Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 52

Übungsaufgaben

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

AUFGABE 52.1. Untersuche die Addition

$$+ \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x+y,$$

und die Multiplikation

$$\cdot \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

auf kritische Punkte und auf Extrema.

AUFGABE 52.2. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

AUFGABE 52.3. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

AUFGABE 52.4. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

AUFGABE 52.5. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

AUFGABE 52.6.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto (3x^2 - 2xy - y^2 + 5x),$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Aufgabe 52.7.*

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \frac{xz}{x^2+y^2},$$

(es ist also $y > 0$).

a) Berechne die partiellen Ableitungen von f und stelle den Gradienten zu f auf.

b) Bestimme die isolierten lokalen Extrema von f.

Aufgabe 52.8.*

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto -3x^2+2xy-7y^2+x,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.9. Man untersuche die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^y,$$

auf Extrema (vergleiche Beispiel 52.4), indem man die Funktion als Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $(x,y) \mapsto (\ln x, y)$, $(u,v) \mapsto (uv)$, $z \mapsto e^z$ auffasst und Aufgabe 51.1 und Aufgabe 51.2 heranzieht.

Aufgabe 52.10. Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2y-xy^2+x^2-y^3,$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 52.11.*

Wir betrachten die Determinante für 2×2-Matrizen als Funktion

$$\det\colon\ \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto xw-zy.$$

(1) Bestimme die Jacobi-Matrix zu det und die kritischen Punkte.
(2) Untersuche det auf lokale Extrema. Bestimme insbesondere den Typ der Hesse-Matrix im Nullpunkt.
(3) Finde einen zweidimensionalen Untervektorraum

$$U \subseteq \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

auf dem die (Einschränkung der) Determinante ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 52.12.*

Man gebe für vorgegebene natürliche Zahlen p, q, n mit $p + q \leq n$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Hesse-Form im Nullpunkt den Typ (p, q) besitzt.

Aufgabe 52.13. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $P \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zur Hesse-Matrix in P mit einem positiven Eigenwert. Zeige, dass f in P kein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe 52.14.*

Es sei

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge sei. Zeige, dass für $P \in G$ und $v \in V$ die Beziehung

$$\sum_{r \in \mathbb{N}^n,\, |\, r\, | = 2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r \,=\, \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_P f(v, v)$$

gilt.

Aufgabe 52.15. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto xy^2 - x^3 y,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.16.*

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$

auf kritische Punkte und Extrema.

Aufgabe 52.17.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$f(P) \,=\, f(-P)$$

für alle $P \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeige, dass f in 0 einen kritischen Punkt besitzt.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion, die in 0 ein isoliertes lokales Maximum besitzt.

c) Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion, die in 0 kein Extremum besitzt.

Aufgabe 52.18.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ definierten Funktion

$$f\colon\ B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2+y^3-y^2-y.$$

Aufgabe 52.19. Bestimme für die Funktion

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy\sqrt{3-x^2-y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und untersuche die Funktion auf Extrema.

Aufgabe 52.20. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1-t^2.$$

Für welches $x \in [0,1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 52.21.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1-t^2.$$

Für welche $x,y \in [0,1]$, $x<y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 52.22. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f,g\colon\ G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 52.23. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim(V) \geq 2$, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f,g\colon\ G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 52.24. (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2+9y^2+6xy,$$

auf Extrema.

AUFGABE 52.25. (4 Punkte)

Sei $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Untersuche die Funktion

$$f\colon I \times I \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{\cos x}{\cos y},$$

auf Extrema.

AUFGABE 52.26. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^2.$$

Für welche $x, y \in]0,1[$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

AUFGABE 52.27. (5 Punkte)

Sei

$$h\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und betrachte

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto h(x^2+y^2).$$

Zeige, dass f allenfalls im Nullpunkt $(0,0)$ ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn h in 0 ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

AUFGABE 52.28. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$ ist für alle $Q \in U$, $Q \neq P$. Zeige, dass dann φ in P ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7