

## Grundkurs Mathematik II

### Vorlesung 56

#### Produkte von endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

BEISPIEL 56.1. Eine Münze wird zweimal unabhängig voneinander hintereinander geworfen, und wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, wie oft dabei Zahl fällt. Die Möglichkeiten sind 0, 1, 2. Diese sind aber nicht gleichwahrscheinlich, sondern die 1 ist deutlich wahrscheinlicher als die 0 und die 2. Wenn man das Ereignis mit der möglichen Wertemenge  $\{0, 1, 2\}$  beschreibt, so liegt kein Laplace-Raum vor. Es ist besser, die Gesamtsituation durch den Produktraum  $\{K, Z\} \times \{K, Z\}$  zu beschreiben, wobei die Paare daraus die möglichen Ausgänge des Gesamtexperimentes bezeichnen, bei dem das Ergebnis beim ersten Wurf an erster und das Ergebnis beim zweiten Wurf an zweiter Stelle notiert wird. Die möglichen Ergebnisse sind somit

$$(Z, Z), (Z, K), (K, Z), (K, K).$$

Diese Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich, d.h. mit diesem Produktraum wird das Gesamtexperiment durch einen Laplace-Raum beschrieben, bei dem jedes Elementarereignis die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  besitzt. Die ursprüngliche Frage nach der Wahrscheinlichkeit, wie oft insgesamt Zahl geworfen wird, wird mit Hilfe dieses Produktraumes dadurch beantwortet, dass man zählt, wie viele der Elementarereignisse zur Summenanzahl 0, 1, 2 führen. Somit besitzt keinmal Zahl die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$ , einmal Zahl die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  und zweimal Zahl die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$ .

Die mehrfache Hintereinanderausführung eines Experimentes wird durch die Produktmenge, die Produktdichte und das Produktmaß mathematisch realisiert.

DEFINITION 56.2. Es seien  $(M_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mu_n)$  endliche Wahrscheinlichkeitsräume mit zugehörigen Dichten  $f_i$ . Dann nennt man die Produktmenge  $M_1 \times \dots \times M_n$  zusammen mit der durch

$$f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte den *Produktraum* der Wahrscheinlichkeitsräume.

Häufig nimmt man in jeder Komponente den gleichen Wahrscheinlichkeitsraum  $M$ , etwa, wenn man die  $n$ -fache Hintereinanderausführung eines Experimentes untersuchen möchte. Für den Produktraum schreibt man dann kurz  $M^n$ .

BEISPIEL 56.3. Es soll zehnmal mit einer Münze hintereinander geworfen werden. Mit dem Grundraum

$$M = \{K, Z\}$$

wird dies dann mit dem Produktraum

$$N = M^{10}$$

beschrieben, die Elemente im Produktraum dokumentieren einen möglichen Ausgang des Gesamtexperimentes, es handelt sich um sämtliche Kombinationen der Länge 10 aus  $K$  oder  $Z$ , „typische“ Elemente sind

$$(Z, Z, K, Z, K, K, Z, K, K, Z), (K, K, Z, K, K, K, Z, K, Z, K), \\ (Z, Z, Z, Z, Z, Z, Z, Z, Z, Z).$$

Diese haben alle die Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}}.$$

LEMMA 56.4. *Es seien  $(M_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mu_n)$  endliche Wahrscheinlichkeitsräume und*

$$M = M_1 \times \dots \times M_n$$

*der Produktraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Der Produktraum ist in der Tat ein Wahrscheinlichkeitsraum.*
- (2) *Für Teilmengen  $T_1 \subseteq M_1, \dots, T_n \subseteq M_n$  ist*

$$\mu(T_1 \times \dots \times T_n) = \mu_1(T_1) \cdots \mu_n(T_n).$$

*Beweis.* Es seien  $f_i$  die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten.

- (1) Unter Verwendung des allgemeinen Distributivgesetzes in der Form von Aufgabe 11.8 gilt

$$\begin{aligned} \sum_{x \in M} f(x) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \dots \times M_n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \\ &= \left( \sum_{x_1 \in M_1} f_1(x_1) \right) \cdots \left( \sum_{x_n \in M_n} f_n(x_n) \right) \\ &= 1 \cdots 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

- (2) Es ist entsprechend

$$\begin{aligned} \mu(T_1 \times \dots \times T_n) &= \sum_{x \in T_1 \times \dots \times T_n} f(x) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in T_1 \times \dots \times T_n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \\ &= \left( \sum_{x_1 \in T_1} f_1(x_1) \right) \cdots \left( \sum_{x_n \in T_n} f_n(x_n) \right) \end{aligned}$$

$$= \mu_1(T_1) \cdots \mu_n(T_n).$$

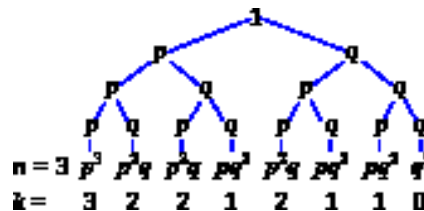
□

BEMERKUNG 56.5. Zu Laplace-Räumen  $(M_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mu_n)$  mit

$$\#(M_i) = k_i$$

ist der Produktraum  $M_1 \times \cdots \times M_n$  ebenfalls ein Laplace-Raum mit  $k_1 \cdots k_n$  Elementen. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Produktraumes und aus Satz 9.6.

### Die Binomialverteilung



DEFINITION 56.6. Sei  $p \in [0, 1]$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Die endliche Wahrscheinlichkeitsdichte  $B_{p,n}$  auf  $M = \{0, 1, \dots, n\}$  mit

$$B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

heißt *Binomialverteilung* zur Stichprobenlänge  $n$  und zur Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ .

LEMMA 56.7. Die Binomialverteilung zu  $p \in [0, 1]$  ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\{0, 1, \dots, n\}$ .

*Beweis.* Wir müssen lediglich nachweisen, dass

$$\sum_{k=0}^n B_{p,n}(k) = 1$$

ist. Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$\begin{aligned} 1 &= 1^n \\ &= (p + (1-p))^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n B_{p,n}(k), \end{aligned}$$

was die Behauptung bestätigt. □

LEMMA 56.8. *Es sei  $M = \{0, 1\}$  mit der Bernoulli-Verteilung zur Wahrscheinlichkeit  $p$  versehen und es sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Es sei*

$$N = M^n$$

*das  $n$ -fache Produkt von  $M$  mit sich selbst. Dann besitzt zu  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  das Ereignis*

$$E_k = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = k \right\}$$

*die Wahrscheinlichkeit*

$$B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

*Beweis.* Da jedes  $x_i$  nur den Wert 0 oder 1 haben kann, gilt  $\sum_{i=1}^n x_i = k$  genau dann, wenn in

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

genau  $k$ -fach eine 1 (und  $n - k$ -fach eine 0 steht). Diese Tupel entsprechen den  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ , davon gibt es nach Satz 13.6  $\binom{n}{k}$  Stück. Die Wahrscheinlichkeit für ein solches einzelnes Tupel von diesem Typ ist nach der Definition der Produktwahrscheinlichkeit gleich  $p^k (1-p)^{n-k}$ . Somit ist die Gesamtwahrscheinlichkeit von  $E_k$  gleich

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

□

SATZ 56.9. *Es sei ein Experiment gegeben, das nur die Werte 0 und 1 annehmen kann und bei dem der Wert 1 die Wahrscheinlichkeit  $p$  besitzt. Dann ist die Verteilung auf  $\{0, 1, \dots, n\}$ , die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass bei der  $n$ -fachen (unabhängigen) Hintereinanderausführung des Experimentes  $k$ -fach das Ereignis 1 eintritt, durch die Binomialverteilung zur Stichprobenlänge  $n$  und zur Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  gegeben.*

*Beweis.* Das Experiment wird durch die Bernoulli-Verteilung auf  $M = \{0, 1\}$  mit der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  beschrieben. Die  $n$ -fache Hintereinanderausführung wird somit durch den Produktraum  $M^n$  beschrieben. Das Ereignis

$$E_k \subseteq M^n,$$

das beschreibt, dass genau  $k$ -fach 1 eintritt, besitzt nach Lemma 56.8 die Wahrscheinlichkeit

$$B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

□

KOROLLAR 56.10. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem  $n$ -fachen Münzwurf genau  $k$ -fach Kopf fällt, beträgt

$$B_{\frac{1}{2},n}(k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 56.9, da bei  $p = \frac{1}{2}$  die Gleichheit

$$p^k(1-p)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

gilt. □

### Das Gesetz der großen Zahlen



Jakob Bernoulli (1655-1705) bewies erstmals das Gesetz der großen Zahlen für den Münzwurf.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie interessiert man sich häufig für asymptotische Aussagen. Dass bei einem einzelnen Münzwurf Kopf und Zahl gleichwahrscheinlich ist, ist eine plausible Definition, aber selbst noch nicht sehr aussagestark. Eine gehaltvolle Aussage wird erst dann daraus, wenn man zeigen kann, dass bei einer häufigen Wiederholung des Experimentes die relative Häufigkeit, wie oft Kopf fällt, sich in der Nähe von  $\frac{1}{2}n$  befindet, wenn  $n$  die Anzahl der Wiederholungen bezeichnet. In diesem Kontext ist es zunächst wichtig, sich klar zu machen, was eine sinnvolle Formulierung sein könnte und wie hier „in der Nähe von“ zu verstehen ist. Insbesondere muss man sich klar machen, was zu viel erwartet wäre. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem  $n$ -fachen Münzwurf (mit  $n$  gerade) genau  $n/2$ -oft Kopf fällt, gleich  $\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}$  nach Korollar 56.10. Dies ist wahrscheinlicher als jedes andere Ergebnis für die Anzahl der Kopfwürfe. Wenn aber  $n$  gegen unendlich strebt, so wird diese Wahrscheinlichkeit beliebig klein, sie konvergiert gegen 0. Auch wenn man einen gewissen Abstand zu der Mitte  $n/2$  fixiert, wie wenn man

sagt, dass die Anzahl der Kopfwürfe zwischen  $n/2 - 10$  und  $n/2 + 10$  liegen soll, so geht die Wahrscheinlichkeit dafür gegen 0 für  $n$  gegen unendlich. Dies klingt einleuchtend, wenn man sich ein großes  $n$  betrachtet. Dass bei einer Million an Münzwürfen die Kopfanzahl im (relativ gesehen kleinen) Intervall  $[499990, 5000010]$  liegen soll, ist doch nicht zu erwarten. Anders sieht es aus, wenn man „in der Nähe von“ anteilig bzw. prozentual versteht. Wenn man sich Intervalle der Form

$$\left[\frac{n}{2} - \frac{n}{10}, \frac{n}{2} + \frac{n}{10}\right]$$

anschaut, so sind dies für einige Zehnerpotenzen die Intervalle  $[4, 6]$ ,  $[40, 60]$ ,  $[400, 600]$ ,  $[400000, 600000]$ , und unser stochastisches Gefühl sagt uns, dass die Wahrscheinlichkeiten zunehmend größer werden, dass die Anzahlen der Kopfwürfe in diesen Intervallen liegen. Diese Beobachtung wird durch das *Gesetz der großen Zahlen* präzisiert. Es gibt eine ganze Reihe von Aussagen unter diesem Namen, wir beschränken uns auf den Fall eines Münzwurfes. Das folgende Lemma beinhaltet die entscheidenden Abschätzungen, um das Gesetz der großen Zahlen für den Münzwurf zu beweisen. Zur Orientierung: Im zuletzt erwähnten Beispiel muss man  $\beta = 0,1$  nehmen, es ist  $n = 1000000$  und  $\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor = 400000$ . Der Beweis liefert eine Abschätzung nach oben dafür, dass bei einem millionenfachen Münzwurf höchstens 400000-mal Zahl geworfen wird.

LEMMA 56.11. *Es sei  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ , fixiert und  $n \in \mathbb{N}$  gerade. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es ist  $\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .*  
 (2) *Es ist*

$$\binom{n}{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} \leq \left( \left( \frac{1}{1 + 2\beta} \right)^\beta \right)^n \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

- (3) *Es ist*

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} \binom{n}{k} \leq \left( \frac{n}{2} + 1 - \lfloor \beta n \rfloor \right) \cdot \left( \left( \frac{1}{1 + 2\beta} \right)^\beta \right)^n \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

- (4) *Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert der Ausdruck*

$$\frac{1}{2^n} \left( \sum_{k=0}^{\frac{n}{2} - \lfloor \beta n \rfloor} \binom{n}{k} \right)$$

*gegen 0.*

*Beweis.* (1) Siehe Aufgabe 56.18.

- (2) Nach Aufgabe 13.18 ist

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}.$$

Somit besteht zwischen  $\binom{n}{\frac{1}{2}n}$  und  $\binom{n}{\frac{n}{2}-\lfloor\beta n\rfloor}$  der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\binom{n}{\frac{n}{2}} &= \frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \\ &= \frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\frac{n}{2}+2}{\frac{n}{2}-1} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}-2} \\ &= \frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\frac{n}{2}+2}{\frac{n}{2}-1} \cdots \frac{\frac{n}{2}+\lfloor\beta n\rfloor+1}{\frac{n}{2}-\lfloor\beta n\rfloor} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}-\lfloor\beta n\rfloor}.\end{aligned}$$

Dies bedeutet umgekehrt

$$\begin{aligned}\binom{n}{\frac{n}{2}-\lfloor\beta n\rfloor} &= \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1} \cdot \frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}+2} \cdots \frac{\frac{n}{2}-\lfloor\beta n\rfloor}{\frac{n}{2}+\lfloor\beta n\rfloor+1} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1} \cdot \frac{\frac{n}{2}-\lfloor\beta n\rfloor}{\frac{n}{2}+2} \cdots \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+\lfloor\beta n\rfloor+1} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

Die Faktoren sind alle von der Form

$$\frac{\frac{n}{2}-\lfloor\beta n\rfloor-1+i}{\frac{n}{2}+i}$$

mit  $i = 1, \dots, \lfloor\beta n\rfloor + 1$ . Sie sind alle  $< 1$  und für das maximale  $i$ , also für  $\lfloor\beta n\rfloor + 1$ , am größten. Da es  $\lfloor\beta n\rfloor + 1$  viele Faktoren gibt, kann man das Produkt unter Verwendung von Lemma 25.18 (1), Lemma 53.5 (6) und Lemma 53.5 (8) durch

$$\begin{aligned}\left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+\lfloor\beta n\rfloor+1}\right)^{\lfloor\beta n\rfloor+1} &\leq \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+\beta n}\right)^{\lfloor\beta n\rfloor+1} \\ &\leq \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+\beta n}\right)^{\beta n} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\beta}\right)^{\beta n} \\ &= \left(\left(\frac{1}{1+2\beta}\right)^\beta\right)^n\end{aligned}$$

nach oben abschätzen. Also ist

$$\binom{n}{\frac{n}{2}-\lfloor\beta n\rfloor} \leq \left(\left(\frac{1}{1+2\beta}\right)^\beta\right)^n \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

- (3) Dies folgt aus (2), da die Binomialkoeffizienten in diesem Bereich wachsend sind und da es  $\left(\frac{n}{2}+1-\lfloor\beta n\rfloor\right)$  Summanden gibt.
- (4) Nach (1) konvergiert  $\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}$  gegen 0. Nach (3) genügt es daher, zu zeigen, dass

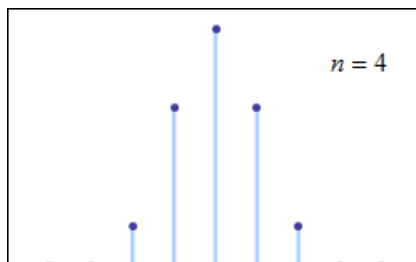
$$\left(\frac{n}{2}+1-\lfloor\beta n\rfloor\right) \left(\left(\frac{1}{1+2\beta}\right)^\beta\right)^n$$

gegen 0 konvergiert. Dieser Ausdruck ist aber (beschränkt durch) von der Form

$$n \cdot \gamma^n$$

mit  $\gamma < 1$ , also nach Satz 27.2 konvergent gegen 0.

□



Die geeignet normierte Binomialverteilung zu  $\frac{1}{2}$  „konvergiert“ gegen die sogenannte Normalverteilung.

SATZ 56.12. Zu jedem  $\alpha < \frac{1}{2}$  konvergiert die Folge

$$\frac{1}{2^n} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n \rfloor} B_{\frac{1}{2}, n}(k) \right)$$

gegen 0. Das bedeutet, dass die relative Häufigkeit bei einem  $n$ -fach wiederholten Bernoulli-Experiment zur Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  bei  $n$  hinreichend groß mit beliebig hoher Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\alpha n, (1 - \alpha)n]$  liegt.

*Beweis.* Wir schreiben

$$\beta = \frac{1}{2} - \alpha > 0.$$

Somit ergibt sich die Aussage direkt aus Lemma 56.11 (4).

□



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Arbre binaire loi binomiale.svg , Autor = Benutzer Cdang auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	3
Quelle = Jakob Bernoulli.jpeg , Autor = Benutzer File Upload Bot (Magnus Manske) auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	5
Quelle = De moivre-laplace.gif , Autor = Benutzer Stpasha auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	8
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <a href="http://commons.wikimedia.org">http://commons.wikimedia.org</a> ) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9