE}=\frac{BC}{BD},$$

și înlocuind pe BA, BE BC, BD, prin valorile lor,

$$\frac{c}{\cos B}=a$$

sau

$$c = a \cos B. \qquad (2)$$

C.C.T.D.

Asemenea aflăm și:

$$b = a \cos C. \qquad (2')$$

Observarea I. Relațiunile (1) și (2) se pot deduce una din alta. Inadevăr, în orice triunghiu dreptunghiu avem: $B+C=90^0$ sau $B=90^0-C$, așàdar: $\sin B=\cos C$. Punând această valoare în (1), dobândim:

$$b = a \cos C,$$

care este una din relațiile (2).

Tot asemenea vom deduce și formulele (1) din (2)

Observarea II. Ridicând la patrat formulele:

$$b = a \sin B,$$
$$c = a \cos B,$$

și adunând membru cu membru, obținem:

$$b^2 + c^2 = a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) = a^2;$$

prinurmare *pătratul ipotenusei este egal cu suma pătratelor ambelor catete,* rezultat pe care-l cunoaștem deja din geometrie.

Trebue însă să observăm că aceasta nu se poate considerà ca o demonstrațiune nouă a teoremei pătratului ipotenusei, ci ca o simplă verificare, căci formula

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1,$$

cu care ne-am servit aci, a fost chiar ea stabilită pe baza teoremei pătratului ipotenusei.

113. **Teorema III.** *In orice triunghiu dreptunghiu, o latură a unghiului drept este egală cu cealaltă latură înmulțită cu tangenta unghiului opus.*

Relația ce trebue demonstrată este

$$b = c \operatorname{tg} B$$

Asemănarea triunghiurilor BCA și BGF de mai sus ne dă:

$$\frac{CA}{BA} = \frac{GF}{BF}, \text{ sau } \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{tg} B}{1},$$

deunde

$$b = c \operatorname{tg} B. \tag{3}$$

C.C.T.D.

Asemenea vom aveà şi

$$c = b \operatorname{tg} C. \tag{4}$$

114. **Observarea I.** Fiindcă $B + C = 90^0$, avem:

$$B = 90^0 - C, \text{ şi } C = 90^0 - B;$$

prinurmare: $\operatorname{tg} B = \cot C$, şi $\operatorname{tg} C = \cot B$. Punând aceste valori în (3), avem:

$$\left.\begin{array}{l} b = c \cot C, \\ c = b \cot B, \end{array}\right\} \tag{4}$$

adică *într'un triunghiu dreptunghiu, o latură a unghiului drept este egală cu cealaltă latură înmulţită cu cotangenta unghiului alăturat.*

115. **Observarea II.** Relaţiunile (3) şi (4) se pot deduce din (1) şi (2) prin nişte simple împărţiri. Inadevăr, divizând ecuaţiunile (1) şi (2) respectiv una prin alta, avem:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\cos C},$$

sau:

$$b = c \operatorname{tg} B, \quad c = b \operatorname{tg} C;$$

şi făcând diviziunea în sens contrariu,

$$\frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\sin B}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\cos C}{\sin C},$$

deunde

$$c = b \cot B, \quad b = c \cot C.$$

Triunghiuri oarecari sau oblicunghe.

116 **Teorema I.** *Intr'un triunghiu rectiliniu oarecare laturile sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse.*

Relațiunea ce se cere a se demonstrà este:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

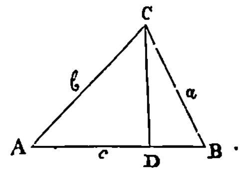


Fig. 24.

Din vârful C (Fig. 24), lăsăm perpendiculara CD pe AB. In triunghiul ACD, avem (111):

$$CD = AC \sin A, \text{ sau: } CD = b \sin A.$$

In CDB avem asemenea

$$CD = CB \sin B, \text{ sau: } CD = a \sin B$$

Comparând aceste două ecuațiuni, vedem că:

$$a \sin B = b \sin A,$$

și divizând ambii membri cu sin A sin B

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Vom demonstrà asemenea că

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Putem dar scrie șirul de rapoarte egale:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{1}$$

C C.T.D.

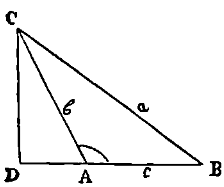


Fig. 25.

Să vedem dacă aceste relațiuni subsistă și când triunghiul are un unghiu A obtus. In acest caz, din triunghiul CDB (fig. 25), avem:

$$CD = CB \sin B, \text{ sau: } CD = a \sin B;$$

din CDA avem asemenea:

$$CD = CB \sin CAD$$

sau

$$CD = b \sin (180^0 - A),$$

şi fiindcă $\sin (180^0 - A) = \sin A$ (26).

$$CD = b \sin A;$$

aşà dar

$$a \sin B = b \sin A,$$

deunde

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Prinurmare relaţiunile (1) sunt generale.

117. **Teorema II.** *In orice triunghiu rectiliniu oarecare o latură este egală cu suma celorlalte două, înmulţite fiecare respectiv cu cosinusul unghiului ce această latură face cu latura considerată.*

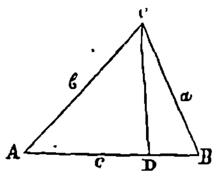


Fig. 28.

După figura 28 avem:

$$c = AD + DB.$$

Insă în ACD

$$AD = b \cos A,$$

şi în CDB,

$$DB = a \cos B.$$

Punând aceste valori în ecuaţia de sus,

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

C.C.T.D.

Dacă triunghinl este obstusunghiu avem (fig. 29):

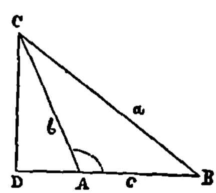


Fig. 29.

$$c = BD - DA,$$

şi fiindcă

$$DB = a \cos B \text{ şi } DA = b\cos (180^0 - A)$$

avem:

$$c = a \cos B - b \cos (180 - A),$$

însă $\cos (180^0 - A) = - \cos A$; prinurmare

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Făcând asemenea pentru celelalte laturi, vom găsì valori analoage; avem dar cele trei ecuaţiuni următoare;

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B, \\ b &= a \cos C + c \cos A, \\ c &= a \cos B + b \cos A. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

118. **Teorema III.** *Intr'un triunghiu rectiliniu oarecare, pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, minus de două ori produsul acelor laturi prin cosinusul unghiului cuprins între ele.*

Să înmulţim pe prima ecuaţiune din (2) cu a, pe a doua cu b, pe a treia cu $-c$, şi să le adunăm:

$$a^2 + b^2 - c^2 = ab \cos C + ac \cos B + ab \cos C$$
$$+ bc \cos A - ac \cos B - bc \cos A$$

şi făcând toate reducerile, obţinem:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

In mod analog vom obţine pe b^2 şi a^2, aşa că vom aveà următoarele trei ecuaţiuni:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C \end{aligned}\right\}$$

Sistemul de ecuaţiuni (3) fiind dedus din sistemul (2) cele două sisteme sunt echivalente.

119. R. Aceste trei ecuaţiuni se pot deduce şi direct. Ştim din geometrie, că pătratul laturii opuse la un unghiu ascuţit este egal cu suma pătratelor celorlalte

laturi, minus de două ori produsul uneia din ele prin

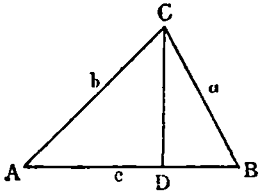


Fig. 26

proiecţia celei de a doua pe cea dintâiu, ceeace se exprimă prin relaţiunea (fig. 26):

$$BC^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times AD.$$

Insă $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$, şi în triunghiul dreptunghiu CDA avem :

$$AD = AC \cos A,$$

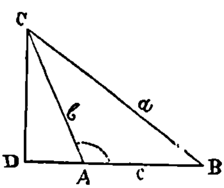
aşà dar relaţia de sus devine :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Dacă latura considerată se opune la un unghiu obtuz, relaţiunea geometrică este (fig. 27) :

$$CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2AB \times DA.$$

Insă în triunghiul drepunghiu CDA avem :



Fgi. 27.

$$DA = CA \cos CAD = b \cos(180^0 - A) = -b \cos A \ (26);$$

punând în relaţia de mai sus această valoare, şi înlocuind pe CB, CA, AB, cu a, b, c, avem :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

care este identică cu ecuaţiunea găsită mai înainte.

Tot astfel vom găsi şi expresiunea valorii lui b^2 şi c^2. Obţinem astfel cele trei ecuaţiuni (3).

120\. R. Sistemele de ecuaţiuni (1), (2) şi (3) se pot deduce unele din altele.

Pentru a deduce ecuaţiunile (2) din (3), adunăm primele două ecuaţiuni (3); avem:

$$a^2 + b^2 = b^2 + 2c^2 - 2bc \cos A + a^2 - 2\,ac \cos B,$$

şi făcând toate reducerile,

$$c = a \cos B + b \cos A$$

care este una din ecuaţiunile (2). Tot asemenea vom obţine şi pe celelalte două.

Să demonstrăm acum că sistemele (2) şi (3) se pot deduce din ecuaţiunile fundamentale

$$A + B + C = 180^0, \tag{a}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{b}$$

Relaţiunea (a) dă:

$$C = 180^0 - (A + B),$$

deunde

$$\sin C = \sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

Dacă însemnăm cu m valoarea raportului constant

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

vom aveà:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m$$

deunde

$$\frac{a}{m} = \sin A, \quad \frac{b}{m} = \sin B, \quad \frac{c}{m} = \sin C.$$

Punând aceste valori în (c) şi făcând reducerile,

$$c = a \cos B + b \cos A,$$

care este una din ecuaţiunile (2).

Să scoatem relaţiunea (b) din (3). Prima din aceste ecuaţiuni dă:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

şi ridicând la pătrat,

$$\cos^2 A = \frac{b^4 + c^4 + a^4 + 2\,b^2c^2 - 2\,a^2b^2 - 2\,a^2c^2}{4\,b^2\,c^2};$$

scăzând această ecuaţiune din $1 = 1$ şi reducând,

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = \frac{2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4\,b^2\,c^2};$$

divizând ambii membrii cu a^2,

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{2\,b^2\,c^2 + 2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4\,a^2\,b^2\,c^2}$$

Dacă din a doua ecuaţiune (3) vom scoate valoarea lui $\frac{\sin^2 B}{b^2}$ şi din a treia pe a lui $\frac{\sin^2 C}{c^2}$, vom găsì tot aceeaş valoare ca şi pentru $\frac{\sin^2 A}{a^2}$; prinurmare:

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2},$$

şi extrăgând rădăcina pătrată,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

cari sunt chiar ecuaţiunile (1).

Aşà dar cele trei sisteme de ecuaţiuni (1), (2), (3) se pot deduce unele din altele; prinurmare ele sunt equivalente. Tot asemenea şi ecuaţiunea

$$A + B + C = 180^0$$

se poate deduce din acele trei sisteme de ecuaţiuni. Pentru aceasta, însemnând iarăş cu m raportul constant al laturei către sinusul unghiului opus, avem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m,$$

din cari:

$$a = m \sin A, \quad b = m \sin B, \quad c = m \sin C,$$

şi punând aceste valori în una din ecuaţiunile (3), spre exemplu în cea dintâiu şi împărţind cu m, avem:

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B,$$

sau

$$\sin A = \sin (B + C);$$

deci, fiindcă arcele A şi B + C au acelaş sinus cu acelaş semn, trebue să avem:

$$A = B + C, \text{ sau: } A = 180^0 - (B + C).$$

Prima ipoteză nu se poate admite; căci, de vreme ce noi n'am făcut până acum nicio supoziţiune asupra valorii relative a unghiurilor A, B, C, unghiul A s'ar puteà să fie şi cel mai mic din toate, şi atunci ecuaţiunea

$$A = B + C$$

ar fi absurdă. Vom admite dar numai pe a doua

$$A = 180^0 - (B + C), \text{ sau: } A + B + C = 180^0,$$

care este chiar ecuaţiunea (a) din formulele fundamentale.

Unghiuri în funcţiune de laturi.

111. Din ecuaţiunea fundamentală

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

deducem, după teoria proporţiilor:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a - b}{a + b}$$

sau, înlocuind prin formule calculabile prin logaritmi în membrul întâiu

$$\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

Insă din

$$A+B+C = 180^0$$

deducem:

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$$

prinurmare

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}; \quad \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}$$

şi deci vom aveà:

$$\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

deunde deducem:

$$\mathrm{tg}\,\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

Operând asemenea, vom găsì încă două relaţiuni: aşa că vom aveà un nou sistem de ecuaţiuni calculabile prin logaritmi, cari cuprind fiecare câte două laturi şi toate unghiurile:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}\,\frac{A-B}{2} &= \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},\\
\mathrm{tg}\,\frac{A-C}{2} &= \frac{a-c}{a+c}\cot\frac{B}{2},\\
\mathrm{tg}\,\frac{B-C}{2} &= \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.
\end{aligned}\right\}$$

122. Relaţiunea

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A,$$

dă:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}.$$

Insă avem (58):

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

Punând în aceste ecuaţiuni, în loc de cos A valoarea sa, vom avea:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}}{2}} = \sqrt{\frac{2\,b\,c - b^2 - c^2 + a^2}{4\,b\,c}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2\,b\,c)}{4\,b\,c}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4\,b\,c}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4\,b\,c}},$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}}{2}} = \sqrt{\frac{2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2}{4\,b\,c}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4\,b\,c}} = \sqrt{\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4\,b\,c}}.$$

Pentru înlesnire punem:

$$2p = a + b + c;$$

scăzând perând din ambii membri $2a$, $2b$, $2c$, vom avea:

$$2(p - a) = b + c - a,\ 2(p - b) = a + c - b,\ 2(p - c) = a + b - c;$$

şi substituind toate aceste valori în ecuaţiunile de mai sus,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)\,2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p\,.\,2(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

ecuaţiuni cari dau sinusul şi cosinusul jumătăţii unui unghiu în funcţiune de laturile triunghiului. Făcând asemenea şi pentru celelalte două unghiuri, obţinem cele două sisteme de ecuaţiuni următoare:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.\end{aligned}\right\}\ (4)\qquad \left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}.\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ba}}.\end{aligned}\right\}\ (5)$$

Dacă dividem fiecare ecuaţiune din sistemul (4) prin ecuaţiunea corespondentă din sistemul (5), obţinem un nou sistem de formule:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

In toate formulele (4), (5), (6), trebuie să luăm pentru radical semnul $+$; căci unghiurile triunghiului fiind toate mai mici decât 180^0, jumătăţile lor vor fi mai mici de 90^0, şi prinurmare liniile lor trigonometrice vor fi pozitive.

Suprafaţa triunghiului.

123. Se ştie că suprafaţa unui triunghiu este egală cu jumătatea produsului bazei prin înălţimea sa. Astfel în triunghiul ABC (fig. 30),

$$\text{suprafaţa } s = \frac{1}{2} AB \times CD.$$
$$= \frac{1}{2} c \times CD.$$

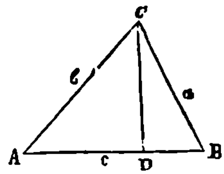


Fig. 30.

Insă în triunghiul dreptunghiu ACD avem :

$$DC = AC \sin A = b \sin A.$$

Prinurmare

$$s = \frac{bc \sin A}{2}, \qquad (1)$$

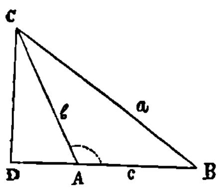


Fig. 31.

formulă care dă *suprafaţa triunghiului în funcţiune de două laturi şi unghiul cuprins între ele.*

Dacă triunghiul este obtusunghiu, avem încă (fig. 31) :

$$CD = CA \sin CAD = b \sin (180^\circ - A) = b \sin A,$$

valoare pe care punând-o în

$$s = \frac{1}{2} c \times CD,$$

obţinem :

$$s = \frac{bc \sin A}{2}.$$

Prinurmare formula (1) este generală.

124. Din relaţiunea

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

scoatem :

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B},$$

pe care punând-o în (1), avem:

$$s = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B},$$

şi fiindcă

$$B = 180^0 - (A + C)$$

$$s = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin (A + C)}$$

formulă care dă *suprafaţa triunghiului în funcţiune de o latură şi cele două unghiuri alăturate.*

125. Dacă în

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

înlocuim pe $\sin \frac{A}{2}$ şi $\cos \frac{A}{2}$ prin valorile lor date prin ecuaţiunile (4) şi (5) (122), avem :

$$\sin A = 2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}}{bc}.$$

Punând această valoare a lui sin A în (1) şi făcând reducerile, obţinem formula :

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

care ne dă *suprafaţa triunghiului în funcţiune de cele trei laturi ale sale.*

126. R. Inmulţind între ele membru cu membru relaţiunile (4), (5), (6) dela paragr. 122 găsim:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{s^2}{p\ abc}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p}{abc}s$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=\frac{s}{p^2}.$$

Fiecare din aceste trei relaţiuni ne dă o nouă expresiune pentru s.

127. Exemple. 1°. Să calculăm suprafaţa unui triunghiu în care cunoaştem: $b=234^m,504$; $c=203^m,17$; $A=41^0 43'56'',8$.

După (1), avem:

$$s=\frac{234^m,504\times 203^m,17\times\sin 41^0 43'56'',8}{2},$$

deunde

$$\log s=\log 234^m,504+\log 203^m,17$$
$$+\log\sin 41^0 43'56'',8-\log 2$$
$$=2,3701502+2,3078596+\overline{1},8232479-0,3010300=4,2002277$$

prinurmare

$$s=15857^{mp},244.$$

2°. Să calculăm suprafaţa unui triunghiu, în care se cunoaşte: $b=234^m,504$; $A=41^0 43'56'',8$; $C=58^0 29'\ 48'',6$

După formula (2), avem:

$$\log s=2\log 234^m,504+\log\sin 41^0 43'56',8$$
$$+\log\sin 58^0 29'\ 48'',6-\log 2-\log\sin 100^0 13'45'',4.$$
$$=4,7403004+\overline{1},8232479+\overline{1},9307511-0,3010300$$
$$-\overline{1},9930414=4,2002280,$$

adică

$$s=15857^{mp},255.$$

3°. Să se afle suprafaţa unui triunghiu în care se cunoaşte $a = 158^m,62$; $b = 234^m,504$; $c = 203^m,17$.

Formula (3) dă:

$$\log s = \frac{\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)}{2}$$

Insă în cazul de faţă avem: $p = 298^m,148$; $p - a = 139^m,527$; $p - b = 63^m,643$; $p - c = 94^m,977$.

Prinurmare

$$\log s = \frac{2,4744304 + 2,1446583 + 1,8037506 + 1,9776154}{2}$$

$$= 4,2002288,$$

sau

$$s = 15857^{mp},284.$$

128. In acelaş mod se poate găsì expresiunea suprafeţei unui patrulater oarecare ABCD (fig. 32), în funcţiune de diagonalele sale AC şi BD şi de unghiul a ce fac ele una cu alta. Avem:

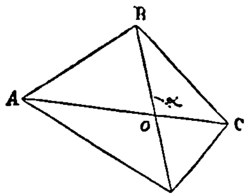


Fig. 32

$$ABCD = AOB + BOC + COD + DOA.$$

Insă în cele patru triunghiuri, considerând şi că:

$$\sin(180^0 - a) = \sin a,$$

avem:

$$AOB = \frac{1}{2} AO \times OB \sin a,$$

$$BOC = \frac{1}{2} OB \times OC \sin a,$$

$$COD = \frac{1}{2} OC \times OD \sin a,$$

$$DOA = \frac{1}{2} OD \times AO \sin a,$$

şì adunând,

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{2}\sin a(\mathrm{AO}\times\mathrm{OB}+\mathrm{OB}\times\mathrm{OC}+\mathrm{OC}\times\mathrm{OD}+\mathrm{OD}\times\mathrm{AO})$$

$$= \frac{1}{2}\sin a\{\mathrm{AO}\,(\mathrm{OB}+\mathrm{OD})+\mathrm{OC}(\mathrm{OB}+\mathrm{OD})\}$$

$$= \frac{1}{2}\sin a(\mathrm{AO}\times\mathrm{BD}+\mathrm{OC}\times\mathrm{BD})$$

$$= \frac{1}{2}\sin a\times\mathrm{BD}\,(\mathrm{AO}+\mathrm{OC})$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}\,\sin a;$$

adică *suprafața unui atrulpater oarecare este egală cu jumătatea produsului diagonalelor prin sinusul unghiului ce fac ele una cu alta.*

Exemplu. Date: $\mathrm{AC} = 117^{m}, 13$; $\mathrm{BD} = 98^{m},56$; $a = 63^{0}14'36''3$.

Necunoscuta : $\mathrm{ABCD} = 5154^{mp},124$.

Raza cercului circumscris.

129. Fie triunghiul ABC (fig. 33), la care circumscriem un cerc, a cărui rază o însemnăm cu R. Ducem diametrul $\mathrm{CD} = 2\mathrm{R}$, și unim D cu B.

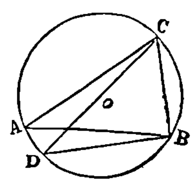


Fig. 33.

Unghiul CBD este drept, căci este înscris într'un semicerc și prinurmare triunghiul dreptunghiu CBD dă ;

$$\mathrm{CB} = \mathrm{CD}\sin\mathrm{D};$$

însă $\mathrm{CB} = a$, $\mathrm{CD} = 2\mathrm{R}$, $\mathrm{D} = \mathrm{A}$; formula dar se va scrie :

$$a = 2\mathrm{R}\sin\mathrm{A},$$

deunde

$$\mathrm{R} = \frac{a}{2\sin\mathrm{A}};$$

și înmulțind ambii termeni ai fracțiunii cu bc,

$$R = \frac{abc}{2\,bc \sin A}$$

Insă după formula (1) (123),

$$\frac{bc \sin A}{2} = s,$$

deunde

$$2\,bc \sin A = 4\,s:$$

aşà dar

$$R = \frac{abc}{4\,s} = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

Exemplu. Date: $a = 158^{\mathrm{m}},62$; $b = 234.^{\mathrm{m}}504$; $c = 203^{\mathrm{m}},17$.

Necunoscuta : $R = 119^{\mathrm{m}},1458$.

Raza cercului înscris.

130. Fie triunghiul ABC (fig. 34). Pentru a construì cercul înscris, după cum ştim, ducem bisectriţele celor trei unghiuri, cari se întâlnesc toate în un punct O, centrul cercului înscris; dacă din acest punct lăsăm perpendicularele OD, OE, OF pe laturile triunghiului, aceste perpendiculare sunt razele cercului înscris. Cunoscând dară centrul şi lungimea razei cercului înscris, va fi lesne a descrie acel cerc.

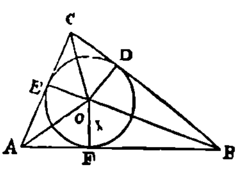


Fig. 34.

Să găsim o expresiune a acestei raze r. După figură,

$$ABC = AOB + BOC + COA;$$

$$\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AB}\times\mathrm{OF} = \frac{1}{2}\,cr,$$

$$\mathrm{BOC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{CB}\times\mathrm{OD} = \frac{1}{2}\,ar,$$

$$\mathrm{COA} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AC}\times\mathrm{OE} = \frac{1}{2}\,br,$$

şi adunând aceste trei egalităţi membru cu membru,

$$\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\,r\,(a + b + c);$$

şi punând

$$\mathrm{ABC} = s, \quad a + b + c = 2p.$$

$$s = pr,$$

sau

$$r = \frac{s}{p}.$$

Dacă substituim în locul lui s valoarea sa

$$\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}.$$

Exemplu. Date: $a = 158^m{,}62$; $b = 234^m{,}504$: $c = 203^m{,}17$:

Necunoscuta: $r = 53^m{,}1861$.

Razele cercurilor exînscrise.

131. *Cerc exînscris* la un triunghiu se numeşte un cerc tangent la o latură a triunghiului şi la prelungirea celorlalte două.

Pentru a construì cercul exînscris tangent la o latură BC=a a triunghiului (fig. 35), ducem bisectriţele BO şi CO ale unghiurilor exterioare CBD şi BCF; intersecţiunea lor O este centrul cercului căutat; din acest punct lăsând perpendicularele OD, OE, OF, pe latura BC şi pe prelungirile celorlalte două, aceste perpendiculare vor fi egale cu raza căutată α a cercului exînscris tangent la latura a.

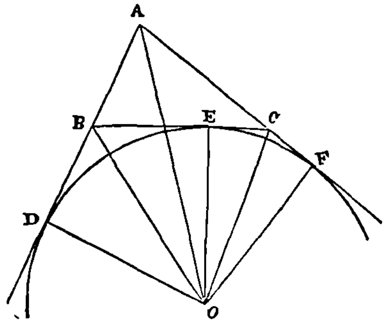


Fig. 35.

Pentru a găsì o expresiune a acestei raze, observăm că

$$ABC = ABO + ACO - BCO$$

şi dacă în triunghiurile ABO, ACO, BCO, considerăm respectiv ca baze pe AB $= c$, AC $= b$, BC $= a$, şi ca înălţimi pe OD $=$ OF $=$ OE $= \alpha$, avem:

$$s = \frac{1}{2} c\alpha + \frac{1}{2} b\alpha - \frac{1}{2} a\alpha = \frac{1}{2}\alpha(b + c - a) = \alpha(p - a),$$

deunde

$$\alpha = \frac{s}{p - a},$$

Punând în loc de s valoarea sa şi reducând,

$$\alpha = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

In acelaş mod vom găsì şi expresiunea razelor cercurilor exînscrise tangente la laturile b şi c:

$$\beta = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}.$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

132. Formulele (6) (122) dau:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)}}=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

deunde

$$\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}=p\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

şi punând această valoare în formula care dă pe α avem:

$$\alpha=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Asemenea

$$\beta=p\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

$$\gamma=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Exemple. 1°. Date:

$$a=158^m{,}62;\ b=234^m{,}504;\ c=203^m{,}17.$$

Necunoscute:

$$\alpha=113^m{,}6503;\ \beta=249^m{,}1600;\ \gamma=166^m{,}9592.$$

2°. Date:

p=482 m,356; A=52°16′35″,4; B=76°25′57″4; C 51°17′27″,2

Necunoscute:

$$\alpha=236^m{,}7031;\ \beta=379^m{,}7990;\ \gamma=231^m{,}5768.$$

133. Din formulele cari dau pe R, r, α, β, γ, se pot deduce mai multe altele cari de şi nu au mare importanţă prin ele însăşi, pot însă servi ca verificaţiuni. Iacă câtevà din acele formule:

1°. Făcând inversa ecuaţiunilor

$$r=\frac{s}{p},\ \alpha=\frac{s}{p-a},\ \beta=\frac{s}{p-b},\ \gamma=\frac{s}{p-c},$$

se obţiune:

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{s},\quad \frac{1}{\alpha}=\frac{p-a}{s},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{p-b}{s},\quad \frac{1}{\gamma}=\frac{p-c}{s},$$

Adunând pe cele trei din urmă din aceste ecuaţiuni, avem:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{p-a+p-b+p-c}{s}=\frac{3p-(a+b+c)}{s}=\frac{p}{s}$$

sau

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{r}. \tag{1}$$

2⁰. Inmulţind între ele formulele:

$$r=\frac{s}{p},\quad \alpha=\frac{s}{p-a},\quad \beta=\frac{s}{p-b},\quad \gamma=\frac{s}{p-c}, \tag{a}$$

obţinem:

$$r\alpha\beta\gamma=\frac{s^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{s^4}{s^2}=s^2$$

deunde

$$s=\sqrt{r\alpha\beta\gamma}. \tag{2}$$

3⁰. Adunând una cu alta pe cele trei din urmă din formulele (a) şi scăzând pe cea dintâiu, avem:

$$\alpha+\beta+\gamma-r=\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}-\frac{s}{p}$$

$$=s\,\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{1}{s}\{p(p-c)[(p-b)+(p-a)]+(p-a)(p-b)[p-(p-c)]\}.$$

Insă

$$p-b+p-a=2p-(a+b)=c,$$
$$p-(p-c)=c;$$

prinurmare

$$\alpha+\beta+\gamma-r=\frac{c}{s}\{p(p-c)+(p-a)(p-b)\}$$

$$=\frac{c}{s}\left\{\frac{(a+b)+c}{2}\times\frac{(a+b)-c}{2}+\frac{c+(b-a)}{2}\times\frac{c-(b-a)}{2}\right\}$$

$$=\frac{c}{s}\left\{\frac{(a+b)^2-c^2}{4}+\frac{c^2-(b-a)^2}{4}\right\}$$

$$=\frac{c}{4s}\times 4\,ab=\frac{abc}{s}.$$

Însă avem:

$$R=\frac{abc}{4s};$$

așà dar:

$$\alpha+\beta+\gamma-r=4R. \tag{3}$$

134. In caz când triunghiul este dreptunghiu, putem obține alte formule, știind că în cazul acesta

$$a^2=b^2+c^2;\ s=\frac{b}{2}\,. \tag{A}$$

1°. Inmulțind una cu alta ecuațiunile

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\quad \alpha=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

avem:

$$r\,\alpha=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)^2(p-c)^2}{p(p-a)}}$$

$$=(p-b)(p-c)=\frac{a+c-b}{2}\times\frac{a+b-c}{2};$$

efectuând produsele și făcând toate reducerile, având în vedere și ecuațiunile (A), obținem:

$$r\,\alpha=s.$$

Asemenea vom aveà:

$$\beta\gamma = \sqrt{\frac{p^2(p-a)^2(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)}} = p(p-a) = s.$$

Prinurmare

$$r\alpha = \beta\gamma \tag{4}$$

2⁰. Scăzând una din alta ecuațiunile

$$\alpha = \frac{s}{p-a}, \quad r = \frac{s}{p},$$

vom aveà:

$$\alpha - r = \frac{s}{p-a} - \frac{s}{p} = s\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p}\right)$$

$$= s\,\frac{p-(p-a)}{p(p-a)} = \frac{s\,a}{p(p-a)}.$$

Punând în loc de p valoarea sa

$$\frac{a+b+c}{2},$$

și făcând toate reducerile posibile, având în vedere relațiunile (A), ajungem la:

$$\alpha - r = a$$

Adunând între dânsele ecuațiunile

$$\beta = \frac{s}{p-b}\ \gamma = \frac{s}{p-c}$$

avem:

$$\beta + \gamma = s\left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right).$$

$$= s\,\frac{p-b+p-c}{(p-b)(p-c)} = \frac{sa}{(p-b)(p-c)},$$

și făcând reducerile,

$$\beta + \gamma = a.$$

Așà dară

$$\alpha - r = \beta + \gamma \tag{5}$$

Exemple. 1°. Verificând prin formula (3) (133), valorile găsite mai sus:

$$R = 119^m,1458;\ r = 53^m,1861;\ \alpha = 113^m,6503$$

$$\beta = 149^m,1600;\ \gamma = 166^m,9592,$$

găsim numai diferenţa $0^m,0002$, care provine din micile cantităţi cari se neglijează totdeauna în calculele logaritmice.

2°. Aceleaşi valori, verificate prin formula

$$s = \sqrt{r\alpha\beta\gamma},$$

nu dau nicio diferenţă de valoarea lui s găsită la *exemplul* 3° (125).

3°. Intr'un triunghiu dreptunghiu, în care avem:

$$a = 302^m,752;\ b = 185^m,121;\ c = 139^m,56,$$

s'a găsit pentru valoarea razelor cercurilor înscris şi exinscrise valorile următoare:

$$r = 60^m,9645;\ \alpha = 363^m,7165;\ \beta = 124^m,1565;$$

$$\gamma = 178^m,5955.$$

Aceste valori, verificate prin ambele relaţiuni:

$$\alpha - r = \beta + \gamma, \text{ şi } \alpha r = \beta\gamma,$$

nu dau nicio diferenţă.

CAPITOLUL II.

REZOLUŢIUNEA TRIUNGHIURILOR

Triunghiurile dreptunghe.

135. La rezoluţiunea triunghiurilor dreptunghe se prezintă patru cazuri: 1°. Când se dă ipotenusa şi un unghiu ascuţit, şi se cer cele două laturi ale unghiului drept şi celalt unghiu ascuţit. 2°. Când se dă ipotenusa şi o latură a unghiului drept, şi se cere cealaltă latură şi cele două unghiuri ascuţite. 3°. Când se dă o latură a unghiului drept şi un unghiu ascuţit, şi se cere cealaltă latură a unghiului drept, ipotenusa şi celalt unghiu ascuţit. 4°. Când se dau cele două laturi ale unghiului drept, şi se cere ipotenusa şi cele două unghiuri ascuţite.

136. Cazul I. *Dându-se ipotenusa* a *şi unghiul ascuţit* B *al unui triunghiu dreptunghiu, să se calculeze cele două laturi,* b *şi* c, *ale unghiului drept, şi unghiul ascuţit* C.

Vom determinà unghiul C prin relaţiunea cunoscută din geometrie:

$$B + C = 90^0, \text{ din care : } C = 90^0 - B.$$

Luturile b şi c se vor determinà prin formulele cunoscute (111).

$$b = a \sin B, \quad c = a \sin C.$$

Exemplu. *Se dă $a = 10$ m şi $B = 30^0$; să se rezolve triunghiul.*

Vom aveà:

$$C = 90^0 - B = 90^0 - 30^0 = 60^0$$

$$b = a \sin B = 10 \sin 30^0 = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ m.}$$

$$c = a \cos B = 10 \cos 30^0 = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m.}$$

137. **Cazul II.** *Să rezolvăm un triunghiu dreptunghiu în care se cunoaşte ipotenusa* a *şi o latură b a unghiului drept.*

Elementele necunoscute sunt c, B, C. Pentru a le determinà avem formulele:

$$b = a \sin B = a \cos C,$$

din care deducem:

$$\sin B = \cos C = \frac{b}{a},$$

cari dau valoarile lui B şi C. Pentru a aflà pe c, întrebuinţăm relaţiunea:

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

din care

$$c^2 = (a + b)(a - b), \text{ sau: } c = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

138. Unghiul C, după această metodă, se determină prin cosinusul său; însă când b diferă prea puţin de a, cantitatea $\frac{b}{a}$ diferând şi ea puţin de 1, unghiul C este mic, şi fiindcă ştim (98) că unghiurile mici se determină rău prin cosinusul lor, ecuaţiunea precedentă nu ne va de pe C cu destulă preciziune. In acest caz, calculăm mai întâiu pe c, şi atunci formula

$$c = b \operatorname{tg} C$$

ne dă:

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

şi unghiul C, determinat acum prin tangenta sa, va fi calculat cu mai multă exactitate.

Putem încă întrebuinţà, pentru calculul lui C, şi formula următoare cunoscută (58):

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

în care, punând în loc de cos C valoarea sa $\frac{b}{a}$, şi înmulţind ambii termeni ai fracţiunii cu a, obţinem:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

Calculul făcându-se prin logaritmi, această din urmă formulă are avantagiul că cuprinde numai logaritmii lui $a-b$ şi $a+b$, care intră în valoarea lui c.

139. Cazul III. *In un triunghiu dreptunghiu cunoscând latura* b *a unghiului drept şi unghiul ascuţit* B, *să se calculeze ipotenusa* a, *latura* c *şi unghiul* C.

Unghiul C se determină direct prin formula:

$$C = 90^0 - B;$$

iar a şi c se vor află prin formulele ştiute (111, 113):

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad c = b \cot B.$$

Exemplu. *Se dă $b=8$ m şi $B=60^0$, să se rezolve triunghiul.*

Vom aveà:

$$C = 90^0 - B = 90^0 - 60 = 30^0$$

$$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$c = b \cot B = 8 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

140. **Cazul IV.** *Dându-se cele două laturi* b *și* c *ale unghiului drept, să se calculeze ipotenusa* a *și unghiurile ascuțite* B *și* C.

Determinăm mai întâiu unghiurile B şi C prin formulele

$$b = c \operatorname{tg} B, \quad b = c \cot C,$$

din cari

$$\operatorname{tg} B = \cot C = \frac{b}{c}$$

Ipotenusa se determină în urmă prin una din formulele:

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B,$$

deunde

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad a = \frac{c}{\cos B}.$$

Observare. Am fi putut calculà pe a deadreptul prin

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Insă acastă formulă nu este calculabilă prin logaritmi. Pentru a o face calculabilă prin logaritmi, vom pune pe c^2 ca factor comun, şi atunci

$$a^2 = c^2 \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right).$$

Punem

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} \varphi ;$$

atunci

$$a^2 = c^2 (1 + \operatorname{tg}^3 \varphi) = c^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}\right) = c^2 \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{c^2}{\cos^2 \varphi},$$

deunde

$$a = \frac{c}{\cos \varphi},$$

formulă calculabilă prin logaritmi, care ne ar da pe a. Insă pentru aceasta trebue să cunoaştem mai întâi pe φ şi dacă comparăm formula (a) cu (b), vedem că

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{c},$$

adică

$$B = \varphi.$$

Prinurmare, chiar după această metodă, determinarea lui a depinde tot de calculul lui B.

Verificaţiuni.

141. Pentru a fi siguri de rezultatele obţinute prin calculele ce am expus, trebue să avem mijloace de a le verifica.

Mijloacele cele mai ordinare pentru a face aceste verificaţiuni constau în a calculà unul din elementele date cu ajutorul elementelor calculate. Dacă valoarea aflată astfel nu diferă decât prea puţin de valoarea dată, calculul este exact. Spre exemplu, dacă am calculat pe a, c, C, dându-ni-se b, B, cu valorile găsite prin calcul pentru a şi c vom calculà pe b, prin formula

$$b = \sqrt{(a+c)(a-c)}$$

şi dacă valoarea aflată nu va diferì de valoarea dată a lui b, calculul va fi exact.

Exemple.

Cazul I

Date	Formule	Necunoscute
$a = 5836^m,43$;	$C = 90^0 - B$,	$C = 35^0 45' 31'',4$:
$B = 54^0 14' 28'',6$	$b = a \sin B$,	$b = 4736^m,1758$:
	$c = a \cos B$,	$c = 3410^m 6535$.

Calculul lui *C*.	Calculul lui *b*.	Calculul lui *c*.
90^0	$\log a = 3,7661473$	$\log a = 3,7661473$
$B = 54^0 14' 28'',6$	$\log \sin B = \overline{1},9092805$	$\log \cos B = \overline{1},7666903$
$C = 35^0 45' 31'',4$	$\log b = 3,6754278$	$\log c = 3,5328376$
	$b = 4736^m,1758$	$c = 3410^m,6535$

Cazul II.

Date	Formule	Necunoscute
$a = 574^m,35$,	$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}$	$B = 41^0 58' 6''' 41$.
$b = 384^m,08$.		$C = 48^0 1' 53'',59$.
	$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$.	$c = 427^m,0369$.

Calculul lui *B* şi *C*.	Calculul lui *c*.
$\log b = 2,5844217$	$\log (a+b) = 2,9815604$
$- \log a = \overline{3},2408234$ (1)	$\log (a-b) = 2,2793703$
$\log \sin B = \log \cos C = \overline{1},8252451$	$2 \log c = 5,2604307$
$B = 41^0 58' 6'' 41$	$\log c = 2,6304655$
$C = 48^0 1' 53'',59$	$c = 427^m,0369$

---

(1) Se ştie din algebră că, în loc de a scădeà un logaritm din altul, putem adăogi acestui din urmă complimentul celui d'întâiu, adică diferenţa între acel logaritm şi o. Aceasta s'a făcut aci, şi în toate exemplele următoare, unde au fost a se scădeà logaritmi.

Verificare.

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

$$\log\ (a-b) = 2{,}2793703$$
$$-\log\ (a+b) = \overline{3}{,}0184396$$
$$2\ \log\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \overline{1}{,}2978099$$
$$\log\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \overline{1}{,}6489050$$
$$C = 48^0 1'53'',64 (\text{dif. } 0'',05).$$

Cazul III.

Date	Formule	Necunoscute
$b = 7536^m{,}14,$	$C = 90^0 - B,$	$C = 33^0 35' 46'',3,$
$B = 56^0 24' 1'' 3{,}7.$	$a = \dfrac{b}{\sin B}$	$a = 9047^m{,}4437,$
		$c = 5006^m{,}2782.$

$$c = b \cot B.$$

Calculul lui *C*.

$$\begin{array}{l} \quad 90^0 \\ B = 56^0 24' 13'',7. \\ \hline C = 33^0 35' 46'',3. \end{array}$$

Calculul lui *a*.

$$\log\ b = 3{,}8771490$$
$$-\log \sin B = 0{,}0793769$$
$$\log\ a = 3{,}9565259$$
$$a = 9047^m{,}4437$$

Calculul lui *c*.

$$\log\ b = 3{,}8771490$$
$$\log \cot\ B = \overline{1}{,}8223660$$
$$\log\ c = 3{,}6995150$$
$$c = 5006^m{,}2872$$

Cazul IV.

Date	Formule	Necunoscute
$b = 2236^m,34,$	$\operatorname{tg} B = \cot C = \frac{b}{c},$	$B = 30^0 22' 54'',85$
$c = 3814^m,51.$	$a = \frac{b}{\sin B}$	$C = 59^0 37' 5'',15,$
		$a = 4421^m,7305.$

Calculul lui *B* şi *C*

$$\log b = 3,3495379$$
$$-\log c = 4,4185613$$
$$\log \operatorname{tg} B = \log \cot C = \bar{1},7680992$$
$$B = 30^0 22' 54'',85,$$
$$C = 59^0 37' 5'',15.$$

Calculul lui *a*

$$\log b = 3,3495379$$
$$-\log \sin B = 0,2960544$$
$$\log a = 3,6455923$$
$$a = 4421^m,7306$$

Rezoluţiunea triunghiurilor oarecari oblicunghie.

142. La rezoluţiunea unui triunghiu oblicunghiu se pot prezentà patru cazuri: 1⁰. Când se dau o latură şi două unghiuri, şi se cer celelalte două laturi şi al treilea unghiu. 2⁰. Când se dau două laturi şi unghiul *cuprins între ele,* şi se cere a treia latură şi celelalte două unghiuri. 3⁰. Când se dau două laturi şi unghiul *opus la una din ele,* şi se cere a treia latură şi cele

lalte două unghiuri. 4⁰. Când se dau cele trei laturi şi se cer cele trei unghiuri.

143. Cazul I. *Intr'un triunghiu oarecare dându-se latura* a *și unghiurile* B *și* C, *să se determine al treilea unghiu* A *și laturile* b *și* c, *precum și suprafața* s.

Unghiul A se obține direct cu formula

$$A+B+C=180^0,$$

deunde

$$A=180^0-(B+C).$$

Apoi din relațiunile

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}, \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

deducem

$$b=\frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c=\frac{a \sin C}{\sin A}$$

Suprafața este dată prin formula cunoscută:

$$s=\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B+C)}.$$

144. Cazul II. *Dându-se laturile* a *și* b *și unghiul cuprins între ele* C *ale unui triunghiu oarecare, să calculăm a treia latură* c, *și unghiurile* A *și* B, *precum și suprafața* s.

Suma A+B a unghiurilor căutate este cunoscută din relațiunea:

$$A+B=180^0-C.$$

Diferența lor o vom calculà prin formula (3) (121):

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

Vom aveà dar prin aceste formule:

$$A+B=M,$$
$$A-B=N,$$

M şi N fiind nişte cantităţi cunoscute. Adunând şi apoi scăzând aceste egalităţi una din alta, şi împărţind cu 2, avem:

$$A=\frac{M+N}{2},$$

$$B=\frac{M-N}{2},$$

Unghiurile A şi B fiind astfel determinate, vom calculà pe c prin formula:

$$c=\frac{a \sin C}{\sin A}.$$

145. R. Dacă în loc de a se dà chiar laturile a şi b s'ar dà $\log a$ şi $\log b$ calculul diferenţei $A-B$ se face astfel:

fracţiunea

$$\frac{a-b}{a+b}$$

se scrie

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}$$

şi se determină un unghiu auxiliar φ, aşà ca

$$\operatorname{tg} \varphi=\frac{a}{b}$$

deunde

$$\log \operatorname{tg} \varphi=\log a-\log b.$$

Membrul al doilea fiind cunoscut, aflăm pe φ. Vom aveà

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg} \varphi-1}{\operatorname{tg} \varphi+1}$$

sau

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}45^0}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}45^0}=\operatorname{tg}(\varphi-45^0)$$

deci

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{tg}(\varphi-45^0)\cot\frac{C}{2}.$$

Suprafaţa este dată prin formula:

$$s=\frac{ab\sin C}{2}.$$

146. **Cazul III.** *Să se rezolve un triunghiu oarecare, în care se cunosc două laturi* a *şi* b, *şi unghiul A opus laturii* a.

Se caută c, B, C. Vom calculà mai întâiu pe B prin formula

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a},$$

şi apoi pe C prin

$$C=180^0-(A+B);$$

înfine vom aflà asemenea

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Suprafaţa s se va aflà prin formula

$$s=\frac{ab\sin C}{2}.$$

147. R. Fiindcă un unghiu se calculează cu mai multă preciziune prin tangenta sa, putem calculà pe B astfel: în formula:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

să înlocuim pe x cu 90^0+B; avem

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(90^0+B)}{1+\cos(90^0+B)}}$$

sau

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}$$

şi înlocuind pe sin B cu valoarea găsită, avem:

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right)=+\sqrt{\frac{a+b\sin A}{a-b\sin A}}.$$

Această formulă dă pentru unghiul $\left(45^0+\frac{B}{2}\right)$ două valori suplimentare, căci este mai mic decât 180^0, Valorile corespunzătoare pentru B sunt deasemenea suplimentare. Inadevăr, însemnând cu M unghiul ascuţit a cărui tangentă este

$$+\sqrt{\frac{a+b\sin A}{a-b\sin A}}$$

şi prin B_1 valoarea corespunzătoare lui B, avem

$$45^0+\frac{B_1}{2}=M \quad \text{deci} \quad B_1=2\,M-90^0.$$

Insemnând cu B_2 valoarea corespunzătoare lui B. când luăm unghiul obtus $180^0 - M$, a cărui tangentă este

$$-\sqrt{\frac{a+b\sin A}{a-b\sin A}}$$

avem

$$45^0+\frac{B_2}{2}=180^0-M, \quad \text{deci} \quad B_2=270^0-2M.$$

Avem deci

$$B_1+B_2=180^0.$$

148. **Discuțiune.** Mai întâiu vom reamintì în câteva cuvinte construcțiunea geometrică a triunghiului pentruca discuțiunea pe formule să fie mai bine înțeleasă.

Pentru a construì triunghiul cu elementele a, b, A, în un punct al unei drepte indefinite AB′ facem unghiul dat A, și pe dreapta AC luăm lungimea AC $= b$ (fig. 36); din C, cu o rază egală cu a, descriem un arc, care ne dă pe dreapta AB′ punctele B′ și B″, pe cari le unim cu C. Triunghiul căutat este ACB′ sau ACB″.

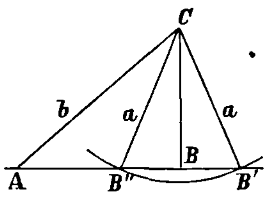


Fig. 36.

Formula

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

ne va dà pe B. Fracțiunea din membrul al doilea trebue să fie subunitară sau cel mult egală cu 1 deci trebue să avem

$$a \geqslant b \sin A;$$

prinurmare numai când datele problemei vor satisface această condiție, problema este posibilă. Această condiție rezultă și din figură. Pentru a obține punctul B pe dreapta AB′ trebue ca latura CB $= a$ să fie mai mare decât perpendiculara CD $= b$ sin A sau cel puțin egală cu ea.

Să presupunem că această condițiune este îndeplinită. In table știm că nu se găsesc decât unghiurile mai mici decât 90°, adică unghiurile ascuțite. Fie M unghiul *ascuțit* al cărui sinus este egal cu $\frac{b \sin A}{a}$; se știe însă (26) că și arcul suplimentar 180°—M, care este obtus, va aveà acelaș sinus; prinurmare trebue să vedem care din aceste două unghiuri, M și 180°—M, este adevărata soluțiune a chestiunei.

Pentruca M să fie o soluţiune a ecuaţiunei, trebue să avem:

$$A+M<180^0. \tag{a}$$

căci

$$A+M+C=180^0.$$

Asemenea, pentruca 180^0-M să fie o soluţiune, va trebui ca

$$A+180^0-M<180^0,$$

sau

$$A<M \tag{b}$$

Să vedem cari sunt cazurile în cari aceste condiţiuni pot fi împlinite.

1^0. Dacă $A>90^0$, *valoarea* 180^0-M *nu convine pentru* B, căci într'un triunghiu nu pot fi două unghiuri obtuse; rămâne dar numai M, care trebue încă să se supună condiţiunii (a), din care se deduce:

$$M<180^0-A.$$

Aci M este ascuţit; 180^0-A asemenea; prinurmare putem pune:

$$\sin M<\sin(180^0-A),$$

sau

$$\sin M<\sin A.$$

Insă

$$\sin M=\frac{b\sin A}{a};$$

prinurmare

$$\frac{b\sin A}{a}<\sin A,$$

deunde

$$b<a. \tag{1}$$

Dacă această condiţiune nu este împlinită, nu avem nicio soluţiune.

2°. Dacă $A = 90^0$, valoarea $180^0 - M$, fiind mai mare de 90^0, tot trebue lăsată, şi atunci (a) ne dă:

$90^0 + M < 180$, sau: $M < 90^0$, sau: $\sin M < 1$,
şi punând valoarea lui sin M şi a lui A,

$$\frac{b \sin 90^0}{a} < 1, \text{ sau: } b < a.$$

Condiţiunea este aceeaş ca şi în cazul când $A > 90^0$.

In rezumat dar, *dacă unghiul dat este obtus sau drept, triunghiul are o singură soluţiune cu condiţiune însă ca latura opusă la unghiul dat să fie mai mare decât cealaltă; dacă este egală cu dânsa, sau dacă este mai mică, triunghiul nu are nicio soluţiune.*

3°. Dacă $A < 90^0$, trebue să distingem cazurile când $b \sin A$ este mai mic, sau egal cu a.

Dacă

$$b \sin A < a,$$

formula

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

dă o valoare reală, M, pentru B. Această valoare, M, se poate primì totdeauna, căci condiţiunea (a) se poate totdeauna satisface; însă pentru a puteà admite şi soluţiunea $180^0 - M$, după (b), trebue să avem:

$$M > A;$$

şi fiindcă şi M şi A sunt ascuţite,

$$\sin M > \sin A, \text{ sau } \frac{b \sin A}{a} > \sin A,$$

deunde

$$b > a.$$

In acest caz dar se poate să fie două soluţiuni, M *şi* 180⁰—M*; însă cea din urmă convine numai când latura opusă unghiului dat este mai mică decât cealaltă.*

Dacă $b\sin A = a$, valoarea

$$\sin M = \frac{b \sin A}{a}$$

se reduce la

$$\sin M = 1, \text{ sau: } M = 90^0;$$

şi în cazul acesta, *cele două soluţiuni* M *şi* $180^0 - M$, *se reduc la una singură.*

Iacă un tabel care conţine rezultatul tutulor acestor discuţiuni:

$$A > 90^0 \begin{cases} a > b \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ soluţiune, } B < 90^0; \\ a = b \ldots\ldots\ldots & \multirow{2}{*}{\text{o soluţiuni;}} \\ a < b \ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

$$A = 90^0 \begin{cases} a > b \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ soluţiune, } B < 90^0; \\ a = b \ldots\ldots\ldots & \multirow{2}{*}{\text{o soluţiuni;}} \\ a < b \ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

$$A < 90^0 \begin{cases} b \sin A < a \begin{cases} b > a \ldots & 2 \text{ soluţiuni, } B' < 90^0; \\ & B'' = 180^0 - B', \\ b = a \ldots & 1 \text{ soluţiune, } B < 90^0; \\ b < a \ldots & 1 \text{ soluţiune, } B < 90^0; \end{cases} \\ b \sin A = a \ldots\ldots \quad 1 \text{ soluţiune, } B = 90^0. \end{cases}$$

Cu ajutorul acestui tabel, se va puteà recunoaşte chiar din date dacă problema are două soluţiuni, o soluţiune sau nicio soluţiune, ceeace este foarte important, pentru a evità de multe ori calcule inutile.

Verificări. Când sunt două soluţiuni, putem aveà două verificaţiuni foarte simple. Fie $AB' = c'$, $AB'' = c'$; $ACB' = C'$, $ACB'' = C''$. După figură

$$AD - B''D = c'', \; AD + DB' = c'.$$

Adunând aceste egalități, și având în vedere că $B''D = B'D$, vom avea:

$$AD = \frac{c' + c''}{2}.$$

Insă în triunghiul dreptunghiu ACD avem:

$$AD = AC \cos A = b \cos A.$$

Vom calculà dar pe AD prin această formulă, și dacă valoarea aflată va fi identică cu $\frac{c'+c''}{2}$, calculul va fi exact.

Asemenea, dacă am scădeà una din alta cele două ecuațiuni de sus, am aveà:

$$DB' = \frac{c' - c''}{2}.$$

De altă parte

$$DCB' = ACB' - ACD = C' - ACD$$

$$DCB'' = ACB - ACB'' = ACD - C''.$$

Adunând,

$$DCB' = \frac{C' - C''}{2}$$

In CDB' avem:

$$DB' = CB' \sin DCB' = a \sin \frac{C' - C''}{2}.$$

Așà dar, calculând pe DB' prin această ecuațiune, dacă calculul este exact, valoarea aflată va trebuì să fie identică cu $\frac{c' - c''}{2}$.

149. Casul IV. *Dându-se cele trei laturi* a, b, c, *ale unui triunghiu oarecare, să aflăm unghiurile lui,* A, B, C, *precum și suprafața* s.

Unghiurile se pot calculà prin ecuaţiunile (4), sau (5), sau (6) (122), toate calculabile prin logaritmi; vom preferì însă ecuaţiunile (6), căci dacă am întrebuinţà formulele (4), ar trebuì să căutăm şase logaritmi, şi anume pe ai lui a, b, c, $p-a$, $p-b$, $p-c$; dacă ne-am servì cu (5), am aveà necesitate de şapte logaritmi: ai lui a, b, c, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$. Cu formulele (6) însă nu avem necesitate a căutà decât patru: pe ai lui p, $p-a$, $p-b$, $p-c$. Afară de aceasta, formulele din urmă determinând unghiurile prin tangenta lor, dau o preciziune mai mare.

Formulele ce vom întrebuinţà vor fi dară acestea:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}.$$

Observare. Pentru ca triunghiul să se poate rezolvà este necesar şi deajuns ca oricare din laturile date să fie mai mică decât suma celorlalte două. Inadevăr, dacă am aveà, spre exemplu:

$$a>b+c,$$

ar rezultà că

$$p-a=\frac{b+c-a}{2}\ .$$

ar fi negativ, pecând p, $p-b$, $p-c$, ar fi pozitive. Atunci cantităţile de sub radicalele ce dau pe $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ fiind negative, valorilor unghiurilor ar fi imaginare.

Exemple.

Cazul I.

Date

$a=5816^{m},35$

$B=54^{0}37'12'',4,$

$C=78^{0}19'45'',7.$

Formule

$A=180^{0}-(B+C),$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

$$s=\frac{a^{2}\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$$

Necunoscute

$A=47^{0}3'1'',9,$

$b=6478^{m},885,$

$c=7782^{m},048$

$s=18452216^{mp}$

Caculul lui A.

$$\begin{array}{r}180^{0}\\ B+C=132^{0}56'58'',1\\ \hline A=47^{0}3'1'',9\end{array}$$

Calculul lui b.

$$\begin{array}{r}\log a=3,7646506\\ \log\sin B=\bar{1},9113340\\ -\log\sin A=\bar{0},1355157\\ \hline \log b=3,8115003\\ b=6478^{m},885\end{array}$$

Calculul lui c.

$$\begin{array}{r}\log a=3,7646506\\ \log\sin C=\bar{1},9909276\\ -\log\sin A=0,1355157\\ \hline \log c=3,8910939\\ c=7782^{m},048\end{array}$$

Calculul lui s.

$$
\begin{aligned}
2 \log &= 7{,}5293012 \\
\log \sin B &= \bar{1}{,}9113340 \\
\log \sin C &= 1{,}9909276 \\
-\log 2 &= \bar{1}{,}6989700 \\
-\log \sin (B+C) &= 0{,}1355157 \\
\hline
\log s &= 7{,}2660484 \\
s &= 18452216^{\text{mp.}}
\end{aligned}
$$

Cazul II.

Date

$a = 578^{\text{m}},312,$

$b = 345^{\text{m}},104,$

$C = 48^{\circ}18'35'',4.$

Formule

$$A+B=180^{\circ}-C.$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$c=\frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$$s=\frac{ab \sin C}{2}.$$

Necunoscute

$A = 95^{\circ}13'49'',25,$

$B = 36^{\circ}27'35'',35,$

$c = 433^{\text{m}},6615,$

$s = 74517^{\text{mp}},586.$

Calculul lui A+B

$$\begin{array}{r} 180^0 \\ C = 48^0 18' 35'',4 \\ \hline A+B = 131^0 41' 24'',6. \end{array}$$

Calculul lui A—B

$$\begin{array}{r} \log(a-b) = 2,3677435 \\ \log \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 0,3482643 \\ -\log(a+b) = \bar{3},0346026 \\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{1},7506104 \\ \frac{A-B}{2} = 29^0 23' 6'',95, \\ A-B = 58^0 46' 13'',00. \end{array}$$

Calculul lui A și B

$$\begin{array}{r} A+B = 131^0 41' 24'',6 \\ A-B = 58^0 46' 13'',9 \\ \hline A = 95^0 13' 49'',2\bar{5} \\ B = 36^0 27' 35'',35. \end{array}$$

Calculul lui c

$$\begin{array}{r} \log a = 2,7621622 \\ \log \sin C = \bar{1},8731766 \\ -\log \sin A = 0,0018107 \\ \hline \log c = 2,6371495 \\ c = 433^{m},660. \end{array}$$

Calculul lui s

$$\begin{array}{r} \log a = 2,7621622 \\ \log b = 2,5379500 \\ \log \sin C = \bar{1},8731766 \\ -\log 2 = \bar{1},6989700 \\ \hline \log s = 4,872258\bar{8} \\ s = 74517^{mp},586. \end{array}$$

Cazul III.

Date

$a = 21^{m},324,$

$b = 26^{m},715,$

$A = 45^0 32' 16'',4.$

Formule

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

$$C = 180^0 - (A+B).$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$$s = \frac{a\, b \sin C}{2}.$$

Necunoscute

1-a soluţie	2-a soluţie
$B' = 63^{0}23'58'',29$,	$B'' = 116^{0}36'\ 1'',71$,
$C' = 71^{0}\ 3'45'',32$,	$C'' = 17^{0}51'41''88$,
$c' = 28^{m},260$,	$c'' = 9^{m},164$,
$s' = 269^{mp},4183$.	$s'' = 87^{mp},3645$.

Calculul lui b sin A

$$\begin{array}{r} \log b = 1,4267552 \\ \log \sin A = \bar{1},8535241 \\ \hline \log b \sin A = 1,2802793 \\ b \sin A = 19^{m},0668 \end{array}$$

Fiindcă $b > a > b$ sin A, avem două soluţiuni (148).

Calculul lui B

$$\begin{array}{r} \log b = 1,4267552 \\ \log \sin A = \bar{1},8535241 \\ -\log a = 2,6711313 \\ \hline \log \sin B = \bar{1},9514106 \\ B' = 63^{0}23'58'',29 \\ B'' = 116^{0}36'\ 1'',71. \end{array}$$

1-a soluţie	2-a soluţie
Calculul lui C′	Calculul lui C″
$\begin{array}{r} 180^{0} \\ A + B' = 108^{0}56'14'',69 \\ \hline C' = 71^{0}\ 3'45'',31 \end{array}$	$\begin{array}{r} 180^{0} \\ A + B'' = 162^{0}\ 8'18'',11 \\ \hline C'' = 17^{0}51'41'',89 \end{array}$

Calculul lui c'

$$\begin{aligned}
\log a &= 1{,}3288687 \\
\log \sin C' &= 1{,}9758332 \\
-\log \sin A &= 0{,}1464759 \\
\hline
\log c' &= 1{,}4511778 \\
c' &= 28^{m}{,}260
\end{aligned}$$

Calculul lui c''

$$\begin{aligned}
\log a &= 1{,}3288687 \\
\log \sin A &= 1{,}4866412 \\
-\log \sin A &= 0{,}1464759 \\
\hline
\log c'' &= 0{,}9620859 \\
c'' &= 9^{m}{,}164
\end{aligned}$$

Calculul lui s'

$$\begin{aligned}
\log a &= 1{,}3288687 \\
\log b &= 1{,}4267552 \\
\log \sin C' &= \bar{1}{,}9758332 \\
-\log 2 &= \bar{1}{,}6989700 \\
\hline
\log s' &= 2{,}4304271 \\
s' &= 260^{mp}{,}4183
\end{aligned}$$

Calculul lui s''

$$\begin{aligned}
\log a &= 1{,}3288687 \\
\log a &= 1{,}4267552 \\
\log \sin C'' &= \bar{1}{,}4867412 \\
-\log 2 &= 1{,}6989700 \\
\hline
\log s'' &= 1{,}9413351 \\
s'' &= 87^{mp}{,}3645
\end{aligned}$$

Verificări (148).

1°. *Formula* $\quad b \cos A = \dfrac{c' + c''}{2}.$

Calculul lui $b \cos A$

$$\begin{aligned}
\log b &= 1{,}4257552 \\
\log \cos A &= \bar{1}{,}8452693 \\
\hline
\log b \cos A &= 1{,}2721245 \\
b \cos A &= 18^{m}{,}712
\end{aligned}$$

Calculul lui $\dfrac{c' + c''}{2}$

$$\begin{aligned}
c' &= 28^{m}{,}260 \\
c'' &= 9^{m}{,}164 \\
\hline
\frac{c' + c''}{2} &= 18^{m}{,}712 \text{ (dif. o).}
\end{aligned}$$

2°. *formula:* $\quad a \sin \dfrac{C' - C''}{2} = \dfrac{c' - c''}{2}.$

Calculul lui $a \sin \frac{C'-C''}{2}$

$$\log a = 1,3288687$$
$$\log \sin \frac{C'-C''}{2} = 1,6510516$$
$$\log a \sin \frac{C'-C''}{2} = 0,9799203$$
$$a \sin \frac{C'-C''}{2} = 9^{m},548.$$

Calculul lui $\frac{c'-c''}{2}$

$$c' = 28^{m},260$$
$$c'' = 9^{m},164$$
$$\frac{c'-c''}{2} = 9^{m},548 \text{ (dif. o).}$$

Cazul IV.

Date

$$a = 87^{m},510,$$
$$b = 36^{m},927,$$
$$c = 64^{m},529,$$

Formule

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$
$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Necunoscute

$$A = 116^{0}33'11'',0,$$
$$B = 22^{0}10'36'',3,$$
$$C = 41^{0}16'12'',7,$$
$$s = 1065^{mp},76.$$

Calculul lui A

$$\begin{aligned}
\log(p-b) &= 1{,}7600906\\
\log(p-c) &= 1{,}4764548\\
-\log p &= \bar{2}{,}0246463\\
-\log(p-a) &= \bar{1}{,}1565803.\\
\hline
2\ \mathrm{logtg}\frac{A}{2} &= 0{,}4177720\\
\mathrm{logtg}\frac{A}{2} &= 0{,}2088860\\
A &= 116^0 33' 11'',0.
\end{aligned}$$

Calculul lui B.

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 0{,}0434197\\
\log(p-c) &= 1{,}4764548\\
-\log p &= \bar{2}{,}0246463\\
-\log(p-b) &= 2{,}2399094\\
\hline
2\ \mathrm{logtg}\frac{B}{2} &= 2{,}5844302\\
\mathrm{logtg}\frac{B}{2} &= 1{,}2922151\\
B &= 22^0 10' 36'',3.
\end{aligned}$$

Calculul lui C.

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 0{,}8434197\\
\log(p-b) &= 1{,}7600900\\
-\log p &= 2{,}0226463\\
-\log(p-c) &= 2.5235452.\\
\hline
2\ \mathrm{logtg}\frac{C}{2} &= \bar{1}{,}1517018\\
\mathrm{logtg}\frac{C}{2} &= \bar{1}{,}5758509\\
C &= 41^0 16' 12'',7.
\end{aligned}$$

Calculul suprafaţei s.

$$\begin{aligned}
\log p &= 1{,}9753537\\
\log(p-a) &= 0{,}8434197\\
\log(p-b) &= 1{,}7600906\\
\log(p-c) &= 1{,}4764548\\
\hline
2\ \log s &= 6{,}0553188\\
\log s &= 3{,}0276594\\
s &= 1065^{mp},76.
\end{aligned}$$

Verificare.

$$A+B+C=180^0 0' 0'',0 \quad (\text{dif. } 0'',0).$$

Exerciţii. I. In orice triunghiu dreptunghiu avem relaţiunile:

1. $$\cot\frac{B}{2}=\frac{c+a}{b}$$

2. $$\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{2(a^2-bc)}{(a+b)(a+c)}$$

3. $$\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}}-\frac{1}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}=1$$

II. Să se arate, că un triunghiu este dreptunghiu, dacă între unghiurile lui există una din relaţiunile următoare:

1. $$\sin C = \cos A + \cos C$$

2. $$\sin C = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

3. $$\operatorname{tg} B = \frac{\cos (C-B)}{\sin A + \sin (C-B)}$$

I. Transformăm membrul al doilea în formule calculabile prin logaritmi.

III. Dacă 2θ, 3θ, 4θ sunt unghiurile opuse respectiv laturilor a, b, c, ale unui triunghiu oarecare, să se demonstreze, că avem:

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \left(\frac{2b}{c+a}\right)^2 - 1.$$

I. Din relaţia că sinusurile unghiurilor sunt proporţionale cu laturile opuse, bazaţi pe proprietăţile rapoartelor egale şi pe formule calculabile prin logaritmi se găseşte $\cos \theta$ în funcţie de laturi, apoi $\sin \theta$ şi deci $\operatorname{tg} \theta$.

IV. Să se demonstreze relaţiunile următoare într'un triunghiu oarecare:

1. $$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$$

2. $$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

I. Plecăm dela relaţia $A+B=180^0-C$, luăm cosinurile în ambii membrii, ridicăm la patrat etc.

3. $$a\,(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$$

I. Se înlocuesc cosinusurile în funcţie de laturi.

4. $$(a+b) \cos C + (b+c) \cos A + (c+a) \cos B = a+b+c.$$

I. Se consideră relaţiunile: $a = b \cos C + c \cos B$ etc., cari se adună.

V. Dacă într'un triunghiu avem relaţia

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$$

triunghiul este dreptunghiu (r raza cercului înscris, α a celui exînscris).

I. Se înlocuesc r şi α cu valorile lor şi se găseşte $\sin A = 1$.

CAPITOLUL III.

EXERCIȚII ȘI APLICAȚIUNI.

Câtevà cazuri de rezoluțiuni de triunghiuri în cari se dau, nu trei elemente, ci trei combinațiuni ale acestor elemente.

150. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu, dându-se ipotenusa* a *și suma* b+c *a celorlalte două laturi.*

Se caută B, C, b, c.

Adunând relațiunile

$$b=a \sin B,$$

$$c=a \sin C,$$

avem:

$$b+c=a(\sin B+\sin C)$$

$$=2a \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2},$$

și fiindcă $B+C=90^0$,

$$b+c=2a \sin 45^0 \cos \frac{B-C}{2},$$

din care

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{2a\sin 45^0},$$

ecuaţiune care ne dă pe B—C; fiindcă cunoaştem şi pe B+C, vom puteà aflà valoarea fiecăruia din unghiurile B şi C. Atunci laturile se vor calculà prin formulele

$$b=a\sin B,$$

$$c=a\sin C.$$

Exemplu. Date: $a=2416^m,34$; $b+c=3238^m,51$.

Necunoscute: $B=61^0 5' 51'',5$; $C=28^0 55' 8'',5$;

$$b=2115^m,03;\ c=1168^m,48.$$

151. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu, cunoscând un unghiu ascuţit* B *şi diferenţa* b—c *a celor două laturi ale unghiului drept.*

Necunoscutele sunt a, b, c, C.

Unghiul C se determină îndată prin formula

$$C=90^0-B.$$

Relaţiunile

$$b=a\sin B,$$

$$c=a\sin C,$$

dau prin scădere:

$$b-c=a\,(\sin B-\sin C)=2a\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$=2a\cos 45^0\sin\frac{B-C}{2},$$

din care deducem:

$$a=\frac{b-c}{2\cos 45^0\sin\dfrac{B-C}{2}},$$

formulă ce dă ipotenusa în funcţiune de cantităţi cunoscute.

Laturile b şi c le vom determinà apoi prin formulele de mai sus.

Exemplu. Date: $B=46^{\circ}18'5'',7$; $b-c=0^{m},7542$.

Necunoscute: $C=43^{\circ}41'54'',3$; $a=23^{m},4803$;

$b=16^{m},9764$; $c=16^{m},2222$.

152. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu, cunoscând ipotenusa* a *şi raportul* $\frac{b}{c}$ *al celorlalte două laturi.*

Avem:

$$tgB=\cot C=\frac{b}{c},$$

care ne dă unghiurile ascuţite; cu ajutorul lui şi al ipotenusei, vom calculà şi laturile.

Exemplu. Date: $a=13^{m},152$; $\frac{b}{c}=1,5324$.

Necunoscute: $B=56^{\circ}52'21'',69$; $C=33^{\circ}73'8'',31$;

$b=11^{m},0143$; $c=7^{m},1876$.

153. *Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând unghiurile* A, B, C, *şi perimetrul* 2 p.

Se caută a, b, c şi s.

Formulele

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

dau:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2\,p}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

sau:

$$a=\frac{2p\,\sin\,A}{\sin A+\sin A+\sin\,C}$$

şi înlocuind pe sin A şi sin A+sin B+sin C cu valorile lor (52, 69),

$$a=\frac{4p\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Asemenea:

$$b=\frac{p\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$c=\frac{p\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

Pentru suprafaţă avem:

$$s=\frac{ab\sin C}{2};$$

şi înlocuind pe a şi b cu valorile lor de mai sus şi pe sin C cu $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,

$$s=\frac{p^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Exemplu. Date: $2p=1836^m,24$; $A=36^0 14'56'',2$;

$B=73^0 28'23'',6$; $C=70^0 16'40'',2$.

Necunoscute: $a=435^m,8163$; $b=706^m,6043$;

$c=693^m,8188$; $s=144942^{mp},74$.

154. *Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând o latură* c, *unghiul adiacent* A, *și suma* a+b *a celor-lalte două laturi.*

Se caută B, C, a, b.

Din relațiunile

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

se deduce:

$$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C},$$

Inlocuind pe $a+b+c$ cu $2\,p$, pe $a+b-c$ cu $2\,(p-c)$, pe sin A+sin B+sin C și sin A+sin B—sin C cu valorile lor (69, 70), obținem:

$$\frac{2\,p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2\,(p-c)}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Reducând și scoțând valoarea lui B,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p}\cot\frac{A}{2}.$$

Cunoscând pe B, C se află imediat. Laturile a și b se vor determinà prin formulele fundamentale.

Exemplu. Date: $c=215^{m},31$; $a+b=49^{m},07$;

$$A=81^{0}24'13'',8.$$

Necunoscute: $B=48^{0}54'55'',52$; $C=49^{0}40'50'',68$;

$$a=279^{m},2196;\ b=212^{m},8502.$$

155. *Să se rezolve un triunghiu, cunoscând suprafața* s *și unghiurile* A, B, C.

Necunoscute sunt a, b, c.

Relațiunea

$$s=\frac{a^{2}\sin B\sin C}{2\sin A},$$

dă imediat

$$a = \sqrt{\frac{2\,s \sin A}{\sin B \,\sin C}}.$$

Asemenea avem şi:

$$b = \sqrt{\frac{2\,s \sin B}{\sin A \,\sin B}},$$

$$c = \sqrt{\frac{2\,s \sin C}{\sin A \,\sin B}}.$$

Exemplu. Date: $s = 98^{mp}, 125$; $A = 34^{0}48'12'',3$;

$B = 66^{0}38'53'',2$; $C = 78^{0}32'54'',5$:

Necunoscute: $a = 11^{m},1572$; $b = 17^{m},9467$; $c = 19^{m},1588$.

156. *Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând raza cercului înscris*, r, *şi unghiurile* A, B, C.

Trebue a se calculà a, b, c, s.

Triunghiul AOF (fig. 37) dă:

$$AF = r\cot\frac{A}{2};$$

triunghiul OFB dă asemenea:

$$FB = r\cot\frac{B}{2}.$$

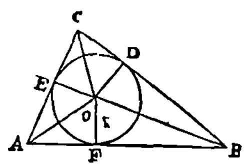


Fig. 37

Adunând această relaţiune cu cea precedentă, avem:

$$c = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right) = r\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\right)$$

$$= r\,\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = r\,\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

şi fiindcă

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2},$$

$$c=\frac{r\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}}$$

Asemenea se găsesc şi:

$$a=\frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}}$$

$$b=\frac{r\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{C}{2}},$$

Suprafaţa este dată prin formula

$$s=\frac{ab\sin C}{2},$$

în care înlocuim pe a şi b cu valorile lor şi pe sinC cu

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

atunci

$$s=\frac{2r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}$$

sau

$$s=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

Exemplu. Date: $r=4^m,371$; $A=58^0 34' 13'' 4$;

$B=97^0 15' 26'',2$; $C=24^0 10' 20'',4$.

Necunoscute: $a=24^m,2626$; $b=28^m,2066$; $r=11^m,6434$;

$s=140^{mp},1180$.

157. *Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând o latură* a, *suma* b+c *a celorlalte două, şi perpendicularara* h *lăsată din A pe latura* a.

Se cere b, c, A, B, C.

Avem:

$$s=\frac{bc\sin A}{2} \text{ şi } s=\frac{ah}{2};$$

aşà dar

$$ah=bc\sin A, \tag{a}$$

sau

$$\sin A=\frac{ah}{bc},$$

ori

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{ah}{bc}. \tag{b}$$

Avem apoi:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= b^2+c^2+2bc-2bc-2bc\cos A \\ &= (b+c)^2-2bc(1+\cos A) \\ &= (b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2} \end{aligned}$$

deunde

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}. \tag{c}$$

Impărţind (b) prin (c), obţinem:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2ah}{(b+c)^2-a^2},$$

care dă unghiul A. Atunci (a) ne va dà pe bc în funcţiune de cantităţi cunoscute

$$bc=\frac{a\,h}{\sin A};$$

însă din date avem

$$b+c=m,$$

m fiind o cantitate cunoscută. Având dar suma şi produsul cantităţilor b şi c, aceste cantităţi, dupăcum ştim din algebră, vor fi rădăcinele ecuaţiunii de gradul al doilea:

$$x^2-mx+\frac{a\,h}{\sin A}=0,$$

adică:

$$b=x'=\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2\sin A-4\,ah}{4\sin A}},$$

$$c=x'=\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2\sin A-4\,ah}{4\sin A}}.$$

Cunoscând astfel toate laturile, am ajuns la un caz cunoscut.

Exemplu. Date:

$a=12^m,514$; $b+c=19^m,325$; $h=6^m,142$.

Necunoscute: $b=13^m,1133$; $c=6^m,2117$;

$A=70^0 39'47'',70$; $B=81^0 24'27'',41$; $C=27^0 55'45'',13$.

158. *Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând o latură* c, *unghiul opus* C *şi perpendiculara* h *lăsată din* C *pe* c.

Se caută a, b, A, B.

In ACD şi CDB (fig. 38) avem:

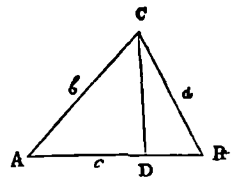


Fig. 38.

$$AD = h \cot A,$$

$$AB = h \cot B;$$

şi adunând,

$$c = h(\cot A + \cot B) = h\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}\right)$$

$$= h\frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{h \sin C}{\sin A \sin B};$$

însă (61)

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2 \sin A \sin B;$$

aşà dar

$$c = \frac{2h \sin C}{\cos(A-B) - \cos(A+B)} = \frac{2h \sin C}{\cos(A-B) + \cos C}$$

din care

$$\cos(A-B) = \frac{2h}{c} \sin C - \cos C$$

Această formulă o vom face calculabilă prin logaritmi (74), punând $\frac{2h}{c} = \cot\varphi$, şi atunci ea devine:

$$\cos(A-B) = \frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi},$$

care dă diferenţa A—B, şi astfel vom puteà calculà unghiurile A şi B. Atunci cunoscând o latură c şi unghiurile, revenim la un caz cunoscut (133).

Exemplu. Date: $c = 534^m,59$; $C = 64^0 18' 33'',4$;

$$h = 217^m,38.$$

Necunoscute: $A = 94^0 8' 9'',35$; $B = 21^0 33' 17'',25$;

$$a = 591^m,6878;\ b = 217^m,9482.$$

159. *Să se rezolve un triungihu oarecare, cunoscând o latură* c, *înălţimea corespunzătoare* h *şi diferenţa* A—B, *a unghiurilor alăturate.*

Să se afle a, b, A, B, C.

Unghiul C se va determinà prin ecuaţiunea găsită mai sus:

$$\cos(A-B) = \frac{2h}{2} \sin C - \cos C,$$

sau

$$\cos(A-B) = \frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi},$$

şi

$$\cot\varphi = \frac{2h}{c}.$$

Atunci, cunoscând pe c, C şi h, revenim la chestiunea precedentă.

Exemplu. Date: $c = 13^m,251$; $h = 8^m,434$;

$$A - B = 28^0 23' 48'',3$$

Necunoscute: $A = 68^0 39' 50'',04$; $B = 40^0 16' 1'',74$;

$$C = 71^0 4' 8'',22;\ a = 13^m,0486;\ b = 9^m,0545.$$

160. *Să se rezolve un triunghiu cunoscând cele trei înălţimi.*

Fie α, β, γ înălţimile cari corespund respectiv la laturile a, b, c. Avem:

$$s=\frac{a\alpha}{2}=\frac{b\beta}{2}=\frac{c\gamma}{2},$$

relaţiuni din cari scoatem:

$$a=\frac{2s}{\alpha},\quad b=\frac{2s}{\beta},\quad c=\frac{2s}{\gamma}.$$

Punând aceste valori în

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}=\sqrt{\frac{(a+c-b)\,(a+b-c)}{(a+b+c)\,(b+c-a)}}$$

vom aveà:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\gamma}-\frac{2s}{\beta}\right)\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\beta}-\frac{2s}{\gamma}\right)}{\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\beta}+\frac{2s}{\gamma}\right)\left(\frac{2s}{\beta}+\frac{2s}{\gamma}-\frac{2s}{\alpha}\right)}}$$

şi împărţind ambii termeni ai fracţiunei de sub radical cu $2s\times 2s$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)}}$$

înmulţind iarăş ambii membri cu $\alpha\beta\gamma\times\alpha\beta\gamma$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma)\;(\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)\;(\alpha\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma)}}.$$

Asemenea găsim şi:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma)\;(\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\gamma)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)\;(\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma)}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma)\;(\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)\;(\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta)}}.$$

Cunoscând astfel unghiurile, relaţiunile

$$s=\frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}=\frac{a\alpha}{2},$$

dau :

$$\frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}=\frac{a\alpha}{2},$$

din care :

$$a=\frac{\alpha \sin A}{\sin B \sin C}.$$

Asemenea :

$$b=\frac{\beta \sin B}{\sin A \sin C},$$

$$c=\frac{\gamma \sin C}{\sin A \sin B}.$$

Exemplu. Date : $\alpha=15^m,324$; $\beta=9^m,143$; $\gamma=18^m,102$

Necunoscute : $A=30^0 49' 32'',42$; $B=123^0 27' 57'',94$;

$C=25^0 42' 29'' 68$; $a=21^m,6996$; $b=35^m,3257$;

$c=18^m,3693$.

161. R. *Să se rezolve un triunghiu, cunoscând cele trei mediane* (numind *mediană*, linia care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse).

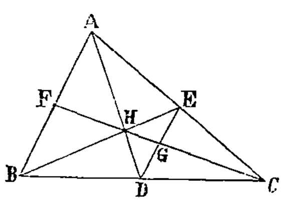


Fig. 39.

Fie α, β, γ, medianele cari trec respectiv prin vârfurile A, B, C, ale triunghiului.

Unind extremitățile E și D ale medianelor β și α, linia ED este paralelă cu AB, căci împarte laturile AC și BC în părți egale.

Așà dar triunghiurile AFC, EGC sunt asemeni, și dau :

$$\frac{EG}{AF}=\frac{EC}{AC}=\frac{1}{2}. \qquad \text{(a)}$$

Triunghiurile FBH şi EGH sunt iarăşi asemeni, şi prinurmare

$$\frac{EG}{BF}=\frac{EH}{BH}. \qquad (b)$$

In FB = AF; şi prinurmare, comparând ecuaţiunea (b) cu (a), avem:

$$\frac{EH}{BH}=\frac{1}{2}.$$

Deci

$$\frac{EH}{EH+BH}=\frac{1}{1+2}.$$

sau

$$\frac{EH}{\beta}=\frac{1}{3}.$$

Aşà dar punctul de întâlnire al celor trei mediane împarte pe fiecare dintr'însele în două părţi, dintre cari partea despre bază este jumătatea celei despre vârf, sau a treia parte din mediana întreagă.

Triunghiul BHC dă, după o teoremă din geometrie:

$$\overline{BH^2}+\overline{HC^2}=2\,\overline{HD^2}+2\,\overline{BD^2}.$$

însă

$$BD=\frac{a}{2},\quad HD=\frac{\alpha}{3},\quad BH=\frac{2\beta}{3},\quad HC=\frac{2\gamma}{3}$$

aşà dar:

$$\frac{4}{9}\beta^2+\frac{4}{9}\gamma^2=\frac{2}{9}\alpha^2+\frac{a^2}{2},$$

sau

$$8\beta^2+8\gamma^2=4\alpha^2+9a^2,$$

deunde

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2},$$

Vom găsì asemenea:

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2},$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2},$$

Laturile fiind calculate, ajungem dar la un caz cunoscut (149).

Exemplu: Date: $\alpha = 0^m,143$; $\beta = 0^m,115$; $\gamma = 0^m,083$.

Necunoscute: $a = 0^m,093758$; $b = 0^m,13573$;

$c = 0^m,16392$; $A = 34^0 53' 3'',72$; $B = 55^0 53' 19'',62$;

$C = 89^0 13' 36'',72$.

Operaţiuni pe pământ.

162. Trigonometria găseşte aplicaţiuni variate şi de cea mai mare importanţă în toate operaţiunile ce au de scop a determinà dimensiunile unei figuri oarecare, prin cunoştinţa câtorva din elementele sale. Astfel, se întrebuinţează calculul trigonometric la ridicările de planuri, la măsurătorile de distanţe, de înălţimi, de unghiuri, etc. Toate aceste operaţiuni se pot efectuà şi prin metoade grafice; însă nesiguranţa acestor metoade şi chiar dificultatea întrebuinţării lor, fac ca să se prefere calculul.

In aplicaţiunile practice ale trigonometriei, este necesar să se ştie a măsurà *lungimi* şi *unghiuri*.

Lungimile se măsoară cu *lanţul de agrimensură*, sau cu nişte *rigle* de lungimi cunoscute. Acest lanţ sau aceste rigle, se pun pe dreapta ce voim a măsurà, de câte ori încap şi numărând de câte ori am pus lanţul sau riglele pe această dreapă, cunoaştem lungimea ei.

Unghiurile se măsoară cu nişte instrumente cari poartă diferite numiri: *grafometrul, cercul repetitor* sau *teodolitul* sunt cele mai uzitate. Toate aceste aparate, reduse la cea mai simplă expresiune a lor, se compun din un *limb* sau cerc gradat de metal, O, care poartă două *alidade*, adică două rigle de metal (fig. 40), AB şi CD, cari trec prin centrul cercului. Una din aceste rigle, AB, este fixă, şi cealaltă, CD, se poate învârtì în jurul centrului O. Pentru a măsurà un unghiu, se aşează centrul cercului în vârful O al unghiului EOF ce trebue să se măsoare, se îndreptează alidada fixă AB în direcţiunea uneia din laturile unghiului OE şi alidada mobilă CD se învârteşte în jurul centrului, până se aduce în direcţia celei de a doua laturi a unghiului, OF. Atunci arcul DB, cu care s'a mişcat această alidadă, măsoară unghiul.

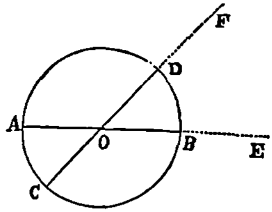


Fig. 40

In instrumentele moderne, alidadele sunt înlocuite prin lunete, cari dau o direcţiune mai precisă, şi cu cari se pot vedeà obiectele la o mai mare depărtare decât cu ochiul liber.

In cele mai multe din operaţiunile depe pământ, dacă terenul nu este cu totul orizontal, nu se măsoară liniile şi unghiurile cum sunt în natură, ci proiecţiile lor pe un plan orizontal. Aşà, în loc de a măsurà dreapta înclinată AB, se măsoară proiecţia sa AC pe o linie orizontală (fig. 41).

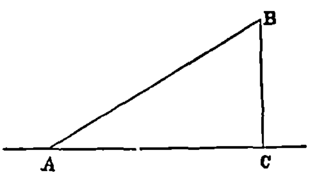


Fig. 41.

Aceasta se cheamă *a reduce liniile şi unghiurile la orizont.*

Sunt diferite metoade a se reduce liniile şi unghiurile la orizont. Teodolitul, între altele, dă deadreptul unghiurile reduse la orizont.

Triunghiulaţiune.

163. Pentru a se executà cu preciziune un plan al unei moşii, al unui oraş sau altceva, trebue a se determinà distanţele respective între diferitele sale puncte principale, reduse la orizont. Aceste distanţe nu se măsoară toate direct, din cauză că este foarte lung a se măsurà o dreaptă pe pământ; ci pentru aceasta, se formează un număr îndestulător de triunghiuri, cari acoper partea de loc considerată, şi ale căror vârfuri se află în punctele principale ale locului. In aceste triunghiuri, se măsoară cu instrumente toate unghiurile şi numai o latură, numită *bază;* şi apoi prin calcul se determină toate celelalte laturi ale triunghiurilor. Această operaţiune se numeşte *triunghiulaţiune.*

Iacă un exemplu de triunghiulaţiune (fig. 42). Cam în centrul locului considerat, se alege un punct O, din care să se poată vedeà toate punctele principale ale locului. Se aleg apoi câteva puncte însemnate, A, B, C, D, E, F, astfel ca unind aceste puncte între ele şi cu O prin linii drepte, triunghiurile AOB, BOC, etc., cari vor rezultà, să nu aibă niciun unghiu prea ascuţit sau obtus. Se măsoară toate unghiurile din aceste triunghiuri, şi se alege o latură oarecare, spre exemplu AB, care să se poată măsurà direct, în condiţiunile cele mai avantagioase. Această latură va fi *baza* triunghiulaţiunii.

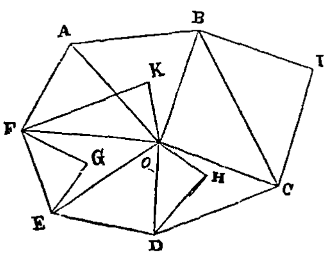


Fig. 42.

In triunghiul AOB, cunoscându-se AB şi unghiurile ABO, BAO, măsurate direct, se vor puteà calculà şi laturile AO şi BO.

Triunghiul BOC, în care se cunoaşte BO din triunghiul precedent, şi toate unghiurile din măsurături, ne va da lungimea laturilor BC şi OC.

Tot asemenea mergând mai departe din triunghiu în triunghiu, vom determinà laturile CD, OD, DE, EF, FO, FA, AO.

Determinarea acestei din urmă laturi ne poate servì ca verificare; căci dacă valoarea găsită acum va fi identică, sau prea puţin diferită de cea aflată la început din triunghiul ABO, aceasta va fi o probă că operaţiunile au fost exacte.

Triunghiurile formate astfel numai cu punctele principale se numesc *triunghiuri de întâia mărime.*

Pentru a determinà în urmă poziţiunea punctelor mai puţin însemnate, G, H, I, K, se leagă aceste puncte prin drepte cu punctele principale considerate mai înainte, şi se măsoară toate unghiurile triunghiurilor FGE, OHD, BIC, FKO, astfel formate. Aceste triunghiuri, în cari se cunoaşte câte o latură, din triunghiurile de întâia mărime, şi toate unghiurile din măsurături, ne vor da şi distanţele FG, GE, OH, HD, BI, IC, FK, KO, cari determină poziţiunea punctelor G, H, I, K.

Calculul distanţelor.

164. *Să se găsească distanţa dela un punct până la un alt punct inaccesibil.*

Fie A punctul unde staţionează observatorul, şi B punctul vizibil, însă inaccesibil (fig. 43); se cere distanţa AB.

Se măsoară pe pământ o bază AC, care să treacă prin punctul A; apoi, cu un instrument de măsurat unghiurile, se ridică unghiurile A şi C; atunci triunghiul ABC, în care se cunoaşte o latură şi două unghiuri, ne va da prin un calcul cunoscut (143) distanţa căutată AB.

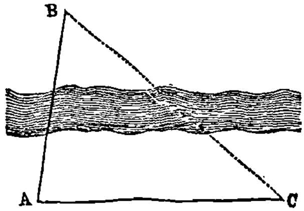


Fig. 43.

Exemplul. Date:

$$AC=315^m,74$$
$$A=72^0 13' 24'',1$$
$$C=47^0 37' 18'',5.$$

Necunoscuta: $AB=268^m,904$.

165. *Să se găsească distanţa dintre două puncte vizibile, însă inaccesibile.*

Fie A şi B punctele inaccesibile a căror distanţă este cerută (fig. 44).

Se măsoară o bază CD, şi apoi unghiurile ACD şi ADC; triunghiul ACD, în care se cunoaşte o latură şi două unghiuri, ne va da prin calcul latura AC. Măsurăm apoi unghiurile BCD şi BDC, şi triunghiul BCD, în care se cunoaşte latura DC, măsurată, şi cele două unghiuri adiacente, ne va da pe BC. Atunci triunghiul ABC, în care cunoaştem pe AC şi pe BC prin cele două triunghiuri precedente, precum şi unghiul ACB=ACD—BCD, ne va da latura AB, care este distanţa căutată.

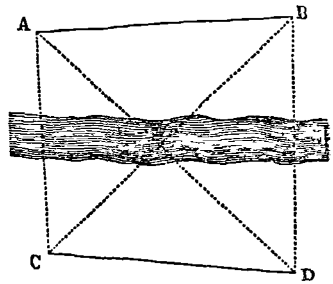


Fig. 44.

Exemplul. Date: $CD=1432^m,16$;

$$ACD=79^0 13' 28'',4; \quad ADC=35^0 51' 12'',3;$$

$$BCD=46^0 25' 56'',8; \quad BDC=64^0 36' 5''9.$$

Necunoscuta: $AB=787^m,848$.

Calculul înălţimilor

166. *Să calculăm înălţimea unui turn, al cărui picior accesibil este pe un plan orizontal.*

Aşezăm un instrument de măsurat unghiurile într'un punct C, la oarecare depărtare de piciorul turnului, şi măsurăm unghiul BDE ce face raza vizuală dusă la vârful turnului cu linia orizontală ED. Măsurăm apoi pe pământ distanţa AC. In triunghiul dreptunghiul BED se cunoaşte latura ED=AC şi unghiul ascuţit BDE; vom puteà dar (139) să calculăm pe BE; adăogind la această mărime şi pe EA=DC care este înălţimea h a instrumentului, vom aveà înălţimea AB a turnului.

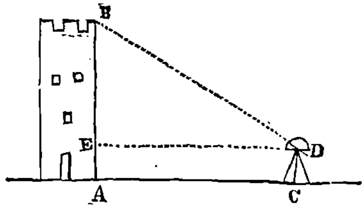


Fig. 45.

Exemplu. Date: $AC = 41^m,35$; $BDE = 39^0 15' 49'',6$; $h = 1^m,25$.

Necunoscuta: $AB = 35^m.05$

167. *Să calculăm înălţimea unui turn, al cărui picior accesibil nu este pe un plan orizontal.*

Aşezăm un instrument de măsurat unghiurile în D, şi apoi însemnăm pe turn un punct E astfel că EB să fie egal cu DC (fig. 46). Măsurăm peurmă unghiul ADE precum şi unghiul ADZ, pe care îl face dreapta AD cu verticala DZ; măsurăm în fine baza BC=ED. Triunghiul AED în care cunoaştem latura ED şi unghiurile ADE şi EAD=ADZ, ne va da pe AE (143). Adăogind la această cantitate pe

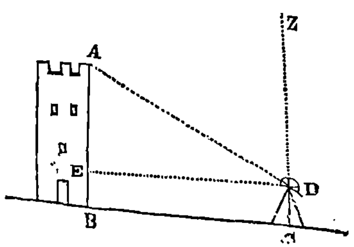


Fig. 46,

$EB=DC=h$, înălţimea instrumentului, vom aveà înălţimea AB a turnului.

Exemplu. Date: $BC=52^{m},36$; $ADE=36^{0}24'17'',3$;

$ADZ=40^{0}58'12'',2$; $h=0^{m},982$.

Necunoscuta: $AB=48^{m},185$.

168. *Să calculăm înălţimea unui turn, al cărui picior este inaccesibil însă aşezat pe un plan orizontal.*

Aşezăm în C un instrument de măsurat unghiurile şi luăm unghiul ACE, ce face raza vizuală dusă la vârful turnului, cu direcţia orizontală CE. Mutăm apoi instrumentul în D, tot pe linia EC, şi măsurăm unghiul ADE; în fine măsurăm şi pe $FG=CD$ (fig. 47). In triunghiul ACD se cunoasce latura CD şi unghiurile ADC şi $ACD=180^{0}-ACE$; prinurmare din acel triunghiu vom puteà calculà pe AC (143). Atunci triunghiul dreptunghiu ACE, în care se cunoaşte AC şi ACE, ne va da (136) pe AE, la care adăogând pe $EB=h$, înălţimea instrumentului, vom aveà înălţimea căutată AB.

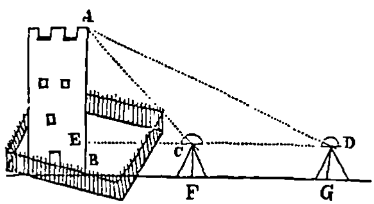


Fig. 47.

Exemplu. Date: $FG=12^{m},15$; $ACE=44^{0}27'42'',0$;

$ADE=32^{0}51'13'',5$; $h=1^{m},51$.

Necunoscuta: $AB=34^{m},264$.

169. *Să se calculeze înălţimea unui munte.*

Alegem două puncte C şi D, astfel ca să putem măsura cu înlesnire şi precisiune o bază CD. Aşezăm apoi un instrument de măsurat unghiurile în D, şi măsurăm unghiul AFE, format de raza vizuală dusă la vârful muntelui cu cea dusă la punctul E (fig. 48);

mutăm pe urmă instrumentul în C, şi măsurăm unghiul AEF, făcut de razele vizuale duse la vârful muntelui şi la punctul F. Triunghiul AEF, în care se cunoaşte EF =CD şi unghiurile alăturate, ne va da (143) pe AE. Atunci, dacă măsurăm şi unghiul AEG, făcut de raza vizuală dusă din E la

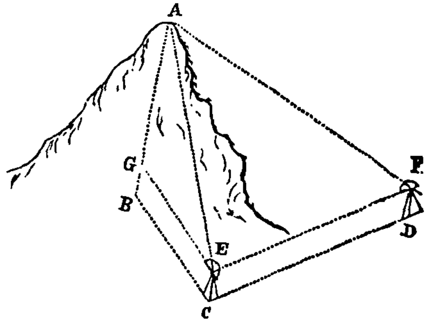


Fig. 48.

vârful muntelui cu orizontala EG, triunghiul dreptunghiu AEG, în care se cunoaşte ipotenusa AE din triunghiul precedent, şi unghiul ascuţit AEG, va da pe AG. Inălţimea totală a muntelui se va afla, adăogând la AG pe GB=EC=h, înălţimea instrumentului.

Exemplu. Date: CD=248^{m},36; AFE=58^{0}13′25″,3;

AEF=72^{0}15′20,9; AEG=30^{0}37′14″,5; h=1^{m},18.

Necunoscuta: AB=142^{m},564.

Cestiuni diverse.

170. *Să prelungim o dreaptă pe pământ până dincolo de un obstacol care opreşte vederea.*

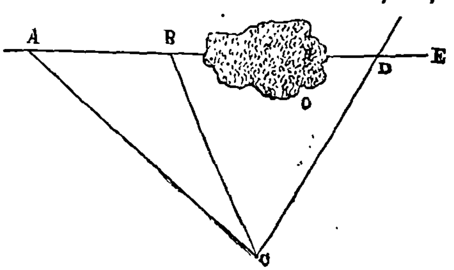


Fig. 49.

Fie dreapta AB, pe care trebue să o prelungim dincolo de obstacolul O, care împiedică vederea (fig. 49).

Măsurăm o porţiune AB din dreapta dată; apoi, alegând un punct C, din care să se vadă şi dreapta AB, şi obstacolul, şi partea locului unde trebue prelungită dreapta, măsurăm unghiurile BAC şi ABC; atunci triunghiul ABC ne va da pe AC. După aceasta, ducem o dreaptă după voie CD, în partea locului unde trebue prelungită dreapta, şi măsurăm unghiul ACD; triunghiul ACD în care se cunoaşte AC şi unghiurile A şi C, ne va da pe CD şi unghiul ADC. Luând dar pe dreapta îndefinită CD o lungime egală cu distanţa calculată astfel, şi ducând prin D o dreaptă DE care să facă cu CD un unghiu egal cu cel găsit prin calcul, această dreaptă DE va fi chiar prelungirea căutată a dreptei AB.

Exemplu. Date: $AB=87^m, 34$; $BAC=50^\circ13'25'',4$;

$ABC=107^\circ38'9'',3$; $ACD=61^\circ29'32'',8$.

Necunoscute: $ADC=68^\circ17'1'',8$; $CD=182^m,284$.

171. *Trei puncte depe pământ* A, B, C, *sunt însemnate pe o chartă; să găsim pe această chartă şi poziţiunea punctului* P, *care este astfel situat că distanţa* AB, *privită din* P, *se vede sub unghiul* α, *şi distanţa* BC *sub unghiul* β.

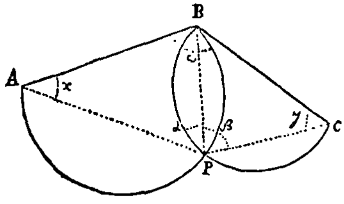


Fig. 50.

Este evident că punctul P, din care dreapta AB se vede sub unghiul α, se află pe segmentul de cerc descris pe AB, şi capabil de unghiul α; de altă parte P trebue să se afle şi pe segmentul de cerc descris pe BC şi capabil de unghiul β. Aşa dar punctul P se va află la intersecţia acestor două segmente.

Se cere însă a determină prin calcul poziţia punctului P.

Punem $AB=a$, $BC=b$, $BAP=x$, $BCP=y$, $ABC=\omega$. Triunghiul ABP dă:

$$\frac{BP}{\sin x}=\frac{AB}{\sin \alpha},$$

sau

$$BP=\frac{a \sin x}{\sin \alpha}.$$

Triunghiul BCP dă asemenea:

$$BP=\frac{b \sin y}{\sin \beta};$$

aşadar

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha}=\frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

deunde

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta},$$

şi după proprietăţile proporţiilor,

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{b \sin \alpha-a \sin \beta}{b \sin \alpha-a \sin \beta}.$$

Insă (71)

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}};$$

aşa dar:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{b \sin \alpha-a \sin \beta}{b \sin \alpha+a \sin \beta}.$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{b \sin \alpha-a \sin \beta}{b \sin \alpha+a \sin \beta}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}.$$

Pentru a face calculabil prin logaritmi membrul al doilea al acestei ecuaţiuni, împărţim ambii termeni ai fracţiunii cu b sin α, şi avem:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{1-\dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1+\dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}.$$

Punând

$$\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}=\operatorname{tg}\varphi,$$

şi observând că $1=\operatorname{tg}45^0$, relaţiunea aceasta d evine

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{\operatorname{tg}45^0-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}45^0\operatorname{tg}\varphi}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi)\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} \tag{1}$$

Pe de altă parte, suma unghiurilor din patrulaterul ABCP fiind de 360°, avem:

$$\alpha+\beta+x+y+\omega=360^0,$$

deunde

$$\frac{x+y}{2}=180^0-\frac{\alpha+\beta+\omega}{2}. \tag{2}$$

Ecuaţiunile (1) şi (2) ne vor da pe x şi y, cari determină poziţia punctului P pe hartă.

Cunoscând pe x şi y, vom puteà determinà şi pe BP, prin vreuna din relaţiunile.

$$BP=\frac{a\sin x}{\sin\alpha},\ \text{sau}\ BP=\frac{b\sin y}{\sin\beta}.$$

Exemplul. Date: $\alpha=53^0 43' 27'' 4$; $\beta=42^0 18' 53'',3$;

$\omega=112^0 34' 32'',3$; $a=2456^m,13$; $b=1934^m,25$.

Necunoscute: $x=69^0 8' 27'',78$; $y=82^0 14' 39'',22$;

$BP=2846^m,918$.

Observare. In caz când

$$\alpha+\beta+\omega=180^0,$$

avem din (2):

$$\frac{x+y}{2}=90^0, \text{ sau: } \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\infty.$$

De altă parte, fiindcă unghiurile opuse, $\alpha+\beta$ şi ω, din patrulaterul ABCP, sunt suplimentare, patrulaterul este inscriptibil; prinurmare şi unghiurile x şi y vor fi suplimentare, şi vom aveà:

$$\sin x=\sin y$$

atunci relaţiunea (a) devine:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},$$

sau

$$a\sin\beta=b\sin a,$$

şi prinurmare

$$\operatorname{tg}\varphi=1, \text{ şi } \varphi=45^0.$$

Formula (1) se face în cazul acesta:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}0^0\operatorname{tg}90^0=0\times\infty=\frac{0}{0}.$$

In caz dar când *cele patru puncte* A, B, C, P, *sunt pe acelaş cerc, problema este nedeterminată.*

172. *Să se reducă o dreaptă la orizont.*

Fiind dată dreapta AB şi înclinarea sa θ pe orizont, se cere dreapta AC, redusă la orizont (fiig. 51).

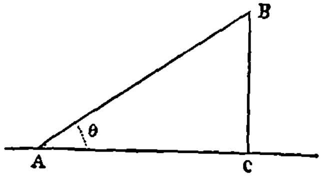


Fig. 51.

Triunghiul dreptunghiu ABC dă imediat:

$$AC = AB \cos\theta.$$

Aşa dar *o dreaptă redusă la orizont este egală cu dreapta din natură, înmulţită cu cosinusul înclinării ei pe orizont.*

Exemplul. Date $AB = 193^m,37$; $\theta = 8^0 13' 25'',5$.

Necunoscuta : $AC = 191^m,381$.

FINE