

尚志學會叢書

科學之價值

商務印書館發行

尚志學會叢書

科學之價值

潘加勒著
文元模譯

商務印書館發行

尚志學會叢書
科學之價值

此書有著作權翻印必究



中華民國十七年一月初版

每冊定價大洋柒角

外埠酌加運費匯費

原著者 潘加勤

譯述者 文元模

發行兼
印刷者 上海寶山路
商務印書館

發行所 上海及各埠
商務印書館

Shang Chih Shue Wei Series
LA VALEM DE LA SCIENCE

By
POINCARÉ

Translated by
WEN YUAN MU

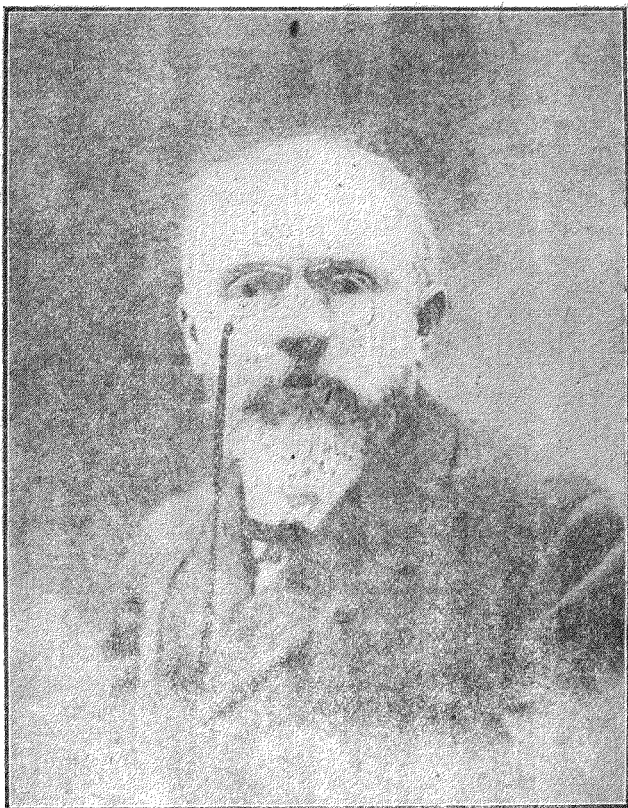
1st ed., Dec., 1927

Price: \$0.70, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.

Shanghai, China

All Rights Reserved



潘加勒(Poincaré)

科學之價值目次

緒論	一
第一篇 數學的科學	九
第一章 數學之直觀與論理	九
第二章 時間之測定	二七
第三章 空間之概念	四七
第四章 空間與其三次元性	七四
第二篇 物理的科學	一〇七
第五章 解析與物理學	一〇七
第六章 天文學	一二一

第七章	數學的物理學之歷史	一三一
第八章	數學的物理學現今之危機	一三八
第九章	數學的物理學之將來	一五二
第三篇	科學之客觀的價值	一六二
第十章	科學果人爲乎	一六二
第十一章	科學與實在	一九〇
附錄	潘加勒之哲學思想大要	二一三

科學之價值

緒論

人生之目的，在求真理。捨是之外，更無他物足以值吾人之追求者。凡人莫不力求減少人生之痛苦，此固無可容疑。然果何爲而求？乎消除痛苦，不過消極的理想而已。世界一日不滅，痛苦終無有已時也。吾人所以常欲使人類解脫物質之煩惱者，無非爲研究真理，不得不先恢復自由耳。

然真理有時足令人驚懼。其顯也暫，其隱也久。盡力窮追，終不能得。故希臘學者亞里斯多德 (Aristotle) 之流有言曰：『欲有所爲，當先知止。』 (αὐτὸν ὀφείλουσιν) 誠以真理可望而不可卽，過事

追求，反足以爲實行之阻礙故也。且吾人既知真理常可畏，又常覺幻想之可恃，遂至疑及慰藉吾人鼓舞吾人者，不在真理，反在幻想。然試思幻想一旦消滅，吾人猶能發奮爲雄，毫不失望乎？譬諸受羈劣馬，苟去其蔽眼之物，當不復肯前驅。吾人行事，亦猶是焉。眼前過明，心內將愈怯也。不寧惟是，吾人欲求真理，須完全獨立，不受他人之牽制。然苟欲有所爲，又須與人團結，其力始強。多數之人所以畏懼真理，視之爲使人柔弱之原因，亦由於此。然吾人不當因此而生畏也。宇宙一切尙有美於真理者乎？

此處所謂真理，專就科學的真理言。然道德的真理，亦可得而並論。余爲是言，讀者或將有疑者曰：道德的真理，由感覺來；科學的真理，由證驗來；二者判然各別，安能以同名括之乎？

然余以爲此二者名雖不同，實有不可分之理由在。凡愛其一者必愛其二，一也。無論吾人欲發見科學的真理，或欲發見道德的真理，皆須誠意正心，不持成見，不挾私情始可，二也。一旦發見，無論其真理爲道德的，或科學的，其與吾人之歡樂皆同；且當認識之初，二者同放光明，苟非盲目，無不能見，三也。且此二種真理，皆變動不居，方引吾人至前，忽又離吾人而遠去，遂使追求之者，奔

馳不已，永不知有休息之一日，四也。

猶有不能已於言者，二者之中，凡畏其一者亦必畏其二。蓋此等人對於一切事物常以其結果縈懷故也。約而言之，無論對於此二真理爲愛爲畏，其愛之或畏之之原因皆同。余所以相提並論，亦由是故。

假使吾人不以道德的真理爲可畏，吾人亦不當畏科學的真理。尤當注意者，科學的真理，決不能與道德的真理相矛盾是也。蓋道德與科學，各有其領土，雖相接而不相犯。道德示吾人以努力之目的，科學則教吾人以達其目的之方法。二者既不同道，自不能相牴觸。世固無科學的道德，亦安有反道德之科學哉？

雖然，世人往往以科學爲可畏者，何也？曰：科學不能與吾人以幸福故。科學誠不能與吾人以幸福，然不知科學之禽獸，其所感之痛苦，果較人類更爲少耶？假令吾人與禽獸無異，不知有死，即能因此而視地上爲長生之天國乎？吾人誤餐禁果，致惹起無限之糾纏，然不能以生涯之艱苦，並忘禁果之甘芳也。若有疑吾言者，直謂由明而盲之人，不思光之恩惠可矣。人或未能因科學而得

幸福，假使並今日之科學而失之，人類之不幸，恐更有甚於今日者。

假定真理爲足值，吾人追求之惟一目的，吾人果能達此目的乎？是誠不能無疑。曾讀余所著科學與假說 (*La Science et l'Hypothèse*) 一書者，當已早知余之見解。一瞥卽逝之真理，決非大多數人之所謂真理。若然，則吾人欲求真理之一片熱誠，終成空想已乎？抑尚有方法可以與之相近乎？是不可不思也。

夫欲解決此問題，將用何方法乎？人類之智力（狹義言之，學者之智力）有限，宇宙之事物無限，吾人其能以有限之智力隨無限之事物耶？論此問題，雖連篇累幅，亦不能罄。余於本書，但提要言之而已。數學家之精神之不同於物理學家或自然科學家之精神，盡人而知之。然數學家中之亦不能自相一致；謹守整嚴之論理，不敢少放者有之；惟憑直觀 (*Intuition*) 爲發見之惟一源泉者有之。吾人對於真理不信之因，此或亦居其一。數學之定理，自種種相異之精神視之，仍爲同物乎？人人各得其解之真理，依然可謂之真理乎？然更細思之，研究者之精神雖異，而其所成之事業則一。且其事業若無此等精神各自不同之學者通力合作，終不能有成就之希望。吾人觀此，心

亦可以少安矣。

更就時間與空間而論之。時間與空間，本爲吾人容納自然現象之套框 (catho)，其價值全爲相對的；余著科學與假說中，已言之矣。自然初未嘗以此套框強吾人，乃吾人因其便利，故強納自然於其中，此義余亦曾道及。惟余前書僅說明量的空間，即構成幾何學之數學的關係，未嘗言及時間與空間相類，性的空間之狀況，與量的空間亦同。且未嘗問及吾人究爲何而必與空間以三次元 (three dimensions) 也。故余於此更將此等重要問題反覆詳論之。

夫數學的解析，執此等空虛之套框爲研究之主要對象，寧非一種無關實際之精神的遊戲乎？若數學不過供給物理學者一種便利之言語，則數學之用亦甚無味，苟不得已，雖棄之亦無妨。不寧惟是，且此強造之言語，適足以爲實在界與物理學者之障蔽而已。然數學非如是也。苟無數學的言語，事物之密切關係，大抵將爲吾人所不能知。且世界之內的和諧即惟一之真實在，吾人所以能知此者，亦莫不借數學之力。此事後當更論之。

代表此內的和諧最善之名即法則。法則實近代人類思想之一大產物也。即在今日之民族，

猶有常生活於不可思議之中，而毫不以爲怪者。然吾人每觀自然之整齊，則不禁驚異之情油然而生矣。人常求神顯靈，欲借其靈蹟之奇，而認識神之存在，豈知無靈之處卽是真靈，無奇之處乃是大奇乎？世界之所以能如是和諧，吾人雖不知其故，然實可謂神已。若自然爲任意之物所左右，吾人何從得知其非偶然耶？

吾人發見自然之法則，起源於星學。星學之偉大，不在其所論對象之壯美，實在其發見之勝利。

由此觀之，天體力學爲數學的物理學最初之模範者，當然之理也。然其後數學的物理學發達無已，輒近更有一日千里之勢，故余於一九〇〇年科學與假說中特設二章敘述之概論。今不數年，而應修改之處已數見。一九〇四年，余在聖路易萬國博覽會講演，曾欲一一尋其進步之跡。研究之成績，行當爲讀者言之。

科學愈進步，則昔日視爲根本之原理，亦漸動搖。長此以往，今日以爲確不可移者，終必有顛覆之一日。然此危亡非決無可挽回也。縱令舊物不能全存，變態之物，必將繼之而起。科學之進步，

非如改造都市，可以盡毀其舊家，而別建新屋以易之也。惟動物形體之進化，可以擬之。雖發展至若干傳後，自練達者觀之，猶能認其過去數世紀勞作之跡，不過俗眼不識而已。是以舊原理實新原理之祖，發明舊原理者，非徒勞也。

若吾人至此卽止，則讀者已可於此書中，得二三信仰科學之根據，然科學不足信之理由，尙不知有幾許，吾人所懷之疑，仍未釋也。故不可不更論之。

世人往往於科學規約 (convention) 之意義，過爲推廣。至謂法則卽科學的事實，亦科學家造作之物，此乃趨於惟名論之極端者也。科學法則，決非人造。吾人雖未能證明其爲非偶然，然亦不能證明其爲偶然也。

夫人智信爲在自然中所發見之和諧，果能獨存於人智之外歟？完全超然立於悟、視、感之精神以外之實在，決不能有。是實無可疑者。此種外界，縱令能存，亦決非吾人之所能達。然吾人所謂客觀的實在者，徹底論之，必爲多數思惟者所公共，亦必爲全體思惟者所公共，此公共物爲何？吾人自後章觀之，不外由數學法則所表示之調和耳。

由是言之，調和者，吾人所能達之惟一之客觀的實在，亦即惟一之真理也。且更進而思之，世界普遍之調和，既視爲衆美之源，則吾人向此調和能進一步，即近衆美之源一步。進步不已，對於此調和之認識，愈漸近於完全。吾人之進步雖至遲遲，然愈難則其價值愈足多矣。

第一篇 數學的科學

第一章 數學之直觀與論理

一

試取數學名家或一般數學者之著述研究之，即可發見其研究精神，常有二種相反之趨勢。其一專重論理，其一惟恃直觀是也。重論理者，其書中所載，毫無偶然，儼若服榜 (Vauban) 攻城，不急求功，但築圍設壘，漸迫漸進者然。憑直觀者，則如臨陣勇士，一往無前，欲一舉而獲意外之勝焉。

此二種方法之不同，非因其處置之內容不同而然也。前者常稱爲解析派，後者常稱爲幾何

派。解析派之學者研究幾何學時，亦爲解析的。幾何派之學者論純粹解析時，亦爲幾何的。或爲論理家，或爲直觀家，全由其精神之本質。一旦與新問題相遇，此本質必自然顯露於不知不覺之間。故偏重論理或偏恃直觀，實爲各數學者之天性，非教育之力也。

余欲舉例以明之，然實不勝屈指。今爲比較之便，特取極端之例，並舉今尙生存之二數學者以爲證。

梅黎 (Méry) 者，證明二項方程式常有根，更易言之，卽證明任何角度，均可等分者也。

世若有一目卽可了然之真理，則此真理卽爲其一，明矣。角可任意等分，尙何可疑？然梅黎不作如是觀。彼以爲此命題之理，決非自明，故不惜連篇累頁以證之。

反之，有菲力克斯克來因 (Felix Klein) 者，曾研究函數論中一最抽象的問題。卽於一已知理曼面 (Surface de Riemann) 上，含有已知特性之一函數能常存在否之問題是也。此著名之德國幾何學家將以何法解此問乎？彼則以電導率依一定之法則而變之金屬面，代問題之理曼面，以電池之兩極連其兩極，如此彼遂謂此面不能不有電流通過，而此面上所分布之電流，

卽表示含有已知特性之函數云云。

夫克來因亦何嘗不知此法不過爲觀察大概之一助。然彼竟公然以之問世，而毫無所躊躇。明知證明之不嚴密，而因感情上覺其確實，亦遂堅信其確實。此皆論理家之所不能爲，不肯爲，且不欲動念者也。

余今更取最近物故之二數學家而比較之。一爲柏特龍 (Bertrand)，一爲愛米特 (Hermite)，皆法蘭西科學界之明星，其事業足以永傳不朽者。此二人生前肄業之學校同，所受之教育同，所得之感化亦同。然其天性則迥不相侔，不但於其著書中可以見之，卽其講義，辨論，外貌，無一不露其相異之特質。彼等之風采，實深印於學生之腦中，凡親炙其教者，未有不記憶其人者。余亦時回想及之。

柏特龍講演時，常喜運動，時作攻敵之態度，時運動其手腕，作論題圖形之狀。此明明表示其心目中，隱有一物，彼爲描畫此物，故作種種表情之運動。然愛米特則不然，彼之兩目，似與外界斷絕接觸者，可知彼之認識真理，不在心外而在心內也。

再就十九世紀德國數學界中名聲赫赫之二大數學家而論之。一爲瓦亞斯特拉斯 (Weierstrass)，一爲理曼 (Riemann)，皆首創一般函數論者也。瓦氏解決一切問題，均歸之於級數的研究與其解析的變形。換言之，卽推廣數論，以建設解析。故通覽其全集，亦不得見一圖。反之，理曼則處處借幾何學之助。故彼之觀念，幾如指掌之圖，一旦得其意義，則永久不至忘卻也。

其後有名李 (Lie) 者，亦直觀派之一人。讀其著述，雖至可疑議之事，經彼道破，無不渙然冰釋。由此可知彼之爲人，常以圖形思惟者也。反之，如哥瓦黎維斯克夫人 (Madame Kowalewski)，則爲論理家焉。

直觀家與論理家之別，不惟於學者中見之，卽學生中亦常見之。論理派之學生，解問題時常好用解析方法。直觀派之學生，則無往而不用幾何方法。前者不能爲空間的觀察，後者不能耐煩複之計算也。

以上二種精神，於科學之進步，均不可少。無論爲論理家，爲直觀家，莫不卓然各有所樹立。世不可無瓦亞斯特拉斯之著述，亦不可無理曼之著述也。蓋分析與綜合，各有其正當之職守。試一

讀科學之歷史，察此二者所建立之功績，則其味更無窮矣。

二

最可怪者，吾人讀古代先哲之著述，常覺彼等無一而非直觀派者。然自然之爲物，無古今一也。時至今日，自然始新創一種愛論理之精神，可得謂之通論乎？

吾人若能上溯古代之思想而考察之，即將發見往古幾何學派之學者，生而具有解析家之天性者，正復不少。例如歐几里得 (Euclid) 所構成知識之體系，當時學者，莫不奉爲金科玉律，無能指摘。此宏大體系之各部，雖根據直觀而成，然在今日視之，卽謂之爲論理家之事業，亦未嘗不可也。

故變者觀念，不變者精神。直觀之精神，古今皆同，惟在解釋之如何耳。

此變化之原因果何在？無他，卽由於吾人漸悟惟憑直觀，不能達於嚴密之域，且完全之確實亦不可得故也。

試舉一二例以明之。連續函數之中，有全無導來函數者，此吾人所深知者也。然是雖爲論理

上必然之主張，實與直觀相矛盾。若質之吾人之祖先，必不假思索即斷言曰：『凡曲線既有切線，則凡連續函數皆必有導來函數明矣。』

直觀何爲如是欺人歟？此因吾人想像曲線時，心中畫出之象，不能無寬。想像直線時所畫之象，亦必爲有寬之直條故也。然吾人既知線不能有寬，則不得不將心中畫出之象，漸次收細，以求與極限相近。無奈想像之力，終有止境，決不能達於此極限也。

故吾人心中表象之圖，爲一直一曲之二條窄帶，其位置則僅相依而不相貫明矣。

職是之故，若不經嚴密之解析，吾人必斷定曲線皆有切線也。

余今更取戴利克雷 (Dirichlet) 之原理以爲第二例。戴利克雷原理者，理論物理學中無數定理之基礎也。今日欲證明此原理，可由極精嚴極煩長之推論以得之。然昔日之人，僅證明其大致已心滿意足矣。依任意函數而變之其一積分，決不等於零，由此遂斷定此積分不可不有極小值。然函數一語，吾人若以抽象的，普遍的意義解釋之，原能表示一切之特異性，此乃吾人所熟知者。故此斷論之謬，可瞭然矣。

然若用具體的物象，例如以此函數作電位 (potentiel) 觀之，則事不與此相同。吾人即謂靜電的均衡 (l'équilibre électrostatique) 可以得達，將無不可。雖或以物理的比較，不無疑義，然若不用解析的言語，亦不用物理的言語，而以介於二者間之幾何學表之，則確將無此疑問，雖在今日，猶能爲其所欺也。

故曰，直觀無確實性。變革之起，實由於此。吾人今再進而研究此變革發生之程序。

人人皆能想到者，定義不嚴，則推論亦不嚴之一事是也。

數學家所取之對象，其大部分均無完全之定義，由來已久。人當描畫其對象之時，或憑感覺，或憑想像，以爲由此遂已。深知其對象者，誤也。實則此不過一粗率之心像而已，何足以爲推論之基礎？

論理家苦心經營，卽由此始。如無理數卽其一例也。

由直觀所得曖昧之連續觀念，遂分解爲關於整數之不等式之複雜系統。

由是而迫近極限，考察無限小時之種種困難，皆得解除。

今日之解析學中，惟有等不等之關係，以網羅整數，整數之有限系或無限系而已。人常謂數學漸化為數論，非無故也。

三

然則此變革今已告終乎？此實吾人當前之一大問題。

反觀往昔，每當變革之際，吾人之祖先，莫不自信其已達於絕對的嚴密之域，而實又不然。後之視今，亦猶今之視昔。吾人亦安能謂今日之所成，已登峯造極哉？

吾人雖自信吾人之推論，未曾借助於直觀，然自哲學者視之，此不過一幻想耳。純粹之論理，徒引起吾人之冗辨，不能創造新物也。故科學之成立，不能專由論理。

此哲學者之思想，亦自有其正當之意義。無論為整數論，為幾何學，為任何科學，其所以成立，必於純粹論理之外有物存焉。欲表此物，惟有直觀一語而已。此惟一之語實含有多數相異之概念。今就下列四公理比較論之。

(一) 二量若均等於他一量，則此二量必互相等。

(二) 設一命題對於 1 之數爲真，且假定其對於 n 之數爲真；若能證明其對於 $n+1$ 之數亦真，則此命題對於一切整數均真（此卽所謂數學的歸納法）。

(三) 設於一直線上， C 點在 A 點與 B 點之間， D 點在 A 與 C 之間，則 D 點在 A 與 B 之間。

(四) 通過一點而與一直線平行之直線，只能有一。

此四公理無一不可歸於直觀。然第一係述形式論理之法則，第二係先驗綜合判斷，卽嚴密之數學的歸納法之基礎，第三係依據想像力，第四則定義之變形也。

故直觀不必盡憑感官的知覺，專依感官，將歸無效。例如吾人不能於腦中表象千角形，然尙能由直觀視此爲多角形之一種是也。

旁斯力 (Poncelet) 之所謂連續原理 (le principe de continuité)，世人所共知也。彼謂對於實數能成立之理，對於虛數亦能成立。例如謂有實漸近線之雙曲線所成立之理，在有虛漸近線之橢圓，亦能適用。旁斯力 爲十九世紀第一之直觀派學者，不惟酷愛直觀，且自以爲誇耀。常自謂其連續原理，爲彼最奔放的創見之一。此原理非本於感覺之證明者。若依感覺，則橢圓與雙

曲線安能一例視之。是不過一種本能的浮躁的概括而已。余亦不欲爲之辨護也。

由是可知吾人之直觀，實有數種。第一，依附感覺及想像者；第二，依歸納而得之概括，而其歸納則模仿於實驗科學；第三則純粹數之直觀也。前所舉第二公理，即自數之直觀而出。吾人惟由此始能得真正數學的推理。

第一第二之二種直觀，皆無確實性，已如前例所示矣。然對於第三種，世尚有懷疑者乎？若並此而疑之，是疑及數論也。

是故吾人若欲求嚴密，則在今日之解析學中，除依據此三段推論（即此純粹的數之直觀）而外，尙有何法乎？此爲惟一不欺人之方法，故吾人即謂今日已達於絕對的嚴密之域，亦無不可也。

四

哲學家猶有難者曰：『得之於嚴密者，將於客觀性失之。欲達於論理之理想，須先割斷連結吾人與實在之羈絆始可。故如此成立之科學，雖無缺點，然儼若深藏象牙塔中，不與外界相關，始

能如此，若少欲應用，即將逸出塔外矣。」

例如余欲證明某對象有某屬性，而此對象之概念因自直觀得來，初似難爲定義，余於此將何爲乎？當其始也，余之所試，或全歸於失敗，或得一大致之證明，卽自以爲足。然後更進而付之以精確之定義，再由此定義以確定其屬性之有無，此一定之程序也。

哲學家聞之必曰：『猶未也。汝尙須證明與此定義相應之對象，卽爲汝自直觀得來之對象。並須證明凡與汝直觀的觀念一致之具體的真實對象，皆與汝之新定義相符合。然後汝始能主張其對象有該屬性與否。誠如是，汝不過移動難點之位置而已。』

然此問難，非正論也。余非將難點移動之，乃將難點分解之。余所欲證明之主張，實由二真理而成。此二真理各不相同，迄今未曾分別而論。其一爲數學的真理，已嚴密證明之；其二則實驗的真理是也。此真實之具體的對象，果能與此抽象的定義相應與否，惟由經驗可以知之。此第二真理，吾人雖不能以數學證明之，然物理學自然科學之經驗的法則，亦何嘗能以數學證明之乎？數學的證明難吾人者，妄也。

誠如是，吾人能將前此混淆爲一之物取而分別之，寧非大進步耶？

然余之意，非謂卽此已可掃去哲學家之問難也。數學的真理不但嚴密，且同時具有與全世界隔離之人爲的特性。其所注目者，專在解決問題之方法，歷史的起源，毫不爲意，且其問題何以起何由起，亦全置之度外。由此事已可知專依論理必不完足，專依論理之科學，非惟一之科學，直觀不但可以補論理之不及，且可救論理之過當也。

余教授數學的科學時，常言直觀當然自有其獨存之位置。若不依據直觀，則青年學子不能會通數學之意義，不惟不知愛之，且將視爲空闊之辨論，鄙夷而唾棄之矣。卽不然，亦只知學而不知應用也。

余今將專論直觀之於科學，其職守果安在。若直觀爲學生不可少之物，於獨創的學者尤不可須臾離也。

五

吾人常欲求實在，然所謂實在者何歟？

生理學者教吾人曰：『凡有機體皆自細胞成。』化學者更進一步，謂細胞自身由原子成。此言之意，係謂原子或細胞構成實在乎？抑謂原子或細胞至少亦構成惟一之實在乎？細胞排列之狀，與個體與個體所由結合之原，非亦實在耶？非較各個要素更爲有味之實在耶？自然科學者，若只用顯微鏡以研究象，即能自信由此已深知此動物耶？

與此相類之事，數學中亦有之。論理家視一切證明，皆可分解爲多數之基本演算。然但將此等演算，依次檢察，皆無缺點，吾人即自信爲已解其真意乎？即使能記憶其基本演算之原委，與發明者所排列之順序若合符節，而反覆溫習之，即可謂爲理解乎？曰：否否，吾人僅知此尙未得其全實在也。統一其全證明者，尙有物焉。不獲其物，不得謂之爲理解也。

純粹解析，以多數方法供吾人之用，吾人可由之坦坦大道，誠不可謂少矣。然許多大道之中，以何道爲最捷乎？吾人欲知何道最捷，將何由乎？故吾人須具有遠覽之天賦能力，始能知所選擇。此天賦能力非他，即直觀是已。故追求真理者，欲選擇捷徑，不可以無直觀。即後之人追隨前人所經之舊跡，欲知其何以必擇斯徑之故，亦不可以無直觀。

觀奕之人，若僅知下子之規則，不得謂之解棋也。讀數學書者，亦猶是焉。若其人惟知論理，不過如觀奕者，只知下子之規則而已。解棋者不但知奕者所下之子是否犯規，且當知其何以獨下此着，不下別着之故。換言之，結合各着以統一全局，使成一種有機的全體，別有內面的理由，不知此者，不足以言棋也。當局者須具備此能力，固不待言。即旁觀者亦不可不有此能力，否則與致索然矣。

吾人今日捨去此譬喻，更取數學之本題論之。

例如連續函數之觀念，初不過一感覺的形象，如以粉筆畫於黑板上之連續線而已。其後漸演漸精，人遂用之以造出不等式之複雜統系，凡此等原始形象之線，皆足以表現之。及此建築告成，即將支架撤去。換言之，其初用爲支柱之粗率的表象，後將成爲贅疣，不得不廢棄之也。巍然獨存者，惟此論理家亦無可指摘之建築而已。然假令此時吾人已不復記憶其原始之形象，則此等不等式之所以如此順相累疊，果觸何天機而來，吾人何從知之乎？

余尙欲更設一譬喻以明之。例如砂針之緻密組織，即構成某海綿體之骨格者，此人所共知

者也。若有機體一旦消滅，是亦不過一種脆弱而優美之薄紗而已。是卽矽酸。然最有趣味者，則非矽酸，實此矽酸所取之形狀也。若吾人只知矽酸，而不知有使矽酸成此形狀之生海綿，將不能了解其趣味。吾人祖先之直觀的觀念亦與此同。吾人今日雖已廢之而代以論理的骨格，然其形狀則已深鏤於此骨格中矣。

故概觀爲數學發明家不可須臾離之物，卽真欲體會發明家者，亦決不可少。然論理能以此概觀予吾人耶？

論理之不能爲此，但觀數學者所命名，已足證之。數學中稱論理曰解析。解析云者，分析、分解之意也。故解析惟有解剖刀與顯微鏡，別無器具。

由是觀之，論理與直觀，各自有其獨特之職分。二者不可缺一。論理者，賦予吾人以確實性之惟一物，證明之具也。直觀則爲發明之具。

六

余既得以上之斷論，又不能無疑焉。余於是章之初，卽分數學者之精神爲二：一爲論理的，解

析的；一爲直觀的，幾何的。然解析家中，亦有發明者，但觀余前已列舉之人名，即不必詳說，已知之。

此爲一矛盾，（縱非真矛盾，亦爲皮相的矛盾）不可不加解釋也。

吾人能信論理家常由普通而進於特殊，一如形式論理之規則所規定者乎？若然，則科學的戰捷，非由概括不能得，論理家安能擴充科學之領域哉？

余於科學與假說中，曾論數學的推理之本性。此推理能經所謂數學的歸納法之程序，引導吾人由特殊而達於普通，且不失其絕對的嚴密，余已詳言之矣。

數學之進步，常因解析家用此方法有以成就之。若詳察其證明，將見此數學的歸納法實與亞里斯多德之古典的推論式相輔而行也。

由此可知解析家非徒效斯可拉派（Scolastique）只知用推論式者也。

若然，吾人尙能信解析家之所爲，如盲者行路，不見其所欲達之目的，只步步摸索而進歟？曰：否，彼等動足之初，必先審其應由之道。故解析家須有嚮導。此嚮導爲何，第一則類推是也。

例如解析學中有一寶貴之推論，係根據於優值函數之應用者，解析家曾用之以解決無數問題，此人所共知者也。應用之道維何？則第一須先認此新問題與用此法已解出之問題之類似，其次則考察此新問題與他舊問題之相異處。然後由此決定方法應如何變更是也。

然則此異同之處，必如何方能認辨之乎？

曩余所舉之實例，關於此種異同，殆已一目瞭然矣。此外不甚分明之例，尚不知凡幾，惟非慧心人不態發見也。

解析家欲觀破此等隱晦不明之類似，換言之，解析家欲爲發明家，而又不欲憑感覺力與想像力，則不可不直覺其推論之統一，換言之，不可不直覺其推論之精神及其內的生命何在也。愛米特談論之際，雖未嘗用一目觀之圖形，然彼敘述最抽象之概念，亦無異描寫生物，此人所共認者也。蓋彼雖不以目視，其心中常覺此等概念決非人爲的集合物，必有一種內的統一之原理故也。

或者曰，此非一種直觀也耶？然則吾人前此所設之分別，不過皮相而已。實則精神有一無二，

凡少有發明之力之數學者，無不可謂之爲直觀家，明矣。

曰，否。吾人所設之分別，實與事實相符。余曩者曾言直觀種類不一，又曾詳述嚴密數學的推論所根據之純粹數之直觀，與全憑想像力之感覺的直觀大相懸殊矣。此二者間之鴻溝果非如吾人所見之深歟？純粹數之直觀，亦爲不假助於感覺不能成立者歟？欲決此問題，則心理學家與哲學家之事，余不欲深論之也。

此事雖未決定，然余敢斷言此二種直觀，本質實不相同。二者各有其對象，能使吾人之精神，顯出二種不同之能力。換言之，吾人之精神對此二種對象，猶與兩種不同之世界相對之反射燈也。

爲解析家照路而導之前進者，卽純粹數，純粹論理的形式之直觀。

此直觀不但能使彼等證明，且能使彼等發明。解析家不借助於感覺，而能概觀論理的體系者，卽惟此直觀是賴。

依賴想像力者，常不能保其無誤。解析家憑此直觀，故能捨去易於引人入迷之想像力，前進

而無恐。能不依賴想像力之人，最幸之人也。吾人甚敬之慕之，惜此等人世間甚少耳。

由是觀之，解析家中雖有發明家，然其數實無幾。

若常人欲借此純粹直觀以見遠，未有不頭昏目眩者。故不可不有堅強之助以扶其弱。以上所述，雖不無例外，然感覺的直觀實為數學上最普通之發明具，無可疑也。於此尚有一問題曰：於解析家之中，尚可分為能用純粹直觀之人與拘泥形式論理之人否乎？余亦不暇詳述矣。

例如余前所舉之愛米特，決不能列於專用感覺的直觀之幾何學派。然亦不能謂之為真論理家。彼之厭惡由顯而隱之純粹演繹的方法，即彼亦自言之不諱也。

第二章 時間之測定

—

吾人苟不出意識之範圍，則時間之概念，比較的明瞭。不特現在之感覺，與已往感覺之追憶，

或未來感覺之追想易爲區別；卽吾人猶能記憶之二意識現象何先何後，或吾人豫爲設想之二意識現象，何者將先，何者將後，亦能鑿鑿言之。

吾人言二意識之事實同時並起，其意卽謂此等事實互相貫通，非解析所能分離，若強分之，必損傷其全體之印象也。

吾人配列意識現象之順序，決不能任意爲之。蓋其順序自有一定，吾人雖欲顛倒之不可得也。

尙有一事，不可不留意焉。若一感覺集合，得配列於時間之中而成爲記憶，則其感覺集合當已不復爲現實。吾人亦不得不喪失其無限複合之感。不然，則其感覺集合依然爲現實，不能成爲記憶也。故以形容的言辭表之，是等感覺當結晶於觀念結合之中心四周，而此觀念結合之中心，猶之一種標記。吾人配列此等已失生命之感覺於時間中，猶植物學者配列枯花於其標本集中也。

然此標記之數有限，故心理的時間概念，其中不能無隙。若然，則所謂二任意時點間有他時

點存在之感，果何由而起乎？吾人雖配列記憶於時間之中，然吾人亦知其間尚有空地。若時間非存在於吾人精神之先者，則此事如何發生乎？若此等空隙，惟由其內容可以知之，則吾人何由知其存在乎？

二

不寧惟是，吾人不獨配列自己意識之現象於此形式，且配列他人意識之現象於此形式。又復推而廣之，凡占有空間爲一切意識所不能直接感得之外界事實，亦欲納之於此形式之中。此實不可不有之事，否則科學不能成立矣。約而言之，心理的時間，爲吾人所原有，物理的時間，則吾人所創造也。於此遂有二難焉。

設有二意識於此，猶兩不交通之世界。吾人將以何法納此二世界於同型之中，以同一尺度測之乎？此非如以格蘭姆 (Gramme) 量長，以米達 (mètre) 權重乎？

且吾人何故用測定之語耶？吾人雖知某事起於某事之前，然某事在某事之先者幾何，則非吾人所能知也。故於此有二難：

一 心理的時間，乃質而非量，吾人能變此質的時間爲量的時間乎？

二 吾人能將兩相異之世界所發生之現象，歸之於同一計量乎？

三

第一難問，世人知之已久，常爲論辨之對象。今卽謂爲已經解決之問題，亦無不可。

二時間之長果相等否，非吾人所能直覺。自信有此直覺者，實爲幻覺所欺耳。

若謂自十二時至一時所經過之時間，與自一時至二時所經過之時間相等，究竟有何意義歟？

若略加思惟，卽知此主張毫無自有之意義。不過依據一種界說而來。此界說雖非吾人任意所造，亦未嘗不少許吾人自由也。

心理學者或可以此說明爲滿足，物理學者與天文學者則實有所未能。然此困難將如何除去耶？

物理學者與天文學者皆以擺測定時間，假定擺每次振動之週期皆同。然此不過第一階近

接 (première approximation) 而已。擺之振動常因溫度、氣壓、空氣之抵抗而變。若能除去此等原因，則誤差自當更小。然亦終爲近接而已。電磁等其他之原因，迄今皆未注意，或亦少有影響及之，未可知也。

最良之時計，實際亦須時加修正始可。而爲修正之助者，卽天文學上之觀察是也。同一之星經過子午線時，恆星時辰儀，須指示同一之時。換言之，恆星日者，地球自轉之週期，卽時間之不變單位也。是亦不過以地球自轉之週期，代擺之振動週期，此新定義中，仍含有地球自轉二周之時間常相等之假定，明矣。

然天文學者，不以此定義爲滿足。彼等之大多數，均信海洋之潮汐，有控制地球運動之作用，故地球之迴轉漸次遲緩。月之運動所以漸次加速，甚於理論之所推，卽因吾人用以計時之地球迴轉漸遲之故也。

四

或者曰，縱如以上所述，亦無關重要。吾人所用之機械，甚不完全，固無待論，然吾人但能思惟

一完全之機械即足矣。此理固不能達，然有此思惟，吾人即能下一時間單位之嚴密定義也。

然不幸而此種嚴密定義，即思惟亦不能得也。夫吾人用擺以測定時間，實際然假定有所要求。其要求維何，即兩同一現象之繼續時間相等，換言之，相等原因生相等結果，時必須有相等之時間也。

此實爲二時間相等之良定義，然吾人之心猶未安也。經驗果無有與吾人之假定相反者乎？是猶不能無疑。

今更詳言之。假定有一事件 a 起於地球上之某地，經過一定時間之後，生出 a' 之結果；又有一事件 β 起於與前地遠隔之地球上之他一點，經過一定時間之後，生出 β' 之結果。更假定 a 與 β 爲同時， a' 與 β' 亦爲同時。

其後 a 事件再起，情況與前大致相同，同時 β 事件亦再起於遠隔之地點，其情況亦與前大致相同。此時 a' β' 之結果，亦當再現，自不待言。今假定 a' 出現之時較 β' 出現之時早，則吾人之要求即不能滿足矣。

何則，若經驗實有此等事實，是第一 aa' 時間與 $\beta\beta'$ 時間等長，而第二 aa' 時間則較 $\beta\beta'$ 時間小也。然吾人所要求者，二 aa' 時間相等，二 $\beta\beta'$ 時間亦須相等。經驗所得之等不等，與假定所要求之二同等關係不能相容明矣。

余今所舉之假想，能謂之荒誕無稽乎？曰，否，此假想決無與矛盾原理相悖處。一旦此假想能實現，或將與充足理由之原理 (*Le principe de raison suffisante*) 相牴觸，固不待辨，然欲承認此根本的定義為正當，余尙欲要求其他之保證也。

五

且余所欲言者，尙不止此也。物理的現實界中，非一原因生一結果，乃多數之種種原因相合而生一結果。至於各原因對於所生結果之影響為何，吾人實無法可以分別之也。

物理學者，雖力求一一分別，然亦不過得其概略。無論如何進步，終不能達於精確之域。例如擺之振盪，原因專在地球引力，就其大概言之，可謂不誤。然細思之，即天狼星 (*Sirius*) 之引力亦無不及影響於擺。

處此情況之下，生一結果之諸因決無有完全再現毫釐不爽者，明矣。

故吾人於此，不得不變更前述之要求與定義矣。吾人前曰：『同一原因生同一結果，須有相等之時間。』今則當改曰：『大致相同之原因，生大致相同之結果，須經大致相等之時間。』故吾人之定義，亦不過一近接的定義而已。

加利倫 (Galileo) 近著一論文，題曰：諸種量之研究 (原名 "Etude sur les diverses grandeurs" 一八九七年巴黎 Gauthier-Villars 書肆出版) 論此事曰：『地球回轉之速率，乃任意自然現象之一種情況。若此速率一變，則其自然現象再現之際，其現象之一情況已非同一。然若假定回轉速率不變，是即假定吾人能測定時間也。』

然吾人之定義即如此猶未足。曩者余曾言天文學者主張地球回轉之速率漸減矣。彼等主張此事時，其暗用之定義非此定義，明矣。

然此主張出自彼等口中時，意果在乎吾人欲知其意義，須先將彼等所以證明其主張者，一一分析之。

彼等曰，潮汐摩擦，於是生熱，故機械的能不得不減。是彼等引能常住之原理 (Le principe de la conservation de l'énergie) 以爲據也。

彼等又曰，若不修正地球回轉漸緩所生之影響，則由牛頓定律算出之月之世紀的加速率 (l'accélération séculaire)，必較觀察之結果小。是彼等又引牛頓定律以爲據也。

換言之，彼等主張之意，即謂時間之定義，須使牛頓定律與能常住之原理能成立始可。

牛頓定律，乃經驗的真理，亦不過得其概略。吾人由此測定時間，亦僅能得一近接的定義而已。

若吾人欲採用別法以測定時間，則牛頓定律所根據之經驗，依然不失其同一之意義。不過以他語譯之，陳述之法少異耳。然其陳述將愈複雜，無可疑也。

是以天文學者所用之定義，可一言以蔽之如下：『時間之定義須使力學方程式歸於極簡。』換言之，測定時間之方法，無所謂真，亦無所謂僞。惟一般所用者較之他法爲便耳。

設有二不一致之時計於此，吾人不得謂此爲正，彼爲不正。吾人所能主張者，用甲之利較用

乙多而已。

以上所述之困難，乃人人所注意者。論此事之書，除上述之加利倫之著述而外，尚有安德拉之力學 (*Le Traité de Mécanique de Andrade*) 亦新。

六

第二之困難，世人注意者甚少。然與第一相較，實無可軒輊。若自論理上言之，余尙以先述此之爲當。

若二心的現象，起於二相異之意識，則所謂此二現象起於同時之語爲何義乎？

又凡在意識之外所起之物的現象，謂爲在吾人意識內之心的現象之先或後云者究有何意義乎？

一五七二年，泰旭·布刺厄 (*Tycho Brahe*) 於天空中發見一新星，以爲此係某相距極遠之星，因起巨火而發光所致。至於起火之時，則當在今世以前，自該星所發之光達吾地球，至少亦須經過二百餘年云。然則此火災之起，必在哥崙布未發見美洲以前可知矣。

此種主張究有何意義歟？此星之衛星上，恐無居民，誰能證之？然余考察此無人爲證之大事，謂此事起於哥崙布之意識中，尙未有愛斯巴尼育拉島（*Ille d'Española*）以前。其意云何耶？

吾人試思之，重思之，卽知此主張自無意義之足云，惟依據規約略有意義而已。

七

吾人首當考察者，舉互相隔絕之世界而納之於時之一框中，人類何以能有此思想乎？此思想之所由起，蓋因吾人欲得外界之表象。吾人亦深信非由是道，不能知外界也。

實則吾人決無達此表象之期。蓋吾人之能力，畢竟未能及此。

然至少吾人猶能設想一種廣大無邊之智慧，可以照見萬物，而一一列之於其精神之時中，猶吾人以所僅見之事物，列之於吾人之時中也。

然此種假定，實至粗率而不完全。何則？此廣大智慧，半近於神。一方既爲無邊，他方又爲有限者也。蓋其對於過去，惟有不全之記憶，記憶若全，卽爲現在。一切記憶，皆同現在，尙何有所謂時乎？吾人就起於意識以外之一切事物而云『時』，非吾人於不知不覺之間，已隱然用上述之

假定耶？吾人非已自居於半神之地位耶？縱令爲無神論者，若假定神能存在，則此神之位置，彼已自占之矣。

由上所述，吾人欲納一切物理的現象於一框中之故，已可了然。然不能謂此卽爲「同時」之定義。何則？以上所假定之智慧，縱能實有，吾人依然不得而測之也。

故吾人尙須於他方求之。

八

適應於心理的時之普通定義，吾人今已不能滿足。兩同時之心理現象，相結難解，若強分之，必將破壞其統一。兩物理現象，亦猶是耶？余之現在對於昨日余之過去不較對於天狼星（*Orion*）之現在更爲近耶？

二事件之順序，若可以任意顛倒，則此二事之起，亦可謂爲同時。然此定義不適合於相距甚遠二地所發生之二物理現象。精密思之，卽所謂顛倒之意義，亦不可解。第一，何謂先後，已非定義不可也。

今先說明『同時』及『先後』之意義，更舉二三例以分析之。

設余作一書寄與余友，余友受而讀之。此二事實乃現於兩相異之意識上者也。作書之時，映像在余之前，讀書之時，映像在余友之前。此二事雖起於兩相隔絕之世界，然余猶不憚言一事在他事之先者，蓋余深信余之作書，爲余友受書之原因也。

余若聞雷鳴，卽由此推知有放電作用，起於空中。余以爲物理的作用，必在余意識所受之聽覺寫象以前，而毫不疑者，蓋余信前事爲後事之原因也。

於是吾人得一實際遵循之規則，亦卽爲吾人應遵循之惟一規則，曰：一事爲他事之原因時，則前者起於後者之先云。

時之定義，可由事之原因定之如此。然二事以恆定的關係結合者爲最多；吾人於此，必如何始能知其何者爲因，何者爲果歟？若假定先起者爲因，後起者爲果，是又以時爲原因之定義也。吾人將何以脫去此循環論耶？

曩者，吾人謂先後即因果，今謂因果即先後。此循環論果可以脫去耶？

十

上述之循環論，如何始能脫去，吾人亦不欲研究之。蓋此絕無完全成功之望，徒勞而已。吾人所欲研究者，乃前人欲脫此循環所費之苦心也。

設余今實行一有意行爲A，而得感覺D，因而認D爲A之結果。然余又別有理由，可以推知此結果非直接的，乃於余之意識外，經余所未經驗之二事B與C而來；即B爲A之結果，C爲B之結果，D又爲C之結果是也。

然此究何由以知之耶？若余能信A、B、C、D四事，係由因果之連鎖，互相結合者，何爲列之於原因之順序A、B、C、D又同時列之於時之順序A、B、C、D而不取其他之順序耶？

實際余作A之行爲時，余有自動之感。受D之感覺時，余有受動之感。因而以A爲最初之原因，以D爲最後之結果。遂置A於連鎖之始，置D於連鎖之終。然何故以B爲C之前，不以C爲B之前乎？

一般答此問者必曰B所以爲C之原因者，以B常起於C之前故也。此二現象若能經驗，必常循一定之順序而起，故實際不能經驗時，其順序亦無倒行逆施之理由也。

此解答至爲正當。然有宜注意者，吾人決不能直接知B、C之二物理現象，吾人所知者，乃由B與C所生之感覺B'與C'。因吾人之意識，直接指示B'起於C'之前，吾人遂假定B亦起於C之前也。

此規則一見雖甚自然，然吾人有時亦不得不與之相背。例如雲間放電後，須經若干時間，吾人始聞雷鳴。設有二雷鳴，一鳴於遠方，一鳴於近地，縱令後者之音先達於吾人之耳，然前者有時實起於後者之先，此非與上述規則相反者乎？

十一

尙有難者，吾人常言一自然現象之原因，吾人果有爲是言之權利耶？若宇宙之各部分皆不無相關，則任意之自然現象，決非惟一原因之結果，必由無數原因相聚而成。卽謂一自然現象爲一前瞬間全宇宙狀態之結果，亦無不可也。

誠如是，則適合於此複雜情況之規則，吾人將如何表出之乎？吾人惟由此進行，其規則始得爲普遍的嚴密也。

吾人欲不混亂於此無限雜糅之情況中，須設簡單之假定。今取太陽、木星、及土星之三天體論之。並爲簡單起見，設想此三天體皆爲質點，且與宇宙其他各部絕無係屬。

若三天體於某瞬間之位置與速率皆爲已知，則其於次瞬間及任意各瞬間之位置與速率即可規定。換言之，由彼等在 t 時之位置，即可決定其在 $t + \Delta t$ 時與在 $t - \Delta t$ 時之位置也。

若更結合 t 時木星之位置與 $t + \Delta t$ 時土星之位置，則任意各瞬間木星與土星之位置，皆得而規定之。

木星在 $t + \Delta t$ 瞬間，土星在 $t + \Delta t + \Delta t$ 瞬間所占位置之系統，與木星在 t 瞬間，土星在 $t + \Delta t$ 瞬間所占位置之系統，雖由牛頓 (Newton) 定律甚爲繁複，然亦可以同等精密之法則結合之。

若然，何爲不可以此等位置系統之前者，爲後者之原因，以木星之 t 瞬間與土星之 $t + \Delta t$ 瞬間爲同時乎？

是亦不過爲便利與簡單（此實重要之事）而已。別無他故也。

十二

以上之例，或過近於人爲，今更取他例以論之。吾人欲明學者暗自假定之定義，須觀察學者之實際研究，而考其依據何法以定同時也。

今試就光之速率之測定與經度之決定言之。

余聞諸天文學家言，吾人今日自望遠鏡中所見天上之某事，係起於五十年前云云。余若欲解此言之意，必反問彼何由知之。換言之，余必問彼以何方法測定光之速率也。

天文學家先已假定光之速度一定不變，且在任何方向均爲同一。此誠測定光之速率時必不可少之假定，然決不能以經驗直接證明。惟種種測定之結果，若有不能一致者，則可由經驗以否決之也。顧自古至今，猶未見有此種齟齬之事，卽有時小有差異，亦不難冰釋，不可謂非僥倖矣。

此與充足理由律（*le principe de la raison suffisante*）相一致之假定，常爲全世界所採用。用此假定，吾人卽可得一發見『同時』之新規則，讀者不可不留意焉。

吾人若承認此假定，則光之速率如何測乎？羅默爾 (Roemer) 利用木星之衛星，觀察其蝕遲於豫言者幾何，此世人所共知者也。

至於此豫言，則由天文學上之法則如牛頓定律者得之。

若假定光之速度與吾人前所採用者少異，而牛頓定律不過一近接的定律，則觀察之事實即不能說明乎？曰，非也。觀察之事實雖未嘗不可說明，惟須以更爲複雜之法則代牛頓定律而已。由是可知光之速率本可由吾人任意規定，要在能使與之適應之天文學上之法則歸於簡單耳。

航海者或地理學者測定經度時，亦不得不解決與上相類之問題。蓋彼等身雖不赴巴黎，然不得不計算巴黎之時故也。

然則彼等究用何方法乎？

彼等或攜有與巴黎時刻相合之時計亦不可知。由此則所謂「同時」之性質的問題，即歸宿於所謂時間測定之數量的問題。至於關係於此後問題之困難，則已如上述，勿須更贅矣。

彼等或觀察天空之現象，例如觀察月食，假定此現象無論地球上何處均可同時見之。如是亦可測時。

然光之傳播，絕非瞬間所起之事，則此假定亦不可謂爲全然正當。若欲達於絕對的精確，尙須依繁複之規則加以修正始可。

彼等或用電報，亦其一法。例如在柏林受報之時，當遲於在巴黎發報之時，是卽上述之因果之規則，無可疑者也。

然其所遲者幾何乎？通例，傳達之時間，常置之不算，發報與受報，均視爲同時。然欲求其嚴密，則須由複雜之計算加以微小之修正始可。實際此種修正較觀測之誤差尤小，故未有實行者。惟吾人欲求嚴密之定義，在理論上，此修正依然不可少也。

由以上之考察，余不得大書特書者有二事焉。

一 所用之規則，種類甚多。

二 所謂『同時』乃性質的問題，所謂時間之測定，乃數量的問題。此二問題甚難分離。無

論用時計，或將光之傳達速率加入計算，莫不皆然。何則，不測定時間，而欲測定此種速率，不可得也。

十三

余今將述余之結論矣。

吾人無論對於同時或對於二時間之相等均不能有直觀。

吾人自信有此種直觀者，幻想也。

吾人常假借一定之規則。然常用之而不自知。

此等規則，非普遍嚴密，不過多數之小規定，適用於個個之特例而已。

此等規則，非必然的。吾人即欲更進而發明其他之規則，亦未嘗不可。惟不遵循此等規則，則物理學、力學、天文學上之法則將不能如今日所陳述者之簡單。

吾人所以選擇此等規則者，非爲其真，乃爲其便也。概括言之，其規則如次。

『二事同時並起，或先後繼起，及二時間相等之定義，須使自然法則之陳述，歸於簡單。換言

之，凡此等規則及定義，皆不過無意的便宜主義之產物。」

第二章 空間之概念

第一節 序論

余前所著關於空間之論文，僅專論歐几里得幾何學中提出之問題。至於次元之數及其他種種難題，皆置之不問。因之余所考察之幾何學，皆以三次元之連續體爲公共基礎。而其三次元之連續體，於各種幾何學皆同。惟視其中所畫之圖形，與測定圖形所用之尺度如何，始成相異之形態也。

於此本無形態之連續體中，吾人得想像線與面之網。且可規定此網之目均互相等。凡可測度之連續體，或爲歐几里得的空間，或爲非歐几里得的空間者，一由此規定決之。此等兩種相異之空間形式，均可自此無形態之連續體而生，即猶白紙上可以畫圓，亦可以畫直線也。

吾人知空間中有內角之和等於二直角之直線三角形，又知空間中亦有內角之和小於二直角之曲線三角形。二者皆是，不得甲之存在較乙之存在爲確實。若稱前者之邊爲直線，則吾人所採用者，卽爲歐几里得幾何學。若稱後者之邊爲直線，則吾人所採用者，卽爲非歐几里得幾何學。故吾人當用何種幾何學之問題，與吾人稱何種線曰直線之問題同一意義。

此種問題，非經驗所能答，明矣。例如將以 \triangle 爲直線乎？抑將以 \circ 爲直線乎？質諸經驗，亦不能斷。非歐几里得三角形之邊，與余由直觀得來之不變概念，不能一致，故不得名之曰直線。有是理乎？就歐几里得三角形之邊而言，余承認有直觀，然就非歐几里得三角形之邊而言，余亦承認有直觀。余有何權利能名此等概念之一曰直線，其他爲非直線乎？所謂『直線』一名，能爲此直觀的觀念之本質的要素者幾何耶？吾人謂歐几里得的直線爲真直線，謂非歐几里得的直線爲不然者，不過謂第一直觀的觀念較之第二更適應於重要之對象而已。一對象較他對象更爲重要，吾人將如何判斷乎？此事余已於科學與假說中詳述之矣。

吾人於此將見經驗與有關係焉。所謂歐几里得的直線較之非歐几里得的直線，更爲重要。

者，則只以前者與重要之自然物相差無幾，而後者則相去甚遠也。或者謂非歐几里得的直線之定義，係人爲的而非難之歟？實際假令吾人承認此定義，則半徑相異之二圓周均將得非歐几里得直線之名。反之，半徑相等之二圓周中，其一能滿足定義，而其一則否。因之吾人若將此等所謂直線之一，不變形而移動，則將不爲直線。然歐几里得幾何學者名爲半徑相等之二圓周，吾人有何權利能斷定其圖形相等乎？曰，蓋因吾人若將其一不變形而移動之，即與其他相重故也。若然，則吾人謂此移動自始至終未曾變形，又由何理由乎？吾人於此不禁啞然矣。一切可以想像之運動中，有歐几里得幾何學家稱爲不變形者，有非歐几里得幾何學家稱爲不變形者。在第一種，即歐几里得的運動，歐几里得的直線，常爲直線，然非歐几里得的直線，將不爲非歐几里得的直線。然在第二種，即非歐几里得的運動，非歐几里得的直線，常爲非歐几里得的直線，而歐几里得的直線，則失其爲歐几里得的直線之性質。故非歐几里得三角形之邊，若以直線名之，即不合理之理由安在，決不能證明。所能證明者，惟只稱歐几里得的運動爲不變形之運動時，如此命名爲失當耳。然吾人若稱非歐几里得的運動爲不變形之運動，亦能證明歐几里得三角形之邊名曰直

線之不合理也。

然則吾人稱歐几里得的運動，爲真不變形之運動，究有何意義歟？此不過因歐几里得的運動，較之其他之運動更爲重要而已。所謂更爲重要者，則因固體爲重要之自然物體，而其運動與之略同故也。

然吾人果能表象非歐几里得空間耶？換言之，自然物體大抵所取之形，與非歐几里得的直線略同，且其運動亦與非歐几里得的運動略同，如此世界，吾人果能表象之耶？余於科學與假說中，已對於此問，申言其爲然矣。

有一事爲世人常留意者，卽宇宙間之各物體若同時以同率膨脹，則凡吾人所用之尺度，與欲測度之各物體，皆同時一律膨脹，決無可以認識此膨脹之手段；膨脹之後，世界進行如故，毫無變化足以使吾人知有如此大事件發生也。

換言之，互相相似（此與歐几里得幾何學第六編之相似同義）之二世界，決不能有方法可以分別之。二世界相等或互相相似時，吾人但變更測座標軸或長之尺度，卽可將一世界移於他一

世界；此二世界固無由分別，卽由點變換 (transformation ponctuelle) 可將一方移於他方之
二世界，亦不可得而分別之也。更詳言之，假定甲世界有一點，且惟有一點與乙世界之各點相對
應，乙世界對於甲世界亦然；又一點之座標爲其對應點之座標之連續函數；第一世界有一對象，
第二世界亦有對象與之對應，且第二世界之對象卽在與第一世界對應之點上，其性質亦相同；
更假定此種對應一旦實現，卽永久不變；如是則吾人決無方法可以分別此二世界矣。世人常謂
之空間相對性，其意義雖不如是之廣，然空間之相對性實當作如是解也。

此二世界之一若爲吾人之歐几里得世界，則其住民之所名曰直線者，卽吾人之歐几里得
的直線。然其第二世界之住所名曰直線者，則爲一曲線，就彼等所住之世界，與彼等所稱爲無變
形運動之運動言，其所有之屬性，全與前者相等。故其幾何學爲歐几里得幾何學，然其所謂直線，
則非吾人之歐几里得的直線，乃由點變換將吾人之直線，自吾人之世界移於彼等之世界而得
者也。然彼等所謂直線相互之關係，則與吾人之直線相互之關係相等。余謂彼等之幾何學與吾
人之幾何學同，卽由此意。吾人雖欲斷定彼等爲誤，彼等之直線非真直線，且固執吾人之主張，不

甘自認爲無意義；然彼等實無可以自知其誤之手段，吾人亦不得承認之也。

第二節 性質的幾何學

以上所述，較爲易解，且余已再三言之，無須更論矣。吾人既能表象非歐几里得的空間，則歐几里得的空間於吾人之感性，決非必然的形式。歐几里得的，非歐几里得的兩空間，皆以余最初所述之無定形連續體爲基礎。吾人由此連續體，可以抽出歐几里得的空間，亦可以抽出羅巴鳩斯克 (Lobatchewski) 的空間；猶由未刻度畫之寒暑表，以適當分度，可以造成華氏表，亦可以造成列氏表也。

於此有一問題：吾人不能更事分析之無定形連續體，於吾人之感性非爲必然之形式乎？若然，則吾人不過將幽閉感性之牢獄擴而充之，仍未能出此牢獄一步也。

此連續體即脫去一切測量之觀念，尙具有若干獨立之特性。其特性已經多數之大幾何學家如理曼 (Riemann) 如柏特 (Betti) 等研究之，成爲一科學之對象；其學名曰『位置解析』 (Analysis Situs)。在此學中，凡數量的觀念均爲抽象的。例如在一線上，若確定 B 點在 A 點與

C點之間，則如是已足；至於 $\angle BOC$ 線爲直線，抑爲曲線，AB之長等於BC，抑等於BC之二倍，皆非所問也。

故在位置解析，縱有不善模寫圖形者，改變大小之比例，於應作直線處易以少曲之線，其命題仍不失其爲真。是爲位置解析命題之特性。換言之，位置解析之命題，不以任意之點變換而變也。人每謂測量的幾何學爲數量的，射影幾何學爲純粹性質的，然此言實非正當；射影幾何學中，分別直線與他線處仍未嘗不具有數量的性質，真正之性質的幾何學，則惟有位置解析而已。

吾人研究歐几里得幾何學之真僞時所遇之問題，於位置解析亦遇之。卽位置解析之定理係由演繹得來者乎？抑爲隱晦未現之規約乎？爲經驗的事實乎？抑其性質爲於吾人感性或理性不得不然之形式乎？

後之二問，互不相容，不可不注意也。此事常有不甚了解者，例如云四次元之空間不能表象，與云吾人之經驗證明空間爲三次元，此兩種主張不能并立也。實驗者對於自然左右爲難，不知彼與此二者之中何者爲可之時，是二者均能表象明矣。若二者之中，有一不能表象，則已不必仰

望於經驗；即訴之經驗，亦判斷莫由。例如吾人既豫知時計面上之數字至十二止，即不待觀察，亦知時計針無指十五之時。且面上本無十五，即欲在刻十五處查時計針，不可得也。

尙有不能已於言者，若經驗論者欲適用其主張於歐几里得幾何學之真理，則將遇一不能答辨之問難，然於位置解析則可避去之。歐几里得幾何學之真理雖甚嚴密，然經驗皆爲近似的；然在位置解析，近似的經驗已足以證嚴密之定理。例如若知空間不能有二次元或二以下之次元，又不能有四次元或四以上之次元，則亦不能有二個半或三個半之次元，故適有三次元也。

位置解析之一切命題中最重要者，即空間有三次元是也。吾人所欲論者即在此。夫空間有三次元，果何謂乎？

第三節 多次元之物理的連續

物理的連續 (le continu physique) 之概念，何由而起，又數學的連續之概念如何由此而生，余已於科學與假說中說明之矣。吾人有時能區別甲乙二印象，而不能區別甲乙與第三印象丙。例如吾人能區別十格蘭姆之重量與十二格蘭姆之重量，然不能區別此二者與十一格

蘭姆之重量。此事實以記號表之如次：

$$A=B, B=C, A<C.$$

此即自粗疎之經驗得來之物理的連續式也。此中所含不能相容之矛盾，惟引入數學的連續可以除去之。此數學的連續不似上式所表物理的連續之互相重疊，乃互相分離為無限階段（盡數及不盡數），譬猶梯然。

物理的連續，如混沌未分之星雲，無論何等完全機械，皆不能分解之。再就前例言，吾人若不以手衡重，而以天秤衡重，亦可分別十格蘭姆，十一格蘭姆，十二格蘭姆之三重量而得下式：

$$A<B, B<C, A<C.$$

然吾人常能於A與B，B與C之間發見下列關係中之D與E：

$$A=D, D=B, A<B; B=E, E=C, B<C.$$

故上述之困難，不過漸次易位而已，星雲依然未分也。能分之者惟有精神；數學的連續即自此精神生，星雲得此遂盡分解為星矣。

然吾人尙未言及次元之數也。所謂數學的連續或物理的連續有二或三次元者，是何意義乎？

吾人欲研究物理的連續，不可不導入切斷之觀念（la notion de coupure）。物理的連續之特徵，今已言之；其連續之各要素皆由印象之複合而成者也。若一新要素與印象之複合相當，而其印象又與已存在之印象無甚大差，則本來之要素有時即不能與之分別，然能分別者亦往往有之。故與第三要素不能分別之二要素，亦未嘗不能自相分別也。

若A與B爲連續C之二要素，且二者可以互相分別，則吾人即能發見一列要素

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$$

具有次之性質：（一）此一系列要素皆屬於連續C，（二）無論何者，與其相鄰之要素不能分別。如是則吾人即能經一連續之路，自A以至於B，而又不與連續C相離。對於連續C之任意二要素A與B，此條件皆能滿足時，則此連續C可以謂之一單連（un seul tenant）。

今更自C中抽出可以互相分別之要素若干，或自成一連續或數連續之要素若干。如此任

意自C中抽出之要素之集合，即成余所稱之（一或數）切斷。

今自C中任意取二要素A與B，則得下之二類。

（一）吾人能更發見一列要素

E_1, E_2, \dots, E_n

具有次之性質乎？第一，全體皆屬於C；第二，各不能與其鄰相分別；因而 E_1 不能與A， E_n 不能與B相分別；第三，無論何要素決無有與切斷之任意要素不能分別者。

（二）於適合上述第一、第二兩條件之列

E_1, E_2, \dots, E_n

中尚有要素E不能與切斷之一要素分別者乎？

在第一例，吾人能經毫無間斷之路，不與C相離，不與切斷相會，而自A以達於B。然在第二例則不能也。

若連續C之任意二要素A及B常屬於第一例，則C雖切斷，吾人仍謂之一連。

若吾人以某一任意方法，選擇切斷，則其連續有時爲一連，有時不爲一連。若不爲一連，則吾人謂連續因切斷而分。

以上之定義，皆本於印象之二複合，有時可以分別，有時不能分別之簡單事實而來者也。

由上假定，若爲分一連續，但將若干可以互相區別之要素視爲切斷即可，則此連續謂之有一次元。若爲分一連續，不得不將自成一連續或數連續之一系要素，認爲切斷，則此連續謂之有多數元。

若以一個或數個構成一次元連續之切斷，卽足以分一連續 C，則吾人謂 C 有二次元；若以一個或數個構成二次元連續之切斷，卽足以分一連續 C，則吾人謂 C 有三次元。以下類推可也。欲證此定義正當與否，須先考察幾何學者研究之初，果依據此定義以導入三次元之概念與否始可。幾何學者入手時，大抵皆以面爲立體之界限，卽空間之一部分之界限，以線爲面之界限，以點爲線之界限；最後則斷定行程至此已窮，不能更進也。

此思想與余上述定義之精神實爲同物。欲分空間，須用名爲面之切斷；欲分面，須用名爲線

之切斷；欲分線，須用名爲點之切斷；至此則不能更進。點不可分，故點不爲連續。如是以不連續點之切斷而分之線爲一次元之連續；以一次元連續之切斷而分之面爲二次元之連續；以二次元連續之切斷而分之空間爲三次元連續。

由是觀之，余前所下之定義與普通之定義，本質實同；余不過變適於數學的連續之形式爲適於物理的連續之形式，且務求不失其嚴密而已。（物理的連續乃吾人所能表象之惟一連續）此定義不僅能用於空間明矣。凡由感官可以知覺之物，莫不有物理的連續之特性。故前之分類常能應用。又依前之定義，有四或五次元連續之實例，亦不難發見。苟冥思之，此等實例自現於吾人之精神中矣。

余前所述理曼名曰位置解析之科學如何教吾人以區別有同數次元之連續，又此等連續之分類如何依據切斷之思想，皆不可以不一言；然余今實無暇及此。

由此切斷之概念可以生出多次元之數學的連續之概念；猶一次元之物理的連續生一次元之數學的連續然。

$$A > C, \quad A = B, \quad B = C$$

之範式，係簡約粗疎之經驗而來，內含不能相容之矛盾。欲除去此矛盾，吾人即不得導入一具有多次元物理的連續之特性之新概念。一次元之數學的連續，猶一具有無數階段之梯；其無數階段即與同一量之有理或無理數值相當。今欲得 n 次元之數學的連續，則取 n 個相等之梯，令其階段與稱爲坐標之 n 個獨立，相異之值相當即可。由此吾人遂得一 n 次元之物理的連續之模型；然後除去上述之矛盾，即得一數學的連續之最切實模型。

第四節 點之概念

吾人初提出之疑問，今似已解決矣。吾人以空間爲有三次元者，其意似謂空間諸點之集合能滿足吾人就三次元之物理的連續所下之定義也。然吾人若未知空間諸點之集合爲何，或空間之點爲何，猶未能即以此爲滿足也。

此問題決非如世人所信之簡單。世人皆自以爲點爲何物，不待定義而已明，然實不如是。雖然，實際言之，吾人亦不能得一點之定義。若追溯其定義，吾人終有不得不止之一日。然則吾人應

止於何時乎？

第一，吾人若已達到可以由感官知覺之物，或吾人可以表象之物，吾人即當至此而止，無須定義矣。例如吾人不以羊之定義教小兒，但指實物以示之曰：此即羊也。

然則吾人果能表點之象於空間耶？若有答曰：然者，是已忘其所思者乃黑板上粉筆畫出之白點，或白紙上墨筆畫出之白點；且忘其所能表象者不過對象投於吾人感官之印象者也。

吾人欲表象一點時，吾人常表象極小物體之印象。此際兩相異之物體無論若何微小，其所生之印象亦全然不同，無待論也。然此尚須少加以說明。

余所以視爲重要者尚非此事。若僅謂能表象一點，猶未完全，吾人表象一定之點，須與他點有別始可。何則？吾人於此若欲適用上述關於一連續之次元數之規則，必須依據屬於此連續之二要素或互能區別或互不能區別之事實故也。即吾人有時表象一定要素，不可不使之與他要素有別。

夫余一時間前所表象之點與余今所表象之點，爲同點乎，抑爲異點乎？換言之，吾人如何方

知對象A在 α 瞬間所居之點，與對象B在 β 瞬間所居之點爲同點乎？更確切言之，此問題究有何意義乎？

例如余居於斗室之中，有一對象在余桌上；設余於一秒之間，未嘗少動，且無有與此對象接觸者，余即斷定此對象於一秒之始所占之點A與一秒之終所占之點B爲同點。然此主張實與事實相反。何則？此對象必隨地球之迴轉而運動，故自A點至B點應有三十基羅米達之距離。一對象無論或大或小，其絕對位置究竟變易與否，非吾人之所得知。且吾人不但不得主張絕對位置之變易，即此主張已全無意義，決不能與表象相應也。

然吾人猶得而問曰：此對象對於他對象之位置會變易乎？更進一步，此對象對於吾人身體之位置會變易乎？若此對象所與吾人之印象不變，則吾人將斷定其相對位置亦不變；反之，若其印象已變，則可斷定其狀態或其相對位置亦已變也。其後二者之中，以取何者爲宜，亦須決定之。余於科學與假說中，已說明吾人何以能認識位置之變易；此書後章余尙欲續論此問題。如是則一對象對於吾身之位置變易與否，吾人得以知之也。

設吾人見兩對象各保持其對於吾人之位置，則吾人即斷定此二對象之相對位置亦未嘗變。然吾人所以此斷語，亦不過由間接之推論。吾人直接認識者，惟對象對於吾人身體之位置而已。

吾人自以爲能知一對象之絕對位置變易與否（此自信實誤）全由間接推論，更何待言。約言之，關係一切外界之座標軸，乃固結於吾人身體，永無變化之軸系，吾人到處攜之而行者也。

表象絕對空間，決非吾人之所能。若余欲表象一對象與余己身同時運動於絕對空間中，是余以我自身爲不動，而想一身在我外，又名曰我之人，與種種對象同繞此不動之我而運動也。

然吾人若皆贊同以固結於吾人身體之座標軸，關聯一切事物，則上述之困難即可解免乎？吾人如是即可知其對於吾人之位置而決定之點爲何物乎？恐大多數人皆將答曰：然，此軸可以定外界對象之位置也。

然則此言爲何意乎？所謂定對象之位置者，不過表象吾人欲達其位置不可不爲之運動耳。

然此非表象空間之運動自身，乃只表象因此運動而起，未想空間概念之先在之筋肉感覺而已。若想對於吾人順次占同一位置之二對象，則此二對象所與吾人之印象甚相異也。然吾人猶定此二對象在同一點者，以吾人欲達其點須爲同一運動故也。此外二者尚有何公共之物，則非吾人之所知。

然吾人欲達一已知對象，運動之道不止一種，故因運動而起之筋肉感覺，亦不止一種。若想出此一羣筋肉感覺而表象其一點，則表象之方法多矣。若不以此解釋爲滿足，更欲於筋肉感覺之外，借視覺以爲助，則是表象同一之點又新加一種或二種之方法，徒增其難而已。如此互不相同之表象，吾人何以能斷定其所表者爲同一點耶？

尙有不可不注意者：吾人以一切外界對象關係於吾人身體，儼若吾人到處攜一座標軸系，凡空間之點皆以此軸系關係之；而此軸系則與吾人身體固結不變，余前已述之矣。然嚴密言之，必吾人身體之各部分先自相固結不變，始得曰軸系與吾人身體固結不變也。然吾人之身體實際不如是，故吾人以外界對象關係於此假想軸之先，不可不假定吾人身體之姿勢常相同也。

第五節 位置變化之概念

余於科學與假說，曾言吾人身體之運動，大有關於空間概念之成立。全不能運動之生物，不能有空間，亦不能有幾何學。外界對象無論如何變其位置，然此移動及於其生物之印象，不過為狀態之變化，不能為位置之變化。如此生物決無可以區別此兩種變化之方法。吾人視為極重要之差異，自此生物視之，毫無意義也。

吾人之手足運動，則外界對象生於吾人感官之印象常因之而變。此類印象之變化，雖亦可由他原因而生，然由吾身運動而生之變化，與由他原因而生者，互有區別，吾人常能認識之。其理由有二：一，此為隨意的；二，常伴有筋肉之感覺故也。

故吾人所得之印象變化，常可分為二種。一可姑稱之曰內的變化，一可姑稱之曰外的變化。內的變化為隨意的，常伴筋肉之感覺；外的變化則性質與前者全相反，是為其特徵。

外的變化之中，有能為內的變化消去而全復其舊狀態者，有不能為此方法消去者。（吾人若適宜變更吾身之位置，則變更位置之對象與吾人之相對的關係，可以復舊，而前印象之全體

依然不改。然對象若非變更其位置，乃變更其狀態，則不能有此事。是爲外的變化中新有之區別。能爲內的變化消去者，名曰位置之變化，不能爲內的變化消去者，名曰狀態之變化。

例如設想一半青半赤之球，先轉其半青而向吾人眼前，後轉其半赤而向吾人眼前。又設想一球形器內盛青色液體，因化學作用忽變赤色。於此二例，皆青之感覺起於先，赤之感覺起於後。吾人感覺所經驗之印象，無不相等。然吾人猶不以二者爲同，而以前者爲位置之變化，後者爲狀態之變化者，果何故歟？

蓋在第一例，吾人欲見赤之半面但繞球而轉，即生前之赤色之感覺故也。

若兩半球不爲赤色與青色，而爲綠色與黃色，則此球迴轉時，黃色半面現於先，綠色半面現於後，與前球之先現青而後黃者不同。然余尙得謂此前後二球自轉相等。余何以能斷定二球皆起同一之位置變化耶？是由余於此二例皆只須繞球作相等之運動，即能恢復前印象故也。余所以能知余之運動相等者，則由於余之筋肉之感覺相等。故余亦不必有幾何學之知識，亦不表象余身在幾何學的空間所作之運動。

今更舉一例，如一物體在余之眼前變位，其像初映於余之網膜之中央，後映余之網膜之緣，則前之感覺係由終止於網膜中央之神經纖維傳達，後之感覺係由終止於網膜緣之神經纖維傳達。此二感覺性質迥然不同，否則余無由區別之。

然則余何以能判斷此兩性質不同之感覺實表同一之像，而知其為變換位置者歟？是由於余但以目追隨其對象隨意變換目之位置，即可使像再生於網膜之中央，而恢復前之感覺故也。

又設想一赤色對象之像自網膜之中央A移於網膜之緣B，次有一青色對象之像復自網膜之中央A移於網膜之緣B。若然，則余判斷此二對象所受之位置變化全相等者，究何故歟？蓋余於此二例，皆能恢復余初起之感覺；而欲恢復余初起之感覺，余眼之運動皆同；所以能知其運動之相同者，則由於其際所經驗之筋肉之感覺相等故也。

若假定余眼不能運動，則生於網膜中央之赤色印象對於網膜緣之赤色印象之關係，與生於網膜中央之青色印象對於網膜緣之青色印象之關係，是否相同，必將無由辨認。其時余之所得，不過互不相同之四感覺而已。若問此四感覺之間有上述關係以聯繫之否，是猶問聽覺、觸覺、

嗅覺之間亦有如此關係以聯繫之否，其可笑一也。

更轉而觀察內的變化，即因吾人身體之隨意運動而起之變化，亦有與外的變化相類之二事。

一 余可以假定余之身體自一點移至他點時，余之姿勢一定不變；換言之，即余身各部在空間之絕對的位置雖變，其相對的位置常同。然余又可假定余之身體之位置變，余之姿勢亦變，例如初曲肱而後伸之是也。

此二者不可以無別，然二者表現之形式皆爲筋肉之感覺，吾人其何以區別之乎？曰，姿勢不變僅位置變者，有消去外的變化之力。姿勢變者，或全無此能力，或有之而非完全也。

此事余欲用已習幾何學者說明之法說明之。然讀者不可因此遂疑及非通曉幾何學不能知此區別也。余於未通幾何學之先，雖未能說明之，然由實驗亦可核證此事實。欲區別此兩種變化，無俟說明，但驗其事實足矣。

要之，其說明實非難事。今假定外界之一對象已變其位置，若余欲使余之身體對於此物體

再占其原位置，則此等各部分相互之間亦非盡復其原位置不可。惟有適於此條件之內的變化，始能消去因對象移動而生之外的變化。故若余眼對於余指之位置已變，余不難恢復余眼對於其對象之原位置，再生以前之視覺，然其時余指對於其對象之位置則不復如前，而觸覺即不能再恢復矣。

二 又同一外的變化，可以由筋肉感覺不同之二內的變化消去之。吾人欲明此理，亦不必有幾何學之知識；然余今仍以幾何學用語說明之。余欲自 A 之位置至 B 之位置，可取之路不止一種。今令與第一路相對應之筋肉感覺之一列爲 S，與第二路相對應之筋肉感覺之一列爲 S'。生 S 之筋肉與生 S' 之筋肉不同，故二者亦一般不同。

余所以認 S 與 S' 之二系列爲與同一位置變化 AB 相對應者，蓋由此等兩系列能消去同一外的變化故也。除此而外，二者毫無公共之點。

設想二外的變化 α 及 β ，例如半青半赤之球之迴轉與半黃半綠之球之迴轉，一自青色轉爲赤色，一自黃色轉爲綠色，故二者毫無相同處，又 S 與 S' 二列內的變化亦毫無相同處。吾人何

故尙謂 α β 與同一移動相對應，並謂 S S' 亦與同一移動相對應乎？曰：是不過因 S 能消去 α ，又能消去 β ，且 α 可以由 S 消去，又可以由 S' 消去故也。然則吾人若確定 α 與 β 皆可由 S 消去，且 α 可以由 S' 消去，余即能信 S' 亦可以消去 β 乎？欲決定此法則能成立與否，惟有訴諸經驗而已。若此法則不能成立，且與此相近似之法則亦不能成立，則無幾何學並無空間。何則？吾人此時已不能分變化爲外的變化與內的變化，更無區別狀態變化與位置變化之動機故也。

由上所說，已可見經驗有何作用。某法則近於成立，吾人由經驗知之，然空間有何性質，又能滿足其條件否，吾人不能由經驗知之也。空間實先乎一切經驗，滿足此條件，否則無空間。故余不能謂經驗教吾人以幾何學可能，余只知幾何學中無矛盾是以可能。經驗不過能指示吾人幾何學非無用之物而已。

第六節 視覺的空間

運動之印象，其影響於空間概念之成立者，實至重要。苟無此則空間概念即無由生，余前已述之矣。今更檢查視覺印象之職分，研究所謂視覺空間之次元之數，而應用第三節之定義於其

印象，亦至有趣味之事也。

吾人於此勢必遭下之困難。設想有赤色之感覺刺激吾人網膜之某點，又有青色之感覺刺激吾人網膜之同一點，此二感覺之性質各不相同，然吾人不可不有一種手段以認識此二感覺公有之物。是惟有由眼之運動，或由眼之運動所引起之意識而已。故若眼不運動，或吾人不意識其運動，則吾人將不能認識此性質相異之二感覺有共通處矣。換言之，以幾何學的特性畀與此等感覺者爲何物，吾人不能導出也。視覺若與筋肉之感覺相離，則無幾何學的性質。故吾人卽謂純粹之視覺的空間不能存在，亦未嘗不可也。

欲除此困難，吾人只須設想同性質之感覺，例如赤色之感覺，可以由其所刺激之網膜之點而區別者。余本無理由自一切可能之視覺中任意選擇，不問網膜所受刺激之點爲何，卽綜合同色之一切感覺於一類，此不待而自明。若余不知由前述之方法區別狀態之變化與位置之變化，換言之，若余之眼不能動，則余決無由思及此事。同色之二感覺若刺激網膜上相異之二點，則余必以爲此二感覺之性質相異，猶異色之二感覺也。

余今惟考察赤色之感覺，加以人爲的限制，故意將問題之他方面，全然置之度外。然惟由此人爲的方法，余始能分析視覺的空間，不與運動感覺相混淆。

吾人設於網膜上作一線，將網膜之表面分爲二部分，並將適在此線上之點，或直與此線相鄰之點上所生之赤色感覺除去之。若然，則此感覺全體即構成一種切斷。今名此切斷爲C。可能之赤色感覺全體爲此切斷分離明矣。若取二赤色感覺起於此線兩側之二點者而論之，則自一感覺移於第二感覺時，必經過屬於此切斷之感覺，不然，則經由之路不能連續。故此切斷若爲n次元，則即謂赤色感覺全體有 $n+1$ 元，或謂視感空間有 $n+1$ 次元，亦無不可也。

更就切斷C之一定點所起之赤色感覺而思之，此感覺全體又成一新切斷C'，而此切斷分（分字之義與前同）切斷C明矣。

故若切斷C'有n次元，則切斷C有 $n+1$ 次元，全視感空間有 $n+2$ 次元。

若網膜之同一點上所起之赤色感覺皆可認爲同一，則切斷C'歸於惟一單元，故爲無次元，而視覺空間即爲二次元。

然眼與吾人以第三次元之感覺，使吾人能認識對象之遠近，此人所常言者也。今若分析此第三次元之感覺，吾人即將發見此實由於兩眼閉合之意識，或由於伸屈眼筋以與外像適應之努力而來。

故起於網膜同一點上之二赤色感覺若能認為同一，必有相同之閉合感覺及屈伸相同之感隨之。縱令閉合及屈伸之感非完全相同，亦必相差甚小，為吾人所不能區別者也。

由是觀之，切斷 C' 自為一連續，切斷 C 有一以上之次元。

依據吾人之經驗，凡二視覺若有相同之閉合之感隨之，亦必有相同之屈伸之感隨之。

吾人若以切斷 C' 中有一定閉合之感相隨之一切感覺，依前法則構成新切斷 C'' ，則是等感覺不能互相區別，可以認為同一。故 C' 不連續，為無次元。 C' 為 C'' 所分，故 C' 為一次元。而 C 為二次元，全視覺空間為三次元。

然若吾人之經驗不如是，一定閉合之感不必有同一屈伸之感隨之，則推論又將不同。此時屬於切斷 C'' 之二感覺，雖同起於網膜之一點，且有相同之閉合之感隨之，然其屈伸之感不同，故

可以互相區別。故C'白爲一連續，至少有一次元；C'有二次元；C有三次元；全視覺空間有四次元。

如上所述，吾人由實驗的法則推論，得知空間有三次元。故吾人即得謂空間有三次元者，乃由吾人之經驗不得不然歟？然吾人以上所考察者，實不過一種生理學的實驗而已。閉合之感與調節之感之一致，只須架一適當之眼鏡，即足以破壞之。故吾人若欲予空間以四次元，但掛一眼鏡即足。然吾人能謂造眼鏡者，能爲吾人加一次元於空間乎？無是理也。吾人可得而言者，以三次元予空間爲甚便耳。

視覺空間，不過空間之一部分。此空間之概念中，已含有人爲的形迹，余已說明之矣。真空間惟有運動空間，吾人將於次章研究之。

第四章 空間與其三次元性

第一節 位置變化之羣

吾人今將達到之結果，概括之如下：曩者吾人欲研究所謂空間有三次元者，究爲何義？特先論物理的連續爲何？並考察其所以有 n 次元者，應爲何時矣？吾人觀察印象之種種體系，互爲比較之。吾人常見此等體系之二者，必有不能互相區別之時。欲表明此種事實，通例吾人稱彼等甚爲接近；吾人之感覺，粗率龐雜，無以辨別之也。且吾人又確認此等體系中之某二者，常有與同一之第三者，不能區別；而彼等相互之間，則能區別之也。此時吾人即謂印象之此等體系所集合者，形成一物理的連續 C 。而其體系之各一，則稱爲連續 C 之要素。

此連續究有幾次元歟？吾人假定先於 C 中，取二要素 A 、 B ；且無論何者，均有屬於連續 C 之要素之序列 S ；而 A 、 B 卽爲此序列之兩端。序列之各項，常與其稍前之項，不能區別。吾人若能發見此種序列 S 時，吾人稱 A 、 B 爲互相結合； C 之任意二要素，若均得互相結合時，吾人稱 C 爲一連續。

次設吾人於連續 C 中，全然任意選出若干要素，則此等要素之集合稱爲『切斷。』所以結合 A 、 B 之序列 S —— 分爲二類：在第一類，無論何要素均取與切斷要素不能區別之序列。此種

序列，稱爲切斷者也。在第二類，則其全要素，均含與切斷之各要素不能區別之序列。結合 A B 之各序列，若切切斷時，吾人稱：『A B 爲切斷所分離，切斷能剖分 C。』若吾人於 C 中不能發見爲切斷所分離之要素，吾人稱：『切斷不剖分 C。』

根據此定義，連續 C 自身，若爲不形成一連續之切斷所剖分時，連續 C 唯有一次元；否則有數次元。若剖分 C，僅用形成一次元之連續之切斷爲已足時，則 C 有二次元。又剖分 C，僅用形成二次元之連續之切斷爲已足時，則 C 有三次元。以下準此類推。

由此定義，吾人常能推知任意之物理的連續，有幾次元。然吾人尚須發見與空間同值之物理的連續，即發見其連續之要素，對應於空間各點。凡在空間互相接近之點，不能互相區別之要素所對應之物理的連續也。若然，則空間與此連續，將有同數之次元也。

適於此寫象之物理的連續之媒介，乃不可闕焉者也。蓋蔑此，則吾人不能將空間自身寫象也。空間係一數學的連續，無限者也。吾人唯能將物理的連續寫象之；非有限之者，物則不能寫象也。又吾人所稱爲點之空間各要素，乃互相全等。吾人欲適用吾人之定義，至少亦須在要素不甚

接近時，有以區別之也。最後則所謂絕對空間者，實無意義。吾人第一，須使之關係於與吾人身體不變結合之軸系，並須假定吾人身體，常得歸復於相等之姿勢也。

次則余嘗試以吾人之視覺，形成與空間同值之物理的連續也。此爲易事，殆無疑義。且此實例，更適於研究次元之數也。準此研究，吾人所謂視覺空間有三次元者，至何種程度，方爲正當，可知矣。然此解決，如余前所說明，爲不完全，且爲人爲的；吾人之研究，當轉其方向，不向於視覺空間，而向於運動空間也。

又余嘗關於吾人於位置變化與狀態變化之間，所爲區別之起原，有所論述矣。

吾人之印象中，所起變化之中，吾人先將伴有筋覺之隨意的內的變化，與其含有反對特徵之外的變化區別之，而吾人確認外的變化，可由內的變化消去之；因之原感覺有時得以恢復者也。如此可由內的變化以消去之。外的變化，稱爲『位置之變化』；與此不相涵容之變化，稱爲『狀態之變化』；能消去外的變化之內的變化，名曰『身體全體之位置變化』；其他之內的變化，名曰『姿勢之變化』。

今設 α β 爲兩外的變化， α' β' 爲兩內的變化，且假定 α 可由 α' 消去之，亦可由 β' 消去之，又假定 α' 能消去 α ，亦能消去 β' ，則經驗能示吾人以 β' ，亦可依同理消去 α β 也。此時吾人稱『 α β 爲對應於同一之位置變化』又同理 α' β' 亦稱爲『對應於同一之位置變化』

準此假設，吾人得取吾人於位置變化之連續，或所欲稱爲羣之物理的連續而論述之。其定義之方法如次：連續之要素，乃消去外的變化之內的變化也。今此變化之二者， α β ；第一，本性上即甚爲互相接近之時；及第二， α' 在其本性上，對於 β' 無所區別之某第三之內的變化，可以消去，并能消去外的變化時，則 α' β' 得認爲不能互相區別者也。在此第二例， α' β' 係按一種規約，即係將彼等得以區別之事項，置諸度外之規約，亦成爲不能區別者也。

如是，吾人既知要素，又規定其要素在何條件之下，可認爲不能區別，則吾人之連續，得以完全決定之矣。即吾人應用吾人之定義，於定此連續有何次元時所需之物，均已獲得之，則吾人於此連續將知其爲有六次元矣。是以位置變化之連續，其次元之數，不與空間相等，則不能謂爲同值；唯得稱爲類似於空間而已。

然則位置變化之連續，所以有六次元者，吾人何由知之，是唯基於經驗已爾。

吾人若欲將達此結果之經驗記述之，至易事也。吾人於此連續，應用切斷以剖分之，而其切斷自身，亦爲連續；更由他第二次之切斷以剖分之，此切斷自身，又爲連續。再由他之切斷以剖分之，如是逐次爲之，至第六次之切斷，始見其自身係非連續之切斷而止，則由吾人之定義，可知位置變化之羣，有六次元也。

苟欲記述其委細，雖如上論，至爲容易，然恐貽失於煩冗過於皮相之謂，故作罷論。位置變化之羣，既如前述，祇類似於空間，吾人自此得以演繹空間也。但次元之數，各不相同，故不與空間同值，以故吾人雖得說明此連續之概念，由何形成，并何如方得演繹空間之概念。然何爲三次元之空間，較之此六次元之連續，於吾人更爲親密？此一疑問也。又空間之概念，果由此紆道始能形成於人類精神者歟？此又一疑問也。

第二節 兩點之同一

點者何也？空間之二點，其相同或各異，吾人須如何方能知之。換言之，A之對象以B對象於

β 瞬間占有之點，主張稱爲於 α 瞬間占有者，究有何意義歟？

此爲前章第四節所已提出之問題，既如前所說明。問題之意，不於絕對空間，比較 A B 對象之位置也。如此問題，顯然毫無意義。不然，則常須假定身體能歸復於相等之姿勢，唯對於與余身體恆常的結合之軸，比較兩對象之位置而已。

余於 α 與 β 之兩瞬間，假定余之身體，余之眼目，均未稍動。（身體及眼目之運動，可由余筋肉之感覺認知之。）即余之頭腦手腕，亦均未動，並設余就於歸在對象 A 之印象，確認其爲一部分，由余視神經之某纖維，其他部分由余指之觸神經之某纖維於 α 瞬間，傳達於余，則余就於歸在 B 對象之他印象，亦得確認其一部分，由與前同一之視神經，他部分由同一之觸神經，於 β 瞬間，傳達於余也。

此處議論中止，未嘗加以說明，緣歸於 A 之印象，與歸於 B 全然相異之對象。余由同神經傳達於余云者，吾人何以知之？例如：就視覺言之，A 生成兩同時之感覺，即純粹爲光之感覺 a ，與色之感覺 a' ，同理，B 同時生成光覺 b ，及色覺 b' ；而此等相異之感覺，前後可由同網膜之神經傳達

之， a 與 b 相同，而以相異物體生成之 a' b' 之色覺。通例，必假定為不同者歟？若然，則凡此等感覺，可由同神經傳達之事，所可使吾人知之者，僅伴有 a' 感覺之感覺 a ，與伴有 b' 感覺之感覺 b ，殆為同一者也。

此假說究如何？且余亦實欲選擇比此較為複雜之假說也。然無論何如， $a + a'$ 與 $b + b'$ 之感覺之間，有何公共之點？須如何方能認辨之？斯為確實也。非然者，則對象 B 占有 A 之位置時，吾人無認辨此之手段也。

今將復返於前述之假定，余假定歸於 B 之印象，確與歸於 A 之感覺，於 a 瞬間傳達於余者，同以視覺及觸覺神經，於 β 瞬間傳達之，則吾人可斷定 B 於 β 瞬間所占之點，與 A 於 a 瞬間所占之點，實為同一，而不稍猶豫也。

今余將述此等二點為同一時，須有何二條件？一則關於視覺，一則關於觸覺，吾人宜分別觀察之。第一方面，雖為須要，然非賅括者也。第二方面，既為須要，同時並為賅括者也。在已習幾何學者，可用下法說明之：設 O 為 a 瞬間，形成物體 A 之像之網膜之點， M 為 a 瞬間物體 A 所占有空

間之點，又 M' 爲 β 瞬間由物體 B 所占有的空間之點。今欲使物體 B 作其像於 O 點，則 M, M' 兩點可不必一致；因視力不及於遠方，故 O, M, M' 三點，祇在一直線上足矣。以故兩方面之對象，欲令作其像於 O 之條件，雖須要兩點 M, M' 相爲一致，但尚非完滿也。今設 P 爲余指所占之點，指不稍動，故停滯於此點。若物體 A 於 α 瞬間，感知其觸於余指，則因觸覺不及於遠方，故 M 與 P 爲一致。次則 B 於 β 瞬間，感知其觸於余指，則 M' 與 P 亦爲一致。以故 A 於 α 瞬間，觸於余指；B 於 β 瞬間，觸於余指之條件，則 M 與 M' 一致之事，既爲須要，同時亦爲完滿者也。

但吾人在未知幾何學時，則無由如此推論之。吾人雖知有關於觸覺之第二條件不適合，而關於視覺之第一條件都能適合者。然第二方面能適合，而第一方面則未有不適合。此唯有依經驗以證明之矣。

今設想經驗有訓導吾人以反對者，是亦理所應有。此假定，毫無何種矛盾含於其中。即吾人假定由經驗可以證明，有關於觸覺之條件能適合，而視覺之條件不能適合者。反之，有觸覺之條件不適合，而視覺之條件能適合者。如此，則吾人顯然判定觸覺能及於遠方，視覺不及於遠方也。

不特此也。以上所論，吾人於決定一對象之位置時，僅用余目及余一指而已。但吾人依據他之方法，例如余之全指，亦可準同理利用之也。

今設余之第一指，於 a 瞬間，感知歸於對象 A 之觸覺，而余行對應於筋覺系列 S 一列之運動，其結果余之第二指亦於 a' 瞬間感知歸於對象 A 之觸覺。又設余之身體不動，（此可由筋肉之感覺認知之），以此第二指，就歸於對象 B 之觸覺，再行傳達於余，次余行對應於觸覺系列 S' 一列之運動，則余知此系列 S' ，係系列 S 之逆，並對應於反對運動者也。然則由何知之，蓋因余在對應於 S 、 S' 二列之運動，依次行之，則原印象得以恢復，即兩系列互相抵消之事，屢由過去衆多之外的經驗，可以訓導吾人故也。然於此假定之下，余於對象 B 所歸之觸覺，在第二列之運動終止時，於 β' 瞬間，余之第一指必感知之，是果可豫期者歟？

欲答此問，對於已習幾何者，可如下法推論之：大抵對象 A 於 a 、 a' 瞬間之間未動，又對象 B 於 β 、 β' 瞬間之間亦未動，在 a 瞬間，對象 A 占有空間之一定點 M ，於此瞬間，觸於余之第一指，則因觸覺不及於遠方，故第一指亦在 M 點，次余行運動之系列 S ，驗明此系列之末，於 a' 瞬間，對象

A 觸於余之第二指。由是余可得一結論，卽此第二指，亦在 M 點，亦卽運動 S，生成將第二指移至第一指位置之結果也。在 β 瞬間，對象 B 與余之第二指相接觸，余因身體未動，第二指停滯於 M，而對象 B 亦至 M 也。又 B 依吾人之假定，於 β' 瞬間，迄未有動，但余於 β β' 兩瞬間之間，行運動 S'，此 S' 運動，係 S 運動之逆，其結果必使第一指移至第二指之位置也。卽於 β' 瞬間，第一指移至 M，而對象 B 亦在 M，故此對象必觸於余之第一指。如是則前列問題，必當首肯云。

然在未習幾何學之吾人，則未能如此推論之，吾人知此豫想，一般能實現者也。唯有例外，常可由 A 對象於瞬間 α 與 α' 之間所行運動，或 B 對象於瞬間 β 與 β' 之間所行運動之例，以說明之也。

然由經驗，不得與此反對之結果歟？抑此反對之結果自身，卽爲背理者歟？是顯然非如此也。然經驗既訓導吾人以反對之事，則吾人究何如爲之，此際於幾何學，非成爲不可能者歟？曰否，否，不然，吾人唯得觸覺達於遠方之結論而已。

觸覺不達於遠方，視覺能達於遠方之主張，唯有下之意義而已。欲知 B 於 β 瞬間占有 A 於

α 瞬間所占之點歟？否，余得利用種種之證徵，或眼，或第一指，或第二指等，是也。但若依余指之證徵可以表現，則他之證徵，雖亦能表現，然唯依於眼之證徵能表現而已。其他證徵，實未表現，此即余之上列主張之意義也。余唯將普通所驗證之經驗事實，驗證之而已矣。

前章之末，吾人曾將視覺空間分析之，且知欲生成此空間，必須網膜感覺，閉合感覺，及調節感覺。若此最後之二感覺，常非一致，則視覺的空間，非三次元，必為四次元。又若於他方面，專依網膜感覺，則得僅含二次元之『純粹視覺空間』也。對於此唯由一指之感覺，即限於此指所占位置之全體，視為觸覺的空間，則此觸覺的空間，將於下節分析之，不再進而加以說明，即為含有三次元者也。然真正之空間，何故與觸覺的空間，有同數之次元，且較之純粹視覺空間，多一次元？其理由唯因觸覺不及於遠，視覺能及於遠也。此兩主張，全然有同一之意義；其意義維何，則如上論是已。

余前恐議論中止，急於通過之點，今將重複論之。A 於 α 瞬間，B 於 β 瞬間，吾人網膜所生之印象，不論其種類相異與否，可由同網膜神經纖維以傳達之者，吾人何由知之？此一疑問也。吾人

須討究之，余嘗列舉一簡單之假說，並附言其他至爲複雜之假說，余更思爲實在也。今余對於此假說，更欲有所言也。赤色之對象A，於 α 瞬間，又青色之對象B，於 β 瞬間，所生之印象，若此兩印象，得映於網膜之同一點，則其間必有公共之點者，吾人何以知之。吾人排斥上列之簡單假說，並得視此等兩種性質上相異之印象，可由兩互相接近而各不相同之神經纖維以傳達之也。

然則余有何手段，得知此等纖維爲互相接近者歟？若余眼不動，則恐無何手段也。然眼之運動，於網膜之A點青之感覺，與B點青之感覺之間，知其亦與A點赤之感覺，及B點赤之感覺之間，有同一之關係存焉。實際對應於同筋覺之同運動，自第一以至第二，自第三以至第四，其同理移行者，可由眼之運動，以表示吾人也。余於世人所知，關於陸宰 (Loise) 所提出之局部徵驗題之考察，不欲深入堂奧也。（陸宰係德之哲學家，主張實在的唯心論，反對絕對的唯心論，並反對唯物論，其勢力迄今猶存。）

第三節 觸覺的空間

以上所論，余於A之 α 瞬間所占之點，與B之 β 瞬間所占之點，雖認爲同一；然此僅於 α β

之間余未運動之條件之下，方爲可能，是於吾人之目的，尙非完全也。設余於 α β 兩瞬間之間，作何運動時，A之 α 瞬間所占之點，與B之 β 瞬間所占之點，成爲同一者，吾人何由知之。今假定於 α 瞬間，對象A，又於 β 瞬間，對象B，觸於余之第一指，且設同時余之筋覺，得知余身於其間所爲之動作也。余前曾取筋覺之二系列S S'論之，並言兩者相繼而起時，吾人之原感覺，得以恢復；此爲屢經驗證之結果。由是吾人更可視此兩系列之一，爲他系列之逆也。

若余之筋覺，得知余於 α β 兩瞬間之間所爲之運動，但如感知互相爲逆。元二列筋覺S S'，相繼而起，則感知此運動時，余宛若未動，依然可得下之結論：卽若在吾人得驗證余之第一指，於 α 瞬間，觸於對象A，於 β 瞬間，觸於對象B之範圍內，A於 α 時所占之點，與B於 β 時所占之點，乃爲同一也。

此種解說，如上所述，未可認爲完全適當者也。今先研究由此解說，吾人於空間，究應賦以何次元。余欲取A B於 α β 瞬間所占之二點比較之，或取余指於 α β 兩瞬間所占之二點比較之亦可。要之此兩方面，均假定余指於 α 瞬間，接觸於對象A，於 β 瞬間，接觸於對象B，故實歸宿

於同一事項也。然得供此比較目的之唯一手段，則除此兩瞬間之間，隨伴於余之身體運動所起之筋覺系列 Σ 以外，實無他道。種種可思惟之系列 Σ ，顯然形成物理的連續，其次元亦為甚大之數也。今 S 與 S' 於前述之意義，互相為逆，則 Σ 與 $M+\omega+\omega'$ 之兩系列，規定其無從認為相異，但不論此規定如何，種種系列 Σ 之全體，形成一物理的連續；次元之數，雖較前減少，猶為甚大之數也。

此等系列 Σ 之各一，均有空間之一點，與之對應，以故二系列 Σ, Σ' ，亦有二點 M, M' 對應之。今吾人所用之方法，足使吾人認知 M, M' 於下列二例時，不能區別之也。即（一） Σ 與 Σ' 成爲同一之時，（二）設 S, S' 互相為逆，而 Σ 等於 $M+\omega+\omega'$ 之時是也。吾人於他之各例，常認 M, M' 為相異者，則點之集合，與得以區別之系列 Σ 之全體，有同數之次元，即比三較多之次元也。

任已習幾何學者，此事可由下之推論，至易說明之。在凡可思惟之筋覺之系列中，對於指未嘗動之身體運動，有若干物對應之。今 σ 之系列，為對應於指未嘗動之運動，而兩系列 Σ 與 Σ' 既未能認為相異，則系列之集合，形成三次元之連續，但 Σ 與 Σ' 互相為逆時，若 $\Sigma \neq \Sigma'$ ，則 Σ 與 Σ' 既

常能認定 Σ 與 Σ' 相異，則系列之集合，形成三次元以上之連續。

今於空間取一面 A ，此面上取一線 B ，此線上取一點 M 。設 C_0 爲各系列 Σ 之全體， C_1 爲對於指在該面上結果所生運動時 Σ 中各系列之集合；同理 C_2, C_3 ，爲其運動之末，指在 B 或 M 之系列之集合，則 C_1 形成剖分 C_0 之切斷， C_2 形成剖分 C_1 之切斷，而 C_3 形成剖分 C_2 之切斷明矣。由是依吾人定義，可知 C_3 若爲 n 次元之物理的連續，則 C_0 必爲 $n+3$ 次元之物理的連續也。

今 Σ 與 $M \parallel M + \sigma$ ，設爲屬於 C_3 之二系列，在雙方運動之末，指在 M 點，即指於 σ 系列之始與末，均在同一之點 M 也。以故系列 σ ，爲對應於指末嘗動之運動系列之一也。今 Σ 與 $\Sigma + \sigma$ ，不能認爲相異，則 C_3 之各系列，融合爲一， C_3 無次元， C_0 爲三次元，成爲余所欲證明者也。反之， S 與 S' ，互相爲逆， σ 不等於 $\sigma + \sigma$ 時， Σ 與 $\Sigma + \sigma$ 既得認爲非歸一者，則顯然 C_3 成爲含有相異感覺之多數系列，是因身體於指不動時，可取多數相異之姿勢故也。如此， C_3 形成一連續， C_0 有三次元以上，一如余曩所述者也。

吾人若未習幾何學，則未能如是推論之，是除驗諸事實以外，別無他道也。但在未知幾何學

之先，有一疑問發生，即指未嘗動之運動之系列 σ ，須如此方能與他系列區別之也。吾人於此區別之後，始能認 Σ 與 σ 為同一。而僅於此條件之下，得達於三次元之空間，如今所述者也。

吾人若欲區別系列 σ ，則依下之方法，即以吾人行對應於此等系列 σ 之筋覺之運動時，由所謂吾人之第一指之指之神經，得以傳達之觸覺，維持現狀。由此運動，其不變化之事，往往有之故也。此乃經驗所以訓導吾人，吾人亦唯由經驗得以知之也。

吾人由兩互相為逆之系列之結合，所形成 σ 與 Σ 之筋覺，所以必與他區別之者，因其可使吾人印象之全體，維持不變故也。又今特選出 σ 者，則因其可使維持一定之印象故也。（筋覺之一系列 S ，可使維持吾人印象之一 A 云者，吾人先感 A 之印象，次感筋覺 S 時，吾人於筋覺 S 之後，猶感印象 A 之意也。）

余上曾言系列 σ ，屢起不變吾人第一指觸覺之事矣。余所屢言者，非所謂常也。此以日常生活之語言之，接觸於余指之對象 A ，同時於所謂不動之條件下，指不動，則觸覺不變之意也。但吾人若在未知幾何學之先，未能予以此說明也。除驗證印象之屢持續但非常持續以外，無有他道。

然 σ 之系列，吾人有宜注意者，若欲將系列 σ 與 $\mu + \nu$ 編入同一種類，因此兩者至欲認為無所區別者，則僅以屢持續之事足矣。在此條件之下，吾人見其生成三次元之物理的連續也。

如是，余之第一指，所生三次元之空間得以成立，且無論何指，均得生成同類之空間也。然吾人須如何方能認定此等與視覺空間成爲同一，又與幾何學的空間成爲同一者歟？吾人猶宜進而研究之也。

今於未研究之先，更有宜注意者。如上所論，吾人欲知空間之點，或普通吾人身體之末位置，除依據由一定之最初位置，移至此末位置之運動，所以告知吾人筋覺之系列以外，無他道也。但此末位置，一方由此運動定之；同時他方，依存於吾人出發之最初位置，明矣。願運動可由吾人之筋覺知之，但未有可使吾人知最初之位置者也。無論何物，絕不必使其與他之可以思惟之位置有所區別。此即明示空間之本質的相對性也。

第四節 種種空間之同一

次則吾人須就二連續C' C比較之。例如其一係由余之第一指D生成之，他係由余之第二

指D'生成之；此二連續，均有三次元。C之各要素，或謂爲『第一觸覺的空間之各點』亦可。於此有自由一定之初位置移至一定之末位置之筋覺系列 Σ 對應之。（吾人不謂使空間關係於恆久的結合於吾人身體之軸，而謂使之關係於吾人身體最初之位置不變結合之軸者，以其較迄今所述，殆更爲調和也。）又此第一空間之同一點，吾人若知 σ 爲不動指D之系列，則對應於 Σ 與 Σ' 之系列者也。

同理，設於連續C'之各要素，或第二觸覺的空間之各點，有感覺之系列 Σ' 對應之，而 σ' 爲指D'不動之系列時，設於 Σ' 與 Σ 有同一點對應之。 σ 與 σ' 所以區別之者，前者不變化指D所感之觸覺，後者能使維持指D'所感之觸覺故也。

如此，吾人得驗證下之事實。初余之指D'，感有感覺A；次余行運動，生成筋覺S；其結果余之指D，感有感覺A。此卽系列 σ 之特性也。次余行運動，生成筋覺之系列S'，卽依前述意義，爲S之逆之筋覺系列，則其結果，余之指D'，更得認知感有感覺A'也。（S本宜適當選定之。）

由是因系列 σ ， σ' ， σ ， σ' ，可使維持指D'之觸覺，故爲余所名爲 σ' 之系列之一也。逆言之，若取

任意之系列 σ' ，則 $S_1 + \sigma' + S_2$ 爲吾人所名爲 σ 之系列之一也。

如此，將 S 適當選定之，則 $S_1 + \sigma' + S_2$ 成爲系列 σ 。又將 σ 依種種方法變易之，則得種種可能之系列 σ 也。

以上事項，吾人於未知幾何學時，僅能驗證之而已。但在已習幾何學者，則此事實可如下說明之：初余之指 D' 在 M 點，與對象 a 相接觸， a 使余指感印象 A' ，次余行相應於系列 S 之運動。 S 已如前述，須適當選定之，即須如此運動恰將 D 之指移至初 D' 所占之位置 M 點以選定之也。如是，則指 D 現與對象 a 相觸，因之感知印象 A 也。

次行對應於系列 σ 之運動。此運動之際，指之位置，依假定爲不變者也。即指常保持其與對象 a 相接觸，依然感有感覺 A 。最後余行對應於系列 S' 之運動。因 S' 爲 S 之逆，故此運動，恰使指 D' 移至迄今 D 所占之點 M 。若如假定所容許，對象 a 不動，則此指觸於其對象，更感知 A' 之印象。如是，則既證明之矣云。

余就此結論，余觀察筋覺之系列 Σ ，於此有第一之觸覺的空間之點 M 對應之。次適互相爲

逆之兩系列 S, S' 論之。如前所述，筋覺之各任意系列，均有第一及第二之觸覺的空間之一點對應之。故於系列 $S + M + S'$ 亦有第二之觸覺的空間之點 N 對應之。

余欲將如是定義之 N, M 兩點，認為互相對應者也。其正當之理由維何？就此規約其須要之條件，係於第一之空間，對應於系列 S, S' 之二點 M, M' 之同一，為第二之空間，相對應之二點 N, N' 之同一，即生成對應於兩系列 $S + M + S'$ 與 $S + M' + S'$ 之二點之同一也。此條件果滿足與否，吾人須研究之。

茲先有宜注意者， S 與 S' 係互相逆，則 $S + S' = O$ 。因之 $S + S' + M = M + S + S' = M$ ，或 $M + S + S' + M = M + M$ 也。但吾人於此，雖用加法記號，表示感覺之繼續。而於其順序，亦未嘗不過問，故並非謂 $S + M + S' = M$ 。吾人不能如普通加法，將次之順序，前後倒置，質言之，吾人之手續，為組合的，而非交換的也。

如此假定之下，若欲使 S 與 S' 對應於第一之空間之同一點，則 $M = M', M' = M + S'$ 為須要之完滿條件。此時成為 $S + M' + S' = S + M + S' = S + M + S' = S + M + S' + S + S' = S + S' + M + S'$ 。

但吾人已知 $S + a + S'$ 爲系列 σ 之一，以故 $S + M + S' = S + M + S' + a$ ，即 $S + M + S'$ 與 $S + M + S'$ 對應於第二之空間之同一點 $N = N'$ ，可得而證明也。

是以吾人之兩空間，各點互相對應，一方可變至他方，卽爲同形者也。然其所以爲同一者，究由何知之歟？

就兩系列 σ 與 $S + a + S'$ 觀察之，余嘗言系列 σ 屢使維持指 D 之觸覺 A，但非謂常維持之也。同理系列 σ' 亦屢使維持指 D' 之觸覺 A'，但亦非常維持之也。顧余於系列 σ 使其維持指 D 之印象 A，則同時於系列 σ' 亦使其維持指 D' 之印象。反言之，第一之印象變化，則第二亦變化，較之前事，更認爲屢屢而起，但並非必起之謂也。

吾人於此經驗的事實，可解析之如次：指 D 所生印象 A 之未知對象 a，與指 D' 所生印象 A' 之未知對象 a' 爲同一，實際第一對象之動，可由印象 A 之消滅認知之。此時依同理 A' 之印象，亦消滅，而第二對象亦動，又若第一對象不動，則第二亦不動，若此二對象爲同一，則第一在第一空間之點 M，第二在第二空間之點 N。故此二點亦爲同一。此所以使吾人認知兩空間爲同一也。或

更適切言之，兩空間爲同一之意義，卽此也。

吾人今就二觸覺的空間之同一，已如上論；則觸覺的空間與視覺的空間之同一，亦可依同法論之。此無埃贅述者也。

第五節 空間與經驗

余今於此足見吾人所論，與經驗論者之思想，得一致之結論。實際余欲論經驗之職分，並擬將三次元空間之成立所與之經驗事實分析之也。但無論此事實之影響若何宏大，吾人尙有不可忘卻余所屢經注意之事件存焉。卽經驗事實，雖屢經驗記，但非常有與必然之謂也。是以空間雖屬有三次元者，然非常有三次元之意可知矣。

余知欲脫此疑點，至易事也。若事實不能如豫想驗證時，則由外界物體之運動，得容易說明之。若經驗有豫想之結果，則經驗關於空間，訓導吾人，否則歸其責於外物，而訴諸運動也。換言之，經驗不能如豫想時，則將經驗強爲推動之也。

余並不爭辯此理謂爲正當也。但此足使吾人深知空間之性質，原非經驗事實。吾人若欲證

明他法則，則須由強將與此相當之經驗事實推動，得以同理證明之也。如此將事實強行推動者，得由同等之理由，認可之也。或者於此，至多亦不過下之反對而已。即謂汝將事實推動，雖為正當，然不免濫用之，何為而必如此屢使外物推動耶！

約言之，經驗於吾人，並未證明空間為有三次元；唯以三次元歸之，則將經驗事實推動之事，能限制於最小數，故得證明其為便利云爾。

尚有附言者，經驗僅常導吾人於物理的連續之寫象的空間，決未導吾人於數學的連續之幾何學的空間也。經驗之所訓導者，不過表示欲使幾何學的空間，與寫象的空間，有同數之次元時，則於此宜賦予以三次元，方稱便利而已。

經驗問題，亦能以他之形式表現之。即物理現象，例如機械的現象，若欲於三次元以外之空間理解之，果為可能與否之問題是已。若此而不可能，則吾人對於吾人寫象之形式，有客觀之經驗的證明。詳言之，即與吾人生理有獨立之證明也。

但實際並非如此。余於此問題，不欲完全討論之；唯欲使讀者憶及海爾智 (Hertz) 力學中

所以賦予吾人顯著之例耳。

此大物理學家，於其用語之本義，不信任力之爲物，可以存立；此人所共知也。卽彼假定可視之物質點，常由某不可視之結合，結合於不可視之點，吾人屬於力之作用，卽此不可視之結合之作用也，云云。

但此不過其思想之一部分。吾人就由 n 個之可視或不可視之點所形成之系統論之，則全體有 $3n$ 之座標。今設認此爲 $3n$ 次元之空間之唯一點之座標，又設此一點，由今所述之結合，能適合於常在比 $3n$ 較少之任意數次元面上之條件，則於此面上，欲由一點運動以至他點時，此點常取最短之道。此爲總括全力學唯一之原理。

世人對於此假說，或以其簡單而爲所誘惑，或以其人爲的特質而嫌惡之。然無論如何，海爾智自身實理解之。且自以爲較之吾人普通之假說，更爲便利。此種唯一之事實，足以證明吾人普通之觀念，特於空間之三次元性，並非強力學家以牢不可破之力也。

如上所論，經驗者不過勤其唯一之職分，即此僅予以機會而已。但此職分不論如何，常至爲重要。余以爲必須取而特說之也。若吾人感覺有須要之先天的形式存在，且爲三次元之空間，則此職分爲不必然也。

此形式果存在否？或吾人若希望時，則三次元以上次元之空間，果能寫象否？又此問自身，究含有何意義歟？吾人於其語之真意，則四次元之空間，與三次元之空間，均未能寫象明也。第一，吾人不能將空虛之空間寫象之，又不論其爲三次元，爲四次元，空間內之對象，均未能寫象也。其理由有三：第一，空間常爲無限，而欲將空間內之圖形，即全體之一部分，寫象時，必須將全體寫象之。然全體爲無限，故未能寫象也。第二，此等空間，爲數學的連續；然吾人除物理的連續以外，不能寫象也。第三，此等空間，常爲等質；然吾人於涵容吾人感覺之框，則未能等質也。

因之前列之問題，除下之意義以外，別無他道。即前述經驗，若與現在相異，則其經驗之結果，可使吾人想像空間爲屬於三以上之次元者歟？例如眼之調節感覺，常與閉合感覺，非一致也。依第二節所述，觸覺不及於遠方之一語，表示其結果之經驗，常導吾人以反對之結論，吾人得想像

之歟？

是顯然可能者也。吾人想像經驗之際，吾人由此更得想像其所予兩反對之結果也。實際，如此想像，爲可能者也。唯由悠久之個人經驗，或更爲悠久之人類經驗，所產出之多數聯想，必須打破；此則困難者也。誠恐此種聯想，或至少其中吾人自祖先所繼承者，亦形成此先天形式。吾人於此，果賦有純粹直觀歟？果爾，則余以爲此可認爲不可分析者，並無拒絕顯明其起原之權利之理由也。

吾人之感覺，謂爲有延長者，不過吾人達於生成其感覺之對象之運動。換言之，吾人對於其對象，對應於自衛運動之某筋覺之寫象，與感覺常相結合之意而已。此結合必須有機體爲之保護，故於生物之種之發達史上，有至邃古之起原，吾人似應思爲不可破壞者也。無論如何，此實不過聯想而已，則破壞亦尙可思維也。以故吾人因欲使空間可以適用，故不能謂感覺現於意識之事，爲不可能也。唯感覺同時能適用於空間，卽欲取入於上述之結合時，實際上，得謂爲不現於意識也。

吾人僅於直線形式，得將時間寫象之。故時間觀念，論理上應在空間觀念之後。此種主張，亦余所未能理解者也。若果能如此言之，則吾人於『時』之神，可描成爲持有大鎌者。故時之爲物，論理上可謂爲在耕稼之後也。相異之時之部分，正以其非同時爲本性，故不能以同時寫象之，實爲當然；但此非吾人無時之觀念之意也。尤若茲，則由前述之理由，吾人於其語之本意，未能將空間寫象之，故可謂無空間之直觀也。吾人以直線名稱所寫象者，不似幾何學的直線，不外爲一種不似時間自身之粗率形像耳。

吾人雖欲予空間以第四次元。然此次元，常歸於他次元之一者，竟因何理由歟？欲了解此，至易事也。吾人取吾人之筋覺，及其所形成之系列觀之，由多數經驗，知此等系列之寫象，互相結合於甚複雜之網；吾人之系列，得以分類也。今爲言語便利計，以極粗率雜揉之語，表示余之思想，則吾人筋覺之系列，可分類爲與空間三次元相當之三階級，當然深知此分類，更爲複雜也。但欲了解余之推論，則以此足矣。若余欲寫象第四次元，余須取屬於第四階級之他之筋覺之系列論之。然余之筋覺，可使屬於已經存在之三階級之一，故余唯於屬此三階級之一之系列，未能寫象也。

因之余所思惟之第四次元，得歸於他三次元之一也。

由是所證明者維何？第一，證明破壞古之分類，代以新者，而筋覺系列，須分類爲四階級。如此，則困難漸次消滅矣。

此困難有時更或顯著。余今假定設余錮禁於六面不可踰越之壁，卽上下及四側是也。余欲外出，勢不可能。但想像開啟一牖，或想像壁之兩面，頓時消失，亦不可能歟？世人於此，當然答言須假定此壁爲不可動者也。然余有自行運動之權利，由是吾人於視爲絕對靜止之障幕，對余可以運動，或者於此，謂斯固然矣。然如是相對之運動，則不能任意也。若對象靜止，則對於任意軸之運動，必爲不變之剛體運動。然今所想像之表面上運動，不協於不變之剛體運動之法則，亦未可知。此固爲事實，然訓導吾人以剛體運動之法則者，唯經驗；卽想像之爲與今相異者，亦無不可。約言之，余欲想像出此幽閉，則余於余運動時想像壁爲消滅斯可矣。

以故若視空間爲三次元之數學的連續，卽使無有定形，而精神實形成之；但此非自子虛烏有而翫造之。余意必有其材料與模型；此材料與模型，實豫存在於精神也。然精神並非有必然的

唯一之模型，須自行選擇之。例如於四次元空間與三次元空間之間，可施以選擇也。然於此際，經驗果有何職分，則唯指導此選擇而已。

最終有一問題發生，即空間之數量的性質，何所由來，是也。此起因於筋覺系列，對於空間生成，所演之職分也。即此爲能反覆之系列；因其反覆而數生焉。由其系列無限反覆，空間亦爲無限。而又由此如第三章之末所論，知空間更爲相對的也。以故於空間賦予以其特性者，反覆也。然反覆須豫想『時』，『因之論理上時間在空間之先也。』

第七節 三半規管之職分

余於生理學家所重視爲正當之一器官，至今尙未論及，此爲三半規管是已。（三半規管係在耳中一種骨管。）由多數經驗，得完全表示此半規管於吾人之方面感覺，甚爲須要也。然據生理學家所說，則全不一致，且提出兩種反對學說：一爲馬赫德拉季（Mach-Delage）之說；一爲德向（de Cyon）之說也。

德向爲生理學家，其關於心臟之神經昂奮之發見，負有盛名。然余對於此公，關於今問題之

見解，未能同意也。余非心理學家，故於此公對馬赫德拉季之反對說，所提出之實驗，不敢貿然加以批評。然氏於生理學的，不論僅此半規管兩端之壓之差，得以變化，而於其實驗之大多數，均視半規管全體之壓得以變化。而於他實驗，至使其影響及於機能之甚，損害器官，故余謂其實驗，實缺證明之力也。

以上姑置勿論，即使其實驗，無可非難之點；然此於古昔之理論，雖加否定，而於新說之正確，則未嘗證明之也。實際，余若認其所解說者為正當，則僅由陳述其說，表示無法案出驗記其說之實驗，斯可矣。

據其所說，則半規管之三對，含有表示吾人以空間有三次元之唯一機能。然日本之騾鼠，只有兩對半規管，故當認空間為二次元。此以奇妙不可思議之方法表示之也。彼等各藏其鼻於其前者之尾下，列成環形；而列成此時，即速行旋轉。又持有唯一之半規管之海產八目鰻，雖信空間為唯一之次元，然其所現於外者，則不如前騾鼠之狂亂也，云云。

此說不可承認，明也。感覺以知外界所起之變化為職分。造物主賦予吾人以無有變化，不斷

引起感覺之感官，實至不可思議。而空間以不變化其三次元之數，因可記憶之爲有三次元者也。以故吾人必歸向於馬赫德拉季之說。吾人由半規管之神經，所得而認識者，在於同一半規管兩端壓之相異，由是吾人更得意識下列各事，即：

一、對於頭部不變結合之三軸垂直線之方向，

二、頭部重心之進行運動的加速度之三向分加速度，

三、由頭部旋轉所生之遠心力，

四、頭部旋轉運動之加速度

是也。由德拉季之實驗，此最後之感覺，最爲重要。此因神經對於壓之急激變化，成爲銳敏。而對於壓之相異，則成爲不銳敏故也。因之最初三感覺，可置之度外也。

吾人若知每瞬間頭部旋轉運動之加速度，則吾人自此由無意識的積分，對於原點，採用一定之初位置，得以推定頭部之終位置。以故半規管貢獻於吾人，使知吾人所行之運動，其事正與筋覺相同。由是則吾人前此就系列 S 與 Σ 所述者，非僅筋覺之系列，必同時並指筋覺及半規管

之感覺也。除此添注之外，於前所述者，仍無變易也。

就系列 S₂，此半規管之感覺，顯然最占重要之位置者也。然由此僅知頭部之運動。至於胴體與四肢對於頭部之運動，絕無所知；故尚非完全。且此唯訓導頭部所爲之旋轉，關於進行運動，則未嘗訓導之也。

第一篇 物理的科學

第五章 解析與物理學

—

數學之效用何在乎？其組織雖甚精微，然全由吾人心造，非人爲的任意的產物耶？懷此疑者，頗不乏人。然同爲懷疑之人，其中亦自有別。尙實際者，惟利是求，其責望於吾人者，無非獲利之道。吾人不惟可以置之不答，且可反問彼等聚斂多財，果何爲耶？彼等但知生財，而置可以使彼等樂享其財之學問藝術於不顧，是非爲生活之故，而泯滅生活之理由耶？

且世亦絕無專以應用爲目的之科學。真理惟互相聯絡，始能有效。若固守有直接結果可期

之真理，則將脫節而不復能聯絡矣。

卽最輕視理論之人，亦日日食理論之糧而不自知。若失此糧，進步立止。不久卽將全機滯澀，如今日之中國也。

此等頑梗之實際家，姑置不論。設有求自然知識之人，吾人果可使之了然於自然之理乎？

吾人欲答此問，只須以天體力學及數學物理學指示之卽可。蓋此二者，實亘古迄今吾人所建之二大科學紀念碑也。

吾人建此二紀念碑，決非徒勞，凡求自然知識者，無不承認之。然僅此猶未足也。數學之目的實有三焉。數學爲研究自然之利器，固不待言。然又有哲學的與美的目的。蓋其闡明空間與時間之概念，大有造於哲學者。又能使學數學者得歡暢之感，無異觀畫聞樂。當其贊嘆數與形之調和，發見未曾豫期之境地時，其所得之樂，雖不由於感覺，然實具有美的性質。能完全得享此樂者，誠不過少數傑出之人。然能知最高藝術者，寧非少數耶？

故余敢斷言數學自有其價值。其可以應用於物理學之理論，固不待言，卽不能應用之理論，

亦不可不研究也。

縱令物理學上之目的與美的目的，可以分而爲二，吾人亦不可捨其一而取其一。

且此二目的實不易分。可以達其一之最善方法，必兼有他一目的在。余今先闡明純粹理論與其應用之關係，則此理卽自明矣。

數學者之於物理學者，不止供給公式而已也。二者之間，尙當有更親之誼。且數學的物理學與純粹解析，亦非如兩大強鄰互通和好，其精神實相融而爲一者也。余今但指示數學受賜於物理學者與物理學借助於數學者，讀者卽可釋然矣。

二

物理學者不能以發見真理責望於解析家，解析家不過能助物理學者以豫見真理而已。不憑經驗，但設若干未熟之假說以說明宇宙，古人早已深悟其非。一世紀前之人所寶愛之學說，至於今日都成廢物矣。

一切法則莫不自經驗來。然欲表出之，須有特殊之言語。吾人日用之言語，甚膚淺而曖昧，未

足以表此等精微宏富之關係也。

是即物理學者不能須臾離數學之第一理由。物理學者若無數學，則更無辭可以達其意。例如『熱』之一語，草昧時代早已發明。而自有此語以後，世人陷於誤解者，不知經幾何年。蓋以『熱』之一名表熱，遂使天下後世視熱爲一物質，以爲熱不生不滅也。

反之，發明『電』之一名者，不期而與今日證爲正確之電氣保存之新法則相契合，不可謂非僥倖也。

彫詞琢句以言語爲藝術之文學家，本意原在求美。而微妙之思想，亦因之遂得自由表現。析家亦猶是焉。其宗旨本在自求其美，不意因此反爲物理學者造成一種精當之語言也。

不特此也。法則雖由經驗而生，然不能直接得之。蓋經驗爲個人的，而自經驗產出之法則則爲普遍的；經驗爲近似的，而法則則爲精嚴的。經驗常起於錯綜之情況，法則之陳述，則除去此種紛紜。吾人所謂『矯正系統的誤差』即指此也。

總而言之，吾人欲由經驗得一法則，須先行概括始可。概括之用，凡精細之觀察者皆不可缺。

也。

然吾人欲行概括，須如何始能乎？
個個真理，皆可以無限多數之方法擴張之。吾人可由之路
不知凡幾，於此不能無所擇明矣。當選擇之際，指導吾人者爲何物乎？

是惟有類似而已。然此語亦甚曖昧。草昧之民，發見類似，惟憑感覺。例如以色列與音相比較是也。故其所知之類似，皆甚粗略。如光與輻射熱之關係，則非彼等所能夢想矣。

以目不能觀，惟憑悟性始能豫想之真深類似教吾人者，誰歟？是即輕實質而重純粹形式之科學的精神也。只以實質爲別，例如教吾人以同一名詞呼四元乘法與整數乘法者，則數學的精神也。

今所述之四元法，若非英國物理學者應用之於物理學，則至今必尙有人疑爲無用之空想。四元法之與物理學，驟視之判然兩物，一經應用，遂合而爲一。且吾人由此可以洞察自然之秘密，寧非異事哉？

解析之有用於物理學，於此已可見一斑。然解析學之得以如此，則須置直接應用於度外，而

以最自由之方法研究之始可。換言之，數學家之用心，當如藝術家，不求有用而始有用也。

數學能使吾人視，能使吾人於五里霧中尋出當由之路。卽諺所謂登愈高者望愈遠也。此類實例，不勝屈指；今姑舉其最著者言之。

余今先舉一例，以示讀者以變換言語卽可由微知著，發見前此所未曾想到之普遍性。

如牛頓 (Newton) 之法則，出而代刻卜勒 (Kepler) 之法則時，人但知橢圓運動而已。就此運動而言，此二法則亦不過形式上不相同。然欲由一法則以達於他法則，但微分之卽可矣。

然一切攪動作用與天體力學，皆可用直接概括自牛頓法則演繹而出。若膠守刻卜勒之陳述，則零亂之遊星軌道，將無從發見矣。孰知此等前人不能以方程式表明之複雜曲線，皆自然爲橢圓之普遍化乎？若無牛頓法則，人將信觀察愈進步而混沌愈甚也。

余今更舉一例，當馬克斯維耳 (Maxwell) 研究之初，從來之電力學假說，已說明一切已知之事實。所以動搖此等假說者，非新經驗也。然馬克斯維耳別具隻眼以觀察此等理論。知若再加一項，則方程式更成對稱的，而此項甚小，不足以生舊法所得之結果。馬氏之先驗的直觀，二十年

後始得實驗的確定是即馬氏於二十年前已有先見之明也。

馬氏何由成此大功乎？是蓋彼對於數學的對稱所感甚深，故能直覺人之所不能覺也。然若馬氏以前，無人研究對稱之美以導其先路，彼尙能成就此業否耶？

馬氏運思之際，常借助於有向量 (Vector) 而有向量者，由虛數之理論引入於解析者也。發明虛數者，恐未曾夢見此物竟大有功於他日現實世界之研究。但觀彼等所稱虛數之名，亦足以知之矣。

大抵馬克斯維耳非熟練之解析家。然若已臻熟練之域，恐反將蒙其害，亦未可知。然馬氏於數學的類似，感觸極精深而微妙，彼所以能於數學的物理學成不世之功，實由於此。

余今所引馬克斯維耳之例，教吾人者尙不止此。吾人應如何運用數學的物理學之方程式乎？
乎僅由此演繹一切結論，遂認之爲確切不移之真理乎？曰否，結論不過教吾人以應如何變更其方程式始能得用而已。

尙有一例：自物理學言之，其外觀及內容均毫無關係之二現象，然自數學論之，則具有類似

之點。因之，一現象之法則，常啓示吾人以推定他一現象之法則。如拉普拉斯 (Laplace) 之方程式，牛頓引力論用之，液體運動論用之，電位論用之，熱傳導論亦用之是也。

若言其結果，則此等理論皆可相通。其任意之一理論，可由其他理論模擬得之，猶臨畫然。此等理論常互相說明其言語。例如仿流體力學及熱學之用語，而電氣學者遂得發明『力流』之名詞是也。

由是可知數學的類似，不僅能使吾人豫想物理學的類似而已也。縱令無物理學的類似，其功用依然無所失。

約而言之，數學的物理學不止爲物理學者指示捷徑，以計算一常數，或積分一微分方程式，且使之認識事物隱藏未現之調和，而另闢一觀察之新生面。故吾人苟能利用解析，則解析愈純粹高深，其功用亦愈大也。

三

吾人更轉而論解析之受賜於物理學者。

人類欲認識自然之一念，於數學之發達，實有悠久遠大之影響。凡不忘科學之發達史者，無不憶及之。

物理學者先提出問題以求吾人之解決。然吾人解得其問題，吾人之勞卽已酬矣。

純粹數學者，若忘外界之存在，雖深知色與形必如何配合始能調和，然猶無實物標本之畫家，其創作之天機，勢必閉塞而不啓矣。

以數與記號所能造成之結合，其數無限。於此無數結合之中，足以值吾人之注意者，應如何選出乎？若可隨意，則將不勝其勞，且將至人與人殊，互不能理解也。

然此猶無關重要，今更進而論之。

物理學不惟可以防止吾人彷徨歧路，且可以保護吾人脫離危險。吾人所以不至在同一圈內無限循環，實由於此。

此事已由歷史證明之矣。物理學不惟使吾人於多數已顯之問題知所選擇，且常提出吾人想像所不能及之種種問題，以供吾人之研究。蓋人智雖千變萬化，而自後之變化尤多。吾人欲追

尋自然，必須時闢新路。由此新路，往往能直達高峯，發見未曾見之新景物。此物理學之所以有用也。

數學之記號猶物理的事實。吾人執物之種種方面而比較之，始能理解其內的調和。內的調和者，惟一之美，足以值吾人之努力者也。

余前所舉之第一例，其事雖甚久，爲人所不記憶，然實甚重要也。

數學的思惟之惟一之自然對象卽整數。然有外界，吾人始得構成連續之概念。是雖爲吾人所發明，然吾人所以能發明此概念者，則外界爲之也。若無外界，則微分解析無由而生；吾人之數學，不過以整數論或置換論相終始而已。

然吾人之精力與時間幾盡費於連續之研究，且未有以此爲浪擲光陰與聰明者也。

解析所開之無邊光景，決非數論所能豫想。其配置之簡單宏大，對稱，使吾人一覽之下，胸襟頓豁。若夫整數論，則無豫知先見之功用，其眼界不過限於一步一步而已。

或者曰，整數之外無嚴密，故亦無數學的真理。整數無處不潛伏，縱令反覆至於無窮，吾人亦

不可不力求揭去其蔽隱整數之幕。

然吾人於此亦不欲曉曉置辨，惟謹領受此可貴之連續而已。縱令一切皆自整數出，然亦必有連續，始能導出多數之事物也。

余尙有不能已於言者，愛米特導入連續變數於整數論，遂得可驚之效果；於是整數之領域爲所征服，而前之視爲無秩序者皆井然不紊。由是觀之，吾人之受賜於連續，卽受賜於物理界者爲何如可以想見矣。

傅立葉 (Fourier) 級數者，連用解析之貴重手段也。因此遂得表出不連續函數。然傅立葉發明此級數，則因解物理學中熱傳導論之問題而來。若自然界中無此問題，吾人恐未敢承認不連續函數，而以連續函數爲惟一之函數矣。

然函數之概念，因此大展，更經理論的解析家之手而愈大發達。此等解析家侵入純粹抽象之領域，力求與現實界遠。然以機會予彼等者，實物理學之問題也。

傅立葉級數出世之後，又有與之相類之級數新入於解析之範圍中。此等級數之所由發明，

亦自應用而來者也。

二次偏微分方程式論，亦有與此相類之歷史。蓋其所以發達之故，全由於物理學。惟僅由此等方程式，尚不足以決定未知函數，必更加以輔助條件（即界限條件），而後可以生出種種問題也。

若解析家能順從自然之傾向，則此等問題之中，彼等或只知其一而止，如哥瓦黎維斯克夫人（Madame Kowalewski）所論，亦未可知也。

然彼終於不明之問題尚多。舉凡物理學之理論，電氣學之理論，熱學之理論，皆啟發吾人以不同之新眼光，視同一之方程式。故吾人即謂若無物理學，亦無偏微分方程式，非過言也。

余今不必更增實例，已足以下一斷論曰，物理學家若以一問題屬吾人爲之解決，吾人當感謝之，不當視爲爲人之事而憚煩也。

四

以上所述猶有未盡。物理學不惟予吾人以解決問題之機會，且教吾人以解決問題之方法。

今試言之，其道有二。

(一) 物理學能使吾人豫測解法，又能以推論暗示吾人。

物理學之種種理論所常遇之拉普拉斯方程式，即其一例，余前已述之矣。等角寫像論之於幾何學，複素變數之函數論之於純粹解析，亦猶是焉。

故解析家於複素變數之函數論，常得種種物理的模型，與彼等常用之幾何學圖形收同等之功。

由此模型，則純粹推論次第表現之結果，可以一目瞭然。舉散漫之解法要素而統一之，使吾人於未得證明之先，即能憑借直觀，以豫測解答問題之塗術。凡百重要之發明，皆賴此證明以前之豫測而成，無待余之贅言也。

例如數學的物理學屢用級數展開式。其級數之收斂性，吾人常信之不疑，然其果為收斂與否，則非數學所能確實證明。欲得證明之法，惟有留待後人而已。

(二) 物理學不惟供吾人以解法，且供吾人以推論。

克蘭因借電流之助以解理曼面之問題，即其明證也。

此種推論，自解析家視之，實不能謂爲嚴密。若然，則解析家不能認爲完全嚴密之證明，物理學家能認爲完全嚴密乎？夫嚴密之義，有一無二。苟不嚴密，則推論當亦不復成爲推論。吾人上述云云，豈非似是而非之僞辨乎？欲釋此疑，只須思及吾人用數以表自然現象之關係，當據何條件，即可釋然矣。

吾人力求嚴密時所遭遇之困難，果從何處起乎？

大抵困難之起，常在吾人欲確定某量近於一定極限否，某函數爲連續函數否，有推出函數否之時。然物理學者由實驗所發見之數，常只得其近似。而任意函數皆能使此數與某不連續函數之差，或與某連續函數之差小至無窮也。

故物理學者可以任意假定函數爲連續的，或爲不連續的，有推出函數或無推出函數，皆不至爲現在及將來之經驗所不容。物理學者有此自由，故能得免於解析家所遭遇之困難也。

物理學者常能以其計算中所見之函數視爲整多項式而行其推論。故物理學者所能滿足

之概觀，非解析家所要求之推論。然亦不能因此遂謂前者對於後者之發見無所補助也。

吾人將物理學的概觀，變爲嚴密之證明者，已不知凡幾。此類變更至於今日已成易事矣。

余尙有多數之例可以列舉。然過多轉足以生讀者之厭，故至此而止。然就以上所述，亦足知數學的物理學與純粹解析實有輔車相依之勢也。

第六章 天文學

政府與議會常視天文學爲一種不經濟之學科。蓋天文學上所用最小之器械往往耗費萬金。卽規模狹小之天文台，亦動費百萬金。此外更有日食月食之臨時經費。所用既不貲，而所爲者又爲與吾人遠隔之星象，於選舉競爭毫無關係。寧非無謂之甚耶？然政治家猶不敢反對者，蓋其對於理想主義之遺物，偉大之對象，猶有幾分不自知其所以然之感情故也。吾人雖深知彼等對於天文學，未嘗不口是而腹非之。然吾人當哀其愚，而以此理想主義實未嘗欺誑彼等之故明示

之。

天文學爲海軍之所不可離，人莫不知之。然僅執此以爲言，猶淺之乎視天文學也。

天文學之功用，在能使吾人超然自立於吾身之外。惟其大故不可少，惟其美故不可少。吾人有天文學，始知軀殼之小，精神之大。以吾渺渺之一身，置於星辰燦爛茫無涯際之宇宙間，不過滄海之一粟而已。然此星辰燦爛茫無涯際之宇宙，竟全部收藏於吾之精神中。而吾於是得飽聞其無音之樂，於是能自覺吾人之能力，以堅吾人之心志。則天文學耗費雖多，其所得之效亦足以相償而有餘矣。

且天文學能使吾人之精神理解自然，而由此轉而研究其他直接有用之諸學科，收事半功倍之效，尤不可不知也。

若人類處於木星之中，常爲雲蔽，而不知有星辰，則人類所蒙之害當爲何如乎？吾人居此陰霾之下，將不復得見日光，自不待言。試思吾人棲息於此，其狀況尙能如吾人之今日耶？

燦爛之星光不特照耀於吾人之肉眼，且輝映於吾人之精神。今試言其作用。

數千年前地球上人類之狀況與今日人類之狀況迥不相侔，人所共知也。當太古時代，混沌初開，人類孤立於大自然界之中，一任其低昂顛倒。所見所聞，皆不可思議。遂以爲宇宙之運行變幻無常，形形色色，無非神靈之作用。故欲左右世界，惟有迎合此神靈之意而已。縱令迎合不得其道，歸於失敗，亦必再接再厲，儼如請願人雖嚴被拒絕，仍不忘其請願也。

然吾人今日則命令自然，而非祈禱自然。蓋吾人已窺見其秘密之一斑，且蒸蒸日上。進時發見其新秘密故也。吾人所用以命令自然者，卽法則是也。此法則乃自然之物，自然不能捨去之。吾人不求自然變易其法則，反自進而服從其法則。質言之，『吾人欲命令自然，惟有服從自然始能之耳。』

由昔日狀況變至今日狀況，吾人之精神不可不經歷若干變化。若如前所假定，日處於雲霧之中，而不受星辰之指導，吾恐人類之進步未有如是之速也。

以法則之存在教吾人者，第一卽天文學。初注意觀察天空之雅典人，卽已知此等恆河沙數之光點，並非烏合，實有如紀律森嚴之軍隊。其紀律爲何，彼等固未之知，然仰觀燦爛之衆星，見其

調和之美，已足以知其爲有秩序者矣。即僅知此，進步已不可名言。其後漸知此規則者，則希巴魯克 (Hipparchus)，托勒密 (Ptolemée)，哥白尼 (Copernic)，刻卜勒 (Kepler) 諸人，至牛頓 (Newton) 出面唱萬有引力之法則，吾人遂得一於自然法中最古，最精，最簡單，最普遍之法則，至於今日猶莫之能易焉。

仰觀如此，俯察亦然。地球上之事物，自皮相視之，雖似毫無秩序，然吾人以研究天空之所得推而廣之，即能發見其有調和存焉。惟地球上之世界，雖亦有條不紊，遵從不變之法則，然其法則繁難愈甚，驟視之多似矛盾，若吾人不先習於天空之有序，必以地球上之事物爲混沌，爲偶然，爲變幻無常而已。縱令吾人不知有星，固未嘗無大膽之人，試求豫知物質的自然之現象。然必屢遭失敗，爲俗子所竊笑。卽在今日，氣象學者尙時時不免於誤，而受人訕笑也。

若非天文學家成功於前，以堅吾人之信念，則物理學家因屢遭喪敗，亦必被世人排斥，而終陷於意氣銷沈之境。幸有天文學者所成就之事業，明示自然實依法則而行。故彼等得以不疑，惟力探其法則爲何物即可。但能忍耐，終必有探得之一日。卽有懷疑者，彼等尙有求其假以時日之

權利也。

天文學者，不僅啟迪吾人知有法則，並告吾人不可違背法則，不可改變法則，嚮使吾人僅知地上之現象，則欲悟此理，尚須悠久之時日也。法則之精密無限，吾人所知者不過其一斑，所陳述者不過其大略而已。此事亦由天文學始知之。即昔日最富於科學的精神之亞里士多德，尚不免以自然現象爲偶然，深信自然法不過能規定地上現象之大體性質。此種謬見，所以阻礙吾人，使不得理解自然者，實非淺鮮。而吾人所以不至爲此謬見所拘者，則由於天文學上之豫言漸演漸精故也。

然此等法則非如人類制定之法律因地而殊者歟？於宇宙之一隅（例如於地球上或於太陽系內）視爲真理者，若移於遠隔之處，能保其不爲虛僞乎？且此等法則假令因地而變，能保其不因時而變乎？今日如是者，明日尚可期其亦如是耶？解答此等疑問者，亦天文學也。吾人觀察雙星，知其軌道均爲圓錐曲線，由是可知望遠鏡所能見及者皆在牛頓法則之治下，未有能踰出其範圍者也。

且此法則之簡單，亦吾人所宜深留意之一事。自然現象縱極紛紜，然莫不盡於此法則之數語之內。卽不解天體力學者，見論此學之書，篇幅何等簡短，亦足以悟及其中緣故，而思及地上現象雖複雜，亦必有其隱晦未見之簡單法則以包羅之也。

自然法之一般性質爲何，吾人已由天文學知之矣。今更就此性質中最精微而重要之一論之。

古之學者，或以宇宙之秩序爲永久不變之形式，或以之爲終極之理想，世界漸演漸近，終必有達此理想之一日。如畢塔哥拉斯 (Pythagoras)，如伯拉圖 (Plato)，如亞里斯多德等皆是。卽刻卜勒當研究遊星對於太陽之距離是否與對於五正多面體有關係之時，亦具有此成見在胸。此種思想雖非無稽，然自然之成立實不如此，此所以窮察冥追，依然毫無效果也。迨至牛頓，始明示吾人以法則，不過表世界現在之狀態與少後於現在之狀態有何不得不然之關係。牛頓以後所發見之法則，亦無不如是。約而言之，法則者，微分方程式而已。吾人所以得此法則之模範者，實受天文學之賜。若無天文學，則吾人恐尙彷徨歧路，無所適從也。

教吾人以外觀爲不可信者，亦惟天文學。何則？吾人棲息之大地，吾人深信爲不動，太陽則吾人深信爲動者也。當哥白尼證明地動日靜之時，吾人始知感官之朦蔽吾人，而自感官之直接與件所得之樸素推論實不足信。此思想之所以戰捷，固由努力而來，然此思想一經戰捷以後，凡以感覺爲據之一切成見皆爲之動搖。此新武器之威力爲何如，可以想見矣。

古人以爲人爲萬物之靈，萬物皆爲人而設。此種謬想，入人最深，有牢不可拔之勢，但一思及科學思想與此謬想相爭戰之歷史，卽足以知之。然此謬想一日不除，真理一日不顯，吾人長此爲皮相之見所蔽而已。故吾人欲理解自然，須超然立於吾身之外，自種種相異之見地觀察之始可。然以萬事皆與己相關者，安能超然立於吾身之外乎？爲吾人解此迷者，卽彼明示吾人以地球爲太陽系中最小遊星之一，太陽系亦不過茫茫宇宙之一點之天文學家也。

又吾人能對於大數而不存驚怪之念者，亦天文學有以教之。吾人欲知天象，固不可不有此習慣，卽欲知地球，亦不可不有此習慣也。

試執古之希臘人而告之曰，赤色之光每秒振動回數爲百萬之四億倍，彼等必以爲狂人之

言掩耳卻走矣。然在今日，吾人已知思惟事物之大小，有時須超乎感官之外，故不以此假說爲妄誕，此則吾人之祖先所未能也。惟其不能放思，故探求真理時常遭不自知之困難，此種困難而今無矣。然吾人何由而能得比乎？曰：蓋由吾人知天之無限，知太陽與地球相距一億五千萬公里，最近恆星與地球相距更爲其數十萬倍故也。吾人既已養成思維無限大物之習慣，故亦能想像無限小物。由此教育，吾人之慧眼卽能直視真理，不爲所惑，猶鷺眼之不爲陽光所眩也。

吾人所以能理解自然，實受天文學之賜。若常處陰霾之下，不見星辰，亦將永不知地球爲何物，地上所見，無非混亂無序之狀而已。既不知有地球，則亦不知所以治之之法。余爲此言，非放言也。然以此之故，擁護天文學，猶不過爲專尚實用之人設身處地言之，非余之所見也。余所以贊譽實業之成功，無非爲其能使吾人輕減物質上之憂慮，得以自由研究自然而已。故余不謂科學以機械之製法教吾人，故科學甚要，余將謂機械能爲吾人作工，使吾人多得閒暇以研究科學，故機械有用。此兩種見解決無矛盾。若人之祈嚮不專爲己，則持前說者亦將自來加入吾說也。

不知何書曾云孔德 (Auguste Comte) 雖研究太陽之成分，然其智識無益於社會學，故其

研究亦無用。是真可謂淺見矣。吾人所以能脫離神學的見地，而入於實證論的見地者，非天文學爲之耶？此乃過去之事實，亦彼人之所知者；然彼獨不能鑒於過去之成就，以豫測將來天文學之效用，何歟？且物理的天文學今已見效，此不過甫生之學，其前途真不可限量也。

首倡實證論者謂太陽之本性決無由認識。然由物理的天文學之研究，吾人竟已認識之，且在吾人所居之地上而至今尙未爲吾人發見之物體，亦先於太陽中發見之矣。例如與氫(Hydrogen)同輕之氣體氦(Helium)是也。卽此一例，已足以證明孔德研究之功。更就分光術論之，吾人由此得來之智識，尤爲珍貴。苟無此術，吾人亦安知遙遙星上所存在之物質，亦與吾人地球上所存在之物質同耶？吾人常疑地球上之元素，由化學者之所謂原子結合而成，而化學者之所謂原子，又自更小之原子結合而成。此種結合，或亦偶然。若在宇宙之他部分，安知不因別種偶然之結合而生異種之組織，然由今日之分光術，已證明無此事。吾人由此始知化學之法則乃自然之普遍的法則，吾人所以生於地上，決非偶然也。

然或有人曰：天文學已舉其所有，畀之其他之科學，天界已將研究地上現象之方法畀之吾

人，吾人今後即永處陰雲之下，亦不妨矣。若此言可通，則托勒密時代即應有是言。當時之人誰不信其無所不知，而實無所知也。

星辰乃宏廓之實驗室，巨大之坩堝，決非化學家夢想所能及，其溫度之高，決非吾人所能得。惟有一事不滿吾人之意者，即過遠是也。然望遠鏡能使之與吾人近。吾人由此，可以窺見星辰上物質之情況。物理學者與化學者之幸福爲何如乎？

天界之物質狀態不一，有爲莫知所自之光所照之稀薄氣體者，有爲白熱之星者，有爲與地球極相近而又與地球極相異之遊星者。

將來生命之道，星辰亦將有以詔示吾人，亦不可知。是言有類癡人之說夢，余亦不知其如何始能至此，然百年前之星辰化學非亦癡人之夢耶？

縱令吾人眼界有限，然幸福之希望猶存。過去之所得既已不少，則未來之所得將有倍於過去者，可以豫期也。

要之，占星術之信仰利於人類者幾何，世人未之知也。刻卜勒 (Kepler) 與泰旭布刺厄 (Ty-

cho Brube)之所以能生活者，蓋以星之交會之豫言，售之無學之王侯故也。若諸王侯不迷信占星，則吾人至今恐尚信自然爲昏亂之物，而依然生存於不識不知之裏矣。

第七章 數學的物理學之歷史

物理學之過去與將來

數學物理學之現狀如何？其所引出之問題如何？其進行之路方變未已乎？其趨嚮與方法，自十年後之後起者視之，猶能與吾人今日所見者相契合乎？抑不待吾人身後即將見根本的改革乎？此等問題，皆吾人研究之初所不能忘者也。

然問者雖易，答者實難。十九世紀時代亦曾提及此等問題，百年前之碩學，自以爲已能答之矣；然自今日思之，當時學者之言，不值今日吾人之一笑。苟思及此，吾人尙敢以豫言者自命乎？

當時學者豫言之際，或亦自信其勇，而今日吾人自實際之局勢觀之，則非勇而實怯；故讀者

不得以豫言責望於余也。

余雖不欲學輕劑之醫生，信口而談未來之病勢，然謹慎之診斷，亦非余所能辭。余以爲數學的物理學，今已瀕於危亡，改革之機，不久即當熟矣。然人雖重病，尙不至死，不足懼也。且徵之過去之歷史，此危亡之兆，非因實言。欲明此故，不可不由今思昔。故余先將過去之經歷，簡略言之如次。

中心力之物理學 (La Physique des forces centrales)

數學的物理學實發源於天體力學，人所共知者也。後者發達於十八世紀之終，前者即誕生於後者完全發達之時。此子初生之際，酷肖其母，實有足令人驚異者。

天界極廣，天體之距離亦極遠，故自吾人視之，天體猶之質點。此等質點相引之力與其距離之自乘爲逆比例；惟有此力，部勒一切天體之運動。假令吾人之感覺極敏，可以洞見物理學所研究之物體之隱微，則吾人在地上所見之光景，亦將與天文學者之所見無以異也。詳言之，吾人即在地上亦可得見距離較之容積極大而運行之軌道極整之質點。此無窮微小之星辰是即原子。原子亦如眞星，或相牽引，或相排斥；而在連結兩原子之直線上相引相斥之力，惟因距離而定。換

言之，此力乃距離之函數，惟其法則未必與牛頓之引力法則相同而已。然即不相同，亦極相似；不過指數或非²（表與自乘爲逆比例），亦未可知。苟易其指數，則一切物理現象之種類，千變萬化之性質與感覺，環繞吾人之色音之世界，一言以蔽之，全自然界皆由此出矣。

是爲最單純最幼稚之思想。至於指數應取何值始能說明一切事實，只須研究種種事例即可。是亦當時人之所推測者也。例如拉普拉斯（Laplace）準此軌範以建設其美觀之毛細管現象論，以之爲引力或彼所謂一般重力之一特例，而載之天體力學五卷之中，人亦無有以爲怪者。其後又有布利吾（Briot）證明能質原子（Les atomes d'éther）相引之力，與距離之六乘爲反比例，遂自信已洞見光學之秘密。即馬克斯維耳（Maxwell）亦曾謂如此原子相斥之力與距離之五乘爲逆比例，皆其明證。無論以 -1 代 -2 ，或以 -1 代 -6 ，然皆不過變更指數而已。

當時之理論中惟有一例外，即傅立葉（Fourier）關於熱之傳導之理論是也。其理論中，亦有相隔甚遠，而互相施受其作用之原子互送其熱，然此等原子毫不運動亦不相引。故自當時之人視之，即自傅立葉本人視之，其理論不過一不完全之假定而已。

如此思想亦非毫無所長。在當時固曾深入人心，即在今日猶有未能決然捨去者。彼等深知惟有分解感覺所得之複雜組織，始能達到物之終極要素，途中之階段，非一步一步進行不可，越階而趨，必蹈古人之覆轍。彼等又深信達到此終極要素之時，天體之單純，即在地球上亦可發見也。

此種見解實已得用。物理學之法則之根本概念爲何，吾人所以了然者，即此見解之功也。蓋古之人以爲法則乃內的調和，即謂之爲靜的，不變的，亦無不可。又有謂法則爲自然力求模倣之典型者。然自吾人視之，法則已非如是，法則所表者，乃今日之現象與明日之現象間之不變關係，約而言之，即微分方程式也。

是實爲物理學的法則之理想的形態，牛頓法則即用此形式表出之第一法則。此種形式所以能在物理學中保持不變者，則由於物理學者力求模倣牛頓之法則，模倣天體力學所致。是即余於前六章所欲力說之思想也。

雖然，中心力之思想，今已不足應吾人之要求矣。是即余所謂危機之一。

於是吾人不得不捨去舊日之見解，凡涉及宇宙之構造之隱微，暫置之不問，亦不欲剖解此宏大組織之各部分，亦不欲分析所以使之動之各力；惟以某一般的原理為指導，即已足矣。譬如有一機器當前，吾人僅見其首車輪與尾車輪，然運動自首傳達至尾之作用及其機構皆隱於內部，無由得窺。故其運動是否由齒輪傳達，或由革帶傳達，或由曲柄傳達，或由其他之裝置傳達，皆非吾人之所知。若然，則吾人非將此機器一一剖解，即不能知其作用乎？是決不然。能 (method) 不生不滅之原理，即足以使吾人注意其最重要處也。吾人既已見其首車輪與尾車輪，即易知尾車輪之回轉較首車輪遲十次；而由此遂可斷定尾車輪所受之偶力，較首輪所受之偶力大十倍，而此二偶力互為均衡。因之，即不必深入於此均衡之組織，而察其內部之力如何平均，但能知其不能不平均，即已足矣。

能不生不滅之原理對於宇宙全體亦然。宇宙亦一機器也。其構造之複雜，決非工業上之機器所能比。其各部分皆深藏而不可得見。然吾人僅觀察其可見之運動，借此原理之助即可推出

一種斷論，無論其內部之構造如何，均無不適用也。

能不生不滅之原理，即邁爾 (Mayer) 之原理，其重要為何如，於此可見。然原理不僅此也，此外尚有種種原理，其功用亦與此同，今述之如次。

加諾 (Carnot) 之原理，即能之衰頹之原理。

牛頓之原理，即原動反動相等之原理。

相對性之原理 據此原理所說，物理現象之法則，無論對於靜止之觀察者，或對於等速進行運動之觀察者，皆同一不變。故吾人無法可以決定吾身此時是否作此運動，且亦決不能有此法也。

質量不生不滅之原理，即拉瓦節 (Lavoisier) 之原理。

以余之意，於此等原理之外，尚欲加一最小作用之原理。

若用此等一般的原理於物理的現象，則吾人已足知吾人所欲知之事。此新數學的物理學之最顯著之實例，即馬克斯維耳之光之電磁說是也。夫能質 (ether) 為何？其分子之排列如何？

能質之分子相吸引乎相排斥乎？皆非吾人所知。然吾人知煤質能傳達光的作用，又能傳達電的作用；且知其傳達之狀須遵從力學一般的原理。由此吾人已足以確定電磁場之方程式矣。

此等原理，皆普遍化的經驗之結果。然因其化為普遍，故愈見其確實。蓋原理愈普遍，則受試驗之機會愈多。試驗之次數屢增，即終成無可容疑之真理矣。

舊物理學之功用

原理的物理學乃吾人所欲考察之數學的物理學之第二階段。然則第一階段已成廢物乎？吾人能謂此學五十年間盡入歧路乎？吾人能謂當時累積之勞力，偶因一念之差，終成千里之謬，遂惟有付之不聞不問乎？曰：否。若無第一階段，則第二階段亦無由生。中心力之假定實包括一切之原理；能之不生不滅，質量之不生不滅，原動反動之相等，以及最小作用之原理，無非此假定之必然的結果而已。且此等原理貌似定理，不似經驗的事實；而昔日此等原理之陳述，不知何故較今日之形式更為精密，而又不如今日之形式之普遍也。

吾人由舊時之物理學，始漸知種種原理；初雖有種種假幕以蔽之，終為吾人所發見。吾人以

之與經驗之與件相較，遂知當如何變更其陳述，始能與之適合。由是而原理遂愈推廣，愈堅定矣。原理之所以漸成經驗的事實者，即經此程序而來。而其結果遂令中心力之思想成爲無用之長物，甚至爲有害之障礙。蓋以中心力之思想爲根據，則原理亦不得不與之同帶假說的性質故也。由是觀之，舊箱實富於彈性，今又增大，未嘗毀也。吾人祖父之造此箱，亦決非徒勞。彼等所苦心經營之形迹，吾人於今日之物理學猶能歷歷見之。

第八章 數學的物理學現今之危機

新危機

時至今日，吾人已將進第三階段乎？第二之新危機已至乎？吾人以爲一切研究之基礎之原理亦漸將崩解乎？此等疑問，發起已數年矣。

凡聞此言者，莫不憶及鐳 (radium)。鐳實現代物理學之大革命家也。余所欲言者，亦即此

事，然亦不僅此事。能不生不滅之原理，今已成爲懸題，固不待論，卽其他之原理亦漸瀕於危，讀者試觀以下所述，卽當知之。

加諾之原理

請先論加諾之原理。惟此一原理非自中心力之假說直接得來。且此原理與中心力之假說雖非正相反對，然欲調停於二者之間，尙非牽強不可。若物理現象皆本於原子之運動，而原子之交相吸引，因其相隔之距離而定，則此等現象，似無不可以逆行。若初速度反轉，則此等原子常受同力循其軌道而逆轉；猶如地球運動之初，一切條件若係相反，則地球必循今日之軌道而逆行也。故一物理現象若爲可能，則其反對之現象亦當爲可能。時間之流當亦可以追溯矣。然自然界之現象，則實與此相反。是卽加諾原理之所教也。此原理云：熱能自高溫度之物體移於低溫度之物體，然溫度平均以後，卽不能逆行，而再生溫度之差。運動能因摩擦盡變爲熱，然熱不能盡變爲運動。此一見似相矛盾之原理將何以解釋之乎？世界之所以常趨於一者，非因初甚不同，至其終極，力求化不同爲同而起也。乃因偶然一動終相混合而起。若有能分別一切要素之慧眼，將見不

同之狀，前後皆同。一切分子決非自維持其本性而仿效其鄰之分子。然混合愈密，吾人粗疎之感覺愈不能辨其異。溫度平均以後，決不能再返其不平均之舊狀，即由於此。

若以葡萄酒一滴，滴入一杯水中，無論液之內部運動遵何法則，立見全體皆成赤色。後無論如何振盪，亦不能再使葡萄酒與水分離。此種不可逆行的物理現象，次所舉例亦爲其一模型。即吾人以一粒大麥藏匿於一堆小麥粒中，其事甚易，然欲再取出此粒大麥，則事實上不可能也。此等事例，馬克斯維耳與波爾茲滿 (Boltzmann) 皆已詳言之。然搜羅之於一書中，釋之最明者莫如著統計的力學原理 (Les Principes de Mécanique Statistique) 之季布茲 (Gibbs)。惟其書深奧難解，讀者無多，則一憾事也。

自此見地觀之，加諾之原理甚不完全，直不過承認吾人之感覺有限而已。因吾人之視力不精，故不能區別要素之混合，因吾人之觸覺不敏，故不能使之分離。若有一魔如馬克斯維耳所想像者，能將分子一一取而出之，則不難使世界倒行也。若然，則世界能自倒行乎？曰：非不能也，不過不可期耳。若欲待此運會之來，不知將俟幾百萬年後。故此事僅理論上有之，不足以勞吾輩杞

人之憂，而加諾之原理依然保有其實際之價值也。然自某生物學家發見顯微鏡下之小物常蠢動不止，事情又一變矣。此種蠢動，名曰伯勞恩運動 (le mouvement brownien)。伯勞恩 (Brown) 初發見此現象時，尚信爲生活的現象。後更以無生物試驗，見其活動之狀如前，遂以其研究讓之物理學者矣。不幸而物理學者漠然視之，只自立一說以釋之曰，顯微鏡下之物體爲光所集射，於是因光生熱，因熱生溫度之差，液中遂起內流，而物體遂爲液流所激，而蠢動不止。此說一出，久無人更過問此事矣。

其後古一 (Gouy) 更精思詳審，始知此說之不足信。據彼實驗之結果，物體愈微，運動愈盛；且與集光之法全無關係。由是言之，是運動不仰給於外部之能源 (Source extérieure d'énergie) 亦能永續，且常新自發生也。是果足信耶？能不生不滅之原理，吾人自不能輕棄。然有時運動因摩擦而變爲熱，又有熱變爲運動，而其運動又無休息，故更無損失之物，此實爲吾人所目覩，而與加諾之原理相反者也。若然，則已不必待馬克斯維耳之魔，只用一顯微鏡亦可以得見世界之倒行矣。若物體甚大 (例如一耗 millimetre)，則此物體雖四方均受運動原子之馳突，然衝突之數既

多，依信率論上偶然之法則 (La loi du hasard)，彼此均衡，物體仍不運動。然物體若更微，則所受之衝突少，未必盡能均衡，而震動遂起矣。因此現象，吾人之原理亦岌岌不能自存。

相對性原理

相對性原理，不但爲日常經驗所確定，爲中心力之假說之必然的歸結，且爲常識所不能抗拒之要求也。然此原理，今亦漸瀕於危矣。今試就二帶電體設想。此二帶電體外觀雖似靜止，然實隨地球運動。按羅蘭 (Rowland) 之說，一電荷運動與電流同功。故此二帶電體無異兩平行電流，彼此當互相牽引。若測其相引之力，即可由此測定地球之速率，而此速率非地球對於太陽或恆星運動之速率，乃地球之絕對的速率也。

或曰，此速率非絕對的速率，乃地球對於能質之速率。然此說縱不爲妄，實亦無益。蓋由此原理，已不能再事推求，惟其無可攻，故亦無所利也。無論何物，但使能測，即非絕對的速率，若云非對於能質 (ether) 之速率，吾人尙得新想一種充滿空間之未知流體，而謂其速率乃對於此流體之速率也。

吾人之經驗，常欲打破相對性原理之此種解釋。凡欲測定地球對於能質之速率者，無不得消極的結果。此時實驗物理學對於此原理，較之數學的物理學爲更忠矣。理論家爲欲調和一般之見解，常思棄此原理，然經驗則常牢守之而不失。實驗方法已不知幾經變遷，至邁克爾森（Michelson）之手，愈極其精微，然其結果依然無效。欲說明此矛盾，今日之數學的物理學者不知已費盡若干心血也。

彼等所成之業，良非易易。羅倫志（Lorentz）之解釋，乃由假說之重疊而成者也。

最巧妙之思想爲地方時（*De temps local*）。設有二人以光之信號整理其時鐘。光之傳達須費工夫，故彼等交換信號時，亦不得不用往返互證之法。例如B地得A地之信號時，B地時鐘所示之時刻與A地發信號時其時鐘所示之時刻不相同。若A地發信號時，其時鐘之針指零，則B地得信號時，B之時鐘當指 t 。即傳光所需之時間也。然欲知光自A至B所需之時間果係 t 與否，B之時鐘指零時，須自B地發信號與A地，若A地得此信號時，其時鐘恰指 t ，則兩地之時鐘遂相合矣。

然此二時鐘之相合，須兩地皆靜止不動始可。不然，則光傳達之時間兩方不等。何則？若假定自B地發來之光A與之相近，則自A地發還之光B當與之相遠；因之，A與B之時鐘所示者，非真時刻，乃地方時。一地之時鐘常較他一地爲遲。然吾人無由知其遲，故亦不妨。例如A地發生之一切現象雖遲，然遲之程度皆相等，故觀察者之時鐘亦遲，不能查出現象之遲與否也。是以自己係絕對靜止，抑係運動，皆無從得知，一如相對性原理所言。

然僅此猶未足也。尚須有補助之假說。其假說維何？即運動之物體。其運動方向之長常一樣收縮是也。例如地球之運動方向之直徑因運動縮短二億分之一，而他之直徑則保持其原有之長。由此假說，最後之微小誤差始得補正。更就力言之，又有一假說焉。無論力之起原爲何，或爲重力，或爲彈力，在等速進行運動之世界中常減少，而減少之率常一定。惟減少者乃與進行方向垂直之分力，至於與進行方向平行之分力，則毫無變化。今更就二帶電體之例思之，此二物體實互相拒斥。然若二者皆作等速進行運動，則二者無異方向相同之二平行電流，當互相牽引矣。

故此電力學的引力爲靜電的斥力所抵消，而其抵消之結果，全斥力遂較之二物體靜止時

之斥力小。吾人欲測定此斥力，須以他力與之平衡，然一切他力皆減少，且減少之率皆相等，吾人雖欲知之，無從得而知之也。是以一切秩序依然如恆。然吾人之疑卽已渙然冰釋乎？若能不用光而用其他信號，且其傳達之速率亦不與光等，又將如何耶？若先以光之信號整理兩地之時鐘，後復以此新信號檢查之，則由此或可決定其差表示兩地共同之等速進行運動，亦未可知。若從拉普拉斯之說，假定萬有引力傳達之速率，較光大百萬倍，則此種信號亦非不可想像也。

由是觀之，相對性原理防禦雖勇，然防禦愈勇，攻擊愈烈矣。

牛頓之原理

今更述牛頓之原動與反動相等之原理。是原理與以上所述關係甚密，二者之中，其一危，則其他亦不能自保。故吾人於此再見同一之困難，不足怪也。

此原理所以不得不讓位於新理論之故，余前已言之矣。

據羅倫志之理論，電氣現象乃因電子在能質(ether)中運動而起。電子周圍之能質，因電子之運動而生擾亂。此擾亂以光之速率傳於四方。若一旦波及于其他靜止電子周圍之能質，則此

等電子亦起運動。故電子互施受其作用；惟其作用非直接的，乃由能質之媒介而起。若觀察者只知物質之運動，——即電子之運動，——不知能質之運動，則所謂原動與反動相抵之語，尙得於此種情況之下存在乎？縱令二者之平衡甚精，然亦決非同時。擾亂係以有限之速率傳於四方，故第一電子已靜止後，第二電子始動；換言之，第二電子須遲若干時後，始受第一電子之作用也。然此時第一電子周圍之物已盡歸於靜，故此時第一電子亦未受反作用無疑。

若更就事實研究，則此事當愈見精密。例如無線電信所用之赫芝振動子 (excitateur de Hertz) 發能 (energie) 於四方。若用拋物體鏡，則可將發出之能集於一方向。自理論上言之，振動子如大礮，而發射之能則如礮彈，振動子發射能時，宛如大礮發彈而後退。然此實與牛頓之原理相反。何則？振動子所發射者，乃能而非物質，故亦無質量故也。又燈臺有反射鏡時，燈臺所發之光均向一方向射出，而光既係電磁場之擾亂，燈臺向一方向發光時，燈臺亦不得不後退。所以生此後退之力爲何？即所謂馬克斯維耳巴爾脫底之壓 (la pression Maxwell-Barthodi) 是也。因此壓極小，故雖極敏之輻射計 (Radiometer)，亦不易覺察，然其存在則足以證之也。

自振動子射出之能若落於受器，則受器即受機械的衝動，宛如表示振動子之反動互相抵償者。反動或與原動相等，然反動決非與原動同時。受器雖前進，然受器前進之時非振動子後退之時。若『能』不遇受器而傳佈於大空中，則未必互相抵償也。

或曰，振動子與受器既相隔若干距離，則擾亂自振動子達於受器所經過之空間，不僅有能質，且有空氣，又或有一種微細可衡之流體如瀰漫於遊星與遊星之間者，亦未可知；故此物質當能質傳到之際，與受器同受衝動，而擾亂一去，即向後退云。若此言果實，則牛頓之原理固可安然無恙，無如此言之非真也。當能傳播之際，若爲物質所束縛，則運動之物質當與光俱動。然菲左 (Fizeau) 已證明空氣不如是，而邁克爾森 (Michelson) 與摩利 (Morley) 更以精密之實驗確定之矣。吾人雖又可以假定物質之運動能與能質之運動恰相抵消，然由此引出之困難仍與前同。若將原理作如是解，則無論可視的運動爲何，吾人均能假想一種假說的運動與之相抵消，由一切現象均可說明。然吾人雖能說明已有之事，不能豫知未來之事。因能說明一切，反不容選擇異種之假說，直歸於無用而已。

且就能質之運動所設之假定，亦甚不滿足。若帶電二倍，則種種能質原子之速率亦二倍，此自然之假定也。然互相抵消時能質之平均速率實非四倍不可。

故余昔日常信凡理論之歸結有與牛頓之原理相抵觸者，他日必當棄置，然最近實驗自鐳 (radium) 射出之電子，有以知其不然矣。

拉瓦節 (Lavoisier) 之原理

余今將更論拉瓦節之質量不生不滅之原理。若此原理動搖，則力學亦因之動搖明也。然今日學者之中，疑此原理不真者實已不少。彼等以爲此原理之所以真，蓋由於力學所論之物體之速率皆不甚大。若其速率與光之速率相近，則此原理已不復可用。且速率與光相近之動體，今日已見之，非徒想像而已也。其物爲何？即正極線與鐳之放射線是。自正極線與鐳之放射線射出之微粒，爲陽電粒或陰電子。其速率雖不過光速率之三分之一或十分之一，然實可與光相提並論也。

此等放射線經過電場或磁場時，其路即曲。比較其曲度，即可測定荷電對質量之比。然因其

速率與光之速率相近，不加修正不能與實驗符合。此等放射微粒爲帶電體，故欲變位，必擾及能質。換言之，非戰勝分子自己之慣性與能質之慣性，不能使之動也。故吾人所測定之質量（或外觀上之質量）實由二種質量而成，一爲分子之真質量或機械的質量，一爲電力學的質量，即表能質之慣性者也。

據亞伯拉罕 (Abraham) 之計算與考富曼 (Kaufmann) 之實驗，其機械的質量爲零，電子之質量全爲電力學的。因此吾人遂不得不變質量之定義矣。機械的質量與電力學的質量，已非吾人所能區別，何則？若欲強爲區別，則前者將盡化爲烏有。質量既爲電力學的慣性，則質量即不能爲一定不變之物。速率變時質量亦變，且方向不同時質量亦不同。運動體之速率若大，則其運動方向之慣性與直角方向之慣性迥異，故自其運動方向阻此物體進行或助之進行之力，與自其直角方向橫曳之之力亦迥異也。

然吾人尙可強爲辨解曰：物質之終極的要素爲帶電微粒，微粒之電有陽有陰。陰電子雖無質量，然據今日之所知陽電粒似較陰電子甚大。故陽電粒於電力學的質量之外，尙有真之機械

的質量亦未可知。若然則物體之真質量乃此等陽電粒之機械的質量之總和，陰電子不與焉。以此爲質量之定義，則舊日之質量之定義，依然不必變更也。

所可惜者，此種辨解今亦不能自圓其說矣。吾人試回想前節述相對性原理時，慘淡經營，力求補救者，不獨此原理，且有邁克爾森實驗所得之確證也。如前所述，羅倫志爲欲說明邁克爾森之結果，遂不得不假定等速進行運動之際，凡力皆減少，且減少之率皆相等。此假定若能成立，則不獨實際之力爲然，慣性之力當亦在內。故羅倫志嘗曰：凡陽電粒之質量，當其進行運動之時，亦應減少，而減少之率與電磁的質量同云。

由是觀之，機械的質量與電力學的質量皆不得不依據同一法則變化，決無不變之理明矣。拉瓦節之原理，既遭破壞，牛頓之原理亦當與之同命，自不待言。牛頓之原理表孤立系之重心在一直線上運動。然既無不變之質量，當亦不復有重心。且重心爲何，亦非吾人之所知。故余曰，正極線之實驗實證明牛頓之原理非絕對的真，而羅倫志之疑信非妄也。

此等結果既已確定，則新力學自當代舊力學而起。新力學之特徵，在標明物體運動之速率

不能超過光之速率；猶熱力學標明物體之溫度不能降至絕對零度以下。蓋物體運動愈速，慣性愈增，其速率達於光之速率時，其慣性已成無窮大故也。即對於不自知其運動之觀察者，物體之外觀上之速率亦當以此爲限。惟吾人須牢記此觀察者所用之時鐘與靜止之觀察者所用之時鐘不同；其時鐘所示之時乃地方時。苟忘此事，則矛盾之論生矣。

吾人尙有一疑問。曰：若無質量，則牛頓之法則將如何耶？惟余只提出此問即止，不欲更事穿鑿也。

質量之意義有二：一爲慣性之係數，一爲牛頓導入引力定律之因數即所謂引力的質量是也。若慣性之係數非不變，則引力的質量猶能不變乎？余之所謂疑問，即此是已。

邁爾 (Mayer) 之原理

迄今未動者惟有能不生不滅之原理。此原理之生命似較一切原理猶長。然至於今日，即此原理亦不無可議矣。爲其原因之事實，較之以前所述，愈出愈奇，人或未之忘也。自白克勒爾 (Bequerel) 研究氣體中放電問題以來，居禮 (Curie) 夫妻發見鐳以後，人皆認一切放射物質實

爲放射無盡之源；其作用可以持之數月數年之間，猶無變化，是已與能之原理相背馳矣。此等放射線，即能相繼自同一鐳片射出，源源不絕。昔時人皆以其能量甚小不能測定，遂置之不問，及居禮欲以熱量計測鐳，始知其發生之熱量實未可輕視也。

說明此現象之提案固不一而足，然不能以其數之多而謂爲可喜也。苟一說不能戰勝其他一切之說，則此說亦不得稱爲盡善盡美。然此等諸說之中，其一似爲最優，故吾人欲得此祕密之鍵，亦非奢望也。

拉姆則 (Ramsey) 曾欲證明鐳可以變，且雖有多量之能，然其量實非無盡。據彼所推測，鐳變化時發生之熱較之一切已知之變化多至百萬倍；而鐳變盡之期需一千二百五十年。其期雖短，然數世紀間，仍保持其現狀，非俟至此日來時，吾人之疑仍未釋也。

第九章 數學的物理學之將來

原則與經驗

如前所述，原則崩裂之時，果有何物以維持之乎？是則爲最小作用律，吾人迄今尙未言論及之也。拉毛亞 (Larmor) 實信此原則較之他原則長久。實則此原則比他之原則甚爲不定，故覺其較爲普通也。此原則一般的破裂時，數學的物理學，果取如何態度乎？吾人立於紛擾之前，先問如是崩裂，究竟是否合於事實。然對於原則所有以上之危險，只現於微小物之範圍以內。吾人欲觀伯郎運動，則須顯微鏡。電子非常微小，銑亦得之極難，一次未有能得其數爲公絲 (milligram) 以上者。然則吾人對於此等能見之無限小之外吾人所不能見者，是否亦有他無限小之物存在，而與之平衡？是則當然成立之疑問也。

此時尙有豫備的質問，卽外觀上所欲解決者，似除經驗之外，別無他也。所以吾人此時只須詢之實驗家，謂彼等論爭至終極的決定而止，其間卽有疑難不安之點，亦蔑視之。彼等仍視爲原則無疵，沈靜而繼續研究之歟？不特此也，吾人於此等原則，所能確實適用之範圍內尙有必須研究之事項多端。在此疑惑之間，吾人之研究，仍可前行無礙也。

解析家之職分

上列之疑問固也。然吾人無論何事，常謂其不能使解析學脫離之者，果爲真實乎？提出此疑問者，不僅爲實驗物理學，卽數學的物理學，亦與有力焉。實驗家發見銚素發射能力，而理論家則明示運動煤質中光之傳播時所起之難問也。若無理論家，恐無由知此困難也。理論家盡竭全力，使吾人陷於疑惑之境，更俾吾人要求其重復脫此困難者，乃當然之事。但彼等批判余今所略述之新說，且對於任何原則，加以救護時，希望其公明的努力而未有廢棄之也。於此方面，理論家之所得者，今試說明之如次：

第一對於運動物體之電氣力學，不可不完成其更滿足之理論。此處已如余前所明示，其困難錯綜陳列於前，吾人雖堆積如何之假說，終未能將所有原則，同時滿足也。時至今日，只有犧牲某原則而救護他原則而已。惟期達於更滿足之希望，則尙未完全消失。吾人採羅倫志之理論，以運動物體向於各方向漸次變形，則猶可以調和的整理一切也。

設使不假定運動物體，收縮於運動之方向，不問其物體之性質及活動之力如何，此收縮常

爲同一。吾人果能作一較簡單較自然之假說乎？例如以太對於其所貫屬之物質運動時，生有變化，其結果可想像其不以同速度傳播攪亂於各方向也。如此則以太無論與物之運動同方向或異方向，皆對於平行攪亂傳播以速；而對於垂直攪亂，則傳播以遲。故其波面已不爲球面，而成橢圓體之面。（蓋有怪長怪短之故）由此可知吾人實無假定物體之異常收縮之必要也。

此不過略舉一例而已。而吾人所得而變更者，實有無限之方法也。

光行差 (aberration) 與星學 (以望遠鏡視星之位置，因光之速度及地球運動之故，所生星之真位置與視位置之差，名光行差) 關於此點可知星學他日，尙能供給材料於吾人。其初雖起有疑問，然其究竟，則星學以光行差之現象，訓導吾人也。光行差之理論，若僅粗淺言之，已能達於不可思議之結果。星之外觀上位置，因地球運動之結果，與其真位置異。而此運動變化，則外觀上之位置亦變化。真正之位置，吾人雖不可知，然外觀上位置之變化，可得而觀察之。故光行差之觀察，非表示地球之運動自身，乃表示地球運動之變化也。所以吾人由此關於地球絕對運動之智識，別無所教導也。

以上只就近似的言之爲真，但若能測至一秒之千分之一，則非真矣。此時振動之振幅，不僅爲運動之變化，（此變化，係因地球運動沿橢圓軌道而起，吾人所習知也。）並受支配於運動之平均值。光行差之常數，對於各星不同。因此差異，當可教導吾人以關於空間之地球絕對運動也。是即相對性原則，由他之形勢而破裂也。吾人實際不能測至一秒之千分之一，而地球之總絕對速度，大約比地球對於太陽之速度絕大，已有多數之人言之。若其速度非一秒三十公里，例如而爲一秒三百公里，則由此當可完全認得今所述之現象矣。

余所以如此推論者，蓋就於光行差，信其採用更簡單之理論也。如前所述，邁克爾森已教吾人知物理的現象不能表示絕對速度。余以爲無論如何精密，星學的現象，亦復如是也。

總而言之，星學於此方面所供給吾人之材料，他日對於物理學家，必視爲寶貴也。余以爲迄今理論家記憶邁克爾森之實驗，不妨豫期其否定的結果，而豫先所斟酌構成之光行差理論，必爲有用也。

電子與光質影 (Spectrum)

電子之於力學，可由各方面進行。此等各方面中，固有可以稍輕視者。但有一方面可使吾人得可驚之結果，如生發散光質影電子之運動是已。此可以志曼(Neemann)現象（輝線光質影通電磁極間能分爲二個或三個光質影之現象）證明之。灼熱之物體而振動者，則感磁石而帶電，是即第一重要之點，但僅知此理尙未達於完全之域也。光質影之線，何故依一定正確之法則而配分者乎？是不無疑義。蓋此法則由實驗家極度精密研究之，知其甚正確，且比較的簡單也。此配分之最初研究，使人憶及音響學中所遭遇調音之事。但兩者之間大有區別存焉。蓋此時不僅其振動數不以同一之數爲倍數，尙有多數之數學的物理學問題，（如任意形狀之彈性體振動問題，任意形狀於放電器之海爾智振動問題，關於固體冷卻之傅立葉問題等）所導出吾人之超越方程式之根，與振動數之倍數常數亦有關係也。

故知此時之法則，雖較調音法則更覺簡單，但其性質則全相異。今舉其相異之一言之，即倍振動之振動數，非無限增加，實漸近於有限之極限者也。

此理尙未與以說明。余以爲此係自然之重要秘密之一。日本物理學家長岡氏近關於此提

出一說明，言「原子爲一大陽電子之核，其外廓係由多數陰電子之輪而成，宛若土星形，形外繞以輪也。」此說雖甚有興味，但尙未能完全滿意，不可不再加以改良。吾人卽謂此等問題，已侵入於物質內部，亦無不可。吾人若知灼熱之物體振動，何故與普通彈性物體振動相異如此；又電子何故不如普通物質之振動，則吾人之立脚地當再進一步，可以理解電子之力學，容易使之與原則相調和矣。

先於經驗之規約

余非以爲所有之原則，有商量餘地，便深信其如此也。然假使吾人所努力者均歸於無效，則吾人果將如何處置乎？吾人對於已被攻擊之原則，有如法蘭西俗語所謂：「用姆指推之」以力求改鑄也。此事常爲可能，余於以上所述者毫不撤回。欲攻擊余者，必指摘余曩日主張原理假令爲實驗上之起原，而今則謂此爲規約，以致經驗不得達到，並咎余以最近經驗所獲得者，竟使此等原則瀕於危殆也。

實則余前所云者固係正當，而今之所云者亦非誤謬。余前所述之所以非正者，卽可以今所

表現之事證明之。例如取關於居禮銑素之熱量的實驗，此果可使之調和能力不減則乎？世人常以多數方法試之。今舉其一。此在今日雖非可佔優勝之說明，然亦不外為所有提出者之一也。由此言之，銑素止為一媒介物，不過藏有向各方向彌漫空間之未知性質之放射線而已。此放射線可貫穿銑素以外所有之物體，因此不至生有變化或作用於物體也。但銑素由此奪去若干之能力後，變為種種狀態復現於吾人之前耳。

此說明果如何有益而便利乎？第一，此事不能驗證，故立不能否定。次則反於邁爾原則，無論何種事實，均得說明之。是不僅可以豫答居禮之非難，實可豫答將來實驗家提出所有之非難也。此新未知之能力，無論說明何理，均為有效也。

此正與余曩日所言之例相當，顯然表示吾人之原則，不得以經驗攻擊之也。

吾人因此變更，果何所得乎？雖不為能力原則所侵服。然今後果有如何效用乎？以前則此可使吾人於一定事情之下，豫期一定之能力總量，與吾人以限制。今也不然。用此新能力之無限貯蓄，吾人早已不受何等制限，而如余於「科學與臆說」書中所言：「原則而歸於不用時經驗不

直接反對而排棄之。」

將來之數學的物理學

以故不須如此變更，而根本改造，實爲必要之圖。但吾人雖迫於此必要，仍得安然聽之；吾人未能謂科學可學破壞家之業，只造一時之建築物，轉由自己之手，自根底而破壞之也。

如前所述，吾人以同樣之危機，通過至於今日。余認數學的物理學之第二階段原則，係第一階段中心力之遺跡。至於第三之階段，若吾人再知之，亦將成爲同樣之事實。有如甲蟲變形之時，身雖脫去狹小之外殼，而包以新者。然當此新殼未成熟之時，人類尙容易認其存續有機體之主要姿態也。

今後吾人將向何方面而進，是不可豫知也。殆將氣體運動論研究發達，以爲他種理論之模範乎？如此初視爲單純之事實，猶爲多數之基本的事實所合成。此等惟可認爲由偶然之法則，（確度論之偶然法則）導於同一目的而已。此時當物理學之法則，全然改換新面目，已不僅爲微分方程式，並含有統計的法則之性質矣。

吾人今日，恐不能不案出豫想茫茫之全新力學也。於此力學中，惰性常與速度同時增加，必至光之速度爲不可踰之界限。其最簡單之普通力學，止爲第一近似，僅於不甚大之速度得以適用而已。因之舊力學可於新力學內再發見之，故吾人之深信原則，絕無所懊悔也。舊公式之不合用者，厥惟大速度可視爲例外。吾人猶可深信原則，繼續進行，則於實際上最爲安全也。原則者至爲有用，仍不可不承認其佔有位置者也。若欲全然排除之，則失去貴重之武器。但余尚有臨終之結論，即吾人未達如此之域也，而原則不能佔有勝利之證明。實無物足以爲其根據也。（此等關於數學的物理學之考察，係由聖路易講演錄摘得之。）

第三篇 科學之客觀的價值

第十章 科學果人爲乎？

第一節 魯羅亞 (Le Roy) 之哲學

吾人對於不得不懷疑之理由，所持甚多。吾人於此懷疑當極端而窮其底蘊乎？抑中道而止乎？極端進行，乃最易觸動人心之解決，常如難船中，貨物之扶救絕望時，難人所採用者也。

受此傾向之影響之書籍中，魯羅亞之著作爲第一。此思想家不僅有大功績於哲學家文學家，實兼有數學物理學之玄妙智識，並富於優秀之數學的發明之才者也。

氏之學說足引起多數之議論者，可以數言括之如下：

科學者唯藉規約而成立，其外觀上之確實性，亦惟由此得之。科學的事實如法則者，乃科學家之作爲。科學不能訓導吾人何等之真理，不過爲吾人行爲之標準，求其適用而已。

此說卽名爲『唯名論』(nominalism realism) (主張普遍之非實在，惟有名目而已，故亦稱名目論)之哲學說也。謂是說終始爲虛僞者非也。吾人不可不於正當之範圍承認之，而欲脫去此範圍以外則不可能也。

魯羅亞之說，不僅爲唯名論，并有柏格森(Bergson)所倡學說影響之特色，卽反理智主義是也。魯羅亞之意，言知性者皆由其所觸而失其正，其爲知性須要之具之言語，亦如是也。實在者，惟於吾人瞬間的變化之印象而存在而已。但此實在，吾人若與之相觸，(設於知力的認識之)則同時亦消失矣云云。

雖然，魯羅亞非懷疑主義者也。氏言知性之認爲永久的無能力者，蓋欲賦與他之認識之源。例如感情、情緒、本能、信仰等以更擴大之餘地也。

余雖敬重魯氏之才能，並服其說之甚爲巧妙，然余不能全然承認之。余與魯氏同意之點確

甚多。又氏曾由余之著述，引證多端，以爲其說之後援，余決無拒絕之心。但余何故不能依從氏之結論，是大勢所迫不得不有說明之義務也。

魯羅亞亦嘗自己常爲人指爲「懷疑主義家」，極受非難。然指氏爲「懷疑主義家」而非難之者，似非至當，但實不得已者也。外觀上雖見其如是，然亦無法。在學術上爲唯名論者，而在感情上爲實在論者之氏，惟由絕望的信仰的作用，脫去絕對的唯名論之範圍也。

反理智主義之哲學，排斥分析與言語，甚至其說之自身亦難於他傳，是爲本質上內心之哲學，或有能傳於人者，亦只限於否定的而止。故外部之觀察者，認此爲一種之懷疑主義，實無足怪也。

是乃此哲學之弱點。若此種哲學，常欲於自己爲忠實，則須消耗其力於否定及感激。凡著者反覆此否定與感激，則必至變形，絕無須加以何物也。緘口沈默者，不更爲徹底根究乎？作長論文者，須用言語，然實與不用言語者，互相矛盾也。自此立脚地觀之，不究原理，若比諸於單純生活之動物，人類固多所辨證。其結果不更遠離於生命與真理乎？而動物豈非爲真正之哲學家乎？

無論任何好畫家，決不能完全描得與實物逼真之肖像。因此遂謂最良之畫乃在不畫者可乎？動物學家解剖動物，則動物確已變化。即動物學家不能由解剖而完全知動物也。然若不解剖之，則對於動物毫無所知，其結果無論何事，皆不能說明矣。

人類實確有知性以外之力。至否定此言之愚者，世未之見。原始人皆恃其盲從之力而活動。哲學家關於此理不能不論說及之。則吾人須有僅少之知識，即不能不觀察其活動也。然則將如何乎？不由知性，則用如何之心眼乎？感情本能，雖得指導知性，然知性亦非無用。蓋此等雖可指揮眼之所向，然不能為眼之代用品也。感情係勞動者；理性係其器具，是能同意者也。但知性雖於行為為不必要，而於哲學的思索，則為不可缺之器具。故真反理智主義之哲學，乃不可能也。吾人雖不可不以行為之「優先」為結論，而成此結論者則智性也。如是知性一方面較行為退讓一步，然一方面則保有巴斯加爾所謂「思慮根原」之特權。就此點言之，更有不可蔑視之優先，存乎其間也。

讀者於余短縮之注意，不免謂為過於簡單，且未嘗觸及問題也。余不欲於此處，論主智主義

之可否；惟欲關於科學，而因科學之故，有所陳述也。然定義上，科學可謂為主智的主義，否則科學無由存在。但欲知科學果存在與否，正余今日之所企圖也。

第二節 視爲行爲規則之科學

魯羅亞已言，科學者，單爲行爲之規則而已。吾人無能力以認識各物，而吾人又投入於此生存之中，吾人不能不有所行動，故此時強爲制定規則。此等規則之全體，卽科學是已。

人類爲娛樂故，制定遊戲之規則。例如博奕之類，有一定之規則，且較科學更爲嚴格，必待一般之同意而後可。又每至不能取決時，往往以貨幣投之空中，由其所現之表裏而決斷之。

博奕之規則亦如科學，實爲行爲之規則也。然吾人於此比較，果信其與科學的規則絕無區別乎？是不然也。蓋遊戲規則，爲隨意之規則。卽反對定之，亦無妨礙。而科學，則爲一般之有效行爲規則，若在反對之規則，則爲無效。是不能不附言者也。

製水素時使用酸類作用於亞鉛，此有效之規則也。此時設言使蒸溜水作用於黃金，亦無不可。是亦一規則。但此規則罔效，無人信用之。故科學之「處方」（醫生所開藥單謂之處方）乃爲

行爲規則，而富有價值者。蓋因其至少亦爲一般有效者也。若明乎此，則何事皆知。然則吾人須如何方可謂爲不知何物乎？

科學可以豫知事實。此其所以有用之學，並可視爲行爲規則之功用者，職是故也。余深知此豫言屢爲結果所否定，是乃科學不完全之過。若余謂科學終於永久不完全的，則此主張確信其有不可否定之豫言。但學者往往武斷而爲豫言，尙較豫言家之誤謬爲少。又其進步雖遲緩，然爲恆常的。故科學家之漸近大膽放言，誤謬轉因之而減小。且常以爲細微，然亦不能蔑視之也。余嘗聞魯羅亞發次之議論，謂：『科學家因人所信用而誤謬更見其多，如彗星之屢次欺瞞天文家是也。但學者亦屬人類，常不欲自言其失敗，蓋果一言之，則勝利少而失敗多，不免損其信用也。』云云。

如是云云，是顯然脫去魯羅亞自己之立脚地者也。若以科學爲無效，則視爲行爲之規則，亦不能有效也。然則其價值，果何自來乎？此由於吾人之「體驗」上愛而信之者乎？彼鍊金之士持有製造黃金之方法，且信之愛之。但吾人之方法，則已有效果，故吾人對此不得不信仰也。

從未有方法可以脫去此分歧之難問也，蓋科學者果不許豫想乎？——此時視爲行爲規則則無價值——或於不完全的稍許其豫想乎？——此時須至認識之進程，始有價值也。——是究何歟？

吾人不能以行爲爲科學之目的。有如關於天狼星(Wolf)之研究，吾人可於此星不受何等作用之口實之下，而排斥之乎？

余之意見，則與此相反，卽以認識爲目的，行爲爲手段也。余喜工業之發達者，不因其供科學之辯護者以證據也。其主要在強固學者之自信，又開導學者以強大之自然力所顯宏大之經驗範圍內，而非手工所能左右者也。若無此支持，則學者眩惑於新斯哥拉之學風，而去堅實之地盤。其結果變爲空想，安保其不陷於絕望乎？

第三節 粗製之事實與科學的事實

魯羅亞論文中，最令人不可思議者，主張學者係製作事實是也。是爲其論文之要點，而最惹人議論之點之一也。

氏之言曰：『余信此爲一種之讓步。學者恐不能作粗製（即任其天然的）之事實，但至少亦能作成近於科學的事實也。』云云。

此粗製事實與科學的事實之區別，余意其自身無不適當之處。但余頗咎其對於其境界，不能嚴密明瞭而區劃之。然余對於認粗製事實爲非科學的，以爲存在科學以外之意見，則反對之。要之科學的事實，係由粗製事實而強迫學者承認之，故余決不能承認科學的事實爲自由製作者也。

魯羅亞所示之實例，常令余驚愕不置。第一例雖自原子之概念取來，但原子若視爲事實之例，豈不可驚乎？實則如此選擇可使余驚愕失措。余對於此，以爲究以言爲勝。余顯然誤解論者之思想，假令將此說破，則無成功之期矣。

第二例所用之事實，卽爲日蝕。此時粗製之發生事項，乃在明暗之爭。但星學家有兩種要素。如不導入時鐘與奈端法則，則決不能從事研究也。

又魯氏曾引用地球之回轉。吾人若以此爲非事實告之，魯氏必辯白，謂：『對於主張此說之

伽利略(Galileo)及否定此說之宗教裁判官，同理均認為事實也』云云。雖然，此二說實非同意義者也。若與以同一之名稱，則必陷於巨謬也。

此時可分爲四階段以區別之。

(一)無學者只言其爲暗。

(二)星學家言：『日蝕起於九時。』

(三)星學家又言：『日蝕者由奈端法則所計算之表，知其起於何時者也。』

(四)伽利略言：『日蝕者，因地球回轉於太陽之周圍而起者也。』

此時科學之事實與粗製之事實之界限，果存於何處乎？若讀魯羅亞之論文，則知其在於第一階段與第二階段之間。但第二與第三之間隔，則較此更大。第三與第四之間隔又大。誰能見及之耶？

余擬舉兩實例，以爲大略之解析。

余欲觀察電流計之偏倚，則藉尺度上由鏡之反射燈光知之。此時之粗製事實，則在燈光移

動於尺度上，爲余之所見。而科學的事實，則云電流傳達於導線，遂起此現象也。

又舉他例以明之。當余實驗之時，自知其必有誤謬處，故其結果須加以補正。其誤可分二種：第一曰「偶然的」，是余可取其平均值以補正之。第二曰「定常的」，則須深究其原因以更改之。此時最初之所得結果，卽爲粗製的事實。反之，科學的事實則爲一切補正之後所得最後之結果也。

省察此例吾人可將前述之第二階段，更區分之，其結果吾人於第二段所云『日蝕起於九時。』而代以下之二說。

(a) 日蝕起於余之時鐘所示九時之時。

(b) 余之時鐘慢十分。故日蝕起於九時十分也。

又第一階段，亦須更區分之。而此兩細分之間隔，亦非甚小也。蓋目擊日蝕者，感知暗之印象，與由此印象所誘出「暗」之主張，不可不區別之。有時第一稱爲粗製事實，而第二則爲一種科學的事實也。

如上之六階段，吾人雖不可視爲只有此數，然吾人今先止言及此。

第一最足以引起余之注意者，卽爲次之事項。吾人於此六段中之第一，謂爲完全粗製之事實者，猶屬單獨的。可與他之應有事實完全區別之也。第二段以下則不然，蓋其事實之陳述。常有無數之他事實參合其中也。若以言語表示之，則余之感覺所感得無數回之事實，不能用有限之言語以表示之。余言「暗」時，雖確於日蝕之際，表其經驗之感覺，然吾人於黑暗之爲物中更可想像多數濃淡之度也。若實際並未表見，有他之異度之黑暗表見時，則余於此事實亦用「暗」之一字以表之也。

第二則有次之注意，卽於第二段之陳述其事實之真僞，尙難辨別。此不必對於任何之命題，均作如是也。若命題爲有規約之陳述，則吾人於其主張之原義，不能認爲真。蓋此事實非離余獨立而真，惟余欲其爲真，始認其爲真也。

例如余謂長之單位爲公尺者，是爲余所揭示之規則，並不能強余確認之，但余對於既經明瞭歐幾里得幾何學之公準，亦如是也。

若有人問余曰：「暗乎？」則余應答之曰：「然」或「否」必常知之。發生事實之無限多數，雖均受「暗」之同一陳述，然實際之事實，是否與此陳述相應，則亦常爲余之所知也。若將事實區分爲各羣，而余所確認之事實，是否屬於該同一之羣，則余決不能有此疑惑也。

此種分類爲人類之自由，或於紛擾俾有餘地起見，含有隨意性。一言以蔽之，是不過爲規約而已。若先有此規約，因問「此事實是否爲真。」則余當如何答覆。是則余常自知之，而余之所答者，係由余感官之證明，而予以必然者也。

故日蝕之時，問是否爲「暗」，則無論何人，皆知其爲「暗」。惟在以明爲暗以暗爲明之人，則否定之。但此等之人之所言，已無何等意義矣。

同理言之，在數學中，若先立定規約之定義及公準，則一定理之爲真爲僞，二者必居其一。但吾人若答其爲真者，不能依感官之證明以顯之，不可不賴推論以證之。

事實者常可驗證者也。但驗證之時，吾人當依賴於吾人感官之證明，或此證明之記憶。此所以成其爲事實之特色也。設有人問：「某某事實果爲真乎？」余欲先使此規約成爲精確，意即當

用如何之言語表之乃爲精確也。此點確定後，余與感官相謀，以決定其然否。故此答覆，乃由余之感官而來，不論發問者之爲英語爲法語而決定之也。

考察自右以下之階段時，於此果有何之變更乎？如上所述，余觀察電流計時，設問不識電學之人，謂『電流果流動乎？』則其人必察導線之中有無發生何事。然余若問能解余語之助手，則彼卽知余之所問，與燈光反射之位置，有無變更；同一意味。只注視於尺度矣。

粗製之事實，與科學的事實，其陳述之間，果有何區別乎？是如同一事實，不過以法國語及德國語表之之區別而已。故科學的陳述，不過將粗製之陳述，翻譯爲法文德文相異之語言，而特爲小數之人所用也。

雖然，余不得爲躁急之結論也。例如測一電流，可用多數不同之電流計或電動計。此時余若云此導線圈中流入某安培（電流大小單位之名）之電流。其意卽謂此導線圈插入一定電流計時，其反射燈光來於A之度數處。（仍指上文所言反射電流計）但余若插入他之一定電動計，則反射燈光落於行之度數處。此外尚有多種可表顯得電流之通過。蓋電流者不僅由機械的

作用得以知之，亦可由化學作用，光熱作用得以知之故也。

故此爲能適用於種種全然相異之事實之同一陳述也。何則？蓋余於一定機械的作用現出時，常得承認一定化學作用所表現之法則故也。積極多數之經驗，知此法則決爲非僞；所以余於此兩不同之不變的結合之事實，得以同一陳述表示之。

譬如余問『電流通否？』之時，即可視爲『與機械之效果究表現否？』之疑問相同。亦可視爲『一定之化學的作用究表現否？』之疑問並不稍異也。余雖必先確定其爲機械的效果，或化學的效果，但無論何者，其所答者不可不同。所以亦不拘其擇取何法而解答此疑問也。

然則法則至於他日，若可認爲僞時，果將如之何？機械的作用與化學的作用之一致，若能發見其爲非恆常的，則又將若何？於此吾人爲避重大之模稜起見，必將科學的言語，稍加變更也。

然則人類表示日常生活之事實之普通言語，果可信其不模稜兩可乎？因此日常生活之事實，得視爲文法家之作物乎？

余若問：『電流存在與否？』則必視察其機械的作用，是否存在。須確定知其存在後，乃能答

曰：『電流存在。』人聞之者，直知其機械的作用之存在。即余尙未經考察之化學的作用，亦理解其存在也。今吾人假想於吾人所視爲真之法則，實則非真，而化學作用，此時未有缺者，則此假想含有兩種相異之事實。其一爲直接所觀察之眞事實；其一爲由此推論之僞事實。嚴密言之，吾人可云：『自造第二之事實，於此所作科學的事實，成爲人類之個人的協力，動作之結果，實爲謬誤也。』

但吾人若能謂現今成爲問題之事實爲僞，則此事實豈非爲吾人精神之自由隨意所產出，而爲變形之規約者乎？何以言之。蓋此時亦非真亦非僞故也。且此事實可以驗證。實際上余雖未驗證之，必欲驗證則可驗證也。若余所答有誤，是必因不由知其祕密之唯一之自然現象直接試驗。而反求其躁急之答覆故也。

余欲使一實驗後科學的事實，成爲純粹，在偶然的及定常的誤差須加補正之時，亦與此相同也。科學的事實，不外以粗製事實，翻譯爲他之言語。余所謂「某時」云者，即謂余時鐘所示之時刻，與某星通過子午線瞬間所示時刻之間之率，而以此簡略之言語表之。此言語上之規約，一

經人所承認，則人若問『現爲某時否？』之時，余於此否之答，決不能隨意言之也。

次則吾人再論第二階段。例如日蝕，當然可視爲由奈端法則演繹所示之時刻而起。此言語之規約，凡知天體力學者，必能完全了解。卽單謂爲星學家所計算之結果，亦無不可。若人問余曰：『日蝕起於豫言之時刻乎？』則余檢表見日蝕起於九時之宣告，卽知其所問者，卽『日蝕起於九時乎？』之意也。所以吾人於此時無變更吾人結論之必要。故科學的事實者，仍不過以粗製事實翻譯爲便利之言語而已。

最後之階段，則事情實際變化。地球果回轉乎？是爲可得而證明之事實乎？彼伽利略與宗教裁判官爲互相和解之故，得同訴於感官之證明乎？曰：『否，否，不然。彼等只就現象爲同意見也。卽令積如何之經驗，彼等對於現象，任至何時，不失爲同意見，』對於解析，則不能一致，故彼等於如此非科學的審問答辯絲毫無餘地也。』

余以爲彼等對於事實，非有意見不同；吾人於彼等所云地球回轉之題目，與吾人至今所考察之粗製的事實，或科學的事實，無賦與同一名稱之權利也。

由以上所述，可知無科學的事實，則無科學。科學的事實，又不外爲粗製事實之翻譯。但無後者亦不能有前者，故粗製事實，驗其是否立於科學之外與否，實爲無用之業也。

然則科學的事實者，學者有可謂爲其所造出之權利乎？第一此乃由學者以粗製之事實造出之，初非由虛無而製成者也。故學者之作事實，不能隨意自由。無論製作者如何巧妙，亦必限於製作粗材之特性也。

由上所言，人類常言科學的事實之自由創造，例如取表於手，而舉出干涉日蝕現象之星學家，果爲何事乎？其意謂蝕起於九時乎？若星學家欲其起於十時，則此唯由彼之隨意可將表撥快一時乎？若星學家如此惡戲，是明明濫用其曖昧也。彼言日蝕起於九時，則余可知九時乃表之粗雜指示，由多數普通之補正手續而得之時刻也。若彼唯告余粗雜之指時，或行反乎普通規則之變更，是不豫先指示吾人而變已有規約之言語也。反之，彼若豫告余，則余亦不能非難之，此時依然不過以同一之事實而用他之言語表示而已。

要之，學者就事實而造出者，不過爲陳述之言語。學者豫言事實之時，用此言語，但對於語此，

解此，所有之人其豫言並不含有何等曖昧也。惟此豫言發出後，其能否實現，則非彼等所能支配也。

如此於魯羅亞之主張，尙有何物遺留乎？是則有下之一事，蓋學者選擇其有觀察價值之事實，並加以自己之作爲。各種事實，其自身並無何等興味，惟至其足以資他事實之豫言，或直接豫言其事實，而其驗證可以試檢法則時，乃有興味也。應此條件，選擇科學中享得市民權之事實，究爲何物，是則學者之自由活動是已。

以上所言，猶未能滿足。余已述及科學的事實，乃粗製事實翻爲一定之言語者也。但並言任何之科學的事實，皆由多數粗製事實所成立。此已於前例表證之矣。

例如就日蝕之時刻考之，余之時鐘於日蝕瞬間，表示 a 時刻，而一定之星通過吾人假定爲赤經起點之子午線，至最近之瞬間，表示 β 時刻。又自同一星之最近復歸其前位星所通過之瞬間，表示 γ 時刻，是三者各異其事實也（吾人雖可認此等各事實爲二個同時所起之粗製事實，今則度外視之）。

此時之日蝕時刻，可云爲起於 $24(a-\beta)/(b-\gamma)$ 之時刻。 $(b-\gamma)$ 乃經地球一週之時， $(a-\beta)$ 乃日蝕之時與星經此子午線之時之差。今設日蝕時爲 x ，故成比例式： $b-\gamma : a-\beta = 24 : x$ 。∴ $x = 24(a-\beta)/(b-\gamma)$ 。是「事實」可以統一於唯一之科學的事實。當余於「相異之瞬間」就時鐘而讀得 a β γ 時，實無何等興趣。及至結合之斷定爲 $(a-\beta)/(b-\gamma)$ ，始有興味也。此斷定認爲余之精神之自由活動可也。

然同時余之力亦嘗盡於此也。 $(a-\beta)/(b-\gamma)$ 之結合，正持有此值，而不持他值者，非由余之力而然。蓋余所與粗製事實之 a β γ ，皆不得由余意左右之故也。

總而言之，事實者仍爲事實；若有時謂此與豫言一致，則此非吾人自由活動之結果也。粗製事實與科學事實之間，無明確之境界。吾人但言某事實之陳述，比之他陳述，更爲粗製的，或科學的而已。

第四節 唯名論與一般的不變者

吾人自事實而移於法則，則學者自由活動之前途更大明也。但魯羅亞果無過量重視之否

耶？吾人當再研究之。

今試就氏所舉之例而回想之，余言磷於攝氏四十四度時熔解。余深自信係陳述一法則，而又爲磷之定義也。若能發見一物，於四十四度並不熔解，而其他磷之屬性則皆有之，吾人當另與以別名稱，而法則依然不失其真也。

又余知重物自由落下之際，其通過空間之距離，與時間之平方成比例。此亦僅述自由落下之定義也。若落下而不滿足此條件時，則余謂其落下爲不自由，而法則仍無誤謬也。

若法則僅僅如此，則是不能有豫言之效力明矣。即吾人無論視爲認識之具，視爲行爲之原則，均毫無效驗也。

實際上余言磷於四十四度熔解時，其意即謂除熔點以外，凡含有磷之屬性之物，必於四十四度熔解也。如是解釋，則余之主張，確成爲一法則。此法則於余，實爲有益，蓋余遭遇含有此等屬性之物體時，余得豫言其於四十四度熔解也。

法則之虛僞，有時能發見之，固也。此際吾人於化學教科書中，記有一節謂：『古之化學家曾

於燐之名稱之下，知有二物體，混同於其中。此二物體，其熔點各不相同。』是乃化學家於前未區別之二物體而區別之一創例也。前所久稱爲狄狄米烏姆 (Didymium) (一八四一年 Mosander 所報告之金屬物。雖有謂爲元素。其實爲元素之混合物。) 混同視之者。今則區別之，爲奧地姆 (Neodymium) 及卜那西奧地姆 (Praseodymium)。此實際存在之實例也。余不信化學家能慮及如此不幸之何時，能起於燐也。且不特如此。若如斯之事，不意而生，則新區別之二物質，恐自初卽非全然有同一之密度，同一之比熱者也。故若注意密度而決定之，則此時當能豫知其熔解點矣。

雖然，此非重大之事，只須法則存在；且此法則，不拘其真僞如何，只認爲不至于同語反覆斯可矣。

吾人於地球上，雖不知有物體含有燐之其他屬性，而於四十四度並不熔解者，然安知他遊星之內，亦無此物乎？是顯然吾人可以如是假定之。其結果吾人對於棲息地球上之吾人，視爲行爲規則之有用法則，自認識之，見地觀之，實無有普通之價值。其價值亦不過因吾人生於地球上

而爲偶然之賜耳。如是之事，理所應有。但實際上果有斯事時，則其法則僅爲規約，而亦非無價值；若爲虛僞，則無價值也。

自由落下之法則，亦然。若余不知在一定事情之下之落下，大概自由或略近自由，則適應伽利略法則之落下，加以「自由落下」之名，實無益也。此條件具備，則此法則雖有真僞，但成爲不爲規約之法則而已。

余假定天文家發見星辰不能精密適合於奈端之法則。此時天文家得選出下列兩假定：
(一) 引力者精密言之非與距離之平方成反比例者也。(二) 作用於星之力，不僅引力，而尚有他力存於其間，二者必居其一。就於第二類言之，人皆以奈端法則，視爲引力之定義，是卽唯名論之立脚地。此兩見解應如何選擇之，乃屬自由，只須觀其便利與否斯可矣。假令此理由在實際上，雖或至於無自由餘地，然仍依據於便不以便以爲之準也。

吾人於「天體常從屬於奈端之法則」之一命題，可分解爲二：(一)「引力從屬於奈端之法則」(二)「引力者爲作用於星之唯一之力」。此時之(一)命題不過脫去經驗支配之定義

耳。反之經驗之支配，則能及於(二)。由此命題所生之原命題，係豫言驗證所得之粗製事實。至命題(二)則不能不受支配於經驗也。

學者由無意識的之唯名論，而於法則之上，置以彼等所名爲原則。是每一法則可由經驗完全確定之。吾人對此可採兩立脚地。第一，吾人對於法則取任其混淆之態度。此時法則常受檢查；其結果可以立證其法則唯止於近似的，而無疑義也。第二，吾人由規約假定其命題之確爲真，則法則可使高出於原則之上。但其方法常爲均一，則原法則，係表A及B之兩粗製事實間之關係，於此人類以假想的之媒介物C（例如前例不能有引力之經驗者）插入於兩粗製事實之間，則吾人得A C關係及C B關係。前者可假定爲嚴密之原則，後者爲須受檢查之法則也。

凡經完成結成之原則，早已不受經驗之支配，亦不爲真不爲僞，只爲便利之具而已。

由右之方法而大得利益者，常有之事。雖然，假令所有法則均可變爲原則，則科學之跡可以消滅無遺矣。任何法則，雖可分解爲原則與法則，但此分解無論如何前進，常有法則之餘形也。

故唯名論有界限。若人於魯羅亞之主張，如其文字解之，則必深信無疑矣。

統觀各科學其界限吾人更易知之。唯名論的立脚地，只於便利着想時是認之。但其便利果在何時乎？

經驗者，訓導吾人以物體間之關係，是即爲粗製之事實。此等關係，非常複雜。設吾人不直接觀察 A B 之關係，而代以插入於以媒介者之空間，吾人觀察物體 A 對於空間圖形 A' 之關係，物體 B 對於空間圖形 B' 之關係，及圖形 A' B' 之相互關係，循此迂路而轉爲有利者，其理由何在？因 A B 之關係，雖甚複雜，但與簡單之 A' B' 關係，所差甚微。此複雜關係，可以簡單之 A' B' 關係及 A' A' 與 B' B' 吾人認爲相異甚少之各關係代之故也。例如 A B 爲二固體之自然物，其形狀稍變化且變其位置，則吾人可觀察 A' B' 之不變運動圖形。此等圖形 A' B' 之相對運動，甚爲簡單。是乃幾何學之法則也。次則吾人於與 A' 常相差甚微之物體，A 由熱作用而膨脹，由彈力作用而屈曲，此膨脹與屈曲，非常微小，於吾人精神上，其研究比較的容易。若欲同時概括固體之運動膨脹與屈曲，則果須用何複雜之言語乎？讀者試自想像之可矣。

A B 之關係，即粗製法則，而爲分解之者也。其結果吾人可得表示 A' A' 關係 B' B' 關係之法

則，並表示 $A'B'$ 之原則也。此等原則之集合，稱爲幾何學。

此處尚有不可不注意者，吾人有二物體 A B 之關係，而以二圖形 A' B' 之關係置換之。但此同一圖形 A' B' 之關係，可代以與 A B 全異，即以衆多方法知其相異他之二物體 A'' B'' 之關係，亦爲有利者也。若吾人於未發明法則與幾何學以前，則在研究 A B 關係之後，不可不着手 A'' B'' 之研究。幾何之所以貴重者即在此處。幾何學的關係，就粗製之狀態觀之，可以代理認爲力學的之關係。又可以代理認爲光學的之他關係也。

然因此遂謂幾何學爲實驗的科學之證明。吾人自法則所誘導分離之原則，均以幾何學爲其根原。乃自他科學分離於人爲的則不可也。他之科學亦自有其原則，但此於吾人稱其科學爲實驗的時，亦無妨礙也。

欲避去此爲人爲的分離，其困難吾人亦承認之。對於幾何學之成立，常有固體之運動學參與其中，固已知之矣。然則幾何學遂可謂爲不過實驗的運動學之一部門乎？又光之直線的傳播之法則，對於幾何學原理之形成，亦有貢獻。然則幾何學既可認爲運動學之一部門，同時亦可認

爲光學之一部門乎？再吾人於幾何學本來對象之幾何的空間，自吾人精神豫先存在所稱爲「羣」之一定數範型中，因便利之理由而選擇之，此實可注意也。

吾人轉而就力學言之，可發見其有與此類似起源之大原則。唯此等原則之有效範圍（即可謂爲作用半聖）比幾何爲小，是卽與本來力學之區別，此科學無認爲演繹的之理由也。

至於物理學中，原則之職分，更形減少，是因吾人唯認爲有利時始導入原則故也。然因其小數之故，此等原則皆可近似的以代理多數之原則，轉爲有利。所以吾人於增加物理學之原則，實無何等興味。且吾人不可不達到事實，故其結局不可不去抽象而接觸於實現也。

此爲唯名論之界限，但此界限狹小。然魯羅亞固執其主張，更以他之形態提出其問題也。

吾人法則之陳述，常因吾人所採用之規約而變。加之此等規約，亦可變化。此等法則之自然關係，遂生次之問題。卽此等法則全體之中，與此等規約成獨立者。換言之，務爲一般的不變者之用者，果能存在否乎？例如吾人能養成於與吾人世界相異之世界。其結果導入造成非歐幾里德幾何學之生物之假想。但如此生物突然移入於世界，則彼等觀察吾人同一之法則必用全相異

之方法陳述之。實際上彼等與吾人兩方之陳述，將有共通之點，但不過因此等生物與吾人非爲十分之差異耳。吾人尙可假想更異之生物，其結果，可至兩方體系之共通部分，漸漸減少。然則果能漸近於無乎？抑有難以消滅之渣滓，留存其中乎？若是物剩留於其中，則爲所求之一般的不變者也。

此問題之意，宜精密解之。凡要求將陳述之共通部分，以言語表示時，決無通於各國共通之語。故吾人對於吾人，與對於主張前述假想的非歐幾里德幾何學家，主張造成一同時可以理解之一般的普遍者爲不可能也。譬如有不解法語之德人，與不解德語之法人，今欲作成同時可以理解之文章，是決不可能也。但吾人有使吾人由法文翻爲德文，或由德文翻爲法文之一定規則。此吾人所以作成文法與辭典也。同理言之，歐幾里德的之言語，移爲非歐幾里德的之言語，亦有已經制定之一定規則。現在若無此物，則亦可由吾人創作之也。

假令無通譯，亦無辭典，則德人與法人經過若干世紀，生息於隔離之世界，一旦突然相接，法文書籍所記之科學，與德文書籍所記之科學之間，能信其無何等共通者乎？曰否，否，不然。法人與

德人終必有互相理解之一日也。宛如美洲印度人自西班牙人侵入後，即能理解勝利者之國語也。

或者有謂法人不學而通德人之言語，固無足怪。然此因法人與德人既同爲人類，則彼等之間，必有共通之性，留存其中故也。而對於吾人假想之非歐幾里德幾何學家，及至吾人能互相理解時，則彼等雖非人類，尚有幾分人性。總之極小之人性，實爲必要者也。

是亦當然之事也。然余第一注意於非歐幾里德的生物，所殘存少量之人性，不僅可使吾人翻譯彼等少量之言語，實足翻譯彼等言語之全體也。

故以極小，爲必要者，余承認之。但余假定有某液體侵入於吾人物質分子間，而無何等作用，且由此亦不受何等作用。又假定有某生物，感受此液體之影響，對於吾人物質之影響，則無感覺。如此則此生物之科學，與余之科學全異。對於此等兩科學而求共通之「不變者」，實爲無效；或此生物將否定吾人之論理。例如假定承認矛盾律者，果如何乎？余信檢驗如是之假定，實無興味之可言。

吾人至今僅就不務空想，與吾人有類似之感官，且與吾有同一之印象，並承認吾人論理之原則之生物，而考察之也。彼等之言語，雖與吾人之言語，任何相異，然常得而翻譯之也。

但翻譯之可能，實含不變者之存在。翻譯云者，不外將其不變者取出之。所謂能解暗號之文書者，乃言此文字雖置換以他文字，尚可求得此文字中所留之不變者也。

然則此等不變者之本性，究如何欲說明此，亦甚易易。一言以蔽之曰：「科學的事實」間之關係，常爲依存於某規約之物；反之，不變之法則，則爲粗製事實間之關係也。

第十一章 科學與實在

第五節 偶然與決定論

余非有意論自然法之偶然性問題，但此爲不易明白解決之問題，而又費去若干議論者也。余於此僅注意於偶然一語，果含有幾種相異之意義；又區別之果有如何效用也。

吾人觀察任意之特殊法則，是唯限於近似的，吾人固豫知之。法則者，實際上由實驗的檢證導出，其檢證亦係近似，又不得不爲近似也。

吾人就精密觀測之結果，常要求吾人附加新項於吾人之公式，吾人當記憶之。例如關於波義耳 (Boyle) 之法則是也。

且無論何法則，其陳述必不完全。且此陳述必須列舉對於生成所與狀態之各事情，又必須記述將欲實驗之各條件，然後始可云：『法則者，係此等各條件滿足時則起此現象也。』

雖然，吾人記述 t 之瞬間全宇宙所現之狀態，始得確信此等條件毫無遺漏也。但實際上 t 之時刻，宇宙之各部分對於 $t + dt$ (dt 乃指極短之時間) 時間所起現象，必受有多少之影響也。

如此記述，不能含在法則陳述之中明也。假令吾人實際，以法則陳述之，則法則成爲不適用矣。吾人同時要求此多數之條件，則於某瞬間而能全現者殆絕無此事也。

吾人因不能保重要條件之無所遺漏，不得云：『某某之條件滿足則某某之現象發生。』只

可云：『某某之條件滿足則某某之現象大概可以發生』也。

吾人於各已知之法則中，取較確之重力法則論之，此可使吾人豫知遊星之運動也。若余用爲土星軌道之計算，則余對於恆星之作用，度外視之，余自確信其無誤。至於余之能認爲恆星之作用者，蓋必由余知其存在於甚遠故也。

如此計算結果，余得確實的言，謂土星之座標於某某時在某某界限之間。但此確實性果爲絕對的乎？

宇宙間果不能假定有巨大物質之塊，比所有已知之星遙大其作用可以達於遠方乎？此巨塊有絕大之速度，在影響不及於吾人之距離處運動，豈不能謂其俄頃之間通過吾人之近處乎？若果如此，則吾人之所謂太陽系者，必發生鉅大之動搖，非吾人所能豫測也。吾人於茲，僅能謂如此事實，殆非全有而已。例如謂：『土星近於天之某點』一語，則不可不改作『土星大概近於天之某點』云耳。此種當然性實際上雖可匹敵於確實性，但仍限於當然而已。

由此等理由，可知特殊之法則，決不能脫去近似的當然的之性也。學者雖未誤認此真理，但

於其爲正當或不正當，則信之如次。卽謂無論如何法則，必可以更精密更當然之法則置換之。此新法則自身，亦爲一時之假造物。但若能於此手續，無限繼續，則進步之科學，益達於當然的法則之域，終至近似與精密之差，當然與確實之差，成爲無限之微小也云云。

如是思惟之學者，若視爲正，則此等法則，雖可分別論之，各爲偶然的，但亦能謂自然法全體爲偶然的乎？

或且吾人於結論自然法之偶然之先，不可不要求終止此進行乎？卽學者某時於其研究阻止於更大之接近。換言之，若超越某界限，則自然界除紛亂外，別無所發見乎？

余就以上所述之思想（余欲名爲科學的思想）知任何法則，若不完全，止限於假定之陳述。但至何時，當能以他之優勝法則置換之，前者不過爲後者粗大之寫影而已。故無自由意志參加之餘地也。

余意氣體運動論實足供吾人之著明之實例也。

據此理論，則可由簡單之假說，說明氣體所有之性質，是吾人之所知也。此卽假定凡氣體各

分子，於各方向，均以大速度運動，其進路爲直線的。且一分子僅對於非常接近之分子，或器之周壁，乃生擾亂也。吾人之粗雜感官，能使吾人有所知覺者，乃平均之效果。於此平均其大差異，乃在互爲平均，或此平均殆無不成立也。如斯則吾人所可觀察之現象，係從屬於波義耳或給呂薩克 (Gay Lussac) 之簡單法則。但擾亂之平均，唯限於當然。分子不斷變換其位置，際此不斷之移動時，其分子之位置關係，漸次經過一切應有之配合。但此配合非常繁夥，殆皆適應於波義耳之法則，僅有少數部分與之相異而已。此種背離，實際上雖有發生，但欲遭遇此，則不可不久待也。設吾人能經悠久之歲月，觀察氣體，則其於極短時間，確認與波義耳法則相背離也。但若詢及果須待至若何悠久之時間，而計算此當然之年數，則唯記其位數，大約亦在十位以上。總之，其數有限，決非全無有之事也。

余今並不欲論此理論之價值。但吾人若採用之，則波義耳之法則，他日或致不真。吾人於此只視爲當然的表現明也。然則彼信氣體運動論之人者，吾人可認爲決定論之反對者乎？曰否，否，不然。彼等固爲機械的世界觀之最信奉者。彼等所想像之分子，取確定之進路；但僅於受依從確

定法則，與距離同變化之力之影響之下，致離其進路。彼等之學說，對於自由或本來意義之進化的要素，或於吾人名爲偶然之任何物，皆無容足之餘地。且余爲防阻混亂之故，并附言波義耳法則自身進化之物，實無有也。此法則至於不可測度之長世紀後，當有失真之時。但經一秒之幾分之一後，又復爲真，是於不可測度長世紀之間，仍不失其爲真也。

余今用進化一語述之者，意在除去一誤解。人常謂法則之不進化，果誰知之？石炭時代之法則，與今日法則之相異，他日不能發見，又果誰知之，是究何意義乎？吾人就吾人地球上舊時之狀態，所信爲已知者，乃自現今之狀態所得而推論之物。此種推論，又由於假定爲已知之法則也。法則係前件與後件之關係。由此可自前件推論結論，即可豫見將來。反之自結果可反推前件，即由現在可推定過去也。已知星之現在位置之星學家，則可由奈端法則推定其將來之位置，即制定曆書時之所爲也。同理可由現在位置，推定過去之位置也。但星學家如是之計算，不問奈端法則將來之是否爲真也，因是爲此法則之出發點故也。同時亦不問其過去之是否爲真也。關於未來，此等之曆與他日之事實對照，恐吾人子孫必有認其爲誤者也。但關於過去，即關於並無何等證

人之過去地質時代，此計算之結果，與吾人自現在所欲推定過去之結果相同。其本性上絕不受如何種類之檢查也。故石炭時代，自然之法則，雖與現在異，但吾人僅由法則之恆常假定。推定當時之事，故到底亦不得而知之。

世人因此假定導出矛盾之結果，遂謂不可不廢棄之。由此假定，吾人得一結論，謂今日世界之生命，固由生命而來，但關於生命之起原，則最初乃由於生物也。然同時亦得一結論，謂現在物理學之法則，因適用於吾人地球之現在狀態。而地球有非常之高熱度，此時代之生物為不可能，故生物者非自初而來也。解釋此種矛盾，不外二道：即假定現在之自然法，吾人非為精密而採用之，抑或假定自然法現在吾人雖經採用，過去則未必然二者必居其一也。

現在之法則，非常精密知之。此兩解決之中，第一說明，吾人不得不採用之。故假定自然法之進化，決非必要者也。

又吾人假定如此，進化尚有必要時，則可假定人類之存續，至足以目擊此進化而止。例如同一前件，石炭時代則與第四時代，取其相異之結果。但凡所謂同前件者，若一切事情，全然相同，則

石炭時代與第四時代亦不應有所區別。其意蓋與略同相等。然實際上並不如是假定也。某某事件，附以某某事件，可生某結果；他之某某事件，附以他之某某事件，則生他結果。是乃不變之理，時代絕不受何等影響也。

陳述不完全之科學，對於附帶事件，不加顧慮，主張一定事情，常持同一結果之法則；即余所謂止於近似的當然的之法則者，亦當以顧慮及於附帶事件更近似更當然之法則置換之，如此則吾人仍復歸於余上所分析原已經過之程路也。若人類而有此等事實發見時，則不言法則進化，只言事情變化可矣。

以上所述，可知所謂「偶然」一語，當有若干相異之意義。魯羅亞雖皆保存之，而未完全區別之也。加之魯氏更加一新意見：言經驗的法則，唯止於近似的。有時吾人意為精確者，不外吾人於余所名為原則之上，加以人為的之變化耳。此種變形，吾人自由行之。且其所起之混亂，非常為偶然的。故此偶然，可移於法則自身之中。就此意義，吾人可任意為決定論者。故吾人可云：『決定論為豫想自由』者也。此為魯羅亞之說，吾人大概可認此為誇張唯名論之作用。於偶然一語，導

入如此新意義者，對於自然的可以解決。解釋吾人今費數言之問題，實無多貢獻也。

余於此處決非欲明了歸納原理之基礎。且是爲余力所不能及之事，亦余之所深知也。證明此原理之正當，與廢棄之有同一困難。余今唯示學者如何適用此，及如何強迫適用此之方法而已。

同一前件，若能再起謂同一之結果亦當再現者，乃歸納原理之普通說法。但如此說法，此原理歸於無用。同一前件，欲其再起，因其對於任何事情，非全無關係，必須所有之事情完全精密而再現之也。然實際上並不全現，故此原理不能適用。

所以吾人若變其語法，不可不如次言之。前件A既可生結果B，則與A不甚相異之A'前件者，必生出與B不甚相異之B'結果。但所謂與A不甚相異者，吾人如何知之事情之一？用數表之，此數於兩方，持有非常接近之值，則「不甚相異」一語之意義，比較的要爲明瞭。此時之原理，其結果成爲前件之連續函數。但視爲實際上之規則者，吾人得以微值插入補充之。實際上學者所日常施行，然若無此插入補充，則科學爲不可能也。

但尚有一事宜注意者，吾人所求之法則，可由曲線以表示之，經驗實訓導吾人以此曲線上之各點也。由今所述原理，則吾人於此等各點，可以無間斷之線結合之。吾人可憑目視，引出此線，而新經驗即供吾人以曲線之新點。此新點若在吾人豫作曲線之外，則吾人必須將曲線變易之，然吾人亦無棄去原理之必要。其點無論如何衆多，吾人可過任意之點，常得引出一連續曲線。此曲線若遇不規則時，吾人可以此爲意外，或疑爲觀察之謬誤，但原理之謬誤未嘗直接表示之也。亦有一現象之隨伴事情，吾人可認爲枝葉，而度外置之；吾人唯對於僅隨伴事件相異時，可視A與A'爲不甚相異。例如輕氣養氣確知其於電氣火花影響之下，能相結合，而此兩氣體於木星位置，顯然變化時，亦再結合也。吾人設假定遠距離之天體狀態，對於地球上現象，無有影響。此種假定，實際上似爲必要，但選定實際上無關係之事情，有時須加以隨意，或更須加以慧眼也。尚有宜注意者，歸納原理對於自然界，互相類似，或略相似之物體，無多數存在時，例如自一片之磷未能推論他一片之磷時，則不能應用之也。

就此觀察而深思之，則決定論與偶然之問題，呈出新面目。

假定吾人能於時之全經過時，通觀宇宙間所有現象之系列，即所謂觀察繼續之物，得認前件與其繼續結果之關係；其意即謂非觀察恆常的或法則上之關係，乃觀察各各分離之種種具體的繼續關係也。

吾人於此等繼續中，認為全然相等者，不得有二意。但如吾人所說，以歸納原理為真，則殆相等者必有若干得並列觀之。換言之，即此等之繼續，可以分類也。

如此分類之可能，及正當，即為決定論之基礎，是以上分析所認可者也。在如此節約之形態，則決定論對於倫理學家，殆未必恐怖至於如此也。

終結言之，吾人對於魯羅亞之結論，謂「凡人均可自由為決定論者」，似加以排斥，實則迂回環繞仍達此道也。實際上無論如何分類，但可豫想分類者之積極干與，所以余承認有此批評之理由。余今所述之迂回，亦非無益，而對於吾人之知見略有所貢獻也。

第六節 科學之客觀性

余揭此節之標題，欲進而論科學之客觀的價值如何，不可不先確定客觀性之語意。

以吾人生息世界之客觀性保證吾人者，蓋謂此世界中吾人與他之思惟者有共通之性也。由吾人與他人類相交通，自彼等受領完全之推論，而此推論雖非吾人自身之所作，但同時可認為與吾人有同等理性者之業。又因此推論，可視為適用於吾人之感覺世界，故有此等之理性者，得謂所見之物，與吾人一致。由此可知吾人不至居於夢中矣。

故客觀性之第一條件，乃客觀的之性為多數之精神所共通，必由一人而傳達於他人。傳達可僅由於言語，吾人無言語，則無客觀性。然此言語，實使魯羅亞深懷疑慮者也。

他人之感覺，對於吾人，係永久閉鎖者也。余名為赤之感覺。在余之隣人亦名為赤乎？吾人無有何等手段以檢證之。櫻桃與雜粟設於余生 A 色之感覺，於彼生 B 色之感覺。反之如植物之葉，假定於余生 B 之感覺，於彼生 A 之感覺。此事我等決不知之，何則？余設以 A 之感覺為赤，B 之感覺為綠，而隣人對此，則以 A 為綠以 B 為赤故也。反之吾人之所能確定者，知彼此對於櫻桃及雜粟，生同一之感覺。彼對於其感覺，與以同名稱。余對同感覺，亦與以同名稱也。

感覺者非可如是傳達，或寧謂感覺之純粹性質，乃不可傳達永久不能相通者也。然感覺間

之關係，則非如是。

由此見解觀察之，則凡客觀的物，乃全缺性質，而有純粹關係者也。余當然不至於謂客觀性爲僅有純粹之數量。若果爲斯言，則今成爲問題之關係之本性，不免變爲特殊，過於狹隘。然倡此說者爲誰。實已忘却。此說能使世人謂世界者唯終於微分方程式而已。

吾人對此奇異主張，雖不可不十分躊躇，且其所直接者，亦非客觀的。因之謂其僅感覺之關係得有客觀的之價值者，不可不承認之也。

或者謂人類所共通之美的感情者，乃吾人之感覺屬性，爲萬人所共有。因之成爲客觀的之證明之異論，亦未可知。但深考之，則可發見如斯證明之不可能也。此時所能證明者，甲之人與乙之人，與以同一名稱之感覺，或由此等感覺相對應之結合，無論爲甲爲乙，其感情皆能發生。故此感情於甲則伴有名爲赤之感覺A，同理於乙則伴有名爲赤之感覺B。此寧謂此感情非生於本來感覺之同一性質，乃生於吾人無意識中所感印象，相互關係之調和的排列者也。

感覺者非因其有一定性質而爲美，乃因吾人觀念聯合之組織占有一定位置。故發生時不

可不動導線他端相當於美的感情之「受信機」此其所以爲美也。

吾人無論立於道德的立脚地，與美的立脚地，或科學的立脚地，其事皆全同。除在萬人同一共通之物以外，別無客觀的物也。而吾人於比較的可能時，只由一精神漸傳於他之精神，可云如是之同一共通，卽由言語所能傳達者。換言之，惟可以理解之物，始有客觀的價值也。

但此不過問題之片面，至全然無秩序之集合，因其不得理解，固不能有客觀的價值。但雖在有秩序之集合，若非對應於實際上所經驗之感覺，亦不能有客觀的價值也。特舉此種條件，余以爲無甚用處。近頃物理學無人主張爲非實驗科學，余卽思舉此條件亦無從也。是說也，勿論物理學家哲學家，雖無採用之期望，然因防人誤陷於此謬解起見，而加之警戒斯可矣。客觀性者，以滿足如此二條件爲必要。第一條件，係分別現實與夢，則第二條件乃區別現實與小說也。（此所謂現實一語與客觀的同義。此用法係從普通之慣例，恐未必正當；吾人之夢雖亦有現實，但非客觀的也。）

然所謂科學者何歟？余前所述乃一分類，卽論不拘由何等自然之隱秘親近所結合，外觀上

所分離事實之排列方法也。科學者以他語言之，即爲關係之系統；吾人僅於關係求其客觀性而已。即欲離相互關係，就孤立的物以求之，亦爲徒勞者也。

科學唯訓導關係而已。故謂其無客觀之價值，轉認關係爲客觀的，實背理也。

例如以對象一語所表外界之事物，是不僅對於感覺之羣而止。乃由恆常之結合，而着合之羣，故成爲對象，非瞬時不可捉之假現也。僅於此種結合成爲此等事物之客觀的物，而結合者，又不外乎關係也。

故吾人詢問科學之客觀的價值者，非問科學是否教吾人以物之真本性，乃問科學是否教吾人以物之真關係也。

對於最初之問，無論何人，皆否認之，而無所躊躇。但余更進一步，深信不僅科學不能教吾人以物之本性；其他無論何物，亦不可能也。即使神能知之，亦不能以言語表之也。吾人不僅不能致答，假令有人答之，吾人亦不理解。吾人對於此問尚有所疑惑也。

若標榜科學之理論，訓導吾人以熱電氣，或生命之爲何物，是可豫定其失敗。蓋科學所賦與

吾人者，惟爲粗雜之形象，因之爲一時的，而易於破壞也。

如此則第一問，成爲廢棄，僅剩第二問也。科學究可訓導吾人以物之真關係乎？抑或科學之所結合者，將分離之，科學之所分離者，將結合之乎？

吾人欲理解此新問之意義，必須記憶上述客觀性之條件。所謂此等結合，果有客觀的價值乎云者，即問此等結合，對於所有之人，爲共通乎？抑且對於吾人後來之人，亦爲同一乎之謂也。

此等關係，於學者與無學者，固不同一，然此不足道也。無學者對於此等關係，直不認之。而學者則由實驗與推論，得以此等關係明示彼等。要之深知實際經驗之人，亦有一致之點存在也。

所成爲問題者，即此一致果爲恆久的否耶？馴至吾人之後昆亦能維持之否耶？吾人能自問：今日科學所爲之結合，可由他日科學而確定之乎？吾人欲舉可以肯定此問之先天的理由，實不可能。但此爲事實上之疑問，參照科學之存續久遠之歷史，則可使吾人知其所建設之組織，果可長久乎？抑僅爲一時之建造物乎？

然則吾人當如何見解乎？驟觀之，理論之存續，僅爲一日；再過則日增益，堆積成廢墟；今日生

之，明日行之，至於後日成爲古典的；而其又翌日則爲老廢；更過此則忘却之矣。雖然，吾人若精細檢之，則如此所廢滅者，可認爲教導吾人以事物爲何之理論也。然彼等之中果有何物存續乎？若彼等之一，可使吾人知其真關係，則此關係確立，繼此理論而代佔其勢力者，尙有他之理論新出而再現也。

今舉一例以明之，以太波之理論，可教吾人知光爲運動。然今日採用電磁說，又可教吾人知光爲流行。光旣爲流行；此流行即可爲運動與否？吾人無意檢察之也。總之此運動與採舊說所云之運動，決非同一。卽以舊說爲可棄，亦無妨也。然馬克斯維耳於採用假說的流行之間，與夫累涅爾 (Fresnel) 於採用假說的運動之間，有同關係成立，故舊說中亦有某要素殘留。如此其所殘留之某物，卽爲本質者也。此卽說明今日之物理學家，並無何等困難，得由夫累涅爾之語，變爲馬克斯維耳之語也。

吾人信爲確定之多數結合，成爲廢棄者，事實也。但大多數尙存續，又今後亦可存續也。然則對於此，其客觀性之程度果如何乎？

此與吾人對於外界對象之信念，精密相同者也。卽外界對象者，由吾人所經驗之感覺，非一時之偶然。某不可破壞之媒介之結合，限於吾人所見之範圍內，皆實在也。同理言之，科學於現象之間，以他之更細微，並更強固之結合，表示吾人也。此如久未發見之細線，一次認識以後則不能拋棄之。彼等與外界對象所現實在性之線，同爲實在的也。此比後者甚遲。至後方知之者，因一方早已不能由他方消滅，故絕無拘束也。

例如吾人得謂以太不劣於任意外界之物體，而爲實在的存在。就外界物體而言其存在者，系言此物體色，味臭之間，有強固而恆久之內面的結合存續之意也。又所謂以太之存在云者，卽謂所有光學現象之間，有自然之親近存在之意也。此兩方顯然不能主張有所輕重。

又科學結合之方面，有時由常識之結合，富有上列之實在性。蓋前者較爲包括多項，而務使部分的結合吸收於其中也。

科學不過分類而已。然分類不能爲真；惟止於便利與否，亦未可知。但其爲便利則真也。不僅對於余爲真，卽對於所有之人皆真，而對於吾人之後昆，仍信其便利亦真。最後則知此不由於偶

然而然，亦確乎不可移也。

總而言之，唯一之客觀的實在，乃爲物之關係；而世界之調和，由此而生。此關係此調和，若離去思惟此感知此之精神，則不可理解者，雖爲事實，然於所有思惟者，因其皆爲共通，且將來依然共通，所以爲客觀的也。

此主張可使吾人復返於地球回轉之問題。此問題同時可由實例供給吾人以說明以上事實之機會也。

第七節 地球之回轉

余所著科學與假說之中，有一段謂：『主張地球爲回轉者，並無何等意義，或寧謂主張地球回轉，與主張不過假定地球回轉爲便利者，實爲同一意義。』

此語一出，遂至惹起不可思議之解析；卽此語可使托勒密之說復活，並信其可以辯護伽利略所受之宣告也。

但注意全篇，通讀一過者，當不至有何誤解。彼謂地球回轉爲真理，將與歐几里德之幾何公

準置於同列者，果有否定之之意乎？抑吾人更進一步。可以同一言語，得謂「外界存在」與不過「假定外界存在」爲便利之二主張，爲同一之意義歟？由此觀之，自轉之假說實與外界對象存在之確實性，保有同一程度者也。

但吾人由第四節所論，可更如次言之；卽物理學之理論，所表示之真關係愈多則愈真。照此新原理，吾人欲檢驗目前之問題。

第一，絕對空間，不能存在，故對於「地球回轉」與「地球不回轉」兩反對之命題，自運動學上觀之，皆非爲真。若一方肯定，一方否定，則於運動上之意義，爲承認絕對空間之存在也。但一方能開示他方隱蔽之真關係，則此方比他方，更有豐富之內容，故物理學上更認爲真確。關於此點，實無可疑之餘地也。

然星之外觀上，日日運動；他之天體，亦日日運動。又他方則地球爲扁平，有符可 (Foucault) 振子之回轉，旋風之渦動，貿易風等多數之事實，爲之證明。對於托勒密之信仰者，於此等關係，毫無相互之聯絡；然對於哥白尼之信仰者，則以爲此等均由於共通原因而生。余謂地球爲回轉者，

乃肯定此等現象，有內面的關係；假定絕對空間不存在，或不能存在，則此說現今爲真理，即將來仍爲真理也。

此爲地球自轉說之根據。然就於公轉果如何乎？信奉托勒密者，以爲全然互相獨立。信奉哥白尼者，以爲歸着於同一原因，有三現象：即在天球，遊星之外觀上移動，恆星之光行差，及其視差是也。凡遊星均以一年爲週期，表示其變異。而此週期恰與光行差及視差之週期，能精密一致者，果係偶然否乎？若採用托勒密之說，則肯定之。而採用哥白尼之說，則否定之。必確認此三現象間有同一之關係存焉。此說即假令絕對空間不存在，亦不失爲真理也。

據托勒密之說，天體之運動，不能由中心力說明之，故天體力學，爲不可能。天體力學，所示吾人，以所有天體現象間之內面關係，實爲真關係，而承認地球之靜止者，乃否定此等關係。此其所以爲誤也。

由此言之，伽利略因此而受迫害之真理；假令即與常人所思惟者全異，亦不失爲真理。其真意義，則較之常人所思想者，更微妙深遠矣。

第八節 因科學之科學

余所謂因科學之科學者，非欲對於魯羅亞有所辯護也。此說雖恐爲魯氏所非難，但氏係酷愛真理之人，求之不得，則有不欲生存之勢，故必轉進而懷抱此思想也。今余再試爲二三之考察焉。

吾人不能盡知一切之事實，不可不選擇其有必知之價值而求知之。由托爾斯泰 (Tolstoj) 之說，學者鑑於實地應用而行選擇，則爲合理的。否則爲任於偶然之選擇也。然在學者則不然，凡某事實有不完全之調和者，完全之，或由豫想他之多數事實，視爲比他之事實，更有興味。若學者之所思爲誤，又彼等默所要求此事實間之等級，若單爲空虛迷妄，則必無因科學之科學者，故亦無科學矣。余若自身信此思想爲正當，例如星學的事實之可貴而富有價值者，不在問其實際上所應用如何中求之，乃在其爲最教訓的之一點求之也。

惟由科學與藝術，而文明始有價值，世人雖以「因科學之科學」之語爲怪，然人生若止於困苦，則所謂「乃人生之人生」者亦無所優勝。不特此也，余謂凡快樂皆具有相等之價值。文暉

之目的，既不承認對於酗酒者，當供給以酒精，則「因科學之科學」與「因幸福之幸福」實相對之語也。

無論如何活動，不可無目的。吾人勤苦之餘，對於演劇，有所耗費；而又不能不爾者，是不但爲自身觀覽之故，亦爲他日他人觀覽之故也。

吾人僅憑思想考察之，吾人對於事物欲有所言時，所用之言語，僅表其所有之思想，故不成思想者爲純粹之虛無也。思想以外謂有何物者，絕無意義之主張也。

然——對於時之存在而信奉之者，有不可思議之矛盾。——地質發達史者，不過生命前後兩永遠間之短議論耳。而此議論於自身中之意識的思想，乃示吾人以亘於現在將來，僅一瞬間爲繼續者也。思想止爲長夜之一閃光；但此閃光更爲包羅萬有者也。

附錄

潘加勒之哲學思想大要

自十九世紀末葉以來，科學界中有一顯著之趨勢，即科學對於其所研究，自取批評之態度是已。今日科學中，對於其所專科學之根本，方法，意義，毫不自省，即加獨斷，雖尚不少。甚至即以專攻之特殊科學所得，擴而充之，以自立一種科學的世界觀者亦不乏人。如赫克爾（Haeckel）如阿斯特瓦德（Ostwald）即其流亞也。然多數之科學大家，對於其所專治之科，無不常自反省。專致力於數學物理學，即所謂精嚴科學（La science exacte）者，為尤甚焉。而最足以代表此趨勢者，則莫若安利潘加勒（Henri Poincaré）。輓近如馬赫（Mach）如羅素（Russel），雖亦同道中人，然皆已由科學者變為哲學者，於哲學界中各據一重職。若夫堅苦卓厲，死而後已，為科學盡畢生之心力，為哲學成不世之功業者，潘加勒殆一人而已。宜乎，乘康德哲學復興之潮流而為現

代批評哲學之泰斗黎爾 (Rieth) 如塞勒 (Cassirer) 等，亦傾倒之也。潘氏所著論文，僅關於純粹數學者，其數已百五十，又爲最大之物理學家天文學家。其所驅遣之材料之富，決非純粹哲學者之所能及，其洞察研究精神之奧蘊，又非尋常哲學的科學者之所能及，故其貢獻於現代哲學者，他人不能爲也。潘氏在哲學中所得之地位，誠可謂曠古無儔矣。

潘氏之哲學思想，具見於下列四書中：

1. La Science et l'Hypothèse, 英譯 Halsted, Science and Hypothesis; 德譯 Lindemann, Wissenschaft und Hypothese; 日本譯 林鶴一「科學之臆說」
2. La Valeur de la Science, 1905 英譯 Halsted: The Value of Science, 1907; 德譯 Weber, Der Wert der Wissenschaft, 1906; 日本譯 田邊元「科學之價值」
3. Science et Méthode, 1908 英譯 Halsted, Science and Method; 德譯 Lindemann, Wissenschaft und Methode.

以上三書之英譯本，又有合爲一卷，題曰 The Foundation of Science 者行於世。譯音同前。

4. *Dernières Pensées*, 1913; 德譯 *Lichtenecker, Letzte Gedanken*; 此書非潘加勒

自編，乃潘氏死後，他人集其遺著而或者。

四書之中，科學與假說出版最早，論各問題最詳密而透徹，欲知潘加勒之哲學思想者，皆不可不讀。第二卽本書，其程度較第一稍淺，然所包甚廣，由此可以窺見潘氏對於科學的認識之實質，所懷之思想爲何。第三第四兩書，載有今日之各種新問題。欲知潘氏對於此等新問題之批評者，卽可於此兩書中求之。惟其組織，則不如前二書之兼容並包，有條不紊。第四一書爲尤甚焉。

由上列各書題目，已可知潘氏之用心，在欲闡明科學之方法，因而分別假說的認識與必然的認識，由此決定科學的認識之客觀的意義卽其價值。今爲讀本書者之便利計，略述其思想之大致如下。

純粹數學者，建設於以數之直觀爲根據之數學的歸納法上，構成嚴密論證之體系之必然的認識也。其基礎在直觀，不在論理，與羅素派之主張相反。惟其直觀則不依據經驗的知覺或想像而依據數。是蓋由於吾人之精神但能一旦成立，則雖反覆無限數次亦無不能成立也。故康德

之先驗綜合判斷，亦可於純粹數學之範圍內得之。

康德以時間與空間爲先驗的純粹直觀形式，潘加勒則不謂然。先就時間言之，二精神現象同時並起，或先後相繼，吾人皆能直接經驗之。故心理的時間，爲吾人所有，然物理的時間，則非吾人所有也。物理的時間，乃吾人所規定，同時先後之測定法，亦吾人所制作。惟是規約，決非任意，須與爲欲簡單陳述自然法而設之種種規則相適應而已。更就空間言之，普通歐几里得幾何學，以三次元之數學的連續爲對象，此亦一種規約，全係吾人以經驗爲指導作成者。然爲吾人經驗要素之感覺之羣，決不生數學的連續，且不以三次元爲必然。惟其所表示者，與三次元之點之連續極相近，若卽以之記述經驗，不惟簡單而又便利。故吾人遂採用三次元爲空間也。雖然，吾人所用之空間，決非自無而生者。其構成空間之材料及模範，實由經驗得之。不過用此等材料所能造成之空間，不必限於一種。吾人既能加選擇，吾人之精神，尙得自由行動也。至於採用歐几里得幾何學與採用非歐几里得幾何學之別，則視吾人以直線名何物而定。不過歐几里得幾何學較爲簡單故普通用之而已。故幾何學成立於規約，決非先於經驗，亦非本於經驗。康德之先驗論，與科學

者所謂幾何學上之經驗論，潘加勒皆非之。惟須注意者，潘氏雖謂幾何學成立於規約，然非謂規約全由意造也。任何規約，皆須有共通之根據。潘氏稱幾何學爲一種「羣」之特別研究。由此可知選擇規約之先，不可無「羣」之一般的概念。此概念與經驗獨立，而又先乎經驗存於吾人之思惟中，亦潘氏之所承認者。黎爾謂今日新康德派之認識論者，訂正康德之純粹直觀形式，而以時間空間爲思惟之先驗形式，實與潘加勒之見解有相合者焉。故幾何學之根柢，亦有先驗的思惟之原理存在，必然的認識之所以可能，蓋由此也。

至於經驗的自然科學，則與此異，而以理論物理學爲尤甚。其爲真理之源者，乃直接經驗之事實，非精神之先驗的能力。所謂感官之證明，卽爲真理終極之根據。自然之法則卽基於此。世人見物理學之理論中，含有規約的成分，遂以爲理論全體，皆由意造，科學者之所謂事實與法則，皆學者之所爲，故科學非客觀的真理，不過指導行爲之便則。是言也，惟名論者甚樂道之，而潘加勒之所力闢者也。潘氏謂事實之種類不一，所謂科學的事實者，與科學者所用之言語相當，可以意造，然其用爲材料之天然事實決非學者之所爲。所謂法則，卽表天然事實間之關係，乃必然的而

非人爲的。法則存於經驗與事實之間，所表關係，永久不變。隨物理之進步而變者，乃爲欲簡單概括此等法則而作之原理，非法則也。蓋物理學愈發達，則新發見之經驗的事實愈夥，表其間之關係之新法則亦愈多，於是舊有之原理漸不能統括之，遂不得不改廢矣。要之，原理者，非經驗所必然。既非前定，卽有選擇，惟在用其便者而已。故原理爲人爲的。原理之變革，影響不及於科學全體。由經驗得來以作此等原理之基礎之法則，依然無恙也。試就光之原理言之，夫累涅爾 (Fresnel) 之波動說，以光爲能質 (ether) 之運動；馬克斯維耳 (Maxwell) 之電磁說，以光爲電磁現象之一。二者雖判然不同，然昔日波動說所根據之法則，卽在電磁說得勢之今日，仍能保持其存在。惟說明其關係之假說今與昔異而已。假說雖變，影響不及於關係自身也。故法則乃表其不變者，人共由之客觀的真理也。惟此言易與惟名論相混，尙不可以無辨。凡客觀的物，須人人共之；然不得謂客觀的物，卽爲直接之感覺內容。感覺之性質自身爲何，但能自知，不能傳人，無客觀性者也。然其關係，則合理的思惟者無不共之，有客觀性者也。凡客觀的物，皆爲數量的；雖謂世界卽微分方程式，未免過於放言，要之，客觀的物，爲無性質之純粹關係則可斷言。是卽表宇宙之內的調

和，爲吾人所能認識之惟一實在也。潘加勒對於經驗的認識對象與客觀的真理之意義，作如是觀，誠哲學上所宜深注意者矣。

夫詹姆士 (James) 之實用主義，通行於自然科學者之間久矣。欲捨去獨斷的素朴實在論的立脚地，而以批評的態度考察科學者，大抵不以科學之理論，爲實在之必然的認識，僅視爲吾人爲指導行爲之便而作之隨意的產物。以爲真理存於實用，捨實用卽無真理。馬赫之思惟經濟說卽代表此傾向者也。然潘加勒本科學家之良心，不甘爲此說所服。彼雖闡明科學中之假說的要素卽以便宜與實用爲選擇標準之規約的要素，未嘗不與實用主義之說有相同處；然只限於原理，而不及於科學全體。構成科學本體之法則，則爲必然之客觀的認識，非爲便宜而設。其所以能豫知將來之事實，而爲行爲之規則者，蓋以所表者爲普遍的不變的事物，卽爲宇宙之客觀的真理故。非以其有裨於實用故謂之真理也。詹姆士評潘加勒曰：『其不去實用主義者幾希。』然自吾人視之，此何足爲潘氏之累，適足以證明其爲科學者之偉大而巳。實用主義者，哲學之衰也。自然科學者之傾向於此者，亦由於不知哲學爲何物，不解康德批判主義之精神，誤認心理主義

之皮相爲哲學之本領耳。潘加勒不滿意於此，此其哲學思想之所以爲貴也。

今更就潘氏之偉大處概括言之。潘氏以爲科學之價值，不在其爲實行之手段，在能以普遍不變之關係卽宇宙之內的調和教吾人，而吾人由此得以認識唯一之實在。故科學卽無關於實用亦自有其爲知性產物之價值。潘氏因此力反魯羅亞 (Le Roy) 之惟名論的反主知主義，辨護主知主義，而主張爲科學之科學。高唱文明之目的，不在增長物質的快樂，惟學問藝術足以增文明之光。物質之利福所以有價值者，不過爲其能使吾人自由，以盡力於此理想的事業而已。由此亦足見潘加勒不但爲偉大之科學者，且爲高遠之理想主義者也。潘氏之思想與今日理想主義的哲學如出一轍，無待縷說矣。吾人讀潘氏書，想見其力排功利主義，高唱理想主義之熱誠，能不興哉？

