

# УНИВЕРСИТЕТСКІЯ ИЗВѢСТІЯ



Годъ XLVII.

№ 9 — СЕНТЯБРЬ.

1907 годъ.

## Часть II—неофициальная.

- I. Мѣсто матеріализма въ естествознаніи. Вступительная лекція.—Прив.-доц. **А. В. Леонтовича** . . . . . 1--16
- II. Сказаніе о мечѣ Тюрфингѣ.—Маг. **И. В. Шаровольскаго** . 151—251
- III. Землеустроительныя задачи и землеустроительное законодательство Россіи.—Прив.-доц. **Ал. Д. Билимовича** . . . . 117—146
- IV. Русское гражданское право.—Проф. **А. М. Гуляева** . . . . 197—222
- V. Специализація учебныхъ плановъ преподаванія и занятій науками юридическими, государственными и экономическими въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ Россіи. Опытъ историческаго изслѣдованія.—Проф. **Н. П. Яснопольскаго** . 285—306
- VI. Элементы математическаго анализа.—Пр. **М. Ѳ. Хандрикова**. 1169—1340
- VII. Анатомическій субстратъ души, гезр. сознанія.—Проф. **С. И. Чирьева** . . . . . 1—28

## Прибавленія.

- I. Памяти проф. Василя Васильевича Чиркова.—Прив.-доц. **А. Своехотова** . . . . . 1—9
- II. Славянское племя. Статистико-этнографическій обзоръ современнаго славянства. Съ прилож. 2-хъ этнограф. картъ.—Проф. **Т. Д. Флоринскаго** . . . . . 97—128
- III. Изъ исторіи старинной русской повѣсти.—Проф. **В. Н. Перетца** . . . . . 49—87
- IV. Объявленіе о конкурсѣ по кафедрѣ русской исторіи.

**КИЕВЪ**

1907.



## Мѣсто матеріалізма въ естествознаніи.

*(Вступительная лекція, читаная 11-го Октября 1905 года).*

Сегодняшней лекціей я начинаю курсъ фізіологіи органовъ чувствъ. Являясь наукой объединяющей и синтезирующей всѣ отдѣлы біологіи, фізіологія въ то же время входитъ въ соприкосновеніе во многихъ своихъ отдѣлахъ съ психологіей—фізіологіей „души“. Въ особенности это имѣетъ мѣсто конечно въ фізіологіи мозга и органовъ чувствъ, т. е. въ томъ отдѣлѣ ея, чтеніе лекцій по которому мы начинаемъ сегодня. Связь фізіологіи „души“ и органовъ „чувствъ“ во многихъ отношеніяхъ такъ велика, что если не опредѣлить своего отношенія къ главнымъ теченіямъ психологіи и частью даже философіи, лекторъ рискуетъ быть или непонятымъ, или напередъ подорвать къ себѣ довѣріи, по крайней мѣрѣ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ. Современная психологія имѣетъ два главныхъ теченія. Одно гуманитарно-философское, другое „соматическое“. Последнее поддерживается преимущественно врачами-психіатрами и является зъ сущности матеріалистическимъ. Въ недавнее время на публичныхъ лекціяхъ въ Кіевскомъ университетѣ мы, въ лицѣ проф. Челпанова и проф. Сикорскаго, имѣли представителей обоихъ теченій. Оба теченія относятся враждебно другъ къ другу. Мы желаемъ, начиная нашъ курсъ, попытаться опредѣлить наше отношеніе къ этой враждѣ. Такимъ образомъ однако мы неминуемо приходимъ къ необходимости разсмотрѣть вопросъ о такъ называемомъ матеріалізмѣ и этому мы посвятимъ нашу лекцію.

Какъ со стороны философовъ, такъ и со стороны фізіологовъ этотъ вопросъ подвергался обсужденію не однократно, однако и до

нихъ поръ онъ сохранилъ полную свѣжесть во многихъ отноше-  
 ніяхъ. Младенчество фізіологін—здѣсь приходится говорить пре-  
 мущественно о Германіи—совпало съ періодомъ пышнаго раз-  
 витія философіи. Эта послѣдняя, двипутая въ концѣ XVIII вѣка  
 мощнымъ ударомъ генія Канта, въ началѣ XIX вѣка, которое и  
 надо считать началомъ теперешней фізіологін, эволюціонировала  
 въ цѣлый рядъ философскихъ школъ: Пня Шеллинга и Гегеля и  
 тотъ энтузіазмъ, который они возбуждали, пусть будетъ лучшей  
 иллюстраціей сказаннаго. Вліяніе этихъ мыслителей чувствовалось  
 и у насъ въ Россіи и это, конечно знаетъ всякій, кто читалъ Тур-  
 генева. Ихъ ученія были основаны на положеніи Канта, по кото-  
 рому мы знаемъ не внѣшній міръ, а лишь міръ нашего внутрен-  
 няго опыта. Эта философія была по преимуществу идеалистической,  
 ибо она въ основаніе всего міра ставила наши идеи. Практически  
 ея точка зрѣнія свелась къ тому, что факты и законы біологін  
 слѣдуетъ выводить изъ мышленія и что наши построенія должны  
 быть правильны, ибо созданы центромъ всего—нашимъ духомъ.  
 Итогъ этому періоду съ точки зрѣнія естествознанія подведенъ  
 словами извѣстнаго Liebig'a: „И я пережилъ этотъ періодъ, столь  
 богатый словами и идеями, но столь бѣдный истиннымъ знаніемъ  
 и основательнымъ изученіемъ; онъ стоилъ мнѣ два драгоцѣнныхъ  
 года моей жизни; трудно описать тотъ страхъ и ужасъ, которые  
 охватили меня, когда послѣ этого во мнѣ пробудилось сознаніе“.  
 На смѣну этому философскому и натурфилософскому теченію до-  
 минирующую роль заняло другое, наиболѣе видными представи-  
 телями котораго въ біологін являются Молешотъ, Бюхнеръ, и Карлъ  
 Фогтъ. Громадные успѣхи фактическаго экспериментальнаго знанія  
 въ разнообразныхъ областяхъ изученія природы и ясно обнару-  
 жившаяся бесплодность въ этой области умозрительнаго, пропо-  
 вѣдовавшагося философіей метода, повело къ тому, что синтетиче-  
 ская мысль естествоиспытателей стала искать разрѣшенія осталь-  
 ныхъ вопросовъ нашего бытія въ совершенно противоположномъ  
 направленіи. Это теченіе стало объяснять психологическіе факты  
 „міръ внѣшній“ и „міръ внутренний“ изъ тѣхъ же предпосылокъ,  
 которыя оказались магическими двигателями естествознанія. Пра-  
 вильнѣе даже сказать, что до нынѣ сформулированныя построенія  
 этого рода игнорируютъ „міръ внутренний“, считая его какъ бы  
 само-собою подразумѣвающимся.

Эту проблему матеріализма въ ея мыслимо-полномъ развитіи прекрасно характеризуетъ Дю-Буа Реймондъ въ своихъ „Границахъ познанія природы“: „естественно-научное познаніе, или познаніе тѣлеснаго міра при помощи и въ смыслѣ теоретическаго естествовѣденія, есть объясненіе измѣненій въ тѣлесномъ мірѣ движеніями атомовъ, обуславливаемыми ихъ центральными, независимыми отъ времени силами, иначе говоря—сведеніе естественныхъ процессовъ къ механикѣ атомовъ“.

„Если бы оказалось, что всѣ измѣненія въ тѣлесномъ мірѣ сведены къ движеніямъ атомовъ, вызываемымъ ихъ постоянными центральными силами, то вселенная была бы познана съ точки зрѣнія естествовѣденія. Состояніе міра въ какой либо дифференціалъ времени явилось бы тогда непосредственнымъ дѣйствіемъ его состоянія въ предшествующей и непосредственной причинной его состоянія въ послѣдующей безконечно малый промежутокъ времени. Законъ и случай были бы лишь различными названіями для механической необходимости“.

„Умъ, говоритъ Лапласъ, который для даннаго момента зналъ бы всѣ силы, оживляющія природу, и взаимное положеніе составляющихъ ее существъ, —умъ этотъ, если бы при томъ онъ былъ достаточно глубокъ, чтобы подвергнуть эти данныя анализу, одной и той же формулой, охватилъ бы движенія какъ величайшихъ міровыхъ тѣлъ, такъ и легчайшаго атома: ни въ чемъ для него не было бы сомнѣнія, и будущее, какъ и прошедшее, одинаково были бы доступны его взору. Слабое подобіе такого ума представляетъ человѣчeskій разумъ въ той законченности, какую онъ сумѣлъ придать астрономіи“.

„Въ самомъ дѣлѣ, подобно тому, какъ астроному, для того чтобы узнать, было ли солнечное затмѣніе въ Пирей, когда Перикль отправлялся въ Эпидавръ, нужно только въ лунныхъ уравненіяхъ придать времени извѣстное отрицательное значеніе,—точно такъ же предположенный Лапласомъ умъ при помощи надлежащаго изслѣдованія своей міровой формулы могъ бы сказать намъ, кто такая была Желѣзная Маска, или при какихъ обстоятельствахъ пошелъ онъ въ путь „Президентъ“. Какъ астрономъ предсказываетъ день, въ который какая нибудь комета, долгіе годы скрывавшаяся въ глубинѣ мирового пространства, снова появится на небесномъ сводѣ, такъ и умъ этотъ могъ бы опредѣлить изъ своихъ уравненій тотъ день,

когда на Софійской мечети заблеститъ крестъ, или когда Англія сожжетъ послѣдній остатокъ своего каменнаго угля. Если бы онъ подставилъ въ міровой формулѣ  $t = -\infty$ , то предъ нимъ разоблачилось бы загадочное первичное состояніе вещей“.

„Такимъ образомъ, мысли, высказанной Кантомъ въ предисловіи къ его „Метафизическимъ основаніямъ естествознанія, „что въ каждомъ отдѣльномъ ученіи о природѣ лишь настолько можетъ заключаться *собственно* наука, насколько входитъ въ него *математика*, надо, пожалуй, дать еще болѣе рѣзкую форму, замѣтивъ математику механикой атомовъ“.

Въ 60-хъ годахъ прошлаго столѣтія мощную поддержку этому построенію далъ гений Дарвина, установившій принципы эволюціи животнаго міра и давшій законы, безъ которыхъ теперь нельзя ступить шагу въ биологін.

Итакъ, въ результатъ, въ новое время стали другъ противъ друга идеалистическое (отъ слова идея, а не отъ слова идеаль)— „философское“ и матеріалистическое— „научное“ „биологическое“ пониманіе проблемы соотношенія „духа“ и „тѣла“. Лица, которыя продѣлали сами на себѣ эволюцію отъ страха и ужаса опьяненія“, о которомъ говоритъ Либихъ, къ „Лапласовскому уму“ Дю-Буа-Реймона“, было вполне естественно съ обычнымъ жаромъ ренегатовъ— да простятъ мнѣ читатели это выраженіе,—отдаться новому ученію и видѣть въ немъ окончательный вѣнецъ возможнаго для чело-вѣка научнаго знанья. Подъ ихъ вліяніемъ естествоиспытатели стали по преимуществу исповѣдниками матеріалистическаго міросозерцанія и это послѣднее сдѣлалось ходячимъ и весьма распространеннымъ міросозерцаніемъ, въ особенности среди врачей. Среди философовъ однако доктрина матеріализма встрѣчала крайне мало сочувствія; ея царствованіе обуславливалось полнымъ разрывомъ между „философіей“ и „наукой“ и протесты противъ нея не изъ „научнаго“ лагеря почти не принимались въ расчетъ биологами и отчасти социологами. Поэтому поднялась цѣлая буря споровъ и негодованія, когда въ 1872 году противъ нея поднялъ свой могучій голосъ знаменитый „ученый“ Дю-Буа-Реймонъ. Онъ указалъ именно, что нашему познанію есть границы и при томъ въ двухъ направле-ніяхъ. Первую неразрѣшимую загадку составляетъ: „что такое матерія и сила, и вторую,—какимъ образомъ они могутъ мыслить. Первая загадка вытекаетъ изъ слѣдующаго: „философскій атомъ,

т. е. якобы недѣлимая дальше масса инертнаго, недѣятельнаго субстрата, отъ котораго въ глубь пустаго пространства исходятъ дѣйствующія силы, оказывается при ближайшемъ разсмотрѣніи безсмыслицей. Въ самомъ дѣлѣ, если дѣйствительно существуетъ недѣлимый, инертный, самъ по себѣ недѣятельный субстратъ, то онъ долженъ наполнять нѣкоторое, хотя бы самое ничтожное пространство. Но тогда непостижимо, почему онъ недоступенъ для дальнѣйшаго дѣленія. Сверхъ того, онъ можетъ наполнять пространство въ томъ лишь случаѣ, если онъ абсолютно твердъ, т. е. если онъ не допускаетъ проникновенія въ то же самое пространство другого тѣлеснаго начала, проявляя отталкивающую силу, обнаруживающуюся на его границѣ, но не простирающую своего дѣйствія дальше,—силу, которая немедленно становится больше, чѣмъ всякая другая данная сила. Независимо отъ другихъ возникающихъ здѣсь трудностей, предположенный субстратъ, такимъ образомъ оказывается уже не бездѣятельнымъ. Съ другой стороны, если вмѣстѣ съ динамистами видѣть въ субстратѣ лишь средоточіе центральныхъ силъ, то субстратъ этотъ не будетъ уже наполнять пространства, такъ какъ точка есть представленное въ пространствѣ отрицаніе пространства. Тогда уже не остается больше ничего, откуда могли бы исходить центральныя силы и что было бы инертнымъ, подобно матеріи“<sup>1)</sup>).

Что касается второй загадки, то „астрономическое знаніе мозга—высшее его знаніе, какое только для насъ доступно — не откроетъ намъ въ немъ ничего, кромѣ движущейся матеріи. Но нельзя придумать такого расположенія или движенія матеріальныхъ частицъ, которое позволило бы перекинуть мостъ въ область сознанія“. „Движеніе можетъ породить лишь движеніе или же снова превратиться въ потенциальную энергію. При этомъ сумма энергій постоянно остается та же самая. То, что опредѣляется этимъ закономъ,—только это и можетъ происходить въ тѣлесномъ мірѣ, не больше и не меньше: механическая причина разрѣшается чисто механическимъ дѣйствіемъ. Такимъ образомъ для духовныхъ процессовъ, протекающихъ въ мозгу наряду съ процессами матеріальными, нашъ разумъ не можетъ усмотрѣть достаточнаго основанія. Они стоятъ внѣ закона причинности и уже по одному этому столь же мало доступны

<sup>1)</sup> Дю-Буа-Реймонъ. О границахъ познанія природы, стр. 11.

нашему пониманію, какъ какое нибудь *mobile perpetuum*. Но и помимо того они непостижимы“. „Какую связь въ самомъ дѣлѣ, можно вообразить себѣ между опредѣленными движеніями опредѣленныхъ атомовъ въ моемъ мозгу съ одной стороны, а съ другой—первоначальными для меня, недоступными для дальнѣйшаго опредѣленія. недопускающими отрицанія фактами: „Я чувствую боль, чувствую удовольствіе, имѣю во рту нѣчто сладкое, обоняю запахъ розы, слышу звукъ органа, вижу красное“, и столь же непосредственно вытекающей отсюда достовѣрностью: „слѣдовательно—я существую“. „Если способъ расположенія и движенія атомовъ для нихъ не безразличенъ, то пришлось-бы признать, что уже каждый отдѣльный атомъ одаренъ сознаниемъ, на подобіе монады. Но это не объяснило бы сознания вообще и ничуть не способствовало бы объясненію объединеннаго сознания у индивида“.

„Какъ въ пониманіи матеріи и силы, точно также и въ пониманіи духовной дѣятельности изъ матеріальныхъ условій, человечество, не смотря на всѣ открытія естествознанія, не сдѣлало за два тысячелѣтія никакого существеннаго приобрѣтенія, — да и никогда не сдѣлаетъ“.

Въ Лапласовскомъ умѣ „мы имѣемъ мѣрило нашей собственной способности или, вѣрнѣе, нашего безсилія. Наше познаніе природы заключено слѣдовательно, между двумя границами, на вѣки положенными ему, съ одной стороны, нашей неспособностью постичь матерію и силу, а съ другой—невозможностью объяснить духовные процессы изъ ихъ матеріальныхъ условій“.

„По отношенію къ загадкамъ тѣлеснаго міра естествоиспытатель давно уже привыкъ съ мужественнымъ отреченіемъ высказывать свое *ignogamus*“.

„По отношенію же къ загадкѣ, что такое матерія и сила и какимъ образомъ онѣ могутъ мыслить, онѣ разъ навсегда должны рѣшиться на гораздо болѣе тяжелое признаніе выражаемое приговоромъ: *ignogabimus*“.

Эта рѣчь возбудила такое вниманіе къ себѣ, какое рѣдко выпадаетъ и на долю ученыхъ произведеній, и явилась поворотнымъ пунктомъ для міросозерцанія многихъ естествоиспытателей. Въ ней въ сущности заключается 3 утвержденія.

1) Что нашъ внутренній опытъ есть фактъ самъ по себѣ существующій и при томъ болѣе безспорнаго и безусловнаго значе-



нія, чѣмъ „матерія и сила“, а потому „матеріализмъ“ далеко не есть безспорная научно-философская теорія. Это прямо не ставится задачей рѣчи, и не формулируется съ опредѣленностью, но вытекаетъ съ очевидностью изъ многихъ мѣстъ рѣчи.

2) Что на лицо двухтысячелѣтнее безплодіе попытокъ рѣшить, что есть матерія, сила и какъ они могутъ мыслить.

3) Что причина указаннаго во 2) есть та, что здѣсь—область, гдѣ прогрессъ немислимъ, и потому здѣсь предѣлъ нашего познания навсегда.

Рѣчь возбудила большое сочувствіе философовъ, дала толчекъ новымъ усліямъ борьбы съ матеріализмомъ и послужила поводомъ къ ликоваціямъ въ лагерѣ теологовъ, гдѣ, подъ ея вліяніемъ стало почти общепризнаннымъ „банкротство натуралистическаго міросозерцанія“. (По русски напр. первый переводъ рѣчи былъ сдѣланъ въ 1897 г. въ „Православномъ Обзорѣніи“).

Къ настоящему времени постепенно все больше и больше общая тенденція философской мысли идетъ въ сторону отъ матеріализма и снова все болѣе и болѣе сначала въ Западной Европѣ а потомъ и у насъ получаетъ силу философскій „идеализмъ“.

Представители естествознанія, сколько нибудь затронутые философскимъ теченіемъ, однако, въ большинствѣ случаевъ, не находя способа формулировки своихъ воззрѣній, являются странными эклектиками, признавая разомъ и матеріализмъ и, въ крайне неопредѣленной формѣ, идеализмъ или религіозное міровоззрѣніе оставивъ въ то же время всякія попытки логически слить ихъ вмѣстѣ. Этимъ однако всего лучше иллюстрируется то почти банальное въ философской литературѣ положеніе, что нѣтъ человѣка безъ философіи: есть лишь люди съ философіей, сколько нибудь систематизированной изученіемъ предмета, и кустари-философы, философствующие въ одиночку по своему крайнему разумѣнію.

Задачей настоящей лекціи и является, разбирая „матеріализмъ“ по мѣрѣ силъ обсудить, возможность философскаго синтеза указанныхъ ходячихъ противорѣчій. Попытки такого синтеза послѣ Дю-Буа-Реймона весьма немногочисленны; преобладаетъ въ сущности критицизмъ безъ созидательнаго синтеза. Въ результатѣ создалась общая тенденція критическаго отношенія къ матеріализму и материалистическому міровоззрѣнію. Въ этомъ приняли участіе какъ очень многіе философы, такъ и естествоиспытатели.

Суровое и безнадежное „ignorabimus“ Дю-Буа-Реймона однако не остановило пытливой мысли человечества и разгадка его загадки по прежнему влечетъ къ себѣ умы ученыхъ. Въ этомъ отношеніи мы отмѣтимъ нѣсколько наиболѣе важныхъ попытокъ. Наиболѣе популярной изъ нихъ является такъ называемый психофизическій монизмъ или психофизическій параллелизмъ. Онъ сводится къ тому, что „психическое“ и „физическое“ принимаются существующими—одновременно, какъ двѣ стороны одного и того же явленія, но при томъ такъ, что между ними никакого взаимодействія нѣтъ, а лишь совмѣстное существованіе. „Категорія пространства“ приложима лишь къ „физическому“ и не приложима къ „психическому“. По этой теоріи мы не можемъ поэтому напр. говорить, что такая то мысль имѣетъ мѣсто въ такой-то части головного мозга. Эта точка зрѣнія чрезвычайно удобна, какъ формула, дающая возможность во многихъ случаяхъ обсудить вопросы физиологін и психологін органовъ чувствъ, воздавая должное философіи и естествознанію и въ то же время обходя спорные вопросы того и другого. Вундтъ однако считаетъ это теорію методологическимъ приѣмомъ изслѣдованія. Въ былое время Спиноза, потомъ Фехнеръ поддерживали ее, какъ метафизическую систему. Нынѣ на подробной точкѣ зрѣнія стоятъ Ферворнъ, Паульсенъ, Эббингаузъ и нѣкоторые другіе философы. Надо сказать однако, что психофизическій монизмъ не представляетъ чего-либо выкристаллизовавшагося окончательно и разныя его формулировки близко подходятъ съ одной стороны къ матеріализму, съ другой—къ спиритуализму.

Въ настоящее время разбираемыми вопросами занялся извѣстный физико-химикъ Оствальдъ. вмѣсто силы и матеріи онъ беретъ за исходную точку энергію. То что онъ понимаетъ подъ нею имѣетъ повидимому много общаго съ тѣмъ представленіемъ „энергін“, которое въ свое время установилъ знаменитый физиологъ Іоганнесъ Мюллеръ для объясненія различія логич. особенностей мозга и периферическихъ чувствующихъ аппаратовъ, тѣхъ особенностей, которыя выражаются свойственной каждому ощущенію своеобразной окраской: „я чувствую тепло“, „я чувствую запахъ фіалокъ“, „я слышу аккордъ“ и т. д. Законъ Müller'a носитъ названіе „закона специфической энергій“. Оствальдъ предлагаетъ разсматривать сознаніе, какъ свойство особаго рода нервной энергій, именно такой, какая дѣйствуетъ въ центральномъ органѣ. Что все внѣшнія явленія

могутъ быть представлены, какъ процессы превращенія энергій. находитъ самое простое объясненіе въ томъ, что даже сами процессы сознанія имѣютъ энергетическій характеръ, и этотъ характеръ ихъ отпечатлѣнъ на всѣхъ внѣшнихъ явленіяхъ нашего опыта. Три свѣтъ энергетическаго міросозерцанія не страшны тѣ загадки, которыя заставили Дю Буа Реймона сказать свое „ignogabimus“. „Столь же легко мыслить, что энергія центральной нервной системы обуславливаетъ сознаніе, какъ и то, что кинетическая энергія обуславливаетъ движеніе“. „Энергія, которая связана съ сознаніемъ, есть высшая и наиболѣе рѣдкая форма энергій изъ всѣхъ тѣхъ, которые мы знаемъ. Она возникаетъ только въ органахъ особенно развитыхъ и мозгъ различныхъ людей обнаруживаетъ весьма значительное различіе въ отношеніи количества и дѣйствія этой энергій. Мы не должны удивляться тому, что такая энергія возникаетъ только при особыхъ условіяхъ. Къ образованію электрической энергій давленіемъ способны среди безчисленныхъ кристалловъ лишь относительно немногіе и имѣнно тѣ, въ которыхъ существуютъ одностороннія оси. Открытые въ самое послѣднее время лучи урана и нѣкоторыхъ другихъ элементовъ—это формы энергій, которыя встрѣчаются еще рѣже и условія возникновенія которыхъ еще болѣе ограничены“.

На этомъ же пути мы избѣгаемъ и другого затрудненія. Разъ мы знаемъ изъ опыта, что у человѣка съ „матеріей его мозга связанъ его умъ, то трудно понять, почему не связанъ этотъ умъ со всякой другой матеріей“, „И это затрудненіе исчезаетъ передъ энергетикой“. „Особые виды энергій требуются для возникновенія особыхъ условій“. „Противъ прежнихъ попытокъ подвести подъ общій законъ энергій энергію духовную часто приводилось возраженіе, что законъ сохраненія къ ней не приложимъ. Такое мнѣніе основано на томъ заблужденіи, будто духовная энергія должна быть сохранена какъ таковая. Но энергетика не даетъ рѣшительно никакого повода для такого заключенія, потому что вовсе нѣтъ такого закона, что всякая энергія сохраняется въ *своемъ видѣ*, а существуетъ только законъ *сохраненія всей суммы энергій, существующей въ мірѣ*“.

Построеніе Оствальда имѣло бы очень большую важность, какъ полнѣ согласное съ фізіологіей чувствъ, если бы не одно большое мнѣніе: механическія понятія матерія („масса“), сила, энергія и

т. д. тѣсно связаны другъ съ другомъ. Энергія, какъ извѣстно, опредѣляется выраженіемъ  $-\frac{mv^2}{2}$ , т. е. половина произведенія массы на квадратъ скорости, т. е. по существу дѣла здѣсь мы сталкиваемся, если продумать дѣло до конца съ скоростью, т. е. съ силой и матеріей—съ тѣмъ же, о чемъ въ свое время съ такой безнадежностью высказался Дю Буа Реймонъ. Слѣдовательно, если бы Оствальдъ понималъ подъ „энергіей“ именно то, что подъ нею понимается, онъ имѣлъ бы противъ себя тѣ же возраженія, что и противъ митеріализма. Слабое мѣсто его интереснаго построенія однако въ томъ, что онъ имѣнно этотъ вопросъ оставляетъ открытымъ. „Можетъ ли это бытъ уоовлетворительно выполнено съ помощью, современнаго понятія энергіи, или же это понятіе, должно быть для этой цѣли подвергнуто дальнѣйшему развитію,—это намъ пока рѣшать еще рано“ говоритъ онъ<sup>1)</sup>.

Такимъ образомъ естествознаніе не даетъ намъ отвѣта на загадку Дю Буа Реймона и приходится искать другихъ путей для ея рѣшенія и именно въ философіи. Усилія доминирующаго теченія философіи послѣдняго времени направлены были на доказательство различными путями и пропанду идеи неправильности матеріализма, на доказательство того, что онъ—ничто иное, какъ та же неосновательная метафизика, противъ которой онъ стремится бороться. И несомнѣнно, философія достигла въ этомъ отношеніи блестящихъ результатовъ. Въ частности у насъ въ Россіи эта побѣда у всѣхъ на глазахъ. Всякому теперь у насъ извѣстны имена Влад. Соловьева, Булгакова, Трубецкихъ, Ник. Бердяева и другихъ. Всякій знаетъ, что теперь на Руси время философскаго идеализма. Однако естествоиспытателя при чтеніи идеалистическихъ этюдовъ охватываетъ чувство неудовлетворенности всякому естествоиспытателю тогда становится яснымъ, что все самое дорогое, самое цѣнное приобрѣтеніе нашей науки въ нихъ встрѣтило лишь суровыхъ, едва снисходящихъ судей, едва и съ неохотой терпящихъ нашъ языкъ и наши разсужденія. Здѣсь въ сущности лишь плохо прикрытая старая рознь философіи и науки, съ которой мы начали нашу лекцію.

<sup>1)</sup> Оствальдъ. Naturъ-философія. Переводъ (написано въ 1901 году).

<sup>2)</sup> Оствальдъ. Naturъ-философія. Перев. Котляра, стр. 6.

Однако современная наука имѣетъ теченія, которыя при сопоставленіи съ однимъ направленіемъ философіи даютъ возможность удовлетворительнаго примиренія враждующихъ сторонъ. Я говорю о Mach'ѣ и особенно Maxwell'ѣ съ одной стороны и о Рихардѣ Авенариусѣ съ другой. Mach единственно возможной задачей нашего знанія считаетъ „чистое описаніе“ явленій. Такимъ всегда является и останется то, что составляетъ напр. содержаніе механики. Это воззрѣніе является такимъ образомъ строго-позитивнымъ. Подходящей, но нѣсколько отличной точкой зрѣнія пользовался другой, знаменитый, физикъ Maxwell. Онъ приобрѣлъ извѣстность математическимъ истолкованіемъ работъ Faraday'я и кромѣ того,—что насъ особенно и интересуеетъ—широкимъ пользованіемъ методомъ моделированья физическихъ явленій. Онъ не стремился опредѣленно создать изъ этого метода философской теоріи, онъ только весьма широко примѣнялъ этотъ методъ, какъ служебный при изслѣдованіи физическихъ явленій. Такъ, описывая явленія электрическія, онъ пользуется напр. двумя моделями: первое—извѣстной аналогіей между электрическими явленіями и теченіемъ жидкости по трубкамъ, предполагая электричество движущимся по проводнику, второе—допуская его движеніе вдоль проводника по окружающей проводникъ средѣ; при этомъ онъ выяснялъ, насколько явленіе подходит подъ первое или второе представленіе. Описывая магнитныя явленія, онъ вводитъ представленіе о такъ назыв. магнитныхъ силовыхъ линіяхъ, которыя практически можно усчитывать и т. д. Однако есть важная особенность его метода: онъ вовсе не настаиваетъ на томъ, что утвержденія его фактически соотвѣтствуютъ дѣйствительности, для него эти утвержденія—лишь модели явленій важныя тѣмъ, что онѣ конкретизируютъ явленія, тѣмъ позволяютъ нашему уму мыслить просто и опредѣленно даже самыя сложные процессы. Здѣсь слѣдовательно „описаніе“ Маха, но уже другого оттѣнка, болѣе неуязвимаго научно, ибо не утверждается ничего, кромѣ того, что даетъ опытъ и его „модель“. Такому трактованію предмета не страшны никакія будущія изслѣдованія: всегда дѣяна правильно сдѣланнаго остается—измѣнится лишь модель—она можетъ лишь охватить больше сторонъ явленій и такимъ образомъ усовершенствоваться; при всякой новой „теоріи“—прежнее описаніе разгружается, но матеріалы, изъ которыхъ оно было построено, появляются въ новомъ монументѣ на хорошемъ мѣстѣ „го-

ворить о подобныхъ случаяхъ Duhem въ "L'evolution de la mecha-  
nique" (стр. 347). Такойъ методъ, конечно является и вполне фило-  
софскимъ, ибо учитываетъ всю ограниченность человѣческаго духа.  
Такимъ образомъ этотъ методъ въ сущности то же самое, что мы  
пымѣемъ, напр. въ алгебрѣ. Рѣшая задачу мы предполагаемъ не-  
извѣстное  $x$  извѣстнымъ, смотримъ, каковы будутъ его соотношенія  
или дѣйствія при этомъ допущеніи, этимъ *конкретизируемъ* его и  
сообщаемъ ему магическую силу. Въ этомъ же сила и всѣхъ фор-  
мулъ и выкладокъ математики.

Методъ Махвелл'я оставляетъ далеко позади себя методъ Ма-  
ска, представляя въ сущности лишь дальнѣйшее развитіе послѣд-  
няго, болѣе согласное съ научными и философскими фактами.  
Весьма важное, даже необходимое дополненіе Махвелл'я представ-  
ляетъ Авенариусъ. Въ сущности то, чѣмъ былъ Махвелл для физики,  
тѣмъ является Авенариусъ для философіи. Своему главному сочи-  
ненію онъ придалъ названіе „Критика чистаго опыта“; подчеркивая  
тѣмъ свою связь съ Кантомъ, Авенариусъ указываетъ, что „величай-  
шій изъ философовъ критиковъ—Кантъ“ остановился „какъ разъ  
на томъ пунктѣ, гдѣ „критика чистаго разума“ могла бы перейти  
въ „критику чистаго опыта“. для „критики“ же „чистаго опыта“  
недостаточно открыть примѣнъ въ томъ, что считалось за чистый  
опытъ; она должна перейти отъ критич. анализа къ дальнѣйшему,  
дополняющему методу, который присоединилъ бы къ отрицатель-  
ному результату критики—положительный и тѣмъ увеличилъ бы  
ее цѣнность“<sup>1)</sup>. Кантъ показалъ, что основныя понятія о времени,  
пространствѣ и причинности апріорны и что вообще мы знаемъ не  
внѣшній міръ, а наши собственныя понятія, нашъ собственный  
„внутренній міръ“. Однако этотъ выводъ благодаря многимъ тем-  
нымъ и труднопонятнымъ мѣстамъ его сочиненій не устранилъ спо-  
ровъ о „мірѣ внѣшнемъ“ и „мірѣ внутреннемъ“, т. е. въ конечномъ  
счетѣ загадки Дю Буа Реймона. Въ основныхъ пунктахъ Авенариусъ  
кантіанецъ. вмѣстѣ съ тѣмъ онъ ближе всего намъ, естествоиспы-  
тателямъ, потому что онъ является—своеобразнымъ впрочемъ—реа-  
листомъ: онъ считаетъ необходимымъ подчеркнуть признаніе прин-  
ципальной реальности внѣшняго міра, ибо всякое другое предполо-

<sup>1)</sup> Авенариусъ. Философія, какъ мышленіе о мірѣ сообразно принципу  
наименьшей мѣры силъ. Переводъ Федорова, Петербургъ, 1899, стр. 27.

женіе о сущности внѣшняго міра будетъ болѣе нелѣпнымъ, чѣмъ это. Относительно той же загадки, о которой высказался Дю Буа Реймонъ, Авенариусъ говоритъ. „Неужели міръ устроенъ такимъ образомъ, что онъ представляется цѣлостнымъ и свободнымъ отъ противорѣчія лишь для поверхностнаго взгляда, а cadaго, кто пытается глубже охватить его совокупность, приводитъ къ заблужденіямъ и притомъ тѣмъ вѣрнѣе, чѣмъ осторожнѣе и послѣдовательнѣе дѣйствуетъ мыслитель? Или же міръ въ основѣ цѣлостенъ и свободенъ отъ противорѣчія и нѣкій „злой духъ“ водитъ въ кругу какъ разъ того рѣшительнаго мыслителя, который пытается бытъ послѣдовательнымъ? Въ первомъ случаѣ—на чемъ основана неизбѣжность противорѣчія, къ которому до сихъ поръ приводились всякія попытки дѣйствительно общаго разсмотрѣнія міра? Во второмъ—кто этотъ „злой духъ“, заставляющій погибать человѣка алчущаго и жаждущаго истиннаго познанія о мірѣ“.

Отвѣтъ Авенариус'а сводится въ общемъ къ слѣдующему: непремѣннымъ требованіемъ философіи, важнѣйшимъ условіемъ всякой критики, въ томъ числѣ и самокритики и совершенствованія онъ ставитъ „полное сознаніе того, что мы *знаемъ* и чего мы *хотимъ*“. Для правильныхъ выводовъ необходимо самое точное разграниченіе того, *что дано въ опытѣ* и гдѣ *объясненіе опыта*, т. е. гдѣ нѣчто нами привнесенное. Примѣнительно къ Махвеллю мы слѣд. можемъ сказать,—эта задача сводится къ различію, „гдѣ фактъ“ нашего сознанія и гдѣ его „модель“, нами придуманная. Очевидно конечно, что противопоставленіе „матеріальнаго“ и „духовнаго“ вовсе не есть изначально, вовсе не дано въ опытѣ, а есть смѣшеніе факта въ сознаніи съ нашей теоріей,—нашей „моделью“ явленія. Ибо сознаніе не дуалистично, а всегда вполне моипстично. Это снабженіе тѣлеснаго „духовнымъ“ Авенариусъ называетъ „интроспекціей“, вкладываніемъ чего то исключительно психическаго“.

Настаивающіе на объясненіи „всего“ двойственностью нашей природы, раздѣленіемъ ея на „душу и тѣло“ въ сущности разлагаютъ человѣка на два существа, изъ которыхъ духовному приписывается все то, что необъяснено тѣлеснымъ. „Подобныя объясненія *объясняютъ напередъ, все что угодно* и потому ненаучны. Въ этой невѣрной постановкѣ вопроса Авенариусъ и видитъ „злаго духа“ и причину той загадки, о которой говорилъ Дю Буа Реймонъ. Нашей

цѣлью здѣсь не является однако проведеніе идеи Avenaris'a, его ученіе сложно и не по нашимъ силамъ сдѣлать его понятнымъ въ нѣсколькихъ словахъ. Наша цѣль была показать лишь возможную перспективу рѣшенія загадки.

Теперь однако мы приходимъ къ концу нашей лекціи и время снова вернуться къ центральному, нами обсуждаемому пункту о матеріализмѣ и въ частности выше разбиравшейся рѣчи Дю Буа Реймона. Едва ли теперь можетъ быть сомнѣніе, что этотъ великій умъ въ своемъ разсужденіи не избѣжалъ общаго увлеченія матеріализмомъ, только въ нѣсколько иномъ отношеніи. Вся его рѣчь построена на принятіи одной основной предпосылки о невозможности прогресса въ области механики; эта область имъ признается въ сущности исчерпанной. Такимъ образомъ великій умъ дѣлаетъ то же утвержденіе, которое часто приходится слышать въ публикѣ чуждой наукѣ.—напр.: „физиологія—да вѣдь это наука, гдѣ все уже извѣстно“. Конечно вопросъ объ основахъ механики—вопросъ исключительный по своей практической важности и по научному объему. Однако и самъ Дю Буа Реймонъ обсуждалъ его послѣ того, какъ на его глазахъ былъ установленъ Гельмгольцемъ „законъ сохранения энергіи“. Естественно, что послѣ могучаго скачка знанія, произведеннаго установленіемъ его, на время дальнѣйшіе пути развитія механики неясны, хотя мысль даже и теперь не остановилась, и извѣстны вѣдь попытки Herz'a напр. въ этомъ же направленіи, и эти попытки не единственныя. „Развитіе механики въ сущности есть процессъ эволюціи“ говоритъ Duhem въ заключеніи *L'evolution de la mécanique* (стр. 346). И такъ, нельзя согласиться съ Дю Буа Реймономъ въ его „ignorabimus“ во—первыхъ, просто потому, что полезнѣе предоставить дать отвѣтъ на этотъ вопросъ самой наукѣ и ея изслѣдованіямъ и даже въ предѣлахъ этой лекціи мы выдѣли, какъ мысль Оствальда (на пути, въ сущности старомъ,—Юганнеса Мюллера) или Avenarius'a—ищетъ и намѣчаетъ далеко не плохой выходъ для поставленной загадки. Во вторыхъ, для будущихъ изслѣдованій важны критика метода, а не его результатовъ, Дю Буа же Реймонъ не принялъ во вниманіе, что построенія механики это лишь модель явленія, предѣлы измѣненія, т. е. окончательныя модели которыхъ научной мысли сейчасъ неизвѣстны—ибо иначе она ими бы воспользовалась, если только наука вообще можетъ говорить объ окончательныхъ моделяхъ. Его критика „астрономическаго



знанія” — критика лишь нынѣ принятой модели явленій и если бы мысленно мы помѣстили себя во многіе моменты достовѣрной исторіи человѣчества, подобныя „ignogabimus“ могли бы быть произнесены на многіе запросы, разрѣшенные многими отдѣлами изумительнаго экспериментальнаго знанія. Критика Дю Буа Реймона показываетъ только, что взятая имъ модель, есть лишь приблизительная модель, пользование которой требуетъ осмотрительности и въ этомъ собственно тотъ „хорошій матеріалъ“, который составляетъ реальное приобрѣтеніе отъ чтенія его рѣчи.

Аналогичную ошибку Дю Буа Реймона дѣлаютъ и тѣ философы, которые возводятъ „психофизическій монизмъ“, какъ напр. столь популярный Паульсенъ, въ метафизическую систему. Они дѣлаютъ ту же ошибку, въ которой столь упрекаютъ матеріалистовъ: они забываютъ, что дѣленіе на „физическое и психическое“ ничто иное, какъ конструированіе модели явленій, и нельзя философу временную, хотя и очень старую модель возводить въ предѣлы познанія. Для насъ физиологовъ „параллелистическая модель“ плоха тѣмъ, что основнаго факта физиологич. органовъ чувствъ и мозга, закона специфическихъ энергій — изъ нея вывести не удастся. Зато это удается при всей нефилософичности его, матеріализму и близкой къ нему энергетикѣ Оствальда.

Такимъ образомъ, и въ этомъ смыслѣ правильно объясняется упорство большинства лучшихъ психіатровъ и многіхъ физиологовъ, остающихся матеріалистами. Приведенная точка зрѣнія, конечно, даетъ послѣдній отвѣтъ и на стремленіе многіхъ философовъ „опровергнуть“ матеріализмъ. И въ Кіевѣ многіе изъ насъ были свидѣтелями, какъ эту задачу взялъ на себя (и мой въ томъ числѣ) талантливый учитель философіи проф. Челпановъ. Несомнѣнно хорошая сторона этихъ попытокъ состоитъ въ томъ, что доказана „нефилософичность“ матеріализма, какъ метафизической системы. Однако нельзя согласиться съ желаніемъ „опровергнуть“ матеріализмъ. Указавъ пробѣлы конкретной „модели“ или предѣлы ея примѣненія тѣмъ самымъ ее нельзя „опровергнуть“ и въ этомъ поддержка всякаго научнаго работника, который иначе долженъ бы былъ идти постоянно падающимъ подъ нимъ подмосткамъ: между тѣмъ это не такъ — „хорошіе матеріалы“ модели всегда останутся, какое бы новое зданіе ни строилось.

Итакъ вотъ въ чемъ значеніе „матеріализма“ и вотъ въ чемъ его удивительная живучесть: это есть приблизительная модель явленій организма животнаго, и при томъ модель до сихъ поръ наилучшая и даже единственная. модель конкретизирующая сложныя явленія. „Параллелизмъ“, какъ модель, въ сущности лишь затемняетъ и есть по существу скрытый дуализмъ, несостоятельность котораго уже иллюстрирована Avenarius'омъ, и многими „параллелистами“. Одинъ матеріализмъ въ сущности даетъ намъ модель, для удобнаго объясненія противоположенія—„умъ мой“, „умъ твой“ для объясненія даже того, немногаго, что извѣстно въ области локализаціи въ мозгу. Употребляя матеріалистическій языкъ, легче помнить, что это лишь способъ выраженія, чѣмъ возить съ собою постоянно тяжелую артиллерію параллелизма. Такъ химикъ всегда выражаетъ свои работы атомистически, помня что атомъ „фикція“ или, по Maxwell'ю—модель явленія. Правы по своему и научны именно въ этомъ смыслѣ психологи—соматисты, и ихъ языкъ не есть лишь нелѣпая ошибка философскаго невѣжества. Рядомъ съ этимъ необходимо однако помнить и о философіи, какъ неизбѣжной поправкѣ къ этому построенію, которая одна сулитъ намъ всеобъемлющее рѣшеніе. Пора естествовикамъ признать и, кромѣ біологовъ, это уже сознано ими,—что время отрицанія философіи и презрительнаго отношенія къ ней уже прошло. Практически большинство изъ насъ философствуютъ въ одиночку, признають, „духовное“ и многое съ нимъ связанное. Поэтому вмѣстѣ съ однимъ изъ нашихъ молодыхъ спеціалистовъ, по государственному праву (Б. Кистяковскимъ), необходимо признать, что по странной ироніи судьбы, „самый закоренѣлый естествоиспытатель болѣе кантіанецъ, чѣмъ самъ онъ воображаетъ.“

Подводя итоги всему сказанному, надо сказать, что предлагаемое рѣшеніе, лишь нѣсколько болѣе конкретное, а въ сущности то же, которое дано въ 1866 году Фридр. Альбертомъ Ланге въ его „Исторіи матеріализма“, и лишь одностороннее увлеченіе спеціалистовъ-философовъ теоріями или иначе, моделями своего философскаго цеха заставило меня, въ защиту науки, обсудить предметъ моей лекціи.

Д-ръ А. В. Леонтовичъ.

## Сказаніе о мечѣ Тюрфингѣ.

### 2. Происхожденіе исторіи Гейдрека.

Если выдѣлить изъ исторіи Гейдрека, на основаніи изслѣдованій, помѣщенныхъ въ III главѣ данной работы (см. выше, стр. 76, 69 сл.) всѣ прибавки, введенныя въ нее при сложеніи H-sag'и, то все-таки полученный остатокъ нельзя будетъ признать цѣльнымъ произведеніемъ: наоборотъ, всѣ данныя говорятъ за то, что мы встрѣчаемся здѣсь со сложнымъ продуктомъ, составленнымъ, весьма вѣроятно, постепенно изъ первоначально самостоятельныхъ частей. Легко видѣть, что первый (никогда не помогать человѣку, убившему своего господина), второй (не брать подъ свою защиту человѣка, убившаго товарища), шестой (не брать на воспитаніе ребенка человѣка, болѣе могущественнаго, чѣмъ самъ) и приведенный передъ разговоромъ о столкновеніи Гейдрека съ Роллаугомъ (не сообщать тайнъ своей любовницѣ) сошты мудраго Гофунда тѣсно связаны между собой—всѣ они относятся къ одному и тому же событію въ жизни героя: Сифка откры-

ваетъ его тайну (ср. послѣдній изъ указанныхъ совѣтовъ); узнавъ отъ нея о смерти сына, отецъ воспитанника рѣшаетъ повѣсить виновника (ср. шестой совѣтъ), а освобожденные нѣкогда послѣднимъ преступники способствуютъ выполнению такого рѣшенія (ср. первый и второй совѣты). Въ виду этого можно смѣло утверждать, что перечисленные наставленія и соотвѣтствующія имъ событія искони представляли собой одно цѣлое.

Что касается прочихъ совѣтовъ, то они, по всей вѣроятности, первоначально не имѣли ничего общаго съ предыдущими четырьмя.

Третій совѣтъ (не позволять женѣ часто посѣщать родственниковъ) и соотвѣтствующій ему рассказъ объ измѣнѣ жены Гейдрекъ стоятъ внѣ всякой внутренней связи съ 4 разсмотрѣнными наставленіями и соотвѣтствующими имъ эпизодами: и тотъ, и другой можно опустить, не измѣняя въ исторіи Гейдрекъ ни одной строки. Отсутствие же логической связи обусловлено, надо думать, исконной генетической независимостью. Между четвертымъ и пятымъ поученіемъ, съ одной стороны, и относящимся къ нимъ эпизодомъ, съ другой—нѣтъ полного соотвѣтствія, оба они, какъ читатель помнитъ, формулированы въ сагѣ слѣдующимъ образомъ: не оставаться внѣ дома до поздняго часа у своей любовницы<sup>1)</sup>; не ѣздить на лучшемъ конѣ, когда надо спѣшить. Въ рассказѣ же о смерти Сифки совершенно не говорится о томъ, чтобы Гейдрекъ торопился (ср. выше, пересказъ, стр. 38). Кромѣ того, только потерю коня можно разсматривать, какъ наказаніе, которое постигало упрямаго сына всякій разъ, какъ онъ преступалъ наставленія отца, смерть же измѣнницы Сифки могла быть для него лишь желательна<sup>2)</sup>. Эти соображенія позволяютъ думать, что четвертый и пятый совѣты съ отвѣчающимъ имъ эпизодомъ первоначально не имѣли ничего общаго. Но такъ какъ въ послѣднемъ выступаютъ Гейдрекъ и Сафка, фигурирующие въ событіяхъ, связанныхъ съ прочими наставленіями, то можно утверждать, что 4 и 5 совѣты представляютъ позднѣйшую прибавку.

<sup>1)</sup> Впрочемъ, *hjá frilla sinni* можетъ обозначать не только „у своей любовницы“ (т. е. въ ея домѣ), какъ думаетъ Гейнцель (S. 451 f.), но также „при своей любовницѣ“, т. е. съ ней; ср. словарь Fritzer'a, B. I, 1886, S. 825.

<sup>2)</sup> Ср. Heinzel, S. 452.

Вполнѣ ясно видна самостоятельность той части исторіи Гейдрека, въ которой описывается преніе его съ Гестумблинди-Одиномъ. Она начинается въ обѣихъ редакціяхъ заявленіемъ, что Гейдрекъ сдѣлался великимъ мудрецомъ. Такое заявленіе весьма важно: оно объясняетъ, какимъ образомъ Гейдрекъ могъ состязаться съ Одinomъ. Но зато оно оказывается совершенно неожиданнымъ: раньше нигдѣ не сообщается, какъ нашъ герой приобрѣлъ мудрость—вѣдь доказывая несостоятельность наставленій отца, онъ тѣмъ самымъ еще не могъ выработать навыка разрѣшать загадки. Къ тому же въ этой части не упоминаются и не предполагаются извѣстными тѣ лица и событія, о которыхъ сообщается въ другихъ эпизодахъ исторіи Гейдрека.

На основаніи предыдущаго разбора можно сдѣлать весьма важные для данной части работы выводы: стремясь представить себѣ, какъ возникла исторія Гейдрека, исследователь долженъ отказаться отъ попытки найти источникъ, изъ котораго можно было бы объяснить происхожденіе этой исторіи въ цѣломъ ея составѣ: онъ долженъ искать лишь источника тѣхъ первоначально самостоятельныхъ частей, изъ которыхъ она сложилась. Опираясь на приведенныя выше соображенія, можно нахѣтити три такихъ части: 1) первый, второй, шестой и вставленный передъ рассказомъ о посѣщеніи Роллауга совѣты и связанныя съ ними событія; 2) третій, четвертый и пятый совѣты и относящіяся къ нимъ происшествія<sup>1)</sup>; 3) преніе Одина съ Гейдрекомъ.

Рассказъ о полученіи героемъ мудрыхъ совѣтовъ и о событіяхъ, въ которыхъ они находятъ свое приложеніе, чрезвычайно распространень въ міровой литературѣ и, въ частности, не чужды древнему Сѣверу<sup>2)</sup>. Изъ извѣстныхъ мнѣ его версій я приведу сначала только тѣ, которыя обнаруживаютъ близкое сходство съ эпизодомъ исторіи Гейдрека, гдѣ идетъ рѣчь о четырехъ наставленіяхъ отца (этотъ эпизодъ я обозначая буквой *a*).

*b*. Умирая, Катонъ далъ своему сыну Катонету три слѣдующихъ наставленія: имѣя достаточно средствъ къ жизни, не поступай на

<sup>1)</sup> Представляли ли эти три совѣта одно цѣлое или же нѣтъ, опредѣлить на основаніи *N-sag*'и невозможно, такъ какъ событія, соответствующія четвертому и пятому совѣтамъ, не вошли въ составъ нашего памятника.

<sup>2)</sup> Ср. *Sögubrott af nokkrum fornkonungum i Dana ok Svía veldi*, FAS, I, 375; *Nakonar þattr Harekssonar*, FMS XI, S. 422 ff.

службу къ своему сюзерену; не освобождай осужденнаго на смерть челоуѣка, который привыкъ совершать преступленія; не сообщай своей женѣ тайнъ, не испытавъ, въ состояніи ли она хранить ихъ. Когда Катонъ умеръ, его сынъ приобрѣлъ вскорѣ симпатіи императора Рима, который сдѣлалъ его важнымъ должностнымъ лицомъ и поручилъ ему воспитаніе своего сына. Однажды, проѣзжая по городу, Катонетъ встрѣтилъ разбойника, котораго вели на висѣлицу; одинъ изъ сопровождавшихъ Катонета людей предложилъ ему освободить преступника, что тотъ и сдѣлалъ. Послѣ этого ночью герой видѣлъ сонъ, благодаря которому ему пришло на мысль, что онъ поступилъ вопреки двумъ первымъ наставленіямъ отца. Тогда онъ рѣшилъ испытать и тертье. Обратившись къ женѣ, онъ сказалъ, что хочетъ сообщить ей важный секретъ подъ условіемъ не открывать его никому. Та обѣщала. Герой рассказалъ ей, что онъ въ гнѣвъ умертвилъ своего воспитанника, сына императора, вырвалъ его сердце и, приготовивъ изъ него печенью, отправилъ родителямъ мальчика, которые и съѣли его. На другой день жена Катонета сообщила о случившемся одной дамѣ, которая въ свою очередь увѣдомила императрицу о смерти сына. Удрученная горемъ мать стала горько плакать. Явился императоръ и узналъ обо всемъ. Тотчасъ онъ велѣлъ повѣсить Катонета. Однако, послѣднему удалось отсрочить казнь до утра и извѣстить обо всемъ случившемся барона, у котораго онъ оставилъ своего воспитанника. На другой день, когда мнимый убійца былъ приведенъ на казнь, всѣ громко высказывали свое сожалѣніе, такъ какъ Катонетъ пользовался любовью, и никто не хотѣлъ взять на себя роль его палача. Тогда вызвался разбойникъ, освобожденный нѣкогда Катонетомъ отъ смерти, заявивъ, что онъ дѣлаетъ это въ честь короля. Между тѣмъ прибылъ сынъ императора и освободилъ своего воспитателя. Послѣ этого Катонетъ рассказалъ, какъ все произошло<sup>1)</sup>.

c. Sorpius, маршалъ короля Веспасіана, умирая, далъ своему сыну три слѣдующихъ совѣта: 1) не ходатайствуй объ освобожденіи челоуѣка, присужденнаго къ висѣлицѣ; 2) не приглашай къ себѣ въ гости челоуѣка, имѣющаго бѣльшую власть, чѣмъ ты самъ; 3) не открывай женѣ своихъ тайнъ. Но Памфилъ, возведенный послѣ смерти

<sup>1)</sup> Le livre du Chevalier de la tour Landry, publié par Montaiglon, Paris 1854, p. 277—290. Эта книга была окончена въ 1372 г.; см. тамъ же, Préface, p. xxviii.

отца въ маршалскій санъ, какъ-то испросилъ у императора прощеніе одному вору, приговоренному къ казни черезъ повѣшеніе. Освобожденный преступникъ предложилъ въ видѣ благодарности свою службу Памфилу; послѣдній принялъ предложеніе. Однажды молодой маршалъ пригласилъ къ себѣ Веспасіана на пиръ. Увидѣвъ большое количество золотой утвари, императоръ заявилъ, что маршалъ, какъ чиновникъ, не долженъ имѣть такого богатства, что оно болѣе приличествуетъ императору, и приказалъ своимъ слугамъ отнести драгоцѣнные предметы въ свой дворецъ. Тогда Памфилъ понялъ, что второе поученіе отца, дѣйствительно, имѣетъ основаніе, и рѣшилъ провѣрить справедливость третьяго. Съ этой цѣлью, удаливъ отъ двора императорскаго сына, съ которымъ онъ былъ въ дружественныхъ отношеніяхъ—онъ отправилъ его къ одной куртизанкѣ, которую онъ выдалъ за знатную даму, жаждавшую любви Тита—онъ сообщилъ своей женѣ, что въ гнѣвѣ убилъ Тита, и показалъ ей мѣшокъ, въ которомъ былъ спрятанъ трупъ теленка. Жена, обѣщавшая сохранить тайну, рассказала о случившемся своей подругѣ, подруга—Филиппу, императорскому совѣтнику, а послѣдній донесъ обо всемъ Веспасіану. Въ гнѣвѣ императоръ велѣлъ повѣсить своего маршала. Но изъ жителей Рима никто не захотѣлъ взять на себя роль палача, хотя за это было обѣщано 100 дукатовъ—всѣ очень сожалѣли о Памфилѣ. Лишь освобожденный имъ преступникъ согласился привести въ исполненіе распоряженіе императора. Готовясь къ смерти, Памфилъ рассказалъ о совѣтахъ отца и о своей попыткѣ провѣрить ихъ и послалъ за королевскимъ сыномъ, который явился и фактически доказалъ невинность Памфила. Маршалъ былъ восстановленъ въ своемъ достоинствѣ, но отказался отъ него, а преступникъ, котораго онъ нѣкогда освободилъ, былъ повѣшенъ <sup>1)</sup>).

*d.* На смертномъ одрѣ Rainaldo Scaglia изъ Генуи завѣщалъ своему сыну Салардо слѣдующіе три совѣта: 1) не открывай своей женѣ тайнъ, какъ бы ни любилъ ее; 2) не воспитывай ни въ коемъ случаѣ, какъ свое дитя, чужого ребенка и не дѣлать его наслѣдникомъ; 3) не ставь себя въ зависимость отъ синьора, управляющаго подданными по своему произволу. Послѣ смерти отца Са-

<sup>1)</sup> Hans Sachs, hrgg. v. Keller und Goetze, B. XIII, Tübingen 1880, S. 52—  
 8: Comedia, mit 12 personen zu spilen, von dem marschalk. mit seinem sohn,  
 und hat fünff actus (написана въ 1556 г.).

лардо женился на Теодорѣ, дочери *Odescalco Dogia*, а потомъ вскорѣ съ согласія жены взялъ приемыша Пастумія, котораго и воспитывалъ, какъ сына. Спустя нѣкоторое время Салардо переселился изъ Гануи въ Пиемонтъ, въ Монферрато, гдѣ приобрѣлъ дружбу маркиза Монферратскаго. Однажды Салардо вспомнилъ, что онъ преступилъ уже два совѣта отца, и съ нимъ ничего дурного не произошло. Онъ началъ сомнѣваться въ ихъ значеніи, но однако рѣшилъ испытать еще третій. Маркизь былъ страстный охотникъ и имѣлъ много соколовъ. Взятъ тайкомъ самаго любимаго изъ нихъ, Салардо отнесъ птицу къ своему другу и просилъ держать ее до тѣхъ поръ, пока онъ ея не попроситъ обратно. Между тѣмъ, убивъ одного изъ своихъ соколовъ, онъ показалъ его женѣ, выдалъ его за любимца маркиза и заявилъ, что сдѣлалъ это съ цѣлью избавиться отъ постоянныхъ охотничьихъ выѣздовъ, которыми его замучилъ маркизь. При этомъ онъ просилъ хранить секретъ, что та и обѣщала. Соколъ былъ сваренъ. Салардо приглашалъ жену ѣсть, но она отказалась; тогда онъ нанесъ ей ударъ въ лицо. Она въ гнѣвѣ рассказала о проступкѣ мужа маркизу. Послѣдній велѣлъ повѣсить Салардо, а его имущество раздѣлить между женой, приемнымъ сыномъ и палачомъ. Тогда Постумій выпросилъ, съ согласія матери, у маркиза, а также и у своего отца, разрѣшенія быть палачомъ послѣдняго, имѣя въ виду получить двѣ трети конфискованнаго имущества. Когда Салардо былъ приведенъ на казнь, весь народъ сожалѣлъ о немъ. Упомянутому раньше другу удалось выпросить у маркиза разрѣшенія привести мнимаго преступника, который объяснилъ, какъ все произошло, а также доказалъ свою невинность, возвративъ своему повелителю сокола. Постумій былъ прощенъ, а жена Салардо бѣжала въ монастырь. Салардо, оставивъ маркиза, отправился въ Геную <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Я пользовался изданіемъ: *Le tredici piacevoli Notti del S. Gio. Francesco Straparola da Carauaggio. Divise in due libri. Nouamente ristampate e con somma diligenza reuiste e corrette. In Vinegia. Presso Giovanni di Picchi e Fratelli MDLXXVIII.* Ср. также новое изданіе: *Le piacenti notti di M. Giovanfrancesco Straparola da Caravaggio, riprodotte sulle antique stampe a cura di G. Rua, Libro primo, Bologna 1899, p. 9—23.*

Отъ пересказанной новеллы Страпаролы ведетъ, можетъ быть, свое начало шведская народная книга, содержаніе которой довольно подробно передано въ ея обстоятельномъ заглавіи: *En mycket förunderlig Historia om en Arabisk konung, som på sin dödsbädd begärde af sin son, att han skulle lofwa*



е. Хатимъ, приближенный одного абхазскаго князя, пользовался особенной любовью своего повелителя и возбуждалъ этимъ зависть придворныхъ. Узнавъ объ этомъ, онъ высказался какъ-то передъ ними, что онъ вовсе недостоинъ зависти, именно, по слѣдующимъ причинамъ: кому много дано, отъ того много и потребуется; если кто-либо сдѣлаетъ ошибку, то просто будетъ удаленъ, но человѣку высокаго положенія грозить за это смерть, а, между тѣмъ, онъ, Хатимъ, какъ и всякій другой, способенъ впасть въ ошибку и нарушить одно изъ мудрыхъ правилъ: 1) не давайся въ обманъ передъ лестью другого; 2) не открывай секретовъ женщинъ; 3) избѣгай видѣть въ чужомъ ребенкѣ своего. Хатимъ увѣрилъ при этомъ своихъ недруговъ, что въ справедливости его словъ они очень скоро убѣдятся. Однажды, когда Хатимъ былъ очень грустенъ, жена его Ассанъ просила объяснить причину подобнаго настроенія. Герой возразилъ, что онъ не рѣшается сообщить ей этого, такъ какъ ему грозить смерть, если откроется секретъ, а между тѣмъ женщины не способны хранить тайнъ. Но Ассанъ обѣщала ему свято хранить тайну. Тогда Хатимъ разсказалъ ей слѣдующее: онъ убилъ лучшаго сокола своего князя, такъ какъ по словамъ мага, бездѣтная Ассанъ должна родить сына, съѣвъ мясо сильнаго и хорошо обученнаго сокола. Ассанъ въ тотъ же день сообщила о случившемся своей подругѣ, а вечеромъ уже вся деревня знала о проступкѣ Хатима. Между тѣмъ Хатимъ донесъ повелителю, что

sin Fader konungen samt beswärja och aflägga ed på, att han skulle lyda honom i tre ting, nemlig: Sätt icke din förtröstan till en stor herre,—adoptera icke något främmandt barn,—och upptäck icke något hemlighet för din hustru.—Sonen gjorde detta löfte åt sin Fader, men glömde det, ty wärr, snart, hwarföre sonen fördenskull måste uthärda grymt lidande hwarhelst har månne komma och slutligen blef kastad i fängelse samt blef dömt till döden. Men hurulunda han, af en trogen Wän, som frambringade en Jagt-Falk, på ett förunderligt sätt, blef räddad från skarprättaren. Lund 1847. Tryckt i Lundbergiska Boktryckeriet, 8 sid, 80.—Bäckström (Svenska Folksböcker, B. II, Stockholm 1848, S. 89, 274), отъ котораго я узналъ о существованіи этой книги, говоритъ, что содержаніе ея напоминаетъ собой первую новеллу первой ночи Страпаролы (т. е. пересказанную выше), но отступаетъ отъ нея настолько, что о непосредственномъ происхожденіи первой отъ послѣдней не можетъ быть рѣчи; вѣроятно, шведская книга есть переводъ съ какой-либо французской обработки названной новеллы. Въ какой мѣрѣ это положеніе справедливо, я не могъ проверить: шведская книга осталась, къ сожалѣнію, мнѣ недоступной, а по одному ея заглавію нельзя сдѣлать никакихъ заключеній, такъ какъ въ немъ отсутствуютъ существенныя подробности.

соколя улетѣлъ и, вѣроятно, сталъ добычей орловъ. Узнавъ же о проступкѣ своего слуги, князь приказалъ его повѣсить за обманъ. Хатимъ принесъ свои деньги въ двухъ мѣшкахъ и рѣшилъ раздѣлить ихъ на 4 части: одну онъ предложилъ своей женѣ, другую—товарищамъ, третью—своему пріемному сыну Ахмету, а четвертую—палачу. Тогда Ахмедъ заявилъ, что онъ готовъ принять на себя роль палача. «Ахъ, сынъ ехидны!» вскричалъ Хатимъ: «этого я ожидалъ!» и затѣмъ, обратившись къ присутствующимъ, объяснилъ, что справедливость трехъ его правилъ доказана. Потомъ онъ поспѣшилъ уведомить князя, что его соколъ живъ, такъ какъ женѣ своей онъ приподнесъ обыкновеннаго пѣтуха <sup>1)</sup>).

f. Предъ смертью отецъ далъ сыну такія наставленія: остерегаться 1) открывать секреты женѣ, 2) жить вблизи того мѣста, гдѣ сходится много народа, 3) давать подарки своему синьору, 4) помогать разбойнику, осужденному на смерть. Но сынъ, желая испытать справедливость словъ отца, нарушилъ всѣ данныя ему наставленія: онъ нанялъ домъ въ запрещенномъ мѣстѣ, приподнесъ подарокъ своему королю, испросилъ у послѣдняго помилованія разбойнику, осужденному на смерть; затѣмъ, похитивъ и спрятавъ сокола короля, онъ сказалъ женѣ, что убилъ и съѣлъ его. Однажды, разсердившись по какому-то ничтожному поводу, жена, стоя у окна, стала обвинять мужа въ томъ, что онъ съѣлъ королевскаго сокола. Проходившіе по улицѣ люди услышали это и донесли синьору; послѣдній приказалъ казнить виновника. Но въ виду прекрасныхъ качествъ послѣдняго, никто не хотѣлъ взять на себя роль палача. Король обѣщалъ деньги тому, кто умертвитъ преступника. Вызвался упомянутый разбойникъ. Тогда герой сообщилъ синьору, что соколъ живъ, и рассказалъ ему всю исторію <sup>2)</sup>).

<sup>1)</sup> Contes populaires de différens pays, recueillis et traduits par Xavier Marmier, deuxième série, Paris 1888, p. 135 ss.

<sup>2)</sup> Francisci Typpi Parthenopei vtriusque ivris disertissimi studiosissimique in vitam Esopi fabulatoris læpidissimi philosophique clarissimi traductio materno sermone fidelissima: et in eius fabulas allegoriæ cum exemplis antiquis modernisque finiunt fæliciter. Impressæ Neapoli sul Ferdinando Illustrissimo Sapientissimo atque Justissimo in Sicilia Regno triumphatore. Sub Anno Domini M. CCCC. LXXXV. Die XIII. Mensis Februarii. См. Exemplum къ VIII баснѣ. Существуетъ новое изданіе Имбриани, помѣщенное въ Atti della r. Accademia di Scienze morali e politiche di Napoli, vol. XX, но мнѣ не удалось его добыть.

г. Находясь на смертномъ одрѣ, одинъ человекъ велѣлъ позвать нотариуса и написалъ завѣщаніе, которымъ онъ передавалъ все имущество сыну, и которое также заключало въ себѣ три слѣдующихъ наставленія: 1) не довѣрай женѣ; 2) не дѣлай благодѣянія крестьянину; 3) не ставь себя въ зависимое положеніе. Послѣ смерти отца молодой человекъ поступилъ на службу къ одному князю. Разъ во время неурожая онъ облегчилъ крестьянамъ уплату подати, которую они должны были внести князю. У князя былъ попугай-любимецъ. Отправляясь на охоту, князь поручилъ его Пеппи (такъ звали героя). Между тѣмъ, послѣдному пришло на мысль, что онъ нарушилъ наставленіе отца и съ нимъ ничего дурного не приключилось. Тогда онъ рѣшилъ сдѣлать еще пробу. Попугая князя онъ отнесъ другу, у котораго была подобная же птица. Выпросивъ послѣднюю и убивъ ее, онъ принесъ женѣ, сказавъ, что убилъ попугая князя, такъ какъ его мясо очень вкусно. Своему же повелителю онъ донесъ, что попугай палъ. Затѣмъ ссору съ женой, Пеппи ударилъ ее, она же въ гнѣвѣ рассказала о проступкѣ мужа князю. Послѣдній велѣлъ повѣсить своего слугу въ 24 часа, несмотря на увѣренія послѣдняго, что слова жены—неправда. Когда его привели къ висѣлицѣ и спросили, кто жаляетъ казнить его, то вызвался одинъ изъ облагодѣтельствованныхъ имъ крестьянъ. Пеппи попросилъ позволенія держать рѣчь и рассказалъ, какъ все было. Въ это время прилетѣлъ попугай и сѣлъ на плечо князя—птицу выпустилъ другъ Пеппи, котораго онъ заранѣе просилъ это сдѣлать <sup>1)</sup>).

л. Однажды между придворными короля зашелъ споръ, кому слѣдуетъ довѣрять тайны; при этомъ высказывались различныя мнѣнія, но министръ Маһаushадһа заявилъ, что открывать секреты не слѣдуетъ никому, а въ особенности—женѣ, и обѣщаль доказать это на дѣлѣ. Случилось, что улетѣлъ павлинъ короля. Поймавъ его и спрятавъ, Маһаushадһа принесъ другого подобнаго своей женѣ, дочери короля, и приказалъ его сварить и не говорить объ этомъ никому. Затѣмъ, одѣвъ богато какую-то гетеру, похожую очень на одну изъ женъ ко-

<sup>1)</sup> Lu Cuntu di li tri Arrigordi lassatti pri testamentu. Novellina popolare siciliana raccolta in Alcamo. Fr. Mirabella (Arcivio per lo studio delle tradizioni popolari, vol. XIII, Torino-Palermo, 1894, p. 188—194).

роля, онъ привелъ ее домой и велѣлъ супругѣ не сообщать о случившемся никому. Но королевская дочь сильно разсердилась, полагая, что мужъ обманываетъ ее отца, и рассказала послѣднему обоихъ проступкахъ мужа. Король велѣлъ повѣсить министра. Хотя палачи и издѣвались надъ мнимымъ преступникомъ и угрожали ему, но никто не намѣревался его убивать. Всѣ жители сожалѣли и плакали. Между тѣмъ, одинъ король, лишившійся своей страны и нашедшій пріютъ и поддержку у Маһаushadha, взялъ на себя роль палача. Когда министра вывели за городъ, одна брахманка, которой онъ обѣщаль мѣру ячменя, и которая не получила ее по винѣ надсмотрщика, схватила героя за платье и стала требовать обѣщанное. Тогда Маһаushadha сказалъ: «Король не бываетъ другомъ, палачъ не имѣеть знакомыхъ, женщинамъ не слѣдуетъ ввѣрять тайнъ, не должно ѣсть павлиньего мяса, брахманкѣ Atmavig'ѣ не должно сообщать, что имѣешь ячмень». Призванный къ королю, заинтересованному его изреченіями, Маһаushadha объяснилъ ихъ значеніе. Послѣ этого онъ былъ возстановленъ въ своемъ достоинствѣ <sup>1)</sup>.

i. Въ Персіи жилъ баронъ, пользовавшійся благосклонностью своего короля. Разъ онъ прочелъ въ одной книгѣ между прочимъ три слѣдующихъ изреченія, запавшія ему въ душу: 1) не освобождай присужденнаго къ висѣлицѣ, потому что онъ повѣсиль тебѣ; 2) не сообщай слишкомъ легкомысленно тайнъ своей женѣ; 3) не доводи себя до необходимости подвергать испытанію любовь къ себѣ твоего господина. Какъ-то однажды, объѣзжая страну, баронъ узналъ въ одномъ городѣ, что нѣкій рыцарь присужденъ къ повѣсенію; онъ выпросилъ ему помилованіе у короля. Король Персіи получилъ въ подарокъ кольцо; оно очень понравилось барону, который сталъ просить его себѣ. Король исполнилъ его просьбу, но подъ условіемъ, что онъ не долженъ никому ни рассказывать о немъ, ни давать его, и что въ противномъ случаѣ онъ будетъ повѣшенъ. Однако, женѣ барона удалось вывѣдать тайну своего мужа. Какъ-то во время ссоры жена барона, владѣя его секретомъ, выказала себя чрезвычайно дерзкой въ отношеніи къ нему, за что онъ нанесъ ей ударъ въ лицо. Тогда она топравилась къ королю и обвинила мужа въ государственной измѣнѣ,

<sup>1)</sup> Schiefner, Indische Erzählungen, S. 701 ff. (Mélanges asiatique de l'academie de St.-Petersbourg, t. VII, СПб. 1876).

а для подтвержденія показала кольцо. Король осудилъ барона на смерть. Когда его вели на висѣлицу, всѣ сожалѣли о немъ, и никто не хотѣлъ взять на себя роль палача за исключеніемъ рыцаря, освобожденнаго нѣкогда имъ отъ смерти. Но барону удалось еще выпросить разрѣшенія говорить съ королемъ. Онъ разсказалъ своему повелителю, что два изреченія, съ которыми онъ нѣкогда познакомился, уже оправдались, остается третье, и просилъ о помилованіи, которое и получилъ<sup>1)</sup>.

к. Разъ визирь увидѣлъ, что шутъ дѣлаетъ шары изъ земли. Онъ спросилъ, что они обозначаютъ. Тотъ отвѣтилъ: „Одинъ шаръ представляетъ собой голову того, кто доставляетъ радость султану; другой—того, кто покидаетъ родственниковъ и друзей и присоединяется къ чужимъ людямъ, третій — того, кто сообщаетъ свои секреты женѣ“. Услыхавъ эти слова, визирь рѣшилъ провѣрить ихъ справедливость. Онъ похитилъ и спряталъ оленя, который особенно нравился султану; затѣмъ, убивъ другого оленя, онъ принесъ его своей женѣ и выдалъ за любимца своего повелителя. Спустя нѣкоторое время визирь затѣялъ ссору съ женой и нанесъ ей ударъ. Тогда она донесла султану о проступкѣ мужа, и тотъ въ гнѣвѣ велѣлъ его обезглавить. Всѣ радовались и говорили: „Пойдемъ, посмотримъ на казнь визира“. Только родственники и друзья, которыхъ онъ покинулъ ради чужихъ, сожалѣли о немъ и плакали. Визирь испросилъ позволенія говорить съ султаномъ, разсказалъ, какъ все было, и доставилъ оленя невредимымъ<sup>2)</sup>.

л. Одинъ мудрецъ, по имени Коти, оставилъ, вопреки обычаю, четыре пряди волосъ на головѣ своего ребенка, говоря, что онѣ знаменуютъ собой четыре извѣстныхъ ему и его женѣ истины. Король Дамель, его другъ, часто просилъ мудреца сообщить ему эти истины, но не получалъ никакого отвѣта. Тогда онъ обратился съ той же просьбой къ женѣ Коти, которая сказала: «Первая истина: король не можетъ быть ни покровителемъ, ни другомъ; вторая: ребенокъ отъ перваго брака—не сынъ, а междоусобная война; третья: слѣдуетъ любить жену, но не сообщать ей секретовъ; четвертая: старики необходимы въ странѣ». Дамель былъ страшно разгнѣванъ въ виду первой

<sup>1)</sup> Della ingratitude e di molti esempi d'essa издано по рукописи XV в. аббатомъ Antonio Geruti въ Il Propugnatore, vol. II, Bologna 1869, p. 411—414,

<sup>2)</sup> Rubens Duval, Les dialectes néo-araméens de Salamas, Paris 1833.

истины и приказалъ казнить Коти. Но одинъ старикъ изъ наиболѣе вліятельныхъ выпросилъ ему помилованіе. Однако, прежде чѣмъ вѣсть объ этомъ дошла до судей, Коти былъ приведенъ къ мѣсту казни. Здѣсь сынъ жены мудреца отъ перваго брака спялъ съ него одежды, заявляя, что онѣ принадлежать ему по праву наслѣдства, и что онъ не хочетъ, чтобы ихъ испачкала кровь. Когда сообщили о помилованіи, Коти объяснилъ, что его правила справедливы<sup>1)</sup>.

*т.* Одинъ отецъ совѣтовалъ сыну 1) не усыновлять чужое дитя. 2) не называть сыщика кумомъ, 3) не ввѣрять тайнъ женѣ. Сынъ безнаказано преступилъ два первыхъ поученія. Однажды въ спорѣ онъ убилъ человѣка, по этому никто не зналъ. Впослѣдствіи онъ разсказалъ о преступленіи женѣ, она—сыщику, а тотъ выдалъ его. Приговоренный къ висѣлицѣ, онъ завѣщалъ часть имущества своему палачу, а часть томѣ, *chi gli facea il tigariedi*. Тогда пріемный сынъ взялъ на себя роль палача, а сыщикъ второго изъ названныхъ лицъ<sup>2)</sup>.

*н.* Умирая, одинъ человѣкъ сказалъ сыну: «Не дѣлай четырехъ дѣлъ: 1) не говори женѣ, что у тебя на сердцѣ; 2) не дружись съ *gâcelî* (проституткой изъ низшей касты), а дружись съ *gândî* (проституткой изъ высшей касты); 3) не дружись съ малымъ богачемъ, а дружись съ большимъ богачемъ; 4) не дружись съ царскими слугами, а дружись съ царемъ». Сынъ рѣшилъ подвергнуть испытанію совѣты отца и подружился съ малымъ и большимъ богачами, съ царскими слугами и царемъ, съ *gândî* и *gâcelî*. Затѣмъ, похитивъ царскаго павлина и спрятавъ его, онъ сообщилъ женѣ о совершенной имъ кражѣ, но вмѣсто павлина принесъ ей зарѣзаннаго голубя и сказалъ: «Зажарь мнѣ этого павлина». На другой день жена разсказала о случившемся нѣкоторымъ женщинамъ, тѣ—мужьямъ, и слухъ о похищеніи павлина дошелъ до царя, который велѣлъ повѣсить мнимаго виновника. Передъ казнью *gâcelî* взяла шаль героя, малый богачъ—тюбанъ, а большой богачъ и *gândî* предложили царю въ видѣ выкупа за осужденнаго столько золота и серебра, сколько онъ вѣситъ. Ведя на мѣсто казни героя, слуги царя, которымъ онъ давалъ по тысячѣ рупи, били его, приговаривая: «Скорѣй, поворачивайся!» Герой возвратилъ павлина

<sup>1)</sup> Recueil de contes populaires de la Sénégambie, recueillis par Bérenger-Féraud, Paris 1885, p. 12—14.

<sup>2)</sup> Cento racconti raccolti de Michele Somma della città di Nola, Amalfi 1892, p. 28.

царю, объяснилъ ему, почему онъ все затѣялъ, и былъ имъ награжденъ<sup>1)</sup>).

о. Треть братьямъ за службу Соломонъ предложилъ золото или совѣты. Они предпочли золото, но потомъ младшій возвратился и, отдавъ деньги, просилъ совѣтовъ. Король далъ ему наставленія: 1) во время путешествія вставай рано и въ вечернюю пору подумай о ночномъ пристанищѣ; 2) не переходи вздувшійся отъ дождей потокъ, но подожди, пока вода спадетъ; 3) не довѣрай никогда женщинѣ, даже своей женѣ, тайпъ. Младшій догналъ своихъ братьевъ. Вечеромъ, помня совѣтъ, онъ остановился на ночлегъ, но его братья пошли дальше. На другой день онъ нашелъ ихъ замерзшими: ихъ ночью застигъ сильный морозъ въ полѣ, гдѣ не было дровъ. Онъ взялъ ихъ деньги и пошелъ дальше. У одного вздушагося потока онъ ждалъ, пока спадетъ вода. Но два королевскихъ служителя рѣшили перейти потокъ съ нагруженными мулами и утонули. Когда вода спала, молодой человекъ нашелъ два мѣшка золота, упавшіе съ муловъ. Придя домой, онъ рассказалъ женѣ, какъ онъ добылъ деньги. Когда онъ однажды поссорился съ ней и началъ ее бить, она стала кричать: «Ты хочешь убить меня такъ же, какъ братьевъ и королевскихъ служителей». Онъ былъ тогда задержанъ, какъ убійца. Отправленный къ королю, узнавшему его, онъ рассказалъ все, какъ было<sup>2)</sup>.

р. Одинъ отецъ рекомендовалъ своему сыну не садить сосны во дворѣ, не держать голубей и не ввѣрять тайпъ своей женѣ. Послѣ того, какъ сынъ къ своему вреду не послѣдовалъ первымъ двумъ совѣтамъ, онъ рѣшилъ испытать третій и рассказалъ своей женѣ, что онъ убилъ нѣкоего человека и закопалъ его въ саду. Однажды онъ, поссорившись съ ней, хотѣлъ ее бить, но она убѣжала и выдала его, какъ убійцу. Оказалось, что онъ закопалъ въ саду пѣтуха<sup>3)</sup>.

г. Глупый сынъ одного важнаго сановника хана получаетъ отъ умирающаго отца совѣты: 1) не довѣрай тайпъ женѣ, 2) довѣрай человеку съ черной бородой и 3) блондину безъ бороды. Чтобы провѣ-

<sup>1)</sup> Индѣйскія сказки и легенды, собр. Минаевымъ, С.-Петербургъ 1876, гр. 55 сл.

<sup>2)</sup> Tendau, Fellmeiers Abende. Märchen aus grauer Vorzeit, Frankfurt a. M. 56, N XXXIV.

<sup>3)</sup> Curtze, Volksüberlieferungen aus dem Fürstentum Waldek, Arolsen 60, S. 161.

рить совѣты, онъ похищаетъ лошадь у хана, рассказываетъ объ этомъ человѣку съ черной бородой и блондину безъ бороды, которые хранятъ его тайну, а потомъ, спустя семь лѣтъ—женѣ. Она выдаетъ его. Приведенный къ хану, онъ рассказываетъ все, какъ было. Ханъ велитъ казнить жену, двухъ людей, сохранившихъ тайну, дѣлаетъ чиновниками, а за дурака выдаетъ дочь со словами: «Хоть ты и дуракъ, но отъ тебя можетъ родиться умный сынъ»<sup>1)</sup>.

г. Мужъ и жена жили въ домѣ съ виноградной бесѣдкой. Другомъ ихъ былъ сыщикъ. Однажды мужъ рѣшилъ подвергнуть испытанію друга и жену, которая хвалилась тѣмъ, что умѣетъ хранить тайны. Бросивъ въ колодезь баранью голову, онъ сказалъ женѣ, что это голова убитаго имъ человѣка. Жена рассказала сыщику. Последній донесъ судѣ. Прибыли жандармы, но нашли дверь запертой. Тогда они проникли въ домъ черезъ бесѣдку. Мнимый преступникъ заявилъ имъ, что онъ убійства не совершалъ; это и подтвердилось, когда вытащили изъ колодца баранью голову. Тогда мужъ далъ такіе три совѣта: не вѣрять секретовъ женѣ, не имѣть сыщика другомъ и непанимать дома съ виноградной бесѣдкой<sup>2)</sup>.

с. Отецъ на смертномъ одрѣ завѣщалъ сыну: 1) не вѣрять секретовъ женѣ, 2) не вести дружбы съ сипаемъ, 3) не садить колючаго дерева во дворѣ. Герой рѣшилъ эти совѣты проверить. Онъ приобрѣлъ дружбу сипая, посадилъ во дворѣ запрещенное дерево и, бросивъ мертвую козу въ колодець, сказалъ женѣ, что тамъ онъ скрылъ трупъ убитаго имъ человѣка. Она рассказала объ этомъ всѣмъ знакомымъ. Слухъ объ убійствѣ дошелъ до короля. Сипаю, ставшему теперь офицеромъ, было приказано привести мнимаго преступника. Онъ засталъ друга сидящимъ подъ колючимъ деревомъ. Когда преступникъ всталъ, чтобы слѣдовать за офицеромъ, его тюрбанъ повисъ на одномъ шпигѣ колючаго дерева; но не взирая на это, офицеръ повелъ его съ открытой головой къ королю. Последнему герой и рассказалъ свою исторію. Вытащили изъ колодца трупъ козы, который и послужилъ фактическимъ подтвержденіемъ его словъ<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Radloff in Erman's Archiv für wissenschaftliche Kunde von Russland, B. XXII, S. 35.

<sup>2)</sup> Fiabe, novelle e racconti popolari siciliani, raccolti ed illustrati da G. Pitré, vol. IV, Palermo 1875, p. 122—124; ср. сходный рассказъ тамъ же, vol. III, p. 278—279.

<sup>3)</sup> Thorburn, Bannú or Our Afghan Frontier, London 1876, p. 178.



Въ заключеніе остается еще упомянуть для полноты, что у Мапа сохранился рассказъ, гдѣ одинъ воинъ даетъ своему сыну, между прочимъ, слѣдующее наставленіе: *Non liberabis iusto condemnatum iudicio*. Къ сожалѣнію, рассказъ не оконченъ: какое слѣдствіе имѣло несоблюденіе этого и другихъ совѣтовъ, остается неизвѣстнымъ<sup>1)</sup>).

Равнымъ образомъ, и въ *Ruodlieb*'ѣ встрѣчается совѣтъ, запрещающій довѣрять тайны женѣ, но нѣтъ соотвѣтствующаго эпизода; поэтому трудно судить, какъ велико было сходство съ приведенными параллелями<sup>2)</sup>).

Обратимся теперь къ изслѣдованію взаимоотношенія приведенныхъ рассказовъ.

Просматривая рассказы *a, b, c, d, e, f, g, h*, легко видѣть, что они заключаютъ въ себѣ слѣдующія сходныя черты:

1) умирающій отецъ<sup>3)</sup> даетъ сыну три наставленія, изъ которыхъ одно гласитъ: не отрывай секретовъ женѣ;

2) сынъ стремится провѣрить справедливость полученныхъ совѣтовъ: преступивъ безнаказано два первыхъ изъ нихъ, онъ ввѣряетъ тайну женѣ, но она не хранитъ ея, и это повергаетъ героя въ несчастье, при которомъ обнаруживается справедливость и двухъ другихъ<sup>4)</sup>);

3) секретъ, сообщенный мужемъ женѣ, представляетъ собой рассказъ о преступленіи, котораго герой въ дѣйствительности не совершалъ;

4) при несчастьи, которое постигаетъ героя, обнаруживаетъ черную неблагодарность облагодѣтельствованный имъ человѣкъ, взявъ на себя роль его палача;

5) передъ самой казнью героя является человѣкъ или соколъ, за умерщвленіе котораго онъ былъ присужденъ къ смерти, и такимъ образомъ обнаруживается полная невинность мнимаго убійцы.

<sup>1)</sup> *Gualtheri Mapes, De nugis curialium, ed. by Th. Wright, London 1850, p. 106.*

<sup>2)</sup> *Ruodlieb, herausgegeben von Seiler, Halle 1882, S. 246.*

<sup>3)</sup> По *a*, отецъ даетъ наставленіе сыну не умирая, а изгоняя его изъ страны за братоубійство; въ *e* и *h* отецъ совсѣмъ не названъ, но всѣ эти отступленія должны быть признаны позднѣйшими искаженіями (см. ниже).

<sup>4)</sup> Въ *c* не доказывается при этомъ основательность второго совѣта, въ «—перваго, но это обусловлено забвеніемъ первоначальныхъ подробностей (см. ниже).

Имѣя въ виду подробности, общія *a, b, c, d, e, f, g, h*, врядь ли кто-либо рѣшится утверждать, что эти рассказы возникли независимо другъ отъ друга: объяснить ихъ близкое сходство случайнымъ совпаденіемъ не представляется возможнымъ. Несомнѣнно, они ведутъ начало отъ одного и того же источника.

Если такъ, то задача изслѣдователя состоитъ въ томъ, чтобы 1) возстановить этотъ оригиналъ и опредѣлить генеалогическія отношенія происходящихъ отъ него рассказовъ; 2) указать его родину; и 3) выяснить исторію его перехода въ другія страны.

Всѣ перечисленныя выше параллели, т. е. *a, b, c, d, e, f, g, h*, можно раздѣлить на три существенно различныя группы.

Въ составъ первой войдутъ *a, b, c*: здѣсь выступаетъ въ числѣ дѣйствующихъ лицъ сынъ короля—онъ же и воспитанникъ героя<sup>1)</sup>—и преступникъ, берущій на себя роль палача своего спасителя.

Вторую группу составляютъ *d* и *e*: въ этихъ рассказахъ преступникъ и сынъ короля не фигурируютъ, казнить же героя изъявляетъ готовность его пріемный сынъ.

Къ третьей подгруппѣ должны быть отнесены *f, g, h*: здѣсь не упоминаются ни сынъ короля, ни пріемышь героя, умертвить же послѣдняго соглашается благодѣтельствованный имъ человекъ.

Само собой понятно, что члены каждой группы восходятъ къ одному оригиналу—иначе невозможно объяснить происхожденіе общихъ имъ, но не засвидѣтельствованныхъ прочими параллелями подробностей. Въ цѣляхъ дальнѣйшаго изслѣдованія необходимо возстановить оригиналы всѣхъ трехъ группъ.

Несомнѣнно, въ составъ каждаго такого оригинала входили черты, встрѣчающіяся у всѣхъ членовъ группы. Поэтому здѣсь остается только обсудить подробности, свойственныя лишь одному или нѣсколькимъ членамъ.

Въ *a* обращаютъ на себя вниманіе слѣдующія частности содержанія, которыхъ мы не находимъ нигдѣ болѣе:

1) Гофундъ даетъ сыну наставленія не передъ смертью, а изгоняя его изъ страны;

---

<sup>1)</sup> Въ *c* Титъ не названъ воспитанникомъ Памфила, но это—позднѣйшее искаженіе (см. ниже).

2) Гейдрекъ получаетъ отъ отца не одинъ, а два совѣта, запрещающихъ освободить преступника; сообразно этому въ *a* фигурируютъ и два преступника, избавленные героемъ отъ смерти;

3) наставленія, подобнаго шестому совѣту Гофунда, нѣтъ ни въ *b*, ни въ *c*;

4) Гейдрекъ былъ королемъ, а не важнымъ должностнымъ лицомъ въ странѣ своего государя, какъ герои прочихъ рассказовъ.

Всѣ перечисленныя здѣсь особенности *a* приходится считать позднѣйшими искаженіями, какъ это доказываетъ нижеслѣдующій разборъ.

1) Ни въ одномъ изъ приведенныхъ выше рассказовъ не сообщается о братоубійствѣ, повлекшемъ за собой изгнаніе героя изъ страны, при которомъ ему были даны отцомъ наставленія; кромѣ того, братоубійство и изгнаніе не связаны логически съ мотивомъ мудрыхъ совѣтовъ. Все это позволяетъ заключить, что въ оригиналѣ *a* говорилось о полученіи героемъ совѣтовъ при иныхъ обстоятельствахъ—скорѣе всего, при смерти отца, какъ въ большинствѣ другихъ параллелей; сообщеніе же о преступленіи и изгнаніи, очевидно, входило уже въ составъ саги Гейдрека, когда въ нее вводили названный мотивъ.

2) Между первымъ и вторымъ совѣтомъ, а также между соотвѣствующими имъ эпизодами нѣтъ существеннаго различія: Гейдрекъ выкупаетъ сначала одного, потомъ такимъ же способомъ другого преступника; вполнѣ очевидно оба они одинаково проявляютъ неблагодарность по отношенію къ своему избавителю, приведя въ исполненіе приказаніе Роллауга. Да и вообще для хода дѣйствія вполнѣ достаточно участіе одного преступника (ср., напр., *b*). Эти соображенія позволяютъ думать, что въ оригиналѣ *a* шла рѣчь объ одномъ наставленіи (вм. двухъ первыхъ) и объ одномъ преступникѣ. Причина искаженія, допущеннаго въ *a*, вѣроятно, такова: выше (стр. 59) уже было указано, какъ читатель помнитъ, что авторъ саги Гейдрека забылъ ввести одинъ совѣтъ въ общій ихъ списокъ. Весьма вѣроятно, что онъ при этомъ все-таки хорошо зналъ ихъ число; не будучи же въ состояніи припомнить одного изъ нихъ, онъ присочинилъ отъ себя порое наставленіе касательно освобожденія преступника, а также и относящійся къ нему эпизодъ.

3) См. подъ рубрикой 4.

4) Когда Роллаугъ велѣлъ связать воспитателя своего сына, никто не захотѣлъ исполнить этого приказанія, такъ какъ Гейдрекъ пользовался всеобщей любовью. Эта мотивировка должна быть признана совершенно неподходящей: Гейдрекъ не могъ за короткое время своего пребывания въ странѣ Роллауга—онъ явился сюда лишь на пяръ—приобрѣсть столь большія симпатіи среди дружинниковъ короля, чтобы они даже рѣшились отказаться изъ-за него отъ исполненія воли своего господина. Но такъ какъ во многихъ другихъ разказахъ (*b*, *c*, *d*, *f* и др.) говорится о расположеніи, которымъ пользовался присужденный къ смерти герой, то указанную мотивировку приходится считать исконной; несоотвѣтствіе же ея съ прочими подробностями можно объяснить слѣдующимъ образомъ: герой въ *b*, *c*, *d*, *e* и др.—видные сановники; въ качествѣ таковыхъ они легко могли приобрести любовь населенія. Если же о Гейдрекѣ говорится—и при этомъ не кстати—что онъ пользовался симпатіями всѣхъ, то отсюда можно извлечь такое заключеніе: въ источникѣ *a* герой, мѣсто котораго заступилъ Гейдрекъ, былъ не гостемъ отца своего воспитанника, а важнымъ должностнымъ лицомъ въ его странѣ. Измѣненіе въ *a* могло быть вызвано тѣмъ обстоятельствомъ, что мотивъ поученій былъ приведенъ въ связъ съ первоначально чуждой ему исторіей Гейдрека, который искони слылъ королемъ.

Можно думать, что отмѣченное сейчасъ обстоятельство повлекло за собой другое измѣненіе. Одинъ изъ совѣтовъ Гофунда читается такъ: не бери на воспитаніе ребенка челоуѣка, болѣе могущественнаго, чѣмъ ты; въ *b* соотвѣтствующее наставленіе гласитъ: не поступай на службу къ своему государю. Легко видѣть, что когда мотивъ поученій былъ соединенъ съ сагой Гейдрека, въ которой послѣдній выступаетъ въ роли самостоятельнаго правителя, цитированное наставленіе, конечно, было бы неумѣстно. Въ виду этого, составитель жизнеописанія сына Гофунда придумалъ то, которое приведено въ *H-sag*'ѣ подь № 6—сдѣлать это онъ могъ тѣмъ легче, что въ оригиналѣ, которымъ онъ пользовался, фигурировалъ воспитанникъ героя; да къ тому же отдавать дѣтей на воспитаніе въ чужія семьи было въ обычаѣ у древнихъ скапдинавовъ<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Weinhold, Altnordisches Leben, S. 235 ff. Такимъ образомъ, совпаденіе шестого совѣта *H-sag* и съ наставленіемъ *d* и *e*, запрещающимъ воспитывать чужое дитя, представляется мнѣ случайнымъ.

Обратимся теперь къ *b*. Встрѣчающіеся здѣсь рассказы о снѣ героя и о сердцѣ, вырванномъ изъ груди воспитанника и съѣденномъ его родителями, несомнѣнно, позднѣйшія наслоенія: ничего подобнаго не знаютъ прочія собранныя нами параллели, а между тѣмъ для хода дѣйствія обѣ эти подробности совершенно излишни <sup>1)</sup>).

Рассказъ *c* заключаетъ въ себѣ слѣдующія своеобразныя черты:

1) одинъ изъ совѣтовъ отца читается такъ: не зови къ себѣ въ гости человѣка, имѣющаго большую власть, чѣмъ ты; при чемъ имѣется и эпизодъ, соответствующій этому совѣту;

2) сынъ императора выступаетъ не въ роли воспитанника героя, а его пріятеля;

3) Памфилъ показываетъ своей женѣ мѣшокъ, въ которомъ спрятанъ убитый теленокъ, и выдаетъ его за трупъ умерщвленнаго имъ Тпта;

4) Веспасіанъ предлагаетъ денежное вознагражденіе тому, кто согласится казнить маршала.

Есть основаніе считать перечисленныя особенности *c*, за исключеніемъ послѣдней, позднѣйшими искаженіями:

1) Софусъ, отецъ героя комедіи, былъ маршаломъ Веспасіана, который до смерти служилъ своему императору; поэтому было бы крайне неподходяще вложить въ его уста наставленіе, запрещающее сыну служить своему государю. Руководясь такимъ соображеніемъ, Гансъ Саксъ (или авторъ источника, которымъ пользовался этотъ писатель) придумалъ другой совѣтъ. Подобное предположеніе находитъ еще опору въ томъ обстоятельстве, что въ относящемся къ этому совѣту эпизодѣ естественнѣе всего видѣть позднѣйшую прибавку: онъ стоитъ рѣшительно внѣ всякой связи съ дальнѣйшимъ рассказомъ; ни одна изъ подробностей, связанныхъ съ осужденіемъ Памфила на смерть и его освобожденіемъ, не обусловлена имъ.

2) Въ содержаніи *c* нельзя указать ни одной черты, которая бы доказывала неисконность второй изъ упомянутыхъ выше особенностей этого рассказа. Но такъ какъ въ двухъ другихъ членахъ этой группы (т. е. въ *a* и *b*) сынъ короля выступаетъ въ роли воспитанника героя, а во второй группѣ фигурируетъ также взятый на воспитаніе

<sup>1)</sup> Рассказъ о съѣденномъ сердцѣ чрезвычайно распространенъ. Ср. параллели къ 9-ой новеллѣ 4-го дня „Декамерона“, приведенныя у Landau, Die Quellen des Dekameron, Stuttgart 1884, S. 112 ff.

главнымъ дѣйствующимъ лицомъ чужой ребенокъ, то можно утверждать, что въ *c*, гдѣ Титъ названъ пріятелемъ Памфила, произошло искаженіе, и что *a* и *b* въ данномъ случаѣ вѣрно воспроизводятъ оригиналъ группы.

3) Памфилъ показалъ женѣ мѣшокъ, гдѣ былъ спрятанъ убитый теленокъ. Эта подробность представляетъ собой, несомнѣнно, позднѣйшее наслоеніе: она совершенно излишня для хода разсказа; ее могли легко заимствовать изъ другихъ произведеній. Въ *Gesta Romanorum* <sup>1)</sup> мужъ показываетъ женѣ мѣшокъ, гдѣ спрятанъ убитый теленокъ, котораго онъ выдаетъ за умерщвленнаго имъ купца. Въ одномъ сициліанскомъ разсказѣ <sup>2)</sup> сообщается, между прочимъ, что мужъ показалъ женѣ платокъ, гдѣ была баранья голова, которую онъ выдалъ за голову убитаго имъ человѣка. То же продѣлываетъ герой индійской сказки съ семью козьими головами <sup>3)</sup>.

4) При чтеніи *a* и *b* возникаетъ самъ собой вполне естественный вопросъ: что заставило преступника отплатить герою столь черной неблагодарностью за спасеніе? но ни въ одномъ изъ названныхъ разсказовъ мы не находимъ на этотъ вопросъ отвѣта—поведеніе преступника кажется здѣсь весьма загадочнымъ. Если же въ *c* сообщается, что онъ былъ соблазненъ деньгами, то, очевидно, мы встрѣчаемся въ данномъ случаѣ съ исконной чертой, восходящей къ оригиналу всей группы и лишь утраченной въ *a* и *b*. Такое мнѣніе находитъ свою опору еще въ томъ, что въ разсказахъ второй группы, именно, подъ влияніемъ корыстолюбія пріемный сынъ героя—а это лицо соотвѣтствуетъ преступнику первой группы—беретъ на себя роль палача своего благодѣтеля, а также и въ томъ, что *f*, членъ третьей группы, въ данномъ мѣстѣ не отличается ничѣмъ отъ *c*.

Если удалить изъ *a*, *b*, *c* на основаніи предыдущаго разбора прибавки и несущественныя подробности (имена дѣйствующихъ лицъ, названіе странъ и т. д.) и исправить вкравшіяся въ нихъ искаженія, то въ результатѣ получится три разсказа одного и того же содержанія, т. е., значить, одинъ разсказъ, который и долженъ быть признанъ оригиналомъ первой группы—его я обозначаю черезъ *x*.

Содержаніе *x* было, приблизительно, таково.

<sup>1)</sup> Ed. Oesterley, Berlin 1872, S. 472 f.

<sup>2)</sup> Pictè, Fiabe, novelle e racconti, vol. III. Palermo, 1875, p. 278 s.

<sup>3)</sup> Индійскія сказки и легенды, собранныя Манаевымъ, С.-Петербургъ 1876, стр. 59 сл.

Одинъ молодой человекъ получилъ отъ умирающаго отца три слѣдующихъ наставленія: не поступай на службу къ своему государю; не освобождай присужденнаго къ смерти преступника; не открывай секретовъ женѣ. Вскорѣ однако сынъ приобрѣлъ расположеніе своего государя, который слѣлалъ его важнымъ должностнымъ лицомъ и поручилъ ему воспитаніе своего сына. Однажды герой встрѣтилъ преступника, котораго вели на казнь, и освободилъ его. Какъ-то ему пришло на мысль, что онъ нарушилъ два наставленія отца, и съ нимъ ничего дурного не случилось; онъ рѣшилъ испытать и третье. Удаливъ воспитанника, онъ сообщилъ женѣ, что въ гнѣвѣ убилъ его; при этомъ просилъ ее никому не рассказывать о случившемся—въ противномъ случаѣ ему грозила казнь. Та обѣщала, но не исполнила просьбы мужа, и скоро печальная вѣсть дошла до слуха короля. Послѣдній въ гнѣвѣ велѣлъ повѣсить мнимаго убійцу. Но, несмотря на назначенное королемъ денежное вознагражденіе, никто не согласился взять на себя роль его палача, такъ какъ герой пользовался всеобщимъ расположеніемъ—исключеніе составилъ лишь преступникъ, освобожденный имъ пѣкогда отъ смерти: онъ изъявилъ готовность умертвить своего спасителя. Однако, въ критическій моментъ прибылъ сынъ короля, за которымъ еще раньше послать нашъ герой, и освободилъ своего воспитателя.

*a*, *b*, *c* восходятъ независимо другъ отъ друга къ *x*: въ каждомъ изъ этихъ рассказовъ мы находимъ своеобразныя черты, не встрѣчающіяся въ другихъ.

Обратимся теперь къ изслѣдованію второй группы.

Важнѣйшія различія между *d* и *e*, членами этой группы, слѣдующія:

1) по *d* герой получаетъ совѣты отъ отца и стремится проверить ихъ, но *e* — онъ знаетъ ихъ самъ и, пытаясь ихъ оправдать, тѣмъ самымъ доказываетъ своимъ недругамъ, что онъ недостоинъ зависти;

2) третье наставленіе *d* предостерегаетъ отъ служенія синьору, который деспотично управляетъ своими подданными; соотвѣтствующее правило *e* гласитъ: не давайся въ обманъ передъ лестью друзей;

3) умерщвленіе сокола мотивировано въ *d* желаніемъ героя избавиться отъ охотничьихъ выѣздовъ, въ *e*—излѣчить жену отъ безплодія;

4) заставляя жену ѣсть мясо сокола, по *d* супругъ бьетъ ее; *e* объ этомъ не упоминаетъ.

Перейдемъ къ разбору перечисленныхъ различій.

1) См. подъ рубрикой 2.

2) Ни одно изъ происшествій, описанныхъ въ *e*, не соответствуетъ правилу: не давайся въ обманъ передъ лестью друзей; кромѣ того, вообще въ этомъ рассказѣ нѣтъ и рѣчи о томъ, что друзья льстили Хатиму. Въ виду обоихъ этихъ обстоятельствъ можно утверждать, что указанное правило представляетъ собой замѣну другого—первоначального. Такъ какъ главное дѣйствующее лицо *e*, какъ и герои другихъ параллелей, занимало важный постъ при князѣ, осудившемъ потомъ его по ничтожному поводу на смерть, то можно думать, что въ оригиналѣ *e* первое правило гласило такъ же, какъ соответствующее наставленіе прочихъ рассказовъ: не поступай на службу къ своему государю.

Причина замѣны одного наставленія другимъ была, очевидно, та, что герой *e* сразу выступаетъ въ роли слуги князя: конечно, было бы совсѣмъ неподходяще приписать ему убѣжденіе, что не слѣдуетъ служить своему государю. Отсюда можно сдѣлать, въ свою очередь, выводъ, что вся вступительная часть *e*, сообщающая о служеніи Хатима, о любви къ нему князя и зависти недруговъ, позднѣйшая прибавка: она не согласуется съ первоначальнымъ правиломъ. Въ оригиналѣ *e* шла, по всей вѣроятности, рѣчь о наставленіяхъ умирающаго отца, какъ и въ *d*.

3) Мотивировка умерщвленія сокола во всѣхъ параллеляхъ, знающихъ ее (*d*, *f*, *g*), различна. Отсюда можно заключить, что она обязана своимъ происхожденіемъ рассказчикамъ, каждый изъ которыхъ заставлялъ своего героя по-своему объяснять его поступокъ, но что въ болѣе древнихъ оригиналахъ она отсутствовала.

4) Что касается четвертаго изъ отмѣченныхъ сейчасъ различій, то и здѣсь *d*, очевидно, удержало исконную черту. Дѣло въ томъ, что и въ членахъ третьей группы—а эта группа, какъ увидимъ, стоитъ ближе къ первоначальному оригиналу, чѣмъ первая—упоминается о томъ, что, сообщивъ тайну женѣ, герой бьетъ ее или затѣваетъ ссору.

Опираясь на предыдущій разборъ, можно возстановить оригиналъ второй группы (*y*). Содержаніе его было таково.

Одинъ молодой человекъ получилъ отъ умирающаго отца три слѣдующихъ наставленія: 1) не поступай на службу къ своему синьору, 2) не усыновляй чужого ребенка, 3) не сообщай тайнъ женѣ. Однако,



сынъ вскорѣ послѣ смерти отца поступилъ на службу къ князю и усыновилъ чужого ребенка. Какъ-то герою пришло на мысль, что онъ нарушилъ два наставленія отца и съ нимъ ничего дурного не произошло: онъ рѣшилъ испытать и третье. Спрятавъ любимаго сокола своего повелителя, онъ сказалъ женѣ, что убилъ его, но просилъ никому не сообщать объ этомъ въ виду того, что ему грозитъ казнь. Но когда разъ въ ссорѣ онъ ударилъ ее, она донесла на мужа князю. Въ гнѣвѣ послѣдній велѣлъ повѣсить своего любимца; имущество же его должны были раздѣлить между женой, приемнымъ сыномъ и палачомъ. Не желая, чтобы одна доля состоянія осужденнаго на смерть попала въ чужія руки, приемный изъявилъ готовность казнить того, кто замѣнилъ ему отца. Тогда мнимый преступникъ доставилъ сокола и такимъ образомъ доказалъ свою невиновность.

Можно думать, что *d* и *e* независимо другъ отъ друга восходятъ къ *y*: въ каждомъ изъ этихъ рассказовъ мы находимъ искаженія, не встрѣчающіяся въ другомъ.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію третьей группы.

Въ *f* обращаютъ на себя вниманіе слѣдующія сообразныя черты:

1) второе наставленіе, запрещающее жить вблизи того мѣста, гдѣ сходится много людей, и относящіяся къ нему подробности;

2) третье наставленіе, гласящее: не давай подарковъ сипюру.

Обратимся къ разбору своеобразныхъ чертъ *f*.

1) Просматривая собранныя параллели (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *g*, *h*), легко видѣть, что совѣты, данныя отцомъ сыну, направлены противъ близкихъ герою лицъ, которымъ онъ оказалъ тѣмъ или инымъ способомъ добро, и которыя потомъ проявляютъ черную неблагодарность: жена открываетъ его тайну, хотя это грозитъ ему смертью; король, не смотря на его службу, велитъ казнить его за ничтожный проступокъ, а облагодѣтельствованный имъ человекъ (приемный сынъ или спасенный отъ смерти преступникъ) беретъ на себя роль его палача въ то время, какъ всѣ отказываются привести въ исполненіе смертный приговоръ. Между тѣмъ *f* содержитъ въ себѣ наставленіе, направленное вообще противъ людей: не живи вблизи того мѣста, гдѣ собираются люди—очевидно, потому, что, узнавъ о какомъ-либо проступкѣ, они сдѣлаютъ доносъ. Но такое наставленіе не имѣетъ смысла: вѣдь люди вообще не обязаны были скрывать тайны героя; да къ тому же, они поступили вполне справедливо, донеся королю о его проступкѣ. Если, кромѣ того, припятъ во вниманіе, что для хода дѣйствія второй со-

вѣтъ *f* излишень, и что *f* содержитъ въ себѣ четыре наставленія вмѣсто обычныхъ трехъ, то можно сдѣлать весьма вѣроятное предположеніе, что второй совѣтъ—позднѣйшая прибавка. Въ источникѣ *f* говорилось, вѣроятно, судя по аналогіи съ *g* и *h* и рассказами второй группы, что, повздоривъ съ мужемъ, жена донесла на него.

2) Когда король приказываетъ повѣсить своего любимца за убійство сокола, то при этомъ проявляется въ высшей степени его неблагодарность: изъ-за шпичной вины онъ рѣшается казнить того, кто служилъ ему вѣрно въ теченіе долгаго времени. Эта мысль выражена гораздо слабѣе въ *f*, гдѣ идетъ рѣчь не о службѣ героя, какъ въ другихъ параллеляхъ, а о его подаркахъ. Но такъ какъ герой, подобно дѣйствующимъ лицамъ прочихъ рассказовъ, былъ, несомнѣнно, приближеннымъ своего государя (ср. подробность: онъ испрашиваетъ помилованіе преступнику), то есть основаніе думать, что въ *f* допущено въ данномъ случаѣ искаженіе, и что оригиналъ этой версіи заключалъ въ себѣ совѣтъ, предостерегающей противъ служенія государю.

Особенность *g* заключается въ томъ, что во второмъ наставленіи и соотвѣтствующемъ ему эпизодѣ фигурируютъ крестьяне, а не преступникъ. Но такъ какъ въ первой группѣ и въ одномъ изъ членовъ третьей группы (*f*) идетъ рѣчь о неблагодарномъ преступникѣ, то, весьма вѣроятно, что и въ оригиналѣ послѣдней выступало то же лицо. Отсюда слѣдуетъ, что въ *g*, знающемъ крестьянъ, допущено искаженіе.

Что касается третьяго наставленія *g*, то въ немъ мы встрѣчаемся, очевидно, лишь съ неточной формулировкой совѣта: не поступай на службу къ своему государю; если-бы Пеппи поставилъ себя въ зависимость не отъ короля, а отъ какого-либо человѣка, не имѣющаго полной власти, то, конечно, послѣдній не могъ-бы присудить его къ смерти—а въ этомъ вѣдѣ лежитъ центръ тяжести всего разсказа.

Въ *h* встрѣчаются слѣдующія свойственныя только этому разсказу черты:

- 1) отецъ, дающій совѣты, не упомянутъ;
- 2) облагодѣтельствованный героемъ человѣкъ—не преступникъ, а король;
- 3) герой приводитъ въ домъ свой гетеру, которую выдаетъ за одну изъ женъ короля;
- 4) брахманка, не получившая обѣщаннаго ей ячменя, требуетъ его у Mahauçhadha, ведомаго на казнь.

1) По *h* между придворными короля шель споръ лишь о томъ, кому слѣдуетъ довѣрять. Между тѣмъ *Mahaushadha* доказываетъ на опытѣ еще основательность другихъ мудрыхъ правилъ. Это даетъ поводъ думать, что вводная часть представляетъ собой позднѣйшую зачѣну первоначальной — въ послѣдней, судя по аналогіи съ прочими рассказами, фигурировалъ умирающій отецъ.

2) Сюда приложимы соображенія, высказанныя о второмъ совѣтѣ *g*.

3) По *h* выходитъ, что герой ввѣрилъ своей женѣ двѣ тайны, между тѣмъ для дѣйствія вполне достаточно одной. Въ виду этого рассказъ о гетерѣ долженъ быть признанъ наслоеніемъ—тѣмъ болѣе, что ничего подобнаго нѣтъ въ прочихъ параллеляхъ.

4) Брахманка совершенно излишня для хода дѣйствія: ее можно опустить, не измѣняя въ *h* ни одной черты; кромѣ того, она не проявляетъ благодарности къ герою и не способствуетъ его несчастью, какъ другія дѣйствующія лица рассматриваемыхъ параллелей; наконецъ, мы нигдѣ больше не находимъ лица соотвѣтствующаго ей. Все это позволяетъ думать, что упоминаніе о брахманкѣ въ *h*—позднѣйшая прибавка.

Опираясь на предыдущій обзоръ, можно возстановить оригиналь третей группы (*z*). Вотъ его содержаніе.

Одинъ молодой человекъ получилъ отъ умирающаго отца три наставленія: не поступай на службу къ своему государю; не освобождай преступника; не сообщай секретовъ женѣ. Вскорѣ, однако, онъ преступилъ безнаказано первые два совѣта, а затѣмъ рѣшилъ провѣрить и третій. Спрятавъ любимаго сокола своего повелителя, онъ сказалъ женѣ, что умертвилъ птицу, но просилъ не сообщать объ этомъ никому. Однако, когда онъ какъ-то въ ссорѣ ударилъ ее, она донесла о проступкѣ мужа королю. Послѣдній въ гнѣвѣ приказалъ его повѣсить, но такъ какъ герой пользовался любовью населенія, то никто не захотѣлъ взять на себя роль его палача, несмотря на плату, назначенную за это королемъ. Исключеніе составилъ лишь освобожденный героемъ нѣкогда преступникъ. Тогда присужденный къ смерти доставилъ сокола и доказалъ такимъ образомъ свою невиновность.

Легко видѣть, что каждый изъ членовъ третей группы восхитить самостоятельно къ *z*.

Теперь спрашивается, какъ должно представить генеалогическія отношенія *x*, *y*, *z*. Необходимо, прежде всего, отмѣтить, что *y* и *z* ведутъ начало отъ одного и того же оригинала (*X*)—и въ *y*, и въ *z* одинаково описывается, какъ герой навлекъ на себя гнѣвъ своего повелителя: онъ со-

общилъ женѣ, что умертвилъ любимаго сокола государя, а она донесла объ этомъ послѣднему; въ  $x$  гнѣвъ короля мотивированъ иначе.

Если такъ, то возможно только одно толкованіе взаимоотношенія  $y$  и  $z$ , съ одной стороны, и  $x$ , съ другой:  $x$  представляет собой контаминацію  $y$  и  $z$ .

При соединеніи  $y$  и  $z$  соколъ былъ устраненъ, и все, что сообщалось объ этой птицѣ, было перенесено на воспитанника героя, который былъ представленъ королевскимъ сыномъ; вмѣстѣ съ тѣмъ было опущено наставленіе  $y$ , запрещающее усыновлять чужого ребенка; кромѣ того, былъ забытъ рассказъ о ссорѣ мужа съ женой и о наградѣ, назначенной палачу.

Наоборотъ, вывести  $y$  и  $z$  изъ  $x$  препятствуютъ слѣдующія соображенія.

Выше уже было отмѣчено, что въ  $X$ , общемъ оригиналѣ  $y$  и  $z$ , фигурировалъ соколъ, Далѣе, въ  $y$  выступаетъ пріемный сынъ героя, а въ  $z$ —освобожденный имъ отъ смерти преступникъ; поэтому, если бы  $X$  происходилъ отъ  $x$ , то въ немъ упоминались бы оба эти лица, а также, конечно, и соответствующіе имъ совѣты: тѣ и другіе встрѣчаются въ  $x$ . Отправляясь отъ этихъ данныхъ, можно сдѣлать такое утвержденіе: если бы  $X$  велъ начало отъ  $x$ , то  $X$  содержалъ бы въ себѣ четыре совѣта (направленныхъ противъ короля, жены, воспитанника и преступника), и въ немъ два лица играли бы тождественную роль: такъ какъ въ  $X$  фигурировалъ соколъ, то въ этомъ утраченномъ рассказѣ сообщалось бы также, что герой подвергся гнѣву короля за убійство этой птицы, а не за умерщвленіе воспитанника, т. е. послѣдній долженъ былъ бы взять на себя ту же роль, которая отведена ему въ  $y$ ; а разъ такъ, то въ  $X$  выступали бы два лица (воспитанникъ и преступникъ), предлагающія услуги въ качествѣ палачей своего благодѣтеля.

Но такая форма рассказа не засвидѣтельствована; къ тому же вообще мало вѣроятно, чтобы она могла просуществовать известное время и благодаря этому послужить источникомъ двухъ версій (т. е.  $y$  и  $z$ ); навѣрно, уже при самомъ ея сложеніи преступникъ вытѣснилъ бы воспитанника или обратно—вѣдь роли ихъ тождественны. Кромѣ того, есть данныя, заставляющія видѣть въ  $x$  позднѣйшую стадію развитія послѣдуемаго сказанія. Послѣднее проникнуто пессимистической идеей: не дѣлай людямъ добра, потому что они отплатятъ тебѣ черной неблагодарностью при малѣйшемъ поводѣ: король не смотря на твое

заслуги прикажетъ казнить тебя за ничтожный проступокъ съ твоей стороны; получивъ отъ тебя оскорбленіе, жена забудеть твою любовь: облагодѣтельствованный тобой человекъ готовъ будетъ умертвить тебя, разъ ему за это назначать награду. Въ *x* эта идея, несомнѣнно, затемнена: какъ бы ни были велики заслуги героя, но рѣшеніе короля казнить его оправдывается родительскими чувствами и величиною преступленія.

Итакъ, можно считать установленнымъ, что *x* представляетъ собой контаминацію *y* и *z*, и что оба послѣдніе разсказа восходятъ къ одному оригиналу (*X*).

Различіе между *y* и *z* состоитъ въ слѣдующемъ: въ первомъ изъ этихъ разсказовъ фигурируетъ приемный сынъ, соглашающійся казнить героя изъ желанія приобрѣсть часть его имущества, назначеннаго палачу; во второмъ же выступаетъ преступникъ, изъявляющій готовность умертвить своего благодѣтеля въ виду назначенной королемъ награды. Та и другая черта одинаково хорошо согласуются съ прочими подробностями. Поэтому нельзя установить, восходить ли одна изъ нихъ къ оригиналу *y* и *z*, или же въ послѣднемъ шла рѣчь о какомъ-нибудь облагодѣтельствованномъ героемъ человекѣ, который потомъ въ *y* былъ замѣненъ приемнымъ сыномъ, а въ *z*—преступникомъ. По указанной сейчасъ причинѣ мы лишены возможности возстановить вполне *X*: несомнѣнно, въ содержаніе *X* входили всѣ подробности, общія *y* и *z*; какъ же звучали въ пемь тѣ изъ нихъ, которыя различно переданы въ *y* и *z*, это остается подъ вопросомъ.

Обратимся теперь къ изслѣдованію *i*, *k*, *l*, *m*, *n*. Эти разсказы тоже можно причислить съ нѣкоторой долей вѣроятности къ отдаленнымъ версіямъ *X* въ виду ихъ близкаго сходства съ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Но отъ разсмотрѣнныхъ версій онѣ отличаются тѣмъ, что нѣкоторыя существенныя подробности въ нихъ отсутствуютъ или предстаютъ въ измѣненномъ видѣ, при чемъ мы лишены возможности доказать, что всѣ эти случаи—результаты позднѣйшихъ искаженій.

Въ *i* искажены слѣдующія характерныя черты, свойственныя *a*, *b*, *c*, *d* и пр.:

1) баронъ узнаетъ три мудрыхъ правила не отъ умирающаго отца, а изъ книги;

2) обычный совѣтъ: не поступай на службу къ своему государю, замѣненъ такимъ изреченіемъ: не доводи себя до необходимости подвергать испытанію любовь твоего господина;

3) тайна, которую герой ввѣряетъ женѣ, состоитъ въ томъ, что онъ рассказываетъ ей о дѣйствительно полученномъ имъ отъ шаха кольцѣ.

Обратимся къ разбору этихъ своеобразныхъ подробностей *i*.

1) Если въ *i* пѣть никакихъ данныхъ, которыя бы доказывали, что въ этомъ рассказѣ или его оригиналѣ фигурировалъ отецъ борона, дающій передъ смертью наставленія послѣднему, то безъ особаго труда можно подмѣтить признаки, позволяющіе видѣть въ двухъ другихъ особенностяхъ позднѣйшія измѣненія. Прежде всего, третье мудрое изреченіе не оправдывается рассказомъ: хотя герой и довель себя до необходимости подвергнуть испытанію любовь повелителя, но это не повлекло за собой никакого несчастья—онъ получилъ прощеніе; поэтому, въ третьемъ правилѣ *i* можно видѣть замѣну обычнаго совѣта—тѣмъ болѣе, что послѣдній вполнѣ оправдывается всей исторіей *i*.

2) Прощеніе, которое получаетъ баронъ, нигдѣ не мотивировано; наоборотъ, въ другихъ параллеляхъ оно обусловлено тѣмъ, что мнимый преступникъ фактически доказываетъ свою невиновность. Отсюда можно сдѣлать выводъ, что въ оригиналѣ *i* шла рѣчь не о кольцѣ, а о другой драгоценности короля, можетъ быть, о соколѣ, и что, задавшись цѣлью провѣрить мудрое правило, герой сообщилъ женѣ о совершенномъ имъ убійствѣ птицы, которая осталась въ живыхъ.

Если все это было дѣйствительно такъ, то тогда *i* можно причислить къ третьей группѣ.

Особенность *k* заключается въ томъ, что 1) умирающій отецъ замѣненъ здѣсь шуткомъ, и 2) что отсутствуютъ рассказъ о человѣкѣ, облагодѣтельствованномъ героемъ, и соответствующій совѣтъ.

Исконна ли первая особенность или пѣть, опредѣлить невозможно, но вторая, скорѣе всего, позднѣйшаго происхожденія. Изъ словъ шута выходитъ, что не должно покидать родственниковъ и друзей. Это мнѣніе не оправдывается исторіей визиря: непонятно, для чего послѣднему нужно было покинуть родственниковъ. Къ тому же этимъ обстоятельствомъ не обусловлены несчастья героя; правда, когда его вели на казнь, всѣ говорили: «Пойдемъ посмотрѣть»—лишь друзья и родственники плакали, но то же могло бы произойти если бы онъ и не покинулъ послѣднихъ. Въ виду всѣхъ этихъ соображеній можно признать, что въ оригиналѣ *k* фигурировали не друзья и родственники визиря, а кто-либо другой—можетъ быть, его приемный сынъ или освобожденный имъ преступникъ, какъ можно заклю-

чать по аналогіи. Если первое предположеніе вѣрно, тогда *k* принадлежит ко второй группѣ, если послѣднее—къ третьей.

Особенности *l* состоятъ въ слѣдующемъ:

- 1) отсутствуетъ отецъ героя, дающій ему наставленія;
- 2) вмѣсто пріемыша выступаетъ сынъ жены отъ перваго брака;
- 3) въ истинахъ, которыя исповѣдуетъ мудрецъ, и въ разсказахъ выступаетъ старикъ;
- 4) не упомянуто совершенно мнимое преступленіе, за которое героя присуждаютъ къ смерти въ другихъ параллеляхъ.

Признать первыя двѣ особенности искаженіями мы не имѣемъ возможности за отсутствіемъ данныхъ; зато двѣ послѣднія можно считать таковыми съ нѣкоторой долей вѣроятности.

Четвертая истина, гласящая: старики необходимы въ странѣ, не вполне оправдывается дальнѣйшимъ разсказомъ: старикъ, дѣйствительно, добился прощенія осужденному на смерть Коти, но этимъ еще не доказалъ, что онъ необходимъ для страны. Подобное несоответствіе представляется возможнымъ объяснить тѣмъ, что упомянутая истина заимствована была изъ другихъ разсказовъ, гдѣ она вполне уместна.

Къ числу подобныхъ могутъ быть причислены слѣдующіе.

Въ *Enikels Weltchronik* <sup>1)</sup> (XIII в.) мы находимъ такой эпизодъ. Молодые римляне были высланы стариками на бой и одолѣли враговъ. Старики стали приписывать честь побѣды своему совѣту, а юноши—своей храбрости. Возгорѣлся споръ, и, въ концѣ концовъ, юноши рѣшили перебить стариковъ. Только одинъ изъ юношей пощадилъ своего отца. Тогда вражскіе князья отняли у римлянъ захваченныя ими земли. Оставшійся въ живыхъ старикъ объяснилъ это пораженіе отсутствіемъ стариковъ въ странѣ и посоветовалъ послать въ сосѣдную землю за однимъ мудрецомъ. Придя, послѣдній объявилъ, что упомянутый старикъ живъ, и что римляне должны слѣдовать его совѣтамъ. Дѣйствительно, старикъ своими совѣтами вызволилъ римлянъ изъ нужды.

Въ *Li romans de Dolopathos*, publié par Ch. Brunet et A. Montaiglon, Paris 1856 (pp. 226—240) встрѣчается такой разсказъ. Какъ-то Римъ былъ осажденъ врагами. Начался голодъ. Рѣшено было из-

<sup>1)</sup> *Monumenta Germaniae Historica, Deutsche Chroniken*, B. III, s. 412 ff. (2 337—21800).

бить стариковъ, чтобы избавиться отъ лишнихъ ртовъ. Только одинъ юноша пощадилъ своего отца, спрятавъ его въ помѣщеніи подь землей. Когда прекратилась война, въ странѣ возникли страшные безпорядки, потому что король поступалъ согласно совѣтамъ молодыхъ людей. Только лишь упомянутый юноша, слѣдуя указаніямъ своего отца, далъ королю нѣсколько совѣтовъ, благодаря чему улучшилось положеніе. Спустя нѣкоторое время обнаружилось, что старикъ живъ. Король приказалъ привести его къ себѣ. Стали слѣдовать его совѣтамъ и страна начала наслаждаться миромъ.

Займствованіе, о которомъ шла сейчасъ рѣчь, было обусловлено, можетъ быть, тѣмъ, что въ *l* былъ утраченъ рассказъ о мнимомъ умерщвленіи сокола: король казнить здѣсь мудреца за тѣ убѣжденія, которыя онъ исповѣдуетъ. Въ виду этого Коти былъ лишенъ возможности фактически доказать свою невиновность. Приходилось какъ-нибудь иначе объяснить его спасеніе, для чего и былъ введенъ старикъ. Изъ предыдущаго видно, что въ оригиналѣ *l* фигурировалъ и соколъ.

Если изложенныя соображенія вѣрны, то въ такомъ случаѣ *l* относится ко второй группѣ.

Обратимся теперь къ *m*. Здѣсь мы находимъ слѣдующія своеобразныя подробности:

1) второй совѣтъ гласить: не называй сыщика кумомъ.

2) герой, дѣйствительно, совершаетъ преступленіе, за которое его и казнятъ.

Сыщикъ не играетъ въ *m*, какъ легко видѣть, никакой самостоятельной роли: онъ дѣлаетъ лишь то, что жена героя и его пріемный сынъ; это обстоятельство наводитъ на мысль, что сыщикъ заступилъ здѣсь мѣсто другого лица <sup>1)</sup>—скорѣе всего, короля, какъ это можно предполагать по аналогіи. Разъ это, дѣйствительно, такъ, то можно думать, что указанное сейчасъ измѣненіе повлекло за собой другое. Когда король былъ устраненъ, само собой понятно, отпалъ и рассказъ о соколѣ: вѣдь странно было бы, если бы судъ приговорилъ героя къ висѣлицѣ за убійство птицы; поэтому мѣсто сокола занялъ человекъ. Исходя изъ такого предположенія, приходится отнести *m* ко второй группѣ.

<sup>1)</sup> Сыщикъ могъ быть займствованъ изъ рассказа, подобнаго *г*.



Отличительная черта *n* состоитъ въ томъ, что второй, третій и четвертый совѣты этого разсказа и соответствующіе имъ эпизоды отсутствуютъ въ другихъ параллеляхъ, и что здѣсь не выступаютъ ни приемышь героя, ни освобожденный имъ отъ смерти преступникъ.

Легко видѣть, что оба богача, *gāncelf* и *gāndi* излишни для хода дѣйствія: ихъ можно устранить безъ замѣтнаго ущерба для содержанія *n*. Это обстоятельство позволяетъ думать, что названныя лица (а также и относящіяся къ нимъ наставленія) позднѣйшаго происхожденія. Что касается четвертаго совѣта, то онъ не согласуется съ относящимися къ нему подробностями: онъ гласитъ: не дружись съ царскими слугами, а дружись съ царемъ; но вѣдь герой былъ присужденъ къ казни не потому, что онъ подружился со слугами, а, съ другой стороны, царь велѣлъ повѣсить его несмотря на дружбу. Эти соображенія наводятъ на мысль, что четвертый совѣтъ и относящіяся къ нему подробности звучали первоначально иначе: можетъ быть, вмѣсто царскихъ слугъ выступалъ приемышь или преступникъ, а вторая половина совѣта предостерегала противъ дружбы съ царемъ: не вступивъ съ нимъ въ близкія отношенія, герой не могъ бы совершить рокового для него похищенія сокола. Если приведенныя соображенія вѣрны, то тогда *n* слѣдуетъ причислить ко второй или третьей группѣ—въ зависимости отъ того обстоятельства, кто первоначально выступалъ въ роли палача—приемный сынъ героя или освобожденный имъ преступникъ.

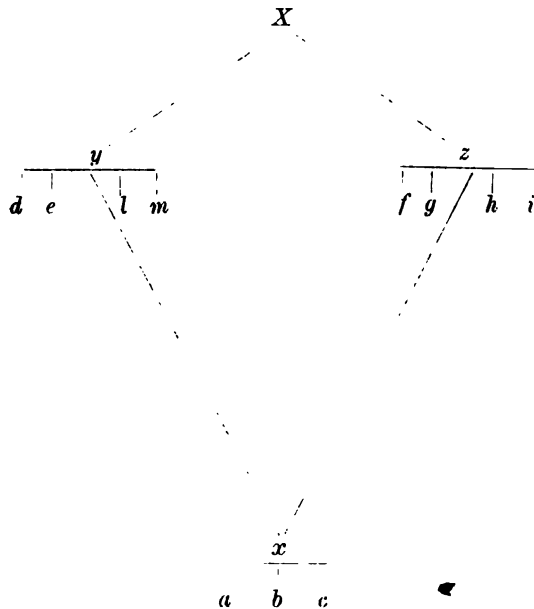
Остается еще сказать нѣсколько словъ о прочихъ собранныхъ нами параллеляхъ, т. е. *o*, *p*, *q*, *r*, *s*. Сходство ихъ съ изслѣдованными разсказами исчерпывается двумя слѣдующими подробностями: 1) герой получаетъ три наставленія, въ справедливости которыхъ онъ убѣждается впоследствии<sup>1)</sup>; 2) одно изъ нихъ гласитъ: не ввѣряй тайнъ женщѣ. Обѣ эти подробности—очень распространенныя мотивы<sup>2)</sup>. Въ виду этого едва ли есть какое-либо основаніе думать, что *o*,

<sup>1)</sup> Впрочемъ, въ *q* говорится, что герой вывелъ три правила на основаніи личнаго опыта.

<sup>2)</sup> По поводу перваго мотива см. Ruodlieb, herausgeg. v. Seiler, S. 45 ff; а по поводу втораго—Gesta Romanorum, ed. Oesterley, p. 473 f. и параллели, указанныя на стр. 732, № 124; см. также и Hans Sachs, Schwank, Der hecker mit den drey seltzamen Stücken (herausgeg. v. Keller und Goetze, B. I<sup>er</sup>. Tübingen 1875. S. 332—337).

*p, q, r, s* генетически связаны съ *a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n*. Единственное обстоятельство говорить въ пользу подобнаго предположенія—это то, что оба эти мотива соединены въ *o, p, q, r, s*, какъ и въ версiяхъ, ведущихъ начало отъ *X*. Но подобное сходство можетъ быть результатомъ случайнаго совпаденiя: вслѣдствiе большой распространенности оба мотива легко могли прiйти въ соприкосновенiе другъ съ другомъ. Итакъ, я отрицаю генетическую связь между *o, p, q, r, s* и другими параллелями. Это обстоятельство избавляетъ насъ отъ ближайшаго разбора *o, p, q, r, s*.

Исходя изъ предыдущаго, генетическое отношенiе *a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m*<sup>1)</sup> можно представить наглядно такъ:



Выяснивъ взаимоотношенiя разсмотрѣнныхъ сейчасъ разказовъ, попытаемся опредѣлить родину *X*.

Собранныя нами параллели были обработаны или записаны *a*—въ Скандинавiи, *b*—во Францiи, *c*—въ Германiи, *d*—въ Италiи, *e*—на Кавказѣ, *l*—въ Сенегамбiи, *m*—въ Италiи, *f* и *g*—въ Италiи, *h*—въ Индiи, *i*—въ Италiи, *k*—въ Сирiи. *n*—въ Индiи. Изъ всѣхъ

<sup>1)</sup> Что касается *k* и *n*, то помѣстить ихъ въ таблицѣ нельзя, потому что невозможно установить точно, къ какой группѣ они относятся—ко второй или третьей; см. выше, стр. 178 сл., 181.

названныхъ сейчасъ странъ родиной X, скорѣ всего, кажется мнѣ, можно признать Индію и, именно, буддійскую среду. Буддизмъ учитъ, что жизнь есть непрерывная цѣпь страданій, что цѣль человѣка заключается въ освобожденіи отъ привязанности къ жизни<sup>1)</sup>. Эта основная идея буддизма, полная скептицизма, какъ нельзя лучше иллюстрируется нашимъ рассказомъ: человѣку невозможно найти въ жизни утѣшеніе, потому что даже тѣ люди, которые наиболѣе должны были бы любить его, отплатятъ ему зломъ за добро. Поэтому, думается мнѣ, источникъ приведенныхъ выше рассказовъ (т. е. X) представляетъ собой притчу, произнесенную какимъ-либо буддійскимъ монахомъ для объясненія основной мысли вѣроученія и для воздѣйствія на слушателей — послѣдователи Будды любили прибѣгать къ притчамъ<sup>2)</sup>. Высказанное положеніе о родинѣ X находитъ поддержку еще въ слѣдующемъ.

Бенфей въ «Панчатантрѣ»<sup>3)</sup> приводитъ цѣлый рядъ рассказовъ о благодарныхъ животныхъ и неблагодарномъ человѣкѣ, въ общемъ, такого содержанія: герой спасаетъ нѣсколько животныхъ и одного человѣка отъ грозящей имъ смерти; впоследствии животныя оказываютъ ему услуги и способствуютъ освобожденію его изъ опаснаго положенія, въ которое онъ попалъ, именно, по винѣ спасеннаго имъ человѣка. Основная идея этихъ рассказовъ, очевидно, такова: дѣлай добро животнымъ, а не-человѣку, потому что только первыя воздадутъ тебѣ благодарностью; тогда какъ послѣдній при всякомъ удобномъ случаѣ отплатитъ тебѣ зломъ за добро.

Названнымъ сказкамъ Бенфей съ полнымъ правомъ приписалъ буддическое происхожденіе. Буддизмъ учитъ быть сострадательнымъ ко всѣмъ тварямъ, но въ большей степени къ животнымъ, чѣмъ къ человѣку (Pantschatantra I. S. 208)<sup>4)</sup>. Легко видѣть, что проникающая упомянутые рассказы мысль: человѣку не слѣдуетъ дѣлать добро, потому что онъ при малѣйшемъ поводѣ воздастъ тебѣ зломъ, тоже-ствена съ идеей, присущей мотиву трехъ совѣтовъ (ср. выше). Отсюда, съ извѣстной долей вѣроятности, можно заключить, что и послѣдній также буддическаго происхожденія и возникъ въ Индіи.

<sup>1)</sup> Ольденбергъ, Будда, его жизнь, ученіе и община, перв. Николаева, Москва 1891, стр. 161 слл.

<sup>2)</sup> Тамъ же, стр. 150.

<sup>3)</sup> Panschatantra, übersetzt von Benfey, Leipzig 1859, B II, S. 193 ff.

<sup>4)</sup> Ср. Ольденбергъ, Будда, его жизнь, ученіе и община, стр 227, прим. 2.

Опредѣливъ родину *X*, остается еще выяснитъ исторію перехода его въ другія страны. На основаніи собранныхъ данныхъ можно сдѣлать лишь одно довольно вѣроятное утвержденіе: *x* представляетъ собой европейское новообразование ведущіе отъ него начало *a*, *b*, *c* извѣстны только въ Европѣ. Родиной *x* есть основаніе считать Италію, такъ какъ тамъ были извѣстны версіи *y* и *z*, путемъ контаминаціи которыхъ произошелъ *x*. Что касается времени возникновенія *x*, то точно установить его нельзя; во всякомъ случаѣ, *x* старше XIII в., потому что *a* было записано въ этомъ столѣтіи.

Ни какихъ другихъ выводовъ относительно исторіи странствованія интересующаго насъ мотива, поскольку я вижу, нельзя сдѣлать на основаніи собраннаго матеріала.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію трехъ другихъ совѣтовъ, данныхъ Гофундомъ преступному сыну, и относящихся къ нимъ эпизодовъ.

Не разъ уже отмѣчали <sup>1)</sup> сходство разсказа объ измѣнѣ жены Гейдрека, дочери саксонскаго короля, со второй новеллой третьяго дня „Декамерона“; Ландау даже подчеркиваетъ особенную близость названнаго эпизода нашего памятника съ произведеніемъ Боккачіо. Однако, мнѣ кажется, что сходство между ними невелико: оно исчерпывается, всего лишь двумя-тремя подробностями.

Припомнимъ содержаніе упомянутой новеллы. Боккачіо разсказываетъ, что одинъ конюхъ Ломбардскаго короля Агилульфа страстно влюбился въ Теуделинду, жену своего господина. Чтобы утолить свою страсть, онъ какъ-то ночью, подражая во всемъ королю, пробрался въ комнату Теуделины, которая его приняла за мужа. Вскорѣ послѣ его ухода явился Агилульфъ. Жена выразила удивленіе по поводу его вторичнаго прихода, на основаніи чего король догадался, что она была обманута. Отправившись въ помѣщеніе, гдѣ спала челядь, король по учащенному біенію сердца открылъ виновника, которому и отрѣзалъ пучекъ волосъ надъ ухомъ, съ цѣлью узнать его по этой примѣтѣ утромъ. Но это не удалось: когда Агилульфъ удалился, конюхъ отрѣзалъ у всѣхъ своихъ товарищей такой же пучекъ волосъ. Благодаря этому,

<sup>1)</sup> Weinhold, Altnordisches Leben, S. 251, Anm.; Landau, Die Quellen des Dekameron, Stuttgart 1884, S. 76.

созвавъ на другой день утромъ своихъ людей, король былъ лишенъ возможности открыть виновника <sup>1)</sup>).

Сравнивая пересказанную повелю съ соответствующимъ эпизодомъ Н-sag'и, легко подмѣтить слѣдующія общія имъ черты: 1) обманутый мужъ отрѣзываетъ пучекъ волосъ у своего соперника; 2) на другой день онъ собираетъ людей, надѣясь узнать виновника; 3) послѣдній—человѣкъ низкаго происхожденія. Всѣ прочія существенныя подробности въ обоихъ произведеніяхъ различны: у Боккачіо нѣтъ и рѣчи объ измѣнѣ со стороны королевы, и мужу не удается открыть виновника; въ Н-sag'ѣ какъ разъ наоборотъ.—жена Гейдрека имѣетъ, дѣйствительно, возлюбленнаго, котораго и узнаетъ герой при помощи отрѣзаннаго имъ пучка волосъ.

На основаніи предыдущаго можно сдѣлать два вывода: или повелла Боккачіо и соответствующій рассказъ нашего памятника восходятъ къ одному и тому же оригиналу, важныя подробности котораго были искажены въ одномъ изъ этихъ произведеній, а, можетъ быть, и въ обоихъ; или же лишь черты, общія послѣднимъ, были заимствованы изъ сказанія, послужившаго источникомъ и итальянскому поэту и автору саги, и соединены съ первоначально чуждыми имъ мотивами. Послѣдній выводъ долженъ быть признанъ болѣе вѣроятнымъ.

Значительное сходство съ рассказомъ (x) о трехъ интересующихъ насъ въ данный моментъ совѣтахъ Гофунда и относящихся къ нимъ эпизодахъ обнаруживаютъ слѣдующія новеллы.

3. Умирая, одинъ гражданинъ Съены далъ своему сыну слѣдующіе три совѣта: 1) не посѣдай часто кого-либо, чтобы не надоѣсть ему; 2) приобрѣтай вещь, изъ которой не можешь извлечь пользы, уступай другому; 3) не бери жены изъ чужой земли. Юноша часто бывалъ въ домѣ одного обремененнаго семьей человѣка, который отличался своей расточительностью и получалъ за это постоянно упреки отъ родственниковъ. Однажды, подъ вліяніемъ упрековъ, этотъ человѣкъ отмѣтилъ обѣдъ, на который пригласилъ и героя новеллы, и ушелъ,

<sup>1)</sup> Подобная новелла рассказана Серкамби (Novelle inedite de Giovanni Sercaambi per cura di R. Renier, Torino 1889, p. 252—255), который, несомнѣнно, заимствовалъ ее у Боккачіо, какъ доказываютъ сходныя подробности и даже выраженія (ср. тамъ же, prefazione p. LIX)—существенная разница состоитъ въ томъ, что по Серкамби помѣтка была сдѣлана чернилами.

велѣвъ угостить послѣдняго луковицей, что и было исполнено. Получивъ такое оскорбленіе, юноша вспомнилъ наставленіе отца и спряталъ луковицу.

Какъ-то герой купилъ коня за 50 флориновъ. Ему представился случай продать его за 90, но онъ не захотѣлъ, а между тѣмъ ночью конь заболѣлъ и палъ. Отрѣзавъ хвостъ коня, онъ спряталъ его тамъ, гдѣ хранилась луковица.

Не найдя невѣсты въ своей странѣ, молодой человѣкъ отправился въ Пизу, гдѣ нотаріусъ, другъ его отца, познакомилъ его съ одной дѣвой. Послѣдняя находилась въ любовныхъ отношеніяхъ, между прочимъ, съ однимъ пизанскимъ юношей, чего, конечно, нашъ герой, какъ иностранецъ, не зналъ, но въ чемъ онъ убѣдился слѣдующимъ образомъ. По дорогѣ въ Сиену, гдѣ должна была состояться свадьба, онъ остановился въ одномъ городѣ, и рано утромъ уѣхалъ впередъ со слугой, какъ бы съ цѣлью приготовить встрѣчу своей невѣстѣ, названной дѣвѣ, а между тѣмъ, возвратившись тайкомъ, нашелъ въ ея кровати упомянутого юношу, который въ числѣ прочихъ сопровождалъ ее, и, взявъ его *brache*, удалился. Прибывъ домой, онъ повѣсилъ ихъ вмѣстѣ съ другими памятными вещами. Когда невѣста и гости пріѣхали, всѣ стали спрашивать жениха о значеніи трехъ вещей. Онъ разсказалъ исторію, связанную съ ними, и затѣмъ предложилъ освидѣтельствовать любовника своей невѣсты—оказалось, что онъ, дѣйствительно, не имѣлъ *brache*. Послѣ этого герой отказался отъ своей невѣсты <sup>1)</sup>.

γ. Одинъ господинъ передъ смертью далъ своему сыну три слѣдующихъ совѣта: 1) не посѣщай домъ своего сосѣда часто, чтобы, наконецъ, не получить въ видѣ угощенія черный хлѣбъ; 2) никогда не гони своего коня, вѣзжая въ долину (*en la vallée*); 3) не бери въ жены женщину иностраннаго происхожденія. Вскорѣ послѣ похоронъ отца, юноша сталъ очень часто посѣщать своего сосѣда; тотъ началъ ревновать его къ женѣ и, чтобы какъ-нибудь отдѣлаться отъ докучливаго гостя, приказалъ угощать его чернымъ хлѣбомъ вмѣсто бѣлаго. Молодой человѣкъ замѣтилъ это и прекратилъ свои посѣщенія, предвзрительно взявъ кусокъ предложеннаго ему хлѣба, который и повѣсилъ въ своемъ домѣ.

<sup>1)</sup> Le Novelle di Franco Sacchetti, pubblicate per O. Gigli, vol. I, Firenze 1860, p. 40—45 (новела XVI).

Однажды герой исторіи былъ на охотѣ. Когда собаки преслѣдовали зайца, онъ съ такой силой началъ гнать своего коня, что настигъ ихъ, вѣзжая въ одну долину, но конь его упалъ и сломалъ себѣ шею. Снявъ съ него шкуру, хозяинъ повѣсилъ ее рядомъ съ кускомъ чернаго хлѣба. Путешествуя, шагъ герой познакомился въ одной отдаленной странѣ съ важнымъ сеньоромъ и женился на его дочери. Послѣ вѣнчанья ему сказали, что по обычаямъ страны онъ не можетъ провести первую ночь со своей женой. Ночью, продырививъ стѣну, герой увидѣлъ, что съ его женой почевалъ капелланъ. Уходя, послѣдній забылъ часть своей одежды (*brages*), которую женихъ взялъ и повѣсилъ подлѣ хлѣба и кожи. На другой день родители жены сказали, что онъ можетъ сегодня провести ночь со своей супругой, но онъ заявилъ, что не сдѣлаетъ этого до тѣхъ поръ, пока они не посѣтятъ его. Когда они прибыли, онъ угостилъ ихъ, затѣмъ разъяснилъ значеніе трехъ вещей, которыя были повѣшены въ его залѣ, и заявилъ имъ, чтобы они взяли свою дочь, съ которой онъ не желаетъ жить <sup>1)</sup>.

Есть основаніе полагать, что пересказанныя новеллы восходятъ къ тому же оригиналу, что и изслѣдуемые эпизоды нашего памятника: отрицать сходство между ними невозможно, а различія находятъ удовлетворительное объясненіе.

Третій совѣтъ въ  $\beta$  и  $\gamma$  гласитъ: не бери жены изъ чужой земли относящееся же къ соответствующему эпизоду наставленіе  $\alpha$  читается такъ: не позволяй своей женѣ часто посѣщать ея родственниковъ. Это различіе между  $\alpha$ , съ одной стороны, и  $\beta\gamma$ , съ другой—обусловлено, какъ можно думать, слѣдующимъ обстоятельствомъ. Ниже въ *H-sag'*ѣ рассказывается, что Гейдрекъ женился на дочери короля Гардарики, т. е. тоже иностранкѣ, при чемъ ничего дурного съ нимъ не случилось. Это и могло побудить того, кто соединилъ съ мотивомъ четырехъ уже разсмотрѣнныхъ совѣтовъ мотивъ трехъ другихъ, иначе формулировать цитированное поученіе.

Можно даже указать, откуда была заимствована та формула, которую мы находимъ въ *H-sag'*ѣ. Первое наставленіе въ  $\beta\gamma$  предостерегаетъ отъ частаго посѣщенія чьего-либо дома. Въ оригиналѣ  $\alpha\beta\gamma$ , можетъ быть, шла рѣчь, именно, о родственникахъ героя, потому что

<sup>1)</sup> Les cent nouvelles nouvelles, éd. P. L. Jacob, Paris 1858, p. 234—238 (новелла LII).

подобный совѣтъ въ Ruodlieb'ѣ запрещаетъ отягчать частыми посѣщеніями родственниковъ <sup>1)</sup>). Весьма вѣроятно, лицо, сдѣлавшее указанную выше прибавку, замѣнило неподходящее наставленіе уномянутымъ сейчасъ, но отнесло его къ женѣ; это было тѣмъ болѣе возможно, что послѣднее, какъ мы увидимъ, не находило мѣста въ исторіи Гейдрека (см. ниже, стр. 190).

Высказанное предположеніе подкрѣпляется и блажайшимъ изслѣдованіемъ текста R, гдѣ третій совѣтъ гласитъ: *þat id þridia, at hann lati eigi opt konu sina uittia frænda sinna* (R, стр. 43<sub>14-5</sub>). Здѣсь слово *opt* неподходяще: въ сагѣ Гейдрека сообщается лишь только объ одной поѣздкѣ жены героя къ отцу.

Кромѣ того, цитированному сейчасъ наставленію нашего памятника не вполне соответствуетъ относящійся къ нему эпизодъ: частое посѣщеніе родственниковъ и измѣна жены не стоятъ здѣсь въ причинной связи.

Наоборотъ, въ β и γ, гдѣ интересующій насъ совѣтъ отнесенъ къ иному происшествію въ жизни героя, все въ порядкѣ: здѣсь частое посѣщеніе знакомыхъ (= родственниковъ оригинала αβγ?) причиняетъ герою непріятность—хозяйинъ дома, желая отдѣлаться отъ его постоянныхъ визитовъ, даетъ ему понять, что присутствіе его нежелательно. Разъ такъ, то, само собой понятно, βγ стоитъ въ данномъ случаѣ на древнѣйшей ступени развитія; выводъ, что въ α произошла перемѣна, былъ уже сдѣланъ раньше.

Обратимся теперь къ изслѣдованію эпизода, соответствующаго разсмотрѣнному сейчасъ наставленію.

Различіе между α и βγ въ данномъ случаѣ заключается въ слѣдующемъ:

- 1) герой былъ обманутъ женой—по α, потому что отпустилъ ее къ отцу, по βγ—потому что онъ женился въ чужой странѣ;
- 2) для доказательства измѣны жены по α Гейдрекъ созываетъ собраніе и открываетъ ея любовника-раба при помощи отрѣзаннаго имъ локона: по βγ герой съ той же цѣлью показываетъ *brache* и

<sup>1)</sup> Non tibi tam karus sit contribulis tuus ullus,  
Quatinus hunc sepe soleas uisendo grauare.  
Plusque solet rarum quam continuum fore karum,  
Nam cito uilescit homini quodcumque frequens sit.  
Ruodlieb, herausgeg. v. Seiler, Halle 1882. S. 246.



предлагаетъ освидѣтельствовать любовника жены — оказывается, дѣйствительно, что послѣдній ихъ не имѣетъ <sup>1)</sup>).

Обсудимъ это различіе.

1) Въ  $\alpha$  измѣна жены Гейдрека и посѣщеніе ею дома отца, какъ было уже сейчасъ отмѣчено, не стоятъ въ причинной связи: чтобы обманывать мужа не надо непременно возвращаться въ домъ родителей. Наоборотъ, въ  $\beta\gamma$  мотивировка вполне логична: чужестранецъ не могъ хорошо знать жителей той страны, куда онъ прибылъ: вполне естественно, если онъ избралъ себѣ въ жены недостойную дѣвушку <sup>2)</sup>).

Уклоненіе  $\alpha$  было вызвано, конечно, измѣненіемъ формулировки третьяго совѣта, о которомъ говорилось раньше.

2) Такъ какъ Гейдрекъ былъ не въ своей землѣ, а въ столицѣ своего тестя, то должно быть признано весьма неподходящимъ сообщеніе  $\alpha$  о томъ, что онъ созываетъ собраніе, велитъ всѣмъ явиться и вообще распоряжается, какъ у себя дома. Эта именно несообразность и доказываетъ, что въ  $\alpha$  весь эпизодъ открытія любовника жены заимствованъ изъ другого произведенія, сходнаго съ новеллой Боккачіо. Здѣсь онъ вполне согласуется съ прочими подробностями: Агилульфъ былъ въ своемъ замкѣ, поэтому онъ могъ приказывать явиться своимъ людямъ, когда ему вздумалось. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что оригиналъ  $\alpha$  и въ данномъ случаѣ согласовался съ  $\beta\gamma$  или, вѣрнѣе говоря, съ  $\beta$ . Въ  $\gamma$ , какъ было упомянуто, отсутствуетъ рассказъ объ освидѣтельствованіи одежды любовника. Между тѣмъ эта подробность весьма существенна: показавъ родителямъ жены *brache*, этимъ герой еще не доказалъ измѣны ихъ дочери — вѣдь онъ могъ добыть *brache*, гдѣ угодно. Наоборотъ, послѣ того, какъ было выяснено, что названный молодой человекъ не имѣетъ ихъ, не могло быть никакихъ рѣшительно споровъ о справедливости его обвиненія <sup>3)</sup>).

<sup>1)</sup> Въ  $\gamma$  послѣдняя подробность — объ освидѣльствованіи любовника — отсутствуетъ.

<sup>2)</sup> Впрочемъ, центръ тяжести въ  $\gamma$  лежитъ какъ-будто въ незнакомствѣ главнаго дѣйствующаго лица съ обычаями страны: изъ словъ родителей новѣсты и дальнѣйшаго рассказа выходитъ, что по обычаямъ страны, гдѣ нашелъ себѣ жену герой, первая ночь принадлежала капеллану. Ср. соответствующее явленіе въ русской жизни въ періодъ крѣпостного права. *Jus primae noctis* былъ свойственъ и италянцамъ. Ср. Liebrecht, *Zur Volkskunde*, Heilbronn 1879, S. 416 ff., vgl. S. 94.

<sup>3)</sup> Если это предположеніе правильно, то тогда можно смѣло утверждать, что интересующій насъ эпизодъ въ  $\beta$  сохранился въ болѣе древнемъ видѣ,

Что все это такъ, видно и изъ  $\alpha$ : здѣсь Гейдрекъ показываетъ присутствующимъ пучекъ волосъ, который какъ разъ отсутствовалъ у раба, т. е. продѣлываетъ совершенно то же, что герой  $\beta$  съ brache. Между тѣмъ эта подробность  $\alpha$  не могла быть заимствована изъ источника, сходнаго съ повеллой Боккаціо, потому что она здѣсь отсутствуетъ. Отсюда вытекаетъ слѣдствіе, что она восходитъ къ оригиналу  $\alpha$ , въ которомъ только шла рѣчь не о волосахъ, заимствованныхъ изъ упомянутаго источника, а скорѣе о brache, какъ въ  $\beta$ .

Обратимся теперь къ изслѣдованію прочихъ совѣтовъ  $\alpha\beta\gamma$  и относящихся къ нимъ эпизодовъ.

Легко видѣть, что поученіе: не посѣщай часто домъ знакомыхъ (родственниковъ?), и рассказъ объ угощеніи героя чернымъ хлѣбомъ или луковицей, не могли быть введены въ  $\alpha$ : главное дѣйствующее лицо здѣсь король: а при такихъ условіяхъ было бы крайне неподходяще сообщать, что Гейдрекъ надоѣдалъ своими посѣщеніями кому-либо, и что его, въ концѣ концовъ, угостили луковицей или чернымъ хлѣбомъ съ цѣлью отдѣлаться отъ его докучливыхъ визитовъ. Это обстоятельство и заставило того, кто ввелъ въ исторію сына Гофунда три новыхъ совѣта, замѣнить цитированный сейчасъ инымъ.

Труднѣе сказать, въ виду отсутствія данныхъ, почему авторъ прибавки избралъ именно ту формулу, которую мы находимъ въ  $\alpha$  (не оставаться до поздняго часа у любовницы), а не какую-либо другую.

Я въ состояніи предложить только лишь слѣдующее объясненіе.

Выше уже была высказана мысль, что четвертый (а также и пятый) совѣтъ и соответствующій эпизодъ первоначально не имѣли ничего общаго между собой, ибо смерть Сифки, выдавшей тайну своего возлюбленнаго, нельзя разсматривать, какъ наказаніе, которое постигало героя, разъ онъ преступалъ совѣты отца, потому что она была ему

чѣмъ въ  $\gamma$ . Обнаружить отсутствие brache удалось герою  $\beta$  только потому, что возлюбленный его жены прибылъ въ Сиену вмѣстѣ съ прочими гостями въ день, когда обманутый мужъ похитилъ ихъ, и что это произошло въ пути—при такихъ условіяхъ юноша, конечно не могъ добыть другія brache. Но въ  $\gamma$ , гдѣ родители невѣсты прибыли лишь спустя нѣкоторое время послѣ соответствующаго происшествія въ домъ зятя, не могло быть уже, конечно, и рѣчи объ отсутствіи brache у капеллана. Такимъ образомъ выходитъ, что описаніе событій, сопровождавшихъ открытіе измѣны, въ  $\gamma$  подверглось искаженію. То же приходится сказать и о рассказѣ  $\gamma$ , по которому родители молодой женщины запретили герою провести первую ночь съ ихъ дочерью, — въдѣ вся исторія, какъ мы видѣли, первоначально произошла въ дорогѣ.

желательна. Опираясь на это соображеніе, можно сдѣлать такую догадку. Уже въ составъ древнѣйшей исторіи Гейдрекса входилъ разсказъ о смерти Сифки, приблизительно, слѣдующаго содержанія: король Рейдготаланда, разгнѣванный на свою возлюбленную, по винѣ которой онъ подвергся страшной опасности, однажды вечеромъ увезъ ее изъ дома и бросилъ въ рѣку. Такой разсказъ былъ вполнѣ естественнымъ продолженіемъ предшествующаго ему.

Имѣя въ виду этотъ эпизодъ, лицо, передѣлавшее сагу Гейдрекса, могло легко присочинить совѣтъ, запрещавшій быть до поздняго часа внѣ дома съ любовницей. Но нарушеніе даннаго совѣта, какъ и прочихъ, должно было влечь за собой наказаніе. Въ виду этого авторъ передѣлки постарался замаскировать то обстоятельство, что убійцей Сифки былъ Гейдрекъ. Предыдущая догадка находитъ свою поддержку при болѣе внимательномъ изслѣдованіи Н-sag'и. Здѣсь сообщается, между прочимъ, что Гейдрекъ долженъ былъ однажды проводить Сифку домой по Н, прочь по R, и что, когда ихъ конь палъ, онъ хотѣлъ перенести ее черезъ рѣку, посадивъ ее на плечи, но уронилъ. сломалъ ей позвоночный столбъ, и трупъ ея былъ унесенъ рѣкой. Между указанными здѣсь фактами нѣтъ рѣшительно никакой логической зависимости; вмѣстѣ съ тѣмъ они стоятъ внѣ всякой связи съ предыдущими событіями. Съ какой цѣлью Гейдрекъ отправился провожать Сифку, зачѣмъ ему понадобилось переносить ее черезъ рѣку и бросить ее, почему онъ трупъ ея предоставилъ волнамъ, все это совершенно не мотивировано. Подобное обстоятельство можно объяснить тѣмъ, что часть упомянутыхъ подробностей была присочинена авторомъ прибавки, пытавшимся скрыть фактъ умерщвленія Сифки Гейдрексомъ. Поѣздку короля Рейдготаланда къ рѣкѣ, предпринятую съ цѣлью лишить жизни Сифку, онъ представилъ какъ ея путешествіе въ сопровожденіи возлюбленнаго, самое же умерщвленіе ея онъ объяснилъ случайностью—падениемъ съ плечъ короля. Но ни причины путешествія, ни причины перехода рѣки, обусловившія паденіе и смерть Сифки, онъ не могъ указать, такъ какъ у него не было для этого рѣшительно никакихъ данныхъ. Если мы отбросимъ всѣ эти немотивированныя подробности, то въ результатѣ останется сообщеніе о томъ, что Гейдрекъ пріѣхалъ съ Сифкой къ рѣкѣ, и трупъ ея былъ унесенъ теченіемъ. Догадка: онъ ее бросилъ въ рѣку, тѣмъ болѣе вѣроятна, что она стоитъ въ полномъ согласіи съ предыдущимъ разсказомъ.

Обратимся теперь къ изслѣдованію второго наставленія  $\beta\gamma$  и пятого исторіи Гейдрекъ.

Поученіе Гофунда, запрещающее ѣздить на самомъ быстромъ конѣ, когда надо спѣшить, обнаруживаетъ сходство съ соответствующимъ совѣтомъ  $\gamma$ , который рекомендуетъ не гнать коня, вѣзжая въ долину; во второмъ наставленіи  $\beta$  конь совершенно не упоминается. Какая изъ обѣихъ приведенныхъ формулъ первоначально, сказать вполнѣ точно нельзя, потому что въ  $\alpha$ , какъ увидимъ, утраченъ соответствующій эпизодъ. Однако, формула  $\alpha$ , кажется, заслуживаетъ предпочтенія: рассказъ  $\gamma$  объ охотѣ на зайца можетъ оправдать также и ее, стоитъ въ немъ лишь вычеркнуть выраженіе *en valée* и добавить, что павшій конь былъ самый лучший изъ тѣхъ, коими владѣлъ герой. Между тѣмъ заподозрить составителя  $\alpha$  въ искаженіи формулы мы потому не можемъ, что она не согласуется съ относящимися къ ней событіями.

Обращаясь къ изслѣдованію эпизодовъ  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующихъ разсмотрѣннымъ сейчасъ наставленіямъ.

Въ  $\alpha$  говорится, что, провозая Сифку, Гейдрекъ ѣхалъ на лучшемъ своемъ конѣ. Почему онъ выбралъ именно послѣдняго для путешествія не сообщается, и нельзя объяснить изъ контекста. Равнымъ образомъ, не упомянуто, что герой долженъ былъ спѣшить, да это не слѣдуетъ и изъ ситуаціи.

Опираясь на такія данныя, можно смѣло утверждать, что поученіе о конѣ лишь вполслѣдствія было связано съ рассказомъ о смерти Сифки (ср. выше), и что въ источникѣ  $\alpha$  ему соответствовалъ другой эпизодъ—можетъ быть, тотъ, который мы находимъ въ  $\gamma$ .

Предыдущій разборъ доказалъ, что  $\alpha$  восходитъ къ оригиналу, отъ котораго ведутъ начало  $\beta$  и  $\gamma$ , и что въ  $\alpha$  былъ введенъ рассказъ о волосахъ, заимствованный изъ источника, использованнаго между прочимъ и Боккачіо въ новеллѣ о Теуделиндѣ.

Перейдемъ теперь къ разбору слѣдующаго эпизода саги.

Рассказъ о преніи Гейдрекъ съ Однимъ при всей краткости своей повѣствовательной части, очень сложенъ: онъ составленъ изъ нѣсколькихъ элементовъ, не имѣющихъ ничего общаго между собой по происхожденію.

Въ основу его легъ, какъ показалъ уже Heusler <sup>1)</sup>, мотивъ, который очень распространенъ въ настоящее время въ сѣверо-нѣмецкихъ областяхъ <sup>2)</sup> и, кажется, не чуждъ другимъ германскимъ племенамъ.

Въ устахъ нѣмецкаго народа, главнымъ образомъ, въ сѣверной части Германіи, живетъ масса загадокъ, которыя прежде именовались *Verbrechersrätsel*, и которымъ Wossidlo <sup>3)</sup> далъ имя *Halslösungsrätsel*.

Оба эти названія—последнее изъ нихъ должно быть признано болѣе удачнымъ—обусловлены тѣмъ, что упомянутыя загадки, въ большинствѣ случаевъ, сопровождаются дополнительнымъ замѣчаніемъ, въ которомъ сообщается, что присужденный къ смерти преступникъ—или близкій ему человекъ (мать, жена)—предложилъ загадку судьямъ, что послѣдніе не могли разрѣшить ее, и онъ получилъ свободу.

Приведу нѣсколько наиболее характерныхъ примѣровъ.

- 1) Auf Ilo geh ich,  
auf Ilo steh ich,  
auf Ilo bin ich hübsch und fein.  
rat't, meine herren, was soll das sein.

En mäten hett 'n Kind ümbröcht hatt; nu is dat jo früher so wäst, dat lüd', de to 'n dod' verurteilt wäst sünd, de richters hebben 'n rätsel upgäben künnt, wenn de dat nich lööst hebben, sünd se erlööst wäst. Ilomm hett dat mäten ehr hund heeten, von den 'n sien fell hett se sik 'n poor schoh maakt. As nu de dach rankümmt, treckt se de schoh an un geit hen na de richters un bädt ehr dat rätsel vör. Dat hebben se nich raden künnt, dor is se fri kamen <sup>4)</sup>.

- 2) Hengahu un wedderkamen,  
de läbende süht den doden an,  
de söss de is den scøwten quiet,  
herr, rad', nu is 't tiet.

<sup>1)</sup> Heusler, Die altnordischen Rätsel, Zeitschrift des Vereins für Volkskunde, B. XI, S. 124.

<sup>2)</sup> Petsch, Neue Beiträge zur Kenntniss des Volksrätsels, Berlin 1899, S. 17.

<sup>3)</sup> Meklenburgische Volksüberlieferungen, gesammelt und herausgegeben von R. Wossidlo, B. I, Wismar 1897, S. 321. Cp. Simroch, Das deutsche Rätselbuch, № 466, 469; Chambers, Popular rhymes, London, 1849, p. 145; Edinburgh, 1895, p. 324.

<sup>4)</sup> Wossidlo, стр. 191.

Ein mann hat hingerichtet werden sollen: seine frau weiss ihn aber dadurch zu retten, dass sie dem richter drei rätsel aufgibt, die dieser nicht raten kann. Das erste ist das obige: in einem toten ochsenkopf hat sich ein vogelnest befunden. Das zweite ist Iloff rätsel. das dritte ist nicht mehr bekannt.

Mien mudder hett mi oft vertellt, dat en fru de richters dree rätsels upgäben hett, um ehren mann to erlösen. De rätsels sülben heff ik œwer vergäten <sup>1)</sup>).

- 3) Hengahn un wedderkamen, lebendig ut den doden  
nahmen,  
de søwt de gung den søsten quitt,  
raadt, mine herren, nu is dat tiet.

Ein zum tode verurteilter ging zur stadt des königs. Unterwegs fand er ein totes pferd, in dessen gerippe sich ein vogelnest mit sechs jungen befand. Bei seiner ankunft flogen die alten weg <sup>2)</sup>).

4) Ср. слѣдующую датскую загадку:

Hwa æ de, de æ ðj o ålle fðj, de æ ðwe e Jue o unne e Jue,  
o ðwe e Wan o unne e Wan o hõt åp i Trætåp?

Det var en Mand, som var i Fængsel, ok fik Løfte om sin Frihed, dersom han kunde gjøre et Spørgsmaal, som de ikke kunde løse. Saa gik han hjem og skar en Gris ud af sin So, og den lagde han op i en Trætop, som hang ud over en Bæk, og lagde Græstørv ovenover <sup>3)</sup>).

5) См. слѣдующую исландскую параллель:

út gekk eg óvís,  
inn gekk eg vís,  
sá eg hvar átján tungur  
í einu höfði sýngu.

Þessi gáta á að vera eptir sakamann, er skyldi vinna það sér til

<sup>1)</sup> Тамъ же, стр. 193.

<sup>2)</sup> Тамъ же, стр. 211.

<sup>3)</sup> Gamle danske Minder, samlede og udgivne af S. Grundtvig, B I, 2. Udgave, Kjöbenhavn 1861, s. 224, № 31.

þífs að bua til gátu, sem einginn gæti ráðid. Отвѣтъ гласить: þunángsflugur súngu í hrosshaus <sup>1)</sup>).

Присутствіе на Исландіи этой загадки, которую невозможно вывести изъ Н-sag'и—чего нельзя сказать о нѣкоторыхъ другихъ (см. ниже)—ясно показываетъ, что мотивъ Halslöbung былъ распространенъ на этомъ островѣ.

Легко видѣть, что приведенный мотивъ совпадаетъ съ рассказомъ о Гейдрекѣ и Гестумблинди: тамъ, какъ и здѣсь, выступаетъ преступникъ, который можемъ получить свободу, предложивъ неразрѣшимую загадку.

Такое сходство позволяетъ думать, что указанный мотивъ и былъ привлеченъ авторомъ саги о Гейдрекѣ. Но при этомъ онъ претерпѣлъ рядъ осложнений и измѣненій <sup>2)</sup>).

Прежде всего, въ изслѣдуемомъ сказаніи говорится, что Гестумблинди долженъ былъ подвергнуться суду 7 (12) судей-мудрецовъ. Подобное уклоненіе отъ первоисточника обусловлено тѣмъ, что Гейдреку было приписано учрежденіе суда двѣнадцати мудрецовъ, сказаніе о которыхъ было, вѣроятно, въ ходу на Сѣверѣ; по крайней мѣрѣ, они упоминаются и въ Ynglinga sag'ѣ: þat var þar (=í Ásalandi) síðr, at xii hofgoðar váru óztir; skyldu þeir ráða fyrir blótum ok dónum manna í milli <sup>3)</sup>).

Затѣмъ, въ сагѣ Гейдрека объяснено происхожденіе того страннаго условія, при выполненіи котораго преступникъ могъ получить свободу—черта, отсутствующая въ загадкахъ: Гейдрекъ далъ клятву надъ кабаномъ, посвященнымъ Фрею, освобождать всякаго преступника, сумѣвшаго предложить непонятную ему загадку. Это объясненіе опять-таки было придумано на Сѣверѣ, вѣроятно, авторомъ саги: произно-

<sup>1)</sup> Islenzkar Gátur, safnað hefir Jón Árnason, Kaupmannahöfn 1877, s. 126, № 193. Ср. также №№ 298, 303, хотя при нихъ и не упомянуто, что онѣ были предложены преступниками.

<sup>2)</sup> Нужно замѣтить, что въ редакціи Н прибавленъ еще сказочный мотивъ, котораго нѣтъ въ R. Гейдрекъ говоритъ въ Н Гестумблинди: „Если ты побѣдишь меня, получишь мою дочь въ жены“. О добываніи красавицы путемъ рѣшенія трудныхъ загадокъ или выполненія работъ, рассказывается у многихъ народовъ, а также и на островѣ Исландіи; ср. сказку: Ganti á Hólnum въ Rittershaus, Die Neuisländischen Volksmärchen, Halle 1902, S. 82, ff: тамъ же (S. 84 f.) приведены и нѣкоторыя параллели.

<sup>3)</sup> Изд. Юнссона, стр. 11.

силь обѣты надъ кабаномъ Фрея было въ обычаѣ именно у древнихъ скандинавовъ <sup>1)</sup>).

Далѣе, въ разсматриваемомъ произведеніи мѣсто преступника Гестумблинди занялъ принявшій на себя его образъ Одинъ.

Въ основѣ этого измѣненія, какъ и двухъ предыдущихъ, лежатъ старыя сѣверо-германскія представленія. Что Одинъ принималъ на себя образъ тѣхъ или иныхъ личностей, объ этомъ часто упоминается въ Эддѣ: въ образѣ же крестьянина (*bondi*), коимъ именно былъ *Gestumblindi*, онъ фигурируетъ въ *Hrólfs saga Kraka* <sup>2)</sup>; подъ видомъ странника, носящаго имя *Gestr* въ *Óláfs saga Tryggvasonar*, *Óláfs saga Helga* <sup>3)</sup>, *Sögu þattr af Norna Gest* <sup>4)</sup>.

Самая идея надѣлать Одина той ролью, какую онъ играетъ въ нашемъ памятникѣ, могла явиться подъ влияніемъ эддическаго стихотворенія *Vafþrúðnismál*, съ которымъ интересующій насъ эпизодъ *H-sag*'и обнаруживаетъ не случайное сходство.

Прежде всего, *Vafþrúðnir* заявляетъ Одину:

vt þv ne comir  
 orom haullof ofra,  
 nema þv inn snotrari ser (*Edda*, изд. Бугге, стр.  
 65 сл.).

Такимъ образомъ Одинъ попалъ здѣсь въ то же затруднительное положеніе, въ какомъ очутился Гестумблинди, который долженъ былъ побѣдить короля въ преніи или подвергнуться суду и наказанію.

Далѣе, каждый вопросъ *Vafþrúðnir*'а и Одина начинается тожественными словами. Въ *H-sag*'ѣ мы встрѣчаемся съ подобнымъ приемомъ, только здѣсь всѣ загадки оканчиваются одной и той же строкой.

Наконецъ, послѣдній вопросъ тожественъ въ обоихъ произведеніяхъ какъ по содержанію, такъ и по послѣдствіямъ—благодаря ему Одинъ былъ открытъ.

<sup>1)</sup> Weinhold, *Altnordisches Leben*, S. 462.

<sup>2)</sup> *Hrólfs saga Kraka og Bjarkarímur*, ud. af F. Jónsson, København 1904, s. 76—77, 92—93.

<sup>3)</sup> *FMS* II, s. 138; V, s. 171 f.

<sup>4)</sup> *FAS* I, s. 313 ff.



Выясненное сейчасъ сходство врядъ ли можно признать случайнымъ—скорѣе слѣдуетъ думать, что авторъ саги Гейдрека работалъ, именно, имѣя въ виду названное стихотвореніе, какъ образецъ <sup>1)</sup>.

Поэтому трудно согласиться съ Heusler'омъ, который склоненъ отвергать всякое взаимодѣйствіе между *Vafþrúðnismál* и загадками (S. 126). Сколько я вижу, онъ не указалъ ни одного обстоятельства, которое бы противорѣчило защищаемому здѣсь положенію. Онъ говоритъ, что авторъ разсматриваемой саги не могъ заимствовать изъ *Vafþrúðnismál* общей этихъ произведеній загадки, такъ какъ ея текстъ тамъ и здѣсь различенъ, какъ это легко видѣть:

*H-saga* (29<sup>a</sup>-s, sp. 57<sup>a</sup>-10).

Hvat mælti Óðinn  
í eyra Balldri,  
áðr hann var á bál hafðr?

*Vafþrúðnisn.ál.*

hvat mælti Óðinn,  
aþr a bal stigi,  
sialfr í eyra syni? <sup>2)</sup>.

Но на это можно возразить, что вѣдь заимствование могло быть сдѣлано не непременно изъ той версіи, которая теперь сохранилась въ Gl. kgl. Sml. 2365 4-to и отчасти въ AM 748 4-to <sup>3)</sup>, а изъ какой-либо иной. Пѣсни Эдды, какъ и другія скандинавскія произведенія, были извѣстны во многихъ редакціяхъ; ср. стихотвореніе *Völuspá*, которое дошло въ нѣсколькихъ разнящихся другъ отъ друга записяхъ <sup>4)</sup>.

Кромѣ того, отвергнувъ предположеніе о зависимости изслѣдуемаго отрывка *H-sag*'и отъ *Vafþrúðnismál*, трудно объяснить тожество ихъ заключительнаго вопроса. Heusler говоритъ: «Тема: «Одина слова къ мертвому Бальду» была традиціонна, какъ неразрѣшимый вопросъ *par excellence*: она могла въ случаѣ надобности примѣняться, какъ драматическое завершеніе пренія загадками—въ особенности, потому, что она имѣла требуемое свойство снимать маску съ Одина.»

Но, откуда, спрашивается, извѣстно, что интересующая насъ загадка была традиціонна—вѣдь она засвидѣтельствована только *Vafþrúðnismál* и нашей сагой <sup>5)</sup>. Опираясь на этотъ фактъ, можно съ не

<sup>1)</sup> Ср. Bergmann, *Poèmes islandais*, Paris 1838, p. 257.

<sup>2)</sup> Эдда, изд. Бугге, стр. 74.

<sup>3)</sup> Тамъ же, *Portale*, s. 11, XIX.

<sup>4)</sup> Тамъ же, стр. XXII сл.

<sup>5)</sup> Jónsson (*Litt. Hist.*, V. I, s. 147), а за нимъ и Niedner (*ZfdA* XLI, S. 310)

умаютъ, что этотъ вопросъ находился и въ оригиналѣ *Baldrsdraumar*, но это не болѣе, какъ одно только предположеніе.

меньшимъ правомъ утверждать, что она была обязана своимъ возникновеніемъ остроумію автора *Vafþrúðnismál*, откуда потомъ и была введена въ сказаніе о преніи Гейдрека съ Однимъ. Что это, именно было такъ, подтверждаетъ также и обстоятельство, подчеркнутое Гейслеромъ<sup>1)</sup>: вопросъ о словахъ Одина, сказанныхъ на ухо мертвому Бальду, подходит по своему стилю вполне лишь къ *Vafþrúðnismál*, но не къ загадкамъ Гейдрека; онъ имѣетъ цѣлю, какъ и прочіе вопросы перваго изъ названныхъ произведеній, изслѣдовать глубину познаній вопрошаемаго, а не его проницательность, какъ въ загадкахъ Гейдрека.

Заканчивая на этомъ разборъ вопроса о взаимоотношеніи *Vafþr.* и загадокъ Гейдрека, необходимо еще отмѣтить, что со стороны хронологіи нѣтъ никакихъ препятствій къ принятію нашего мнѣнія. Стихотвореніе *Vafþrúðnismál* было составлено въ срединѣ X в.<sup>2)</sup>, а *H-saga*—во второй половинѣ того же столѣтія (см. выше, стр. 14 сл.): въ промежутокъ же, отдѣляющій моменты возникновенія перваго и втораго произведеній, могла быть сочинена сага Гейдрека, вошедшая въ составъ *H-sag'*и, или, по крайней мѣрѣ, въ нее могло быть введено преніе героя съ Однимъ.

Итакъ, исходя изъ предыдущаго, можно представить себѣ слѣдующимъ образомъ возникновеніе эпизода пренія загадками: въ основу его легъ мотивъ *Halslösung*, который былъ дополненъ рядомъ подробностей чисто скандинавскаго происхожденія: сюда относятся рассказы о 12 мудрыхъ судьяхъ, о клятвѣ Гейдрека надъ кабаномъ Фрея, о принятіи Однимъ образа Гестумблинди; сюда же должно быть причислено и самое описаніе пренія, которое было составлено по образцу *Vafþrúðnismál*<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> S. 125. Впрочемъ на это обстоятельство указываетъ и Jónsson, *Um þulur og Gátur*, s. 510 (*Germanistische Abhandlungen zum 70. Geburtstag K. v. Maurers, Göttingen 1893*).

<sup>2)</sup> Bergmann, *Poèmes islandais*, Paris 1838, p. 257; Mogk, *Grundriss*, B. II, S. 584.

<sup>3)</sup> Необходимо для полноты отмѣтить, что рассказъ о преніи Гейдрека и Гестумблинди сохранился въ устномъ преданіи на Фарерскихъ островахъ до позднѣйшаго времени—это *Gátu Ríma*, отпечатанная извѣстнымъ уже читателю *Hammershaimb'*омъ въ *Antiquarisk Tidsskrift 1849—51*. Содержаніе ея такое. Печальный *Gestur blindi* выходитъ изъ дома и встрѣчаетъ старика, который спрашиваетъ его о причинѣ грусти. *Gestur* говоритъ, что ему завтра придется лишиться головы благодаря загадкамъ. Незнакомецъ предлагаетъ



ни: var staddur указывает, именно, на временное пребывание — и что рабы-убийцы ворвались в его палатку. В R, где эти подробности отсутствуют, сохранился также намек на то, что смерть застигла героя вне дома; здесь, как и в контаминированной редакции, сообщается, что в роковую ночь с Гейдреком было мало людей (см. стр. 57<sub>21</sub>, ср. 61<sub>6</sub>); отсутствие же многочисленной свиты могло быть обусловлено спешной поездкой куда-либо. Итак, из предыдущего следует, что Гейдрек был убит рабами у гор, называемых Hæruaða или Navada fiöll. Но куда он отправлялся, чем вызвано было его путешествие, на эти вопросы мы не находим никакого ответа в памятнике.

Раньше уже было выяснено, что по первоначальному представлению Гейдрек не имел детей, и что рассказ об Ангантюрѣ, устроившем по отцу тризну и отмстившем за него, был присочинен лишь тогда, когда сага о гого-гунском боѣ была введена в состав нашего памятника. Если мы удалим этот рассказ, то в остатке получится лишь небольшой отрывок, заключающий в себе разговор рабов, вместе с полустрокой:

þess gallt hon gedda firir Grafarr osi,  
 er Heidrekr var ueginn undir Hæruaða fiollum  
 (58<sub>8-9</sub>, ср. 62<sub>1-2</sub>).

Опредѣлить, в каком отношении первоначально находился этот отрывок к эпизоду убийства, рѣшительно не представляется возможным: соединяющая их часть была замѣнена рассказом об Ангантюрѣ, измышленным автором упомянутой выше прибавки: возстановить же ее нельзя за отсутствием данных.

Итак, история умерщвления Гейдрека дошла к нам лишь в видѣ двухъ небольшихъ отрывковъ: содержаніе ихъ неясно — они предполагаютъ известными многія утраченныя подробности. Это обстоятельство позволяет думать, что рассказ о смерти Гейдрека представлялъ нѣкогда собой болѣе или менѣе обширное произведеніе. Изложено оно было, вѣроятно, стихами: въ сохранившейся строфѣ можно видѣть ихъ остатокъ <sup>1)</sup>.

Что же можно сказать о происхожденіи этого произведенія?

<sup>1)</sup> Heinzel, S. 455; ср. Vigfusson and Powell, Corpus poeticum boreale, vol. I, Oxford 1883, p. 352

Въ виду краткости сохранившихся отрывковъ, дать болѣе или менѣе опредѣленный отвѣтъ на этотъ вопросъ очень трудно или, вѣрнѣе говоря, невозможно.

Съ нѣкоторой долей вѣроятности можно лишь утверждать, что въ основу его легло какое-то историческое событіе. Въ пользу такого мнѣнія говорятъ слѣдующія обстоятельства: въ рассказѣ объ убійствѣ короля рабами нельзя видѣть, какъ въ другихъ эпизодахъ біографіи Гейдрека, бродячій мотивъ; описанныя событія локализованы въ точно указанномъ мѣстѣ; Гейдрекъ—герой періода викинговъ (ср. фразу: *þat er sagt, at Heidrekr konungr ætti þrela nokkura þa, er hann hafði tekit i uestr. viking 57<sub>18-19</sub>; ср. 61<sub>2-3</sub>*), историческія личности и событія котораго легли въ основу скандинавскаго эпоса.

Но какой, именно, историческій фактъ послужилъ исходнымъ пунктомъ интересующаго насъ сказанія, на это я не сумѣю дать отвѣта. Schütte въ статьѣ: *Anganty-Kvadets Geografi*, помѣщенной въ 21-омъ томѣ: «*Arkiv för nordisk Filologi*» (s. 41 f., 44) сближаетъ имена *Heidrekr* и *Ardaricus* (король гепидовъ). Вотъ что онъ говоритъ по этому поводу: «Душой освободительной войны былъ король гепидовъ *Ardaricus*=*Hardurik*; невольно вспоминаешь короля рейдготовъ *Heaþoric*=*Heiþrekr*, который погибъ у *Harvaðafjöll*, значитъ, по сосѣдству съ Панноніей; впрочемъ, я не хочу придавать значенія сходству именъ».

Несмотря на послѣднюю фразу, можно думать все-таки, что Schütte кажется очень заманчивой мысль о тождествѣ Ардарика и Гейдрека, какъ это видно изъ дополнительнаго замѣчанія къ его работѣ (s. 44). Здѣсь онъ пытается филологически оправдать тожество именъ *Heaþoric* и *Ardaricus* и оканчиваетъ такой фразой: «По существу почти невысказано, чтобы Гардурикъ, самый выдающійся совѣтникъ Атиллы и герой освободительной войны противъ гунновъ, не нашелъ себѣ мѣста въ преданіи.»

Все это вѣрно, и все же нѣтъ никакого основанія видѣть въ героѣ *H-sag*'и отраженіе историческаго короля гепидовъ: кромѣ имени, они не имѣютъ между собой ничего общаго—Ардарикъ не погибъ отъ руки рабовъ, а Гейдрекъ не представленъ ни борцомъ за свободу готовъ, и ни совѣтникомъ Атиллы.

Но не только событіе, легшее въ основу изслѣдуемаго сказанія, остается намъ неизвѣстнымъ—мы съ трудомъ лишь можемъ опредѣлить страну, гдѣ оно совершилось.

Гейдрекъ выступаетъ въ роли короли Рейдготаланда. Къ какой странѣ должно отнести это названіе?

Посмотримъ сначала, какой выводъ можно сдѣлать на основаніи содержанія Н-sag'и. Само собой понятно, что при этомъ должны быть приняты во вниманіе лишь тѣ ея части, которыя входятъ въ составъ исторіи Гейдрека <sup>1)</sup>.

Рейдготаландъ находится къ западу отъ Hólmgardr'a (Н, стр. 15<sub>21</sub>, 16<sub>2</sub>) и Gardariki (стр. 47<sub>30,32</sub>): вблизи Рейдготаланда лежитъ Vindland (земля вендовъ): Vindland, er nest liggir Reidgotaland (Н, стр. 17<sub>28</sub>); изъ Рейдготаланда въ Saxland (=Германія <sup>2)</sup>) путь лежитъ моремъ (Н стр. 15<sub>1</sub>; R, стр. 46<sub>25</sub>); наконецъ, по Н (стр. 13<sub>32</sub>) Рейдготаландъ и Ютландія—тождественные <sup>3)</sup> географическіе термины: Reidgotaland þat heitir nu Jvtland.

Всѣ эти данныя, взятыя вмѣстѣ, позволяютъ заключить, что въ sag'ѣ Гейдрека разумѣется подъ Рейдготаландомъ названный только что полуостровъ. Такое мнѣніе подкрѣпляется тѣмъ, что въ древней Скандинавіи часто слово Рейдготаландъ употреблялось въ подобномъ значеніи.

Ср. слѣдующія свидѣтельства:

1) . . . ok þat heitir nú Jótland. er þá var kallat Reidgotaland (Snorra Edda, B I, Hafniae 1848, S. 26).

2) Gormr konungr fór með her sinn í þat ríki í Danmerk. er kallat er (þa var kallat B, C) Reidgotaland, en nú er kallat Jótland (Óláfs saga Tryggvasonar, FMS I, 116).

3) см. еще Hauksbók (по изд. Ионссона), Ragnars sona þátrr (стр. 459<sub>12</sub>): þeir logþv vndir sig Selvnd (=Зеландія) ok Reidgotaland Eygotaland ok Eyland ok oll sma lond i hafinv. Ср. стр. 464<sub>22</sub>: En Sigvrðr ormr i avga hafði Selvnd ok Skani ok Halland ok alla vikiur

<sup>1)</sup> Названіе Рейдготаландъ встрѣчается еще одинъ разъ въ нашемъ памятникѣ—именно, въ главѣ, содержащей перечисленіе потомковъ Антантюра.

<sup>2)</sup> Такое значеніе имѣетъ терминъ Saxland и въ другихъ случаяхъ; ср., напр., Germaniariki heitir þat, er ver kollom Saxland (Hauksbók, 155<sub>24-25</sub>).

<sup>3)</sup> Имѣются еще другія указанія: изъ Рейдготаланда въ Hólmgardr путешествие совершалось по морю (Н, стр. 16<sub>9</sub>, 17<sub>9</sub>); къ югу отъ Рейдготаланда лежитъ Hupaland (R, стр. 46<sub>10</sub>). Но этимъ указаніямъ не приходится придавать значенія: они встрѣчаются въ тѣхъ частяхъ саги, которыя выше были признаны позднѣйшими прибавками.

og Agdir til Liflandis nes ok mikin þora af Vpplandvm en Hvítserkr haffi Reidgota land ok Vindland <sup>1)</sup>).

Итакъ, изъ предыдущаго слѣдуетъ, что въ сагѣ о Гейдрекѣ подъ именемъ Рейдготаланда разумѣлась Ютландія.

Однако, противъ такого вывода можно сдѣлать слѣдующее возраженіе.

Тѣ данныя, которыя позволяютъ отождествить оба эти названія (сосѣдство Рейдготаланда съ Виндландомъ и прямое свидѣтельство) встрѣчаются въ Н: между тѣмъ, довѣрять редакціи Н въ настоящемъ случаѣ не приходится. Дѣло въ томъ, что слово Ivttland (въ фразѣ: þat heitir nu Ivttland) представляетъ собою норвежскую форму (вм. всл. Jótland) <sup>2)</sup>, а норвежскія формы, встрѣчающіяся въ Н, введены были въ Н самимъ Гаукомъ <sup>3)</sup>; но такъ какъ цитированная фраза стоитъ внѣ всякой связи съ содержаніемъ всего предложенія, часть котораго она составляетъ, и даже нарушаетъ его стройность (ср. 13<sup>31-32</sup>), то отсюда можно сдѣлать весьма вѣроятное заключеніе, что она обязана своимъ происхожденіемъ Гауку. По аналогіи можно утверждать то же и о другомъ свидѣтельствѣ Н: Vindland er nest ligr Reidgotalandi—тѣмъ болѣе, что это замѣчаніе, какъ и предыдущее, стоитъ внѣ всякой связи съ ходомъ разсказа.

Остаются такимъ образомъ незыблыми лишь два указанія: Рейдготаландъ лежитъ къ западу отъ Гольмгарда (Гардарики); изъ Рейдготаланда ѣдутъ моремъ въ Саксландъ. Само собою понятно, что на основаніи ихъ нельзя еще отождествить Рейдготаландъ съ Ютландіей.

Однако, изложенное сейчасъ возраженіе не можемъ быть признано состоятельнымъ.

Въ исландскихъ памятникахъ мы находимъ еще слѣдующія представленія о мѣстоположеніи Рейдготаланда:

1) I þann tíma var kollat allt meginland, þat er hann (=Óðinn) átti, Reidgotaland, en eyjar allar Eygotaland; þat er nú kallat Danaveldi ok Svíaveldi (Snorra Edda I, S. 530).

<sup>1)</sup> Гейнцель (S. 469) сообщаетъ, что и по Ynglinga sag'ъ, с. 21, Reidgotaland=Ютландія; но это—ошибка. На основаніи указаннаго имъ мѣста этого памятника нельзя точно опредѣлить, гдѣ лежитъ страна, названная Reidgotaland и Gotaland; ср. Heimskringla, B. IV, s. 33,—3<sup>15</sup>.

<sup>2)</sup> См. изд. Бугге, стр. 354.

<sup>3)</sup> См. выше, стр. 8, прим. 2.

2) По *Skjöldungasaga* (*Sögubrot*, FAS I, S. 366) *Ivarr víðfáðni* отправляется из Швеции на запад в *Sölund* (Зеландию), а оттуда на юг в Рейдготаланд: таким образом здесь интересующая нас земля локализована в Померании.

3) *Hia Garðaríki liggja lönd þessi Kirialir. Refalir. Tafeistaland. Virland. Eistland. Lifland. Kur land. Erm land. Pulínaland. Vindland er vestast nest Dannmork. En austr fra Polena er Reidgota land oc þá Húnaland* (*Hauksbók*, изд. Ионссона, стр. 155<sub>21-21</sub>).

Подобное же свидетельство встречается в Скалагольтской книге (*Antiquités Russes*, t. II, p. 447) и в *Saga af Eigli einhenda* (FAS. III, S. 364) <sup>1)</sup>.

Последнее из приведенных представлений о местоположении Рейдготаланда не подходит, как легко видеть, к упомянутым выше указаниям *H-sag'*и.

Что касается двух первых, то принимать их во внимание не приходится, так как они вряд ли были распространены: оба они стоят одиноко — мы их не встречаем в других памятниках. Кроме того, свидетельство *Snoorra Edd'*ы может быть, с большой долей вероятности, сочтено позднейшей прибавкой: его мы не находим, как отметили уже проф. Гейнцель, ни в Упсальской рукописи (см. *Snoorra Edda* II, S. 345), ни в *Wb*; оно совершенно излишне по смыслу и состоит вне всякой связи с толкованием эпитета *gotnar*, о котором идет речь в данном месте.

Свидетельству *Sögubrot* не следует также придавать значения. Весьма вероятно, что первоначально в этом отрывке под *Reidgotaland* разумелась Ютландия. На стр. 374 говорится, что Иварь владеть этим полуостровом; но когда он подчинил его, не сказано. С другой стороны, упомянуть его поход в *Reidgotaland* (стр. 366), цель и результаты которого неизвестны. Поэтому можно думать, что нѣкогда здесь под именем *Reidgotaland* разумелась Ютландия, и рассказывалось о покорении этой страны Иваромъ. Диссимилиация обѣихъ географическихъ названій и устраненіе рассказа о завоеваніи *Reidgotaland'*а обусловлено, вѣроятно, слѣдующимъ обстоятельствомъ. Въ *Sögubrot* мы находимъ главу (5), повѣствующую о *Hildir'*ѣ и *Hild'*ѣ, дѣтяхъ Гильдебранда. Хотя конецъ ея и утраченъ, но можно

<sup>1)</sup> Ср. Heinzel, S. 470.



предполагать, что она представляла собой позднѣйшую вставку: вступающія въ ней лица не названы и не предполагаются извѣстными въ дальнѣйшей части отрывка, посвященной описанію Бравалльской битвы. Эта глава начинается словами: *Ok í þann tíma, er Haraldr konungr hilditönn settist í ríkiu Svíþjóð ok Danmörk, var sá konungr í Reidgotalandi, er hét Hildibrandr, ok var ríkr konungr (ok) hermaðr mikill* (S. 375). Эти слова предполагаютъ, что Рейдготаландъ былъ независимымъ государствомъ. Поэтому раньше было бы неподходящимъ рассказывать о его покореніи Иваромъ. Въ виду этого, лицо, введшее пятую главу, перенесло *Reidgotaland* куда-то на югъ отъ *Seland'a* (=Зеландія) и опустило сообщеніе о результатахъ похода Ивара. Такимъ образомъ необычная локализация *Reidgotaland'a* въ *Sögbrot* можетъ быть объяснена, какъ слѣдствіе случайной передѣлки.

Изъ предыдущаго выходитъ, что врядъ ли когда-либо исландцы представляли Рейдготаландъ лежащимъ въ Померани или Швеции. Поэтому объ эти локализации не могутъ быть приняты здѣсь во вниманіе, хотя онѣ и подходятъ къ даннымъ Н и R. Слѣдовательно, остается полагать, что въ Н-заг'ѣ мы встрѣчаемся съ распространеннымъ представленіемъ о положеніи Рейдготаланда: Ютландія лежитъ, дѣйствительно, къ западу отъ Гардарики (Гольмгарда), и изъ нея можно моремъ достигнуть береговъ Саксланда.

Есть еще одно возраженіе: подданные Гейдрека названы *Gotar* (Н, стр. 177), а готы вѣдь никогда не были въ Ютландіи. Но предложеніе: *Tokv Gotar þar konung sin ok leystv* (177) встрѣчается только въ Н и, именно, въ той части Н, которая выше была признана позднѣйшей прибавкой. Это обстоятельство позволяетъ сомнѣваться въ его исконности.

Но если бы даже оно вело начало отъ древнѣйшаго времени, то локализацию готовъ въ Ютландіи можно было бы разсматривать, какъ результатъ вывода, сдѣланнаго авторомъ саги Гейдрека: думать, что (*Reid*)*gotaland* былъ населенъ готами, вполне естественно.

Есть еще одно объясненіе, которое, однако, должно быть принято съ большой осторожностью. *Fahlbeck* <sup>1)</sup>, мнѣніе котораго было принято также и *Bugge* <sup>2)</sup>, показали, что въ «*Беовульфѣ*» *Geatas* упо-

<sup>1)</sup> *Fahlbeck*, *Forskningar rörande Sveriges äldsta historia* (*Antiquarisk Tidsskrift för Sverige*, B. VIII), s. 38—57.

<sup>2)</sup> *Bugge*, *Studien über das Beowulfepos*, PBB. XII, S. 1.

требуется въ значеніи старо-сѣвернаго *Jótar, Jútar* (Юты); но такъ какъ англо-саксонская форма *Geatas* соотвѣтствуетъ старо-сѣверному *Gautar*, а это послѣднее легко могло быть смѣшано съ *Gotar*<sup>1)</sup>, то можно думать, что и жителямъ Исландіи не было чуждо представленіе: Готы=Юты живутъ въ Ютландіи, и что это представленіе нашло свой откликъ въ интересующей насъ сагѣ. Однако, должно помнить, что оно не попадаетъ, поскольку мнѣ извѣстно, въ исландскихъ памятникахъ.

Итакъ, несмотря на всѣ возраженія, сдѣланный выше выводъ сохраняется силу.

Однако, если Рейдготаландъ нашего памятника, съ извѣстной долей вѣроятности, можетъ быть отождествленъ съ Ютландіей, то это не значить еще, что Гейдрекъ, дѣйствительно, жилъ, именно, въ этой странѣ. Название *Reidgotaland* отсутствуетъ въ той части саги, которая, согласно предыдущему, содержитъ въ себѣ отзвуки нѣкотораго истиннаго происшествія, а встрѣчающіяся въ ней названія *Hærvða-tíðill* и *Grafá* не находятъ себѣ соотвѣтствія среди географическихъ именъ Ютландіи<sup>2)</sup>. Очевидно, Гейдрекъ не былъ изначала повелителемъ Рейдготаланда; вѣроятно, онъ былъ сдѣланъ таковымъ лишь при составленіи его біографіи, когда авторъ послѣдней заставилъ своего героя прибыть въ страну Гаральда и занять послѣ смерти престарѣлаго короля его престоль<sup>3)</sup>.

Разъ это такъ, то въ нашемъ распоряженіи имѣются лишь два опорныхъ пункта для отысканія родины Гейдрека и мѣста его гибели— это именно упомянутые сейчасъ названія.

<sup>1)</sup> Ср. *Snorra Edda*, S. 350: *Gotnar eru kalladir af heiti konungs þess, er Goti er nefndr, er Gotland er við kennt, hann var kalladr af nafni Óðins, ok dregit af Gauts nafni; því at Gautland eða Gotland var kallat af nafni Óðins.*

*Gotland Gotar* вм. *Gauttand, Gautar* встрѣчаются въ сагахъ; ср. *FAS*, I, s. 125, 250.

<sup>2)</sup> Ср. A. v. Baggasen, *Der dänische Staat*, B. II, Kopenhagen 1847, S. 95 ff., 177 ff.

<sup>3)</sup> Но почему Гаральдъ былъ помѣщенъ именно въ Рейдготаландъ, на это можно дать такой отвѣтъ. Такъ какъ въ разсказѣ о немъ нѣтъ ничего историческаго, то можно предполагать, что этотъ разсказъ былъ придуманъ авторомъ саги Гейдрека, а чтобы придать ему болѣе достовѣрности, онъ локализовалъ его въ общеизвѣстной странѣ. Въ сагахъ фантастическія личности нерѣдко фигурируютъ въ роли королей Рейдготаланда и Гардарики. Таковъ, напр., король *Hildibrandr*, упомянутый въ *Sögubrot af nokkrum fornkonungum* (*FAS* I, 375), съ именемъ котораго связанъ мотивъ трехъ мудрыхъ поученій, данныхъ умирающимъ отцомъ сыну.

Однако, на основаніи только ихъ нелегко достигъ вполне опредѣленныхъ результатовъ.

Прежде всего, дѣло затрудняется тѣмъ, что сохранилось нѣсколько вариантовъ этихъ названій, при чемъ мы лишены возможности вполне опредѣленно сказать, какой изъ нихъ заслуживаетъ предпочтенія. Горы, у которыхъ былъ убитъ Гейдрекъ, названы въ R *Hæguaða fiöll* (гдѣ первоначальное *a* исправлено на *œ*), а въ контаминированной редакціи—*Navada* (*Hawada*) *fiöll*, что, очевидно,=*Navada fiöll*: рѣка же, въ устьяхъ которой рабъ, поймавшій рыбу, произнесъ известную уже читателю полустрофу, поименована въ R *Graf á*, въ контаминированной редакціи *Grip á*, *Grop á*.

Казалось бы рукопись R, какъ древнѣйшая, заслуживаетъ и большаго довѣрія. Но не слѣдуетъ упускать изъ виду того обстоятельства, что составитель *Cod. Arch.* могъ изслѣдуемый эпизодъ (стр. 61—62) воспроизвести по R, а отдѣльными выраженія и мѣстныя названія—по H: онъ вѣдь нерѣдко въ отрывкахъ, заимствованныхъ изъ одной редакціи, дѣлалъ мелкія вставки по другой <sup>1)</sup>.

Такимъ образомъ, приходится считаться съ возможностью, что формы *Grip á* (*Grop á*) и *Navada fiöll* ведутъ начало отъ H.

Эти соображенія показываютъ, что мы, строго говоря, лишены возможности опредѣлить, какія изъ сохранившихся формъ названій первоначальны. Напрасно поэтому Гейнцель (*S.* 499 f.), а за нимъ и *Schütte* (*S.* 40) считаютъ правописаніе *Harvaða fiöll* и *Grafá* основными.

Гдѣ же находятся упомянутыя въ сагѣ Гейдрека горы и рѣка?

*Vigfússon* отождествилъ *Harvaðafiöll* съ Карпатами <sup>2)</sup>: Гейнцель же замѣчаетъ, что нѣтъ надобности видѣть непонятное измѣненіе слова „Карпаты“ въ *Harvaða* (*fiöll*); это названіе онъ толкуетъ, какъ „горы хорватовъ“, что отчасти=Карпаты: хорваты жили къ сѣверу отъ Бескидскихъ Карпатовъ.

Въ Карпатахъ же локализуетъ *Hærvadafiöll* и *Schütte* (*S.* 40), но онъ производитъ сохранившуюся въ H-sag'ѣ форму, именно, отъ названія этихъ горъ, а не отъ имени хорватовъ.

Что же касается названія *Grafá*, то вѣнскій профессоръ говорить о немъ слѣдующее: „Рѣка подобнаго имени, которая бы брала

<sup>1)</sup> Ср. введеніе къ моему изданію, стр. XXXV сл.

<sup>2)</sup> *Corpus poeticum boreale*, vol. I, p. 349, 352.

начало въ Карпатахъ, какъ очевидно, думаетъ авторъ саги, и изливалась въ море, не существуетъ. Но Грабовъ имѣетъ устье у Рюгенвальде, и Грабовъ называется морской заливъ у Штальзунда. Это ведетъ въ померанскій Рейдготаландъ (см. выше). Но черезъ расширение его до славянскихъ земель въ Карпатахъ представленіе четырехстишія подходит къ представленію пѣсни (т.е., очевидно, пѣсни о боѣ готовъ съ гуннами, ср. S. 499) ближе, чѣмъ какое-либо другое“.

Съ Гейнцелемъ вполне согласенъ Шютте (S. 40). «Отожествленіе съ померанскимъ Grabow весьма правдоподобно (пишетъ онъ) и согласуется вполне съ прочими географическими данными, указывающими на сѣверо-восточную Германію».

Обратимся теперь къ критикѣ изложенныхъ мнѣній. Замѣчаніе Гейнца: «Это ведетъ въ померанскій Рейдготаландъ» и пр. не доказываетъ рѣшительно его мнѣнія и даже, кажется, совершенно не идетъ къ дѣлу. Въ сагѣ Гейдрекъ, какъ было выяснено, говорится о Рейдготаландѣ-Ютландіи, а въ сказаніи о гото-гуннскомъ боѣ ни Рейдготаландъ, ни Карпаты (или земли у этихъ горъ), ни Грабовъ нигдѣ не названы. О какомъ же соотвѣтствіи представленій можетъ быть рѣчь при такихъ условіяхъ?

Равнымъ образомъ и цитированное замѣчаніе Шютте точно также бездоказательно: Грабовъ, по его мнѣнію, вполне подходит къ другимъ даннымъ, указывающимъ на сѣверо-восточную Германію—онъ разумѣетъ при этомъ, главнымъ образомъ, слѣдующія стихи изъ Widsid'a:

.... full oft þær wig ne alæg,  
þonne Hræda here heardum sweordum  
ymb Wistlawudu wergan sceoldon  
ealdne eþelstol Ætlan leodum,

гдѣ Wistlawudu, какъ онъ думаетъ,=земля у Вислы. Но что есть общаго между исторіей смерти Гейдрекъ и этимъ свидѣтельствомъ англо-саксонскаго памятника? Абсолютно ни одной черты. А разъ такъ, то всякая попытка толкованія географіи саги Гейдрекъ на основаніи Widsid'a должна быть признана неподходящей.

Итакъ, въ пользу отождествленія Nærgaða fiöll съ Карпатами и Grafá съ Грабовымъ говорить лишь сходство самихъ названій. На-

оборотъ, ему противорѣчить слѣдующее обстоятельство: почему убійцы Гейдрека, умертвившіе его у Карпатовъ, очутились на сѣверѣ Германіи, въ устьяхъ Грабова? перенесеніе дѣйствія въ столь отдаленное мѣсто кажется очень страннымъ и мало вѣроятнымъ; приписать его тому пѣвцу, который сложилъ пѣсню о смерти героя отъ руки рабовъ по свѣжимъ слѣдамъ событія, было бы очень смѣло: весьма сомнительно, чтобы онъ зналъ о существованіи Грабова, а въ Скандинавіи подобное приуроченіе не могло имѣть мѣста уже потому, что эта рѣка не была извѣстна тамъ—по крайней мѣрѣ, она не названа ни въ одномъ памятникѣ.

Эти соображенія заставляютъ искать иного объясненія имени *Нэгварфидль* и *Graf á*.

Мѣстныя названія съ корнемъ *graf* въ настоящее время очень распространены въ Скандинавіи. Такъ, въ Швеціи есть много деревень и поселковъ съ именемъ *Graf* или *Grafva*<sup>1)</sup>; въ Норвегіи нѣкоторыя долины называются *Gravdal*: одна лежитъ недалеко отъ Бергена<sup>2)</sup>; другая—въ *Jotunheim*<sup>3)</sup>; третья въ—*Norunger*<sup>4)</sup>; можетъ быть, и протекающія по нимъ рѣки носятъ имя *Grava*<sup>5)</sup>: въ Норвегіи очень многія долины называются по орошающимъ ихъ водамъ.

Въ виду такой распространенности въ Норвегіи и Швеціи мѣстныхъ названій *Grafdal*, *Graf*, *Grafva*, весьма вѣроятно, что и въ древности одна изъ скандинавскихъ рѣкъ носила имя *Graf á*<sup>6)</sup>.

Разъ это такъ, то, можетъ быть, сказаніе о смерти Гейдрека возникло въ Швеціи или Норвегіи. Въ пользу такого мнѣнія говоритъ еще скандинавская обстановка этого сказанія. Убійцы Гейдрека—плѣнники, добытые имъ во время морского набѣга (*i vestr viking*);

<sup>1)</sup> Rosenberg, Geografisk-statistiskt Handlexikon öfver Sverige, B. I, Stockholm 1882, S. 529—530.

<sup>2)</sup> Bædeker, Schweden und Norwegen, Leipzig 1903, S. 339.

<sup>3)</sup> Тамъ же, S. 279. Названіе *Gravdal* засвидѣтельствовано также и древними памятниками; ср. FAS, II, 27; FMS, VII, p. 301; VIII, 142, 208, 287, 417; XI, 19.

<sup>4)</sup> См. тамъ же, S. 282, карту.

<sup>5)</sup> Къ сожалѣнію, мнѣ не удалось этого узнать. Соответствующія указанія можно, кажется, найти въ книгѣ: Kraft, Topographisk Haandbog over Kongeriget Norge, Christiania, 1845—48, которую я не могъ добыть.

<sup>6)</sup> Форма *Grip á* точно также не чужда скандинавской географической номенлатурѣ: *Grip*—маленькій островъ не далеко отъ Кристіансеунда; наоборотъ, *Grop á* не находитъ себѣ соответствія.

это переносить насъ въ эпоху викинговъ, т. е., въ періодъ норвежской исторіи. Крімъ того, извѣстное уже двустипіе было произнесено во время рыбной ловли, а этотъ промыселъ являлся въ древности<sup>1)</sup>, какъ и теперь, однимъ изъ важнѣйшихъ средствъ жизни сѣверныхъ германцевъ.

Всѣ эти данныя, сопоставленныя вмѣстѣ, позволяютъ въ Гейдрекѣ видѣть одного изъ мелкихъ норвежскихъ королей эпохи викинговъ.

Если это вѣрно, то тогда *Hægraðafíðill* приходится искать также въ Скандинавіи. Къ сожалѣнію, я не могу указать ни одного похожего мѣстнаго названія<sup>2)</sup>. Но нѣтъ ничего невозможнаго въ томъ, что такое нѣкогда существовало. Формы: *Hægraða-* и *Havaða-* легко объяснимы изъ старо-сѣвернаго: первая изъ нихъ можетъ представлять опіску вм. *hergraða*, род. пад. множественнаго числа отъ *hergraðir* = военное вооруженіе, а вторая—род. пад. единственнаго числа отъ *hávaði* = возвышеніе.

Итакъ, опираясь на предыдущее изслѣдованіе, можно представить себѣ возникновеніе интересующей насъ саги въ такомъ видѣ. Въ основу ея легла эпическая пѣсня о смерти короля періода викинговъ, Гейдрека, убитаго рабами. Но эта пѣсня была осложнена различнымъ наслоеніями. Гейдрекъ былъ сдѣланъ сыномъ Гофунда, рассказы объ отцѣ котораго были весьма распространены среди скандинавовъ. Далѣе, съ ней были приведены въ связь два бродячіе мотива: мотивъ поученій и мотивъ *Halslöbung*. Наконецъ, она была введена въ составъ *H-sag'* и благодаря этому приняла въ себя рядъ прибавокъ и измѣненій, обусловленныхъ желаніемъ авторовъ нашего памятника согласовать ее съ прочими его частями.

### 3. 0 загадкахъ.

Выше шла рѣчь о происхожденіи той рамки, въ которую были вставлены загадки Гестумблипди. Теперь мы обратимся къ изслѣдованію загадокъ, какъ таковыхъ.

<sup>1)</sup> Weinhold, *Altnordisches Leben*, S. 68—74.

<sup>2)</sup> Ср., впрочемъ, *Hervadsbrú* въ *FMS X*, S. 47, которое приводитъ и Гейнцель (S. 499).

Приступая къ этой работѣ, необходимо сдѣлать такую оговорку. Въ старо-скандинавской литературѣ нѣтъ другого подобнаго сборника: загадки, входящія въ *H-sag'*у, почти все, что сохранилось отъ этого вида произведеній древняго Сѣвера <sup>1)</sup>. Такое утверждение можетъ показаться нѣсколько смѣлымъ, если обратить вниманіе на то, что нѣкоторыя стихотворенія Эды заключаютъ въ себѣ рядъ мудрыхъ вопросовъ и отвѣтовъ. Но эти вопросы, какъ уже показалъ проф. Jónsson <sup>2)</sup>, нельзя подвести подъ понятіе загадки. Они требуютъ разъясненія, какъ произошла та или другая вещь, какъ она называется и т. п.; чтобы отвѣтить на нихъ, требовалось знаніе; разрѣшить ихъ могъ только человекъ, умудренный познаніемъ, мудрый (*fróðr*). Совсѣмъ иначе дѣло обстоитъ съ загадками *H-sag'*и. Гестумблинди заставляетъ Гейдрека угадать по нѣсколькимъ названнымъ имъ признакамъ общеизвѣстный предметъ. Поэтому отъ Гейдрека требовалось не знаніе, а догадливость, остроуміе. Гейдрекъ не мудръ, а лишь остроумецъ (*sprakr*) <sup>3)</sup>.

Одипокое положеніе загадокъ *H-sag'*и, конечно, привлекло къ нимъ вниманіе ученыхъ, результатомъ чего явилось два всестороннихъ ихъ изслѣдованія: 1) F. Jónsson, *Um þulur og Gátur* (Germanistische Abhandlungen zum LXX. Geburtstag K. v. Maurers, Göttingen 1893, S. 489 ff.) <sup>4)</sup>; 2) A. Heusler, *Die altnordischen Rätsel* (Zeitschrift des Vereins für Volkskunde, B. XI, Berlin 1901, S. 117 ff.) <sup>5)</sup>.

Ниже намъ придется неоднократно повторять результаты, добытые обоими названными сейчасъ учеными.

Прежде чѣмъ приступить къ изслѣдованію загадокъ *H-sag'*и, необходимо сказать нѣсколько словъ о томъ, въ какомъ видѣ онѣ дошли къ намъ.

<sup>1)</sup> Въ сагахъ попадаются мѣстами загадки, но очень рѣдко. Назову для примѣра находящуюся въ *Hrólfs saga Gautrekssonar*: *opt er þat í karls húsi, er eig í er í konungs* (см. *Zwei Fornaldarsögur*, hrsg. von Detter, S. 55).

<sup>2)</sup> *Um þulur og Gátur*, s. 508.

<sup>3)</sup> То же различіе въ русской литературѣ между вопросами Голубиной Книги и загадками.

<sup>4)</sup> Ионссонъ въ своей *Litteratur Historie* (B. I, D. I, S. 159) посвятилъ загадкамъ *H-sag'*и нѣсколько страницъ; но онъ не далъ здѣсь ничего новаго, а воспроизвелъ лишь содержаніе названной статьи; поэтому ниже мы будемъ имѣть въ виду послѣднюю.

<sup>5)</sup> Раньше еще Müllenhoff въ статьѣ: *Nordische, englische und deutsche Räthsel* (*Zeitschrift für deutsche Mythologie und Sittenkunde*, B. III, Göttingen 1855) коснулся и загадокъ Гестумблинди и указалъ имъ параллели.

Загадки, какъ и бѣольшая часть памятника, сохранились въ двухъ редакціяхъ: Н и R. Разница между обѣими редакціями въ данномъ случаѣ заключается въ слѣдующемъ: 1) порядокъ и количество загадокъ въ Н и R не тождественны, какъ это легко замѣтить въ моемъ изданіи Н-sag'и, гдѣ подлѣ нумера каждой загадки указанъ номеръ ея по другой редакціи; отсутствіе же послѣдняго обозначаетъ, что въ другой редакціи соотвѣтствующей загадки нѣтъ; 2) кромѣ того, тексты самихъ загадокъ и сопровождающихъ ихъ отвѣтовъ мѣстами уклоняются другъ отъ друга. Я не стану выписывать здѣсь соотвѣтствующія мѣста—читатель легко можетъ убѣдиться въ справедливости высказаннаго положенія, сравнивъ сходныя загадки обѣихъ редакцій.

Возникаетъ теперь вопросъ, какая изъ редакцій въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ вѣрно передаетъ первоначальный текстъ.

Выше былъ поставленъ подобный же вопросъ о содержаніи всего памятника, и способъ его рѣшенія, какъ читатель помнитъ, былъ формулированъ такъ: исконнымъ можетъ быть признанъ лишь тотъ вариантъ Н или R, который стоитъ въ согласіи съ другими подробностями, сходно переданными въ обѣихъ редакціяхъ (стр. 27). Однако, такой методъ неприложимъ къ выясненію исконныхъ чертъ въ интересующемъ насъ сейчасъ отрывкѣ—легко видѣть почему. Каждая загадка Н-sag'и вмѣстѣ съ ея разгадкой представляетъ собой самостоятельное произведеніе, не имѣющее ничего общаго съ прочими; слѣдовательно, входила ли та или иная загадка въ составъ древнѣйшаго вида саги, какое мѣсто она занимала, какъ читалась та или иная ея строка,—опредѣлить все это на основаніи подробностей другихъ загадокъ нельзя.

Но вотъ проф. Ионссонъ указываетъ намъ иной путь къ выясненію первоначального списка загадокъ и ихъ порядка.

Первое считаетъ опъ возможнымъ достигнуть такъ. Онъ исходитъ изъ положенія, что въ древнее время стихи и пѣсни, связанныя другъ съ другомъ содержаніемъ, излагались однимъ и тѣмъ же размѣромъ (S. 515 ff.) Въ Н-sag'ѣ мы встрѣчаемся какъ разъ съ противоположнымъ явленіемъ: здѣсь однѣ загадки написаны гномическимъ размѣромъ (*ljó-ðahátt*), а другія—эпическимъ (*fornyrðislag*). Въ послѣднихъ-то проф. Ионссонъ и видитъ позднѣйшія прибавки, тогда какъ первыя считаетъ исконными.

Однако, согласиться съ почтеннымъ ученымъ никакъ нельзя. Прежде всего, почему мы должны считать первоначальными загадки,



изложенныя гномическимъ размѣромъ, на этотъ счетъ онъ оставляетъ насъ въ невѣдѣніи. Далѣе, выставленное имъ положеніе имѣетъ силу лишь только въ томъ случаѣ, если лицо, введшее загадки въ сагу Гейдрека, было ихъ авторомъ или, по крайней мѣрѣ, предало имъ стихотворную форму. Но вѣдь не исключена возможность, что оно было собирателемъ, т. е., что оно ввело вращавшіяся въ устахъ народа стихотворныя загадки въ сагу Гейдрека. Неужели же оно отбрасывало тѣ загадки, которыя были изложены эпическимъ размѣромъ? или, быть можетъ, въ ту пору на Сѣверѣ всѣ загадки излагались однимъ и тѣмъ же стихомъ? Наконецъ, и общее положеніе, выставленное проф. Ионссономъ едва ли можетъ быть признано правильнымъ; Neusler (S. 103) совершенно вѣрно замѣтилъ, что какъ въ произведеніяхъ скальдовъ, такъ въ Эддѣ смѣна размѣровъ въ одномъ и томъ же стихотвореніи—далеко не рѣдкость.

Выше было уже упомянуто, что проф. Ионссонъ считаетъ возможнымъ возстановить также и тотъ порядокъ, въ которомъ первоначально были расположены загадки. Здѣсь онъ исходитъ изъ такихъ соображеній.

Рукопись R, сохранившая текстъ саги вообще въ лучшемъ видѣ, чѣмъ H, даетъ болѣе правильныя чтенія и въ отрывкѣ, содержащемъ въ себѣ загадки—это положеніе авторъ старается подтвердить путемъ разбора текста нѣкоторыхъ загадокъ (стр. 514 сл.). Но разъ рукопись R сохранила лучшія чтенія, значитъ, она содержитъ въ себѣ и болѣе древній текстъ, а отсюда опять-таки можно вывести заключеніе, что количество и порядокъ загадокъ въ R болѣе близки къ первоначальнымъ. Такой выводъ находитъ себѣ опору. Исключивъ изъ H и R загадки, написанныя эпическимъ размѣромъ, проф. Ионссонъ получилъ въ остаткѣ восемнадцать загадокъ каждой редакціи, но при этомъ оказалось, что въ R онѣ расположены болѣе систематично, чѣмъ въ H (стр. 516 сл.).

Легко видѣть, что все это разсужденіе не выдерживаетъ критики. Въ основѣ его лежитъ тотъ логическій скачокъ, за который упрекали уже проф. Ионссона (ср. выше, стр. 26). Опъ отождествляетъ понятія: правильный и исконный; онъ находитъ, что R стоитъ на болѣе древней ступени развитія, потому что чтенія его заслуживаютъ предпочтенія. Но уважаемый ученный упускаетъ изъ виду, что подобная правильность и систематичность могла явиться результатомъ позднѣйшихъ поправокъ.

Всѣ эти соображенія позволяютъ намъ скептически отнестись къ попыткѣ проф. Ионссона возстановить загадки Н-sag'и въ древнѣйшемъ видѣ и остаться при высказанномъ уже ранѣе мнѣнii, въ силу котораго ни о первоначальномъ ихъ порядкѣ, ни о первоначальномъ ихъ числѣ мы не можемъ составить себѣ опредѣленнаго сужденія (см. выше, стр. 61).

Обратимся теперь къ сборникамъ загадокъ другихъ народовъ и поищемъ въ нихъ параллелей къ интересующимъ насъ старо-сѣвернымъ <sup>1)</sup>.

Начнемъ съ древнѣйшаго, англо-саксонскаго сборника, сохранившагося въ Codex Exoniensis (XI в.). Здѣсь мы находимъ такія параллели:

- 1) Oft ic sceal wiþ wæge winnan and wiþ winde feohtan.  
 somod wið þam sæcce, þonne ic secan gewite  
 eorþan yþun þeant . . . . .  
 Ic him þæt forstonde, gif min steort þolað  
 and mec stiþne wiþ stanas moton  
 fæste gehabban <sup>2)</sup>.

Ср 6-ую загадку редакции Н (23-ую ред. R).

- 2) ðeos lyft byreð lytle wihte  
 ofer beorghleoþa, þa sind blace swiþe,  
 swearte salopade . . . . . (S. 217)

Ср. 10-ую загадку ред. Н.

- 3) Ic wilht geseah on wege feran,  
 seo wæs wrætlice wundrum gegierwed:  
 hæfde feowere fet under wombe  
 .and ehtu we monn h w M wiif  
 M x I R f w f hors  
 q x x s ufor on hrycge.  
 Hæfde tu firþu and twelf eagan  
 and siex heafdu . . . . . (S. 206).

<sup>1)</sup> Почти всѣ приведенныя ниже германскія параллели были уже указаны Мюлленгоффомъ и, главнымъ образомъ, Гейслеромъ; романскія же и славянскія привлечены мною впервые.

<sup>2)</sup> Bibliothek der angelsächsischen Poesie, hrgg. v. Wülker, B. III, Leipzig 1897, S. 194.

Ср. 12-ую загадку ред. Н (26-ую ред. R) 1).

Если въ англо-саксонской литературѣ мы нахадимъ, правда, отдаленныя параллели къ загадкамъ Гестумблинди, то въ древнихъ нѣмецкихъ памятникахъ онѣ отсутствуютъ совершенно. Ср. загадки изъ Рейхенау (X в.) 2), Traugemundslid (около 1202 г.) 3), сборникъ загадокъ Веймарской рукописи (XV в.) 4), Страсбургскую книгу загадокъ (1505 г.) 5); сборникъ XVI в., изданный Вакернагелемъ: *Sechzig Rätsel und Fragen* 6).

Обратимся теперь къ старо-французскому сборнику: *Les adeuineux amououreux*, появившемуся въ свѣтъ въ XV в. и переизданному въ XIX в. (*Les ioyevsetez, facecies et folastres imaginacions*, Paris 1831). Здѣсь мы находимъ (на стр. 78 сл. изд. 1831) параллель, правда, отдаленную, къ загадкѣ объ Одиѣ, ѣдущемъ на Слейпнирѣ:

Vne chose entra en la ville  
A viij piez et a six oreilles,  
Trois culs et aussi vne queue.  
C'est une chose bien merueilleuse.

Отвѣтъ: Ce sont deux hommes sur un cheval.

Можно думать, что и объ загадки, т. е. французская и исландская, возникли изъ одной и той же очень распространенной (см. ниже), гдѣ говорится о всадникѣ на конѣ. Ср., напр.: *keem 'n diert ur nurrden, hadd vier uhren, hadd söss fööt, hadd 'n langen start, rade, rade, wat is dat* 7).

1) См. интересныя параллели къ этой загадки, указанныя Гейслеромъ, S. 141 f.

2) Müllenhoff u. Scherer, *Die ältesten Denkmäler der deutschen Prosa und Poesie*, № 7.

3) Тамъ же, № 49.

4) R. Köhler, *Zwei und vierzig alte Rätsel*, въ *Weimar. Jahrbücher*, B. V, S. 329—356.

5) *Räthselbuch*, hrgg. von Butch, Strassburg 1876.

6) *ZfdA*, B. III, S. 25 ff.

7) *Wassidlo*, S. 129; тамъ же приведены и другіе варьянты этой загадки. Ср. Müllenhoff, *Zeitschrift für deutsche Mithologie und Sittenkunde*, B. III, Göttingen, 1855, S. 2 f.; *Russwurm*, *Schwedische Räthsel*, въ томъ же журналѣ, S. 348, № 44.

или: Six pieds, quatre oreilles,  
Deux bouches, deux fronts,  
Quelle bête est-ce donc? <sup>1)</sup>.

Но въ то время, какъ скандинавы сдѣлали отношенія въ числѣ членовъ (3 глаза, 10 ногъ) поражающимъ, посадивъ одноглазаго Одина на восьминогого Слейпнира, французы достигли того же (ср. six oreilles, trois c . . . ), замѣнивъ одного всадника двумя.

Если мы обратимся къ позднѣйшимъ записямъ, то здѣсь мы встрѣтимъ поразительно мало параллелей—обстоятельство, на которое обратилъ уже вниманіе Heusler.

Наиболѣе распространенной въ Европѣ оказывается загадка о королѣ. Ее мы находимъ у современныхъ исландцевъ <sup>2)</sup> шведовъ (Russwurm, S. 348), датчанъ <sup>3)</sup>, норвежцевъ <sup>4)</sup>, у жителей Фаррерскихъ острововъ <sup>5)</sup>, нѣмцевъ (Wossidlo, S. 80) <sup>6)</sup>, французовъ (Rolland, p. 225), итальянцевъ <sup>7)</sup> и русскихъ <sup>8)</sup>. Наиболѣе сходства съ загадкой Гестумблинди обнаруживаютъ версіи: датская (fir hengen, fir spren-gen, tow viser Væj, tow virjer får e Hun, æ gammel Man kommer slonten æ båg ætter), шведская (fyra hängare, fyra gångare, två pekar opp i wära', en liten dankar efter), фаррерская (fýra hanga, fýra ganga, tvey veg vísa, eitt dartar aftast <sup>9)</sup>) и норвежская:

Fire hangande  
Fire gangande

<sup>1)</sup> Devinettes ou énigmes populaires de la France, par Rolland, Paris, 1877, p. 15 s.

<sup>2)</sup> Islenzkar Gátur, safnað hefir Jón Árnason, Kaupmannahöfn 1887, s. 41. № 254, 255.

<sup>3)</sup> Gamle danske Minder i Folkemunde, saml. af Sv. Grundtvig, B. I, Kjöbenhavn 1861, S. 223, № 24.

<sup>4)</sup> Norske Folkeviser, saml. af Landstad, Christiania 1853, S. 807. № 11.

<sup>5)</sup> Hammershaimb, Anthologi, S. 324, № 35.

<sup>6)</sup> Ср. Feifalik, Z. f. d. Mythologie, B. IV, S. 369, № 10; Müllenhoff, S. 4 f.

<sup>7)</sup> Tschiedel, Zeitschr. d. Vereins für Volkskunde, B. II, S. 276; Indovinelli popolari veneziani, raccolti da D. G. Bernoni, Venezia 1874, p. 8, № 25; Pitre, Conti popolari siciliani, v. II, Palermo 1871, p. 67, № 846.

<sup>8)</sup> Садовниковъ. Загадки русскаго народа, Сиб. 1877, стр. 104 сл.

<sup>9)</sup> Необходимо, впрочемъ, оговориться, что фаррерская версія можетъ быть книжнаго происхожденія; вѣдь загадки Н-sag'и были извѣстны на Фаррерахъ въ записанномъ видѣ (см. выше).

Tvo kóper up i sky,  
Tvo viser vög i by,  
Ein diltar etter.

Гораздо дальше стоятъ русскія, французскія и итальянскія вер-  
сїи, такъ что врядъ ли можно говорить объ общности происхожденія  
этихъ загадокъ и входящей въ составъ H-sag'и.

Изъ прочихъ загадокъ Гестумблинды лишь одна (№ 7 редакціи H),  
и то отчасти, находитъ себѣ дословно совпадающую параллель. Вторая  
ея строка читается такъ:

hverr andalauss lifir? hverr æva þegir.

Ср. слѣдующія строки изъ сборника Landstad'a: Norske Fol-  
keviser:

Hot er ded, som tyt og aldri tiger . . . . .  
og hot er ded, som andelaust liver? (S. 370).

Сходство усугубляется еще тѣмъ, что отвѣты въ одномъ и дру-  
гомъ случаѣ построены тождественно.

По мотиву, но не дословно, совпадаютъ съ соответствующими  
произведеніями другихъ народовъ слѣдующія загадки Гестумблинды:

1) 32-ая загадка редакціи H (25-ая R) во второй своей половинѣ:

drucku iarlar ol þegiandi,  
en þerandi olker stóðu,

съ русской:

Бочка стонеть,  
Бояре медь пьютъ (Садовниковъ, стр. 107),

и сербской:

Таланбаси вино пију,  
а бачва имъ попијева <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> С. Новаковић, Српске народне заговетке. Београд. и Панчево 1877  
стр. 174 сл.

2) 24-ая ред. Н (11-ая ред. R)—съ норвежскою: *Mannen gjekk at skógjen å såg de blólouse bar de bógelouse* (H-sag'a, изд. Бугге, стр. 358).

3) 17-ая ред. Н (9-ая ред. R)—съ болѣ простой нѣмецкой, гдѣ скорлупа яйца тоже сравнивается съ искусно сдѣланнымъ сосудомъ, а содержимое—съ пивомъ:

Komt en tuun ut Engelland,  
Sunder borrn und sunder band,  
is tweerlei beer in (Müllenhoff, Z. f. d. Myth., V. III, S. 7 f.)

или съ общеизвѣстной русской: въ маленькомъ боченкѣ два разныя пива; или:

безъ обручей  
безъ dna

стоитъ бочка вина (Садовниковъ, стр. 66; см. тамъ же и др. варианты) <sup>1)</sup>.

4) 8-ая ред. Н (7-ая ред. R)—съ русской:

Дѣдъ—въ землѣ,  
Борода—на землѣ (=рѣпа) <sup>2)</sup>.

5) загадка объ уткѣ, гнѣздящейся въ черепѣ (27-ая ред. Н=22 ред. R), съ приведенными уже выше, на стр. 193 сл. (у *Wossidlo* указаны и другія параллели).

Перечисленными сейчасъ параллелями не исчерпывается вполне ихъ количество: среди современныхъ исландскихъ загадокъ нѣкоторыя обнаруживаютъ также сходство съ однородными продуктами древняго творчества, сохранившимися въ H-sag'ѣ. Однако, ново-исландскимъ загадкамъ приходится отвести среди параллелей особое мѣсто. Дѣло въ томъ, что мы лишены возможности опредѣлить, съ народными ли произведеніями, ведущими начало отъ древнѣйшаго времени, имѣемъ мы дѣло въ данномъ случаѣ или съ продуктами книжнаго происхожденія.

<sup>1)</sup> Ср. Новаковичъ, стр. 74.

<sup>2)</sup> Садовниковъ, стр. 94; ср. *Gäru Rima*, стр. 16; *Landstat* S. 372. № 14, S. 809, № 22; Малорусскія и галицкія загадки, изданныя Семеновскимъ, Кіевъ 1851, стр. 29, №№ 279—283.

Раньше уже не разъ упоминалось, что съ XIV в. начались на Исландіи паденіе литературы и угасаніе устной традиціи. При этомъ, конечно, и загадки Гестумблинди могли быть забыты, какъ и многія другія произведенія. Когда же началось на отдаленномъ островѣ возрожденіе, когда появилась масса списковъ Н-sag'и, то названныя загадки могли проникнуть въ народъ и такимъ образомъ быть записанными Арнасономъ. Но, съ другой стороны, также нѣтъ ничего невѣроятнаго въ томъ, что та или другая изъ этихъ загадокъ, попавшая въ книгу названнаго сейчасъ собирателя, ведетъ свое начало отъ древнѣйшаго времени <sup>1)</sup>.

Обращаясь послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній къ сборнику Арнасона, мы находимъ тамъ слѣдующія параллели къ загадкамъ Гестумблинди.

- 1) Hver er sá vöxtur, sem snýr rótinni upp, en krónunni niður?  
Jón Árnason, стр. 71, № 574).

Ср. 8-ую загадку ред. Н (7-ую ред. R).

- 2) Í hverju báru meyarnar  
mjöðina til skemunnar?  
það var hvorki með  
höndum gert  
né hamri slegið (Arnason, стр. 93, № 764; ср. стр. 121  
№ 1038).

Ср. 17-ую загадку ред. Н (9-ую ред. R).

- 3) Úti leit eg fagra frú,  
er flestir trúi eg kenni,  
vegin gekk, en voru nú  
vargar tveir með henni (Árnason, стр. 127, № 1099).

Ср. 15-ую загадку ред. Н.

- 4) Hverjar eru ávallt á hvítum klæðum á vetrum en dökkvum á sumrin?  
(стр. 84, № 683).

<sup>1)</sup> Heusler, S. 128 f.

Ср. 20-ую загадку ред. Н (18-ую ред. R).

- 5) Hverjar eru hreinar meyar  
hvítfaldadar,  
aldrei nema í vindi vaka.  
og voða gamma stundum blaka? (стр. 84, № 684).

Ср. 21-ую и 22-ую загадки ред. Н и 20-ую и 21-ую ред. R.

- 6) Kona velur konu lið,  
kvikni sað og falli,  
mær hvar elur meyu við  
mjög á reginfjalli (стр. 98, № 814).

Ср. 18-ую загадку ред. Н (10-ую ред. R).

- 7) . . . Hefur tíu tungur,  
tuttugu augu,  
fjörtíu fætur  
og fer mjög víða (стр. 59, № 448; ср. стр. 58, № 447).

Ср. 12-ую загадку ред. Н (26-ую ред. R).

- 8) Börðust birnir tveir  
um bannað fé manna,  
hafði hörn átta hvor  
en höfuð ekkert (стр. 24, № 87).

Ср. 25-ую загадку ред. Н (16-ую ред. R).

- 9) Einu sinni svarta gyltu sá eg vaga,  
hærra bar á hné en maga (стр. 38, № 219; ср. стр. 111,  
№ 942, 944).

Въ этой загадкѣ соединены отдѣльныя черты 11-ой и 14-ой (6-ой R) загадокъ ред. Н.

Изъ предыдущаго читатель видитъ, что среди современныхъ, а также и старыхъ загадокъ различныхъ народовъ мы находимъ слишкомъ мало параллелей къ вопросамъ Гестумблинди. Какъ истолковать это обстоятельство? Здѣсь можно предложить нѣсколько объясненій: во-первыхъ, загадки, сходныя съ интересующими насъ, были утрачены



другими народами; во-вторыхъ, загадки Гестумблинди представляютъ собой чисто исландскія народныя произведенія (за исключеніемъ тѣхъ, которымъ найдены параллели); наконецъ, въ-третьихъ, онѣ (съ тѣмъ же исключеніемъ) были впервые сочинены авторомъ саги Гейдрека и являются такимъ образомъ оригинальными. Спрашивается, какое изъ этихъ объясненій наиболѣе вѣроятно.

Начнемъ съ разбора послѣдняго.

Уже проф. Гейнцель (S. 453) высказался, что сборникъ загадокъ, предложенныхъ Гестумблинди Гейдреку, возникъ не одновременно съ рассказомъ объ ихъ спорѣ, такъ какъ только въ 28-ой (27-ой R) и 30-ой загадкахъ редакціи H содержащія въ себѣ указаніе на прешіе слова:

Heidrekr konungr, hyggðu at gátu

являются необходимой составной частью строфы. Отсюда слѣдуетъ уже, что авторы пренія и загадокъ были разные лица.

Наоборотъ, проф. Юпссонъ въ извѣстной читателю работѣ исходить изъ того взгляда, что загадки Гестумблинди были сочинены или, по крайней мѣрѣ, обработаны стихотворно однимъ лицомъ, и что только впоследствии къ нимъ были сдѣланы нѣкоторыя прибавки.

Гейслеръ же (S. 131 ff.) принялъ сторону Гейнцеля и выставилъ положеніе, что авторъ саги былъ лишь собирателемъ существовавшихъ уже до него загадокъ. Аргументація его въ данномъ случаѣ настолько убѣдительна и полна, что мнѣ остается лишь повторить ее.

Въ загадкахъ Гестумблинди мы не находимъ ни одной подробности, которая говорила бы за авторство одного лица.

Прежде всего, въ нихъ нѣтъ нигдѣ намекъ ни на участниковъ спора, ни на содержаніе саги. Видимое исключеніе изъ этого общаго правила составляютъ:

1) вторая строка первой загадки редакціи H:

Konungr, gettv, hvat þat var,

гдѣ упомянуть король. Но эта строка, несомнѣнно, испорчена: первоначальное чтеніе сохранила ред. R:

uittu, hvat þat uar;

въ H существительное безъ а.ллитераціи было поставлено лишь по ошибкѣ въ началѣ строки.

2) первая строка 8-ой—16-ой загадок:

Hvat er þat undra er ek úti sá  
fyrir döglings dýrum,

гдѣ встрѣчается слово *döglingr*—король (въ R—Dellings); значить, здѣсь, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, встрѣчаемъ намекъ на Гейдрека. Но чтение *Dellings dýrum* есть старая формула съ таинственнымъ созвучіемъ, та же самая, что и въ *Hávamál* (Эдда, изд. Бугге, стр. 63 b.): кромѣ того, и во словѣ *döglings* можно видѣть множественное имя: въ рукописяхъ Эдды Снорри оно выступаетъ въ обѣихъ приведенныхъ формахъ (ср. Mogk, PBB VI, S. 525).

3) четвертая строка 13-ой загадки редакціи Н:

hardar rǫ, hilmir, greipr,

гдѣ находится *hilmir*—князь, т. е. опять указаніе на Гейдрека. Но это чтеніе представляетъ поправку Бугге, которую онъ самъ считаетъ ненадежной; въ подлинникѣ данное мѣсто предстаётъ въ такомъ видѣ:

hardar eru hilm:

Во-вторыхъ, подтвержденіемъ того, что загадки были созданы не однимъ лицомъ, является различіе ихъ метрики: двѣ трети ихъ общаго числа предстоятъ въ гномическомъ стихѣ (*ljóðaháttir*), а одна треть—въ эпическомъ (*Tfornyrðislag*). Правда, проф. Ионссонъ счелъ послѣднія загадки позднѣйшими прибавками, но его мнѣніе оказалось ошибочнымъ (см. выше).

Въ-третьихъ, въ пользу защищаемаго мнѣнія говорить также разнообразіе стиля загадокъ. Однѣ изъ нихъ отличаются примитивной простотой воззрѣнія, другія выдаются своей смѣлой фантастикой въ изъясненіи дѣйствительности; однѣ ничѣмъ почти не отличаются отъ прозы, въ другихъ встрѣчаются искусственные поэтическіе приемы.

Въ-четвертыхъ, доказательствомъ проводимаго взгляда является то обстоятельство, что загадки изложены мѣрной рѣчью, а отвѣты—прозой. Правда, нѣкогда существовала рукопись, гдѣ и отвѣты были стихотворные <sup>1)</sup>. Гейнцель, а также отчасти и Бугге (S. 241, 263, 270)

<sup>1)</sup> Ср. введеніе къ моему изданію, стр. LXVII сл.

считаютъ прозу въ данномъ случаѣ позднѣйшей замѣной первоначальныхъ стиховъ, но это мнѣніе непріемлемо, какъ уже заявилъ проф. Юнссонъ. Дѣйствительно, трудно допустить, чтобы отвѣты совершенно потеряли стихотворную форму, въ то время какъ загадки сохранили ее; скорѣе можно думать, что Н-saga удержала въ данномъ случаѣ первоначальную черту: обычно явленіе, что отвѣты излагаются прозой, какъ то ясно доказываютъ сборники интересующаго насъ вида произведеній; да и никто вѣдь не требуетъ отъ разрѣшающаго загадку лица, чтобы оно импровизировало стихи. Итакъ, собиратель просто удержалъ нормальный порядокъ вещей. Наоборотъ, если бы онъ сочинилъ загадки, или, по крайней мѣрѣ, придалъ имъ стихотворную форму, то, естественно думать, онъ изложилъ бы и разгадки стихами.

Итакъ, авторъ разсказа о преніи Гейдрека съ Гестумблинда не былъ авторомъ загадокъ, а лишь ихъ собирателемъ. Вся дѣятельность его сводилась лишь къ тому, что въ началѣ каждой загадки онъ прибавилъ строку:

Heiðrekr konungr, hyggðu at gátu <sup>1)</sup>.

И двѣ загадки, на которыя обратилъ вниманіе проф. Гейнцель (см. выше, стр. 221); не составляютъ въ этомъ отношеніи исключенія; и здѣсь цитированная строка не является необходимой частью строфы: вѣдь и въ Н-sag'ѣ, какъ и въ пѣсняхъ Эдды, попадаются строфы въ 4 и 6 полустрокъ. Къ тому же, не можетъ быть никакихъ сомнѣній, что встрѣчающаяся у столь многихъ народовъ загадка о коровѣ существовала независимо отъ саги Гейдрека.

Равнымъ образомъ, авторомъ пренія была введена и фраза, предшествующая каждому отвѣту:

góð er gáta þín, Gestumblindi, getit er þeirar,

которую издатели рассматривали, какъ группу, состоящую изъ трехъ короткихъ стиховъ; но, вѣроятноже, она звучала нѣкогда такъ:

góð er gáta þín, git er þeirar

<sup>1)</sup> Подобное приглашеніе разрѣшить загадку находимъ мы также въ англо-саксонскихъ (ræd, hwæt ic mæne; recc, gif þu cunne) и другихъ загадкахъ (ср. Petsch, S. 58 ff.).

и такимъ образомъ представляла собою правильную строку, а собиратель прибавилъ сюда слово *Gestumblindi* и такимъ образомъ ввелъ третій членъ.

Итакъ, авторъ саги Гейдрека былъ лишь собирателемъ интересующихъ насъ загадокъ. Отсюда слѣдуетъ, что онѣ жили въ устахъ населенія древняго Сѣвера, что онѣ представляютъ собой старо-сѣверныя народныя загадки.

Такъ какъ сага Гейдрека возникла во второй половинѣ X в. (см. выше, стр. 198), то, значить, загадки, о которыхъ идетъ у насъ рѣчь, еще старше. Такой выводъ подтверждается, съ другой стороны, тѣми обстоятельствами, на которыя обратилъ вниманіе Heusler (S. 138 ff).

Въ загадкахъ Гестумблинди отсутствуютъ иноземныя, библейскія, рыцарскія и романтическія черты; не упоминаются въ нихъ предметы культуры, въ частности, письменныя принадлежности. Поэтому міръ, отражающійся въ загадкахъ *H-sag'*и, сѣверный, до-литературный, до-христіанскій, до-рыцарскій. Это—эпоха викинговъ (700—1050 г.).

Само собой понятно, что стихотворныя формы загадокъ, въ которой онѣ представляли во время возникновенія саги Гейдрека, не могла остаться неизмѣнной до XIII в., т. е. до времени записи, такъ какъ и языкъ успѣлъ за этотъ періодъ подвергнуться ряду измѣненій. Вотъ почему въ нихъ мѣстами встрѣчаются строки, которыя могли возникнуть, какъ показалъ проф. Юнссонъ (стр. 520), лишь въ XII в.

Выше было установлено, что загадки Гестумблинди въ той формѣ, въ какой онѣ дошли до нашихъ дней, были народнымъ достояніемъ древняго Сѣвера. Но древній Сѣверъ великъ; онъ обнимаетъ нѣсколько странъ. Нельзя ли поэтому точнѣе указать, гдѣ, именно, были распространены упомянутыя загадки.

Проф. Юнссонъ обратилъ вниманіе <sup>1)</sup> на то, что въ загадкахъ Гестумблинди нѣтъ нигдѣ и рѣчи о войнахъ, походахъ викинговъ, убійствахъ и пр. что въ нихъ отражается тихая, спокойная повседневная жизнь—жизнь, какая текла на островѣ Исландіи въ 1050—1200 (но не въ Норвегіи въ X в.). Отсюда онъ дѣлаетъ выводъ, что тѣ загадки, которыя мы находимъ въ *H-sag'*ѣ, возникли на Исландіи.

<sup>1)</sup> Um þulur og gátur, стр. 518 сл.; Litteraturs-Historie, . I, S. 162.

Но съ изложеннымъ мнѣніемъ трудно согласиться.

Хотя, дѣйствительно, въ загадкахъ лишь дважды названы предметы вооруженія (стрѣла и щитъ), но зато въ нихъ не разъ попадаются образныя выраженія, заимствованныя изъ военной жизни: якорь «охраняетъ людей и враждуетъ съ землей» (ср. стр. 21<sub>4</sub>, 55<sub>31</sub>); кузнечные мѣха «варятъ наносящее раны зелье» (=мечъ; ср. стр. 22<sub>1</sub>, 51<sub>28</sub>); игорныя кости «убиваютъ другъ друга за своего господина» (ср. 24<sub>25-26</sub>, 53<sub>24-25</sub>); куропатки «носятъ зимою бѣлый щитъ, а лѣтомъ черный»: наконецъ, въ 32-ой (25-ой по R) загадкѣ рисуется не мирная жизнь исландскаго поселеннаго, а княжескій дворъ съ пирующей дружиной. Кромѣ того, въ загадкахъ H-sag'ѣ мы нигдѣ не находимъ предметовъ домашняго хозяйства, которые мы ожидали бы встрѣтить въ нихъ, если бы онѣ, отразили въ себѣ исландскую дѣйствительность 1050—1200 гг. <sup>1)</sup>

Если, такимъ образомъ, попытка проф. Ионссона вывести интересующіе насъ продукты народнаго творчества изъ Исландіи оказалась неудачной, то приходится вообще отказаться отъ точнаго опредѣленія родины каждого изъ нихъ; они не содержатъ въ себѣ, поскольку я вижу, никакихъ мѣстныхъ чертъ. Лишь два изъ нихъ составляютъ въ этомъ случаѣ исключеніе.

Уже проф. Ионссонъ <sup>2)</sup> обратилъ вниманіе на то, что загадка (16-ая по H, 8-ая по R), столь яркими чертами изображающая обиданъ, могла быть сочинена лишь на о. Исландіи, гдѣ этотъ минералъ встрѣчается въ изобиліи.

Съ извѣстной долей вѣроятности, кажется мнѣ, можно признать также исландской по происхожденію 31-ую загадку H (12-ую по R), гдѣ сохранился отзвукъ древней политической жизни отдаленнаго острова: граждане, отправляющіеся въ собраніе (þing), посылаютъ своихъ людей приготовить жилища—исландцы, какъ извѣстно, засѣдали во время сессій подъ открытымъ небомъ, а ночью укрывались въ устроенныя паскоро жилища.

Итакъ, значить, на основаніи предыдущаго мы можемъ сказать, что тѣ загадки, которыя сохранились въ H-sag'ѣ, представляютъ собою продукты народнаго творчества древняго Сѣвера, что указать болѣе точно ихъ родину, нѣтъ возможности: конечно, нѣкоторыя изъ нихъ

<sup>1)</sup> Heusler, S. 139 f.

<sup>2)</sup> S. 520; ср. Heusler. S. 140.

были чисто исландскимъ достояніемъ (о двухъ мы можемъ утверждать это положительно); но не менѣе вѣроятно, что другія были распространены и въ иныхъ земляхъ, заселенныхъ скандинавами; къ послѣднимъ слѣдуетъ причислить 32-ую (25-ую R), 28-ую (27-ую R), 7-ую. 24-ую (11-ую R), 27-ую (22-ую R)—см. выше.

Оставивъ теперь въ сторонѣ внѣшнюю форму загадокъ, попытаемся опредѣлить роду ихъ мотивомъ.

При рѣшеніи этой задачи удобнѣе всего раздѣлить загадки *N-sag'* на три группы.

1) Мотивы однѣхъ загадокъ чисто скандинавскаго происхожденія. Сюда должны быть отнесены двѣ исландскія загадки (см. выше); затѣмъ, загадки, содержащія въ себѣ миѳическія черты, хорошо извѣстныя въ Скандинавіи, какъ-то: 15-ая загадка *N* (ср. *Grínnismál, Edda*, изд. Бугге, стр. 84; *Sn.-Edda I*, 58) и 35-ая *N*=29-ая *R* (ср., напр., *Edda*, изд. Бугге, стр. 135, 231, 332 и др.); сюда же относить также Гейслеръ (*S.* 140) 18-ую *N* (=10-ую *R*), 23-ую *N* (=24-ую *R*) и 34-ую *N* (=28-ую *R*) загадки.

2) Что касается тѣхъ загадокъ, которыя имѣютъ параллели въ произведеніяхъ другихъ народовъ, то, конечно, нѣтъ никакого основанія приписывать ихъ мотивамъ скандинавское происхожденіе.

3) О загадкахъ, которыя не находятъ себѣ параллелей, и которыя не возникли въ Скандинавіи, нельзя сказать ничего опредѣленнаго; здѣсь возможны два предположенія: или ихъ мотивы были сочинены на Сѣверѣ, или же родиной этихъ мотивовъ являлась другая страна, откуда они проникли къ древнимъ скандинавамъ, и гдѣ потомъ были забыты.

## VII. Происхожденіе сказанія о битвѣ готовъ съ гуннами.

### 1. Пересказъ содержанія статьи автора, посвященной изслѣдованію этого сказанія.

Закрывающая въ себѣ описаніе страшнаго боя двухъ народовъ часть *N-sag'* была подвергнута изслѣдованію въ моей статьѣ: «Древне-скандинавское сказаніе о битвѣ готовъ съ гуннами и его историческая основа», появившейся въ Кіевѣ въ 1904 году<sup>1)</sup>. Я передамъ вкратцѣ

<sup>1)</sup> Эта книга представляетъ собою оттискъ изъ одного сборника, который долженъ появиться въ свѣтъ въ непродолжительномъ времени.

лишь результаты, добытые мною—интересующійся же ходомъ доказательствъ читатель долженъ обратиться къ самой статьѣ.

Изслѣдованію интересующаго насъ эпизода Н-sag'и посвящено очень немного работъ; сюда относятся: Rafn, *Hervararsaga* (*Antiquités russes*, I, p. 109 ss.); Much 'Ασχιζούργιον ὄρος (*ZfdA XXXIII*, S. 1 ff); Heinzel, *Ueber die Hervararsaga* (*Sitzungsberichte d. Wiener Akademie*, B. 114, S. 417 ff). Двѣ первыя работы осуждены наукой на забвеніе—и, нужно сказать, по справедливости; зато послѣдняя свискала себѣ всеобщее признаніе. И тѣмъ не менѣе выводы, къ которымъ пришелъ проф. Гейнцель, ошибочны: почтенный ученый, по моему мнѣнію, не рѣшилъ вопроса о происхожденіи названнаго сказанія. Выступая противъ общепринятаго въ наукѣ мнѣнія, необходимо, конечно, указать причины несогласія съ нимъ. Вотъ почему я въ упомянутой выше статьѣ изложенію результатовъ собственнаго изслѣдованія предпослалъ критику основныхъ положеній проф. Гейнца<sup>1)</sup>.

Авторъ изслѣдованія «*Ueber die Hervararsaga*» видитъ въ рассказѣ Н-sag'и о боѣ готовъ съ гуннами отзвуки Каталаунской битвы. Для оправданія этого мнѣнія онъ указываетъ рядъ параллелей между свидѣтельствами историковъ о столкновеніи Аэція съ Атиллою и интересующимъ насъ здѣсь эпизодомъ нашего памятника—параллели, которыя, какъ онъ думаетъ, можно объяснить лишь генетической зависимостью послѣдняго отъ перваго, а затѣмъ старается указать причины уклоненій сказанія отъ дѣйствительныхъ происшествій. Но какъ приведенныя имъ параллели, такъ и названныя сейчасъ объясненія оказываются при ближайшемъ разборѣ совершенно несостоятельными.

Причина неудачи, которую потерпѣлъ вѣнскій профессоръ, заключается въ допущенной имъ крупной методологической ошибкѣ.

<sup>1)</sup> Когда моя работа была отпечатана, я познакомился со статьей Schlütte: *Anganty-Kvadets Geografi* (*AfnF XXI*, S. 30 ff). Въ вопросѣ о происхожденіи интересующаго насъ сказанія онъ примыкаетъ къ Гейнцелю; лишь на основаніи географіи изслѣдуемой части Н-sag'и онъ предполагаетъ, что существовала еще сага о восточномъ боѣ готовъ съ гуннами (а не только о Каталаунскомъ сраженіи, какъ думаетъ Гейнцель), но онъ не можетъ указать ни одного рассказа (хотя и приводитъ нѣсколько), географія которыхъ совпадала бы съ географіей того эпизода нашего памятника, изслѣдованію котораго посвящена настоящая глава.

Познакомивъ читателя съ источниками саги о боѣ на *Dúnheidgr'ъ*, проф. Гейнцель непосредственно послѣ этого заявляетъ, что только рассказы о Каталаунскомъ сраженіи и предшествующихъ событіяхъ представляютъ рядъ соотвѣтствій нашему сказанію, которыя нельзя считать случайными. Затѣмъ, пересказавъ главнѣйшіе факты, связанные съ событіемъ 451 года, авторъ прилагаетъ всѣ старанія, чтобы найти каждому изъ нихъ параллель сначала въ *H-sag'ъ*, а потомъ въ „Датской исторіи“ Саксона и въ *Vidsid'ъ*; при этомъ, что въ послѣднихъ двухъ памятникахъ не согласуется съ указанными въ *H-sag'ъ* отзвуками исторіи, объявлено позднѣйшимъ искаженіемъ (S. 512 ff.). Подобный методъ и составляетъ самый важный промахъ въ изслѣдованіи проф. Гейнцеля, имѣвшій неблагопріятное вліяніе на всю работу.

Раньше (стр. 5) уже было упомянуто, что при изслѣдованіи какого-либо эпического произведенія необходимо по возможности удалить изъ него всѣ позднѣйшія искаженія и представить его въ древнѣйшемъ доступномъ намъ видѣ, а затѣмъ уже отыскивать событіе, отъ котораго оно ведетъ свое начало. Въ противномъ случаѣ постоянно грозитъ опасность принять черты позднѣйшаго происхожденія за первоначальныя и возвести такимъ образомъ сказаніе къ факту, не имѣющему съ нимъ ничего общаго.

Этой опасности не избѣжалъ проф. Гейнцель, потому что шель дорогой, противоположной намѣченной здѣсь: указавъ сначала событіе, онъ всячески старался притянуть къ нему интересующее его сказаніе; естественно, что онъ считалъ при этомъ исконнымъ, то часто представляетъ собой позднѣйшее наслоеніе, и, наоборотъ, что онъ отбрасывалъ, можетъ оказаться первоначальнымъ.

Во избѣжаніе подобной ошибки, я въ дальнѣйшей части работы попытался возстановить сказаніе о боѣ готовъ съ гуннами по возможности въ древнѣйшемъ видѣ, а затѣмъ уже, отправляясь отъ послѣдняго, сталъ искать его историческую основу.

Сказаніе о битвѣ готовъ съ гуннами сохранилось въ *H-sag'ъ* и въ V кн. Саксона Грамматика, а также въ *Widsid'ъ* и въ *Chronicon Erici regis* (Langebeck, *Scriptores I*, 153)<sup>1)</sup>. Но сообщеніе послѣд-

<sup>1)</sup> Въ дополненіе къ этому необходимо отмѣтить, что интересующая насъ сага встрѣчается также въ *Thomae Gheysmeri Compendium* (Langebeck, t. II, p. 286 ss.) и *Petri Olai Chronicon* (тамъ же, t. I, p. 68 ss.), но обѣ эти версіи ничѣмъ существеннымъ отъ рассказа Саксона не отличаются.



нихъ двухъ источниковъ очень кратко и не вполне ясно; поэтому попытку возстановить интересующую насъ сагу пришлось основать на разборѣ Н-sag'и и разказа датскаго историка, изрѣдка лишь привлекая англо-саксонскій памятникъ—именно, въ тѣхъ случаяхъ, когда въ немъ отмѣчена какая-либо важная особенность.

И въ Н-sag'ѣ, и въ V книгѣ Саксона изслѣдуемое сказаніе сохранилось не въ первоначальномъ видѣ: какъ тамъ, такъ и здѣсь оно представляетъ собой часть болѣе обширнаго цѣлаго. Вполнѣ понятно, что, примыкая къ чуждому ему произведенію, оно было согласовано съ нимъ и такимъ образомъ претерпѣло рядъ измѣненій. Кромѣ того, въ основу эпизодовъ боя готовъ съ гуннами, помѣщенныхъ въ „Датской Исторіи“ и скандинавскомъ памятникѣ, могли лечь различныя редакціи нашего сказанія; другими словами, автору, присоединившему впервые къ исторіи потомковъ Арнгрима разказъ о битвѣ на Dún-heiðr'ѣ, послѣдній могъ быть извѣстенъ въ совершенно иномъ видѣ, чѣмъ составителю саги Фротона. Принимая всѣ эти обстоятельства во вниманіе, можно признать наиболѣе подходящимъ для выполненія нашей работы слѣдующій методъ: надо освободить изслѣдуемое сказаніе отъ тѣхъ видоизмѣненій и наслоеній, которыя вкрались въ него благодаря присоединенію къ чуждымъ произведеніямъ; 2) полученные такимъ способомъ двѣ его редакціи сравнить между собою и, указавъ причины подмѣченныхъ различій, выяснитъ черты первоначальнаго сказанія, составившаго основу обѣихъ редакцій.

Когда я выполнялъ намѣченную работу<sup>1)</sup>, то содержаніе этого первоначальнаго сказанія предстало въ такомъ видѣ:

I. По соглашенію со своимъ дѣдомъ впускъ Нун'а, короля Гуналанда, является въ столицу Рейдготаланда Danparstaðir въ области Árheimar и выражаетъ передъ своимъ братомъ, королемъ готовъ, притязаніе на половину владѣній, на драгоценныя предметы и, вѣроятно, на готскій престолъ: но получивъ отказъ и оскорбленный прозвищемъ „сынъ

<sup>1)</sup> Выше интересующій насъ эпизодъ Н-sag'и также былъ освобожденъ отъ позднѣйшихъ наслоеній; результаты, полученные при этомъ, тѣ же самыя, что и въ излагаемой работѣ. Правда, въ послѣдней была допущена ошибка при обсужденіи эпизода смерти Гервары II (см. выше, стр. 76, прим. 1; 78, прим. 2), но, въ концѣ концовъ, все-таки и этотъ эпизодъ былъ признанъ, какъ и прежде, позднѣйшей прибавкой.

рабыни“, даннымъ ему Gizurr'омъ Grytingalidi, возвращается къ своему дѣду.

II. Узнавъ объ оскорбленіи внука, Hun страшно разгнѣванъ; намѣреваясь подчинить готское царство, испровергнуть короля и возвести на престолъ внука, онъ вмѣстѣ съ послѣднимъ собираетъ огромное войско и, заключивъ союзъ съ королемъ русскихъ, черезъ лѣсъ Myrkvidr вторгается въ землю готовъ.

III. Gizurr отправляется на развѣдки и, возвратившись, сообщаетъ о многочисленности непріятельскаго войска. Въ происшедшей битвѣ русскіе терпятъ страшное пораженіе.

IV. По вызову своего короля Gizurr отправляется навстрѣчу гуннамъ и назначаетъ имъ мѣсто боя на Dúnheidr'ѣ и на всѣхъ Jassafjöll, произнеся заговоръ о ихъ пораженіи; его хотятъ схватить, но онъ удачно избѣгаетъ опасности.

V. Собравъ большое войско, король готовъ встрѣчается съ гуннами въ условномъ мѣстѣ. Битва длится 7 дней. Наконецъ, палъ Hun и его внукъ; гунны бѣжали; рѣки и долины завалены трупами. Король готовъ жалуется на судьбу, сдѣлавшую его убійцей брата.

Если сравнить возстановленное здѣсь сказаніе съ разсказомъ Иордана (гл. XLIII) о королѣ Внитарѣ въ толкованіи Дана (см. Die Könige der Germanen, Abth. II, München 1861, S. 58 f.), то легко замѣтить рядъ параллелей, доказывающихъ генетическую зависимость сказанія отъ событій, описанныхъ готскимъ историкомъ.

Мѣсто пребыванія готовъ въ сагѣ и въ разсказѣ Иордана одно и то же: они живутъ въ бассейнѣ Днѣпра; если же страна ихъ именуется въ сказаніи Arheimar (=рѣчная область), то, весьма вѣроятно, подобное названіе, въ виду созвучія и сходства значеній, возникло изъ \*Varheimar, гдѣ Var—гуннское названіе Днѣпра (Jordan p. 127<sup>20</sup>; собственно =рѣка, *ibid*, p. 159).

Имена: Hun и Hunimund—тождественны: первое представляетъ сокращенную форму второго <sup>1)</sup>).

<sup>1)</sup> Ср. Stark, Die Kosenamen der Germanen, Wien 1868, S. 15 ff. Въ дополненіе къ собраннымъ въ этой книгѣ даннымъ укажу на краткую форму Hunt отъ Hunding, которую находимъ въ Langebeck, Scriptores I, p. 98, гдѣ говорится слѣдующее: Hundingus regnavit in Syalandia, qui semper invadendo alios perdidit, sed se defendendo vicit, a quo tractum est proverbium: Hunt ær hуæmme rickæst.

Событія точно также сходны. И въ исторіи, и въ сагѣ родственникъ короля готовъ—Гесилундъ былъ троюродный братъ Винитара -- по соглашенію съ королемъ гунновъ, намѣревается занять готскій престолъ; и тамъ и здѣсь планы короля гунновъ одни и тѣ же: Баламберъ, подобно Нун'у, хотѣлъ покорить готовъ, удалить ихъ повелителя и возвести на его мѣсто его родственника; въ сказаніи, какъ и въ сообщеніи Иордана, для осуществленія этихъ плановъ король гунновъ и его союзникъ должны были вступить въ борьбу съ готскимъ королемъ, но потерпѣли жестокое пораженіе въ продолжительной и очень кровавой битвѣ, при чемъ родственникъ короля готовъ палъ въ бою. Кромѣ того, по исторіи, какъ и по сказанію, прежде чѣмъ нанести пораженіе гуннамъ, Винитаръ побѣдилъ славянъ россомоновъ, перешедшихъ на ихъ сторону.

Что касается различій между исторіей и сагой, то они находятъ вполне удовлетворительныя объясненія, какъ показано въ моей работѣ.

Сказаніе о страшномъ боѣ двухъ народовъ возникло у готовъ по свѣжимъ слѣдамъ событій, а въ VI в. было занесено въ Скандинавію.

## 2. О мѣстныхъ названіяхъ сказанія о гото-гуннокой битвѣ.

Въ концѣ работы, содержаніе которой я сейчасъ изложилъ, я обѣщала обратиться къ изслѣдованію мѣстныхъ названій, встрѣчающихся въ разсказѣ Н-sag'и о боѣ готовъ съ гуннами. Это обѣщаніе я и хочу теперь привести въ исполненіе.

Прежде чѣмъ излагать результаты своего изученія, я постараюсь познакомить читателя съ тѣми толкованіями географическихъ терминовъ Н-sag'и, какія даютъ Гейнцель и Шютте.

Принципіальное различіе между мнѣніями обоихъ ученыхъ заключается въ томъ, что Гейнцель различаетъ въ географіи сказанія о гото-гуннскомъ боѣ два слоя: одинъ—ведущій начало еще отъ эпохи Эрманриха, другой—отъ времени основанія Русскаго государства варягами; тогда какъ Шютте видитъ въ мѣстныхъ названіяхъ того же произведенія остатокъ старой германской или, точнѣе, готской географіи.

Перейдемъ теперь къ подробностямъ.

Wistlawudu, встрѣчающееся въ Widsid'ѣ, по Гейнцелю (S. 517), можетъ указывать и на мѣстопребываніе готовъ у Балтійскаго моря,

и на земли по верхней Вислѣ, которыя примыкали къ Дакіи, гдѣ по свидѣтельству Альфреда В. жили готы. Шютте же (S. 36) рѣшительно утверждаетъ, что Wislawudu вполне подходитъ къ eald eþelstol готовъ, такъ какъ народный англо-саксонскій географическій кругозоръ включалъ въ себя земли по Вислѣ, но не Дакію.

Hreidgotaland H-sag'и по мнѣнію Гейнцеля (S. 470 f., 487) лежить въ южной Россіи. Подобная локализациа возникла благодаря тому обстоятельству, что съ воспоминаніями о царствѣ Эрманриха соединились извѣстія о германскомъ происхожденіи Русскаго государства. Шютте держится другого воззрѣнія. Согласно древнѣйшей локализациа (Widsid) готы живутъ на Вислѣ, и съ этимъ согласуются прекрасно другія данныя. Гуналандъ лежитъ отчасти къ югу, отчасти къ востоку отъ Готаланда. Лишь въ случаѣ крайней необходимости можно было бы отнести эту географическую ситуацию къ южной Россіи: согласно исторіи гунны осѣли не къ югу отъ готовъ, а на территоріи готскаго государства. Гораздо лучшихъ результатовъ можно достигнуть, если обратиться съ указанной ситуациею къ средней Европѣ. Готаландъ въ такомъ случаѣ окажется нынѣшняя Польша и Пруссія; центръ Гуналанда, откуда было сдѣлано нападеніе, находится къ югу отъ Готаланда, т. е. въ Венгріи. Отсюда гуннское царство простирается на востокъ вдоль береговъ Чернаго моря, включая въ себя и территорію Эрманрихова государства—отсюда-то, можно думать и отправился на западъ къ Антантору Hlodgr. Гуналандъ отъ Готаланда отдѣляетъ пограничный лѣсъ, расположенный на горахъ—это западные отроги Карпатовъ. Къ сѣверу отъ пограничнаго лѣса лежатъ «гладкія равнины и большіе города»; здѣсь разумѣется польская низменность, которая, именно, и носитъ названіе Равнина: Polen—то же слово, что и сѣверное fala (=равнина), которое встрѣчается, напр., въ Falun, Falköping и пр.

Danrg по Гейнцелю (S. 477)=Днѣпръ; это названіе было заимствовано изъ русскаго устнаго преданія. Но слабость такого толкованія заключается въ томъ, что форма Danrg согласуется съ засвидѣтельствованнымъ Иорданомъ Danareg, Danaber и отступаетъ отъ соотвѣтствующей русскаго. Приходится допустить, или что скандинавы имя Днѣпръ превратили въ старое, или что форма Danareg удержалась гдѣ-либо на Руси, напр., у крымскихъ готовъ. Что касается Шютте, то онъ отождествляетъ (S. 38) это названіе съ сохранившимся у Иордана.

*Danparstadir*, по Гейнцелю (S. 418 ff.), = Киевъ. Шютте не можетъ согласиться съ такимъ толкованіемъ: это названіе нельзя понимать, какъ «городъ Днѣпра», потому что въ этомъ «городѣ» лежитъ мѣстность *Arheimar*. Онъ разсматриваетъ *Danparstadir*, какъ результатъ непониманія готскаго текста, и переводитъ á *stōðum Danpar* «у берега Днѣпра»; ср. готское *stafs*=Ge-stade.

*Arheimar* по Гейнцелю = *Oium*, встрѣчающееся у Иордана (гл. 4). Шютте признаетъ, что съ лингвистической точки зрѣнія не встрѣчается никакихъ препятствій къ принятію этого мнѣнія, но фактически съ нимъ трудно согласиться: въ сагѣ говорится, что *Arheimar* принадлежалъ къ *Danparstadir*, т. е. къ Приднѣпровью, а между тѣмъ *Ojos* есть устье Вислы; впрочемъ, политическое дѣленіе земель всегда можетъ заставить забыть естественныя границы.

*Myrkvidr* Гейнцель не пытается локализовать; Шютте же думаетъ, что *Myrkvidr* просто—*Miriquidu*, т. е. готское названіе Рудныхъ горъ (*Thietmar*, Chr. MG V, 807).

*Dúnheidr*, по Гейнцелю, Дунайская равнина (S. 484). Шютте никакъ не можетъ согласиться съ отождествленіемъ *Dúnheidr* и Дунайской равнины. Въ памятникѣ сообщается, что гунны пришли съ юга черезъ *Myrkvidr*, отдѣляющій Готландъ отъ Гуналанда, на равнину, гдѣ лежалъ бургъ Ормара. Когда, покоривъ городъ, они продолжали наступать въ сѣверномъ направленіи, Ангантуръ назначилъ имъ бой на *Dúnheidr*'ѣ. Такъ какъ этотъ герой не могъ, конечно, указать побѣдоносному врагу мѣсто боя въ собственной землѣ послѣдняго, то приходится думать, что *Dunheidr* лежалъ дальше на сѣверъ. Это приводитъ насъ на ту равнину, которую въ древности населялъ народъ *Lugū Duni*, т. е. въ бассейнѣ верхняго Одера.

*Dylgja* не локализована ни Гейнцелемъ (S. 983 f.), ни Шютте. Впрочемъ, второй изъ названныхъ изслѣдователей дѣлаетъ такое замѣчаніе: если *Dyngja*—правильное чтеніе, то тогда можно думать, что названіе это принадлежитъ Дунайцу, одному изъ значительнѣйшихъ притоковъ верхней Вислы—его положеніе необыкновенно хорошо подходитъ къ *Dúnheidr*.

*Jassafjöll* Гейнцель (S. 489 f.) истолковываетъ—при условіи, что это чтеніе правильно—какъ горы ясовъ, т. е. алавы, осетинъ, которыя упоминаются въ XIV в. въ Крыму; впрочемъ, и Семигорскіе Карпаты одинъ источникъ XV в. именуетъ Гуннскими и Алапскими

горами, а Аммианъ Марцеллинъ считаетъ что аланы получили свое имя отъ горъ, называющихся теперь Кавказскими. Что касается Шютте, то онъ склоненъ отождествить это названіе со славянскимъ *Jesenik* (=нѣм. *Gesenke*), которое по Муху (*Deutsche Stammeskunde*. S. 57)<sup>1)</sup> представляетъ собою переводъ древняго *Askiburg*; такъ какъ *jösurg* въ старо-сѣверномъ поэтическомъ языкѣ обозначало нѣкоторую породу деревьевъ, то возможно, что здѣсь, именпо, мы и встречаемся съ готскимъ названіемъ ясеня.

Мнѣніе обоихъ ученыхъ о мѣстоположеніи *Hærvadafjöll* и *Graf á* было сообщено раньше.

Обратимся теперь къ критикѣ изложенныхъ мнѣній.

И одно, и другое толкованіе географическихъ названій изслѣдуемаго эпизода *H-sag*'и страдаетъ двумя крупными недостатками, которые сильно подрываютъ довѣріе къ нимъ читателя.

1) И по Гейнцелю, и по Шютте выходитъ, что географія сказанія о гото-гуннской битвѣ не имѣетъ ничего общаго съ самымъ произведеніемъ, въ которомъ она сохранилась: оба ученые думаютъ, что въ основу названнаго сказанія легли преланія о битвѣ 451 года; но въ *H-sag*'ѣ мы не находимъ ни одного мѣстнаго названія, которое бы относилось къ Каталаунской равнинѣ или прилежащей мѣстности. Полное отсутствіе въ географической терминологіи произведенія какихъ бы то ни было намековъ на страну, гдѣ совершилось событіе, которое послужило ему основой, весьма мало правдоподобно.

2) И вѣнскій профессоръ, и молодой датскій филологъ позволяютъ себѣ толковать географію сказанія о страшной битвѣ двухъ народовъ на основаніи данныхъ, заключающихся въ другихъ эпизодахъ *H-sag*'и (ср. ихъ соображенія о *Hærvadafjöll*, *Reidgotaland*, *Graf á*). Это методологическій промахъ: нашъ памятникъ, какъ было уже доказано, сложился изъ самостоятельныхъ произведеній; слѣдовательно, географическія представленія каждой изъ его частей должны быть объясняемы независимо отъ другихъ.

Обратимся теперь къ частностямъ.

*Wistlawudu* встрѣчается въ *Widsid*'ѣ, но не въ *H-sag*'ѣ. Поэтому возникаетъ вопросъ, имѣемъ ли мы право привлекать это названіе при обсужденіи географіи сказанія о гото-гуннскомъ боѣ.

<sup>1)</sup> См. также *ZfdA* XXXIII, S. 1 ff.

Раньше (стр. 13 сл.) уже была приведена строка из англо-саксонскаго памятника, содержащая въ себѣ имена главныхъ дѣйствующихъ лицъ какъ интересующаго насъ въ данный моментъ эпизода Н-sag'и, такъ и предшествующаго ему. Но и кромѣ этого, въ Widsid'ѣ мы паходимъ еще отзвуки сказанія о битвѣ готовъ съ гуннами въ слѣдующемъ отрывкѣ:

Eadwine sohte ic and Elsan, Ægelmund and Hungar  
and þa wloncan gedryht Wiþ-Myrginga.  
Wulfhere sohte ic and Wyrnhere: ful oft þær wig ne aæg,  
þonne Hræda here heardum sweordum  
ymb Wistlawudu wergan sceoldon  
ealdne eþelstol Ætlan leodum <sup>1)</sup>.

На сходство Wyrnhere съ Ormarrъ было обращено вниманіе еще въ *Antiquités Russes* (t. I, p. 162). Гейнцель пытался объяснить это сходство случайнымъ совпадениемъ (S. 497, ср. 518); но Шютте ясно показалъ, что о случайномъ совпадении здѣсь не можетъ быть и рѣчи: собственное имя Wyrnhere встрѣчается очень рѣдко у англо-саксовъ, а Ormarrъ мы не паходимъ ни въ одномъ скандинавскомъ памятникѣ за исключеніемъ Н-sag'и; кромѣ того, въ цитированномъ мѣстѣ Widsid'a встрѣчаются и другія подробности, находимыя и въ Н-sag'ѣ; сюда относится сходство 1) въ именахъ: Wiþ-Myrg=Myrk-við, 2) въ фразѣ: Hræda here wergan sceoldon ealdne eþelstol Ætlan leodum=Gotar vörðu frelsi sitt og fösturiörð firir Húnum (74<sub>4-5</sub>). Врядъ ли, конечно, столь разительныя совпаденія можно объяснить просто игрою случая; естественнѣе всего думать, что авторъ цитированнаго отрывка (и приведенныхъ выше, на стр. 13 строкъ) былъ знакомъ съ Н-sag'ой.

Съ этими данными перейдемъ къ интересующему насъ Wistlawudu. Въ нашемъ памятникѣ это названіе отсутствуетъ, и въ этомъ отношеніи онъ согласуется вполне съ исторіей: находясь еще въ области Вислы, готы ни разу не сражались съ гуннами: первое столкновение обоихъ народовъ произошло, когда готы переселились въ южную Россію. Отсюда можно вывести заключеніе, что ymb Wistlawudu представляетъ произвольную прибавку автора цитированнаго отрывка Widsid'a. Подобная прибавка могла быть безъ труда сдѣлана

<sup>1)</sup> *Biblithek d. angelsächsischen Poesie*, hrgg. v. Wülker, B. I, Kassel 1883, S. 5<sub>117</sub>—6<sub>112</sub>.

имъ. Висла, какъ показала Шютте (см. выше) входила въ географическій кругозоръ англо-саксовъ. Если такъ, то тогда мы не имѣемъ никакого права привлечь Wistlawudu при выясненіи географіи изслѣдуемаго сказанія.

Hreidgotaland ни разу не встрѣчается въ рассмотрѣнномъ эпизодѣ Н-sag'и, поэтому здѣсь и не приходится останавливаться на этомъ названіи; въ какомъ же смыслѣ оно употребляется въ исторіи Гейдрека, быто выяснено выше.

Въ сказаніи о гото-гуннскомъ боѣ мы находимъ Gotaland и Hunaland. Попытаемся опредѣлить, гдѣ лежатъ эти земли. Сначала—нѣсколько замѣчаній о ихъ взаимномъ положеніи. Н-sag'a содержитъ въ себѣ на этотъ счетъ слѣдующія данныя:

1) Рѣшивъ явиться къ брату, королю готовъ, съ цѣлью потребовать у него части наслѣдства, воспитывавшійся въ Гуналандѣ у своего дѣда Hlödr geid austan (59<sub>9</sub>)—такъ по R; въ контаминированной же редакціи сказано, что онъ geid utan (63<sub>6</sub>), а въ слѣдующей за строфой, содержащей эти слова, прозѣ, говорится: Hann rídur fá sunnan.

2) Вторгшіеся въ предѣлы готовъ гунны приближались съ юга къ бургун Гервары (ср. стр. 69<sub>5,12</sub>).

3) Наконецъ, бѣжавшій съ поля битвы и принесшій Ангальтору печальную вѣсть о смерти сестры Ормаръ говоритъ: Sunnan em eg kominn (70<sub>7</sub>). Отсюда слѣдуетъ, что бургун Гервары лежалъ къ югу отъ готской столицы.

Изъ этихъ данныхъ вытекаетъ, что по контаминированной редакціи Гуналандъ расположенъ къ югу отъ Готаланда, въ то время какъ по R первая изъ названныхъ земель находится къ востоку отъ второй.

Какой же изъ редакцій слѣдуетъ отдать предпочтеніе?

Шютте пытается примирить оба свидѣтельства; онъ говоритъ, что по Н-sag'ѣ Гуналандъ лежитъ отчасти къ югу, отчасти къ востоку отъ Готаланда, т. е. въ Венгріи и вдоль сѣвернаго берега Чернаго моря; что наступающіе на Готаландъ (=Пруссія и Польша) гунны двигались изъ Венгріи, т. е. съ юга на сѣверъ, а Hlödr прибылъ къ своему брату изъ южной Россіи, т. е. съ запада на востокъ. Но все это толкованіе произвольно: Гуналандъ лежитъ не отчасти къ югу и отчасти къ востоку отъ Готаланда, но по одной редакціи къ югу, а по другой къ востоку; по контаминированной редакціи и Hlödr, и гунны



направляются къ сѣверу, чтобы попасть въ Готландъ; а по R брать Ангантюра ѣдетъ съ той же цѣлью на западъ. Значить, между обѣими редакціями противорѣчіе—примирить ихъ нельзя: либо одна, либо другая сохранила въ себѣ исконное представленіе.

Но какая же именно?

На этотъ вопросъ отвѣтить нельзя, располагая только собранными выше данными; но онъ найдетъ свое рѣшеніе, когда намъ удастся локализовать Готландъ на основаніи другихъ географическихъ названій, встрѣчающихся въ H-sag'ѣ.

Въ Готландѣ лежитъ Danparstaðir. Прежде всего, что такое Danpar? Чтобы рѣшить это, необходимо сначала опредѣлить, какой изъ вариантовъ этого названія, находящихся въ H-sag'ѣ, заслуживаетъ довѣрія. Въ H-sag'ѣ мы находимъ слѣдующія чтенія: Danpar staudum (58<sub>16</sub>), staudum Damp aar (60<sub>11</sub>), Dapstaðir (62<sub>10</sub>), Damstaðir (63<sub>11</sub>), stōðam Danpár (65<sub>6</sub>). Такъ какъ форма Danparstaðir встрѣчается дважды, то ее можно признать первоначальной скорѣе, чѣмъ всѣ прочія, засвидѣтельствованныя по разу; къ тому же и Damp легко могло возникнуть изъ Danp, такъ какъ въ старо-скандинавскомъ *n* порой перешло въ *m* передъ *b* и *p*<sup>1)</sup>. Еще больше говоритъ въ пользу исконности указанной формы то обстоятельство, что она попадаетъ въ пятой строфѣ Atlakviða, которая, какъ было доказано Гейнцелемъ и др. (см. выше, стр. 16), ведетъ свое начало отъ H-sag'и.

Danpar (въ Danparstaðir) есть, очевидно, родительный падежъ. Какъ же будетъ именительный. Опираясь на то обстоятельство, что было необычно составлять названія путемъ соединенія staðir съ именами рѣкъ, Гейнцель (S. 475 ff.) пытался доказать, что Danpar есть род. падежъ отъ Danpr, имени лица, встрѣчающагося въ старой скандинавской литературѣ<sup>2)</sup>, и сблизить Danpr съ героиней русскихъ былинъ Нѣпроя Королевичной. Но все это остроумное построеніе падаетъ, если обратить вниманіе на чтеніе рукописи R: aa staudum Damp aar,—правописаніе aar (=ár) и отдѣленіе aar отъ Damp ясно показываетъ, что Damp aar есть родительный падежъ не отъ Damp (=Danpr), а отъ Damp á (=Danp á), а это значитъ «рѣка Дампъ».

<sup>1)</sup> Noreen, Altnordische Grammatik I, 2. Aufl., S. 112, § 202.

<sup>2)</sup> Въ какихъ именно памятникахъ встрѣчается это имя, указано у Гейнцеля, S. 474 f.

Если теперь принять во внимание, что Danp á лежит, по представлению Н-sag'я, въ Готаландѣ, то съ достаточной долей вѣроятности можно видѣть въ этомъ названіи истолкованное согласно скандинавской народной этимологіи Danaper Иордана: образовавъ отсюда Danpax, сѣверные германцы увидѣли въ этой формѣ род. пад. отъ Danp á.

Теперь обратимся къ обсужденію Danparstaðir.

Шютте говорить, что Danparstaðir не могло быть названіемъ города, потому что по Н-sag'ѣ въ этомъ «городѣ» лежитъ мѣстность (Bygden) Árheimar.

Посмотримъ, такъ ли это.

Вотъ какія данныя находимъ мы въ текстѣ нашего памятника для рѣшенія этого вопроса:

1) þvi næst lætr Angantyr gera ueizlu mikla a Danpar staudum a þeim bæ, er Árheimar heita, at erua fauður sinn (R, стр. 58<sub>15-16</sub>); иначе читается это мѣсто въ контаминированной редакціи. þvi næst lætur Angantýr efna til erfis eptir föður sinn í þvi hieraði, er 'Aarheimar heita, en þærinn Dapstaðir (62<sub>8-10</sub>).

2) Hlauður reid austan, Heidreks arfi,  
kom hann at gardi þar, er Gotar byggia,  
a Arheima arfs at quedia;  
þar drack Angantyr erfi Heidreks konungs (R, стр. 59<sub>9-12</sub>).

Въ контаминированной редакціи мы находимъ (63<sub>6-9</sub>) тѣ же строки съ той только разницей, что вм. austan стоятъ тамъ utan, а вм. quedia — krefja; кромѣ того, hann и konungs опущены.

При чтеніи выписанныхъ здѣсь мѣстъ возникаетъ недоумѣніе, откуда Шютте <sup>1)</sup> взялъ, что въ Danparstaðir находится мѣстность Árheimar. Правда, при желаніи еще можно, пожалуй, истолковать въ такомъ смыслѣ первую изъ цитатъ (R, стр. 58<sub>15-16</sub>). Но вѣдь подобное толкованіе стоитъ въ прямомъ противорѣчій съ контаминированной редакціей (стр. 62<sub>8-10</sub>), гдѣ Árheimar названы областью (herað), а Danparstaðir — помѣстіемъ или городомъ (bær), а равнымъ образомъ и со строфой: здѣсь говорится, что Hlödг прибылъ въ Árheimar къ бургу

<sup>1)</sup> Ср., впрочемъ, также и слова Гейнцеля: In Danparstadir soll . . . . der bægr Arheimar liegen.

(at gardi), гдѣ жили готы; отсюда ясно, что буръ лежалъ въ Arheimar, которыя, значить, были болѣе или менѣе обширной территоріей. Какъ же назывался упомянутый бургъ? Изъ дальнѣйшаго видно, что въ немъ правилъ тризну Ангантюрь; слѣдовательно, это были Danparstadir, какъ можно заключить на основаніи двухъ другихъ выписанныхъ мѣстъ.

Итакъ, опираясь на предыдущій разборъ, можно смѣло утверждать, что Arheimar были область, а Danparstadir—городъ или бургъ.

Danparstadir слѣдуетъ переводить, согласно добытымъ выше результатамъ, городъ Днѣпра. Въ какомъ, именно, мѣстѣ бассейна этой рѣки лежала столица Ангантюра, опредѣлить нѣтъ возможности. Правда, Vigfusson <sup>1)</sup> пытался доказать, что Danparstadir=Кіевъ, бывший нѣкогда главнымъ городомъ царства Эрманриха. Но его мнѣніе не было принято, какъ и слѣдовало ожидать, ни однимъ ученымъ <sup>2)</sup>. Оно основано на конъектурѣ одной строки Atlakviða (вм. Land sa þeir Altar oc liþscialfar ðivra онъ читаетъ Höll sá þeir Gotna ok hlíðskialfar Danpar), на толкованіи засвидѣтельствованнаго Константиномъ Багрянороднымъ названія Кіева Σαρζαστάς (=σαρζαστάς=danparstad), на свидѣтельствѣ о смерти Торвальда <sup>3)</sup>, который былъ погребенъ въ Drafni, что по Vigfusson'у=Dnargi. Но указанная поправка совершенно излишня, такъ какъ замѣна ðivra черезъ Danpar ничуть не способствуетъ улучшенію испорченнаго текста Atlakviða; сближеніе Σαρζαστάς съ Danparstad фантастично, а свидѣтельство о могилѣ Торвальда не имѣетъ никакого отношенія къ Днѣпру, потому что въ прозѣ, предшествующей строфѣ, на которую ссылается почтенный исландецъ, прямо сказано, что Торвальдъ былъ погребенъ недалеко отъ Полоцка <sup>4)</sup>.

Профессоръ Гейпцель (S. 478 f.) пытался отождествить Danparstadir съ Кіевомъ позднѣйшей поры—именно, онъ видитъ въ прекрасномъ камнѣ Печерскій монастырь, а въ святомъ гробѣ—Аскольдову или Антоніеву могилу. Но и подобное толкованіе непріемливо, какъ было выяснено въ моей статьѣ (стр. 17, прим. 2).

<sup>1)</sup> Vigfusson and Poweil, Grimm centenary. Sigferd-Arminius, p. 38 ss.

<sup>2)</sup> Ср. Н. Дашкевичъ, Приднѣпровье и Кіевъ по нѣкоторымъ памятникамъ древне-сѣверной литературы, Кіевъ 1886, стр. 15 сл.; Веселовскій, Ж. М. Н. П. 1887, июнь, стр. 294 сл.; Heinzel, S. 479.

<sup>3)</sup> См. Дашкевичъ, тамъ же, стр. 12 сл.

<sup>4)</sup> Biskupasögur, B. I, S. 25.

Такимъ образомъ, у насъ, строго говоря, нѣтъ никакихъ данныхъ, которыя бы позволяли отождествить Danparstaðir H-sag'и съ Кіевомъ. Конечно, можетъ быть, Danparstaðir и Кіевъ представляютъ собою названія одного и того же города, употреблявшіяся въ различныя эпохи; но нѣтъ также ничего невѣроятнаго въ томъ, что Danparstaðir лежали гдѣ-нибудь въ иномъ мѣстѣ, оставшемся намъ неизвѣстнымъ.

«Необходимы другія данныя, которыя бы свидѣтельствовали о томъ, что Кіевъ, или на его мѣстѣ городъ съ другимъ наименованіемъ, существовалъ уже въ такое отдаленное время, какъ эпоха Эрманриха. Такія данныя, быть можетъ, будутъ найдены... въ археологіи»<sup>1)</sup>. Теперь же можно только утверждать, что Danparstaðir находились на берегу Днѣпра—это вытекаетъ непосредственно изъ самаго названія.

Árheimar, по Гейнцелю, а также и по Шютте, = Ojos Иордана<sup>2)</sup>. Но готское Ojos ни по значенію, ни по звуку не совпадаетъ съ сѣвернымъ á (= готск. ahva<sup>3)</sup>). Почему же въ такомъ случаѣ скандинавы перевели Ojos черезъ Árheimar? Дать сколько-нибудь удовлетворительный отвѣтъ на этотъ вопросъ врядъ ли возможно. Вотъ по этой причинѣ мнѣ кажется болѣе подходящимъ предложенное мной объясненіе, согласно которому Árheimar = \*Varheimar (см. выше, стр. 230) = готск. \*Varhainðs(?)<sup>4)</sup>. Разъ гуннское Var зналъ Иорданъ, то, очевидно, оно было нечуждо готскому преданію; а съ этимъ послѣднимъ оно могло быть перенесено въ Скандинавію, гдѣ и было истолковано согласно пародной этимологіи, чему еще способствовало сходство значеній.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что Готландъ нашего памятника былъ расположенъ въ бассейнѣ рѣки Днѣпра.

<sup>1)</sup> Дашкевичъ, тамъ же, стр. 20 сл.

<sup>2)</sup> Почему Шютте думаетъ, что Ojos = мѣстность у дельты Вислы, мнѣ непонятно; вѣдь текстъ готскаго историка не даетъ повода къ такому толкованію (см. изд. Моммзена, стр. 60 сл., ср. и стр. 163).

<sup>3)</sup> Съ этой точки зрѣнія предпочтительнѣе толкованіе, предложенное въ Antiquités Russes, t. I, 112, гдѣ Árheimar сближается съ мѣстностью на рѣкѣ Aucha (= ahva), на которой происходила битва готовъ съ гепидами (ср. Иорданъ, стр. 82 сл.). Но что общаго между этой мѣстностью и Árheimar? Да и дѣйствительно ли Aucha есть искаженное ahva?

<sup>4)</sup> Звучало ли по-готски такъ интересное насъ названіе, трудно сказать: препятствіемъ къ принятію этой формы является значеніе haims = деревня, поселокъ. Но, можетъ быть, готское haims въ сложныхъ собственныхъ именахъ, подобно скандинавскому heimr, употреблялось и для наименованія мѣстностей.

Разъ такъ, то можно признать, что свидѣтельство R, по которому Гуналандъ лежитъ къ востоку отъ Готаланда, заслуживаетъ предпочтенія передъ свидѣтельствомъ контаминированной редакціи, располагающей первую землю къ югу отъ второй: гунны вѣдь, дѣйствительно, напали съ востока на готовъ, жившихъ по Днѣпру.

Посмотримъ теперъ, гдѣ происходила битва готовъ съ гуннами, описанная въ нашемъ памятникѣ.

Начнемъ съ Jassafjöll.

Прежде всего, необходимо отмѣтить, что чтение Jösurfjöll не слѣдуетъ принимать во вниманіе при обсужденіи этого названія. какъ позднѣйшее; оно обязано своимъ происхожденіемъ, по всей вѣроятности, Б. Свэйссону: въ рукописи *b*, гдѣ мы находимъ Jassarfjöll, на поляхъ рукой епископа написано Jösurfiöll, которое введено было потомъ и въ манускриптъ AM 192 fol., происходящій отъ *b*<sup>1)</sup>. Въ древнѣйшихъ же спискахъ изслѣдуемой части саги (т. е. въ *s*, *u*, *b*) встрѣчаются такія формы: Jossa *s*, Jassa *u*, Jassar *u*, *b*. Изъ нихъ заслуживаетъ предпочтенія Jassa *u*, какъ то доказываетъ Jossa наиболѣе близкой къ Cod. Arch. рукописи *s*, представляющее собой, очевидно, опisku вм. Jassa, что можно заключить на основаніи *u* и *b*, гдѣ ни одинъ варьянтъ этого названія не имѣетъ въ корнѣ *o*.

Если такъ, если Jassa—первоначальная форма, то тогда, конечно, не можетъ быть и рѣчи о сближеніи ея со словомъ jözugr, какъ въ собственномъ, (ср. Гейнцель, стр. 485), такъ и въ нарицательномъ его значеніи (ср. Шютте, стр. 39).

Въ Jassafjöll Мухъ<sup>2)</sup> (а за нимъ и Шютте, см. выше) видитъ Gesenke = Jasenik = Ἀσκιζούριον ὄρος Птолемея. Но подобное толкованіе можно было бы принять лишь при отсутствіи другого, болѣе подходящаго: трудно вѣдь думать, чтобы битва живущихъ въ Ю Россіи (см. выше) готовъ и гунновъ была перенесена въ указанное Мухомъ мѣсто. Да и какъ объяснить подобную локализацию, если готы, въ дѣйствительности, тамъ никогда не имѣли столкновенія съ гуннами?

Гораздо правдоподобнѣе видѣть въ Jassafjöll—τὸ Ἀλανὸν ὄρος Птолемея, что соотвѣтствуетъ, вѣроятно, нынѣшнему Донецкому Кряжу<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> См. мое изданіе H-sag'i, стр. 72, прим. 8, 18; введене, стр. LX.

<sup>2)</sup> ZfdA XXXIII, S. 1 ff.

<sup>3)</sup> Ю. Кулаковскій, Карта Европейской Сарматіи по Птолемею, Кіевъ 1899, стр. 20.

Съ такимъ толкованіемъ можно согласиться тѣмъ скорѣе, что, принявъ его, не представится особаго труда локализовать и другое названіе, встрѣчающееся въ разсказѣ о боѣ двухъ народовъ—я разумѣю *Dúnheidr*. Это значитъ „долина Дона“: первая половина его *Dun*=Донъ, отъ осетинскаго дон=вода, рѣка <sup>1)</sup>).

Такъ какъ долина рѣки Дона граничитъ съ Донецкимъ Кряжемъ, то локалізація гото-гуннскаго боя á *Dúnheidi undir Jassafjöllum* (или *og á þeim öllum Jassafjöllum*) вполне понятна и естественна.

Готамъ не могли остаться неизвѣстными Донъ и Донецкій Кряжъ: и тотъ и другой находятся не далеко отъ Днѣпра, по берегамъ котораго жилъ этотъ народъ. Къ тому же есть одинъ историческій фактъ, подкрѣпляющій это предположеніе: по разсказу Іордана (*Moithsen*, р. 88<sub>10-12</sub>), Эрманрихъ покорилъ геруловъ, жившихъ подлѣ Мвотиды; конечно, во время этого похода готы могли познакомиться и съ Дономъ, и съ Донецкимъ Кряжемъ.

Что готы могли хорошо знать ясовъ (аланъ) и заимствовать отъ нихъ географическія названія, вполне понятно, такъ какъ они, навѣрно, нерѣдко приходили съ ними въ соприкосновеніе, по своему переселенію въ Ю. Россію <sup>2)</sup>.

Осталось еще разсмотрѣть два мѣстныхъ названія, встрѣчающихся въ описаніи боя готовъ съ гуннами: *Murkviðr* и *Dylgja*.

Уже проф. Гейнцель (*S.* 481 f.) обратилъ вниманіе на то, что *Murkviðr* въ стихахъ, излагающихъ требованіе *Hlōðr'a* (стр. 60<sub>9</sub>, 65<sub>4</sub>), упомянуть не кстати: странно, что этотъ лѣсъ названъ *hrís* (=кустарникъ); не менѣе странно также, что онъ причисленъ къ драгоценнымъ предметамъ наслѣдства Гейдрека— врядъ ли въ то отдаленное время могли интересоваться лѣсомъ. Все это показываетъ, что стихъ, содержащій въ себѣ *Murkviðr*, испорченъ; весьма вѣроятно, первоначально въ немъ говорилось о какомъ-либо другомъ владѣніи, а не о лѣсѣ.

*Murkviðr* встрѣчается также въ строфѣ, которую сказалъ Ангантюру бѣжавшій съ поля битвы Ормаръ (стр. 70<sub>8</sub>). Но и здѣсь это названіе приведено не у мѣста: выраженіе *Murkviðar heidr* непонятно—

<sup>1)</sup> В. Миллеръ, Осетинскіе этюды, ч. III, Москва 1887, стр. 7 сл., 67. Такъ истолковалъ названіе *Dúnheidr* А. Н. Веселовскій, Ж. М. Н. II. 1888, май, стр. 89; но впослѣдствіи онъ отказался отъ этого объясненія; см. Извѣстія отд. русск. яз. и слов. И. А. Н., т. V, стр. 9.

<sup>2)</sup> Ср. Ю. Кулаковскій, Аланы, Кіевъ 1899, стр. 15 сл.

степь никакъ ужъ не могла носить имя *Myrkviðr*. Очевидно, и тутъ мы имѣемъ дѣло съ позднѣйшимъ искаженіемъ.

Въ *H-sag*'ѣ есть еще одно мѣсто, гдѣ выступаетъ *Myrkviðr*: въ отрывкѣ, повѣствующемъ о вторженіи гунновъ въ землю готовъ, сообщается, что Гуналандъ отъ Готаланда отдѣляетъ *skógr Myrkviðr* (стр. 68<sub>15</sub>). Но это мѣсто изложено прозой; слѣдовательно, нѣтъ ничего невѣроятнаго въ томъ, что фраза, содержащая въ себѣ интересующее насъ названіе, представляетъ собою позднѣйшую прибавку. Такая прибавка могла быть сдѣлана на основаніи *Atlakviða* и *Oddrúnar-grátr* <sup>1)</sup>, согласно которымъ на границѣ обѣихъ земель лежитъ тотъ же лѣсъ; да и вообще *Myrkviðr* не разъ встрѣчается въ старой скандинавской географической номенклатурѣ; ср. *Flateyjarbók*, II, 72<sub>2</sub>; *FMS* I, 111<sub>22,25</sub>—27; *Diplomatarium Norvegicum*, V, 172<sub>13</sub> и др.

Значить, представленіе о пограничномъ лѣсѣ, можетъ быть, и не восходитъ къ готскому преданію, легшему въ основу сказанія о битвѣ на *Dúnheidi*'ѣ. Въ виду этого я и не пытаюсь гдѣ-либо локализовать *Myrkviðr*.

Что касается *Dylgja*, то опредѣлить ея мѣстоположеніе никогда не удастся по той причинѣ, что въ рукописяхъ встрѣчаются разнообразныя формы этого названія (*dilgia u*, *dylgia b*, *dingia b*, *u*, *dungia*—поправка еп. Б. Свейссона въ *b*), при чемъ мы совершенно лишены возможности опредѣлить, какая изъ нихъ первоначальна.

Быть можетъ, слово *Dylgja* лишь по недоразумѣнію получило значеніе собственнаго имени—мысль, которая мнѣ неоднократно приходила, и которая уже была проведена, какъ я потомъ узналъ, Мухомъ въ упомянутой выше работѣ; къ ней-то и можетъ обратиться интересующійся этимъ вопросомъ читатель.

Предыдущее изслѣдованіе географіи посвященнаго описанію готогуннской битвы эпизода *H-sag*'и показало, что вполне возможно локализовать названные въ немъ мѣстности и городъ въ Ю. Россіи, т. е. тамъ, гдѣ совершилось событіе, легшее въ его основу. Это обстоятельство служитъ косвеннымъ подтвержденіемъ нашего мнѣнія о генезисѣ упомянутаго эпизода.

<sup>1)</sup> Эдда. изд. Бугге. стр. 280, 282 сл.

## VIII. Заключеніе.

Опираясь на предыдущее изслѣдованіе, можно представить себѣ такъ исторію сложенія Н-sag'и.

Въ устахъ скандинавскаго населенія X в. вращались, между прочимъ, слѣдующія произведенія: 1) рассказъ о приобрѣтеніи королемъ Сигрлами (Свафрлами) меча Тюрфинга отъ dwarfovъ; 2) сага о боѣ на островѣ Самсѣ, успѣвшая уже осложниться рядомъ чуждыхъ ей мотивовъ: описаніемъ сватовства, вызова на бой и сообщеніемъ о взаимной любви Гіальмара и Ингибюрги; 3) біографія Гейдрека, которая состояла изъ основной части, повѣствовавшей о смерти этого короля, и ряда позднѣйшихъ наслоеній, рассказывающихъ о его происхожденіи, совершенномъ имъ братоубійствѣ, о данныхъ ему отцомъ совѣтахъ и относящихся къ нимъ происшествіяхъ и о его преніи загадками съ Одиномъ.

Нѣкій исландецъ познакомился съ этими произведеніями и рѣшилъ объединить ихъ—подобное намѣреніе возникло, можетъ быть, подвліяніемъ саги о Нифлунгахъ. Здѣсь, какъ извѣстно, связующимъ звеномъ между отдѣльными эпизодами является кладъ, приносившій въ силу проклятія карлика Андвари гибель своимъ владѣльцамъ: такъ точно и въ Н-sag'ѣ объединяетъ ея части мечъ Тюрфингъ, который согласно заклятію изготовившихъ его dwarfovъ-ковачей долженъ былъ стать орудіемъ трехъ позорныхъ дѣяній и убивать человека, разъ его извлекали изъ ноженъ. Кромѣ того, чтобы связать потѣснѣ самостоятельныя произведенія, вошедшія въ составъ нашего памятника, упомянутый исландецъ воспользовался еще однимъ средствомъ, бывшимъ въ ходу на его родинѣ,—онъ представилъ героевъ, выступающихъ въ этихъ произведеніяхъ, родственниками по нисходящей линіи.

Возникаетъ теперь вопросъ, почему онъ привлекъ къ выполненію задуманной работы упомянутые выше источники, а не какіе-либо другіе.

Дать отвѣтъ на этотъ вопросъ не представляется возможнымъ: въ рассказѣ о добываніи Тюрфинга, сагѣ о боѣ на Самсѣ и жизнеописаніи Гейдрека нѣтъ, поскольку я вижу, общихъ или сходныхъ чертъ, которыя бы могли натолкнуть на мысль объединить ихъ. Къ этому побудили автора Н-sag'и, вѣроятно, какія-либо случайныя обстоятельства, уяснить которыя могла бы лишь его біографія. Къ сожалѣнію,



никакого представленія о его жизни мы не можемъ себѣ составить за недостаткомъ данныхъ.

Итакъ, намъ приходится лишь констатировать фактъ, что нѣкій исландецъ объединилъ названныя выше произведенія, но объяснить этотъ фактъ мы не въ состояніи.

Конечно, связать совершенно чуждыя другъ другу произведенія нельзя было, не произведя въ нихъ ряда измѣненій и не дополнивъ ихъ тѣми или иными подробностями.

Авторъ Н-*sağ*'и рѣшилъ сдѣлать героевъ, выступающихъ въ ней, родственниками по нисходящей линіи. Но дѣйствующія лица тѣхъ сказаній, которыя были у него подъ руками, были искони чужды другъ другу. Слѣдовательно, чтобы представить ихъ родственниками, составителю нашего памятника пришлось присочинить рядъ эпизодовъ. Сюда относятся: поѣздка Аригрима въ Гардарики и его женитьба на дочери короля этой страны, бракъ Ангантюра и дочери ярла Біартмара и жизнеописаніе Гервары до выхода ея замужъ за Гофунда. Другимъ средствомъ соединенія явился мечъ Тюрфингъ. обладаніе которымъ было приписано главнымъ героямъ (по древнѣйшему представленію онъ принадлежалъ только добывшему его королю). Результатомъ этого явились всѣ тѣ мѣста саги о боѣ на Самсѣ и жизнеописаній Гервары и Гейдрека, гдѣ упоминается чудесный мечъ.

Описаннымъ сейчасъ путемъ возникло сказаніе, которое въ общемъ совпадало по своему содержанію съ Н-*sağ*'ой до смерти Гейдрека включительно. Главное различіе состояло лишь въ томъ, что въ немъ не было пока и рѣчи объ Ангантюрѣ, Нладг'ѣ и Герварѣ (II), дѣтяхъ Гейдрека, и о другихъ герояхъ, выступающихъ въ послѣднемъ эпизодѣ памятника.

Съ этимъ сказаніемъ познакомился во второй половинѣ X в. какой-то другой исландецъ, усвоившій также и сагу о готто-гуннскомъ боѣ. Такъ какъ герой послѣдней выступалъ въ роли короля Готаланда, а Гейдрекъ былъ представленъ правителемъ Рейдготаланда, то названный исландецъ могъ легко вообразить, что оба героя являлись владѣтелями одной и той же земли. Такое заключеніе могло повлечь за собой желаніе выяснить, въ какомъ отношеніи находились другъ къ другу оба короля. Согласно обычному приему онъ рѣшилъ ихъ связать генеалогически. Такъ какъ отецъ и предки Гейдрека были из-

вѣстны, то оставалось представить Ангантюра (Ш) <sup>1)</sup> сыномъ Гейдрека. Король готовъ имѣлъ брата Нлбдг'а и сестру Гервару; слѣдовательно, и ихъ пришлось сдѣлать дѣтьми того же лица. Но разъ поименованные сейчасъ герои должны были стать дѣтьми Гейдрека, само собой возникла необходимость рассказать о ихъ рожденіи и о той роли, какую они играли въ жизни отца. Съ этой цѣлью второй авторъ Н-sag'и ввелъ въ сагу Гейдрека всѣ тѣ эпизоды, въ которыхъ выступаетъ Ангантюрь, Гумли, Нлбдг, Гервара и Ормаръ. Гейдрекъ былъ убитъ рабами. По скандинавскимъ представленіямъ, прежде чѣмъ вступить во владѣніе наслѣдствомъ, оставленнымъ умершимъ насильственной смертью отцомъ, сынъ долженъ былъ отмстить за него. Вслѣдствіе этого и былъ присочиненъ рассказъ о томъ, какъ Ангантюрь наказалъ убійцъ короля Рейдготаланда. Кромѣ того, Ангантюру было приписано обладаніе Тюрфингомъ.

Такъ возникло то сложное произведеніе, которое нынѣ извѣстно подъ заглавіемъ Н-sag'а. Долгіе годы жило оно въ устахъ исландскаго населенія, подвергаясь всѣмъ случайностямъ устной передачи, пока, наконецъ, не было закрѣплено на письмѣ въ концѣ XIII в.

Первоначальная запись послужила оригиналомъ ряду списковъ съ которыхъ были сняты копіи и т. д. Конечно, каждый переписчикъ не въ точности воспроизводилъ находившійся у него подъ руками оригиналъ, но исправлялъ его и вводилъ новыя ошибки. Въ результатѣ этого и получилось, что древнѣйшія дошедшія къ намъ рукописи Н-sag'и (Н и R) различаются другъ отъ друга въ передачѣ многихъ подробностей.

Необходимо замѣтить, что при перепискѣ къ нашему памятнику была присоединена новая глава историческаго содержанія <sup>2)</sup>, первоначально не имѣвшая ничего общаго съ нимъ; при этомъ названные въ ней историческіе короли были приведены въ генеалогическую связь съ Ангантюромъ, героемъ гото-гуннской битвы.

<sup>1)</sup> Впрочемъ, первоначально король готовъ, братъ Нлбдг'а, не назывался Ангантюромъ (см. мою статью: Древне-скандинавское сказаніе, стр. 24 сл.). Такое имя было дано этому герою тѣмъ исландцемъ, о которомъ теперь у насъ рѣчь.

<sup>2)</sup> Такъ какъ эта глава представляетъ собой историческій источникъ, а не литературное произведеніе, то намъ пришлось пройти ее молчаніемъ въ данномъ изслѣдованіи.

Въ XIV в. Н-saga путемъ устной передачи была занесена въ Данію; здѣсь одинъ эпизодъ ея, именно, описаніе битвы на островѣ Самсѣ, послужилъ источникомъ народныхъ пѣсень.

Въ XVII в. одинъ изъ списковъ Н-sag'и былъ завезенъ на Фарерскіе острова, гдѣ на основаніи его были составлены пѣсни о боѣ на Самсѣ и о преніи загадками, отъ которыхъ ведутъ начало записанные въ XVIII и XIX вв. ихъ варианты.

---



## Поправки.

<i>Напечатано:</i>	<i>Страница и строка:</i>	<i>Должно быть:</i>
проникшіяся	1 <sub>15</sub>	проникшія
правописанія	8 <sub>22</sub>	правописанія:
первоначальо	13 <sub>4</sub>	первоначально
согласнлись	21 <sub>28</sub>	согласившись
стихами	21 <sub>30</sub>	стихами (за исключеніемъ раз- сказа объ убійствѣ Гейдре- ка; см. ниже).
Король	29 <sub>17</sub>	король
розсказывається	29 <sub>24</sub>	разсказывается
обѣдъ	30 <sub>22</sub>	обѣтъ
одинадцатью	31 <sub>10, 21</sub>	одинадцатью
одинадцать	32 <sub>2</sub>	одинадцать
отсюда	51 <sub>5</sub>	отсюда
оно	51 <sub>9</sub>	оно —
вѣроятнаго	52 <sub>22</sub>	невѣроятнаго
заключавшееся	53 <sub>26</sub>	заключающееся
фарерскія	53 <sub>27</sub>	фаррерскія
Самиз	54 <sub>1</sub>	Самсэ
и	55 <sub>15</sub>	и его
три	60 <sub>11</sub>	три
Н-агаг'и	63 <sub>27</sub>	Н-агаг'и
Раллауга	60 <sub>24</sub> 66 <sub>30</sub>	Роллауга
64	67 <sub>4</sub>	63
Аригринъ	67 <sub>12</sub>	Аригримъ
Аригриня	67 <sub>20</sub>	Аригрима
Тюрфингомъ;	70 <sub>2</sub>	Тюрфингомъ
поучиненіи	71 <sub>2</sub>	поучени
помнитъ	74 <sub>4</sub>	помнить
что	76 <sub>20</sub>	что
Эккираксъ	87 <sub>27</sub>	Эккираксъ
Эки	87 <sub>29</sub>	Экки-

<i>Напечатано:</i>	<i>Страница и строка:</i>	<i>Должно быть:</i>
возможности	88 <sub>17</sub>	возможности
корабли	95 <sub>9</sub>	корабль
отъ	96 <sub>29</sub>	онъ
XVШ	107 <sub>36</sub>	VШ
вышивать	107 <sub>31</sub>	шить
Halftöll	112 <sub>3</sub>	Halftröll
взмѣняетъ	112 <sub>26</sub>	измѣняетъ
Тристана	124 <sub>27</sub>	Тристана
semonstrant	126 <sub>27</sub>	se monstrant
ученый и,	127 <sub>26</sub>	ученый, и
Гервинъ	130 <sub>3</sub>	Гервикъ
остались	130 <sub>21</sub>	остался
hetur	130 <sub>24</sub>	betur
образомъ: на	138 <sub>13</sub>	образомъ. На
о упоминаніе	142 <sub>13</sub>	и упоминаніе
говорить	147 <sub>1</sub>	пишетъ
обстоятельствѣ	147 <sub>4</sub>	обстоятельствѣ
отправляющему	148 <sub>16</sub>	отправляющемуся
допустимъ	150 <sub>22</sub>	допустилъ
поученіемъ	152 <sub>16</sub>	поученіями
отсрочить	154 <sub>21</sub>	отсрочить
невинность	155 <sub>25</sub> 156 <sub>25</sub>	невиновность
дѣлать	155 <sub>21</sub>	дѣлай
Ахмедъ	158 <sub>9</sub>	Ахметъ
помилованія	158 <sub>16</sub>	помилованіе
сеньору	158 <sub>14, 22, 27</sub>	сеньору
ввѣрять	160 <sub>12</sub>	ввѣрять
ненанимай	164 <sub>16</sub>	не нанимай
неизвѣстнымъ	165 <sub>6</sub>	неизвѣстнымъ
отрывай	165 <sub>15</sub>	отрывай
сеньору	171 <sub>22</sub> 172 <sub>27</sub> 173 <sub>21</sub>	сеньору
сообразныя	173 <sub>16</sub>	своеобразныя
способамъ	173 <sub>26</sub>	способомъ
въ	185 <sub>16</sub>	въ
источникомъ	185 <sub>16</sub>	источникомъ
отмѣтилъ	185 <sub>22</sub>	отмѣнилъ
заимствовелъ	185 <sub>25</sub>	заимствовалъ
новела	186 <sub>27</sub>	новелла
земли	187 <sub>23</sub>	земли;
атруднительное	196 <sub>21</sub>	затруднительное
полустрокой	200 <sub>16</sub>	полустрофой
и ни	201 <sub>25</sub>	ни
короли	202 <sub>1</sub>	короля
Antiqvarik	205 <sub>25</sub>	Antiqvarisk
упомянутые	206 <sub>25</sub>	упомянутыя
=земля	208 <sub>29</sub>	указываетъ на земли

<i>Напечатано:</i>	<i>Страница и строка:</i>	<i>Должно быть:</i>
ученный	213 <sub>20</sub>	ученый
ate	215 <sub>20</sub>	alte
король	216 <sub>11-12</sub>	король
Tfornyrðislag	222 <sub>21</sub>	fornyrðislag
Гестумблинда	223 <sub>13</sub>	Гестумблинди
git	223 <sub>29</sub>	getit
H-sag'ъ	225 <sub>11</sub>	H-sag'и
каждого	225 <sub>18</sub>	каждого
Lugi	233 <sub>27</sub>	Lugii
Sigferd	239 <sub>22</sub>	Sigfred
деревня	240 <sub>26-27</sub>	деревня





## ПРЕДИСЛОВІЕ.

---

Настоящая книга посвящена историко-литературному изслѣдованію „Сказанія о мечѣ Тюрфингѣ“. Она представляет собою третій выпускъ предпринятой мною работы о *Hervararsaga*,<sup>1)</sup> ѣ. Первый ея выпускъ, появившійся въ свѣтъ полгода тому назадъ, заключаетъ въ себѣ текстъ памятника съ введеніемъ, гдѣ подвергнувъ обсужденію вопросъ о рукописномъ преданіи саги. Въ непродолжительномъ времени я надѣюсь издать и второй выпускъ, въ который войдетъ переводъ „Сказанія“ съ объяснительными примѣчаніями.

Въ данномъ изслѣдованіи я допустилъ при ссылкахъ рядъ сокращеній; нѣкоторыя изъ нихъ необычны; поэтому я считаю не лишнимъ разъяснить ихъ.

Grundriss = Grundriss der germanischen Philologie, herausgegeben von H. Paul, 2. Aufl., Strassburg 1900 ff.

Heinzel = R. Heinzel, Ueber die *Hervararsaga* (Sitzungsberichte der K. Akademie d. Wissenschaften, philos.-hist. Classe, B. 114, Wien 1887, S. 417 ff.).

Jónsson, Litteraturs Historie = F. Jónsson, Den oldnorske og oldislandske Litteraturs-Historie, B. I—III, Kjöbenhavn 1894—1902.

AmF = Arkiv för nordisk Filologi, Christiania 1883—88, Lund 1889 ff.

FAS = Fornaldar Sögur Nordlanda, útgefnar af C. C. Rafn, B. I—III Kaupmannahöfn 1829—1830.

FMS = Fornmanna sögur, útgefnar að tilhlutun hins norræna fornfráðafélags, B. I—XII, Kaupmannahöfn 1825—1837.

PBB = Beiträge zur Geschichte der deutschen Sprache und Literatur, Halle 1874 ff.

ZfdA=Zeitschrift für deutsches Alterthum und deutsche Litteratur,  
Leipzig 1841—53, Berlin 1856 ff.

ZfdPh=Zeitschrift für deutsche Philologie, Halle 1869 ff.

Мой трудъ при составленіи данной книги былъ значительно облегченъ благодаря теплomu участию моего глубокочтимого учителя г. профессора Н. П. Дашкевича, которому приношу самую искреннюю благодарность.

Вмѣстѣ съ тѣмъ считаю пріятнымъ долгомъ выразить свою признательность многоуважаемому профессору Ю. А. Кулаковскому за его цѣнныя указанія въ области старой этнографіи Ю. Россіи и многоуважаемому редактору „Университетскихъ Извѣстій“ В. С. Иконникову за содѣйствіе, оказанное имъ при печатаніи этой книги.

**И. Шаровельскій.**

Кіевъ.

15-го октября 1906 г.

## О Г Л А В Л Е Н І Е.

### I. Введеніе.

	СТР.
1. Цѣль изслѣдованія . . . . .	1
2. Интересъ, представляемый Н-sag'ой для историка литературы.	2
3. Методъ и планъ работы . . . . .	4

### II. Внѣшняя исторія Н-sag'и.

1. Объ авторѣ Н-sag'и и о мѣстѣ и времени ея возникновенія .	8
2. О происхожденіи редакцій Н-sag'и . . . . .	16

### III. Критическое изслѣдованіе содержанія Н-sag'и.

1. О способѣ возстановленія древнѣйшаго вида Н-sag'и . . . . .	26
2. Содержаніе Н-sag'и . . . . .	28
3. Возстановленіе древнѣйшаго вида Н-sag'и . . . . .	42
4. Раздѣленіе Н-sag'и на составныя части . . . . .	62
5. Возстановленіе составныхъ частей саги въ древнѣйшемъ видѣ.	73

### IV. Изслѣдованіе сказанія о добываніи меча Тюрфинга.

1. Параллели . . . . .	79
2. Происхожденіе сказанія о приобрѣтеніи Тюрфинга . . . . .	83

### V. Происхожденіе сказанія о боѣ на островѣ Самсэ.

1. Источники . . . . .	88
2. Критическій разборъ изслѣдованій сказанія о боѣ на островѣ Самсэ . . . . .	97
3. О взаимоотношеніи древнѣйшихъ видовъ сказанія о битвѣ на островѣ Самсэ . . . . .	116
4. Происхожденіе сказанія о боѣ на островѣ Самсэ . . . . .	124
5. Позднѣйшія версіи сказанія о боѣ на островѣ Самсэ . . . . .	128

**VI**

СТР.

**VI. Происхождение саги Гервары и Гейдрена.**

1. О жизнеописании Гервары . . . . .	146
2. Происхождение истории Гейдрена . . . . .	151
3. О загадках . . . . .	210

**VII. Происхождение сказания о битве готовъ съ гуннами.**

1. Пересказъ содержания статьи автора, посвященной изслѣдованію этого сказанія . . . . .	226
2. О мѣстныхъ названіяхъ сказанія о гото-гуннской битвѣ . . . . .	231

**VIII. Заключение**

244

**Поправки**

248

## Землеустроительныя задачи и землеустроительное законодательство Россіи.

### Х.

#### Уничтоженіе сервитутовъ.

*Содержаніе:* Сложность вопроса.—Двѣ категоріи сельско-хозяйственныхъ сервитутовъ.—Различія между ними.—Иной юридической характеръ нашихъ сельско-хозяйственныхъ сервитутовъ по сравненію съ сервитутами римскаго права.—Борьба съ сервитутами въ Германіи.—Русское законодательство объ отмѣнѣ сервитутовъ.—Его недостатки и необходимость реформы.—I. Взаимныя крестьянскіе сервитуты.—Серьезныя послѣдствія отмѣны ихъ для крестьянскаго хозяйства.—Необходимость осторожности.—Регулированіе права общей толоки.—Право освобожденія отъ нея извѣстной части поля.—Полная отмѣна ея.—II. Сервитутныя отношенія между крестьянами и помѣщиками.—Распространенность этихъ сервитутовъ въ Юго- и Сѣверо-западномъ краѣ.—Неудача проэктовъ ихъ уничтоженія.—Причины ея.—Односторонніе лѣсные сервитуты.—Преувеличенныя жалобы на нихъ владѣльцевъ лѣсовъ.—Необходимость регламентировать пользованіе ими.—Условія допущенія принудительной отмѣны ихъ.—Право общей толоки у крестьянъ и помѣщика.—Споръ о вредѣ этого сервитута для сельско-хозяйственной культуры.—Фактическое исчезновеніе сервитута общей толоки.—Мѣры къ огражденію сервитутныхъ правъ.—Облегченіе полной отмѣны общей толоки за справедливое вознагражденіе.—Рѣдкость и неудовлетворительность добровольныхъ разверстаній.—Необходимость принудительнаго разверстанія по желанію одной изъ сторонъ. Возраженія противъ него И. П. Новицкаго.—Руководящія нормы для вычисленія вознагражденія за отмѣну сервитута общей толоки.—Раздѣлъ общихъ выгоновъ.—Связь сервитутовъ съ черезполосицей.

Въ I-ой главѣ указаны главные виды сельско-хозяйственныхъ сервитутовъ и отмѣченъ приносимый ими вредъ. Но уничтоженіе этихъ исторически сложившихся отношеній такъ сильно затрогиваетъ интересы всѣхъ слоевъ земледѣльческаго населенія, что предпринимать какія-либо мѣры въ этомъ направленіи можно лишь тщательно взвѣсивъ всѣ ихъ послѣдствія. Рѣзкое огульное

рѣшеніе невозможно. Необходимо расчленивъ вопросъ на части и подробно разсмотрѣть отдѣльныя детали. Необходимо разобратъся въ тѣхъ спорахъ, которые ведутся не только по поводу того или иного способа уничтоженія различныхъ сервитутовъ, но и самой необходимости уничтожать ихъ.

Говоря о сельско-хозяйственныхъ сервитутахъ, приходится раньше всего различать двѣ категоріи ихъ:

I. Сервитутныя отношенія между крестьянами. Напримѣръ: взаимное право пастъбы на поляхъ (пару и стернѣ—толока) и лугахъ. право проѣзда, прогона скота и др.

II. Сервитутныя отношенія между крестьянами и помѣщиками. Они частью взаимны; напримѣръ: общая толока, пастъба на лугахъ. право проѣзда; частью-же односторонни, причемъ отягченной стороной является главнымъ образомъ помѣщикъ, а управомоченной крестьяне. Таковы, напримѣръ: различные виды лѣсныхъ сервитутовъ (пользованіе деревомъ для построекъ и топлива, пастъба и сѣнокосы въ лѣсахъ, собираніе валежника, листвы, ягодъ грибовъ и пр.), право водоноя, добычи камня, песка и глины и др.

Обѣ категоріи отчасти совпадаютъ по объекту, но между ними существуютъ крупныя различія.

Крестьянскіе сервитуты, за рѣдкими исключеніями, всѣ взаимны. изъ помѣщичьихъ такова лишь часть, остальные являются односторонними правами, и главнымъ образомъ, правами крестьянъ на владѣльческія земли. Но и взаимные помѣщичьи сервитуты не совсѣмъ похожи на крестьянскіе. Хотя они по праву взаимны, но *фактически* различныя стороны пользуются своимъ правомъ далеко не одинаково. Возьмемъ право общей толоки. Крестьяне свое право пасты скотъ на поляхъ другъ друга используютъ всѣ болѣе или менѣе полно. Неравномѣрность, конечно, есть и здѣсь: малоземельные получаютъ отъ этого права относительно большую выгоду, нежели многоземельные. Но это различіе далеко не такъ рѣзко, какъ въ общей толокѣ съ помѣщиками. Послѣдніе въ большинствѣ случаевъ совсѣмъ не посылаютъ своего скота на крестьянскую толоку, выпасая его на своихъ поляхъ или другихъ пастбищахъ. Для крестьянъ-же, сильно стѣсненныхъ въ пастбищахъ, помѣщичьи поля, луга и лѣсные выпасы не рѣдко составляютъ единственный источникъ поддержанія необходимаго количества скота. Вслѣдствіе этого уничтоженіе общей толоки на своихъ поляхъ является для

крестьянъ лишь видоизмѣненіемъ пользованія тою-же землею, особыя потери и выгоды создаются только для нѣкоторыхъ группъ и сравнительно незначительны. Только совершенно безземельные и очень малоземельные понесли-бы при этомъ болѣе крупныя потери. Здѣсь, значить, на первомъ планѣ встаетъ вопросъ: насколько уничтоженіе толоки выгодно или вредно для всѣхъ вообще? Не то при общей толокѣ съ помѣщиками. Въ этомъ случаѣ уничтоженіе ея почти всегда создаетъ крупный плюсъ для помѣщика и минусъ для крестьянъ. А потому, центр тяжести вопроса лежитъ въ вознагражденіи за отнятый сервитутъ, и лишь въ зависимости отъ характера и высоты вознагражденія можно говорить объ отмѣнѣ или сохраненіи сервитута. Еще рѣзче это различіе для одностороннихъ крестьянскихъ сервитутовъ.

Кромѣ того послѣдніе отличаются отъ взаимныхъ крестьянскихъ сервитутовъ и своей исторической судьбой. И тѣ и другіе выросли изъ прежней общности землевладѣнія. Первоначально эта общность охватывала какъ отношенія крестьянъ между собою, такъ и отношенія крестьянъ къ помѣщику. Но постепенно общинныя отношенія дифференцировались. И вотъ, на одной сторонѣ выросла община равноправныхъ крестьянъ. Когда земля мало по малу перешла въ частное пользованіе, оставшіяся у всѣхъ остальныхъ членовъ общины права на нее приобрѣли характеръ сервитутовъ. На другой сторонѣ процессъ дифференціаціи отложилъ крупныхъ землевладѣльцевъ съ могущественною властью надъ личностью и собственностью крестьянъ. Постепенно усиливаясь и обособляясь отъ крестьянъ, они захватываютъ обширныя пространства лѣсныхъ и иныхъ неводѣланныхъ земель, находившихся прежде въ общемъ или ничьемъ пользованіи, и объявляютъ ихъ своею исключительною собственностью. Однако, совершенно лишить крестьянское населеніе участія въ пользованіи этими землями не представлялось возможнымъ, часто не было даже выгодно. Извѣстную долю его крестьяне удержали, но оно отлилось уже въ другую юридическую форму, сохранившись въ видѣ права на *чужую* вещь. Этотъ процессъ пережить общинными лѣсами и пустыми землями въ Западной Европѣ: тотъ-же процессъ и у насъ создалъ лѣсные и другіе односторонніе сервитуты крестьянъ на владѣльческихъ земляхъ, сохранившіеся до настоящаго времени въ западныхъ частяхъ Европейской Россіи. Эти земельныя блага удержаны крестьянами въ эпоху безграничнаго господства земле-

владѣльцевъ. Ихъ охраняли сперва сами крестьяне и сила хозяйственныхъ отношеній, затѣмъ на помощь пришла государственная власть (напр., внесеніе ихъ въ „инвентари“, составленные въ Юго-западномъ краѣ въ 40-хъ годахъ по настоянію генераль-губернатора Д. Г. Бибикова <sup>1)</sup>), и позднѣйшее включеніе ихъ въ выкупные акты). Поэтому, въ настоящее время вопросъ объ уничтоженіи этихъ правъ можно ставить лишь съ огромной осторожностью, точно взвѣсивая, что получать крестьяне взамѣнъ отнимаемаго.

Но, различаясь въ другихъ отношеніяхъ, обѣ указанныя категоріи сервитутовъ сходятся между собою въ томъ, что къ нимъ не приложима общая юридическая мѣрка римскаго права. Между ними и римскими *servitutes*, по типу которыхъ построены современныя законодательства о сервитутахъ, цѣлая пропасть. Для германскихъ сельско-хозяйственныхъ сервитутовъ, явившихся результатомъ того-же историческаго процесса, который породилъ и наши сервитуты, отличіе отъ римскихъ *servitutes praediorum rusticorum* рѣзко provedено нѣмецкой юридической литературой и ярко изложено у Л. Штейна <sup>2)</sup>. Примѣняя это ученіе и къ Россіи, можно сказать слѣдующее.

Глубокое различіе между римскими и нашими сельскими сервитутами лежитъ въ томъ, что оба вида созданы совершенно различнымъ правовымъ строемъ. Римское право представляетъ законченную систему для правовой жизни независимыхъ другъ отъ друга индивидуумовъ, для совершенно свободной собственности и свободного оборота. Это право развитого гражданскаго общественнаго

<sup>1)</sup> Эта интересная государственная мѣра имѣла вообще огромное вліяніе на положеніе крестьянъ Юго-западнаго края, брошенныхъ исторіей въ рабство чуждому по національности и вѣрѣ классу польскаго дворянства. Ея значеніе рѣзко бросается въ глаза, если сравнить судьбы крестьянъ Юго- и Сѣверо-западнаго края. Въ послѣднемъ инвентари не были введены. Экономическое положеніе тамошняго литовскаго и бѣлорусскаго крестьянскаго населенія отъ этого сильно пострадало. „Въ Витебской губерніи крестьяне почти не знали хлѣба, питались грибами и разными сырыми веществами, порождавшими болѣзни: нищета была страшная, а рядомъ роскошь помѣщиковъ; жизненные силы края совершенно истощались въ нравственномъ и физическомъ отношеніи, расслабленіе достигло крайнихъ предѣловъ“. Въ такихъ словахъ обрисовываетъ положеніе крестьянъ Сѣверо-западнаго края кіевскій историкъ В. Я. Шульгинъ на основаніи документа 50-хъ годовъ („Юго-западный край подъ управленіемъ Д. Г. Бибикова [1838—1853]“, „Древняя и новая Россія“, 1879 г., т. II, стр. 104—5).

<sup>2)</sup> L. v. Stein. „Die Verwaltungslehre“, Stuttgart, 1868, VII, стр. 239—242.



строю. Наше частное право содержит до сих пор целый ряд ограниченной частной собственности, выросших из родового и сословного строя. Отсюда, сельский сервитут римского права— всегда отношение, возникшее из свободного договора. Он не является для римского юриста частью или послѣдствіемъ всего аграрнаго строя. Наши же сервитуты— это правовыя отношенія, выросшія изъ извѣстныхъ родовыхъ и сословныхъ отношеній, изъ опредѣленнаго аграрнаго строя, съ которымъ они сплетены всѣмъ своимъ существомъ. Основа ихъ покоится не на договорѣ, ибо породившія ихъ социальныя отношенія выросли не изъ договора. Они являются продолженіемъ этихъ социальныхъ отношеній въ области частнаго права владѣнія землею. То, что помѣщичьи сервитуты были фиксированы въ уставныхъ грамотахъ и выкупныхъ актахъ, дѣла не мѣняетъ<sup>1)</sup>. Это дало имъ болѣе опредѣленный юридическій титулъ, но не создало ихъ. А во многихъ случаяхъ эти акты такъ неопредѣленно говорятъ о сервитутахъ, что для рѣшенія конкретныхъ вопросовъ приходится, минуя акты, прямо обращаться къ исторически сложившимся фактическимъ отношеніямъ. Нѣкоторыхъ сервитутовъ они совершенно не касаются, напр., права общей толоки. Сомнѣнія могутъ вызывать сервитуты крестьянъ Юго- и Сѣверо-западнаго края. Исторію ихъ можно довести до частныхъ „инвентарей“, составлявшихся между помѣщиками и крестьянами въ 16, 17 и 18 вѣкахъ. Но и эти инвентари были лишь фиксаціей отношеній, гарантіей правъ крестьянъ, съ цѣлью уменьшить ихъ непрекращавшіеся побѣги. Видѣть въ нихъ договоръ, создававшій сервитутъ, неправильно. Сервитуты существовали до нихъ и не они ихъ создали, какъ не сдѣлали этого бибиковскіе официальные инвентари и уставныя грамоты. Все это лишь отшлифовывало ихъ юридическую виѣшность, но по природѣ своей они все-же остаются чѣмъ-то отличнѣмъ отъ договорныхъ сервитутовъ римскаго права<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Это видно изъ Выс. Пол. 4 апр. 1865 г. о правѣ общей толоки.

<sup>2)</sup> Т. Локоть въ статьѣ „Къ вопросу о значеніи сервитутовъ въ земельныхъ отношеніяхъ нашихъ западныхъ окраинъ“ (оттискъ изъ „Научнаго Обзорнія“) на основаніи нѣкоторыхъ особенностей проводитъ различіе между правомъ толоки и другими сервитутами крестьянъ на помѣщичьихъ земляхъ, и приходитъ къ выводу, что толока не есть сервитутъ, прочіе же сервитуты являются обыкновенными сервитутами въ римскомъ значеніи этого термина. Я думаю, что между толокой и другими сел.-хоз сервитутами нѣтъ такого принципиальнаго юридическаго различія. И то, и другое сервитутъ, но и то, и другое не сервитутъ римскаго права.

Это отличие влечет за собой иную постановку вопроса об уничтожении наших сервитутовъ. Уничтожение римско-правового сервитута зависит исключительно от воли отдѣльныхъ лицъ или презюмирующей волю давности. Тамъ оно простое проявление свободного гражданского оборота между отдѣльными индивидуумами. Всякое вмѣшательство государства въ смыслъ принужденія одной или обѣихъ сторонъ къ отмѣнѣ сервитутовъ, противорѣчитъ всему существу ихъ. Что же касается нашихъ сервитутовъ, то, связанные съ извѣстнымъ аграрнымъ строемъ, они живутъ и падаютъ вмѣстѣ съ нимъ. Прежде отмѣна ихъ, даже добровольная, была невозможна безъ существеннаго потрясенія всего хозяйственнаго уклада. Наоборотъ, когда крѣпостныя отношенія исчезли, когда ликвидируется общинная связанность, и на мѣстѣ прежнихъ несвободныхъ хозяйствъ возникаютъ свободныя индивидуальныя хозяйства, многіе изъ сервитутовъ становятся непущимъ тормозомъ, нерѣдко болѣе вреднымъ для обяаннаго, нежели полезнымъ для управомоченнаго. Для государственной власти тогда встаетъ обязанность облегчить ихъ ликвидацію. А такъ какъ достиженіе согласія всѣхъ участниковъ въ большинствѣ случаевъ невозможно, то допустимымъ съ юридической точки зрѣнія и практически необходимымъ является принудительное уничтоженіе сервитутовъ при желаніи извѣстнаго большинства или одной стороны.

Если мы обратимся къ примѣру Западной Европы, то увидимъ, что она давно отмѣнила пастбищныя сервитуты, и лишь нѣкоторые лѣсныя до сихъ поръ остаются въ значительномъ размѣрѣ. При этомъ сервитутныя отношенія между крестьянами и помѣщиками частью были принудительно погашены при отмѣнѣ крѣпостного права, частью разверстаны позже по желанію одной стороны (любой или одной обяанной). Взаимная пастьба крестьянъ на своихъ поляхъ и лугахъ была сперва регулирована и ограничена, а затѣмъ частью вовсе запрещена, частью объявлена отмѣнимой по заявленію нѣсколькихъ участниковъ. Такъ, въ Пруссіи Общее Земское право 1794 года и Эдиктъ о земельной культурѣ 1811 года точно регулировали способы пользованія пастьбой, количество скота, родъ его, время пастьбы. Эдиктъ 1811 года<sup>1)</sup> кромѣ того ввелъ право каждаго хозяина

<sup>1)</sup> Менѣе опредѣленно говорить объ этомъ уже Общее Земское право (Часть I, титулъ 22, § 119).

выдѣлить и освободить отъ общей толоки <sup>1)</sup>; <sub>3</sub> своего поля <sup>4)</sup>. Съ 1821 года уничтоженіе сервитутовъ наравнѣ съ раздѣломъ общихъ земель допущено было по требованію каждаго члена сельскаго общества или помѣщика. Различныя ограничительныя законы о сервитутахъ изданы были и въ другихъ германскихъ государствахъ. Взаимная пастьба на поляхъ и лугахъ нѣкоторыми законами была прямо запрещена (баденскій законъ 1848 г., баварскій 1852 г.), лѣсныя сервитуты были точно регулированы и облегчено ихъ полное разверстаніе.

Что касается вознагражденія, то въ Германіи взаимныя сервитуты отмѣнялись путемъ компенсаціи безъ всякаго вознагражденія. По прусскому закону 1821 года, напр., возмѣщались лишь „особыя“ права какого-либо лица. При уничтоженіи одностороннихъ сервитутовъ требовалось вознагражденіе. По общему правилу оно должно даваться землею, но допущена и уплата деньгами. А раздѣлъ въ натурѣ лѣса, при уничтоженіи лѣсныхъ сервитутовъ, почти совсѣмъ запрещенъ позднѣйшимъ законодательствомъ.

Если мы обратимся къ Россіи и ея законодательству, то увидимъ слѣдующее. По первоначальному законодательству 1861 года разверстаніе сервитутовъ между крестьянами и помѣщиками и раздѣлъ общихъ выгоновъ допущены были по желанію помѣщика. Этимъ путемъ въ Великороссіи, Малороссіи и другихъ районахъ уничтожена была почти всякая связанность владѣнія между земле-владѣльцами и крестьянами. Осталась лишь часть общихъ выгоновъ. Раздѣлъ ихъ допускается по просьбамъ помѣщиковъ, а съ 14 марта 1878 года и по просьбамъ крестьянъ, „коль скоро такое разверстаніе необходимо для лучшаго устройства селенія, въ видахъ предосторожности отъ огня“ (Пол. крест. владѣльч., ст. 4). При этомъ общій выгонъ раздѣляется пополамъ: половина крестьянамъ, другая помѣщику. Но если при раздѣлѣ на ревизскую душу пришлось-бы въ степныхъ губерніяхъ болѣе 320 кв. саж., а въ другихъ мѣстностяхъ — болѣе 200 кв. саж., то крестьянамъ нарѣзается не болѣе этого количества (Ст. 8, пп. 1 и 2).

Въ Юго-и Сѣверо-западномъ краѣ принудительное разверстаніе сервитутовъ и раздѣлъ общихъ выгоновъ по желанію одного помѣщика были прекращены указами 30 іюл. и 1 мар. 1863 г. Правильно

<sup>1)</sup> Edikt zur Beförderung der Land-Cultur vom 14. September 1811, §§ 11—15.

уничтоживъ несправедливую привилегію помѣщика требовать разверстанія, указы не пошли, однако, по пути облегченія его, давъ и крестьянамъ право требовать принудительнаго уничтоженія связанности владѣнія. Наоборотъ, они еще сильнѣе затруднили это, допустивъ раздѣлъ общихъ выгоновъ и отмѣну сервитутовъ лишь по добровольному соглашенію обѣихъ сторонъ. (Пол. крест. влад., ст. 90—93 и 136—141). Благодаря этому фактически разверстанія почти совершенно прекратились. Наказъ землеустроительнымъ комиссиямъ, оставаясь въ предѣлахъ дѣйствующаго законодательства, говоритъ лишь о задачахъ комиссій по облегченію добровольныхъ соглашеній.

Объ отмѣнѣ взаимныхъ крестьянскихъ сервитутовъ нѣтъ никакихъ особыхъ постановленій закона. Дѣйствуютъ, слѣдовательно, общія положенія, т. е. при общинномъ землевладѣніи они могутъ быть отмѣняемы съ согласія  $\frac{2}{3}$  голосовъ, а при подворномъ—съ согласія всѣхъ членовъ сельскаго общества.

Такое состояніе законодательства о сервитутахъ нельзя признать удовлетворяющимъ тѣмъ запросамъ, какіе ставитъ рвущаяся впередъ жизнь.

Разсмотримъ, какія измѣненія надо внести въ законодательство по каждой изъ главныхъ категорій сельско-хозяйственныхъ сервитутовъ.

I. Взаимные пастбищные сервитуты крестьянъ. Отмѣна ихъ, особенно права общей толоки, представляетъ коренную реформу всего склада крестьянскаго хозяйства, которая къ тому же захватитъ районы какъ подворнаго, такъ и общиннаго землевладѣнія<sup>1)</sup>. Важность этой реформы объясняется тѣмъ, что она рѣзко измѣнитъ способы содержанія крестьянскаго скота. При недостаткѣ въ постоянныхъ пастбищахъ паръ, стерня и скошенный лугъ являются важнѣйшими мѣстами пастьбы крестьянскаго скота. На нихъ построено все крестьянское скотоводство. Поэтому, полное закрытіе полей и луговъ для общей пастьбы имѣетъ смыслъ лишь тогда, если есте-

<sup>1)</sup> Уничтоженіе пастбищныхъ сервитутовъ не связано необходимо съ отмѣной общиннаго землевладѣнія. Такъ, при сокращеніи паровой площади толока отмѣняется, а общинное владѣніе можетъ остаться. На югѣ Германіи часть полей и луговъ, какъ сказано выше, находится въ общинной собственности, но общей пастьбы на нихъ нѣтъ.

ственный подножный кормъ будетъ замѣненъ другими кормами, т. е., если крестьяне перейдутъ къ культурѣ кормовыхъ растений. И притомъ, если это сдѣлаетъ хотя-бы большинство хозяевъ, такъ какъ лишь тогда остальные въ силу необходимости сдѣлаютъ то-же. Безъ такого перехода отмѣна общей пастбы могла-бы принести пользу еще при отрубномъ владѣнн, но и тамъ часто получился-бы вредъ. А при черезполосности участковъ, ихъ дробности, разбросанности и отсутствн проѣздовъ къ нимъ, отмѣна общей пастбы сдѣлала-бы только невозможнымъ использование земель въ качествѣ пастбища. лишивъ кормовъ крестьянскій скоть. Изъ этого слѣдуетъ, что уничтоженіе пастбищныхъ крестьянскихъ сервитутовъ имѣетъ смыслъ и возможно лишь при одномъ изъ двухъ условій:

- 1) при устраненн черезполосицы,
- 2) при желанн большинства перейти къ многопольной системѣ хозяйства съ введеніемъ культуры кормовыхъ растений.

При отсутствн обонхъ изъ этихъ условій отмѣна общей пастбы можетъ явиться причиной серьезнаго раззоренія крестьянскаго хозяйства. Это обязываетъ въ данномъ случаѣ къ большой осторожности, не смотря на всю желательность реформы.

Вотъ почему я полагаю, что полная обязательная отмѣна толоки и свободное право каждаго хозяина закрыть свой паръ, стерню и лугъ для чужого скота могутъ быть установлены лишь при разверстанн черезполосицы.

Право пастбы при этомъ, вслѣдствіе своей взаимности, въ главной части можетъ быть погашено путемъ компенсаціи. Но пользование общей пастбой не пропорціонально землевладѣнн, это должно быть приято во вниманіе при ея отмѣнн и разверстанн черезполосицы. Простая компенсація поставила-бы въ трудное положеніе малоземельныхъ и безземельныхъ, такъ какъ для нихъ потеря общей пастбы не была-бы возмѣщена выгодой отъ свободы пользования своей землей. Съ этимъ, напримѣръ, не посчитались въ Германн, и ошибка тяжело легла на бѣднѣйшихъ хозяевъ. Мы не должны повторять той-же ошибки. Малоземельнымъ—и безземельнымъ должно быть дапо особое вознагражденіе за ихъ потери. Частью это можно сдѣлать въ видѣ предоставленія въ ихъ исключительное пользованіе оставшихся общихъ пастбищъ; частью путемъ отрѣзки имъ умногоземельныхъ участковъ земли, соответствующихъ хозяйственной цѣнности потерь отъ отмѣны пастбы на поляхъ и лугахъ.

По какому масштабу вычислять эти отрѣзки—объ этомъ дальше при разборѣ аналогичнаго вопроса для помѣщичьихъ сервитутовъ.

Но разверстаніе черезполосицы вещь трудная и долгая, пройдетъ много лѣтъ, пока оно будетъ выполнено повсемѣстно. А съ пастбищными сервитутами надо бороться теперь-же, такъ какъ при нихъ совершенно невозможенъ переходъ къ интенсивнымъ системамъ земледѣлія. До полнаго разверстанія здѣсь могутъ быть приняты слѣдующія мѣры.

1. Необходимо регулировать способы пользованія общею пастьбой. Эта мѣра должна охватить всѣ виды общей пастьбы: на поляхъ, лугахъ и общихъ пастбищахъ, такъ какъ вездѣ она производится крайне безалаберно. Время пастьбы ограничено лишь естественными условіями, трава не щадится, количество скота не нормировано, для различныхъ породъ не отводятся отдѣльныя площади, и не соблюдается никакого порядка въ пастьбѣ разнаго скота: овцы, свины и гуси пасутся вмѣстѣ съ лошадьми и рогатымъ скотомъ, портя пастбище для послѣднихъ; запрещенія выгонять на общіе выпасы большой скотъ не существуетъ и пр., и пр. Благодаря всему этому общая пастьба даетъ скоту очень жалкій кормъ, а между тѣмъ отнимаетъ очень много другого у крестьянскаго хозяйства. Примѣромъ нормированія общей пастьбы могли-бы послужить постановленія прусскаго Эдикта о земельной культурѣ 1811 года. Многое, конечно, пришлось-бы измѣнить въ нихъ, приспособляясь къ особенностямъ Россіи и ея хозяйственнымъ условіямъ. Нормы нужны лишь самыя общія, детали надо предоставить самимъ обществамъ. Но и общія нормы не могутъ быть одинаковы для всей Россіи, каждый районъ нуждается въ особыхъ постановленіяхъ. Выработку ихъ должны взять на себя землеустроительныя комиссіи и земства.

2. Далѣе, по примѣру Пруссіи и у насъ надо предоставить каждому хозяину право освободить отъ общей пастьбы и отгородить извѣстную часть (напримѣръ,  $\frac{1}{3}$ ) своихъ полей. Такъ какъ земля лежитъ черезполосно во многихъ кускахъ, то рѣшеніе вопроса о томъ, въ какомъ мѣстѣ отвести эту свободную часть, надо предоставить самому обществу. Но она должна отводиться по возможности вблизи селенія и во всѣхъ трехъ поляхъ на краяхъ ихъ, чтобы не нарушать пользованія пастьбой на пару и стернѣ остальной земли. Эта мѣра окажетъ весьма крупное вліяніе на крестьян-

ское земледѣліе. Она дастъ крестьянамъ возможность ввести, а, гдѣ она уже существуетъ, расширить культуру корнеплодовъ, торговыхъ растений и кормовыхъ травъ. Она облегчитъ полную отмѣну пастбищныхъ сервитутовъ и постепенно, не ломая рѣзко обычнаго склада крестьянскаго хозяйства, приведетъ къ правильной плодоперемѣнной системѣ. Могутъ сказать, что такое сокращеніе толоки нарушитъ интересы остальныхъ лицъ, не выдѣлившихъ своей доли. Но это быстро выровняется, такъ какъ выдѣлять одинъ за другимъ всѣ. Нѣсколько пострадаютъ отъ этой мѣры лишь мало-и безземельные. Но и это еще сомнительно. Извѣстно, что помѣщики не любятъ посылать свой скотъ на крестьянскую толоку, боясь эпизоотій, невыгодныхъ скрещиваній, не желая терять части навоза и не придавая большой цѣны выбитому и переполненному скотомъ пастбищу. Послѣ выдѣла свободной доли и многоземельные крестьяне заведутъ на ней культуру кормовыхъ растений и перестанутъ посылать свой скотъ на общую толоку, такъ что пастбище малоземельныхъ врядъ-ли уменьшится. Но быть можетъ надо ввести извѣстное ограниченіе въ пользованіи оставшимися частями толоки для тѣхъ, кто выдѣлилъ свою долю.

3. Накопецъ, полную отмѣну взаимныхъ пастбищныхъ сервитутовъ до разверстанія черезполосицы можно разрѣшить при согласіи  $\frac{2}{3}$  голосовъ на сходѣ, все равно идетъ-ли дѣло объ общинномъ или подворномъ землевладѣніи.

II. Сервитутныя отношенія между крестьянами и помѣщиками. Здѣсь отмѣна очень неравномѣрно затрагиваетъ каждую изъ сторонъ даже при взаимныхъ сервитутахъ, еще сильнѣе сказывается это при связанности односторонней. Для помѣщика сервитуты только тягость, для крестьянина въ большинствѣ случаевъ необходимая поддержка. Вопросъ объ отмѣнѣ, поэтому, въ данномъ случаѣ еще сложнѣе.

За то онъ касается сравнительно ограниченной части территоріи Россіи. Если не считать бывшаго Царства Польскаго и Прибалтійскихъ губерній, то районами распространенія этихъ сервитутовъ являются лишь Юго-западный и Сѣверо-западный край. Къ сожалѣнію, свѣдѣнія о сервитутахъ, хотя и собирались неоднократно различными должностными лицами, очень неточны, часто совершенно противорѣчивы. Полныя данныя можно будетъ получить при всесторонней сельско-хозяйственной переписи или специальномъ

исчерпывающемъ обследованіи. Но для того, чтобы дать хотя приблизительное понятіе о числѣ крестьянскихъ дворовъ, заинтересованныхъ въ этихъ сервитутахъ, и о распространенности отдѣльныхъ видовъ ихъ, я приведу слѣдующую таблицу (№ 1, стр. 129), составленную Д. Рихтеромъ<sup>1)</sup>. Таблица обнимаетъ 98% бывшихъ помѣщичьихъ крестьянъ въ Юго-западномъ краѣ и 93% въ Сѣверо-западномъ. Данныя относятся къ 1889 году, но съ того времени измѣненія невелики, такъ какъ число добровольныхъ разверстаній незначительно.

Другая таблица (№ 2, стр. 130), взятая мною у Н. М. Астырева<sup>2)</sup>, такъ обрисовываетъ роль сервитутовъ въ Юго-западномъ краѣ. Цифры ея, впрочемъ, вызываютъ очень и очень большія сомнѣнія, относятся онѣ къ 1888 году и собраны мировыми посредниками.

Приведенныя данныя, конечно, крайне недостаточны, а цифры второй таблицы кромѣ того не внушаютъ особаго довѣрія. Все же они ясно показываютъ, насколько важенъ вопросъ о сервитутахъ въ этихъ двухъ краяхъ. Ими пользуется свыше  $\frac{1}{2}$  всѣхъ бывшихъ помѣщичьихъ крестьянъ, въ Волынской губерніи даже около  $\frac{3}{4}$  ихъ. Абсолютно въ 1889 году сервитутами пользовалось болѣе 400 тыс. крестьянскихъ дворовъ. По даннымъ мировыхъ посредниковъ въ одномъ Юго-западномъ краѣ такихъ крестьянъ было почти  $2\frac{1}{2}$  мил. душъ. Сервитутная площадь составляетъ отъ 25 до 40% всей надѣльной площади. При этомъ сервитутами пользуются крестьяне бѣднѣе другихъ надѣленные землей, что видно изъ сопоставленія душевого надѣла всѣхъ бывшихъ помѣщичьихъ крестьянъ и тѣхъ, которые пользуются сервитутами. Это дѣлаетъ сервитуты еще болѣе важнымъ подспорьемъ для крестьянской массы.

Но, съ другой стороны, сервитуты вызываютъ непрестанныя жалобы помѣщиковъ на стѣсненіе въ распоряженіи своею землею и на массу побочныхъ ущербовъ въ видѣ потравъ, лѣсныхъ кражъ и

<sup>1)</sup> Статья „Сервитуты въ западныхъ губерніяхъ Е. Россіи“ въ Энцикл. словарь Брокгауза и Ефрона, т. 9, стр. 636. Цифры взяты изъ отчета за 1886 годъ госуд. дворянскаго банка, на обязанности котораго лежало до 1895 года наблюденіе за правильностью поступленія выкупныхъ платежей

<sup>2)</sup> Н. М. Астыревъ. „Одинъ изъ вопросовъ дня: сервитутныя отношенія въ Юго-зап. краѣ“, Сѣв. Вѣстн., 1891, кн. 8, 239—240.



Т а б л и ц а № 1.

Губернии.	Число всѣхъ бывшихъ помѣщичьихъ дворовъ, получившихъ надѣль. (Для с.-з. губ. число выкупныхъ сдѣлокъ).	Число дворовъ, о которыхъ имѣются подробныя свѣдѣнія (въ скобкахъ для с.-з. губ. число выкупныхъ сдѣлокъ).	Изъ нихъ пользуется сервитутами дворовъ (въ скобкахъ проц. отнош. ко всему числу дворовъ, о которыхъ имѣются свѣдѣнія).	Изъ числа пользующихся сервитутами приходится на отдѣльные сервитуты дворовъ:					
				Общій выгонъ (въ скобкахъ десятины на 1 дворъ).	Общая толока.	Покосы и выпасы во владѣльч. лѣсахъ (въ скобкахъ десятины лѣсныхъ выпасовъ на 1 дворъ).	Получение дерева постройки, топлива, тростника и проч. изъ влѣдѣльч. лѣсовъ.	Другіе сервитуты.	Одновременно пользуются нѣсколькими сервитутами.
Кіевская . . . . .	197102	191963	103406 (54%)	62129 (0,2)	47390	3777	9768	14154	31020
Подольская . . . . .	178863	174142	90250 (52%)	55120 (0,2)	44413	2393	9886	13466	26748
Волынская . . . . .	128879	126351	89432 (71%)	20609 (1,2)	70914 *)	22204 *)	4745	15778	33004
Юго-зап. край . . . . .	504844	492456	263083 (57%)	137868 (0,2)	162707	28374	23899	43398	90772
Ковенская . . . . .	2291	20443 (51%)	15141 (3,2)	—	—	9304 (2,2)	32	1432	4582
Вилненская . . . . .	2224	2189 (21%)	23891 (49%)	8306 (1,0)	—	17609 (3,2)	—	876	2950
Минская . . . . .	3041	2894 (28%)	49248 (59%)	27318 (1,2)	—	28949 (2,2)	—	4782	9805
Витебск. (инфлянц. уу.)	452	428 (42%)	8409 (47%)	669	—	7855 (1,2)	52	—	167
Гродненская . . . . .	1654	1612 (16%)	27461 (60%)	20430 (1,2)	—	10162 (13,2)	—	3287	5225
Сѣв.-зап. край . . . . .	9662	(8961) 236576 (239442 (55%))	71854 (1,2) *)	—	—	73879 (3,2) *)	84	10377	22719

\*) Цифры площади общаго выгона для Сѣв.-зап. края относятся къ 63085 дворямъ (82% всего числа).  
 \*\*) О площади общей толоки есть свѣдѣнія для 784 дворовъ въ 2 уѣздахъ Вол. губ. Средняя величина 7,2 дес. на 1 дворъ.  
 \*\*\*) О площади лѣсныхъ покосовъ и выпасовъ есть свѣдѣнія для 2832 дворовъ въ 7 уѣздахъ Волын. губ. Средняя величина площади 12,2 дес. на 1 дворъ.  
 \*) Цифры площади лѣсныхъ пастбищъ относятся къ 23089 дворямъ (32% общаго числа).

Т а б л и ц а № 2.

ГУБЕРНИИ.	Всѣхъ имѣній (данныя за 1885 годъ).	3692	1800	2151	647	991	1819	1400 <sub>0</sub>	1225 <sub>0</sub>	1065 <sub>0</sub>	677	912 <sub>4</sub>	838 <sub>8</sub>	48%	75%	82%	1426 <sub>8</sub>	1216 <sub>8</sub>	1639 <sub>1</sub>	606 <sub>8</sub>	772 <sub>8</sub>	1202 <sub>8</sub>	43%	64%	79%	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%
	Имѣній, обремененныхъ сервитутами.	647	991	1819	1400 <sub>0</sub>	1225 <sub>0</sub>	1065 <sub>0</sub>	677	912 <sub>4</sub>	838 <sub>8</sub>	48%	75%	82%	1426 <sub>8</sub>	1216 <sub>8</sub>	1639 <sub>1</sub>	606 <sub>8</sub>	772 <sub>8</sub>	1202 <sub>8</sub>	43%	64%	79%	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%			
	Всѣхъ крестьянъ бывшихъ помѣщичьихъ тыс. душъ обоого пола.	1400 <sub>0</sub>	1225 <sub>0</sub>	1065 <sub>0</sub>	677	912 <sub>4</sub>	838 <sub>8</sub>	48%	75%	82%	1426 <sub>8</sub>	1216 <sub>8</sub>	1639 <sub>1</sub>	606 <sub>8</sub>	772 <sub>8</sub>	1202 <sub>8</sub>	43%	64%	79%	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%						
	Изъ нихъ пользовалось сервитутами тыс. душъ обоого пола.	677	912 <sub>4</sub>	838 <sub>8</sub>	48%	75%	82%	1426 <sub>8</sub>	1216 <sub>8</sub>	1639 <sub>1</sub>	606 <sub>8</sub>	772 <sub>8</sub>	1202 <sub>8</sub>	43%	64%	79%	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%									
	% отнош. ко всему числу.	48%	75%	82%	1426 <sub>8</sub>	1216 <sub>8</sub>	1639 <sub>1</sub>	606 <sub>8</sub>	772 <sub>8</sub>	1202 <sub>8</sub>	43%	64%	79%	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%												
	Всего надѣльной земли у бывш. помѣщ. крестьянъ тыс. дес.	1426 <sub>8</sub>	1216 <sub>8</sub>	1639 <sub>1</sub>	606 <sub>8</sub>	772 <sub>8</sub>	1202 <sub>8</sub>	43%	64%	79%	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%															
	Надѣльной земли у пользовавшихся сервитутами тыс. дес.	606 <sub>8</sub>	772 <sub>8</sub>	1202 <sub>8</sub>	43%	64%	79%	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%																		
	% отнош. ко всему количеству.	43%	64%	79%	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%																					
	На 1 душу дес. надѣльной земли у всѣхъ бывшихъ помѣщич.	1 <sub>1</sub>	1 <sub>0</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%																								
	То-же у пользовавшихся сервитутами.	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	1 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%																								
Площадь угодій, обремененныхъ сервитутами, тыс. дес.	240 <sub>0</sub>	186 <sub>8</sub>	419 <sub>0</sub>	219 <sub>1</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%																															
На 1 душу сервитутной площади дес.	0 <sub>4</sub>	0 <sub>8</sub>	0 <sub>8</sub>	255%	35%	255%																																		
% отнош. сервитутной площади ко всему надѣлу.	40%	25%	35%	255%	35%	255%																																		

У Н. М. Астырелья выдѣлнеть этотъ участокъ въ виду неправоподобности относящихся къ нему данныхъ.

пр. Последніе служатъ источникомъ вѣчныхъ распрей между помѣщиками и крестьянами, причиной обостренныхъ отношеній и судебныхъ процессовъ. Такіе же споры вызываетъ крайняя неопредѣленность сервитутныхъ правъ. Еще сильнѣе страдаютъ отъ нея крестьяне. Какъ мы увидимъ дальше, пользуясь неопредѣленностью крестьянскихъ правъ, помѣщики постепенно суживаютъ ихъ размѣры, абсолютно ничѣмъ не возмѣщая этого крестьянамъ. Отсюда множество процессовъ и справедливаго негодованія.

Все это издавна наводило высшую мѣстную администрацію на мысль о необходимости такъ или иначе упорядочить сервитутный вопросъ. Начиная почти съ самого освобожденія крестьянъ, рѣдкій генераль-губернаторъ Юго- и Сѣверо-западнаго края не занимался имъ. Но всѣ попытки распутать сервитутное дѣло не привели ни къ какому результату. Неудача въ значительной мѣрѣ объясняется тѣмъ, что все дѣло направлялось генераль-губернаторами и ихъ канцеляріей, а они очень часто мѣнялись<sup>1)</sup>. Какой-либо генераль-губернаторъ подымалъ вопросъ, предписывалъ собрать свѣдѣнія о немъ, опрашивалъ мнѣнія крестьянскихъ присутствій, мировыхъ посредниковъ и пр., составлялъ проектъ закона о сервитутахъ. Но, пока проектъ этотъ шелъ въ министерство и рассматривался тамъ, генераль-губернаторъ смѣнялся. Назначался новый, канцелярія котораго думала иначе. Ходъ стараго проекта обрывался. Все замирало. Сервитуты оставались въ прежнемъ состояніи. Начиналось составленіе новаго проекта и т. д.<sup>2)</sup> Крайне нерѣшительно относилось къ сервитутному вопросу и само министерство. На это, впрочемъ, были у министерства основательныя причины. Его останавливала боязнь какъ-либо рѣзко тронуть крестьянскія или помѣщичьи права, крайняя запутанность вопроса и трудность найти правильный путь для его разрѣшенія. Вѣдь, до сихъ поръ спорятъ еще о томъ: вредны-ли сервитуты, достаточенъ-ли путь доброволь-

<sup>1)</sup> Въ Юго-западномъ краѣ со времени освобожденія крестьянъ въ настоящее время уже 10-ый генераль-губернаторъ.

<sup>2)</sup> Исторія этихъ проектовъ довольно подробно изложена въ работахъ: И. П. Новицкаго, „Сервитуты и обязательное разверстаніе въ Юго-западномъ краѣ“, Кіевъ, 1881; Н. М. Астырева, „Одинъ изъ вопросовъ дня“, Сѣв. Вѣстн., 1891, кн. 8 и 9; Д. О. Кишки, „О разверстаніи угодій и упраздненіи пастбищнаго сервитута въ Юго-западномъ краѣ“, Кіевъ, 1894; Л. С. Личкова, „Сервитутный вопросъ въ Западномъ краѣ“, Рус. Мысль, 1899, кн. 7, 8 и 9.

нихъ разверстаній, цѣлесообразно-ли принудительное разверстаніе, для какихъ сервитутовъ при отмѣнѣ обязательно вознагражденіе, должно оно даваться землей или можно и деньгами, что положить въ основу при вычисленіи вознагражденія и пр.

Эти вопросы разберемъ и мы, чтобы установить руководящія начала для необходимаго законодательства. Здѣсь опять необходимо различать отдѣльные виды сервитутовъ.

Особую группу ихъ составляютъ односторонніе лѣсные сервитуты: право крестьянъ на дерево для построекъ и топлива, право сѣнокоса и пастбы во владѣльческихъ лѣсахъ и др. Всѣ-эти сервитуты очень высоко цѣнятся крестьянами. Съ каждымъ годомъ цѣнность этихъ правъ увеличивается и крестьяне цѣпко держатся за нихъ. Но тѣмъ громче и настойчивѣе жалобы на лѣсные сервитуты владѣльцевъ лѣсовъ. Однако, разобравшись въ этихъ жалобахъ, нельзя не признать, что онѣ крайне преувеличены и чаще всего вызываются не самымъ существомъ сервитутовъ. Обыкновенно говорятъ, что лѣсные сервитуты (особенно право пастбы) препятствуютъ веденію правильнаго лѣсного хозяйства. Но это не совсемъ вѣрно. Необходимо лишь упорядочить пользованіе сервитутомъ и согласовать его съ правильнымъ оборотомъ лѣсной рубки. Когда лѣсное хозяйство ведется вообще безпорядочно, безпорядочно и пользованіе сервитутами. Введеніе правильнаго хозяйственнаго плана, конечно, наталкивается послѣ этого на неурегулированные сервитуты. Получается несоотвѣтствіе между правильнымъ лѣснымъ хозяйствомъ и старою формою сервитутнаго пользованія. Но это несоотвѣтствіе можно устранить, введя правильность и въ это пользованіе. Слѣдовательно, для рациональнаго хозяйства нужна регламентація сервитутовъ, а не отмѣна ихъ. Наоборотъ, при правильномъ пользованіи ими, нѣкоторые лѣсные сервитуты, напримѣръ, право на дерево, скорѣе охраняютъ лѣсъ: хищническая рубка нарушаетъ права владѣльца сервитута, и онъ можетъ запретить ее.

Регламентація лѣсныхъ сервитутовъ должна предприниматься по ходатайству одной изъ сторонъ, такъ какъ неопредѣленность правъ можетъ нарушать интересы каждой изъ нихъ. Она должна состоять въ точной фиксаціи сервитутныхъ правъ, при которой, между прочимъ, могли-бы быть исправлены неправомѣрные фактическія суженія ихъ лѣсовладѣльцами; далѣе, въ установленіи порядка отвода мѣстъ для пастбы, согласованнаго съ требова-

ніями раціональнаго хозяйства, запрещеніи пастьбы на молодых заросляхъ (пересмотръ ст. 805 и др. Лѣснаго устава), закрытіи входа въ лѣсъ вреднымъ породамъ скота (kozy) и пр.<sup>1)</sup> Выполненіе регламентаціи на мѣстахъ можетъ быть поручено землеустроительнымъ комиссіямъ съ привлеченіемъ чиновъ лѣснаго вѣдомства.

Другія жалобы помѣщиковъ касаются не самихъ сервитутовъ, а явленій, сопровождающихъ пользованіе ими. Таковы, на примѣръ, лѣсные пожары отъ пастьбы въ лѣсу, порубки лѣса во время пастьбы и сѣнокоса, порча вѣтвей при собираніи валежника, грибовъ и ягодъ и пр. Здѣсь также можетъ помочь упорядоченіе способовъ пользованія сервитутами и усиленіе надзора за лѣсомъ. Но и эти жалобы не заставляютъ признать лѣсные сервитуты во что-бы то ни стало подлежащими отмѣнѣ.

Вотъ почему я думаю, что отмѣна лѣсныхъ сервитутовъ можетъ быть допущена лишь по добровольному соглашенію помѣщика съ крестьянами. А по желанію одного помѣщика лишь съ соблюденіемъ слѣдующихъ условій:

1. Право на дерево можетъ быть погашено лишь отводомъ такой лѣсной площади, которая при правильномъ хозяйствѣ обезпечить крестьянамъ полученіе прежняго количества дерева. Если бы отходящая по этому расчету лѣсная площадь была такъ мала, что веденіе хозяйства на ней невозможно или невыгодно, отмѣна этого права невозможна. Отведенный крестьянамъ лѣсъ становится собственностью общества; веденіе хозяйства въ немъ должно быть или передано лѣсному вѣдомству или подчинено строгому надзору послѣдняго.

2. Лѣсные сѣнокосы могутъ быть замѣнены лишь другими сѣнокосами такого-же качества.

3. Право пастьбы въ лѣсу можетъ быть погашено только отводомъ другихъ пастбищъ, дающихъ то-же количество корма, какое получаютъ крестьяне въ лѣсу. Денежное вознагражденіе и даже замѣна пастбища пропорціональной площадью другихъ угодій (луга, поля) возможны лишь по добровольному соглашенію. Отмѣна сервитута пастьбы за отводъ части лѣсной площади допустима также не

<sup>1)</sup> Цѣнныя заимствованія въ этомъ дѣлѣ можно сдѣлать изъ Выс. утв. Положенія 31 декабря 1875 года о порядкѣ пользованія лѣсами, обремененными крестьянскими сервитутами, въ губерніяхъ Царства Польскаго.

иначе, какъ по соглашенію, такъ какъ найти какую-либо правильную норму такого вознагражденія нѣтъ возможности. Поясню это примѣромъ: 600 десятинъ лѣса, связаннаго сервитутомъ пастбы. Лѣсооборотъ—60 лѣтъ, и молоднякъ до 12 лѣтъ закрытъ для скота. Пастбищная площадь, слѣдовательно, 480 десятинъ. Скота у крестьянъ, переводя на крупный рогатый, 600 штукъ, у помѣщика—150 штукъ. Слѣд., крестьяне пользуются 384 десятинами пастбища, помѣщикъ—96 десятинами. За пастбу на 384 десятинахъ крестьяне и должны получить вознагражденіе. Оно можетъ быть трояко:

а) крестьянамъ отрѣзается 384 дес., а лѣсъ срубается и поступаетъ помѣщику;—это недопустимо съ точки зрѣнія охраны народнаго лѣснаго хозяйства и интересовъ владѣльца лѣса;

б) крестьянамъ отводится такая площадь лѣса, которая по цѣнности равнялась-бы праву пастбы въ лѣсу. Если десятина лѣса стоитъ 600 рублей, а право пастбы на ней 5 рублей въ годъ, т. е., 100 рублей, то за пастбу на 384 дес. крестьянамъ слѣдовало-бы отвести 64 десятины лѣса;—это не вознаградило-бы ихъ за потерю пастбища въ 384 дес., для скотоводства это было-бы сокращеніе пастбища въ 6 разъ;

в) крестьянамъ отводится 384 дес. лѣса, но за дерево они должны уплатить владѣльцу лѣса; цѣнность дерева въ нашемъ примѣрѣ составляетъ на каждой десятинѣ  $600 - 100 = 500$  рублей; при 384 десятинахъ это составило-бы 192.000 рублей; такихъ денегъ сами крестьяне уплатить не въ состояніи, и въ кредитъ ни у частныхъ лицъ, ни у государства такой суммы они не достанутъ; но и помимо этого, неестественно было-бы отнимать лѣсъ у того, кто имѣетъ на него несравненно большее по цѣнности право, и отдавать имѣющему право менѣе цѣнное.

4. Прочіе мелкіе сервитуты, напримѣръ, собраніе валежника, грибовъ, ягодъ, бортовое право и пр.—вовсе не подлежатъ принудительной отмѣнѣ, такъ какъ найти справедливую форму вознагражденія за нихъ нѣтъ возможности. Можно лишь точнѣе регулировать пользованіе ими: закрытіе молодыхъ зарослей, опредѣленіе времени входа въ лѣсъ и т. п.

Другимъ существеннымъ сервитутомъ, распространеннымъ главнымъ образомъ въ Юго-западномъ краѣ, является право общей толоки, т. е., взаимной пастбы помѣщика и крестьянъ по пару и

стерня другъ друга. Вредъ этого сервитута не чувствуется до тѣхъ поръ пока и помѣщикъ, и крестьяне остаются при трехпольной системѣ, для всякой-же попытки одной стороны перейти къ многополью общая толока является непреодолимымъ препятствіемъ.

Противъ этого возражаетъ И. П. Новицкій, а за нимъ Н. М. Астыревъ и Л. С. Личковъ, ссылаясь на тотъ фактъ, что послѣ отмѣны общей толоки лишь очень немногія хозяйства перешли къ многополью. „Не менѣе девяти десятыхъ разверстанныхъ имѣній, пишетъ И. П. Новицкій, остаются пока при прежнихъ способахъ хозяйства, при томъ-же сѣвооборотѣ, производительность ихъ не увеличилась“...<sup>1)</sup> Н. М. Астыревъ указываетъ, что изъ 1164 имѣній, освобожденныхъ отъ сервитутовъ послѣ 1861 года, къ многополью до середины 80-хъ годовъ перешло только 192, т. е., 16,4%; изъ кошно-обмежеванныхъ въ 1878—80 годахъ 98 имѣній къ концу 80-хъ годовъ оставили трехполье 36, т. е. 37%. Ссылаются и на тотъ фактъ, что въ Великороссіи общей толоки нѣтъ уже съ 60-хъ годовъ, а большинство имѣній сидитъ до сихъ поръ на трехпольи. Что-же доказываютъ эти факты? То, что одной отмѣны толоки еще недостаточно для перехода къ интенсивному земледѣлію. Для этого нужны капиталы, знанія, трудъ, извѣстныя рыночныя конъюнктуры и пр. Но нельзя отрицать, что въ томъ случаѣ, когда на лицо всѣ эти условія, право толоки все-таки не позволяетъ покинуть трехпольную рутину. А между тѣмъ условія эти появляются. Съ каждымъ годомъ переходъ къ многополью становится все болѣе выгоднымъ; часто онъ неизбеженъ. Съ каждымъ годомъ, поэтому, вредъ толоки дѣлается осязательнѣе. Данныя И. П. Новицкаго и Н. М. Астырева относятся къ 80-мъ годамъ; съ тѣхъ поръ прошло 20 лѣтъ и прошло не даромъ. Л. С. Личковъ для доказательства безвредности общей толоки ссылается на предсѣдателя IV сѣзда сельскихъ хозяевъ въ Кіевѣ, проф. Д. И. Пихно, который „отмѣтилъ тотъ фактъ, что Юго-западный край, при наличности яко-бы препятствующихъ хозяйству сервитутовъ, по развитію сельско-хозяйственной культуры уступаетъ только Остзейскому и Привислянскому краю“<sup>2)</sup>. Въ виду этого и Л. С. Личковъ соглашается съ тѣмъ, что пастбищный сервитуть вовсе не является „непреодолимымъ препятствіемъ для

<sup>1)</sup> Указ. соч., стр. 27.

<sup>2)</sup> Рус. Мысль, 1899, кн. 7, стр. 210.

развитія сельско-хозяйственной культуры“. „И въ самомъ дѣлѣ, пишетъ онъ <sup>1)</sup>, если мы обратимся къ имѣющимся цифрамъ, то увидимъ, что по позднѣйшимъ оффиціальнымъ даннымъ изъ 300 неразверстанныхъ имѣній Юго-западнаго края въ 45 (15%) <sup>2)</sup> уже въ 1891 г. существовала многопольная система хозяйства. Отсюда, повидимому, слѣдуетъ, что пастбищныя сервитуты дѣйствительно далеко не всегда составляютъ препятствіе къ введенію многопольнаго хозяйства. А разъ это такъ, то настолько ли необходимо принимать теперъ мѣры къ ихъ уничтоженію, какъ объ этомъ можно думать, судя по жалобамъ землевладѣльцевъ, которые, притомъ добившись разверстанія, въ большинствѣ случаевъ, какъ указывается, даже не думаютъ заводить у себя столь, повидимому, желательное и необходимое для нихъ многополье?!“ Приведенныя свѣдѣнія относятся ко всѣмъ имѣніямъ, связаннымъ сервитутами, неизвѣстно, какая доля ихъ приходится на сервитуты лѣсныя, не влияющіе на измѣненіе полевого сѣвооборота. Но никто изъ знающихъ Юго-западный край не станетъ отрицать того, что многіе помѣщики, не смотря на общую толоку, перешли къ многополью. Только фактъ этотъ доказываетъ не то, что хотятъ въ немъ видѣть приведенные авторы. Какъ могли эти хозяйства перейти къ многополью? Несомнѣнно, на счетъ сервитутныхъ правъ крестьянъ. Это знаетъ самъ Л. С. Личковъ. Въ *фактическомъ* уменьшеніи и даже уничтоженіи крестьянскаго сервитута, по его словамъ <sup>3)</sup>, „можетъ быть и заключается разгадка появленія многополья, если не во многихъ, то въ нѣкоторыхъ, по крайней мѣрѣ, изъ тѣхъ имѣній, которыя, несмотря на неразверстанность, перешли къ многополью? Правда, эти мѣры, можетъ быть, лишили крестьянъ законно предоставленныхъ имъ правъ, отчего крестьяне, можетъ быть, даже разорились, лишившись выпасовъ,—суть. во всякомъ случаѣ, въ томъ, что... подобныя мѣры принимаются, что такіе факты возможны“... Много примѣровъ такихъ захватовъ приводитъ Н. М. Астыревъ <sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Тамъ-же, стр. 211.

<sup>2)</sup> Сноска у автора: „По свѣдѣніямъ мировыхъ посредниковъ, въ Подольской губ., въ 21 изъ 75 обследованныхъ ими неразверстанныхъ имѣній, т. е. въ 24%“.

<sup>3)</sup> Рус. Мысль, 1899, кн. 7, стр. 212.

<sup>4)</sup> Сѣв. Вѣстн., 1891, кн. 8, стр. 246—7.



Благодаря имъ значительная часть толочнаго сервитута уже потеряна, и каждый годъ эта потеря увеличивается. Мѣстные оптимисты говорятъ по этому поводу, что „время само слизываетъ сервитуты“. „Слизываніе“ происходитъ различно: вводится многополье съ уменьшеніемъ паровой площади, воздѣлываются корнеплоды, сокращающіе пастьбу по стернѣ, паръ запахивается весной („на зябь“). наконецъ, поля настолько очищаются отъ сорныхъ травъ, что пастбище на стернѣ сводится къ нулю. Все это крайне цѣлесообразно съ точки зрѣнія сельскаго хозяйства, но все это сокращаетъ крестьянское пастбище. На встрѣчу этому пошелъ и Сенатъ своимъ рѣшеніемъ 22 апрѣля 1881 года (№ 69) по дѣлу м. Кодви съ гр. Ледоховскимъ. Въ немъ Сенатъ призналъ за помѣщикомъ неограниченное право распоряжаться своими полями и устанавливать какой-угодно улучшенный сѣвооборотъ, хотя-бы онъ и сокращалъ размѣры общей толоки. Сенатъ сталъ на чисто формальную точку зрѣнія: сервитутъ даетъ право пастьбы на „свободной“ полевой землѣ, но какая доля земли должна оставаться свободной, объ этомъ нигдѣ ничего не говорится. Матеріально этимъ рѣшеніемъ Сенатъ узаконилъ фактическое уничтоженіе общей толоки. Правда, въ 1886 году состоялось иное рѣшеніе Сената (№ 19), подтвердившее неприкосновенность крестьянскихъ сервитутныхъ правъ. Но до сихъ поръ процессъ сокращенія толоки продолжается, опираясь на указъ Сената 1881 года. Вотъ чѣмъ объясняется фактъ введенія многополья въ неразверстаныхъ имѣніяхъ. Вотъ что позволяетъ говорить, что пастбищный сервитутъ не является препятствіемъ для введенія улучшенной системы хозяйства. Но представьте себѣ, что этотъ сервитутъ возстановленъ въ прежнемъ объемѣ, представьте себѣ по крайней мѣрѣ, что приостановленъ процессъ дальнѣйшаго исчезновенія общей толоки на помѣщичьихъ земляхъ, тогда ясно почувствуете, какъ вліяетъ этотъ сервитутъ на систему хозяйства. А если-бы и помѣщики начали серьезно пользоваться своимъ правомъ пастьбы на крестьянскихъ поляхъ, вредъ его повяли-бы и тѣ крестьяне, которые начинаютъ вводить у себя нѣкоторыя улучшенія хозяйства. Дѣло въ томъ, что мѣстами и крестьяне, несмотря на взаимное право толоки, стали также поднимать паръ весной.

Изъ всего сказаннаго вытекаютъ два вывода.

1. Необходимо принять мѣры къ огражденію сервитутныхъ правъ крестьянъ. Точная фиксація ихъ, урегулированіе способа

пользованія, разъясненіе крестьянамъ ихъ правъ и обязанностей— вотъ эти мѣры. Проведеніе ихъ можно поручить землеустроительнымъ комиссіямъ. На нихъ же можно возложить разборъ возникающихъ при этомъ споровъ. Въ связи съ этимъ крестьянамъ должно быть предоставлено право требовать возстановленія неправомѣрно нарушенныхъ правъ, поскольку ихъ можно доказать. Такія мѣры не явились-бы чѣмъ-то незнакомымъ краю. Онѣ были-бы лишь повтореніемъ по отношенію къ сервитутамъ того, что сдѣлано для всѣхъ крестьянскихъ правъ и повинностей бибиковскіе „инвентари.“ Этимъ путемъ не только была-бы приостановлена дальнѣйшая потеря пастбищныхъ правъ, но и возвращено многое потерянное; вмѣстѣ съ тѣмъ создалась-бы столь необходимая опредѣленность правъ.

Но чѣмъ строже проводились-бы всѣ эти мѣры, тѣмъ сильнѣе чувствовалась-бы тяжесть пастбищнаго сервитута. Приостановивши сельско-хозяйственный прогрессъ въ неразверстанныхъ имѣніяхъ, она отразилась-бы и на крестьянахъ, сокративъ заработки въ помѣщичьихъ экономіяхъ. Наконецъ, нѣкоторые виды сокращенія пастбищнаго сервитута (напр., очистку полей отъ сорныхъ травъ) не уточнили-бы никакія мѣры. Вотъ почему неизбежнымъ является еще и второй выводъ изъ сказаннаго раньше. Онъ слѣдующій:

2. Необходимо возможное облегченіе полной отмѣны пастбищнаго сервитута. Дѣйствующее законодательство знаетъ для этого только одинъ путь—добровольныя соглашенія обѣихъ сторонъ. Но рассчитывать на нихъ не приходится.

Они прежде всего очень рѣдки. По даннымъ Н. М. Астырева въ Юго-западномъ краѣ за 22 года (съ 1863 по 1885 г.) добровольно разверстано было лишь 1122 имѣнія. Сюда входитъ разверстаніе не одной общей толоки, но и лѣсныхъ сервитутовъ и общихъ выгоновъ. На 1 годъ, слѣдовательно, приходится 51 разверстаніе, считая всѣ его виды. Всѣхъ же неразверстанныхъ имѣній въ Юго-западномъ краѣ въ срединѣ 80-хъ годовъ было 3564, а по другимъ даннымъ даже 5457. Значитъ при той-же скорости процесса добровольныхъ разверстаній и предположеніи, что отмѣна общей толоки происходитъ такъ-же часто, какъ и другіе виды разверстаній,—на добровольную отмѣну толоки во всѣхъ имѣніяхъ потребовалось-бы 70, а по вторымъ даннымъ 107 лѣтъ.

Это во-первыхъ. А во-вторыхъ,—и это самое важное—добровольныя разверстанія часто совершаются крайне невыгодно для крестьянъ. По свѣдѣніямъ Н. М. Астырева, въ 561 изъ 1122 добровольныхъ разверстаній, т. е. въ 50%, крестьяне не получили никакого вознагражденія. Въ остальныхъ случаяхъ получены слѣдующія среднія прирѣзки къ надѣлу<sup>1)</sup>:

Кіевская губ.	— 7,2 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	надѣльной площади	
Подольская „	— 4,7 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„	„
Волынская „	— 12,5 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„	„
<hr/>			
весь край	— 10,5 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„	„

Но это прирѣзки за отмѣну всякихъ сервитутовъ въ томъ числѣ лѣсныхъ, и, вѣроятно, за раздѣлъ общихъ пастбищъ. Сколько получено и получено-ли вообще что-либо за упичтоженіе общей толоки—этого сказать нельзя. Кромѣ того приведенныя „абстрактныя“ среднія числа не даютъ отвѣта на то, какъ велика была прирѣзка при отдѣльныхъ разверстаніяхъ. А она вообще крайне неравномѣрна. Гдѣ помѣщикъ сильно нуждается въ отмѣнѣ сервитутовъ, крестьяне срываютъ очень высокое вознагражденіе и землей и деньгами. Были случаи полученія: 205% надѣла, 106%, 105% + 5000 руб. деньгами<sup>2)</sup>. Наоборотъ, гдѣ сила на сторонѣ помѣщика, на примѣръ, крестьяне нуждаются въ деньгахъ, не знаютъ точно своихъ правъ, или видятъ, что все-равно сервитутъ отмѣняется фактически,—условія разверстанія „экономически тягостны“, какъ пишетъ И. П. Новицкій.

Вотъ почему можно скорѣе ставить вопросъ о запрещеніи добровольныхъ разверстаній, нежели возлагать на нихъ всѣ надежды въ рѣшеніи сервитутнаго вопроса. А если такъ, то сама собою вытекаетъ необходимость принудительнаго разверстанія по желанію одной изъ сторонъ.

Рѣшительнымъ противникомъ принудительнаго разверстанія пастбищнаго сервитута является въ мѣстной литературѣ И. П. Новицкій. Онъ говоритъ по этому поводу<sup>3)</sup>: „уничтоженіе толоки при несло-бы пользу помѣщикамъ, давъ имъ возможность отдавать тѣ-

<sup>1)</sup> Сѣв. Вѣстн., 1891, кн. 9, стр. 248.

<sup>2)</sup> Рус. Мысль, 1899, кн. 8, стр. 58.

<sup>3)</sup> Указ. соч., стр. 20.

-же выпасы за платеж или работы, какъ это практикуется и теперь въ разверстаннхъ имѣнїяхъ при трехпольномъ сѣвооборотѣ, безъ введенїя улучшеннаго хозяйства. Выгоды эти возрастаютъ съ поразительной быстротой: въ 1864—65 гг. за пастьбу платилось съ пары воловъ по 50 коп., а теперь за выпасъ пары воловъ крестьяне нѣкоторыхъ имѣнїй выполняютъ работы стоимостью отъ 6 до 10 рублей, т. е., въ 12—20 разъ больше“.

На аналогичные факты указываютъ Н. М. Астыревъ и Л. С. Личковъ. Но заслуживаетъ вниманїя, что обоимъ этимъ авторамъ знанїе ихъ не мѣшаетъ склоняться къ принудительному разверстанїю. И это понятно. Вся суть въ данномъ случаѣ вовсе не въ отмѣнѣ сервитутовъ, и не она принесла вредъ крестьянамъ, а въ томъ, что сервитуты отмѣнены были безъ выдачи крестьянамъ достаточнаго земельного вознагражденїя. Фактъ, приведенный И. П. Новицкимъ, говоритъ лишь о томъ, что при разверстанїи сервитута толоки крестьяне должны получить землю и притомъ въ количествѣ, соотвѣтствующемъ кормовой цѣнности отмѣняемаго права.

Но у И. П. Новицкаго есть еще одно возраженїе противъ принудительнаго разверстанїя—это невозможность установить норму земельного вознагражденїя. Онъ говоритъ <sup>1)</sup>: „строить какїя-нибудь заключенїя о справедливомъ размѣрѣ земельныхъ прирѣзковъ крестьянамъ за отмѣну сервитутовъ на основанїи условїй, состоявшихся добровольныхъ соглашенїй—невозможно. Если-же это такъ, то отсюда прямо слѣдуетъ (?!), что всѣ общїе проэкты разверстанїй, особенно обязательныхъ, если они опредѣляютъ напередъ предѣлы справедливаго вознагражденїя,—стоятъ не болѣе той бумаги, на которой написаны,—если же они такихъ предѣловъ не ставятъ, а предоставляютъ широкїй просторъ произволу, именуемому усмотрѣнїемъ,—то стоимость ихъ вполнѣ отрицательная, ибо ничего другого, кромѣ неисчислимаго вреда, произволь принести не можетъ, даже при добросовѣстности непосредственныхъ исполнителей. А можно-ли у насъ поручиться за послѣднюю,—утверждать не рѣшаемся.“

Такъ-ли, однако, безнадежно дѣло съ установленїемъ нормы справедливаго вознагражденїя? Не думаю. Самъ И. П. Новицкїй на

<sup>1)</sup> Указ. соч., стр. 37.

стр. 30—31 своей брошюры устанавливает известный прием для вычисления вознаграждения за полевой пастбищный сервитут и называет его удовлетворяющим „началам полной справедливости“.

Другой авторъ, Л. С. Личковъ, сторонникъ принудительнаго разверстанія, разбирая различные методы вычисления вознаграждения, наталкивается на иное затрудненіе. По его мнѣнію, для построения правильной нормы не хватаетъ пока статистическихъ данныхъ о сервитутахъ.

Несомнѣнно, что статистическія свѣдѣнія о сервитутахъ должны быть полнѣе, чтобы на нихъ можно было опереться законодательству. Но, думается мнѣ, нѣкоторые самые общіе принципы можно установить уже теперь. Эти общіе принципы предупредятъ тѣ случаи произвола мѣстныхъ исполнительныхъ органовъ, о которыхъ говоритъ И. П. Новицкій. Что же касается деталей, то для нихъ, конечно, нужно собрать подробныя дополнительныя свѣдѣнія.

Устанавливая общіе принципы, надо раньше всего сказать, какимъ вознагражденіе *не* должно быть.

1. Нельзя разверстывать право общей толоки путемъ компенсации безъ всякаго вознагражденія, какъ того домогаются помѣщики, такъ какъ право крестьянъ и помѣщиковъ, равное формально, не равно матеріально, вслѣдствіе неравенства площади крестьянской и помѣщичьей земли подъ толокой. Да и при равенствѣ площади толоки компенсанція не всегда возможна, такъ какъ фактическое пользованіе одной и той же площадью не равно, вслѣдствіе разнаго количества скота у крестьянъ и помѣщиковъ.

2. Вознагражденіе не должно быть денежнымъ. Земельное право должно погашаться прирѣзкой земли.

3. Нельзя устанавливать норму прирѣзки въ какомъ-либо опредѣленномъ % къ надѣльной площади (10, 5% ея и др.), такъ какъ пользованіе помѣщичьей толокой ни въ какой прямой связи съ величиной надѣла не стоитъ. При такой нормѣ многоземельные получили-бы много, не смотря на малую площадь помѣщичьей толоки, и наоборотъ.

4. Неправильно было-бы вознагражденіе въ видѣ отрѣзки опредѣленнаго % сервитутной площади помѣщичьей земли, такъ какъ пользованіе одной и той-же площадью можетъ быть различно.

Если соблюсти эти отрицательныя условія, то можно установить слѣдующую положительную норму: вознагражденіе должно равняться *тому количеству земли, которое, служа въ качествѣ постоянного пастбища, покрыло-бы лишеніе корма, вызываемое отъѣздомъ крестьянской пастбы на помѣщичьихъ поляхъ.* Опредѣляющими моментами, входящими сюда, являются:

- а) размѣры подлежащей общей толокѣ крестьянской и помѣщичьей земли,
- б) время пастбы,
- в) количество скота одной и другой стороны.

Самое вычисленіе вознагражденія поясню на слѣдующемъ произвольномъ примѣрѣ.

Полевой земли, подлежащей общей толокѣ, у крестьянъ 600 дес. и у помѣщика—300 дес.

Система хозяйства трехпольная. Время пастбы на царовомъ полѣ 90 дней, на яровомъ и озимомъ по 60 дней (цифры взяты примѣрно). Тогда размѣры пастбища выразятся въ слѣдующихъ цифрахъ:

На крестьянской землѣ.	На помѣщичьей землѣ.
$200 \times 60 = 12.000$ десятино-дней	$100 \times 60 = 6.000$ десятино-дней
$200 \times 60 = 12.000$ "	$100 \times 60 = 6.000$ "
$200 \times 90 = 18.000$ "	$100 \times 90 = 9.000$ "
Итого = 42.000           "	Итого = 21.000           "

А всего—63.000 десятино-дней.

Количество скота, переводя весь скотъ въ крупный рогатый, у крестьянъ—600 штукъ, у помѣщика—150. Всего 750 штукъ.

На 1 штуку приходится, слѣдовательно,  $\frac{63.000}{750} = 84$  десятино-дня. А на весь крестьянскій скотъ— $84 \times 600 = 50.400$  десятино-дней толоки.

Собственная толока крестьянъ даетъ имъ 42.000 десят.-дней; слѣдовательно, отъѣздомъ помѣщичьей толоки лишитъ ихъ 8.400 десятино-дней пастбища.

Десятина земли служа пастбищемъ въ теченіе всего лѣтнаго періода считая его въ 6 мѣсяцевъ, даетъ 180 десятино-дней. Поэтому расчету 8.400 дес.-дней соотвѣтствуютъ 46,1 десятинамъ постоянного пастбища того-же качества.

Эти 46,1 десятина и должно прирѣзать къ крестьянской землѣ, чтобы покрыть лишение выпасовъ, причиненное уничтоженіемъ общей толоки. Если постоянное пастбище за то-же время даетъ корма больше, нежели стерня и паръ, прирѣзка должна быть соотвѣтственно сокращена.

Цифры вездѣ взяты произвольно или примѣрно, ихъ можно было-бы обозначить буквами. Не дѣлаю этого въ цѣляхъ наглядности.

При вычисленіи величины прирѣзки должно принимать слѣдующія правила.

1. Система хозяйства на помѣщичьей землѣ считается также трехпольной: время вспашки пара и вообще время пастбы то же, что и у крестьянъ. Этимъ возмѣщены будутъ несправедливыя сѣуженія толоки.

2. Если помѣщикъ фактически общей толокой не пользуется, количество его скота принимается равнымъ нулю.

3. Скоть опредѣляется по средней за нѣсколько лѣтъ. Въ Пруссіи въ такихъ случаяхъ берется 10 лѣтъ, у насъ можно брать меньше, такъ какъ при отсутствіи правильныхъ переписей скота трудно установить количество его за столь долгій срокъ. Въ основу расчетовъ надо положить лѣтнее количество скота, потому что оно пасется на толокѣ. Но чужой скоть, принимаемый на выпасъ, долженъ отбрасываться. Необходимо также учитывать ненормальное увеличеніе или уменьшеніе количества скота. Таково, на примѣръ, увеличеніе подъ вліяніемъ близости желѣзной дороги, сахарнаго завода, а уменьшеніе отъ неурожаевъ, эпизоотій и пр.

4. Разныя породы скота приводятся, на основаніи добытаго опытомъ коэффициента, къ крупному рогатому скоту.

5. Когда помѣщичьи поля очень обширны, крестьяне по приведенному расчету должны были-бы получить чрезмѣрныя прирѣзки, несоотвѣтствующія тому пользованію, которое вытекаетъ изъ ихъ сервитутныхъ правъ. Для предупрежденія этого долженъ быть установленъ извѣстный maximum пастбища на каждую штуку скота. При этомъ должна быть принята во вниманіе наличность и обиліе другихъ пастбищъ помимо общей толоки, на примѣръ выпасъ въ помѣщичьихъ лѣсахъ.

6. Прирѣзка переходитъ ко всему обществу и можетъ раздѣляться между отдѣльными членами на тѣхъ-же основаніяхъ, что и другія общія пастбища.

7. Отводимая земля рассчитывается по среднему нормальному пастбищу. Поэтому, если вмѣсто этого отводится площадь болѣе высокаго кормового качества, расположенная вблизи селенія или отличающаяся другими выгодными свойствами, размѣръ ея можетъ быть сокращенъ. Въ обратныхъ случаяхъ онъ соотвѣтственно увеличивается. Но необходимо установленіе предѣла сокращенія или увеличенія. Дальше этого предѣла необходимо согласіе другой стороны.

Вотъ принципы для опредѣленія вознагражденія за принудительное уничтоженіе общей толоки. Всѣ детали должны быть разработаны на основаніи болѣе точныхъ данныхъ о дѣйствительной жизни. Весь процессъ можетъ быть порученъ, какъ и при раздѣлѣ общинныхъ земель, землеустроительнымъ органамъ.

Съ уничтоженіемъ пастбищнаго сервитута наше законодательство связываетъ и раздѣлъ общихъ у крестьянъ съ помѣщиками выгоновъ. Связаны они другъ съ другомъ и въ жизни, хотя юридически это двѣ совершенно различныя вещи. Неясность послѣдняго обстоятельства сказывается въ томъ, что ст. 8 Пол. крест. влад. устанавливаетъ извѣстный *maximum*<sup>1)</sup>, больше котораго крестьяне не могутъ получить при раздѣлѣ общаго выгона. Все сверхъ этого отходитъ помѣщику. То же принято Выс. утв. 29 декабря 1874 года „Правилами объ обязательномъ разверстаніи и обмѣнѣ череполосныхъ земель и о раздѣлѣ общихъ пастбищъ между владѣльцами и крестьянами въ губерніяхъ Царства Польскаго“. По ст. 22 этихъ правилъ, если при раздѣлѣ приходится на штуку крупнаго рогатаго скота болѣе 3 морговъ (1 дес. 1551 кв. саж.) пастбища, крестьянамъ отводится лишь это количество, все остальное идетъ помѣщику. Установленіе такой предѣльной нормы въ данномъ случаѣ совершенно неправильно. Оно необходимо при уничтоженіи сервитута. Тамъ земля чужая и лишь обязана служить пастбищемъ для скота владѣльца сервитута. Послѣдній, поэтому, имѣетъ право лишь на такое количество ея, какое необходимо для пастбы. Здѣсь же земля общая.

<sup>1)</sup> См. выше.



Неправильно также примѣненіе къ случаямъ раздѣла общихъ выгоновъ масштаба ст. 8 Пол. крест. влад., по которой выгоны дѣлятся между крестьянами и помѣщикомъ пополамъ. Здѣсь долженъ быть примѣненъ изложенный выше принципъ раздѣла пропорціо-нально пользованію, т. е., пропорціонально количеству посылаемаго на выгонъ скота. Это тотъ же принципъ, который намѣченъ въ предыдущей главѣ для раздѣла общинныхъ пастбищъ между крестьянами. Его же придерживается прусское законодательство. Овъ же приняты правилами 1874 года для губерній Царства Польскаго. Ст. 19 этихъ правилъ говоритъ, что пастбище дѣлится сообразно размѣрамъ пользованія каждой стороны, т. е. количеству скота по ликвидационнымъ табелямъ, даннымъ и другимъ докумен-тамъ крестьянскихъ учрежденій, а при отсутствіи такихъ свѣдѣній— по дѣйствительному пользованію въ моментъ составленія проекта раздѣла. Но въ послѣднемъ случаѣ, если количество выгоняемаго на пастбище скота той или другой стороны значительно и ненор-мально измѣнилось со времени указа 19 февраля 1864 года, то стороны могутъ требовать разслѣдованія и раздѣла сообразно ко-личеству скота въ моментъ изданія этого указа <sup>1)</sup>. Такъ какъ въ западныхъ губерніяхъ количество скота въ какихъ-либо докумен-тахъ не опредѣлено, то почти всегда придется раздѣлять по „дѣй-ствительному пользованію“. Но количество скота и здѣсь надо брать среднее за нѣсколько лѣтъ и въ случаяхъ рѣзкаго уклоненія отъ средней нормы приводить его къ этой послѣдней.

Главу о сервитутахъ я долженъ закончить еще однимъ замѣ-чаніемъ. Выше уже указана была тѣсная связь сервитутовъ съ су-ществованіемъ черезполосицы. Когда послѣдняя очень сильна, она дѣлаетъ неизбѣжнымъ установленіе общей пастьбы на поляхъ, а отнимая у хозяевъ возможность перейти къ улучшенной системѣ, она лишаетъ смысла отмѣну сервитутовъ. Это особенно справедливо по отношенію къ крестьянскому землевладѣнію, такъ какъ оно глав-нымъ образомъ страдаетъ отъ черезполосицы. Но и у помѣщиковъ съ крестьянами земли лежатъ нерѣдко крайне черезполосно. Владѣнія тѣхъ и другихъ разбиты на много кусковъ и перепутаны между

<sup>1)</sup> Указы 19 февраля 1864 года и 28 октября 1866 года регулировали по-рядокъ пользованія пастбищными сервитутами въ губерніяхъ Царства Польскаго.

собою. Вотъ свѣдѣнія о черезполосицѣ въ 189 сельскихъ обществахъ Кіевской, 69—Волынской и 19—Подольской губерніи, собранныя мировыми посредниками. Свѣдѣнія показываютъ, на сколько кусковъ распадается земля каждаго общества. Этимъ косвенно обрисовывается черезполосность ея съ помѣщицкой землей <sup>1)</sup>).

	Число участковъ.	Участковъ на 1 общество.
19 сел. обществъ Подольской губ.	149	8
189 " " Кіевской "	2716	14,4
69 " " Волынской "	8715	126

Особенно сильна черезполосица на Волыни: земля крестьянъ разбросана въ 126 кускахъ! Каждый участокъ не превышаетъ въ среднемъ 7,1 дес.! Но это еще среднія числа. Какіе отдѣльные случаи раздробленности скрываютъ они, видно изъ слѣдующихъ цифръ для Кіевской губерніи. Изъ 189 обществъ имѣютъ въ составѣ надѣла:

1 кусокъ . . . . .	13 обществъ.
2—5 кусковъ . . . . .	77 "
6—10 " . . . . .	40 "
11—20 " . . . . .	25 "
21—50 " . . . . .	22 "
болѣе 50 " . . . . .	12 "

Вотъ почему одновременно съ уничтоженіемъ сервитутовъ необходимы самыя рѣшительныя мѣры по разверстанію черезполосицы, какъ въ предѣлахъ земель крестьянскихъ обществъ, такъ и между крестьянами и помѣщиками.

Эти мѣры—предметъ слѣдующей главы.

<sup>1)</sup> Данныя заимствую у Н. М. Астырева, Сѣверн. Вѣст. 1891, кн. 8, стр. 243.

## Русское гражданское право.

Если моментъ установленія владѣнія имѣеть значеніе для пріобрѣтенія права собственности способами производными, гдѣ воля заинтересованныхъ лицъ находитъ свое выраженіе въ предшествующемъ передачѣ соглашеніи, то еще большее значеніе принадлежитъ владѣнію въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ право собственности возникаетъ впервые, при первообразныхъ способахъ возникновенія права собственности.

Завладѣніе безхозяйнымъ движимымъ имуществомъ создаетъ для владѣльца право собственности. Дѣйствующій законъ не даетъ развитія этого положенія, которое можетъ быть выведено изъ ст. 534, ч. 1, т. X; зато Проектъ иллюстрируетъ это общее положеніе многими частными примѣрами. „Присвоившій себѣ движимую вещь, никому прежде не принадлежавшую или покинутую собственникомъ съ намѣреніемъ отъ нея отказаться (вещь безхозяйную), пріобрѣтаетъ право собственности на нее“<sup>1)</sup>. Безхозяйными считаются дикія животныя въ состояніи естественной свободы и рыбы въ водѣ. Кто убилъ или поймалъ дикое животное тамъ, гдѣ имѣеть право охотиться, или поймалъ рыбу тамъ, гдѣ имѣеть право рыбной ловли, тотъ пріобрѣтаетъ на свою добычу право собственности; но если кто охотится или занимается рыбной ловлей въ такомъ мѣстѣ, гдѣ на то не имѣеть права, то такой нарушитель чужого права, по Проекту, не пріобрѣтаетъ права собственности на свою добычу<sup>2)</sup>. Впрочемъ, право собственности на пойманное дикое животное теряется, коль скоро животное вырвалось на свободу и скрылось отъ преслѣдо-

<sup>1)</sup> Пр. 852.

<sup>2)</sup> Пр. 851, 856.

ванія собственника <sup>1)</sup>. Пчелиный рой, вылетѣвшій изъ улья, становится безхозяйнымъ, если собственникъ немедленно не приступилъ къ преслѣдованію его или прекратилъ преслѣдованіе; безхозяйныя пчелы становятся собственностью того, кто поймаетъ ихъ и помѣститъ въ свой улей <sup>2)</sup>.

Право собственности на движимую вещь можетъ быть приобрѣтено находкой. „Находкою называется обрѣтеніе вещей и другихъ движимыхъ имуществъ, которыхъ владѣлецъ неизвѣстенъ“ <sup>3)</sup>. Правила о находкѣ могутъ найти свое примѣненіе только къ потеряннымъ вещамъ, но не къ забытымъ, вообще не къ тѣмъ, хозяинъ которыхъ извѣстенъ <sup>4)</sup>. Но находка въ такомъ только случаѣ даетъ нашедшему право собственности, если нашедшій объявитъ о томъ полиціи, и послѣ произведенной трижды публикаціи не явится настоящей хозяинъ съ полнымъ и достовѣрнымъ доказательствомъ о принадлежности ему найденной вещи <sup>5)</sup>. Законъ не говоритъ, по истеченіи какого именно срока можетъ быть приобрѣтено на найденную вещь право собственности <sup>6)</sup>; Проектъ назначаетъ для этого годичный срокъ со времени объявленія <sup>7)</sup>. Если же хозяинъ явится, то нашедшій потерянную вещь получаетъ вознагражденіе въ размѣрѣ третьей части стоимости вещи <sup>8)</sup>, за пригульный же скотъ— только шестую часть <sup>9)</sup>; по Проекту <sup>10)</sup> вознагражденіе опредѣляется въ размѣрѣ десятой части стоимости найденной вещи.

За найденныя старыя монеты и другія древности нашедшій получаетъ всю настоящую цѣну золота, серебра или иного вещества,

<sup>1)</sup> Прим. 1, ст. 539, ч. 1, т. X; Пр. 855.

<sup>2)</sup> Пр. 957, 858.

<sup>3)</sup> Ст. 538, ч. 1, т. X.

<sup>4)</sup> Рѣшенія Гр. К. Д. (1869, № 562, 1335; 1870 № 11, 797, 1083; 1876 № 45; 1886 № 56; 1883 № 83, 1890 № 98) даютъ толкованія, направленные къ ограниченію примѣненія ст. 538, ч. 1, т. X.—*Л. А. Кассо. Незавѣстность хозяина найденной вещи. 1905.*

<sup>5)</sup> Ст. 538, 539, ч. 1, т. X; ст. 792 Общ. Учр. Губ.

<sup>6)</sup> Впрочемъ въ Уставѣ Торговомъ (ст. 545—557) содержится указаніе о приобрѣтеніи права собственности на найденныя при очищеніи рейдовъ вещи по истеченіи года со времени объявленія.

<sup>7)</sup> Пр. 866

<sup>8)</sup> Ст. 539, ч. 1, т. X; въ Черниговской и Полтавской губ. и половину стоимости—ст. 540, ч. 1, т. X.

<sup>9)</sup> Ст. 9 прил. ст. 539 ч. 1, т. X.

<sup>10)</sup> Пр. 865.

изъ коего онѣ сдѣланы <sup>1)</sup>, но права собственности на такія вещи нашедшій не приобрѣтаетъ, какъ не приобрѣтаетъ права собственности и лицо, нашедшее метеоритъ <sup>2)</sup>; за доставленіе метеорита нашедшій имѣетъ право на вознагражденіе.

Къ находкѣ приближается понятіе клада, опредѣляемаго въ законѣ какъ „сокрытое въ землѣ сокровище“ <sup>3)</sup>. Право на кладъ, по общему правилу, принадлежитъ тому, кому принадлежитъ и земля. и слѣдовательно открытіе клада, случайное или намѣренное, не составляетъ способа приобрѣтенія права собственности; только въ губерніяхъ Черниговской и Полтавской случайно найденный на чужой землѣ кладъ въ половинномъ размѣрѣ поступаетъ въ собственность нашедшаго. По Проекту, <sup>4)</sup> кто случайно или съ дозволенія хозяина отыскалъ кладъ приобрѣтаетъ право собственности на одну десятую его часть, напротивъ, отыскивающій кладъ безъ вѣдома и дозволенія собственника недвижимости не имѣетъ права на вознагражденіе. Самое понятіе клада въ Проектѣ опредѣляется шире, чѣмъ въ дѣйствующемъ законѣ: „вещи, зарытыя въ землѣ или задѣланныя въ стѣнѣ и за давностью времени неизвѣстно кому принадлежащія (кладъ), признаются собственностью того лица, кому принадлежитъ земля или строеніе, гдѣ кладъ былъ открытъ“.

Доколѣ плоды не отдѣлены отъ плодоносящей вещи они составляютъ часть послѣдней. О возникновеніи права собственности на плоды рѣчь можетъ быть тогда, когда плоды получаютъ самостоятельное значеніе въ гражданскомъ оборотѣ, когда они отдѣлены отъ плодоносящей вещи. Тогда возникаетъ вопросъ, чьи плоды? Законъ отвѣчаетъ: „по праву полной собственности на имущество владѣльцу принадлежать *всѣ плоды*, доходы, прибыли, приращенія, выгоды и все то, что трудомъ и искусствомъ его произведено въ томъ имуществѣ“ <sup>5)</sup>. Однако, въ силу особаго договора право собственности на плоды можетъ возникать и для несобственника. Проектъ различаетъ въ этомъ случаѣ, владѣеть-ли постороннее лицо

<sup>1)</sup> Ст. 539<sup>1</sup>, ч. 1, т. X.

<sup>2)</sup> На основаніи ст. 410<sup>1</sup> ч. 1, т. X, метеориты составляютъ государственную собственность; по ст. 539<sup>2</sup> лица, нашедшія метеоритъ, обязаны или сами доставить его въ музей, или сообщить о мѣстѣ находженія начальству.

<sup>3)</sup> Ст. 490, ч. 1, т. X.

<sup>4)</sup> Пр. 874—875.

<sup>5)</sup> Ст. 425, ч. 1, т. X.

чужою плодоприносящею вещью, или не владѣть: въ первомъ случаѣ право собственности возникаетъ для управомоченнаго владѣльца въ моментъ отдѣленія плодовъ, во второмъ случаѣ такимъ моментомъ является поступленіе плодовъ въ его распоряженіе <sup>1)</sup>).

По силѣ права полной собственности хозяину животныхъ принадлежитъ право на приплодъ; если самка и самецъ принадлежать разнымъ лицамъ, то приплодъ принадлежитъ хозяину самки; въ случаѣ же спора о животныхъ, находящихся въ чужомъ владѣніи, приплодъ принадлежитъ законному владѣльцу тогда только, когда онъ подастъ жалобу въ теченіе года со дня завладѣнія тѣми животными <sup>2)</sup>).

Владѣніе является основаніемъ пріобрѣтенія права собственности въ случаяхъ соединенія, смѣшенія и переработки <sup>3)</sup>).

Соединеніе движимости съ недвижимостью создаетъ для хозяина недвижимости право собственности на присоединенную движимость; сюда относятся случаи *inaedificatio*, *insatio*, *inplantatio*, которые слѣдуетъ подвести подъ дѣйствіе ст. 425, ч. 1, т. X, гдѣ движимость прочно связывается съ недвижимостью <sup>4)</sup>). Въ этомъ случаѣ, какъ и въ случаѣ приложенія труда къ чужой движимости, въ результатѣ чего получается новая вещь (*specificatio*), рѣчь идетъ объ установленіи вещнаго права; но разрѣшеніе вопроса въ томъ смыслѣ, что чужая движимость пріобрѣтается въ собственность тѣмъ, кому принадлежитъ земля или кто приложилъ къ обработкѣ свой трудъ, не предрѣшаетъ вопроса объ отвѣтственности лица, пріобрѣвшаго такимъ образомъ право собственности, за тотъ убытокъ, который возникъ для хозяина присоединенной или переработанной движимости <sup>5)</sup>).

Если нѣсколько вещей, принадлежащихъ разнымъ лицамъ соединены или смѣшаны между собою такимъ образомъ, что раздѣленіе ихъ невозможно или сопряжено со значительнымъ ихъ поврежденіемъ или несоразмѣрными съ стоимостью вещей расходами,

<sup>1)</sup> Пр. 845.

<sup>2)</sup> Ст. 431, п. 1, ч. 1, т. X.

<sup>3)</sup> Пр. 847—851.

<sup>4)</sup> Пр. 847 „Движимая вещь, присоединенная къ недвижимому имуществу такимъ образомъ, что она вошла въ составъ его, признается собственностью того, кому принадлежитъ это имущество“ ср. и 848.

<sup>5)</sup> Пр. 848, -51; ст. 574, ч. 1, т. X.

то возникающая отъ такого соединенія или смѣшенія новая вещь принадлежитъ всѣмъ собственникамъ вошедшихъ въ ея составъ отдѣльныхъ вещей на правѣ общей собственности въ доляхъ, соразмѣрныхъ съ стоимостью вещи, каждому изъ нихъ принадлежавшей<sup>1)</sup>.

Смѣшиваемыя такимъ образомъ вещи перестаютъ быть предметами индивидуальной собственности. Въ дѣйствующемъ законѣ этотъ случай предусмотрѣнъ относительно подлежащихъ обезличенію предметовъ, отдаваемыхъ на храненіе въ товарные склады<sup>2)</sup>.

Возникшее чрезъ смѣшеніе вещей, принадлежащихъ разнымъ хозяевамъ, вопреки ихъ волѣ, право общей собственности налагаетъ на виновнаго въ такомъ смѣшеніи субъекта отвѣтственность за убытки, понесенные другими собственниками.

Приобрѣтеніе права собственности однимъ лицомъ является способомъ прекращенія этого права для другого лица. Специфическими для движимыхъ имуществъ способами прекращенія права собственности являются односторонній отказъ собственника отъ принадлежащей ему вещи (*derelictio*), гибель вещи и конфискація—усвоеніе движимости казнѣ за нарушеніе специальныхъ узаконеній.

Въ случаѣ нарушенія владѣнія собственника постороннимъ лицомъ, завладѣвшимъ движимою вещью, средствомъ защиты не можетъ быть искъ о возстановленіи нарушеннаго владѣнія<sup>3)</sup>, а является искъ петиторный съ доказательствами со стороны истца своего права на то имущество, которое находится въ обладаніи отвѣтчика. Но искъ о возвращеніи движимаго имущества лишень безусловнаго характера римской виндикаціи. Римскій принципъ *ubi rem meam invenio ibi eam vindico* уступаетъ мѣсто свое въ примѣненіи къ движимостямъ германскому принципу *Hand wahre Hand*. Виндикація движимости не имѣетъ мѣста противъ добросовѣстнаго приобрѣтателя.

Такъ какъ движимыя вещи считаются собственностью того, кто ими владѣетъ, то приобрѣтеніе движимости отъ несобственника, владѣющаго чужою для него вещью, при добросовѣстности приобрѣтателя, создаетъ для послѣдняго право собственности, слѣдовательно прекращаетъ право собственности первоначальнаго собственника,

<sup>1)</sup> Пр. 849.

<sup>2)</sup> Ст. 812--819 Уст. торг.

<sup>3)</sup> Рѣш. Гр. К. Д. 1873 № 782; 1875 № 96.

который поэтому и лишается вещнаго иска о принадлежавшемъ ему имуществѣ. Частный случай примѣненія этого принципа указывается въ Уставѣ Суд. Торг. <sup>1)</sup>: при приведеніи въ извѣстность имущества несостоятельнаго должника можетъ оказаться, что въ обладаніи должника имѣются вещи не принадлежащія должнику, — такія вещи выдаются настоящимъ собственникамъ безостановочно; но можетъ оказаться, что объявленный несостоятельнымъ должникъ, будучи комиссіонеромъ, товары, единственно для отправленія ему ввѣренныя, безъ согласія того, кому они назначены были, продать, или коносаменты ихъ въ другія руки съ полученіемъ за нихъ денегъ передалъ: каковы будутъ послѣдствія этого злоупотребленія довѣріемъ для собственника товаровъ—можетъ-ли онъ виндицировать эти товары отъ пріобрѣтателей? и законъ отвѣчаетъ: „покупатель товаровъ, заплатившій за нихъ деньги, остается въ правѣ своемъ неприкосновеннымъ, развѣ бы доказано было, что онъ участвовалъ въ умыслѣ съ несостоятельнымъ“. Положеніе это является не исключеніемъ изъ общаго правила о томъ, что каждый имѣетъ право отыскивать свое имущество изъ чужого неправильнаго владѣнія судомъ <sup>2)</sup>, а скорѣе иллюстраціей этого положенія на частномъ примѣрѣ: движимость, пріобрѣтенная добросовѣстнымъ третьимъ лицомъ, перешла въ собственность пріобрѣтателя; тѣмъ самымъ прекратилось право собственности первоначальнаго хозяина, который, слѣдовательно, и утратилъ свой вещный искъ, не теряя въ то же время права взыскивать свои убытки съ того лица, во владѣніи котораго вещь находилась и отъ котораго нынѣшній владѣлецъ ту вещь пріобрѣлъ. Этотъ новый, не-римскій принципъ подлежитъ ограниченіямъ: движимыя вещи, пріобрѣтенныя владѣльцемъ отъ такого лица, которое добыло ихъ путемъ преступленія, подлежатъ неограниченной виндикаціи. Это изъятіе можетъ быть иллюстрировано указаніемъ дѣйствующаго закона <sup>3)</sup> на судьбу краденыхъ вещей: „если движимое имущество куплено безъ поручительства, хотя впрочемъ не завѣдомо краденое, но впослѣдствіи оно окажется краденымъ, то покущикъ подвергается лишенію онаго и отобранію въ пользу настоящаго хозяина, а ему предоставляется

<sup>1)</sup> Ст. 476 Уст. суд. торг.

<sup>2)</sup> Ст. 691, ч. 1, т. X.

<sup>3)</sup> Ст. 1512, ч. 1, т. X.



заплаченные деньги искать на продавцѣ“. Приведенное положеніе закона обобщено Сенатомъ въ томъ смыслѣ, что движимое имущество, приобретенное отъ владѣльца онаго, если владѣніе не было основано на преступленіи, не можетъ быть отобрано отъ приобретателя <sup>1)</sup>.

Проектъ уложенія всецѣло становится на точку зрѣнія, ограничивающую въ примѣненіи къ движимости безусловный характеръ виндикаціи, воспринимая изъ дѣйствующаго законодательства положеніе ст. 534, ч. 1, т. X и постановляя далѣе: „право собственности или иное вотчинное право на недвижимую вещь, приобретенное отъ владѣльца, остается въ силѣ, хотя бы впослѣдствіи, по судебному рѣшенію, было признано, что вещь эта владѣльцу не принадлежала; лицо, незаконно распорядившееся вещью, подлежитъ отвѣтственности (за убытки)“ <sup>2)</sup>.

Безповоротность вотчинныхъ правъ на движимыя вещи не наступаетъ: 1) если право приобретено безвозмездно; 2) если приобретатель, во время приобретения права, дѣйствовалъ недобросовѣстно, зная, что вещь не принадлежитъ лицу, отъ котораго право имъ приобретено, и 3) въ отношеніи вещей похищенныхъ или потерянныхъ. Этими положеніями Проекта не измѣняется направленіе судебной практики по вопросу объ ограниченіи виндикаціи.

**Закладъ движимыхъ имуществъ.** Цѣли, достигаемыя залогомъ имуществъ недвижимыхъ, осуществляются посредствомъ *заклада* движимыхъ имуществъ <sup>3)</sup>. Какъ и залогъ недвижимостей, закладъ движимыхъ вещей служить обезпеченіемъ права требованія, главнымъ образомъ заемнаго письма <sup>4)</sup>.

Закладъ движимаго имущества совершается посредствомъ письменнаго акта <sup>5)</sup> и передачи закладываемыхъ вещей во владѣніе залогодавца <sup>6)</sup>. Актъ о закладѣ движимаго имущества, составленный порядкомъ нотаріальнымъ, именуется *закладною* па движимое иму-

<sup>1)</sup> Рѣш. Гр. К. Д. 1880 № 291, 303; 1884 № 6.—Такого-же взгляда держался Сенатъ и относительно виндикаціи растраченныхъ вещей (рѣш. Общ. с. 1887 № 10, 1896 № 31, Гр. К. Д. 1878 № 25); но по рѣш. Общ. с. 23 окт. 1906 г. на растраченныя вещи распространено правило ст. 1512.

<sup>2)</sup> Пр. 751.

<sup>3)</sup> Ст. 1163, 1678, ч. 1 т. X. Прим. 1111—1173.

<sup>4)</sup> Ст. 1670—1674; по ст. 1176, ч. 1, т. X.; Пр. 1111—„обезпеченіе требованій“.

<sup>5)</sup> Ст. 1667, ч. 1, т. X.

<sup>6)</sup> Ст. 1671, ч. 1 т. X.

щество<sup>1)</sup>; актъ о закладѣ движимаго имущества, писанный на дому, называется домовымъ заемнымъ письмомъ съ закладомъ движимаго имущества<sup>2)</sup>. Домовыя заемныя письма съ закладомъ движимаго имущества составляются и являются такъ же, какъ и простыя заемныя письма, наблюдая токмо, чтобы они были удостоверены не менѣе какъ двумя свидѣтелями, и чтобы были написаны по установленной формѣ; къ нимъ должна быть присоединена опись заклада на томъ же основаніи какъ и при закладныхъ на движимое имущество<sup>3)</sup>. Требованіе это настолько строго, что несоблюденіе его можетъ имѣть своимъ послѣдствіемъ упраздненіе закладнаго права: „если домовое заемное письмо съ закладомъ движимаго имущества не явлено, гдѣ и какъ слѣдуетъ, то не токмо при взысканіи удовлетворяется послѣ всѣхъ явленныхъ обязательствъ, но и самый закладъ, при несостоятельности должника идетъ въ конкурсъ въ общее удовлетвореніе заимодавцевъ“.

Относительно субъектовъ закладнаго права законъ повторяетъ общія положенія, что закладывать движимость можетъ только тотъ, которому имущество принадлежитъ въ собственность съ правомъ отчужденія<sup>4)</sup>; принимать въ закладъ движимое имущество можетъ всякій, кто въ правѣ отдавать въ займы деньги;—церкви не могутъ раздавать капиталовъ своихъ подѣ заклады<sup>5)</sup>; кромѣ того, если закладъ сдѣланъ по игрѣ или для игры, то заемъ недействителенъ, а закладъ берется въ казну и изъ цѣны онаго половина отдается доносителямъ<sup>6)</sup>. Передача закладываемой вещи во владѣніе кредитора исключаетъ возможность ипотечной формы заклада движимыхъ имуществъ,—по общему правилу, какъ для закладовъ движимостей частнымъ лицамъ, такъ и для профессиональныхъ закладоприемателей (ссудныхъ кассъ<sup>7)</sup>; но при закладѣ морского судна (бодмерея)<sup>8)</sup> владѣніе къ заимодавцу не переходитъ.

<sup>1)</sup> Ст. 1668, ч. 1, т. X.

<sup>2)</sup> Ст. 1672, ч. 1, т. X.

<sup>3)</sup> Ст. 1673, ч. 1, т. X.

<sup>4)</sup> Ст. 1163, ч. 1, т. X.

<sup>5)</sup> Ст. 1665, ч. 1, т. X.

<sup>6)</sup> Ст. 1666, ч. 1, т. X.

<sup>7)</sup> Прил. ст. 1663 г. ч. 1, т. X. Правила о порядкѣ выдачи ссудъ содержатся ссудныхъ кассъ и о порядкѣ взысканія по такимъ ссудамъ.

<sup>8)</sup> Ст. 434—437 Уст. торг.

Проектъ признаетъ возможнымъ установленіе на одной и той же движимости нѣсколькихъ закладныхъ правъ, сила которыхъ опредѣляется въ такомъ случаѣ старшинствомъ ихъ; старшій залогодержатель получаетъ закладъ въ свое владѣніе <sup>1)</sup>. Это воскрешеніе римской ипотеки на движимыя имущества не можетъ быть одобрено. Установленіе нѣсколькихъ закладныхъ правъ могло бы быть допущено относительно такихъ движимостей, которыя подлежатъ регистраціи, и слѣдовательно, переходъ которыхъ отъ одного лица къ другому сопровождается совершеніемъ соотвѣтствующаго акта; но для движимостей, оборотъ съ которыми не подлежитъ ограниченіямъ и формальностямъ, при дѣйствіи положенія, что движимыя вещи почитаются собственностью того, кто ими владѣетъ, введеніе ипотечной формы заклада представляется нецѣлесообразнымъ.

Осуществленіе закладного права, въ случаѣ неисполненія должникомъ обезпечиваемаго закладомъ требованія, выражается въ продажѣ отданнаго въ закладъ движимаго имущества съ цѣлью извлеченія изъ него его стоимости <sup>2)</sup>; возможна впрочемъ и *lex commissoria*: такъ, относительно заклада акцій и процентныхъ бумагъ постановлено, что должникъ передаетъ акціи и процентныя бумаги заимодавцу при письмѣ, которымъ предоставляетъ заимодавцу въ случаѣ неплатежа въ назначенный срокъ капитала и процентовъ, распорядиться тѣми акціями и бумагами по своему усмотрѣнію, т. е. продать ихъ другому лицу или оставить за собою по существующей на биржѣ цѣнѣ <sup>3)</sup>.

Возможность такого соглашенія относительно всякихъ движимыхъ вещей, отдаваемыхъ въ закладъ, установлена для губерній Черниговской и Полтавской, гдѣ „закладъ движимаго имущества можетъ быть отданъ съ условіемъ потери его въ случаѣ невыкупа въ срокъ (на упадъ), или и безъ сего условія“ <sup>4)</sup>.

Такъ какъ закладываемое имущество переходитъ во владѣніе кредитора, то представляется вполнѣ понятнымъ положеніе закона, воспрещающее передачу закладныхъ документовъ: „закладныя на

<sup>1)</sup> Прим. 1121, 1122.

<sup>2)</sup> Ст. 7, прил. 1663. ч. I т. X.

<sup>3)</sup> Ст. 1674<sup>1</sup>, п. 1, ч. 1, т. X.

<sup>4)</sup> Прим. ст. 1677 ч. 1, т. X., подробно изображаетъ права залогодержателя въ губ. Черниговской и Полтавской.

движимое имущество и домовыя заемныя письма съ закладомъ движимаго имущества не могутъ быть передаваемы по надписямъ<sup>1)</sup>.

Проектъ не допускаетъ соглашенія объ обращеніи невыкупленнаго заклада въ собственность залогодержателя<sup>2)</sup>; только отданныя въ закладъ бумаги залогодержатель можетъ, въ случѣ неудовлетворенія должникомъ главнаго требованія, оставить за собою по цѣнѣ ихъ на мѣстной или ближайшей биржѣ<sup>3)</sup>.

### Авторскія права.

Къ категоріи правъ абсолютныхъ принадлежатъ, кромѣ вещныхъ правъ, права субъекта на произведенія его творческаго духа, на продукты объективированнаго сознанія. Объектомъ такихъ правъ являются не тѣлесныя вещи, а возможность исключительнаго въ своихъ интересахъ пользованія своимъ творчествомъ и его продуктами—блага нематеріальныя.

Осуществленіе такихъ правъ характеризуется признаками исключительности и независимости отъ лица посторонняго; такія права могутъ быть объектомъ владѣнія, пользованія и распоряженія *inter vivos* и *mortis causa*; они подлежатъ наследственному усвоенію хотя и съ ограниченіемъ въ срокѣ. Такой характеръ этихъ правъ даетъ основаніе называть эти права собственностью, хотя и квалифицированной. Дѣйствующій законъ<sup>4)</sup> называетъ эти права собственностью литературной, художественной и музыкальной; закону извѣстно право собственности на фабричныя рисунки и модели<sup>5)</sup>; аналогичны авторской собственности права на открытія и изобрѣтенія<sup>6)</sup>. Проектъ придерживается установившейся въ нашемъ законодательствѣ терминологіи и также различаетъ собственность литературную, художественную и музыкальную, въ зависимости отъ того, къ какой области творчества относится рассматриваемое произведеніе<sup>7)</sup>.

<sup>1)</sup> Ст. 1677, ч. 1, т. X.

<sup>2)</sup> Пр. 1134.

<sup>3)</sup> Пр. 1168.

<sup>4)</sup> Прим. 2 ст. 420 ч. 1, т. X, и приложеніе къ этому прим.

<sup>5)</sup> Ст. 192—209 Уст. о пром.

<sup>6)</sup> Положеніе о привилегіяхъ на новыя изобрѣтенія и открытія 20 мая 1896 года.

<sup>7)</sup> Пр. 1264.

Авторскія права, неизвѣстныя древнему міру, получаютъ признаніе, какъ самостоятельная группа правъ, только въ XIX вѣкѣ. Но потребность въ защитѣ этихъ своеобразныхъ правъ возникла гораздо раньше, съ изобрѣтеніемъ книгопечатанія, и первоначально потребность эта удовлетворялась дарованіемъ автору привилегіи на распространеніе его произведенія; такія привилегіи давались, впрочемъ, и типографамъ. Съ конца XVIII вѣка получаютъ общее признаніе тотъ взглядъ, что авторскія права должны пользоваться не случайною, связанною съ привилегіей, защитою противъ возможныхъ нарушеній, а защитою вытекающею изъ самой сущности этихъ своеобразныхъ правъ. Многочисленныя теоріи, направленные къ выясненію сущности авторскаго права, свидѣтельствуютъ о томъ, что авторское право не укладывается въ рамки освященныхъ романистической доктриной категорій, что мы имѣемъ дѣло съ своеобразнымъ юридическимъ явленіемъ.

Авторское право, будутъ-ли объектомъ его произведенія литературныя, художественныя или музыкальныя, существуетъ для того, кто облакаетъ идею въ соотвѣтствующую роду произведеній форму. Идея не должна непременно принадлежать автору; но форма, въ которую облакается идея, составляетъ исключительное достояніе автора. Кто облакаетъ идею въ форму слова устнаго или письменнаго—тотъ субъектъ права литературной собственности: поэтому законъ признаетъ субъектами авторскаго права не только лицо, проявившее въ произведеніи самобытность творчества („сочинителя“<sup>1)</sup>, но и переводчика<sup>2)</sup>, первыхъ издателей народныхъ пѣсенъ, пословицъ, сказокъ, и повѣстей сохранившихся однимъ изустнымъ преданіемъ, первыхъ издателей древнихъ рукописей<sup>3)</sup>, составителей словарей<sup>4)</sup>, авторовъ частныхъ писемъ<sup>5)</sup>, авторовъ рѣчей, проповѣдей, лекцій,<sup>6)</sup> издателей географическихъ картъ, таблицъ логарифмовъ<sup>7)</sup>.

<sup>1)</sup> Прил. ст. 420—ст. 1.

<sup>2)</sup> Ст. 1, 6, 16, Пр. 274.

<sup>3)</sup> Ст. 2, Пр. 1269.

<sup>4)</sup> Ст. 17; Пр. 1270 говоритъ объ энциклопедическихъ словаряхъ.

<sup>5)</sup> Ст. 9; Пр. 1276.

<sup>6)</sup> Ст. 13—3; Пр. 1275.

<sup>7)</sup> Ст. 17.

Кто облакаетъ идею въ формы изобразительныхъ искусствъ — живописи, скульптуры, архитектуры, гравированія, медальернаго искусства—для того возникаетъ право собственности художественной <sup>1)</sup>. Музыкальная собственность принадлежитъ „сочинителямъ“ <sup>2)</sup> музыкальныхъ произведеній. Упоминается въ законѣ о „драматической собственности“ <sup>3)</sup>, объектомъ которой являются произведенія драматическія, или музыкально-драматическія; это смѣшанный видъ собственности литературной и музыкальной, доступной своеобразному нарушенію въ формѣ воспроизведенія на сценѣ.

Содержаніе авторскаго права сводится къ элементамъ права собственности—исключительному и независимому отъ лица посторонняго владѣнію, пользованію и распоряженію не только непосредственнымъ продуктомъ творчества, но и возможностью эксплуатировать эти продукты, сообразно ихъ свойствамъ.

Субъектъ литературной собственности имѣетъ исключительное право пользоваться во всю жизнь свою изданіемъ и продажей книги по своему усмотрѣнію, какъ имуществомъ благопріобрѣтеннымъ <sup>4)</sup>, лично, или уступивъ право одного изданія постороннему лицу: въ послѣднемъ случаѣ, авторъ можетъ выпустить свое произведеніе новымъ изданіемъ не ранѣе какъ черезъ пять лѣтъ послѣ выхода въ свѣтъ уступленнаго изданія <sup>5)</sup>. Пользованіе изданіемъ заключается не въ одномъ лишь воспроизведеніи, но въ воспроизведеніи и распространеніи литературнаго труда съ цѣлью извлеченія выгодъ.

Авторъ можетъ уступить свое право литературной собственности постороннему лицу, къ которому въ такомъ случаѣ переходитъ совокупность матеріальныхъ правомочій автора въ томъ объемѣ, въ какомъ правомочія эти принадлежали автору. Уступка авторскаго права можетъ быть совершена при жизни автора <sup>6)</sup>, можетъ быть предметомъ завѣщательнаго распоряженія <sup>7)</sup>, можетъ перейти къ наслѣдникамъ автора въ порядкѣ наслѣдованія по закону <sup>8)</sup>.

<sup>1)</sup> Ст. 28; Пр. 1316.

<sup>2)</sup> Ст. 41; Пр. 1302.

<sup>3)</sup> Прим. ст. 1, прил. 420.

<sup>4)</sup> Ст. 1; Пр. 1265.

<sup>5)</sup> Ст. 3; Пр. 1288.

<sup>6)</sup> Ст. 3, 4; Пр. 1265.

<sup>7)</sup> Ст. 6.

<sup>8)</sup> Ст. 1185.

Предметомъ отчужденія и наследственнаго усвоенія является право изданія и продажи произведенія. Но принадлежащія лично автору правомочія и матеріальнаго свойства не подлежатъ отчужденію <sup>1)</sup>, — напр., право драматическаго писателя занимать въ театрѣ мѣсто.

Право субъекта художественной собственности заключается „въ исключительномъ правѣ, ему лишь принадлежащемъ, повторять, издавать и размножать оригинальное свое произведеніе всѣми возможными способами, тому или другому искусству свойственными“ <sup>2)</sup>. Это право можетъ быть предметомъ тѣхъ-же сдѣлокъ, что и право собственности литературной <sup>3)</sup>.

Субъектъ музыкальной собственности осуществляетъ свое право путемъ печатанія и продажи музыкальныхъ произведеній, а также путемъ разрѣшенія публичнаго ихъ исполненія <sup>4)</sup>.

Авторскія права, какъ и право собственности на имущество, могутъ возникнуть двоякимъ способомъ—первообразно и производно.

Первообразно возникаетъ авторское право для того, кто впервые облакаетъ идею въ соотвѣтствующую форму—словесную, художественную, музыкальную. Оригинальностью должна отличаться форма, а не идея; идеи составляютъ общее достояніе, и каждый можетъ пользоваться идеями для своего произведенія, не справляясь объ ихъ происхожденіи; но субъективное пониманіе идеи и истолкованіе ея въ той или иной формѣ составляетъ проявленіе личности автора, которое и ограждается закономъ противъ всѣхъ возможныхъ нарушеній его со стороны неуправомоченныхъ субъектовъ. При творчествѣ единоличномъ возникаетъ авторское право для лица, сообщающаго оригинальную форму извѣстной идеѣ. Возможны случаи, когда предметъ авторскаго права является продуктомъ совмѣстнаго творчества нѣсколькихъ лицъ. Здѣсь слѣдуетъ различать произведенія, которыя могутъ быть разложены на составныя части, такъ что каждая часть имѣетъ отдѣльнаго автора,— и произведенія, такъ сказать, нераздѣльныя, гдѣ опредѣлить размѣры участія каждаго изъ нѣсколькихъ авторовъ не представляется возможнымъ. Относительно литературныхъ произведеній перваго рода дѣйствуетъ пра-

<sup>1)</sup> Рѣш. Гр. К. Д. 1870 г. № 798.

<sup>2)</sup> Ст. 28; Пр. 1316.

<sup>3)</sup> Ст. 30.

<sup>4)</sup> Ст. 41, 43; Пр. 1308, 1312.

вило, что „издатели журналовъ и другихъ періодическихъ сочиненій, а равно и альманаховъ и вообще книгъ, составляемыхъ изъ разныхъ мелкихъ сочиненій или статей, пользуются исключительнымъ правомъ перепечатывать оныя въ той же формѣ“<sup>1)</sup>; но въ то-же время „помѣщеніемъ сочиненія или перевода въ журналъ или иномъ собраніи, сочинитель и переводчикъ не лишаются права печатать оныя особо, если только сему не препятствуютъ условія ихъ съ издателемъ“<sup>2)</sup>. Иначе обстоитъ дѣло съ авторскимъ правомъ на произведенія нераздѣльнаго совмѣстнаго творчества; дѣйствующимъ закономъ случай этотъ положительно не предусмотрѣнъ, но долженъ быть разрѣшенъ въ томъ-же направленіи, въ какомъ рѣшаетъ его Проектъ: „авторское право на литературное произведеніе, составленное совокупно нѣсколькими лицами и образующее одно нераздѣльное цѣлое, принадлежитъ всѣмъ авторамъ на правѣ общей собственности“.

Если положительно субъектъ авторскаго права можетъ быть опредѣленъ, какъ лицо облакающее идею въ соотвѣтствующую форму, то отрицательно субъектъ этого права опредѣляется указаніемъ на тѣхъ лицъ, которыя принимаютъ участіе въ возникновеніи произведенія, но не являются его авторами. Такъ, не есть субъектъ авторскаго права тотъ, кто дѣйствуетъ въ качествѣ помощника (секретаря); равнымъ образомъ не есть субъектъ авторскаго права—заказчикъ литературнаго произведенія. Но относительно художественныхъ произведеній дѣйствуютъ слѣдующія правила: „художественныя произведенія, купленныя правительствомъ или исполненныя по его заказу, для храмовъ Божіихъ, Императорскихъ дворцовъ, музеевъ и вообще казенныхъ мѣстъ, почитаются уже полнымъ достояніемъ тѣхъ вѣдомствъ, и могутъ быть копируемы безъ согласія художника“<sup>3)</sup>,—слѣдовательно, въ этомъ случаѣ авторское право художника прекращается и произведеніе его становится, такъ сказать, предметомъ общаго пользованія—res communis omnium; но заказъ художественнаго произведенія можетъ имѣть своимъ послѣдствіемъ возникновеніе авторскаго права не для художника, а для заказчика: „равномѣрно художникъ не имѣетъ

<sup>1)</sup> Ст. 7; Пр. 1270.

<sup>2)</sup> Ст. 8.

<sup>3)</sup> Ст. 31; Пр. 1319.



права собственности и на работы, произведенныя имъ по заказу частныхъ лицъ, если не выговорилъ себѣ онаго особымъ условіемъ; право сіе, по уплатѣ за работу, принадлежитъ уже тѣмъ лицамъ и наслѣдникамъ ихъ, отъ которыхъ былъ сдѣланъ заказъ: такимъ образомъ, портреты и семейныя картины художникъ не иначе можетъ повторять, размножать и издавать, какъ съ согласія заказавшаго, или его наслѣдниковъ“<sup>1)</sup>).

Первообразное возникновеніе авторскаго права подлежитъ регистраціи, о чемъ законъ говоритъ подробно лишь въ примѣненіи къ художественной собственности: „въ отвращеніе подлоговъ и процессовъ художникъ-авторъ *обязанъ*: 1) предъявить и записать произведеніе свое у нотариуса, съ подробнымъ описаніемъ сюжета и взять надлежащую выписку за скрѣпою, въ доказательство, что право художественной собственности на предъявленное произведеніе принадлежитъ ему; 2) извѣстить о семъ Императорскую Академію Художествъ, съ приложеніемъ засвидѣтельствованной копіи упомянутой выписки. По полученіи сего извѣщенія Академія публикуетъ о томъ въ вѣдомостяхъ на счетъ просителя, послѣ чего право художественной собственности на огражденное сими формами произведеніе утверждается за художникомъ положительно“<sup>2)</sup>. Проектъ<sup>3)</sup> эту обязанность художника, по дѣйствующему закону, обращаетъ лишь въ его право: „художникъ, въ удостовѣреніе принадлежащаго ему права художественной собственности, можетъ....“.

Время и фактъ возникновенія литературной собственности опредѣляется временемъ выдачи изъ цензуры позволительнаго на выпускъ книги билета<sup>4)</sup>.

Производными способами пріобрѣтается авторское право для того, кто, не будучи авторомъ даннаго произведенія, намѣренъ осуществлять правомочія автора. Авторское право въ порядкѣ сингулярнаго преемства можетъ перейти на одно только изданіе, или же переходить въ полномъ объемѣ; въ первомъ случаѣ авторъ лишается себя права издавать уступленное сочиненіе до истеченія пяти лѣтъ<sup>5)</sup> (по Проекту и до того времени пока не разоидетъ уступ-

<sup>1)</sup> Ст. 32; Пр. 1318.

<sup>2)</sup> Ст. 29.

<sup>3)</sup> Пр. 1324.

<sup>4)</sup> Ст. 3.

<sup>5)</sup> Ст. 3; Пр. 1288.

ленное изданіе)<sup>1)</sup>— что однако не лишаетъ автора права напечатать книгу свою вторымъ изданіемъ, подъ условіемъ измѣненія въ ней по крайней мѣрѣ двухъ третей<sup>2)</sup>.

Уступка авторскаго права постороннему лицу должна быть облечена въ письменную форму: „условія, заключаемая между сочинителями, переводчиками или издателями и типографщиками или книгопродавцами, совершаются съ соблюденіемъ правилъ Положенія о потаріальной части“<sup>3)</sup>. Въ порядкѣ универсальнаго предмета авторское право переходитъ къ наслѣдникамъ по завѣщанію или по закону, и продолжается для нихъ въ теченіе пятидесяти лѣтъ съ момента смерти автора<sup>4)</sup>; впрочемъ, если произведенія издаются „обществами“, то для нихъ авторское право прекращается по истеченіи пятидесяти лѣтъ не со дня смерти автора, а со дня выхода въ свѣтъ произведенія<sup>5)</sup>.

Авторскія права прекращаются; 1) истеченіемъ пятидесятилѣтняго срока со дня смерти автора. По выраженію закона<sup>6)</sup>, въ такомъ случаѣ произведенія становятся собственностью публики. 2) Закономъ не упоминается возможность отреченія автора отъ принадлежащаго ему авторскаго права—*derelictio*. Примѣръ такого способа прекращенія авторскаго права далъ гр. Л. Н. Толстой, заявивъ, что онъ отказывается отъ авторскаго права на свои сочиненія начиная съ XIV тома; но въ такомъ случаѣ „безхозяйное“ авторское право не становится собственностью первого, кто воспользуется изданіемъ сочиненія, а составляетъ „собственность публики“, предметъ общаго пользованія. 3) Напечатаніе книги противъ правилъ цензурнаго устава влечетъ за собою прекращеніе авторскаго права<sup>7)</sup>. Это способы объективныя; авторское право прекращается на данное произведеніе, ни для кого уже не возникая. Но авторское право можетъ прекратиться и субъективно—для даннаго лица—4) чрезъ уступку этого права лицу постороннему, на которое и переходитъ возможность осуществленія авторскихъ правъ.

<sup>1)</sup> Пр. 1288.

<sup>2)</sup> Ст. 5; пр. 1290.

<sup>3)</sup> Ст. 4; Рѣш. Гр. К. Д. 1839 № 178.

<sup>4)</sup> Ст. 6; ст. 1185, ч. 1, т. X.

<sup>5)</sup> Ст. 22, 23.

<sup>6)</sup> Ст. 11, 24.

<sup>7)</sup> Ст. 21.

Признаніе авторскаго права своеобразнымъ частнымъ правомъ обезпечиваетъ субъекту этого права, возникло ли оно для него первообразно или производно, судебную защиту противъ всякаго нарушенія. Нарушенія авторскаго права различны въ зависимости отъ различія объектовъ права.

Право литературной собственности можетъ быть нарушено въ двоякомъ направленіи—неправомѣрнымъ распространеніемъ произведенія въ полномъ его видѣ и заимствованіемъ части произведенія также въ цѣляхъ его распространенія. Первый видъ нарушенія авторскаго права носитъ названіе *контрафакціи*<sup>1)</sup>; второй видъ—въ примѣненіи къ ходожественной собственности—именуется *плагиатомъ*<sup>2)</sup>. Впрочемъ, употребленіе этой терминологіи въ законѣ строго не выдержано.

Перепечатка есть распространеніе чужого произведенія посредствомъ предназначенныхъ для размноженія механическихъ способовъ. Но для понятія незаконмѣрной перепечатки не достаточно одного лишь механическаго воспроизведенія чужого литературнаго произведенія, а нужно еще, чтобы воспроизведенное такимъ способомъ произведеніе словесности обращено было къ распространенію. Законъ устанавливаетъ границы, опредѣляющія понятіе самовольнаго изданія: „самовольнымъ изданіемъ (контрафакціею) почитается, если 1) кто подъ названіемъ второго или третьяго и т. д. изданія печатаетъ книгу, уже напечатанную, не исполнивъ условій, означенныхъ въ ст. 3 и 5 сего приложенія (ст. 3 о договорѣ между авторомъ и издателемъ; ст. 5—о передѣлкахъ въ ранѣе изданномъ сочиненіи); 2) кто перепечатавъ въ чужихъ краяхъ книгу, изданную въ Россіи, или съ одобренія цензуры Россійской, хотя бы и съ переводомъ на другой языкъ, будетъ продавать напечатанные такимъ образомъ экземпляры въ Россіи, не имѣя письменнаго на то позволенія законнаго издателя; 3) кто безъ согласія сочинителя напечатаетъ произнесенную или читанную имъ публично рѣчь, или иное сочиненіе; 4) журналистъ, подъ видомъ рецензіи, или-же подъ другимъ предлогомъ, перепечатывающій постоянно и вопліѣ мелкія изъ чужихъ изданій статьи, хотя бы оныя занимали и менѣе одного

<sup>1)</sup> Ст. 13, 20.

<sup>2)</sup> Ст. 38, 39.

печатнаго листа; но случайное перепечатаніе въ какомъ либо изданіи мелкой статьи, не занимающей болѣе одного печатнаго листа, а равно и перепечатаніе извѣстій политическихъ, или относящихся къ словесности, наукамъ и художествамъ, съ указаніемъ источника, откуда оныя заимствованы, не воспрещается. При опредѣленіи, какъ велика помѣщенная въ журналѣ или какомъ либо иномъ собраніи статья, принимается въ основаніе послѣднее изданіе книги, изъ коей взята статья<sup>1)</sup>).

Упоминаемая въ законѣ мѣра заимствованія—„болѣе печатнаго листа“—не принимается въ соображеніе при изданіи учебныхъ книгъ: „помѣщеніе въ хрестоматіяхъ и другихъ учебныхъ книгахъ какихъ либо статей, или отрывковъ изъ другихъ сочиненій не почитается самовольнымъ изданіемъ, хотя-бы такое заимствованіе въ сложности разныхъ мѣстъ книги составляло и болѣе одного печатнаго листа“<sup>2)</sup>). Понятіе самовольнаго изданія (контрафакціи) сливается съ понятіемъ противозаконнаго заимствованія (плагиатъ); литературное значеніе плагиата—заимствованіе чужихъ мыслей и выдаваніе ихъ за свои—не совпадаетъ съ плагиатомъ въ юридическомъ смыслѣ. Переводъ чужого произведенія на другой языкъ не составляетъ дѣйствія неправомѣрнаго; литературныя приличія могутъ заставить переводчика обратиться къ автору за разрѣшеніемъ сдѣлать переводъ его сочиненія; но отсутствіе такого разрѣшенія, съ точки зрѣнія юридической, не создаетъ для автора права преслѣдовать переводчика, который и самъ пріобрѣтаетъ на свой переводъ авторское право. Существованіе одного перевода не исключаетъ юридической возможности издать новый переводъ; новый переводчикъ не считается нарушителемъ правъ перваго переводчика, если не будетъ доказано, что въ новомъ переводѣ двѣ трети сряду выписано слово въ слово изъ прежнихъ переводовъ<sup>3)</sup>). Относительно словарей, географическихъ картъ, историческихъ таблицъ, логарифмовъ, указателей, дѣйствуетъ подобное же правило: самовольнымъ считается изданіе такихъ произведеній въ томъ случаѣ, если большая часть опредѣленій, толкованій, означеній въ новомъ изданіи заимствована изъ ранѣе вышедшихъ въ свѣтъ.

<sup>1)</sup> Ст. 13.

<sup>2)</sup> Ст. 14.

<sup>3)</sup> Ст. 16; Пр. 1274.

Послѣдствія нарушенія литературной собственности двоякаго рода—уголовныя <sup>1)</sup> и гражданскія: „взысканіе за самовольное изданіе (контрафакція) состоитъ: во первыхъ, въ возвращеніи отъ виновнаго законному издателю всего того *убытка*, который исчисляется по соображенію дѣйствительной платы за все изготовленіе экземпляровъ самовольнаго изданія, съ продажною цѣною отъ законнаго издателя прежде (т. е. при собственномъ изданіи того-же произведенія) объявленною; во вторыхъ, въ отобраніи наличныхъ самовольнаго изданія экземпляровъ, которые и обращаются въ пользу законнаго издателя“ <sup>2)</sup>. Проектъ присоединяетъ къ этимъ послѣдствіямъ еще уничтоженіе тѣхъ орудій, коими произведено нарушеніе авторскаго права (стереотипы, клише).

Возможность нарушенія права художественной собственности поставлена по закону въ болѣе тѣсныя границы, чѣмъ возможность нарушенія собственности литературной, благодаря требованію закона о регистраціи художественныхъ произведеній. Нарушеніе права художественной собственности выражается въ противозаконномъ копированіи <sup>3)</sup> и противозаконномъ заимствованіи (плагіатъ) <sup>4)</sup>. Противозаконнымъ признается не всякое копированіе въ общепринятомъ значеніи этого слова, а лишь такое повтореніе оригинала, въ результатѣ котораго получается произведеніе подобное копируемому: поэтому не считается контрафакціей такая дѣятельность, въ результатѣ которой получается произведеніе, дающее понятіе о копируемомъ, но не подобное ему; такъ, не считается контрафакціей заимствованіе изъ художественныхъ произведеній фигуръ и орнаментовъ на модели для мануфактурныхъ и ремесленныхъ произведеній, какъ не считается контрафакціей и то, когда какое либо произведеніе живописи съ ея отраслями изображается посредствомъ скульптуры и наоборотъ <sup>5)</sup>.

Противозаконнымъ заимствованіемъ изъ чужого произведенія считается: 1) по живописи—выборъ изъ произведенія, безъ согласія

<sup>1)</sup> Ст. 1683—1685, Улож. о нак. изд. 1885; ст. 620—622 Угол. уложеніе 1903 г.

<sup>2)</sup> Ст. 13.

<sup>3)</sup> Ст. 36, 37.

<sup>4)</sup> Ст. 38.

<sup>5)</sup> Ст. 36, 39.

художника или того, кому передалъ онъ право художественной собственности, группъ, фигуръ, головъ, а также околичностей перспективы, пейзажа или морского вида и проч., и помѣщеніе ихъ другимъ художникомъ въ своемъ произведеніи, съ соблюденіемъ того же рисунка и освѣщенія, какое имѣютъ они въ оригинальномъ художника-автора произведеніи, а также срисованіе подобнымъ образомъ и изданіе оныхъ вмѣстѣ съ другими предметами, въ составъ образцовыхъ рисунковъ входящими, издаваемыхъ художникомъ не авторомъ; 2) по ваянію — такой-же выборъ группъ, фигуръ, головъ и орнаментовъ и помѣщеніе оныхъ въ произведеніи другимъ художникомъ-скульпторомъ, не авторомъ прежнихъ, исполняемомъ <sup>1)</sup>. Существеннымъ признакомъ противозаконности копирования и заимствованія является совершеніе соответствующихъ дѣйствій—для денежныхъ выгодъ, безъ формальнаго согласія субъекта художественной собственности <sup>2)</sup>.

Кромѣ живописи съ ея отраслями и ваянія защитою пользуются зодчество и фотографія. Относительно зодчества законъ гласитъ, что возбраняется построеніе общественнаго или частнаго зданія по чужому плану и фасаду, а также снятіе копій съ чужихъ проектовъ и изданіе оныхъ въ гравюрахъ, литографіи и т. п. способами; снимать-же фасады, планы и самыя подробности съ зданій, уже выстроенныхъ, не возбраняется и контрафакціей не почитается <sup>3)</sup>. Относительно фотографированія законъ упоминаетъ вскользь въ ст. 1185 ч. 1, т. X; и кромѣ того говоритъ о дагеротипахъ въ ст. 37 прил. 420, ч. 1, т. X; подробнѣе останавливается на этомъ вопросѣ Проектъ, ограждающій право фотографа на воспроизведеніе его снимка въ теченіе пяти лѣтъ <sup>4)</sup>.

Законъ въ прилож. къ ст. 420 не останавливается на вопросѣ о томъ, каковы будутъ послѣдствія нарушенія художественной собственности; но въ Уложеніи о наказаніяхъ <sup>5)</sup> послѣдствіемъ нарушенія авторскаго права указывается и вознагражденіе художника за всѣ причиненные ему ущербъ и убытокъ.

<sup>1)</sup> Ст. 38.

<sup>2)</sup> Ст. 36.

<sup>3)</sup> Ст. 37, п. 4.

<sup>4)</sup> Пр. 1326.

<sup>5)</sup> Ст. 1683 Уст. нак.

Музыкальная собственность ограждается противъ возможныхъ нарушеній въ троякомъ направленіи: никто посторонній не долженъ издавать музыкальное сочиненіе даннаго композитора, безъ его на то разрѣшенія, въ полномъ видѣ; не долженъ издавать переложеній чужого произведенія на другіе инструменты или съ полнаго оркестра на одинъ какой либо инструментъ, въ извлеченіи или съ измѣненіемъ аккомпанимента; не долженъ исполнять произведенія публично. Запрещеніе публичнаго исполненія чужихъ музыкальныхъ произведеній поставлено въ законѣ въ зависимость отъ того, къ какому роду музыкальныхъ произведеній относится данное, и отъ того, издано ли оно въ свѣтъ композиторомъ или еще не издано. Неизданныя авторомъ произведенія вообще не могутъ быть публично исполняемы постороннимъ лицомъ безъ согласія субъекта музыкальной собственности; равнымъ образомъ, безъ разрѣшенія автора не могутъ быть исполняемы изданныя уже оперы и ораторіи; прочія же изданныя музыкальныя пьесы не подлежатъ публичному исполненію только въ томъ случаѣ, если на печатныхъ экземплярахъ помѣщено объявленіе о томъ, что авторъ не дозволяетъ публичнаго исполненія даннаго произведенія безъ своего на то разрѣшенія <sup>1)</sup>).

Самовольное изданіе чужого музыкальнаго произведенія влечетъ за собою тѣ-же послѣдствія что и нарушеніе права литературной собственности, а также уничтоженіе досокъ и камней, служившихъ для гравированія или литографированія нотъ; за недозволенное публичное исполненіе музыкальнаго произведенія виновные подвергаются взысканію двойного валового сбора, полученнаго за представленіе въ коемъ пьеса была играна <sup>2)</sup>).

Подсудность исковъ объ авторскомъ правѣ опредѣляется ст. 217 Устава гражд. суд. Сенатъ <sup>3)</sup> толкуетъ эту статью какъ законъ, опредѣляющій объективную подсудность этихъ дѣлъ общимъ судебнымъ установленіямъ; но къ такому толкованію текстъ закона не даетъ основаній, такъ какъ искъ объ авторскомъ правѣ не подходитъ подъ изъятія, указанныя въ ст. 31 Уст. гр. суд., а ст. 217

<sup>1)</sup> Ст. 42, 43.

<sup>2)</sup> Ст. 45.

<sup>3)</sup> Рѣш. Гр. К. Д. 1888 г. № 22.

Уст. гр. суд. опредѣляетъ подсудность мѣстную, а не по роду дѣла. Въ Проектѣ новой ред. уст. гр. суд. дѣла о нарушеніи авторскаго права отнесены къ числу дѣлъ спеціально подвѣдомственныхъ общимъ судебнымъ мѣстамъ<sup>1)</sup>.

### *Права изобрѣтателя.*

Аналогію авторскимъ правамъ составляютъ права на открытія и изобрѣтенія. Но тогда какъ въ авторскихъ правахъ охраняется оригинальная форма, въ какую, сообразно роду произведеній, можетъ быть облечена и не оригинальная идея, въ правахъ на открытія и изобрѣтенія охраняется именно оригинальная идея о новой комбинаціи силъ природы.

Права этого рода составляютъ продуктъ позднѣйшаго развитія права. Среднимъ вѣкамъ, не говоря уже о древнемъ мірѣ, права на изобрѣтенія и открытія не извѣстны.

Въ настоящее время у всѣхъ культурныхъ народовъ признаются права изобрѣтателя, охраняемыя правительственными привилегіями (патентами). У насъ дѣйствуетъ въ настоящее время Положеніе о привилегіяхъ, изданное 20 мая 1896 г., и замѣнившее собою ст. 167—188 Устава о промышленности<sup>2)</sup>.

Право изобрѣтателя—право исключительнаго характера; правомъ этимъ изобрѣтатель владѣетъ, пользуется и распоряжается, исключительно и независимо отъ лица посторонняго, но не вѣчно. (Продолжительность исключительнаго права изобрѣтателя еще короче чѣмъ продолжительность авторскихъ правъ). При такомъ характерѣ права изобрѣтателя представляется, по аналогіи съ правами авторскими, возможнымъ говорить о собственности изобрѣтателя на его изобрѣтеніе: „Всякое открытіе, изобрѣтеніе или усовершенствованіе какого либо общепользнаго предмета или способа производства въ искусствахъ, мануфактурахъ и ремеслахъ, есть собственность того лица, коимъ оно сдѣлано, и сіе лицо для обезпеченія правъ своихъ на сію собственность можетъ испросить себѣ отъ правительства исключительную привилегію“<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Ст. 64—877.

<sup>2)</sup> Пр. 1330—1332.

<sup>3)</sup> Полож. 1833 г. ст. 1; Уст. о промышл. ст. 167; Полож. 1896 г. ст. 1.



Полученіе привилегіи и по Проекту гражд. уложенія составляет необходимое условіе для охраны правъ изобрѣтателя<sup>1)</sup>. Привилегія не создаетъ права, но констатируетъ только, что заявленіе объ открытіи было сдѣлано, и общаетъ такому зарегистрированному изобрѣтенію охрану. „Выдавая привилегію, правительство не ручается ни въ полной принадлежности открытія, изобрѣтенія или усовершенствованія лицу предъявившему, ни въ пользѣ и успѣхахъ онаго, но удостовѣряетъ единственно въ томъ видѣ, въ какомъ оно было представлено, кѣмъ и когда именно“<sup>2)</sup>. Поэтому, „привилегія правительствомъ выданная, не лишаетъ никого права доказывать судомъ, что поименованное въ оной открытіе, изобрѣтеніе или усовершенствованіе, принадлежитъ ему, или имъ, и уже введено до выдачи привилегіи“<sup>3)</sup>. Содержаніе огражденнаго привилегіей права изобрѣтателя опредѣляется въ законѣ слѣдующимъ образомъ: 1) онъ одинъ можетъ въ опредѣленное привилегіей время пользоваться открытіемъ, изобрѣтеніемъ или усовершенствованіемъ, какъ неотъемлемою и исключительною своею собственностью, и вслѣдствіе того вводить, употреблять, продавать, дарить, завѣщать и инымъ образомъ уступать другому, на законномъ основаніи, какъ предметъ, на который выдана привилегія, такъ и самую привилегію, или-же дозволить другому употребленіе оной на все предоставленное изобрѣтателю время или на меньшій срокъ, и 2) преслѣдовать судомъ всякую поддѣлку и искать удовлетворенія въ понесенныхъ отъ того убыткахъ“<sup>4)</sup>. Привилегіями ограждаются не всякія открытія и изобрѣтенія, а только такія, 1) которыя „общаютъ существенную пользу“ (поэтому на незначительныя открытія, изобрѣтенія и усовершенствованія, которыя показываютъ единственно остроту или изобрѣтательность ума привилегіи не выдаются)<sup>5)</sup>, 2) которыя отличаются новизною<sup>6)</sup>, 3) которыхъ эксплоа-

<sup>1)</sup> Пр. 1330. Изобрѣтателю и его правопреемникамъ принадлежитъ право исключительнаго пользованія изобрѣтеніемъ, сдѣланнымъ въ области промышленности, если на него получена въ установленномъ порядкѣ привилегія“.

<sup>2)</sup> Ст. 169 Уст. промышл.—Полож. 20 мая 1896 г. ст. 15.

<sup>3)</sup> Ст. 170 Уст. промышл.—Полож. ст. 26.

<sup>4)</sup> Ст. 171 Уст. промышл.—Полож. ст. 22.

<sup>5)</sup> Ст. 175 Уст. промышл.—Полож. ст. 4.

<sup>6)</sup> Ст. 173 Уст. промышл.—Полож. ст. 4.

тація доступна всѣмъ <sup>1)</sup>. Привилегіи выдаются на короткіе сроки— на три, на пять и не болѣе десяти лѣтъ <sup>2)</sup>; по Проекту—на 15 лѣтъ. Но выданная привилегія обязываетъ изобрѣтателя привести въ дѣйствіе свое открытіе или изобрѣтеніе въ теченіе четверти того срока, на который дана привилегія <sup>3)</sup>. Привилегіи выдаются Департаментомъ Торговли и Мануфактуръ <sup>4)</sup>, о выдачѣ привилегіи производится публикація <sup>5)</sup>.

Дѣйствіе привилегіи прекращается при слѣдующихъ условіяхъ:

а) истеченіемъ срока; б) если будетъ доказано, что огражденное привилегіей изобрѣтеніе было извѣстно уже раньше или приведено въ дѣйствіе и безъ привилегіи; в) если будетъ доказано, что привилегія выдана на такое изобрѣтеніе, которое принадлежит другому лицу; г) если откроется, что представленное описаніе не полно; д) если привилегированное изобрѣтеніе не будетъ осуществлено въ установленный закономъ срокъ <sup>6)</sup>; е) слѣдуетъ прибавить и упоминаніе о возможности отреченія отъ привилегіи.

Незаконное пользованіе привилегированнымъ изобрѣтеніемъ даетъ субъекту этого права основаніе къ возбужденію иска, подсуднаго только общимъ судебнымъ мѣстамъ <sup>7)</sup>. Цѣль иска заключается въ признаніи за истцомъ исключительнаго его права на осуществленіе привилегированнаго изобрѣтенія и во взысканіи тѣхъ убытковъ, которые возникли для истца вслѣдствіе неправомернаго осуществленія изобрѣтенія постороннимъ лицомъ. Уголовное Уложеніе (ст. 621) караетъ нарушителя привилегіи арестомъ или штрафомъ не свыше 500 рублей, а Уложеніе о наказ. (ст. 1353) денежнымъ взысканіемъ отъ 100 до 300 руб.

### *Право собственности на фабричныя рисунки и модели, клеймо, фирму.*

Въ области промышленности существуетъ исключительное право на рисунки и модели <sup>8)</sup>; оно аналогично авторскому праву, именно художественной собственности.

<sup>1)</sup> Ст. 176 Уст. промышл.—Полож. ст. 4.

<sup>2)</sup> Ст. 185 Уст. промышл.—По Полож. ст. 16—не болѣе 15 лѣтъ.

<sup>3)</sup> Ст. 191 Уст. промышл.—По Полож. ст. 24—не позже пяти лѣтъ.

<sup>4)</sup> Ст. 178 Уст. промышл.—Полож. ст. 5.

<sup>5)</sup> Ст. 190 Уст. промышл.—Полож. ст. 7.

<sup>6)</sup> Ст. 197 Уст. промышл.—Полож. ст. 29.

<sup>7)</sup> Ст. 31, 349 п. 6 Уст. гражд. суд.

<sup>8)</sup> Ст. 199—209 Уст. о промышл.

Изобрѣтатель рисунка или модели можетъ обезпечить себѣ, на опредѣленный срокъ, право исключительнаго пользованія означеннымъ изобрѣтеніемъ; это обезпеченіе права исключительнаго пользова- нія совершается посредствомъ заявки рисунка или модели въ Департа- ментъ Торговли и Мануфактуръ <sup>1)</sup>, откуда заявляющему выдается сви- дѣтельство въ удостовѣреніе того, что на рисунокъ или модель за- явлено право собственности. Но рисунокъ или модель должны отли- чаться новизной <sup>2)</sup>. Субъектомъ этого исключительнаго права является „изобрѣтатель“; но рисунки или модели, составленные въ состоя- щихъ при фабрикахъ или заводѣхъ мастерскихъ содержимыми при оныхъ рисовальщиками и орнаментовщиками, разсматриваются во всякомъ случаѣ, какъ собственность хозяина фабрики или завода <sup>3)</sup>. Право исключительнаго пользованія рисункомъ или моделью обез- печивается на сроки отъ одного до десяти лѣтъ <sup>4)</sup>. Нарушеніе права на рисунки и модели мыслимо въ формѣ воспроизведенія ихъ вполнѣ или только въ части <sup>5)</sup>, и имѣетъ своимъ послѣд- ствіемъ вознагражденіе за вредъ и убытки <sup>6)</sup>, кромѣ того уплаты денежнаго штрафа <sup>7)</sup>.

Исключительное право на рисунки и модели прекращается съ истеченіемъ срока и съ передачею права другому лицу; мыслимо также и отреченіе субъекта.

Въ той-же области промышленности существуютъ исключи- тельныя права на товарные знаки и на фирму. Выставленіе товар- наго знака—клейма <sup>8)</sup>—не составляетъ обязанности фабриканта; но фабрикантъ имѣетъ право избрать для своихъ произведеній товар- ный знакъ и заявить о немъ Департаменту Торговли и Мануфак- туръ: въ такомъ случаѣ, для фабриканта какъ такового возни- каетъ исключительное право пользоваться этимъ знакомъ для своихъ товаровъ; пользованіе же чужимъ клеймомъ — состав-

<sup>1)</sup> Ст. 201 Уст. о промышл.

<sup>2)</sup> Ст. 203 Уст. о промышл.

<sup>3)</sup> Прим. 2 ст. 199 Уст. о пром.

<sup>4)</sup> Ст. 207, Уст. о промышл.

<sup>5)</sup> Прим. 2, ст. 203 Уст. о пром.

<sup>6)</sup> Ст. 209 Уст. о промышл.

<sup>7)</sup> Ст. 1357 Улож. о нак.

<sup>8)</sup> Ст. 157—161 Уст. о промышл.; Пр. 1333—1335, правила о торг<sup>л</sup> нак. 26 февраля 1896 г.

ляеть нарушеніе исключительнаго права лица заявившаго свое клеймо.

Проектъ вводитъ въ кругъ исключительныхъ правъ—право на фирму—наименованіе, подъ которымъ лицо ведетъ свои дѣла по торговлѣ, промыслу и ремеслу<sup>1)</sup>. Наименованіе это подлежитъ регистраціи, можетъ быть предметомъ сдѣлокъ; нарушеніе этого права влечетъ за собою искъ о вознагражденіи за убытки.

---

<sup>1)</sup> Пр. 1336—1341.

## Спеціалізація учебныхъ плановъ преподаванія и занятій науками юридическими, государственными и экономическими въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ Россіи.

Вьяснить значеніе увеличенія штатнаго личнаго состава для возможности осуществленія спеціализаціи учебныхъ плановъ и раздѣленія юридическаго факультета на отдѣленія нельзя безъ сопоставленія этого увеличенія съ измѣненіемъ состава предметовъ преподаванія по проэктору 1906 г. сравнительно съ составомъ по нынѣ дѣйствующему уставу. Составъ же этотъ проэкторомъ 1906 г. предположено измѣнить лишь въ слѣдующемъ: 1) при обозначеніи права междунарсднаго въ проэктѣ 1906 г. упомянуто *частног* право сверхъ публичнаго; первое же нынѣ не полагается преподавать; 2) при обозначеніи права государственнаго сказано—русское и *иностранное*; нынѣ же согласно предложенію Министра Народнаго Просвѣщенія, сдѣланному вслѣдъ заведеніемъ устава 1884 года, преподаваніе ограничивается лишь однимъ русскимъ государственнымъ правомъ, а иностранное было допущено лишь въ видѣ исключенія и то въ краткомъ изложеніи притомъ лишь недавно въ одномъ С.-Петербургскомъ юридическомъ факультетѣ, но не въ остальныхъ; 3) общую нынѣ каедру для Политической Экономіи и Статистики предположено раздѣлить на двѣ самостоятельныя для отдѣльнаго преподаванія обѣхъ этихъ наукъ, съ упоминаніемъ по проэктору 1906 г. въ уставѣ, что въ Политическую Экономію, сверхъ теоріи, входитъ и Экономическая Политика, которая до нынѣ *отдѣльно* не преподавалась, хотя и входила въ общую съ Политической Экономією программу; 4) названіе Полицейскаго права замѣнено „Административнымъ“ (съ цѣлью обозначить усиленіе юридическаго элемента въ преподаваніи); 5) наконецъ, вновь прибавлена каедра—„*Сравнительной Исторіи права*“ взамянъ бывшей въ уставѣ 1863 г. „*Исто-*

*ри положительных законодательствъ*“, за возстановленіе которой (или же замѣнѣе ея Сравнительною Исторіею права) высказались университеты въ ихъ отзывѣхъ на запросъ Министра Народнаго Просвѣщенія въ 1901 г. Другую же кафедру,—Исторію славянскихъ законодательствъ, полагавшуюся уставомъ 1863 г. и за возстановленіе которой также были высказаны университетами пожеланія, проэктомъ 1906 г. положено имѣть лишь въ одномъ Варшавскомъ университетѣ. Мы недоумѣваемъ о причинѣ такого исключенія: если преподаваніе этого предмета было признано цѣлесообразнымъ въ одномъ университетѣ, то на какомъ же основаніи не сдѣлать того же самаго и въ остальныхъ? Развѣ изъ того опасенія что не найдется достаточнаго числа подготовленныхъ преподавателей? Но вопросъ это лишь времени, необходимаго для ихъ подготовки, а нынѣшніе условія <sup>1)</sup> для послѣдней гораздо болѣе благоприятнѣе, чѣмъ при дѣйствіи устава 1863 г., такъ какъ среди *историковъ* нынѣ гораздо болѣе, чѣмъ было тогда, лицъ, охотно посвящающихъ свои силы разработкѣ славянскаго права, судя по печатнымъ трудамъ, посвященнымъ изслѣдованію правовыхъ нормъ славянъ, чѣмъ могли бы воспользоваться и юридическіе факультеты для замѣщенія кафедры Исторіи славянскихъ законодательствъ. Впрочемъ, поправка этого пробѣла проэктовъ 1905 и 1906 г.г. можетъ быть сдѣлана на основаніи той статьи (65-й проэкта 1906 г.), которая предоставляетъ *университетамъ* (а не *Министру* Народнаго Просвѣщенія, какъ то было выражено въ 102 статьѣ проэкта 1905 г.) учреждать новыя кафедры. Но для этого послѣдняго *необходимы* свободныя средства. При расчетѣ же средствъ, отпускаемыхъ изъ государственнаго казначейства на число штатныхъ преподавателей въ проэктѣ 1906 г., Исторія славянскихъ законодательствъ не имѣлась въ виду. И безъ принятія преподаванія ея въ расчетъ, руководясь опытомъ настоящаго времени, указывающимъ, по сколько преподавателей обыкновенно требуется нынѣшнимъ объемомъ преподаванія предметовъ, обозначенныхъ въ уставѣ 1884 г., а также присоединяя и то число преподавательскихъ силъ, которое потребовалось бы вслѣдствіе разширенія содержанія тѣхъ же по наименованію предметовъ, но при раздѣленіи или пополненіи ихъ преподаванія новыми отдѣлами и дѣлая прибавку одного преподавателя для новаго предмета—Сравнительной Исторіи

<sup>1)</sup> Въ подтвержденіе этого мы позволимъ себѣ сослаться на мнѣніе такого компетентнаго историка русскаго права, каковъ извѣстный профессоръ М. Ф. Будановъ.

Права. въ результатѣ потребуется всего двадцать два преподавателя для *полнаго* осуществленія лишь одного *преподаванія* *всѣхъ* предметовъ при *одномъ* и томъ же учебномъ планѣ и опуская пока изъ разсчета усиленіе этаго состава для надлежащаго руководства практическими занятіями студентовъ. Поэтому-то изъ предложеннаго проектомъ 1906 г. (а также и 1905 г.) числа 29 штатныхъ преподавателей остается *семь* человекъ для усиленія личнаго состава какъ добавочными руководителями практическими занятіями, такъ и для чтенія тѣхъ отдѣльныхъ и различныхъ курсовъ однихъ и тѣхъ же предметовъ, которые потребовались бы для слушателей различныхъ отдѣленій факультета при установленіи нѣсколькихъ учебныхъ плановъ, соотвѣтственно различнымъ задачамъ которыхъ понадобилось бы приспособлять и содержаніе курсовъ тѣхъ предметовъ, надобность въ изученіи которыхъ представляется довольно разнообразною для студентовъ различныхъ отдѣленій.

Если число штатныхъ преподавателей въ юридическихъ факультетахъ, предложенныхъ проектами 1905 и 1906 г., вѣроятно оказалось бы достаточнымъ для преподаванія и при раздѣленіи юридическаго факультета на нѣсколько (однако, не болѣе трехъ) отдѣленій, то для *надлежащаго* руководства *практическими* занятіями студентовъ при полномъ развитіи *систематическаго* ихъ плана, *особаго* въ *каждомъ* изъ этихъ отдѣленій, принятаго проектами 1905 и 1906 г., *ихъ* число оказалось бы положительно *недостаточнымъ* при такомъ *большомъ* числѣ *слушателей*, какое до нынѣ было и нынѣ есть въ обоихъ столичныхъ юридическихъ факультетахъ и въ Кіевскомъ. Такъ, при раздѣленіи юридическаго факультета на три отдѣленія въ *каждомъ* изъ нихъ окажется по четыре *главныхъ* предметовъ, то или иное участіе въ такъ называемыхъ практическихъ занятіяхъ которыми было бы, по меньшей мѣрѣ, *желательно*, если и не *во-всѣмъ* изъ нихъ *непремѣнно* *обязательно* для *каждаго* изъ студентовъ, принадлежащихъ къ этому отдѣленію, то по крайней мѣрѣ по *большинству* главныхъ предметовъ. При томъ же многочислѣ, которое уже было даже при *нормальныхъ* условіяхъ (не говоря объ исключительныхъ современныхъ, когда переполненіе иныхъ курсовъ въ иныхъ факультетахъ дошло до абсурда въ педагогическомъ отношеніи) дѣятельности университетовъ, число студентовъ въ наименѣе многочисленномъ изъ трехъ выше нами упомянутыхъ юридическихъ факультетахъ, а именно въ кіевскомъ—доходило до такого размѣра, что даже при *равномѣрномъ* распредѣленіи всѣхъ участниковъ практическихъ занятій между предметами приходилось бы въ среднемъ на *каждаго* руководителя-преподавателя ихъ никакъ не менѣе сотни

руководимыхъ студентовъ; при неравномѣрномъ же такое отношеніе было бы еще гораздо болѣе неблагопріятнымъ и чрезъ то превращало бы во многихъ случаяхъ руководство занятіями въ одну безплодную формальность. По этимъ то основаніямъ мы полагаемъ, что университетамъ должно быть предоставлено не только одно *право* увеличивать число преподавателей на многочисленныхъ факультетахъ до числа соответственнаго дѣйствительной въ нихъ потребности, но и доставлены изъ казны матеріальныя средства, недостающія для содержанія такого прибавочнаго числа преподавателей-руководителей практическими занятіями, въ томъ случаѣ, если не хватаетъ для этой цѣли средствъ специальныхъ, что можетъ нерѣдко случаться.

§ 9. Едва ли возможно отрицать, что всѣми приведенными нами въ этой главѣ мнѣніями и предложеніями отдѣльныхъ профессоровъ, цѣлыхъ юридическихъ факультетовъ и наконецъ трехъ комиссій, составленныхъ какъ изъ профессоровъ, выразителей желаній университетской среды, такъ и изъ представителей разныхъ министерствъ, вѣдующихъ высшими учебными заведеніями, съ достаточною убѣдительностью, (по крайней мѣрѣ для насъ), выяснена вполне назрѣвшая потребность въ предоставленіи возможности учащимся въ юридическихъ факультетахъ индивидуализировать ихъ занятія посредствомъ спеціализаціи послѣднихъ, соединяя ее съ допущеніемъ для учащихся значительной доли свободы (съ необходимыми по существу дѣла ограниченіями) въ выборѣ времени и предметовъ испытаній, при чемъ также выяснены тѣ различныхъ категорій (научныя, педагогическія, практическія и др.) соображенія, которыя представляются достаточно основательными *доводами въ пользу* введенія *спеціализаціи* на юридическихъ факультетахъ, и кромѣ того указаны и тѣ *условія*, которыя *благопріятствуютъ* осуществленію той важной формы проявленія индивидуальности въ научныхъ занятіяхъ, которая, внося въ нихъ возможную степень свободы выбора занятій взамѣнъ примѣнявшейся до нынѣ шаблонной подневольности, оживляетъ ихъ возбужденіемъ интереса къ существу дѣла помимо постороннихъ ему соображеній. Слѣдуетъ признать, что послѣдній періодъ исторіи русскихъ университетовъ, меньшіи десятилѣтія, въ особенности же послѣднее ея пятилѣтіе, посвященное въ значительной степени проектированію *общей* реформы университетовъ, вызвали такое большое оживленіе въ обсужденіи и *частнаго* входящато въ эту реформу вопроса о *спеціализаціи* учебныхъ занятій на юридическихъ факультетахъ, какое едва ли возможно отыскать въ предыдущей исторіи университетовъ; впрочемъ въ началѣ 60-хъ г.г. въ связи съ введеніемъ университет-



скаго устава 1863 г. также было очень оживленное обсужденіе въ университетахъ и *этаго* вопроса, но едвали тогда оно достигало тѣхъ размѣровъ, до какихъ оно разрослось въ послѣдніе пять лѣтъ. И въ началѣ 60-хъ г.г., и теперь ясно обнаружилось преобладаніе въ большинствѣ профессоровъ юридическихъ факультетовъ стремленія къ введенію той спеціализаціи занятій, которая насъ интересуеетъ въ данномъ изслѣдованіи, а предложеніе ея введенія составляетъ одинъ изъ важнѣйшихъ результатовъ всѣхъ разсужденій, относящихся къ способамъ существеннаго улучшенія настоящаго неудовлетворительнаго состоянія учебнаго дѣла въ юридическихъ факультетахъ. Не смотря на то, что очень многіе вопросы университетской реформы неоднократно обсуждались, и въ массѣ высказаннаго при этомъ удѣлено было много вниманія спеціализаціи занятій на юридическомъ факультетѣ, однако, уже по нынѣ сдѣланное выясненіе послѣдней нельзя признать достаточнымъ и значительнымъ. Въ особенности же слѣдуетъ здѣсь отмѣтить разногласіе и недостаточную обоснованность предметнаго состава спеціальныхъ учебныхъ плановъ, предложенныхъ для каждаго изъ отдѣленій юридическаго факультета, недостатки которыхъ въ своемъ мѣстѣ мы уже отмѣтили. Правда, сами авторы ихъ смотрѣли на предложенные ими планы лишь какъ на *примѣрные* образцы, наглядно иллюстрирующіе ихъ взгляды на этотъ вопросъ, полагая, согласно заключеніямъ большинства въ комиссіяхъ, разрабатывавшихъ проектъ университетскаго устава, что не слѣдуетъ ни включать въ уставъ спеціальныя учебныя планы отдѣленій юридическаго факультета съ обозначеніемъ въ нихъ различій ихъ предметнаго состава, ни вообще навязывать факультетамъ какіе либо однообразныя и постоянныя учебныя планы, а что—напротивъ—послѣднимъ слѣдуетъ предоставить право самостоятельно ихъ выработывать. Для достиженія ближайшей ихъ цѣли—составленія раціональнаго устава университетовъ—упомянутыя нами выше комиссіи не признавали необходимымъ выработывать достаточно обоснованные спеціальныя планы.

Между тѣмъ при научномъ изслѣдованіи вопроса о спеціализаціи занятій въ юридическихъ факультетахъ безъ ограниченія его задачи одною такою *чисто практической* цѣлью этотъ пробѣлъ можетъ оказаться замѣтнымъ. Присутствіе же значительнаго разногласія относительно предметнаго состава спеціальныхъ учебныхъ плановъ отдѣленій юридическаго факультета при сопоставленіи проектовъ даже двухъ ближайшихъ по времени комиссій—1902 и 1905 г.г. (а тѣмъ болѣе, если сопоставить ихъ съ планами, предложенными въ началѣ 60-хъ г.г. 4-мя факультетами) свидѣтельствуетъ

объ отсутствіи достаточно установившихся на этотъ вопросъ взглядовъ и о вліяніи на предложенные планы субъективныхъ воззрѣній ихъ авторовъ. Намъ представляется болѣе цѣлесообразнымъ нѣсколько иной, чѣмъ доннынѣ практиковался, приѣмъ выработки такихъ специальныхъ плановъ для отдѣленій юридическаго факультета, какіе были бы припрігодны не для одного лишь того факультета, который ихъ выработаетъ, но такихъ, которые могли бы пріобрѣсти хотя бы на *нѣкоторое* время *общее* значеніе для *всѣхъ однородныхъ факультетовъ*. Последняго же было бы желательно достигнуть въ видахъ возможнаго облегченія для учащихся въ университетахъ пользованія однородными факультетами въ различныхъ университетахъ для исполненія избраннаго ими одного изъ специальныхъ учебныхъ плановъ при помощи взаимнаго сотрудничества научно-преподавательскихъ силъ различныхъ юридическихъ факультетовъ Россіи. Такое же сотрудничество ихъ доставило бы возможность учащимся наилучше утилизировать эти силы подобно тому, какъ это происходитъ въ германскихъ университетахъ. Для выработки же специальныхъ учебныхъ плановъ, сходныхъ между собою по составу предметовъ въ однородныхъ отдѣленіяхъ, хотя и могущихъ различаться въ частности— въ программахъ и объемѣ преподаванія каждаго изъ предметовъ, окъзался бы наиболѣе пригоднымъ сѣздъ профессоровъ *всѣхъ однородныхъ*, т. е. въ данномъ случаѣ юридическихъ, факультетовъ, въ которомъ спеціальныя учебныя планы для ихъ отдѣленій, самостоятельно составленные каждымъ изъ такихъ факультетовъ, подверглись бы сличенію, обсужденію и возможному согласованію между собою во всемъ томъ, что имѣетъ наиболѣе существенное значеніе въ каждомъ учебномъ планѣ, а значить прежде всего— въ предметномъ его составѣ. Собраніе, составленное лишь изъ лицъ, спеціалью знакомыхъ съ тѣми предметами, которые входятъ въ каждый изъ специальныхъ учебныхъ плановъ, представлялось бы гораздо болѣе компетентнымъ въ разрѣшеніи вопросовъ, относящихся къ выработкѣ специальныхъ учебныхъ плановъ для отдѣленій одного лишь факультета, чѣмъ такія собранія, въ которые входятъ съ равноправнымъ рѣшающимъ голосомъ лица совершенно различныхъ научныхъ специальностей, при чемъ очень значительной части участниковъ такихъ собраній нерѣдко предоставляется разрѣшать по существу дѣла спеціальныя вопросы изъ области, посторонней и мало знакомой для нихъ научной специальности.

Мы конечно не отрицаемъ возможности нѣкоторыхъ разногласій и въ такихъ собраніяхъ, составленныхъ изъ болѣе близкихъ между собою специалистовъ, но едвали эти разногласія будутъ

относиться къ основнымъ, элементарнымъ вопросамъ, а скорѣе могутъ встрѣтиться лишь въ несущественныхъ частностяхъ. Единодушія же при выработкѣ специальныхъ учебныхъ плановъ слѣдуетъ ожидать въ особенности тогда, когда произойдетъ соглашеніе и признаніе общихъ руководящихъ началъ въ дѣлѣ составленія специальныхъ учебныхъ плановъ. Важнѣйшимъ же изъ такихъ принциповъ, съ которыми пришлось-бы при этомъ сообразоваться, слѣдуетъ признать отношеніе специальныхъ учебныхъ плановъ къ требованіямъ различныхъ отраслей *практической* дѣятельности вообще и въ частности—*государственной* службы. Хотя въ послѣднее время между профессорами и вообще среди членовъ послѣднихъ комиссій, занимавшихся выработкою университетскаго устава, кажись, преобладало мнѣніе, что университетскіе учебные планы должны сообразоваться лишь съ одними научными требованіями, а запросы *государственной* службы должны имѣть въ виду лишь *государственные* служебные экзамены. Однако, едва-ли и университетамъ возможно игнорировать слѣдующіе два жизненные запроса: 1) съ одной стороны среди учащихся въ университетахъ и до нынѣ значительно преобладаютъ по числу тѣ лица, имѣющія въ виду по окончаніи университета посвятить себя той или иной отрасли служебной или общественной дѣятельности, которая въ правѣ искать въ университетахъ не только лишь одно общее и высшее образованіе, но сверхъ того и такихъ свѣдѣній и приемовъ *научной* работы, которые составляютъ, если не для всѣхъ необходимый, то существенно полезный элементъ для той практической дѣятельности, которой они имѣютъ въ виду посвятить себя по окончаніи университета, 2) съ другой же стороны—*государство* и *населеніе* Россіи, предоставляя на содержаніе университетовъ большія суммы, въ правѣ желать отъ университетовъ полученія возможнаго для послѣднихъ содѣйствія въ *научной* подготовкѣ тѣхъ учащихся въ университетахъ, которые посвятятъ себѣ со временемъ *государственной* службѣ или же *общественной* дѣятельности, и въ *надлежащей научной* подготовкѣ которыхъ сильно заинтересовано какъ государство, такъ и общество. Неизбѣжнымъ же выводимъ изъ этихъ обонхъ запросовъ представляется необходимость для университетовъ вообще, а въ частности для ихъ юридическихъ факультетовъ, при выработкѣ специальныхъ учебныхъ плановъ сообразоваться не съ одними лишь *научными*, но и съ интересами *практической* дѣятельности, предстоящей учащимся. Примирить же между собою требованія обѣихъ категорій совершенно возможно, какъ объ этомъ свидѣтельствуетъ между прочимъ и та

исторія спеціалізаціи, которой мы посвятили наше настоящее изслѣдованіе.

Такъ, при сличеніи предметнаго состава спеціальныхъ учебныхъ плановъ, предложенныхъ комиссіями 1902 г. (проф. Гурлянда) и 1905 г. для каждаго изъ трехъ отдѣленій юридическаго факультета съ перечнемъ предметовъ, предложенныхъ профессоромъ Алексѣевымъ для спеціальныхъ *государственныхъ* экзаменовъ, разнообразныхъ по вѣдомствамъ, возможно установленіе соотвѣтствія между спеціализаціею первыхъ и вторыхъ. Именно, въ составъ государственныхъ экзаменовъ тѣхъ юристовъ, которые избираютъ для ихъ практической дѣятельности область *юстиціи*, по проекту профессора Алексѣева должны входить слѣдующіе предметы: права—римское, гражданское, (обще-русское и мѣстное), уголовное и торговое съ соотвѣтственными процессами, т. е. тѣ предметы, на которыхъ по преимуществу сосредоточивались бы силы и вниманіе тѣхъ учащихся въ юридическихъ факультетахъ, которые избрали бы для руководства въ ихъ занятіяхъ *спеціально-юридическій* учебный планъ. Кстати, отмѣтимъ здѣсь наше несогласіе съ проектомъ профессора Алексѣева въ томъ, что *римское* право будто-бы должно входить въ число предметовъ *государственныхъ* экзаменовъ: въ данномъ вопросѣ мы вполне раздѣляемъ мнѣніе юридическаго факультета университета св. Владиміра, неоднократно ходатайствовавшего объ отнесеніи экзамена по системѣ римскаго права къ числу полукурсовыхъ и объ изъятіи его изъ числа входящихъ въ экзамены государственныхъ комиссій. Римское право не имѣетъ для русскои юридической практики значенія *непосредственно* къ ней приложимаго, а изученіе его лишь *подготавливаетъ* студентовъ юридическаго факультета къ надлежащему усвоенію преимущественно русскаго гражданскаго права, изученію котораго и должны предшествовать какъ изученіе, такъ и экзаменъ по *всему* римскому праву, а не только лишь по одной его исторіи, какъ это дѣлается нынѣ.

Также, напомнимъ здѣсь кстати, что и нынѣ въ составъ истинно-государственныхъ (по преимуществу практическихъ) экзаменовъ, производимыхъ въ Россіи по вѣдомству юстиціи, входятъ: русское гражданское и уголовное право съ соотвѣтственными процессами, т. е. именно тѣ предметы, которые занимаютъ, такъ сказать, центральное положеніе въ спеціально-юридическомъ учебномъ планѣ, предложенномъ для университетскихъ занятій.

Также возможно установить нѣкоторое соотвѣтствіе между предметнымъ составомъ экзаменовъ *государственныхъ*, проектируемыхъ профессоромъ Алексѣевымъ для допущенія къ служебной дѣя-

тельности (въроятно, въ болѣе самостоятельныхъ и отвѣтственныхъ должностяхъ) въ областяхъ *администраціи общей и финансовой* съ одной стороны и предметами изученія, рекомендованными комиссіями 1902 и 1905 гг. для спеціальныхъ учебныхъ планахъ—*государственно-административнаго и экономическаго*— съ другой. Для службы въ общей администраціи профессоръ Алексѣевъ рекомендуетъ экзаменовать въ государственной комиссіи: по праву Государственному и Полицейскому (или Административному по терминологіи проектовъ 1902 и 1905 г.г.), т. е. по тѣмъ предметамъ, которые занимаютъ такое-же положеніе въ спеціальному *государственно административному* учебному плану, какъ гражданское и уголовное право— въ *спеціально-юридическомъ*. Въ составъ государственныхъ же экзаменовъ для должностей финансовой администраціи профессоръ Алексѣевъ предложилъ включить два предмета—финансовое право и экономическую политику. Хотя финансовому праву отведено достаточно выдающееся мѣсто въ *спеціально-экономическомъ* плану, а экономическая политика также входитъ въ число предметовъ какъ государственно-административнаго, такъ и спеціально-экономическаго плана, но въ послѣднемъ какъ по проектамъ спеціальныхъ плановъ для *университетскихъ* занятій комиссіей 1902 1905 гг., такъ и по проекту профессора Алексѣева для *государственно-служебныхъ* экзаменовъ не упомянута та часть *административнаго* права, которая матеріально— т. е. по *объектамъ* правительственныхъ мѣропріятій— совпадаетъ съ содержаніемъ экономической политики, отличаясь отъ послѣдней сосредоточеніемъ вниманія на юридической сторонѣ явленій вмѣсто экономической, какъ то дѣлается въ ученіи объ экономической политикѣ.

Намъ представляется такое разчлененіе только что упомянутыхъ двухъ сторонъ однихъ и тѣхъ же явленій довольно искусственнымъ и не соответствующимъ интересамъ той полноты изученія явленій, которая требуется дѣйствительною жизнью. Поэтому намъ кажется, что при *университетскомъ изученіи* ихъ обѣ стороны—экономическую и юридическую—не слѣдуетъ разчленять и опускать изученіе, напр., юридической стороны въ административномъ правѣ въ спеціально-экономическомъ учебномъ плану, что, однако, было допущено проектами примѣрныхъ учебныхъ плановъ, предложенныхъ въ комиссіяхъ 1902 и 1905 г.г. Еще менѣе представляется намъ основательнымъ въ проектѣ профессора Алексѣева при государственномъ экзаменѣ для *финансовой службы* опущеніе той части административнаго права, которая по ея содержанію сродна экономической политикѣ, имѣ, однако, помѣщенной, составляя юриди-

ческую ее сторону: для практики именно юридическая сторона этих явлений оказывается имѣющею наибольшее практическое значеніе. Еще на одинъ слѣдующій пробѣлъ въ проектѣ государственныхъ экзаменовъ профессора Алексѣева мы считаемъ не лишнимъ обратить здѣсь вниманіе: статистика, сверхъ подготовительнаго—теоретическаго, имѣетъ и практическое значеніе — подготовки статистиковъ-практиковъ для административно-статистической дѣятельности въ различныхъ статистическихъ учрежденіяхъ какъ правительственныхъ разныхъ вѣдомствъ, такъ и общественныхъ — земскихъ и городскихъ. Въ виду этого жизненнаго запроса подготовки къ статистической дѣятельности помѣщеніе въ числѣ предметовъ *государственно-служебныхъ* экзаменовъ той части статистики, которая имѣетъ несомнѣнно подготовительное значеніе для статистика — практика представляется намъ гораздо болѣе рациональнымъ, чѣмъ предоставленіе этого предмета всецѣло практической рутинѣ или же специально служебно-учебному заведенію, (каковы напримѣръ „статистическіе курсы“ М. В. Д.), послѣднимъ пріемомъ лишая практическаго (для подготовки къ статистической дѣятельности) значенія *университетское* преподаваніе статистики. Между тѣмъ въ специально-экономическомъ учебномъ планѣ и по проекту 1902 г. и въ особенности 1905 г. преподаванію и занятіямъ по статистикѣ отведено довольно видное мѣсто. Исполненіе только что предложенныхъ нами поправокъ устанавливало бы большее соотвѣтствіе между университетскими специальными учебными планами юридическаго факультета и тѣми требованіями практической дѣятельности, которыя прежде всего должны быть въ виду при установленіи предметнаго состава государственныхъ экзаменовъ.

Наименьшее соотвѣтствіе возможно подмѣтитъ между предметнымъ составомъ, предложеннымъ профессоромъ Алексѣевымъ для государственныхъ экзаменовъ по дипломатическо-консульскому вѣдомству министерства иностранныхъ дѣлъ, — съ одной стороны и предметами сколько-нибудь соотвѣтственнаго ему специальнаго учебнаго плана изъ предложенныхъ для отдѣленій юридическаго факультета комиссіями 1902 и 1905 гг. — съ другой. Тѣ предметы, которые пужны для будущихъ дипломатовъ и консуловъ скорѣе всего слѣдовало бы искать въ государственно административномъ специальномъ учебномъ планѣ, если бы и международному праву было отведено въ немъ хотя-бы такое же видное мѣсто, какое мы находимъ въ немъ же отведеннымъ для *государственнаго*, но не для *международнаго* права. Такъ, исторія трактатовъ, помѣщенная профессоромъ Алексѣевымъ въ числѣ предметовъ государственныхъ

экзаменовъ въ комисіи по министерству иностранныхъ дѣлъ, совершенно не упомянуто ни въ одномъ изъ специальныхъ учебныхъ плановъ, предложенныхъ для отдѣленій юридическаго факультета комисіями 1902 и 1905 гг. При составленіи специальныхъ учебныхъ плановъ по видимому не имѣлись и въ виду готовить будущихъ дипломатовъ и даже консуловъ въ юридическихъ факультетахъ. Правда, вводить въ задачу *каждо* изъ юридическихъ факультетовъ подготовку служащихъ по дипломатическому вѣдомству было бы, пожалуй, нѣкоторою роскошью, несоотвѣтствующею тому числу лицъ, которое обыкновенно требуется для *этого* рода служебной дѣятельности. А установить хотя бы въ одномъ изъ факультетовъ, напр. въ столичномъ, соотвѣтственное этой отрасли службы отдѣленіе намъ представляется болѣе рациональнымъ способомъ для удовлетворенія потребности въ подготовкѣ къ этого рода службѣ, чѣмъ устройство для той же цѣли одного изъ специальныхъ учебныхъ заведеній, хотя бы по той причинѣ, что такія заведенія въ Россіи почти всегда надѣлялись привилегіями и если не всегда послѣднія существовали въ силу *закона*, то по крайней мѣрѣ *фактически* ими пользовались. Наконецъ, отдѣльные специальные заведенія въ томъ уступаютъ соотвѣтственнымъ отдѣленіямъ или факультетамъ университетовъ, что лишены той возможной связи разнообразныхъ специальностей, которая облегчается объединеніемъ послѣднихъ въ одномъ и томъ же высшемъ учебномъ заведеніи—*университетѣ*. Правда, и въ послѣднемъ степеніи полноты этого объединенія могутъ быть далеко не одинаковыми, такое такое разнообразіе должно быть не только допущено, но и оправдано по слѣдующимъ соображеніямъ. Разсмотримъ послѣднія въ частности лишь въ примененіи къ однимъ юридическимъ факультетамъ. Осуществить *всѣ* предложенные специальные учебные планы разомъ во *всѣхъ* юридическихъ факультетахъ Россіи оказалось бы нѣмъ невозможнымъ какъ по недостатку соотвѣтственно научно подготовленныхъ преподавательскихъ силъ, такъ и по невозможности при настоящихъ финансовыхъ условіяхъ Россіи такого значительнаго расширенія отпуску изъ государственнаго казначейства средствъ на подготовку и содержаніе всего личнаго состава, необходимаго при одновременномъ осуществленіи спеціализаціи во всѣхъ юридическихъ факультетахъ Россіи. При томъ для надлежащей подготовки недостающаго нѣмъ количества научно-педагогическихъ силъ потребуется нѣкоторое время. Эти же препятствія неизбежно привели бы къ болѣе или менѣе продолжительной *отсрочкѣ* примененія спеціализаціи на юридическихъ факультетахъ. Между тѣмъ возможно было бы избѣ-

гнать этой отсрочки, применяя въ одномъ факультетѣ—*одинъ* а въ другомъ—*другой*, въ третьемъ же *нѣскольکو* специальныхъ учебныхъ плановъ въ зависимости отъ количественнаго и качественного разнообразія научно-педагогическихъ силъ въ различныхъ юридическихъ факультетахъ, при чемъ слѣдовало бы сообразоваться и съ числомъ учащихся въ нихъ: при очень значительномъ общемъ числѣ послѣднихъ легче окажется такое число ихъ на каждомъ изъ нѣсколькихъ специальныхъ отдѣленій, факультета, при которомъ стоило бы озаботиться пріисканіемъ или даже подготовкою педагогическаго персонала въ числѣ соответственномъ вводимымъ въ данномъ факультетѣ специальнымъ учебнымъ планамъ; при маломъ же общемъ числѣ учащихся въ томъ или иномъ юридическомъ факультетѣ было бы целесообразнѣе и экономнѣе ограничиться исполненіемъ лишь того *одного* изъ специальныхъ учебныхъ плановъ, который болѣе соответствуетъ качествамъ наличнаго педагогическаго персонала. При такомъ ограниченіи исполненія даннымъ факультетомъ лишь одного специального учебнаго плана, тѣ студенты его, которые намѣревались бы, и твердо рѣшили бы, слѣдовать иному специальному же плану, не были бы совершенно лишены возможности осуществить это ихъ намѣреніе, такъ какъ имъ пришлось бы для этого избрать лишь тотъ университетъ, въ юридическомъ факультетѣ котораго исполняется интересующій ихъ специальный учебный планъ.

При достаточной вышѣ легкости передвиженія изъ одного университетскаго города Россіи въ другой нельзя отрицать возможности такого переѣзда въ тѣхъ случаяхъ, когда намѣреніе избрать тотъ или иной специальный учебный планъ принято достаточно твердо, исключая, конечно, *случайныхъ* препятствій, обусловливаемыхъ *личными* условіями жизни учащихся. При такомъ разнообразіи юридическихъ факультетовъ надлежащее распредѣленіе между ними специальныхъ учебныхъ плановъ содѣйствовало бы лучшему использованию разнообразія научно-педагогическихъ качествъ ихъ личнаго состава для улучшенія успѣха ихъ педагогической дѣятельности. Передвиженіе же учащихся въ тотъ университетъ, юридическій факультетъ котораго представляетъ имъ возможность воспользоваться исполненіемъ интересующаго ихъ специального учебнаго плана, содѣйствовало бы лучшей утилизаціи ими индивидуальнаго разнообразія научно-педагогическихъ силъ различныхъ юридическихъ факультетовъ Россіи. Облегченію же возможности такого передвиженія учащихся не мало содѣйствовали бы тѣ *соглашенія* между представителями наукъ, преподаваемыхъ въ различныхъ



юридическихъ факультетахъ, которыя дѣлали бы по возможности *однородными* (по ихъ предметному составу) соответственные спеціальныя учебныя планы въ различныхъ юридическихъ факультетахъ, а можетъ быть содѣйствовали бы и распредѣленію между послѣдними осуществленія *различныхъ* спеціальныхъ учебныхъ плановъ для занятій науками юридическими, государственными и экономическими. Такое разнообразіе въ распредѣленіи между юридическими факультетами различныхъ спеціальныхъ плановъ способствовало бы установленію между ними согласованія *разнообразнаго* исполненія ихъ общихъ учебныхъ задачъ. Предоставленіе же возможности путемъ установленія по соглашенію между отдѣльными юридическими факультетами *общихъ* учебныхъ *правилъ* для исполненія того или иного спеціального учебнаго плана *отчасти* въ *одномъ*, *отчасти же* въ *другомъ* изъ юридическихъ факультетовъ ради лучшей утилизаціи индивидуальныхъ особенностей ихъ личнаго состава въ данное время содѣйствовало бы осуществленію того *единства* между университетами, которое въ этомъ отношеніи существуетъ въ Германіи, университеты которой заслуженно считаются образцовыми, и учебныя порядки которыхъ сдѣлались предметомъ подражанія не въ одной Россіи, но и въ нѣкоторыхъ другихъ культурныхъ государствахъ Европы.

Уже тогда, когда все настоящее изслѣдованіе было написано и большая его часть напечатана, автору его пришлось получить копію тѣхъ „Правилъ о зачетѣ полугодій для полученія выпускнаго свидѣтельства на всѣхъ факультетахъ университетовъ за исключеніемъ медицинскаго“ и „о производствѣ испытаній въ испытательныхъ комиссіяхъ“, которыя были утверждены Министромъ Народнаго Просвѣщенія 12-го Іюня 1906 г. Этими Правилами введены нѣкоторыя измѣненія въ экзаменаціонныхъ, а потому отчасти и вообще въ учебныхъ порядкахъ, господствовавшихъ до 1906—7 учебнаго года. Такъ, этими Правилами предоставляется факультетамъ болѣе простора въ составленіи правилъ и учебныхъ плановъ, требующихъ, однако, по прежнему утвержденія Министра Народнаго Просвѣщенія. Именно, въ концѣ § 4-го этихъ Правилъ 12-го Іюня 1906 г. сказано: „Подробныя правила, а также составъ и программы этихъ (т. е. полукурсовыхъ) испытаній устанавливаются *факультетами*“. А въ 1-мъ § тѣхъ же правилъ выражено: „студентъ, желающій получить выпускное университетское свидѣтельство обязанъ выполнить требованія *одного* изъ *утвержденныхъ* для факультета учебныхъ плановъ и подвергнуться полукурсовымъ испытаніямъ по тѣмъ предметамъ, которые будутъ *установлены* для

сего *соответствующимъ факультетомъ*“. Тотъ же принципъ довѣрія къ компетентности факультетовъ выраженъ и въ 6-мъ § тѣхъ же „Правилъ“ такъ: „По выполненіи обязательныхъ работъ и выдержаніи экзаменовъ студентъ получаетъ университетское свидѣтельство, въ которомъ обозначаются предметы, входящіе въ составъ избраннаго студентомъ учебнаго плана изъ числа *утвержденныхъ* для соответственнаго факультета и удостоверяется“ „что студентомъ выдержаны экзамены по тѣмъ предметамъ этого плана, которые входятъ въ составъ полукурсовыхъ испытаній и выполнены всѣ прочія работы, назначенныя для даннаго учебнаго плана *согласно постановленіямъ факультета*.“

Сверхъ совершенно основательнаго предоставленія факультету большаго простора для инициативы вообще въ учебныхъ дѣлахъ, въ только что приведенномъ нами извлеченіи изъ Правилъ 12 Юня 1906 г. обнаруживается и предоставленіе ему же права предлагать на выборъ студентамъ *нѣсколько* учебныхъ плановъ, требующихъ, однако, утвержденія Министра Народнаго Просвѣщенія, въ чемъ, впрочемъ, нельзя усматривать какого либо *нововведенія* по сравненію съ университетскимъ уставомъ 1884 г. Въдъ и въ послѣднемъ (въ 70-мъ §-ѣ) сказано: „каждый факультетъ составляетъ *одинъ* или *нѣсколько* учебныхъ плановъ, въ которыхъ обозначаются какъ науки, подлежащія изученію студентами того факультета, такъ и нормальный порядокъ ихъ изученія. Планы эти, равно какъ и всѣ дальнѣйшія въ нихъ измѣненія, по разсмотрѣніи Совѣтомъ университета, представляется на утвержденіе Министра Народнаго Просвѣщенія.“

Оказалось, однако, что предоставленіе одного лишь *права* рекомендовать на выборъ студентовъ одного и того же факультета *нѣсколькихъ* учебныхъ плановъ еще недостаточно для осуществленія этого *права*, какъ о томъ свидѣтельствуешь многолѣтній опытъ русскихъ университетовъ. Въ этомъ отношеніи особенно поучителенъ опытъ тѣхъ университетовъ Россіи, которые еще при дѣйствіи устава 1863 г. попытались было осуществлять *нѣсколько* учебныхъ плановъ, т. е. раздѣлить юридическій факультетъ на отдѣленія. Изъ него мы можемъ убѣдиться (см. Главу II-ую и III-ую настоящаго изслѣдованія), что надлежащее осуществленіе принципа специализаціи учебныхъ плановъ требуетъ большихъ преподавательскихъ силъ, чѣмъ тѣ, которыми до нынѣ располагали русскіе университеты и которыхъ можетъ быть достаточно для исполненія лишь *одного* учебнаго плана. А для увеличенія числа преподавательскаго персонала необходимо увеличеніе и денежныхъ средствъ для его содержанія и для подготовки, чего, однако, не оказалось при дѣйствіи въ университетахъ ни устава 1863 г.,

ни устава 1884 г., а также не предоставляется ихъ и для примѣненія „Правилъ“ 12 Іюня 1906 г. Если до нынѣ не хватало иногда личныя преподавательскія силы для того, чтобы замѣстить все свободныя вакансіи лицами съ *надлежащею учебною степенью*, и по необходимости приходилось нерѣдко довольствоваться услугами приватъ-доцентовъ, не обладающихъ даже магистерскою степенью, при томъ для того, чтобы вполне осуществить преподаваніе, соответствующее лишь *одному* учебному плану, то развѣ возможно надѣяться на то, чтобы вслѣдствіе *одного* лишь *подтвержденія* Правилами 12 Іюня 1906 г. уже ранѣе предоставленнаго факультетамъ *права* — предлагать на выборъ студентамъ нѣсколько учебныхъ плановъ — оказалось бы возможнымъ осуществить это право *безъ увеличенія денежныхъ средствъ* для содержанія преподавателей въ числѣ, достаточномъ для осуществленія *нѣсколькихъ* учебныхъ плановъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и для надлежащей подготовки этого прибавочнаго числа преподавателей, для которой, сверхъ денегъ, потребуется еще и нѣкоторое время, такъ какъ *надлежащимъ* образомъ *научно-подготовленныя* преподавательскія силы для удовлетворенія увеличенной потребности въ нихъ невозможно найти теперь же, сразу особенно же для *нѣсколькихъ* однородныхъ *факультетовъ*. Попытки же осуществленія *нѣсколькихъ* учебныхъ плановъ при настоящихъ *неблагопріятныхъ* для этого условіяхъ были бы лишь *вредны* для поддержанія довѣрія къ принципу спеціализаціи занятій, дискредитируя его неудачными попытками осуществленія. Рядомъ съ этимъ безплоднымъ, по нашему мнѣнію, при настоящихъ условіяхъ *повтореніемъ права* факультетовъ предлагать студентамъ на выборъ *нѣсколько* учебныхъ плановъ, Правилами 12 Іюня 1906 г. предоставляется факультетамъ возможность нынѣ же ввести улучшеніе въ постановку экзаменовъ, а чрезъ то оказать содѣйствіе и вообще успѣху учебнаго дѣла. Такъ, относительно полукурсовыхъ испытаній § 3-й вышеупомянутыхъ Правилъ устанавливается возможность введенія *предметной системы экзаменовъ*, говоря, что, „студентъ можетъ приступить къ экзамену лишь по тому *предмету*, который онъ прослушалъ, своевременно на него записавшись, и по которому онъ выполнилъ обязательныя для него *практическія* занятія.“ Обращая здѣсь вниманіе на каждый *предметъ* въ *отдѣльности*, а не *непрерѣнно на широкую группу ихъ*, при курсовой системѣ неразрывно до нынѣ связанную при экзаменѣ, этотъ § Правилъ несомнѣнно имѣетъ въ виду ту *предметную систему экзаменовъ*, желательность введенія которой предлагали и проекты университетскаго устава 1905 и 1906 г.г. При предметной же системѣ экзаменовъ студентъ можетъ являться

на экзаменъ лишь по тѣмъ предметамъ и тогда, по какимъ и когда онъ чувствуетъ себя достаточно подготовленнымъ, хотя бы въ то же время по другимъ предметамъ, которые курсовою системою неразрывно соединены въ группы, онъ не могъ бы *тогда же* держать экзамена, а при этомъ выдержавъ экзаменъ, по крайней мѣрѣ, удовлетворительно по какому-либо предмету въ отдѣльности, онъ не обязанъ его повторять. Если число экзаменующихся въ каждый изъ періодовъ, отведенныхъ для экзаменовъ, не будетъ превышать того числа, которое возможно успѣть проэкзаменовать *достаточно основательно*, то этимъ былъ бы устраненъ одинъ изъ существенныхъ недостатковъ нынѣшнихъ экзаменовъ на такихъ многолюдныхъ факультетахъ, каковыми оказываются въ *несколькихъ* университетахъ *юридическіе*. Этого же уравниенія числа экзаменующихся возможно было бы достигнуть, при помощи предварительной записи желающихъ экзаменоваться, ограниченіемъ ихъ числа для каждаго экзаменаціоннаго періода соотвѣтственно очереди записавшихся и нѣкоторыхъ другимъ условіямъ. Кромѣ только что отмѣченнаго ограниченія свободы экзаменовъ представляется совершенно раціональнымъ съ педагогической точки зрѣнія и другое, обусловливаемое желательною послѣдовательностью предметовъ не только при экзаменахъ, но и при подготовкѣ къ нимъ—при слушаніи лекцій по предметамъ, входящимъ въ каждый учебный планъ: между этими предметами, взятыми въ цѣломъ (а тѣмъ болѣе между ихъ отдѣлами) существуетъ такое взаимоотношеніе, что располагать ихъ въ произвольномъ порядкѣ представляется дѣламъ, совершенно нераціональнымъ съ истинно педагогической точки зрѣнія. Именно на такую *последовательность* при *изученіи предметовъ* (а не только при экзаменахъ) съ достаточнымъ основаніемъ обращаетъ вниманіе 70-й параграфъ университетскаго устава 1884 года. Что же касается тѣхъ измѣненій, которыя вносятся Правилами 12 Іюня 1906 г. въ производство экзаменовъ въ *испытательныхъ комиссіяхъ*<sup>1)</sup>, то для задачи нашего настоящаго изслѣдованія несомнѣнно существеннымъ нововведеніемъ представляется слѣдующее: между предметами испытаній *полукурсовыхъ* и производимыхъ въ *испытательныхъ комиссіяхъ* устанавливается совершенно справедливая *равноправность* какъ при удостоеніи ди-

<sup>1)</sup> Кстати здѣсь отмѣтить, что въ этихъ Правилахъ 12-го Іюня 1906 г., хотя имѣются въ виду экзамены, которые до нынѣ назывались *государственными*, уже не упоминается объ этомъ ихъ наименованіи.

пломовъ, такъ и при выборѣ темъ для сочиненій<sup>1)</sup>, что подтверждается слѣдующими мѣстами Правиль 12 Іюня 1906 г. Именно, въ пунктѣ б) § 8-го сказано: „сочиненіе на одобренную факультетомъ тему по *одному* изъ предметовъ, входящихъ въ составъ факультетскаго преподаванія“. Въ §-ѣ же 9-мъ тѣхъ же Правиль выражено: „въ комиссіяхъ производятся испытанія по тѣмъ предметамъ, по которымъ не установлено полукурсовыхъ испытаній, согласно планамъ, выработаннымъ факультетами и утвержденнымъ Министеромъ Народнаго Просвѣщенія“. Во второй же половинѣ § 12-го пояснено, что „для удостоенія диплома первой степени требуется, чтобы испытываемый *ви по одному* предмету не получилъ отмѣтки „неудовлетворительно“, и чтобы болѣе половины отмѣтокъ, полученныхъ имъ какъ на *полукурсовомъ испытаніи*, такъ и на *испытаніи комиссіи* было „весьма удовлетворительно“. Для полученія диплома второй степени *всѣ отмѣтки* должны быть по крайней мѣрѣ удовлетворительными“. Очевидная *равноправность всѣхъ* предметовъ и *устраненіе* бывшей до этихъ „Правиль“ *привилегіи*, которою пользовались отчасти всѣ тѣ предметы, экзамены которыхъ производились въ „государственныхъ комиссіяхъ, особенно же немногіе изъ нихъ, называвшіеся „*главными*“, проявились и въ слѣдующемъ 13-мъ § Правиль 12 Іюня 1906 г., въ которомъ между прочимъ выражено: „Въ дипломѣ обозначаются: а)... б) перечень предметовъ *испытаній полукурсовыхъ* и *въ комиссіи* и результаты испытаній по каждому изъ нихъ. Это же установленіе *равноправности* съ подтвержденіемъ *привилегіи* факультетовъ предлагать студентамъ для выбора *нѣскольکو* учебныхъ плановъ для одного и того же факультета, а также введеніе *предметной системы экзаменовъ* лишь и имѣю значеніе для темы нашего настоящаго изслѣдованія изъ всего содержанія Правиль 12-го Іюня 1906 г., почему обо всемъ остальномъ, въ нихъ заключающемся, мы считаемъ излишнимъ здѣсь упоминать.

Въ направленіи Правиль 12 Іюня 1906 г. ясно обнаружилось стремленіе настоящихъ (въ половинѣ 1906 г.) руководителей Министерсва Народнаго Просвѣщенія согласовать ихъ мѣропріятія съ желаніями, выраженными представителями университетовъ при пересмотрѣ университетскаго устава, а также антиципировать то, что

<sup>1)</sup> О письменныхъ же *отмѣткахъ*, которые требовались во время „государственныхъ“ экзаменовъ правилами, дѣйствовавшими, до 12 Іюня 1906 г. въ Правилахъ только что названнаго срока почему-то совершенно не упоминается. Не означаетъ ли это умолчаніе, что письменные отвѣты Правилами 12-го Іюня 1906 г. совершенно отмѣняются?

должно бытъ вопло и въ приэктъ университетскаго устава, представляемаго на утвержденіе его въ законодательномъ порядкѣ. Можетъ бытъ этою антиципаціею нѣкоторыхъ частей проэкта устава имѣется въ виду ранѣе санкціонированія проэкта испробовать предварительно на опытѣ полезность нѣкоторыхъ нововеденій, вошедшихъ въ Правила 12 Юня 1906 г. Однако, производство опытовъ при такихъ *совершенно ненормальныхъ* условіяхъ функционированія, въ какихъ *нынѣ* находятся *русскіе университеты*, а также *безъ снабженія послѣднихъ денежными средствами*, достаточными для *увеличенія преподавательскаго персонала*, необходимаго напимѣръ при исполненіи не *одного*, а *нѣсколькихъ* учебныхъ плсновъ, *не можетъ* дать такихъ *поучительныхъ* результатовъ, съ которыми слѣдовало бы сообразоваться при *оцѣнкѣ испытываемыхъ нововеденій*, если бы и были сдѣланы опыты ихъ примѣненія.

*Н. Яснопольскій.*

## Элементы математического анализа.

### I.

#### Виды интеграловъ уравненій съ частными производными.

1. Полный дифференціалъ функціи  $u = f(x, y, z, \dots)$  многихъ переменныхъ равенъ суммѣ всѣхъ ея частныхъ дифференціаловъ. Если эта функція  $u$  дана, то каждая изъ ея частныхъ производныхъ легко опредѣляется. Наоборотъ, если будутъ даны всѣ частныя производныя нѣкоторой функціи, то чрезъ интегрированіе полнаго уравненія, составленнаго по этимъ производнымъ, опредѣлится сама функція  $u$ . Въмѣсто отдѣльныхъ частныхъ производныхъ могутъ быть даны уравненія необходимыя и достаточныя для опредѣленія всѣхъ ихъ. Но если число этихъ уравненій будетъ менѣе числа производныхъ, входящихъ въ эти уравненія, то всѣ производныя опредѣлены быть не могутъ. Дифференціальныя уравненія представляющія зависимость между частными производными, по числу недостаточныя для опредѣленія всѣхъ входящихъ въ полный дифференціалъ искомой функціи, называются уравненіями съ частными производными. Интегрированіе уравненій съ частными производными представляетъ труднѣйшую задачу математическаго анализа.

Различіе между интегрированіемъ уравненій съ частными производными и уравненій обыкновенныхъ зависитъ отъ недостатка условій для вычисленія всѣхъ частныхъ производныхъ опредѣляемой функціи. Слѣдовательно вопросы выражающіеся уравненіями съ частными производными, стоятъ въ такомъ же отношеніи къ вопросамъ, выражающимся обыкновенными дифференціальными уравненіями, въ какомъ вопросы неопредѣленные стоятъ къ вопросамъ опредѣленнымъ.

Изъ того, что мы сказали, легко понять, что рѣшеніе или интегралы уравненій съ частными производными должны удовлетворять кромѣ данныхъ условій, еще условіямъ совершенно постороннимъ относительно тѣхъ, которыя представляются данными уравненіями. Дѣйствительно, какъ

увидимъ ниже, общіе интегралы уравненій съ частными производными содержатъ въ себѣ произвольныя функціи. Давая этимъ послѣднимъ различныя формы, можно удовлетворять разнообразнымъ дополнительнымъ условіямъ.

Уравненіемъ съ частными производными перваго порядка называется соотношеніе между извѣстнымъ числомъ независимыхъ переменныхъ, неизвѣстной ихъ функціей и частными производными перваго порядка этой послѣдней.

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будутъ  $n$  независимыхъ переменныхъ,  $z$  неизвѣстная ихъ функція и  $p_1, p_2, \dots, p_n$  частныя производныя этой послѣдней, взятыя относительно независимыхъ переменныхъ, такъ что

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}$$

гдѣ подъ  $k$  разумѣемъ каждое изъ цѣлыхъ чиселъ ряда отъ 1 до  $n$ .

Уравненіе съ частными производными перваго порядка (нелинейное), можетъ быть представлено въ слѣдующей формѣ

$$(1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

Происхожденіе этого уравненія изъ начальнаго, которое служить ему полнымъ интеграломъ, можетъ быть представлено слѣдующимъ образомъ<sup>1)</sup>.

Пусть дана нѣкоторая функція  $V$  содержащая  $n$  независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и ихъ функцію  $z$ ; кромѣ того въ эту функцію пусть входятъ  $n - 1$  переменныхъ параметровъ  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  и ихъ произвольная функція  $a$ .

Такимъ образомъ эта функція есть

$$V = f(z, x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a)$$

представимъ эту зависимость въ видѣ

$$(a) \quad V = 0$$

и рассмотримъ еще уравненія

$$(b) \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0 \dots \frac{\partial V}{\partial a_{n-1}} = 0.$$

<sup>1)</sup> Мы приводимъ это чтобы исправить неточность вывода даннаго на стр. 125 и слѣдующей нашего трактата.



изъ  $n$  уравнений (а) и (b) мы можем опредѣлить  $z, a_1, a_2 \dots a_{n-1}$  какъ функція переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ .

Мы можем поэтому принять, что полный дифференціалъ функціи  $V=0$  есть:

$$\frac{\partial V}{\partial z} \partial z + \frac{\partial V}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \partial x_n + \frac{\partial V}{\partial a_1} \partial a_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} \partial a_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_{n-1}} \partial a_{n-1} = 0.$$

при этомъ производныя

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

берутся въ томъ предположеніи, что  $a$  есть функція  $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$  и слѣдовательно функція  $x_1, x_2 \dots x_n$ .

Принимая во вниманіе уравненія (b) можемъ предыдущее представить въ видѣ

$$\frac{\partial V}{\partial z} \partial z + \frac{\partial V}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \partial x_n = 0 \quad (c)$$

Замѣтимъ, что полный дифференціалъ функціи  $z$  есть

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \partial x_n$$

или принимая означеніе

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

представляемъ это въ видѣ

$$\partial z = p_1 \partial x_1 + p_2 \partial x_2 + \dots + p_n \partial x_n$$

Если внесемъ это въ уравненіе (c), то представимъ его въ видѣ

$$\left( \frac{\partial V}{\partial z} p_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) \partial x_1 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} p_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) \partial x_2 + \dots + \left( \frac{\partial V}{\partial z} p_n + \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \partial x_n = 0$$

Такъ какъ  $x_1, x_2 \dots x_n$  суть переменныя независимыя, то это уравненіе удовлетворится при условіи

$$\frac{\partial V}{\partial z} p_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} p_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \dots \frac{\partial V}{\partial z} p_n + \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0. \quad (d)$$

если изъ этихъ уравненій и уравненія  $V=0$ , т. е. изъ  $n+1$  уравненій

исключимъ  $n$  величинъ  $a, a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ . то получимъ уравненіе

$$F(z, x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = 0$$

это и есть то уравненіе съ частными производными, о которомъ мы говоримъ. Вообще оно относительно производныхъ не линейно.

2. Задача интегрированія уравненія (1) состоитъ въ опредѣленіи наиболѣе общаго выраженія функціи  $z$  подъ тѣмъ условіемъ, чтобы эта функція  $z$ , будучи подставлена въ уравненіе (1), обращала его въ тождество.

Прежде чѣмъ изложимъ способъ интегрированія (1), посмотримъ отъ какихъ формъ первоначальныхъ соотношеній между  $x_1, x_2 \dots x_n$  и  $z$  можетъ возникать уравненіе (1).

Самая простая форма такого соотношенія есть выраженіе  $z$  въ видѣ явной функціи независимыхъ переменныхъ и столькохъ произвольныхъ постоянныхъ, сколько входитъ въ уравненіе независимыхъ переменныхъ. Такимъ образомъ простѣйшая форма соотношенія, изъ котораго возникаетъ уравненіе (1), есть

$$(2) \quad z = f(x_1, x_2 \dots x_n, a, a_2 \dots a_n)$$

Дифференцируя эту функцію относительно каждой независимой переменной, мы составимъ  $n$  частныхъ производныхъ вида

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

исключая между этими уравненіями (2) и (3) (которыхъ будетъ  $n + 1$ )  $n$  постоянныхъ  $a_1, a_2 \dots a_n$  въ результатѣ исключенія получимъ уравненіе вида (1). Если этотъ результатъ исключенія постоянныхъ дѣйствительно будетъ тождественъ съ уравненіемъ (1), то выраженіе (2) должно считаться интеграломъ уравненія (1). Этотъ интегралъ содержащій въ себѣ столько же произвольныхъ постоянныхъ, сколько данное дифференціальное уравненіе содержитъ независимыхъ переменныхъ, названъ Лагранжемъ *полнымъ интеграломъ* уравненія съ частными производными.

Но легко понять, что полный интегралъ (2) не представляетъ еще собою наиболѣе общаго выраженія функціи  $z$  удовлетворяющей уравненію (1). Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (1) получается изъ выраженія (2) посредствомъ выраженій (3), и если эти уравненія (2) не измѣняютъ своего вида, какъ бы не измѣнялось значеніе постоянныхъ  $a_1, a_2 \dots a_n$ , то уравненіе (2) будетъ представлять собою интегралъ уравненія (1) при всякихъ значеніяхъ постоянныхъ. Если даже предположимъ, что  $a_1, a_2 \dots a_n$

суть сами такія функціи независимых переменных  $x_1, x_2 \dots x_n$ , при которых производныя (3) не мѣняютъ своей первоначальной формы, какъ въ томъ случаѣ, когда  $a_1, a_2 \dots a_n$  разсматриваются какъ дѣйстви-тельно постоянныя величины, такъ и въ томъ случаѣ, когда они принимаются за функціи переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ , то при этомъ условіи выраженіе (2) останется интеграломъ уравненія (1).

Посмотримъ при какомъ условіи въ предположеніи что  $a_1, a_2 \dots a_n$  суть функціи  $x_1, x_2 \dots x_n$  производныя сохраняютъ свою форму.

Дифференцируя выраженіе (2) по каждой независимой переменной и считая при этомъ  $a_1, a_2 \dots a_n$  за функціей  $x_1, x_2 \dots x_n$ , получимъ

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_k}$$

гдѣ подъ  $k$  разумѣемъ каждое изъ чиселъ 1, 2... $n$ . Это выраженіе будетъ тождественно съ соответствующей производной  $\frac{\partial z}{\partial x_k}$  изъ ряда (3), если функціи  $a_1, a_2 \dots a_n$  будутъ таковы, что будутъ удовлетворять условію

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_k} = 0. \quad (4)$$

Давая сдѣсь указателю  $k$  значенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до  $n$ , мы составимъ  $n$  подобныхъ уравненій, которыя представляютъ собою систему линейныхъ уравненій относительно частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial a_n}$$

Эти линейныя уравненія удовлетворятся, если

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_k} = 0 \dots \frac{\partial a_n}{\partial x_k} = 0$$

т. е. они удовлетворятся, если  $a_1, a_2 \dots a_n$  будемъ принимать за постоянныя величины. Этотъ случай соответствуетъ полному интегралу.

Упомянутыя линейныя уравненія (4) удовлетворятся еще въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0 \dots \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

Если при помощи этихъ уравненій исключимъ изъ интеграла (2) всѣ  $n$  произвольныхъ постоянныхъ, то получимъ въ результатъ такое рѣшеніе даннаго уравненія (1), которое не будетъ болѣе содержать произвольныхъ

постоянныхъ, такое рѣшеніе уравненія (1) называется особымъ интеграломъ.

Если мы предполагаемъ, что  $a_1, a_2 \dots a_n$  суть функции всѣхъ или только нѣкоторыхъ изъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ , то понятно что можемъ также предположить, что между величинами  $a_1, a_2 \dots a_n$  существуетъ зависимость, что эти величины связаны между собою нѣкоторыми произвольными соотношеніями. Допустимъ что число этихъ соотношеній есть  $n - 1$ , тогда изъ этихъ соотношеній можетъ опредѣлять  $n - 1$  постоянныхъ  $a_k$  въ функции остальной. Выполнивъ это, мы получимъ уравненія вида

$$(5) \quad a_1 = \varphi_1(a_n); \quad a_2 = \varphi_2(a_n) \dots a_{n-1} = \varphi_{n-1}(a_n)$$

Если представимъ интеграль даннаго уравненія въ видѣ

$$(5_*) \quad f(z, x_1, x_2 \dots x_n, a_1, a_2 \dots a_n) = 0$$

то принимая во вниманіе выраженіе (5), при дифференцированіи этого интеграла относительно какого либо переменнаго  $x_k$  должны будемъ брать дифференціалъ относительно  $x_k$  входящаго явно, относительно того же переменнаго входящаго въ функцию  $z$  и наконецъ относительно  $x_k$  входящаго въ каждую изъ функций  $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$  въ зависимости отъ  $a_n$ . Такимъ образомъ въ результатѣ дифференцированія будемъ имѣть

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_k} + \left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial a_n} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial a_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_n} \right| \frac{\partial a_n}{\partial x_k} = 0$$

Если приравняемъ нулю коэффициентъ при  $\frac{\partial a_n}{\partial x_k}$  при какомъ либо  $k$  отъ 1 до  $n$ , то предыдущая производная представится въ видѣ

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0$$

т. е. въ видѣ какой имѣла бы эта производная, если бы всѣ  $a_1, a_2 \dots a_n$  принимались за постоянныя величины, и исключеніе величинъ  $a_1, a_2 \dots a_n$  между уравненіями (2) и (7) опять привело бы насъ къ уравненію (1).

Слѣдовательно мы получимъ также рѣшеніе уравненія (1), если исключимъ величины  $a_1, a_2 \dots a_n$  между уравненіями (1) и уравненіемъ

$$\left( \frac{\partial f}{\partial a_n} \right) = 0$$

гдѣ подъ  $\left( \frac{\partial f}{\partial a_n} \right)$  разумѣемъ производную взятую отъ интеграла (2) отно-

нительно  $a_n$  въ томъ предположеніи, что  $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$  суть функции отъ  $a_n$ . Эта производная, какъ показываетъ выраженіе (6), есть

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial a_n} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial a_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_n}$$

этотъ результатъ исключенія содержащей  $n - 1$  произвольныхъ функций называется общимъ интеграломъ даннаго уравненія (1).

Если вмѣсто  $n - 1$  соотношеній между  $a_1, a_2 \dots a_n$  существуетъ только  $n - 2$  соотношеній, то изъ этихъ соотношеній мы можемъ опредѣлить  $n - 2$  постоянныхъ въ функцияхъ двухъ остальныхъ, такимъ образомъ изъ  $n - 2$  соотношеній между постоянными получимъ

$$a_1 = \varphi_1(a_{n-1}, a_n); \quad a_2 = \varphi_2(a_{n-1}, a_n) \dots a_{n-2} = \varphi_{n-2}(a_{n-1}, a_n)$$

тогда производная интеграла (5<sub>\*</sub>) относительно  $x_k$  можетъ быть представлена въ видѣ

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_k} + \left[ \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial a_{n-1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-2}} \frac{\partial a_{n-2}}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \right] \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_k} \\ + \left[ \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial a_n} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial a_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-2}} \frac{\partial a_{n-2}}{\partial a_n} + \frac{\partial f}{\partial a_n} \right] \frac{\partial a_n}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнивая нулю суммы заключающіяся въ скобкахъ, мы приведемъ производныя интеграла къ виду (7); исключеніе постоянныхъ  $a_1, a_2 \dots a_n$  между уравненіями (2) и (7) опять приведетъ насъ къ данному уравненію.

Такимъ образомъ данное уравненіе можетъ имѣть второй общій интегралъ содержащей  $n - 2$  произвольныхъ функций. Этотъ второй общій интегралъ представляется уравненіемъ (2) совмѣстно съ уравненіями

$$a_1 = \varphi_1(a_{n-1}, a_n) \dots a_{n-2} = \varphi_{n-2}(a_{n-1}, a_n)$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \right) = 0; \quad \left( \frac{\partial f}{\partial a_n} \right) = 0$$

гдѣ послѣднія уравненія представляютъ собою суммы заключающіяся въ уравненіи (8).

Итакъ рѣшеніе уравненія съ частными производными представляются или полнымъ, или общимъ, или наконецъ особымъ. Рѣшеній отличныхъ отъ этихъ и выводимыхъ изъ общаго интеграла не существуетъ. Доказать это положеніе не трудно.

Допустимъ, что кромѣ интеграла (2) еще удовлетворяетъ данному уравненію выраженіе вида

$$(9) \quad z = \psi(x_1, x_2 \dots x_n)$$

по свойству интеграла (2) и предполагаемого теперь рѣшенія, мы получимъ изъ уравненія (1) два тождества вида

$$(10) \quad \begin{aligned} F(x_1, x_2 \dots x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) &= 0 \\ F(x_1, x_2 \dots x_n, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}) &= 0 \end{aligned}$$

Докажемъ, что въ интегралѣ (2) величины  $a_1, a_2 \dots a_n$  могутъ быть опредѣлены такимъ образомъ, чтобы онъ былъ тождественъ съ рѣшеніями (9). для этого величины  $a_1, a_2 \dots a_n$  числомъ  $n$  должны быть выбраны такъ, чтобы они удовлетворяли  $n + 1$  уравненіямъ формы

$$(11) \quad \psi = f; \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial \psi}{\partial x_n}$$

но легко видѣть, что какое либо одно изъ этихъ уравненій есть слѣдствіе всѣхъ остальныхъ, ибо если возьмемъ такія  $a_1, a_2 \dots a_n$ , которыя удовлетворяютъ  $n$  послѣднимъ изъ этихъ уравненій, то по уравненію (8) прямо видимъ, что удовлетворится и уравненіе  $\psi = f$ . Итакъ, чтобы возстановить тождество между интеграломъ (2) и выраженіемъ (9), достаточно выбрать величины  $a_1, a_2 \dots a_n$  такимъ образомъ, чтобы они удовлетворяли системѣ  $n$  послѣднихъ изъ уравненій (11), но это сдѣлать всегда возможно, ибо изъ  $n$  уравненій всегда можно опредѣлить  $n$  величинъ.

Если при этомъ опредѣленіи величины  $a_1, a_2 \dots a_n$  окажутся дѣйствительно постоянными, то рѣшеніе (9) будетъ представлять первый изъ рассмотренныхъ нами случаевъ. Рѣшеніе (9) будетъ полнымъ интеграломъ даннаго уравненія,

Если же при упомянутомъ опредѣленіи окажется, что  $a_1, a_2 \dots a_n$  будутъ переменныя, зависящія отъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ , то рассматривая ихъ такими, мы должны будемъ представить послѣднія  $n$  изъ уравненій (11) въ видѣ

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_1} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_2} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_n} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \end{aligned}$$

по принимая во вниманіе уравненія (11), приводимъ предыдущія уравненія къ виду

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_1} = 0$$

.....

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_n} = 0$$

откуда заключаемъ, что величины  $a_1, a_2 \dots a_n$  удовлетворяющія уравненіямъ (11) удовлетворяютъ и уравненіямъ (4), а при этомъ рѣшеніе (9) необходимо приводится къ одному изъ разсматриваемыхъ выше, и новой формы не представляетъ.



## II.

### Интегрирование линейныхъ уравненій съ частными производными.

3. Мы будемъ называть уравненія независимыми, если каждое изъ нихъ не обращается въ тождество послѣ подстановки въ него такихъ значеній переменныхъ, которыя найдены изъ остальныхъ уравненій этой группы.

Пусть  $F_1, F_2 \dots F_n$  будутъ функціи переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ ; составимъ изъ этихъ функцій уравненія

$$(12) \quad F_1 = C_1; \quad F_2 = C_2 \dots F_n = C_n$$

въ которыхъ будемъ разсматривать величины  $C_1, C_2 \dots C_n$  какъ произвольныя величины. Если изъ этихъ уравненій нельзя исключить всѣхъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ , то мы будемъ называть функціи  $F_1, F_2 \dots F_n$  независимыми функціями. Если же, наоборотъ, изъ уравненій (12) могутъ быть исключены всѣ переменныя, то мы получимъ въ результатѣ исключенія одно или нѣсколько уравненій вида

$$\Phi(C_1, C_2 \dots C_n) = 0$$

Подставимъ сюда вмѣсто  $C_1, C_2 \dots C_n$  ихъ выраженія по уравненіямъ (12), тогда между функціями  $F_1, F_2 \dots F_n$  установится зависимость вида

$$\Phi(F_1, F_2 \dots F_n) = 0$$

и эти функціи будутъ такимъ образомъ въ извѣстной зависимости между собой. Итакъ уравненія будутъ зависямыя между собой, если всѣ переменныя изъ нихъ могутъ быть исключены.



Пусть  $v_1, v_2 \dots v_n$  будут некоторыя функции независимых переменных  $x_1, x_2 \dots x_n$  и их функции  $z$ . Допустимъ что между этими функциями существуетъ некоторая зависимость представленная уравненіемъ

$$f(v_1, v_2 \dots v_n) = 0$$

гдѣ  $f$  есть совершенно произвольная функция. Исключая известнымъ образомъ эту произвольную функцию, получимъ въ результатѣ линейное уравненіе съ частными производными. Для этого возьмемъ отъ предыдущаго уравненія  $n$  частныхъ производныхъ по независимымъ переменнымъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ . Всѣ эти частныя производныя будутъ заключаться въ формѣ

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + \frac{\partial v_1}{\partial z} p_k \right) + \frac{\partial f}{\partial v_2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_k} + \frac{\partial v_2}{\partial z} p_k \right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial v_n} \left( \frac{\partial v_n}{\partial x_k} + \frac{\partial v_n}{\partial z} p_k \right) = 0$$

гдѣ  $p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}$  и  $k$  имѣетъ значенія цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до  $n$ . Поэтому такихъ уравненій будетъ  $n$  и они представляются въ видѣ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_k} + \\ & + \left[ \frac{\partial f}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial z} + \dots + \frac{\partial f}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial z} \right] p_k = 0 \end{aligned}$$

положимъ для краткости

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial z} + \dots + \frac{\partial f}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial z} = H \tag{13}$$

тогда каждое изъ  $n$  рассматриваемыхъ уравненій приметъ видѣ

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_k} + H p_k = 0 \tag{14}$$

чтобы изъ этихъ  $n$  уравненій исключить производныя произвольной функции, введемъ неопредѣленныхъ множителей. Помножимъ уравненіе (13) на произвольнаго множителя  $Z$ , а уравненіе (14) на произвольнаго множителя  $X_k$  и произведеніе сложимъ, тогда въ суммѣ получимъ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial v_1} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial z} Z + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} X_k \right] + \frac{\partial f}{\partial v_2} \left[ \frac{\partial v_2}{\partial z} Z + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial v_2}{\partial x_k} X_k \right] + \dots \\ & + \frac{\partial f}{\partial v_n} \left[ \frac{\partial v_n}{\partial z} Z + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial v_n}{\partial x_k} X_k \right] + H \left[ \sum_{k=1}^{k=n} p_k X_k - Z \right] = 0 \end{aligned} \tag{15}$$



есть  $n$ . Поэтому изъ уравненій (16) мы опредѣлимъ отношенія

$$\frac{X_1}{Z}, \frac{X_2}{Z} \dots \frac{X_n}{Z}$$

Затѣмъ принимая  $Z = 1$ , или полагая  $Z$  равнымъ нѣкоторой произвольной функціи, получимъ коэффициенты  $X_1, X_2 \dots X_n$ .

Итакъ наиболѣе общая форма, которую можетъ имѣть линейное уравненіе съ частными производными перваго порядка есть форма (18) или

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = X \tag{18*}$$

гдѣ  $z$  есть неизвѣстная функція переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$  и  $X_1, X_2 \dots X_n$  суть данныя функціи тѣхъ же переменныхъ.

Это уравненіе, какъ мы знаемъ, имѣеть интеграль

$$\varphi_1(z, x_1, x_2 \dots x_n) = C \tag{19}$$

гдѣ  $C$  есть произвольная постоянная. Составимъ по этому уравненію частныя производныя по каждому изъ переменныхъ, тогда найдемъ

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_2} &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{20}$$

гдѣ производныя заключенныя въ скобки берутся относительно переменныхъ входящихъ независимо отъ  $z$ .

Изъ этихъ уравненій составляемъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}} \quad \text{и т. д.}$$

Внося это въ уравненіе (18), получимъ

$$X \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + X_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = 0 \tag{21}$$

если это тождественно удовлетворяется, то  $\varphi_1$  есть интеграль однороднаго

уравненія

$$(22) \quad X \frac{\partial \varphi}{\partial z} + X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что интегрированіе уравненія (18\*) приводится къ интегрированію однороднаго уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ рѣшеніе уравненія (18\*) приравнявая произвольной постоянной интеграль уравненія (21); но интегралы совокупныхъ уравненій

$$(23) \quad \frac{\partial z}{X} = \frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \dots = \frac{\partial x_n}{X_n}$$

[къ которымъ приводится, какъ мы знаемъ (т. II стр. 152), интегрированіе уравненія (18\*)] приравненные постояннымъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ интегралы уравненія (22).

Итакъ между интегралами уравненій (23) слѣдуетъ искать интегралы уравненія (18\*). Наоборотъ всякій интеграль уравненій (23), напр.  $\varphi_1 = C$  обращаетъ уравненіе (22) въ тождество.

Слѣдовательно если изъ уравненія  $\varphi_1 = C$  опредѣлимъ  $z$  и уравненіе (21) раздѣлимъ на  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ , то оно по уравненіямъ (20) обратится въ

$$-X + X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

т. е. въ уравненіе (18\*).

Такимъ образомъ величиною  $z$  выведенною изъ уравненія

$$\varphi_1(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = C$$

удовлетворяется уравненіе (18\*).

Изъ всего этого приходимъ къ заключенію, что всякій интеграль уравненій (23) есть интеграль уравненія (18\*). Этотъ интеграль имѣетъ видъ  $\varphi_1 = C$ .

Пусть

$$\varphi_1 = C_1; \quad \varphi_2 = C_2 \dots \varphi_n = C_n$$

будутъ интегралы совокупныхъ уравненій (23). Произвольная функція

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \text{пост.}$$

будетъ самая общая форма интеграла уравненія (18\*).

Итакъ, чтобы интегрировать уравненіе (18\*), мы должны интегрировать совокупныя уравненія (23), и произвольную функцію ихъ инте-

градовъ приравнять постоянной или нулю, что по произвольности функций совершенно допустимо.

Пояснимъ эти соображенія на частномъ примѣрѣ.

Будемъ интегрировать уравненіе

$$z xp + y zq = xy$$

гдѣ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Составляя для даннаго уравненія совокупныя уравненія (23), имѣемъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{yz} = \frac{\partial z}{xy}$$

потому для опредѣленія функций  $\varphi_1 = C$  и  $\varphi_2 = C$  предстоитъ интегрировать совокупныя уравненія

$$xy \partial x = zx \partial z; \quad xy \partial y = yz \partial z$$

пусть

$$\frac{x}{z} = t; \quad \frac{y}{z} = u$$

тогда

$$\partial x = z \partial t + t \partial z; \quad \partial y = z \partial u + u \partial z$$

и кромѣ того

$$xy = z^2 tu; \quad zx = z^2 t; \quad zy = z^2 u$$

такимъ образомъ предыдущія уравненія обращаются въ

$$z^2 tu (z \partial t + t \partial z) - z^2 t \partial z = 0$$

$$z^2 tu (z \partial u + u \partial z) - z^2 u \partial z = 0$$

или

$$u (z \partial t + t \partial z) - \partial z = 0; \quad t (z \partial u + u \partial z) - \partial z = 0$$

откуда

$$(1 - tu) \partial z - uz \partial t = 0; \quad (1 - tu) \partial z - tz \partial u = 0$$

Слѣдовательно

$$(1 - tu) \frac{\partial z}{z} = u \cdot \partial t; \quad (1 - tu) \frac{\partial z}{z} = t \cdot \partial u \quad (a)$$

поэтому

$$u \partial t - t \partial u = 0$$

интеграль этого уравненія есть

$$\lg t - \lg u = \lg C_1; \text{ или } \frac{t}{u} = C_1$$

исключая посредствомъ этого  $t$  изъ второго изъ уравненій (а), получаемъ

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{C_1 u \cdot \partial u}{1 - C_1 u^2}$$

Интегрируя это, имѣемъ

$$\lg z = -\frac{1}{2} \lg(1 - C_1 u^2) + \frac{1}{2} \lg C_2$$

или

$$z \sqrt{1 - C_1 u^2} = \sqrt{C_2}$$

исключая отсюда  $C_1$  посредствомъ интеграла  $\frac{t}{u} = C_1$ , имѣемъ

$$z \sqrt{1 - t u} = \sqrt{C_2}$$

Возвращаясь къ первоначальнымъ переменнымъ, представляемъ найденные интегралы въ видѣ

$$\frac{x}{y} = C_1; \quad z^2 - xy = C_2$$

Слѣдовательно общій интеграль данного уравненія будетъ имѣть видѣ

$$z^2 - xy = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

гдѣ  $\varphi$  есть произвольная функція.

Если для данного линейнаго уравненія съ частными производными та функція, которую мы означили чрезъ  $Z$ , равна нулю и уравненіе имѣеть видѣ

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

то такое уравненіе, какъ мы сказали, называется однороднымъ. для него совокупныя уравненія могутъ быть написаны въ видѣ

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \dots = \frac{\partial x_n}{X_n} = \frac{\partial z}{0}$$

Конечно въ этомъ видѣ послѣднее отношеніе имѣеть только условное значеніе.—оно показываетъ что функція  $z$  разсматривается какъ постоянная, въ самомъ дѣлѣ если послѣднее отношеніе соединимъ съ какимъ либо другимъ въ этой пропорціи, то получимъ

$$\partial z = 0 \quad \text{и} \quad z = C$$

это мы и можемъ считать за одинъ изъ интеграловъ условныхъ пропорцій. Функціи  $X_1, X_2 \dots X_n$  вообще могутъ содержать  $z$ , но если мы опустимъ послѣднее отношеніе, а въ остальныхъ положимъ  $z = C$ , и будемъ интегрировать эти остальные, то интегралы ихъ числомъ  $n - 1$  будутъ

$$v_1 = C_1, \quad v_2 = C_2 \dots v_{n-1} = C_{n-1}$$

и функціи  $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$  не содержатъ перемѣннаго  $z$ . Въ этомъ случаѣ произвольная зависимость между функціями  $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$  представляющая общій интеграль даннаго уравненія можетъ быть написана въ видѣ

$$z = \varphi(v_1, v_2, v_3 \dots v_{n-1})$$

Такъ наприимѣръ для уравненія

$$px + qy = 0$$

имѣемъ условныя пропорціи

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial z}{0}$$

послѣднее отношеніе показываетъ, что  $z = C_1$ ; остальные даютъ

$$x \partial y - y \partial x = 0$$

интеграль чего имѣеть видъ

$$\frac{y}{x} = C_2$$

Слѣдовательно общій интеграль даннаго уравненія есть

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

### III.

#### Свойства частных интегралов линейных уравнений с частными производными. Интегрирующие множители уравнений с частными производными. Последний множитель Якоби.

4. В общих чертах мы представили способ интегрирования линейных уравнений с частными производными, т. е. показали каким образом решение этого вопроса приводится к интегрированию совокупных уравнений и как может быть найден общий интеграл данного уравнения, но этим важным вопросом анализа, который мы теперь рассматриваемъ, не исчерпывается.

Мы должны имѣть въ виду кромѣ общаго еще полный интеграль. должны указать хотя нѣкоторыя свойства частных интегралов линейных уравнений с частными производными; должны дать понятіе объ интегрирующемъ множителѣ линейнаго уравненія с частными производными, о послѣднемъ множителѣ, указанномъ Якоби, и наконецъ должны представить хотя главнѣйшія положенія относящіяся къ теоріи интегрирования совмѣстныхъ линейныхъ уравненій с частными производными.

Къ рѣшенію этихъ вопросовъ мы теперь и перейдемъ.

Однородное линейное уравненіе с частными производными перваго порядка, какъ мы видѣли, представляется въ формѣ

$$(24) \quad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

злѣсь подъ  $X_1, X_2 \dots X_n$  мы разумѣемъ нѣкоторыя функціи независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ .



Частными интегралами этого уравнения называются такія функціи независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ <sup>1)</sup> не содержація произвольныхъ постоянныхъ, которыя, будучи подставлены вмѣсто  $z$  въ данное дифференціальное уравненіе, обращаютъ его въ тождество.

Нетрудно убѣдиться, что существуетъ только  $n - 1$  независимыхъ другъ отъ друга функцій  $f_1, f_2 \dots f_{n-1}$  (при  $n$  независимыхъ переменныхъ), которыя обладаютъ этимъ свойствомъ.

Пусть такія функціи будутъ

$$y_1 = f_1(x_1, x_2 \dots x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2 \dots x_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

Эти функціи  $y_1, y_2 \dots$  мы можемъ считать новыми переменными.

Допустимъ, что изъ полного числа  $n - 1$  такихъ функцій намъ извѣстны  $n - m$  подобныхъ функцій. Такимъ образомъ предполагаемъ, что намъ извѣстны функціи

$$y_1 = f_1(x_1, x_2 \dots x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \tag{25}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{n-m} = f_{n-m}(x_1, x_2 \dots x_n)$$

по упомянутому свойству эти функціи  $y_1, y_2 \dots$  могутъ считаться интегралами (частными) даннаго уравненія.

Пользуясь этими уравненіями (25), мы представимъ переменныя

$$x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$$

числомъ  $n - m$  изъ ряда

$$x_1, x_2 \dots x_m, x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$$

въ зависимости отъ новыхъ переменныхъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-m}$ .

Если подъ  $x_1$  будемъ разумѣть какое либо переменное изъ ряда

$$x_1, x_2 \dots x_m$$

а подъ  $x_2$  одно изъ переменныхъ ряда

$$x_{m+1}, \dots x_n$$

<sup>1)</sup> Всѣхъ или нѣкоторыхъ.

то функція

$$z = F(x_1, x_2 \dots x_m, x_{m+1} \dots x_n)$$

послѣ исключенія изъ нея  $x_k$  посредствомъ уравненій (25) приметъ видъ

$$(26) \quad z = F(x_1, x_2 \dots x_m, y_1, y_2 \dots y_{n-m})$$

Переменные изъ группы  $x_k$  входятъ сюда только въ зависимости отъ переменныхъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-m}$  и такимъ образомъ

$$(27) \quad \frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-m}} \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_k}$$

что же касается до переменныхъ изъ группы  $x_i$ , то понятно, что

$$(28) \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-m}} \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_i}$$

гдѣ  $\left( \frac{\partial z}{\partial x_i} \right)$  есть производная взятая отъ  $z$  относительно  $x_i$  входящаго въ уравненіе (26) явно.

Данное уравненіе (24) можно представить въ видѣ

$$\sum_{i=1}^{i=m} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_{k=m+1}^{k=n} X_k \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0.$$

подстановка сюда выраженій (27) и (28) приводитъ это къ виду

$$\begin{aligned} & \sum X_i \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-m}} \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_i} \right] \\ & + \sum X_k \left( \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-m}} \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_k} \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=m} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial y_1} \left[ \sum_i X_i \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \sum_k X_k \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \right] \\ & + \frac{\partial z}{\partial y_2} \left[ \sum_i X_i \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \sum_k X_k \frac{\partial y_2}{\partial x_k} \right] \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{\partial z}{\partial y_{n-m}} \left[ \sum_i X_i \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_i} + \sum_k X_k \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_k} \right] = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & X_1 \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) + X_2 \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) + \dots + X_m \left( \frac{\partial z}{\partial x_m} \right) \\
 & + \frac{\partial z}{\partial y_1} \left[ X_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \right] \\
 & + \frac{\partial z}{\partial y_2} \left[ X_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \right] \\
 & + \dots \\
 & + \frac{\partial z}{\partial y_{n-m}} \left[ X_1 \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_{n-m}}{\partial x_n} \right] = 0
 \end{aligned}$$

но коэффициенты при производныхъ

$$\frac{\partial z}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial y_{n-m}}$$

суть результаты подстановки  $y_1, y_2 \dots y_{n-m}$  въ данное уравненіе, а такъ какъ мы предполагаемъ, что  $y_1 \dots y_{n-m}$  суть интегралы даннаго уравненія, то такая подстановка обращаетъ данное уравненіе тождественно въ нуль, и слѣдовательно эти коэффициенты тождественно равны нулю и изъ предыдущаго уравненія остается только

$$X_1 \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) + X_2 \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) + \dots + X_m \left( \frac{\partial z}{\partial x_m} \right) = 0$$

то есть также линейное однородное уравненіе какъ и данное. Предположимъ, что для него мы знаемъ  $l$  интеграловъ, гдѣ  $l < m$ . Примѣняя всѣ предыдущія разсужденія къ этому уравненію, мы придемъ опять къ однородному линейному уравненію съ меньшимъ числомъ переменныхъ. Все это можемъ повторять до тѣхъ поръ, пока  $m > 1$ . При  $m=1$ , то есть въ томъ случаѣ, когда извѣстны  $n-1$  интеграловъ, или независимыхъ между собою функций, обращающихъ данное уравненіе въ тождество, мы опредѣлимъ какъ прежде  $x_1, x_2 \dots x_n$  въ функции новыхъ переменныхъ, (т. е. этихъ извѣстныхъ интеграловъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ ) изъ уравненій

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\
 y_2 &= f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \\
 &\dots \\
 y_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2 \dots x_n)
 \end{aligned}$$

и придемъ къ уравненію

$$(29) \quad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0.$$

Этому можемъ удовлетворить двумя положеніями или  $X_1=0$ , или  $\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$ , но первое не имѣетъ мѣста, ибо въ противномъ случаѣ данное уравненіе (24) не содержало-бы перваго члена, а этого мы не предполагаемъ. Следовательно остается принять

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$

другими словами, принять,—что  $z$  не содержитъ  $x_1$ , а есть функція только интеграловъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ . Такъ что

$$z = \varphi(y_1, y_2 \dots y_{n-1})$$

Такъ какъ только въ предположеніи, что существуетъ не болѣе  $n - 1$  независимыхъ интеграловъ мы можемъ придти къ уравненію вида (26), и такъ какъ за  $x_1$  можетъ быть принято, тогда любое изъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ , (ибо никакихъ ограниченій относительно остающагося переменнаго мы не дѣлали), то на основаніи этихъ соображеній приходимъ къ такому выводу: Для линейнаго уравненія съ  $n$  независимыми переменными существуетъ только  $n - 1$  независимыхъ другъ отъ друга функцій, которыя удовлетворяютъ данному уравненію (24). Всякая другая функція также удовлетворяющая уравненію (24) можетъ быть представлена въ видѣ функція, въ которую не входитъ явно ни одно изъ независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ . Всѣ эти функція называются частными интегралами уравненія (24).

5. Всякая функція частныхъ интеграловъ есть также интеграль даннаго уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ предположимъ, что

$$(30) \quad z = \varphi(y_1, y_2 \dots y_{n-1})$$

гдѣ  $\varphi$  есть произвольная функція частныхъ интеграловъ, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1}$$

такихъ выраженій составимъ столько, сколько независимыхъ переменныхъ входитъ въ данное уравненіе. Эти уравненія для краткости представимъ

въ видѣ

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_n}$$

гдѣ  $i$  имѣеть значенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до  $n-1$ , ибо частныхъ интеграловъ мы предполагаемъ  $n-1$ .

Внося эти производныя въ данное уравненіе, имѣемъ

$$X_1 \sum \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \dots + X_n \sum \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_n} = 0$$

или

$$\begin{aligned} & X_1 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} \right] \\ & + X_2 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} \right] \\ & + \dots \dots \dots \\ & + X_n \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \right] = 0 \end{aligned}$$

или наконецъ

$$\begin{aligned} & \left[ X_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \\ & + \left[ X_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \left[ X_1 \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} = 0. \end{aligned}$$

Такъ какъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$  суть интегралы даннаго уравненія, то всѣ коэффициенты при производныхъ  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}}$  тождественно обращаются въ нули, и это уравненіе удовлетворится какова бы не была функція  $\varphi$ .

Интегралъ вида (30) называется общимъ интеграломъ; система же  $n-1$  независимыхъ интеграловъ называется полной системой частныхъ интеграловъ уравненія (24).

6. Если рассмотримъ полную систему интеграловъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ . то подстановка каждаго изъ нихъ въ данное уравненіе удовлетворяеть ему, и мы имѣемъ  $n-1$  уравненій вида

$$X_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_1}{\partial x_n} = 0$$

$$X_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_2}{\partial x_n} = 0$$

.....

$$X_1 \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

Присоединимъ къ этой системѣ данное уравненіе (24).

Условіе, при которомъ всё эти уравненія совмѣстны и удовлетворяются при одной и той же системѣ функций  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , представляется уравненіемъ (см. стр. 100)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Если разложимъ этотъ детерминантъ по элементамъ первой горизонтальной строки и соответствующіе миноры означимъ чрезъ  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , то этотъ обращающійся въ нуль детерминантъ представится въ видѣ

$$(31) \quad A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

это уравненіе должно быть тождественно съ даннымъ, или можетъ отличаться отъ него на нѣкотораго общаго множителя; другими словами, коэффициенты этихъ уравненій должны быть пропорціональны. Поэтому сравнивая уравненія (24) и (31) заключаемъ, что должна существовать такая функция  $M$ , которая представляетъ отношенія

$$(32) \quad \frac{A_1}{X_1} = \frac{A_2}{X_2} = \dots = \frac{A_n}{X_n} = M$$

и  $M$  независитъ отъ искомой функции, ибо функции  $X_i$  не зависятъ отъ  $z$ ,

равно и миноры  $A_i$  входящие въ составъ разложенія по элементамъ первой строки отъ  $z$  независятъ.

Этотъ множитель  $M$ , который введемъ въ уравненіе (31), если заѣмнимъ  $A_i$  чрезъ  $X_i M$ , Якоби называетъ интегрирующимъ множителемъ даннаго уравненія.

Если полную систему частныхъ интеграловъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$  приравняемъ произвольнымъ постояннымъ, то получимъ уравненія

$$y_1 = C, y_2 = C_2 \dots y_{n-1} = C_{n-1}$$

продифференцировавъ эти уравненія по всѣмъ независимымъ переменнымъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ , получимъ систему  $n - 1$  независимыхъ между собою уравненій

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} dx_n = 0$$

изъ которыхъ подобнымъ образомъ какъ сейчасъ найдемъ

$$\frac{\partial x_1}{A_1} = \frac{\partial x_2}{A_2} = \dots = \frac{\partial x_n}{A_n}$$

гдѣ  $A_1, A_2 \dots A_n$  очевидно тѣ же, которые сейчасъ разсматривали. Сравнивая эти уравненія съ уравненіями (32), имѣемъ

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \dots = \frac{\partial x_n}{X_n} \tag{33}$$

систему обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій.

Итакъ если  $n - 1$  частныхъ интеграловъ уравненія (24), составляющихъ полную систему, (между собою независимыхъ интеграловъ) приравняемъ произвольнымъ постояннымъ, то полученныя уравненія представляютъ полную систему интеграловъ системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій, (ибо изъ дифференцированія этихъ интеграловъ и исключеніе произвольныхъ постоянныхъ получаемъ систему (33)).

Наоборотъ, если полную систему интеграловъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (30) разрѣшимъ относительно произвольныхъ постоянныхъ, то получимъ такимъ образомъ  $n - 1$  функций  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ , которыя представляютъ полную систему частныхъ интеграловъ линейнаго однороднаго дифференціальнаго уравненія съ частными производными

перваго порядка. Дѣйствительно по разрѣшеніи относительно произвольныхъ постоянныхъ интегралы совокупныхъ уравненій (33) принимаютъ видъ

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2 \dots y_n = C_n$$

Дифференцируя эти  $n - 1$  уравненій по всѣмъ переменнымъ, мы получимъ систему

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Такъ какъ это уравненіе однородно относительно дифференціаловъ  $dx_1, dx_2 \dots dx_n$ , то оно не измѣнится, если эти дифференціалы замѣнимъ величинами  $X_1, X_2 \dots X_n$  имъ пропорціональными, и предыдущее уравненіе перейдетъ въ

$$X_1 \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \dots + X_n \frac{\partial y_i}{\partial x_n} = 0$$

изъ этого слѣдуетъ что  $y_i$  есть интеграль уравненія (24).

Этимъ подтверждается то положеніе, которое мы сейчасъ высказали. и обобщается то, что до сихъ поръ говорили о связи существующей между уравненіями съ частными производными и совокупными уравненіями.

7. Прежде чѣмъ будемъ говорить объ интегрирующемъ множителѣ разсматриваемаго линейнаго уравненія съ частными производными, покажемъ одно примѣчательное свойство миноровъ  $A_1, A_2 \dots A_n$ .

Возьмемъ какія либо два изъ этихъ миноровъ, именно  $A_i$  и  $A_k$ , они также суть нѣкоторые детерминанты и могутъ быть разложены на миноры; одинъ, первый изъ нихъ разложимъ по элементамъ столба съ указателемъ  $k$ , въ нашемъ случаѣ по элементамъ

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_k} \dots \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_k}$$

другой, именно  $A_k$  разложимъ по элементамъ столба съ указателемъ  $i$ . т. е. по элементамъ

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \dots \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_i}$$

Такимъ образомъ эти два минора представляются въ видѣ

$$A_i = B_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + B_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + B_{n-1} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_k}$$

$$A_k = B'_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + B'_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + B'_{n-1} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_i}$$



Эти функции суть однородныя перваго измѣренія относительно производныхъ, а потому по теоремѣ Фонтеня сумма частныхъ производныхъ искомой функции, гдѣ каждая производная помножается на переменное, по которой производная берется, равняется самой функции помноженной на измѣрение, следовательно въ примѣненіи къ функциямъ  $A_i$  и  $A_k$  мы можемъ писать

$$A_i = \frac{\partial A_i}{\partial \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_k}\right)} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial A_i}{\partial \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_k}\right)} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial A_i}{\partial \left(\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_k}\right)} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_k}$$

$$A_k = \frac{\partial A_k}{\partial \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial \left(\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_i} \quad 1)$$

отсюда, какъ извѣстно изъ теоріи детерминантовъ, имѣемъ

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_k}\right)} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial A_i}{\partial \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_k}\right)} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_k \partial x_i} + \dots$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial A_k}{\partial \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_i \partial x_k} + \dots$$

(34)

Слѣдовательно въ суммѣ

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \quad (\alpha)$$

коэффициентъ при

$$\frac{\partial^2 y_s}{\partial x_i \partial x_k} \quad (35)$$

будетъ

$$\frac{\partial A_i}{\partial \left(\frac{\partial y_s}{\partial x_k}\right)} + \frac{\partial A_k}{\partial \left(\frac{\partial y_s}{\partial x_i}\right)} \quad (36)$$

(замѣтимъ еще, что въ выраженіяхъ (34) членовъ съ производными

<sup>1)</sup> Это видно изъ того также что

$$u = ax + by + cz + \dots + tv$$

то

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \dots + \frac{\partial u}{\partial v} v$$

$\frac{\partial^2 y_s}{\partial x_i^2}$ , или  $\frac{\partial^2 y_s}{\partial x_k^2}$  не будетъ, ибо  $A_i$  не содержитъ членовъ съ производными  $\frac{\partial y_s}{\partial x_i}$  и  $A_k$  не содержитъ членовъ  $\frac{\partial y_s}{\partial x_k}$ ; по этимъ производнымъ разложены детерминанты).

Положимъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = R$$

и разложимъ этотъ детерминантъ по элементамъ первой строки, тогда будемъ имѣть

$$A_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial y}{\partial x_n} = R$$

гдѣ  $A_1, A_2 \dots A_n$  суть первые миноры. Тогда принимая во вниманіе выраженіе (14) стр. 103 теоріи детерминантовъ, имѣемъ

$$A_i = \frac{\partial R}{\partial \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)} ; \quad A_k = \frac{\partial R}{\partial \left( \frac{\partial y}{\partial x_k} \right)}$$

Внося это въ сумму (36), находимъ

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \partial \left( \frac{\partial y_s}{\partial x_k} \right)} + \frac{\partial^2 R}{\partial \left( \frac{\partial y}{\partial x_k} \right) \partial \left( \frac{\partial y_s}{\partial x_i} \right)}$$

а эта сумма по выраженію (21) стр. 105 равна нулю. Слѣдовательно въ суммѣ (а), которую можно представить въ видѣ

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

коэффициентъ при любой производной типа (35) равенъ нулю, а слѣдо-

вательно выражение

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0 \quad (37)$$

предъявляет то свойство миноровъ  $A_1, A_2, \dots$ , которое мы хотѣли показать.

8. Перейдемъ теперь къ главному вопросу объ интегрирующемъ множителѣ.

Мы видѣли, что

$$\frac{A_1}{X_1} = \frac{A_2}{X_2} = \dots = \frac{A_n}{X_n} = M$$

Слѣдовательно

$$MX_1 = A_1; \quad MX_2 = A_2 \dots MX_n = A_n$$

Внося это въ уравненіе (37), имѣемъ

$$\sum \frac{\partial (MX_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (38)$$

имѣть значенія цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до  $n$ . Выполняя дифференцирование, находимъ

$$\sum \frac{\partial M}{\partial x_i} X_i + M \sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0. \quad (39)$$

Данное дифференціальное уравненіе

$$\sum X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

равносильно системѣ совокупныхъ уравненій

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \dots = \frac{\partial x_n}{X_n}$$

Если отсюда возьмемъ двѣ какихъ либо пропорціи

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_i}{X_i}$$

то видимъ, что

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_1} = \frac{X_i}{X_1} \quad (40)$$

Раздѣливъ все уравненіе (39) на  $X_1$ , получимъ

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} + \frac{X_2}{X_1} \frac{\partial M}{\partial x_2} + \dots + \frac{X_n}{X_1} \frac{\partial M}{\partial x_n} + \frac{MS}{X_1} = 0$$

гдѣ для краткости положено

$$S = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$$

Дѣлая въ этомъ уравненіи замѣну всѣхъ отношеній по формулѣ (40), имѣемъ

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \frac{\partial M}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \frac{\partial M}{\partial x_n} + \frac{MS}{X_1} = 0$$

или по умноженіи всего на  $\partial x_1$  получаемъ

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial M}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial M}{\partial x_n} \partial x_n + \frac{MS}{X_1} \partial x_1 = 0.$$

Если означимъ полный дифференціалъ взятый относительно всѣхъ переменныхъ чрезъ  $d$  т. е.

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial M}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial M}{\partial x_n} \partial x_n = dM$$

то представимъ предыдущее въ

$$\frac{dM}{M} + \frac{S}{X_1} \partial x_1 = 0$$

или

$$(41) \quad \partial \lg M + \frac{S}{X_1} \partial x_1 = 0$$

Если  $\frac{S}{X_1}$  представляетъ собою функцію одного переменнаго  $x_1$ , то розысканіе множителя приводится къ выполненію квадратуры, именно

$$\lg M = - \int \frac{S}{X_1} \partial x_1$$

или

$$(42) \quad M = e^{-\int \varphi(x_1) \partial x_1}$$

Имѣя это, не трудно доказать слѣдующую весьма важную теорему.

Отношение двух интегрирующих множителей уравнения (24) равно частному интегралу этого уравнения.

Въ самомъ дѣлѣ, если  $M_1$  и  $M_2$  суть два интегрирующие множителя данного уравнения, тогда по выраженію (39) для того и другого имѣемъ

$$X_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial M_1}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial M_1}{\partial x_n} + M_1 \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right) = 0$$

$$X_1 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial M_2}{\partial x_n} + M_2 \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right) = 0$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на  $\frac{1}{M_2}$ , а второе на  $\frac{M_1}{M_2^2}$  и вычитая второе произведение изъ перваго, получимъ тождественное уравненіе

$$X_1 \left[ \frac{M_2 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - M_1 \frac{\partial M_2}{\partial x_1}}{M_2^2} \right] + \dots + X_n \left[ \frac{M_2 \frac{\partial M_1}{\partial x_n} - M_1 \frac{\partial M_2}{\partial x_n}}{M_2^2} \right] = 0$$

что имѣетъ видъ

$$X_1 \frac{\partial \left( \frac{M_1}{M_2} \right)}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \left( \frac{M_1}{M_2} \right)}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \left( \frac{M_1}{M_2} \right)}{\partial x_n} = 0$$

Слѣдовательно данное уравненіе тождественно удовлетворяется подстановкою вмѣсто  $z$  отношенія  $\frac{M_1}{M_2}$ , другими словами, это отношеніе есть частный интегралъ даннаго уравненія (24).

9. Возвратимся къ вопросу объ интегрирующемъ множителѣ линейнаго уравненія съ частными производными.

Данное уравненіе

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

преобразуемъ по новымъ переменнымъ. Предположимъ что эти новыя переменныя суть

$$\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$$

и они находятся въ связи съ начальными  $x_1, x_2 \dots x_n$  представленной функциями

$$x_1 = \varphi_1(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n); \quad x_2 = \varphi_2(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n); \quad \dots \quad x_n = \varphi_n(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n) \quad (43)$$

такъ какъ переменныя  $x_1, x_2 \dots x_n$  суть независимыя, то изъ уравненій

(43) могутъ быть опредѣлены всё  $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$  по  $x_1, x_2 \dots x_n$  (ибо ни одно изъ этихъ уравненій не есть слѣдствіе другаго).

Такимъ образомъ можемъ принять

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \eta_n} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \eta_n} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_2}$$

.....

Подстановка этого въ данное уравненіе приводитъ его къ виду

$$X_1 \left[ \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \eta_n} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} \right]$$

$$+ X_2 \left[ \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \eta_n} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_2} \right]$$

+ .....

$$+ X_n \left[ \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \eta_n} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} \right] = 0$$

Слѣдовательно это уравненіе можно представить въ видѣ

$$\frac{\partial z}{\partial \eta_1} \left( X_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n} \right)$$

.....

$$+ \frac{\partial z}{\partial \eta_n} \left( X_1 \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \eta_n}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} \right) = 0$$

или полагая здѣсь

$$Y_k = X_1 \frac{\partial \eta_k}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \eta_k}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \eta_k}{\partial x_n}$$

найдемъ

$$(44) \quad Y_1 \frac{\partial z}{\partial \eta_1} + Y_2 \frac{\partial z}{\partial \eta_2} + \dots + Y_n \frac{\partial z}{\partial \eta_n} = 0$$

и равносильно этому имѣемъ

$$(45) \quad \frac{\partial \eta_1}{Y_1} = \frac{\partial \eta_2}{Y_2} = \dots = \frac{\partial \eta_n}{Y_n} = N$$

Если  $N$  есть интегрирующій множитель, уравненія (44), то по умноженіи

на  $N$  оно сдѣлается точнымъ дифференціаломъ; частные интегралы его пусть будутъ

$$f_1, f_2 \dots f_{n-1}$$

такъ какъ они удовлетворяютъ уравненію (44) съ выведеннымъ множителемъ, то къ уравненію (24) прибавляются еще уравненія

$$Y_1 \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} + Y_2 \frac{\partial f_1}{\partial \eta_2} + \dots + Y_n \frac{\partial f_1}{\partial \eta_n} = 0$$

$$Y_1 \frac{\partial f_2}{\partial \eta_1} + Y_2 \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2} + \dots + Y_n \frac{\partial f_2}{\partial \eta_n} = 0$$

$$Y_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_1} + Y_2 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_2} + \dots + Y_n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_n} = 0$$

если уравненіе (44) и эти совмѣстныя съ нимъ удовлетворяются при одной и той же системѣ коэффициентовъ, то

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta_1} & \frac{\partial z}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \eta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_n} \end{vmatrix} = 0$$

повторяемъ что здѣсь  $f_1 \dots f_{n-1}$  суть частные независимые интегралы, а  $\eta_1 \dots \eta_n$  новыя переменныя.

Предположимъ, что частные интегралы уравненія (24) въ непреобразованномъ видѣ для независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$  суть какъ прежде  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ , тогда подобно этому составимъ детерминантъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Изъ теоріи детерминантовъ извѣстно, что если перемножимъ эти два детерминанта, то получимъ новый детерминантъ опредѣленнаго вида, именно

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta_1} & \frac{\partial z}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \eta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta_n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \dots$$

(46)

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}$$

Этотъ послѣдній детерминантъ мы означимъ чрезъ  $\Delta$ .

Легко показать, что если извѣстенъ множитель  $M$  для системы совокупныхъ уравненій

$$(47) \quad \frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \dots = \frac{\partial x_n}{X_n}$$

то множитель для системы (45) получимъ, умноживъ множителя  $M$  на детерминантъ  $\Delta$ .

Въ самомъ дѣлѣ, примемъ такое символическое означеніе

$$(48) \quad K(y_i) = X_1 \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial y_i}{\partial x_n}$$

если эти уравненія составленныя для значеній  $i$  отъ нуля до  $n - 1$  совмѣстны, т. е. удовлетворяются одной системой  $X_1 \dots X_n$ , то детерминантъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$



который мы означимъ чрезъ  $R$ , обращается въ нуль. Но этотъ детерминантъ можетъ быть разложенъ на миноры по элементамъ горизонтальной строки, и по условію обращенія его въ нуль будемъ имѣть

$$R = A_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0 \quad (49)$$

Это равенство равносильно съ (48), если опустимъ значекъ  $i$ , ибо оба они выражаютъ условіе что  $y$  есть интеграль системы уравненій (47), и какъ мы уже видѣли, для этого

$$\frac{A_1}{X_1} = \frac{A_2}{X_2} = \dots = \frac{A_n}{X_n} = M$$

но если умножимъ уравненіе (48) на  $M$  и опустимъ значекъ  $i$ , то получимъ

$$MX_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + MX_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} + \dots + MX_n \frac{\partial y}{\partial x_n} = MK(y)$$

а такъ какъ

$$A_1 = MX_1; \quad A_2 = MX_2 \dots A_n = MX_n$$

то предыдущее обращается въ

$$A_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial y}{\partial x_n} = MK(y)$$

Сравнивая это съ (49), находимъ

$$MK(y) = R.$$

Итакъ если  $M$  есть множитель системы (47), то

$$MK(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (50)$$

гдѣ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$  суть независимые частные интегралы системы (47). Умножимъ оба члена предыдущаго тождества (50) на  $\Delta$ , и припомнимъ, что по сдѣланному означенію

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}$$

послѣ такого умноженія будемъ имѣть

$$M\Delta K(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} & \vdots & & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}$$

а по извѣстному правилу умноженія детерминантовъ это есть

$$M\Delta \cdot K(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial y}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}$$

Сравнивая это съ (50), заключаемъ, что если  $M$  есть множитель системы (47), то  $M\Delta$  есть множитель системы (45), но этотъ послѣдній мы означили чрезъ  $N$ , слѣдовательно

$$M\Delta = N$$

Такимъ образомъ по умноженіи на  $\Delta$  уравненіе (24) также принимаетъ видъ функціональнаго детерминанта Якоби, а потому  $\Delta$  есть также интегральный множитель.

Мы видѣли что если извѣстны  $m$  частныхъ интеграловъ уравненія (24), (предполагается что  $m < n - 1$ ), то вводя эти  $m$  интеграловъ какъ  $m$  новыхъ переменныхъ, вмѣсто старыхъ  $x_1, x_2 \dots x_m$ , и остальные  $n - m$  первоначальныхъ, мы для опредѣленія остальныхъ интеграловъ составимъ такое же по внѣшнему виду уравненіе, какъ данное.

Имѣя это въ виду, предположимъ что данное уравненіе есть

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (51)$$

пусть это уравненіе имѣеть интегрирующій множитель  $M$ . Пусть  $u_1$  будетъ одинъ изъ частныхъ интеграловъ уравненія (51). Опредѣлимъ изъ этого интеграла переменное  $x_n$  и посредствомъ этого выраженія исключимъ  $x_n$  изъ даннаго уравненія, тогда для опредѣленія остальныхъ интеграловъ будемъ, какъ мы видѣли, имѣть уравненіе совершенно подобное данному, именно

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} = 0 \quad (52)$$

теперь  $X_1, X_2 \dots X_{n-1}$  зависятъ отъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ .

Легко показать, что

$$M_1 = \frac{M}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right)}$$

будетъ множителемъ уравненіе (52).

Система обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій, соответствующая этому уравненію (52), будетъ

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \dots = \frac{\partial x_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{\partial x_n}{0}$$

ибо функція независимыхъ переменныхъ болѣе не входитъ.

Если  $M$  есть множитель первоначальной системы, то, какъ мы видѣли по уравненію (38),

$$\frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (MX_2)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0 \quad (53)$$

Замѣнимъ здѣсь  $M$  чрезъ

$$M_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_n}$$

тогда будемъ имѣть

$$\frac{\partial \left( M_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_n} X_1 \right)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \left( M_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_n} X_n \right)}{\partial x_n} = 0$$

или

$$(54) \quad \left[ \frac{\partial (M_1 X_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (M_1 X_2)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial (M_1 X_n)}{\partial x_n} \right] \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + M_1 \left[ X_1 \frac{\partial \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right)}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right)}{\partial x_n} \right] = 0$$

такъ какъ предполагается, что  $u_1$  есть частный интегралъ уравненія (52), то имѣемъ тождественно

$$X_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0$$

дифференцируя это по  $x_n$ , имѣемъ

$$X_1 \frac{\partial \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right)}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right)}{\partial x_2} + \dots = \\ = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_n} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_n} - \dots$$

внося это въ уравненіе (54), имѣемъ

$$(55) \quad \left[ \frac{\partial (M_1 X_1)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial (M_1 X_n)}{\partial x_n} \right] \frac{\partial u_1}{\partial x_n} - M_1 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right] = 0$$

Замѣнимъ здѣсь переменныя  $x_1, x_2 \dots x_n$  чрезъ  $x_1, x_2 \dots x_{n-1}, u_1$ . Такъ какъ  $u_1$  есть частный интегралъ то вообще

$$u_1 = F_1(x_1, x_2 \dots x_n)$$

и изъ этого заключаемъ, что послѣ упомянутой замѣны каждое изъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$  будетъ входить въ предыдущее уравненіе (55) двойкою: явно и въ зависимости отъ  $u_1$ , только одно  $x_n$  войдетъ однообразно, именно только въ зависимости отъ  $u_1$ . Такимъ образомъ

$$\frac{\partial (M_1 X_1)}{\partial x_1} = \frac{d (M_1 X_1)}{dx_1} + \frac{d (M_1 X_1)}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

гдѣ  $d$  есть характеристика частнаго дифференцированія.

Подобно этому для всѣхъ переменныхъ до  $x_{n-1}$ , включительно будемъ имѣть такое же выраженіе производной какъ предыдущее. Что же

касается до  $x_n$ , то относительно него взятая производная будеть

$$\frac{\partial (M_1 X_n)}{\partial x_n} = \frac{d(M_1 X_n)}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n}$$

а также

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_n} = \frac{dX_1}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n}$$

поэтому уравнение (55) принимает видъ

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d(M_1 X_1)}{dx_1} + \frac{d(M_1 X_2)}{dx_2} + \dots + \frac{d(M_1 X_{n-1})}{dx_{n-1}} \right] \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ & + \left[ \frac{d(M_1 X_1)}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{d(M_1 X_{n-1})}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} + \frac{d(M_1 X_n)}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right] \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ & - M_1 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial u_1} + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \frac{\partial X_n}{\partial u_1} \right] \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}$$

сокративъ все на  $\frac{\partial u_1}{\partial x_n}$ , представимъ еще каждое изъ  $\frac{\partial (M_1 X_i)}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i}$  въ видъ

$$\frac{\partial M_1}{\partial u_1} X_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + M_1 \frac{\partial X_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i}$$

тогда по сокращеніи получимъ

$$\frac{d(M_1 X_1)}{dx_1} + \dots + \frac{d(M_1 X_{n-1})}{dx_{n-1}} + \frac{\partial M_1}{\partial u_1} \left[ X_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right] = 0$$

но такъ какъ  $u_1$  есть по предположенію частный интегралъ даннаго уравненія, то послѣдній членъ обращается въ нуль и остается

$$\frac{d(M_1 X_1)}{dx_1} + \frac{d(M_1 X_2)}{dx_2} + \dots + \frac{d(M_1 X_{n-1})}{dx_{n-1}} = 0$$

что показывзеть, что  $M_1$  есть интегрирующій множитель уравненія (52).

Посмотримъ какъ можно пользоваться этой теоремой въ теоріи интегрированія линейныхъ уравненій съ частными производными.

Предположимъ, что дано уравненіе съ частными производными

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{56}$$

которое содержитъ  $n$  независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и ихъ функцію  $u$ .

Соответствующая этому система обыкновенных совместных уравнений есть

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \dots = \frac{\partial x_n}{X_n}$$

Если знаемъ одинъ интегралъ этой системы  $u_1$  и посредствомъ него исключимъ отсюда  $x_n$ , то данное уравнение преобразуется въ такое, въ которомъ однимъ переменнымъ будетъ меньше, а форма уравнения сохранится,—оно будетъ

$$(57) \quad X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} = 0$$

система совокупныхъ обыкновенныхъ ему соответствующая будетъ

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \dots = \frac{\partial x_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{\partial u}{0}$$

въ функціяхъ  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  переменное  $x_n$  замѣнено его значеніемъ взятымъ изъ интеграла  $u_1 = \text{const}$ . Если будемъ знать еще интегралъ  $u_2$ , то поступая подобно сказанному съ уравненіемъ (57), удалимъ изъ него еще переменное, напр.  $x_{n-1}$  и т. д. Предположимъ, что мы знаемъ всѣ частные интегралы за исключеніемъ одного, тогда посредствомъ нихъ удалимъ  $n - 2$  переменныхъ, именно

$$x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n$$

и приведемъ данное уравненіе къ виду

$$(58) \quad X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

совокупныя уравненія соответствующія этому будутъ

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2}$$

или

$$X_2 \partial x_1 - X_1 \partial x_2 = 0$$

это уравненіе содержитъ только двѣ переменныхъ  $x_1$  и  $x_2$ . Интегрирующей множитель  $\mu$ , принимаемый Эйлеромъ, долженъ быть таковъ, чтобы

$$\mu X_2 \partial x_1 - \mu X_1 \partial x_2$$

было точнымъ дифференціаломъ, т. е. чтобы удовлетворялось условіе

$$\frac{\partial (\mu X_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (\mu X_1)}{\partial x_1} = 0$$

Если интегрирующій множитель уравненія (51) есть  $M$ , то послѣдовательные множители преобразованныхъ уравненій будутъ

$$M_1 = \frac{M}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right)}$$

$$M_2 = \frac{M_1}{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}}\right)} = \frac{M}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}}\right)}$$

и т. д.

гдѣ  $u_1, u_2 \dots$  суть частные интегралы уравненія (51), отсюда заключаемъ что множитель  $\mu$  послѣдняго уравненія (59) будетъ

$$\mu = \frac{M}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}}\right) \dots \left(\frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_3}\right)}$$

Этотъ множитель *Якоби* называется послѣднимъ множителемъ.

Итакъ если извѣстны интегральный множитель и всѣ кромѣ одного частные интегралы однороднаго линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка, то послѣдній множитель легко составляется и розысканіе послѣдняго частнаго интеграла приводится къ выполненію квадратуры.

Пояснимъ эти соображенія на частномъ примѣрѣ. Будемъ интегрировать уравненіе

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varphi(x, y)$$

и приведемъ прежде всего рѣшеніе этого вопроса къ интегрированію линейнаго уравненія съ частными производными. Это данное уравненіе можетъ быть замѣнено двумя такими

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \varphi(x, y); \quad y' = \frac{\partial y}{\partial x}$$

изъ нихъ находимъ

$$\frac{\partial y'}{\varphi(x, y)} = \frac{\partial x}{1}; \quad \frac{\partial y}{y'} = \frac{\partial x}{1}$$

Слѣдовательно совокупныя уравненія соответствующія составленному уравненію съ частными производными будутъ

$$\frac{\partial y'}{\varphi(x, y)} = \frac{\partial y}{y'} = \frac{\partial x}{1}$$

и само уравненіе съ частными производными есть

$$(59) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + y' \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi(x, y) \frac{\partial u}{\partial y'} = 0$$

пусть множитель этого уравненія будетъ  $M$ , тогда въ рассматриваемомъ случаѣ уравненіе (53) принимаетъ видъ'

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial (My')}{\partial y} + \frac{\partial [M\varphi(x, y)]}{\partial y'} = 0$$

Слѣдовательно для этого по уравненію (41) составляемъ

$$\frac{d \lg M}{dx} = 0 \quad 1)$$

Это уравненіе допускаетъ рѣшеніе  $M = 1$ . Поэтому если извѣстенъ хотя одинъ частный интеграль уравненія (34) на примѣръ интеграль

$$\psi(x, y, y') = \text{const.}$$

то посредствомъ этого можемъ исключить  $y'$  изъ уравненія

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y'$$

т. е. изъ уравненія

$$\partial y - y' \partial x = 0$$

1) У насъ переменныя суть:

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = y'; \quad X_1 = 1; \quad X_2 = y'; \quad X_3 = \varphi(x, y)$$

Слѣдовательно

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial X_3}{\partial x_3} = 0$$

ибо  $\varphi(x, y)$  не содержитъ  $y'$ .



Въ нашемъ случаѣ это есть послѣднее уравненіе и его множитель есть

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y'}\right)}$$

ибо въ нашемъ случаѣ  $M=1$  и  $u_1 = \psi(x, y, y')$ .

Дадимъ какое нибудь частное значеніе функціи  $\psi$ ; положимъ, что эта функція есть  $y$ , тогда

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y$$

Для такого уравненія система совокупныхъ уравненій будетъ

$$\frac{\partial y'}{y} = \frac{\partial y}{y'} = \frac{\partial x}{1}$$

Оно допускаетъ въ сочетаніи первыхъ двухъ пропорцій интеграль

$$\psi = y'^2 - y^2 = \text{пост.} = 2\gamma \tag{a}$$

Слѣдовательно послѣднее уравненіе

$$\partial y - y' \partial x = 0$$

имѣемъ своимъ множителемъ

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y'}\right)} = 2y'$$

но изъ уравненія (a), имѣемъ

$$y' = \pm \sqrt{2\gamma + y^2}$$

исключая посредствомъ этого  $y'$  изъ уравненія

$$\partial y - y' \partial x = 0$$

имѣемъ

$$\frac{\partial y}{2\sqrt{2\gamma + y^2}} - \partial x = 0$$

изъ этого предстоитъ опредѣлить второй частный интеграль и мы видимъ, что дѣйствительно это опредѣленіе приводится къ выполненію квадратуры.

IV.

**Интегрированіе совмѣстныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными.**

10. Разсмотримъ систему  $q$  линейныхъ однородныхъ уравненій

$$\begin{aligned}
 & a_1^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \\
 & a_1^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & a_1^{(q)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2^{(q)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(q)} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

эти уравненія содержатъ  $n$  независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :  
 кромѣ того въ нихъ входятъ функціи

$$a_h^{(i)}$$

тѣхъ же независимыхъ переменныхъ; здѣсь  $i$  представляетъ каждое изъ чисель  $1, 2, \dots, q$  и  $h$  суть цѣлыя числа отъ 1 до  $n$ .

Представимъ эти уравненія символически въ видѣ

$$X_1(f) = 0; \quad X_2(f) = 0 \dots X_q(f) = 0
 \tag{2}$$

гдѣ буквами  $X$  мы означаемъ рядъ извѣстныхъ операцій. Если эти операціи относятся къ функціи  $\varphi$ , т. е. если для функціи  $\varphi$  должно быть составлено выраженіе  $X_i(\varphi)$ , то мы должны поступать согласно съ сдѣлан-

нымъ означеніемъ слѣдующимъ образомъ. Должны взять отъ функціи  $\varphi$  производныя по переменнымъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ , т. е. должны составить рядъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

Затѣмъ каждая изъ этихъ производныхъ должна быть помножена на соответствующую функцію  $a_h^{(i)}$  гдѣ  $h$  соответствуетъ указателю переменнаго и тогда составится рядъ

$$a_1^{(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad a_2^{(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad a_n^{(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

Сумма членовъ этого ряда будетъ требуемая функція  $X_i(\varphi)$ .

Такимъ образомъ

$$X_i(\varphi) = a_1^{(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2^{(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \quad (3)$$

Мы говоримъ, что  $q$  уравненій (1) или, что все равно, уравненій (2) независимы между собой, если между функціями  $X_i(f)$  нѣтъ линейнаго соотношенія вида

$$\lambda_1 X_1(f) + \lambda_2 X_2(f) + \dots + \lambda_q X_q(f) = 0$$

гдѣ  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_q$  суть функціи переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_q$ . Интеграломъ такой системы будемъ называть функцію независимыхъ переменныхъ удовлетворяющую одновременно всѣмъ уравненіямъ системы.

Предположимъ, что  $y$  есть интеграль уравненій (1) или (2), тогда два какія либо изъ этихъ уравненій равно какъ и другія будутъ удовлетворяться этимъ интеграломъ, т. е. послѣ подстановки его вмѣсто  $x$  будутъ обращаться въ тождество. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$X_i(y) = 0 \quad X_k(y) = 0$$

Если возьмемъ функцію  $X_k(y) = 0$  и изъ нея по выше упомянутому правилу такъ составимъ функцію  $X_i$ , какъ составляется эта изъ  $f$ , т. е. если въ выраженіи  $X_i(y) = 0$  поставимъ  $X_k(y)$  вмѣсто  $y$ , то очевидно будемъ имѣть

$$X_i[X_k(y)] = X_i(0) = 0$$

ибо по предположенію  $X_k(y) = 0$ .

Точно также

$$X_k[X_i(y)] = X_k(0) = 0$$

Вычитая это одно изъ другаго, будемъ, имѣть

$$(4) \quad X_i[X_k(y)] - X_k[X_i(y)] = 0$$

Прежде всего легко убѣдиться, что это уравненіе линейное и пер-  
ваго порядка.

По выше приведенному способу составленія функціи  $X(f)$  имѣемъ  
въ примѣненіи къ нашему случаю

$$X_i[X_k(y)] = a_1^{(i)} \frac{\partial [X_k(y)]}{\partial x_1} + a_2^{(i)} \frac{\partial [X_k(y)]}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(i)} \frac{\partial [X_k(y)]}{\partial x_n}$$

но въ свою очередь по выраженію (3)

$$X_k(y) = a_1^{(k)} \frac{\partial y}{\partial x_1} + a_2^{(k)} \frac{\partial y}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(k)} \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

поэтому

$$\frac{\partial [X_k(y)]}{\partial x_1} = \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_1} + a_1^{(k)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial a_2^{(k)}}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} + a_2^{(k)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots$$

$$\frac{\partial [X_k(y)]}{\partial x_2} = \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_1} + a_1^{(k)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial a_2^{(k)}}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_2} + a_2^{(k)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \dots$$

и т. д.

Слѣдовательно

$$(5) \quad \begin{aligned} X_i[X_k(y)] &= a_1^i \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_1} + a_1^i a_1^{(k)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + a_1^i \frac{\partial a_2^{(k)}}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} + a_1^i a_2^{(k)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \\ &+ a_2^i \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_1} + a_2^i a_1^{(k)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2^i \frac{\partial a_2^{(k)}}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_2} + a_2^i a_2^{(k)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

точно также

$$(6) \quad \begin{aligned} X_k[X_i(y)] &= a_1^k \frac{\partial a_1^{(i)}}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_1} + a_1^k a_1^{(i)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + a_1^k \frac{\partial a_2^{(i)}}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} + a_1^k a_2^{(i)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \\ &+ a_2^k \frac{\partial a_1^{(i)}}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_1} + a_2^k a_1^{(i)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2^k \frac{\partial a_2^{(i)}}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_2} + a_2^k a_2^{(i)} \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Если посредствомъ этого составимъ уравненіе (4), то увидимъ, что въ  
него вторыя производныя совсѣмъ не войдутъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ ре-

зультатъ подстановки входитъ напр. производная  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ , но съ коэффициентомъ

$$a_1^{(i)} a_1^{(k)} - a_1^{(k)} a_1^{(i)}$$

что конечно тождественно равно нулю, и вообще при производной  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_h^2}$  будетъ состоять коэффициентъ

$$a_h^i a_h^k - a_h^k a_h^i = 0$$

Изъ того, что мы выписали здѣсь, видимъ, что коэффициентомъ при производной  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}$  въ разсматриваемомъ уравненіи будетъ многочленъ

$$a_1^i a_2^k + a_2^i a_1^k - a_1^k a_2^i - a_2^k a_1^i$$

что также тождественно обращается въ нуль. Слѣдовательно при вторыхъ производныхъ вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_h \partial x_i}$$

будетъ коэффициентъ

$$a_h^i a_i^k + a_i^i a_h^k - a_h^k a_i^i - a_i^k a_h^i = 0$$

Такимъ образомъ заключаемъ, что выраженіе (4) есть выраженіе перваго порядка и вторыхъ производныхъ не содержитъ.

Какъ видно изъ выраженій (5) и (6) коэффициентомъ при производной  $\frac{\partial y}{\partial x_1}$  въ выраженіи (4) будетъ

$$a_1^i \frac{\partial a_1^k}{\partial x_1} + a_2^i \frac{\partial a_1^k}{\partial x_2} + \dots + a_n^i \frac{\partial a_1^k}{\partial x_n} - a_1^k \frac{\partial a_1^i}{\partial x_1} - a_2^k \frac{\partial a_1^i}{\partial x_2} + \dots - a_n^k \frac{\partial a_1^i}{\partial x_n}$$

что по нашему символическому представленію есть

$$X_i(a_1^k) - X_k(a_1^i)$$

Слѣдовательно коэффициентъ при

$$\frac{\partial y}{\partial x_h}$$

будетъ

$$X_i(a_h^k) - X_k(a_h^i)$$

а такъ какъ въ составъ выраженія (4), какъ сейчасъ показали, войдутъ только первыя производныя, то прямо заключаемъ, что выраженіе (4) теперь преобразовывается въ

$$(7) \quad \sum_{h=1}^{h=n} [X_i(a_h^i) - X_k(a_h^i)] \frac{\partial y}{\partial x_h} = 0$$

т. е.

$$(7_{**}) \quad X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = \sum_{h=1}^{h=n} [X_i(a_h^i) - X_k(a_h^i)] \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

Пусть

$$(8) \quad A(f) = 0, \quad B(f) = 0^1)$$

будутъ два линейныхъ совмѣстныхъ уравненія перваго порядка.

Если  $\varphi$  есть такая функція, которая удовлетворяетъ первому изъ этихъ уравненій, т. е. если

$$A(\varphi) = 0$$

и въ тоже время  $B(\varphi)$  отлична отъ нуля, то эта функція  $B(\varphi)$  будетъ также интеграломъ уравненія  $A(f) = 0$ , т. е. также будетъ имѣть

$$A[B(\varphi)] = 0$$

Доказательство этой важной теоремы заключается въ слѣдующемъ.

Представимъ символы  $A$  и  $B$  въ раскрытомъ видѣ, т. е.

$$(9) \quad A(\varphi) = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$B(\varphi) = b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + b_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^{k=n} b_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

гдѣ  $a_i$  и  $b_k$  суть функціи переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Если функцію  $A(\varphi)$ , зависящую вообще отъ переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  подвергнемъ операціи требуемой символомъ  $B$ , то составимъ символъ

$$B[A(\varphi)]$$

<sup>1)</sup> Здѣсь  $A$  и  $B$  суть такіе же символы какъ  $X_i, X_k$ .

и наоборот, подвергая функцию  $B(\varphi)$  операциямъ символа  $A$ , составляемъ:

$$A[B(\varphi)]$$

Пусть разность этихъ новыхъ функцийъ будетъ некоторая функция  $C(\varphi)$ .  
Такъ что

$$A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)] = C(\varphi) \tag{9}$$

По тому, что мы разумемъ подъ операцией  $A$ , мы имѣемъ

$$A[B(\varphi)] = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{\partial \left[ \sum_{k=1}^{k=n} b_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right]}{\partial x_i}$$

или

$$A[B(\varphi)] = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_i b_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

Точно также

$$B[A(\varphi)] = \sum_{k=1}^{k=n} b_k \frac{\partial \left[ \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right]}{\partial x_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} b_k a_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} b_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Слѣдовательно

$$C(\varphi) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} b_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

переставляя значки въ первой суммѣ, имѣемъ

$$C(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[ \sum_{k=1}^{k=n} \left( a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

положимъ здѣсь

$$c_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left( a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right)$$

т. е. примемъ

$$c_i = a_1 \frac{\partial b_i}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial b_i}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial b_i}{\partial x_n} - b_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} - b_2 \frac{\partial a_i}{\partial x_2} - \dots - b_n \frac{\partial a_i}{\partial x_n}$$

или по принятому символическому означенію

$$c_i = A(b_i) - B(a_i)$$

Такимъ образомъ находимъ

$$C(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n} [A(b_i) - B(a_i)] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

или

$$(10) \quad C(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Изъ этого заключаемъ, что для того чтобы

$$C(\varphi) = 0$$

необходимо, чтобы  $c_i = 0$ , т. е. чтобы

$$(11) \quad \begin{aligned} c_1 &= A(b_1) - B(a_1) = 0 \\ c_2 &= A(b_2) - B(a_2) = 0 \\ &\dots \dots \dots \\ c_n &= A(b_n) - B(a_n) = 0, \end{aligned}$$

наоборотъ, если эти уравненія удовлетворяются, т. е. если для каждого значенія  $i$  отъ 1 до  $n$  имѣетъ мѣсто уравненіе

$$c_i = A(b_i) - B(a_i) = 0$$

то

$$(12) \quad A[B(\varphi)] = B[A(\varphi)]$$

Посмотримъ какое это имѣетъ значеніе для интегрированія двухъ линейныхъ уравненій

$$(13) \quad A(f) = 0, \quad B(f) = 0$$



Если  $f_1$  есть рѣшеніе перваго изъ этихъ уравненій, то конечно

$$A(f_1) = 0$$

Слѣдовательно

$$B[A(f_1)] = B(0) = 0$$

и по уравненію (12)

$$A[B(f_1)] = 0.$$

Слѣдовательно  $B(f_1)$  есть также интеграль перваго изъ уравненій (13). Этимъ и подтверждается справедливость теоремы, которую мы хотѣли доказать.

Означимъ интеграль  $B(f_1)$  чрезъ  $f_2$  т. е. примемъ

$$B(f_1) = f_2$$

Если мы поставимъ  $f_2$  въ выраженіе  $B(f)$ , то такъ составленная функція будетъ новымъ интеграломъ уравненія

$$A(\varphi) = 0$$

т. е.

$$A(f_2) = A[B(f_1)] = 0$$

Слѣдовательно

$$B[A(f_2)] = B(0) = 0,$$

и по уравненію (12)

$$A[B(f_2)] = 0$$

и т. д.

11. Имѣя въ виду вопросъ объ условіи, при которомъ система уравненій съ частными производными имѣетъ общій интеграль, рассмотримъ свойства символа Пуассона.

Пусть

$$x_1, x_2 \dots x_n$$

$$p_1, p_2 \dots p_n$$

будутъ двѣ системы переменныхъ, въ которыхъ число отдѣльныхъ членовъ одинаково, т. е. равно  $n$ .

Рассмотримъ двѣ функціи этихъ переменныхъ  $F$  и  $G$ .

Составимъ изъ этого такую сумму

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial G}{\partial x_2} + \dots$$

эту сумму можно представить въ формѣ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[ \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right]$$

такая сумма означается символически скобками

$$(F, G)$$

и называется символомъ Пуассона. Изъ этого опредѣленія и правила составленія символа Пуассона прямо вытекаетъ, что перестановка буквъ въ скобкахъ влечетъ измѣненіе знака символа. Такимъ образомъ одно изъ свойствъ символа Пуассона состоитъ въ томъ, что

$$(F, G) = - (G, F)$$

Пусть  $t$  будетъ еще одно переменное входящее въ функціи  $F$  и  $G$ . Возьмемъ отъ обѣихъ частей равенства

$$(14) \quad (F, G) = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right)$$

производную по переменному  $t$ , тогда будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{\partial (F, G)}{\partial t} &= \sum_i \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial t} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) \\ &+ \sum \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial t} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial t} \right) \end{aligned}$$

что конечно можно представить въ видѣ

$$\begin{aligned} \frac{\partial (F, G)}{\partial t} &= \sum \left[ \frac{\partial \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] \\ &+ \sum \left[ \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \left( \frac{\partial G}{\partial t} \right)}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \left( \frac{\partial G}{\partial t} \right)}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

или по опредѣленію символа Пуассона это можемъ написать въ видѣ

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial t} = \left( \frac{\partial F}{\partial t}, G \right) + \left( F, \frac{\partial G}{\partial t} \right)$$

или

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial t} = \left( \frac{\partial F}{\partial t}, G \right) - \left( \frac{\partial G}{\partial t}, F \right)$$

такъ представляется производная символа Пуассона.

Предположимъ, что переменныя  $x_i$  и  $p_i$  не входятъ явно въ функцію  $F$ , а только въ зависимости отъ нѣкоторыхъ функцій  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  такъ что эти послѣднія сами суть функціи переменныхъ  $x_i$  и  $p_i$ . Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \dots = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i} + \dots = \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i}$$

Внося это въ уравненіе (14), находимъ

$$(F, G) = \sum_i \frac{\partial G}{\partial p_i} \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i}$$

или

$$(F, G) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \left[ \sum_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right]$$

или по принятому означенію символа Пуассона

$$(F, G) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} (\varphi_k, G) \tag{15}$$

Если точно также положимъ здѣсь, что  $G$  содержитъ переменныя  $x_i$  и  $p_i$  не иначе какъ въ зависимости отъ функцій  $\psi_i$ , то будемъ имѣть

$$(\varphi_k, G) = \sum \frac{\partial G}{\partial \psi_l} (\varphi_k, \psi_l)$$

Слѣдовательно

$$(F, G) = \sum_k \sum_l \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \psi_l} (\varphi_k, \psi_l)$$

Выраженіе (15) представляется въ видѣ.

$$(16) \quad (F, G) = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} (\varphi_1, G) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} (\varphi_2, G) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_3} (\varphi_3, G) + \dots$$

если въ частномъ случаѣ

$$F = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \dots$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = 1 \dots$$

и мы будемъ имѣть

$$(17) \quad (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots, G) = (\varphi_1, G) + (\varphi_2, G) + \dots$$

12. Рассмотримъ два совмѣстныхъ уравненія съ  $2n$  независимыми переменными имѣющія видъ

$$A(f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \dots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$B(f) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots - \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Эти уравненія по означенію Пуассона можно представить въ видѣ

$$(18) \quad A(f) = (\varphi, f); \quad B(f) = (\psi, f)$$

по сравненію съ (9) мы здѣсь принимаемъ

$$a_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad a_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \dots a_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}; \quad a_{n+1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}; \dots a_{2n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$$

$$b_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}; \quad b_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \dots b_n = \frac{\partial \psi}{\partial x_n}; \quad b_{n+1} = -\frac{\partial \psi}{\partial p_1}; \dots b_{2n} = -\frac{\partial \psi}{\partial p_n}$$

Тогда согласно съ формулой (10)

$$(19) \quad C(f) = \sum_{i=1}^{i=2n} \left( c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + c_{i+n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

при этомъ уравненія (11) заключаются въ формѣ

$$c_i = A(b_i) - B(a_i) \tag{20}$$

но мы сейчасъ видѣли, что

$$A(f) = (\varphi, f); \quad B(f) = (\psi, f)$$

Слѣдовательно въ примѣненіи къ нашему случаю

$$A(b_i) = (\varphi, b_i); \quad B(a_i) = (\psi, a_i)$$

такъ какъ

$$b_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}; \quad a_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

то

$$A(b_i) = \left( \varphi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right); \quad B(a_i) = \left( \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)$$

Слѣдовательно по выраженію (20)

$$c_i = \left( \varphi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) - \left( \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)$$

или

$$c_i = \left( \varphi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \psi \right) = \frac{\partial [(\varphi, \psi)]}{\partial x_i}$$

для того чтобы составить по выраженію (19) функцію  $C(f)$  мы должны еще имѣть коэффициентъ  $c_{i+n}$ .

Для этого замѣтимъ, что

$$C_{i+n} = A(b_{n+i}) - B(a_{n+i})$$

или подобно предыдущему

$$c_{i+n} = \left( \varphi, -\frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) - \left( \psi, -\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right)$$

или

$$c_{i+n} = - \left( \varphi, \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \psi \right) = - \frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial p_i}$$

Слѣдовательно по выраженію (19)

$$C(f) = \sum_{i=0}^{i=n} \left[ \frac{\partial [(\varphi, \psi)]}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial [(\varphi, \psi)]}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] = [(\varphi, \psi), f]$$

Итакъ мы нашли

$$(21) \quad C(f) = [(\varphi, \psi), f]$$

и кромѣ того по выраженіямъ (18)

$$(22) \quad A(f) = (\varphi, f); \quad B(f) = (\psi, f)$$

Подставляя въ первое вмѣсто  $f$  величину  $B(f)$ , имѣемъ

$$A[B(f)] = [(\varphi, B(f))]$$

а вторую часть этого равенства измѣнимъ подстановкой второго изъ выражений (22). тогда будемъ имѣть

$$(23) \quad A[B(f)] = [\varphi, (\varphi, f)]$$

Точно также если во второе изъ выражений (22) поставимъ вмѣсто  $f$  величину  $A(f)$ , то найдемъ

$$B[A(f)] = [\psi, A(f)]$$

и посредствомъ перваго изъ (22) представляемъ это въ видѣ

$$B[A(f)] = [\psi, (\varphi, f)]$$

Внося это вмѣстѣ съ (21) и (23) въ уравненіе (9), которое для сдѣланнаго теперь обозначенія имѣетъ видъ

$$A[B(f)] - B[A(f)] = C(f)$$

находимъ

$$(24) \quad [\varphi, (\psi, f)] - [\psi, (\varphi, f)] = [(\varphi, \psi), f]$$

но по свойствамъ Пуассонова символа

$$\begin{aligned} [\varphi, (\psi, f)] &= -[(\psi, f), \varphi] \\ [\psi, (\varphi, f)] &= [\psi, -(f, \varphi)] = -[\psi, (f, \varphi)] = [(f, \varphi), \psi] \end{aligned}$$

Слѣдовательно выраженію (24) можно дать видъ

$$(25) \quad [(f, \varphi), \psi] + [(\varphi, \psi), f] + [(\psi, f), \varphi] = 0$$

Для теоріи интегрированія уравненій съ частными производными это есть одна изъ основныхъ теоремъ найденныхъ Якоби. Приведенное здѣсь доказательство принадлежитъ Донкину и опубликовано имъ въ *Philosophical Transactions* 1824 pg. 92.

13. Не останавливаясь болѣе на этомъ, перейдемъ къ обзору способовъ интегрированія совмѣстныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными.

Предположимъ, что комбинируя по два уравненія (1) или, что все равно, уравненія (2), мы будемъ составлять уравненія подобныя уравненію (7), или все равно, уравненію (4). Новыя линейныя уравненія, такимъ образомъ составленныя и подобныя даннымъ, мы означимъ чрезъ

$$X_{q+1}(f) = 0, \quad X_{q+2}(f) = 0 \dots X_{q+s}(f) = 0 \quad (26)$$

если первоначально данныхъ уравненій было  $q$ , то теперь будемъ имѣть  $q+s$ . Эти новыя уравненія или дѣйствительно могутъ быть новыми, или же могутъ представлять собою только линейныя комбинаціи данныхъ. Такъ что

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = \lambda_1 X_1(f) + \dots + \lambda_r X_r(f)$$

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ система уравненій (2) называется замкнутой системой совмѣстныхъ линейныхъ уравненій.

Если въ числѣ уравненій (26) только нѣкоторыя независимы, то эти послѣднія мы присоединимъ къ даннымъ и комбинаціей подобной предыдущей будемъ искать полную систему уравненій. Тѣ изъ полученныхъ теперь уравненій, которыя представляютъ собою новыя независимыя уравненія, сравнительно съ увеличенной данною, снова включаемъ въ число той увеличенной системы, и т. д. пока наконецъ система не обратится въ замкнутую. Но подобныя операціи не могутъ продолжаться неопредѣленно, ибо если данная система уравненій можетъ быть интегрируема какъ совмѣстная, т. е. существуетъ такая функція независимыхъ переменныхъ, которая удовлетворяетъ всѣмъ уравненіямъ данной системы, то соответствующая ей замкнутая система не можетъ содержать болѣе  $n-1$  независимыхъ между собою уравненій (если независимыхъ переменныхъ было  $n$ ).

Интегрированіе любой системы дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка приводится такимъ образомъ къ интегрированію замкнутой системы такихъ уравненій.

Теорія интегрированія замкнутой системы основывается на слѣдующихъ главныхъ теоремахъ.

*Теорема I. Замкнутая система постъ преобразованіи по новымъ переменнымъ остается замкнутой.*

Пусть

$$X_1(f) = 0; \quad X_2(f) = 0; \dots X_r(f) = 0 \quad (27)$$

будетъ замкнутая система.

Пусть новыя переменныя  $y_i$ , гдѣ подѣ  $i$  разумѣемъ все числа отъ 1 до  $n$ , находятся въ зависимости отъ прежнихъ, представляемой уравненіями

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2 \dots y_n) \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2 \dots y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ x_i &= \varphi_i(y_1, y_2 \dots y_n) \end{aligned}$$

Докажемъ, что послѣ преобразованія система (27) остается замкнутой.

Мы можемъ разсматривать обратно все переменныя  $y$  какъ функціи первоначальныхъ, именно

$$y_k = \psi_k(x_1, x_2 \dots x_n)$$

Теперь функція  $f$  можетъ быть разсматриваема какъ такая функція (послѣ замѣны), которая содержитъ первоначальныя переменныя не иначе какъ въ зависимости отъ новыхъ  $y_i$ . Такимъ образомъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}$$

такимъ образомъ составленныя производныя внесемъ въ уравненіе (1). тогда получимъ

$$\begin{aligned} &\left( a'_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + a'_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + a'_n \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \right) \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ &+ \left( a'_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + a'_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + a'_n \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \right) \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ (28) \quad &\dots\dots\dots \\ &+ \left( a'_1 \frac{\partial y_n}{\partial x_1} + a'_2 \frac{\partial y_n}{\partial x_2} + \dots + a'_n \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \right) \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0 \end{aligned}$$

также преобразуются и все другія уравненія. Последнее изъ  $q$  уравненій будетъ послѣ преобразованія

$$\begin{aligned} &\left( a_1^q \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + a_2^q \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + a_n^q \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \right) \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ &+ \left( a_1^q \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + a_2^q \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + a_n^q \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \right) \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ (29) \quad &+ \dots\dots\dots \\ &+ \left( a_1^q \frac{\partial y_n}{\partial x_1} + a_2^q \frac{\partial y_n}{\partial x_2} + \dots + a_n^q \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \right) \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0 \end{aligned}$$



если положимъ въ этихъ уравненіяхъ

$$\begin{aligned}
 b'_1 &= a'_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + a'_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + a'_n \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\
 b'_2 &= a'_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + a'_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + a'_n \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\
 &\dots \dots \dots \\
 b'_k &= a'_1 \frac{\partial y_k}{\partial x_1} + a'_2 \frac{\partial y_k}{\partial x_2} + \dots + a'_n \frac{\partial y_k}{\partial x_n} \\
 &\vdots \\
 b_{1^q} &= a_{1^q} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + a_{2^q} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + a_{n^q} \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\
 b_{2^q} &= a_{1^q} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + a_{2^q} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + a_{n^q} \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\
 &\dots \dots \dots \\
 b_{k^q} &= a_{1^q} \frac{\partial y_k}{\partial x_1} + a_{2^q} \frac{\partial y_k}{\partial x_2} + \dots + a_{n^q} \frac{\partial y_k}{\partial x_n}
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

то представимъ уравненія (28) и вообще уравненія (29) въ видѣ

$$\begin{aligned}
 b'_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + b'_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \dots + b'_n \frac{\partial f}{\partial y_n} &= 0 \\
 &\dots \dots \dots \\
 b_{1^q} \frac{\partial f}{\partial y_1} + b_{2^q} \frac{\partial f}{\partial y_2} + \dots + b_{n^q} \frac{\partial f}{\partial y_n} &= 0.
 \end{aligned}$$

или по принятому символическому означенію въ видѣ

$$Y_1(f) = 0, \quad Y_2(f) = 0 \dots Y_q(f) = 0 \tag{31}$$

Мы можемъ принять, что

$$X(f) = Y(f)$$

ибо въ первой части этого уравненія  $f$  выражено по мерзѣннымъ  $x$ , а во второй части таже функція представлена въ зависимости отъ  $y$ . Такимъ образомъ, замѣняя переменныя  $x_i$  по соотношенію

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2 \dots y_n)$$

замѣняемъ систему (2) системою (31). Посмотримъ обладаетъ ли эта система тѣми же свойствами какъ и система (2).

Легко убѣдиться, что система (31) есть замкнутая, если система (2) считается таковою. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ тождественно

$$(32) \quad X_i(f) = Y_i(f); \quad X_k(f) = Y_k(f)$$

Это имѣетъ мѣсто для всякаго  $f$ . Слѣдовательно также

$$X_i[X_k(f)] = Y_i[X_k(f)]$$

а это по второму изъ (32) представляется въ видѣ

$$(33) \quad X_i[X_k(f)] = Y_i[Y_k(f)]$$

кромѣ того по второму изъ (12), имѣемъ

$$X_k[X_i(f)] = Y_k[X_i(f)]$$

а по первому изъ (12) это представляется въ видѣ

$$(34) \quad X_k[X_i(f)] = Y_k[Y_i(f)]$$

вычитая (34) изъ (33), находимъ

$$(35) \quad X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = Y_i[Y_k(f)] - Y_k[Y_i(f)]$$

это есть такимъ образомъ результатъ подстановки  $y_i$  вмѣсто  $x_i$ .

Мы видѣли что выраженіе (4) можно представить въ видѣ (7) т. е.

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = \sum_{h=1}^{h=n} [X_i(a_h^k) - X_k(a_h^i)] \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

Слѣдовательно аналогично съ этимъ

$$Y_i[Y_k(f)] - Y_k[Y_i(f)] = \sum_{h=1}^{h=n} [Y_i(b_h^k) - Y_k(b_h^i)] \frac{\partial f}{\partial y_h}$$

а потому уравненіе (35) принимаетъ видъ

$$(36) \quad \sum_{h=1}^{h=n} [X_i(a_h^k) - X_k(a_h^i)] \frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{h=1}^{h=n} [Y_i(b_h^k) - Y_k(b_h^i)] \frac{\partial f}{\partial y_h}$$

Эти уравненія показываютъ, что если данная система уравненій (1) преобразовывается въ систему (31), то тѣмъ самымъ уравненіе (7) преобра-

зовываются въ систему уравненій

$$\sum_{h=1}^{h=n} [Y_i(b_k^h) - Y_k(b_k^i)] \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0 \quad (37)$$

Если бы уравненіе (7) были простыми слѣдствіями уравненій (1), а не были самостоятельными уравненіями, то есть представляли бы линейныя комбинаціи уравненій (1), то уравненія (37) были бы такими же линейными комбинаціями уравненій (31).

Все это показываетъ, что замкнутая система уравненій остается таковою и послѣ преобразованія по новымъ переменнымъ.

Въ частномъ случаѣ, если уравненіе (7) обращается въ простое тождество, т. е. если имѣютъ мѣсто тождества

$$X_i(a_k^h) = X_k(a_k^i) \quad (38)$$

то и уравненіе (37) обращается въ тождество, т. е. тогда также

$$Y_i(b_k^h) = Y_k(b_k^i)$$

Это вытекаетъ изъ уравненія (36), лѣвая часть котораго по условію (38) тождественно обращается въ нуль.

Вторая теорема относится къ тому свойству замкнутой или нормальной системы, по которому, если  $f_i^k$  есть одинъ изъ интеграловъ уравненій

$$X_i(z) = 0$$

входящаго въ составъ замкнутой системы, то интегралами уравненія будутъ также и всѣ выраженія  $X_k(f_i^k)$ .

Мы называемъ систему

$$X_1(f) = 0 \dots X_n(f) = 0$$

нормальной или замкнутой, если всѣ комбинаціи вида

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)]$$

суть линейныя функціи отъ

$$X_1(f), X_2(f) \dots$$

По условію замкнутой системы уравненія

$$X_i[X_k(z)] = X_k[X_i(z)] \quad (39)$$

имѣютъ мѣсто для всякаго  $z$ , т. е. удовлетворяются тождественно.

Въ самомъ дѣлѣ, по упомянутому сейчасъ опредѣленію

$$\lambda_1 X_1(z) + \lambda_2 X_2(z) + \dots + \lambda_m X_m(z) = 0$$

По предположенію  $z = f_i^k$  есть интеграль какого либо уравненія  $X_i(z) = 0$ , а потому  $f_i^k$  обращаетъ въ нуль функцію  $X_h[X_i(z)]$  т. е.

$$X_h[X_i(f_i^k)] = 0$$

а слѣдовательно по выраженію (39) также

$$X_i[X_h(f_i^k)] = 0$$

а это прямо показываетъ что

$$X_h(f_i^k)$$

есть одинъ изъ интеграловъ уравненій

$$X_i(z) = 0.$$

14. Послѣ этихъ замѣчаній прослѣдимъ нѣкоторые способы интегрированія замкнутыхъ или нормальныхъ системъ.

Разсмотримъ замкнутую систему изъ  $m$  линейныхъ уравненій съ  $m + n$  переменными. Такимъ образомъ въ каждое уравненіе можетъ входить  $m + n$  частныхъ производныхъ. Изъ этой системы мы можемъ составить такую, въ которой  $m$  производныхъ искомой функціи были бы опредѣлены въ зависимости отъ  $n$  остальныхъ производныхъ. Сдѣлавъ такое преобразованіе, будемъ имѣть  $m$  уравненій вида

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} + b_1^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + b_2^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} + \dots + b_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + b_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + b_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} + \dots + b_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} + b_1^m \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + b_2^m \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} + \dots + b_n^m \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} &= 0 \end{aligned}$$

этими уравненіями  $m$  производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

опредѣляются по  $n$  остальнымъ производнымъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Всякую систему приведенную къ формѣ (40) называютъ *Якобьеномъ*.

Представимъ этия уравненія въ принятой символической формѣ, именно

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \dots, X_m(f) = 0 \quad (41)$$

Легко убѣдиться, что для всякаго Якобьена тождественно удовлетворяется (т. е. при всякомъ  $f$ ) уравненіе вида

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = 0. \quad (42)$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ рѣшалась относительно производныхъ система замкнутая, то составленное по этой системѣ сочетаніе вида (42) есть простая линейная зависимость отдѣльныхъ функцій

$$X_1(f), \quad X_2(f), \dots, X_n(f)$$

т. е.

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = \lambda_1 X_1(f) + \lambda_2 X_2(f) + \dots + \lambda_m X_m(f). \quad (43)$$

Во второй части коэффициентъ при производной  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  есть  $\lambda_1$ , ибо  $X_1(f)$  но нашему означенію есть первое изъ уравненій (42) и въ него  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  входитъ съ коэффициентомъ единицею, а въ другія уравненія эта производная совсѣмъ не входитъ, но—первая часть предыдущаго уравненія каковы бы не были  $k$  и  $i$  совсѣмъ не содержитъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

относительно которыхъ рѣшена система Якобьена, поэтому чтобы существовало тождество (43), необходимо чтобы  $\lambda_1 = 0$ . Подобнымъ же образомъ заключимъ, что и всякое  $\lambda_h$  (гдѣ подъ  $h$  разумѣемъ число отъ 1 до  $m$  включительно) будетъ равно нулю. Итакъ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0 \quad (44)$$

Если обратимся къ уравненію (4), которое по сопоставленію съ (7) можно написать въ видѣ

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = \sum_{h=1}^{h=n} [X_i(a_h^k) - X_k(a_h^i)] \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0 \quad (45)$$

принимая это во вниманіе, видимъ, что при условіи (44) коэффициенты  $b$  уравненій (40), должны удовлетворять уравненію

$$X_i(b_h^k) - X_k(b_h^i) = 0$$

ибо въ примѣненіи къ уравненію (40) выраженіе (45) напишется въ видѣ

$$\sum_{h=1}^{h=n} [X_i(b_h^k) - X_k(b_h^i)] \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0$$

но  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  не обращается въ нуль и послѣднее уравненіе удовлетворится при условіи (46). Замѣтимъ, что теперь  $i$  и  $k$  измѣняются отъ 1 до  $m$ , а  $h$  измѣняется отъ 1 до  $n$ .

Наиболѣе простой способъ интегрированія совмѣстныхъ уравненій (полной системы приведенной къ виду Якобена) предлагаетъ Мейеръ. Сущность его способа заключается въ слѣдующемъ.

Замѣнимъ въ системѣ (40) переменныя  $x_1, x_2 \dots x_m$  новыми переменными  $y_1, y_2 \dots y_m$ . Соотношеніе между тѣми и другими Мейеръ представляетъ въ видѣ

$$(47) \quad x_1 = x_1^0 + y_1; \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2; \quad \dots \quad x_m = x_m^0 + y_1 y_m$$

этотъ составъ показываетъ, что при  $y_1 = 0$  мы имѣемъ нѣкоторыя на тѣмъ значенія переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_m$  въ видѣ

$$x_1 = x_1^0; \quad x_2 = x_2^0 \dots x_m = x_m^0$$

Такимъ образомъ начальная система переменныхъ

$$x_1, \quad x_2 \dots x_m, \quad x_{m+1} \dots x_{m+n}$$

замѣняется теперь системой

$$y_1, \quad y_2 \dots y_m, \quad x_{m+1}, \quad x_{m+2} \dots x_{m+n}$$

Если предполагаемый интеграль  $f$  разсматриваемой системы быть функцией  $x_1, x_2 \dots x_{m+n}$ , т. е.

$$f(x_1, \quad x_2 \dots x_m \quad x_{m+1} \dots x_{m+n})$$

то теперь онъ представится въ видѣ

$$f(y_1, \quad y_2 \dots y_m \quad x_{m+1} \dots x_{m+n})$$

Слѣдовательно полный дифференціалъ

$$\begin{aligned} \partial f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \partial x_m + \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \partial x_{m+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} \partial x_{m+n} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_1} \partial y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \partial y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \partial y_m + \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \partial x_{m+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} \partial x_{m+n} \end{aligned}$$

другими словами, мы имѣемъ тождественное выраженіе

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \partial x_m = \\ & = \frac{\partial f}{\partial y_1} \partial y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \partial y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \partial y_m \end{aligned}$$

но изъ принятыхъ соотношеній между переменными мы имѣемъ

$$\begin{aligned} \partial x_1 &= \partial y_1 \\ \partial x_2 &= y_2 \partial y_1 + y_1 \partial y_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \partial x_m &= y_m \partial y_1 + y_1 \partial y_m \end{aligned}$$

Слѣдовательно предыдущему тождеству можно дать видъ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \partial y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} (y_2 \partial y_1 + y_1 \partial y_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} (y_m \partial y_1 + y_1 \partial y_m) \\ & = \frac{\partial f}{\partial y_1} \partial y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \partial y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \partial y_m \end{aligned}$$

а такъ какъ здѣсь коэффициенты при одинакихъ дифференциалахъ должны быть равны, то заключаемъ, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} y_m \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} y_1 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_m} y_1 \end{aligned} \tag{48}$$

Въ той и другой системѣ входятъ одни и тѣже переменныя

$$x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_{m+n},$$

поэтому въ преобразованной системѣ производныя

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}}$$

останутся безъ переменныя.

Посредствомъ этого система (40) преобразовывается въ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_1^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + c_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} &= 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + c_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} &= 0 \\
 \dots &\dots \\
 \frac{\partial f}{\partial y_m} + c_1^m \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + c_n^m \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

что символически означимъ чрезъ

$$Y_1(f) = 0; \quad Y_2(f) = 0 \dots Y_m(f) = 0.$$

Слѣдовательно розысканіе интеграловъ системы (40) теперь приводится къ розысканію интеграловъ системы (49).

Мы принимаемъ въ этихъ уравненіяхъ, что при  $y_1 = 0$  имѣемъ

$$\begin{aligned}
 x_{m+1} &= x_{m+1}^0 \dots x_{m+n} = x_{m+n}^0 \\
 y_2 &= a_2 \dots y_m = a_m
 \end{aligned}$$

гдѣ  $a_2, a_3 \dots a_m$  суть совершенно произвольныя величины, ибо какія бы не были  $y_2, y_3 \dots y_m$ , но мы всегда для  $y_1 = 0$ , имѣемъ

$$x_1 = x_1^0; \quad x_2 = x_2^0 \dots x_m = x_m^0.$$

Кромѣ того надо замѣтить, что по причинѣ выраженій (48) всѣ коэффициенты  $c_i^k$  въ уравненіяхъ (49) непремѣнно содержатъ множителя  $y_1$ .

Послѣ преобразованія переменныхъ интегрированіе уравненій (40) приводится къ интегрированію уравненій (49). Пусть одинъ изъ интеграловъ этихъ уравненій (49) будетъ  $\psi_k$ . Между прочимъ это есть одинъ изъ интеграловъ уравненія  $Y_1(f) = 0$ , который подобно другимъ приводится къ  $x_{m+k}$ , когда примемъ  $y_1 = 0$ ; но уравненіе  $Y_1(f) = 0$  имѣетъ одинъ интеграль, который приводится къ  $x_{m+k}$  при  $y_1 = 0$ , слѣдовательно это и есть интеграль  $\psi_k$ . Изъ этого мы заключаемъ, что для того чтобы найти  $n$  интеграловъ  $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$ , которые удовлетворяютъ всѣмъ уравненіямъ системы (49), достаточно найти  $n$  интеграловъ одного перваго уравненія  $Y_1(f) = 0$ , приводящихся къ  $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_{m+n}$  для  $y_1 = 0$ . Интегрированіе же этого одного линейнаго уравненія  $Y_1(f) = 0$  съ частными производными равносильно интегрированію  $n$  совмѣстныхъ обыкновенныхъ уравненій.



Можно непосредственно удостовѣриться въ справедливости теоремы, по которой  $n$  интеграловъ  $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$  уравненія  $Y_1(f)$ , приводящихся къ  $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_{m+n}$  для  $y_1 = 0$ , удовлетворяють остальнымъ  $m - 1$  уравненіямъ  $Y_2(f) = 0, Y_3(f) = 0 \dots Y_m(f) = 0$  системы (49).

Если

$$Y_1(f) = 0 \dots Y_m(f) = 0$$

есть Якобьень состоящій изъ  $m$  уравненій, то тождественно

$$Y_i[Y_k(f)] = Y_k[Y_i(f)]$$

Если вмѣсто  $f$  поставимъ какой нибудь интеграль  $\varphi$  уравненія  $Y_1(f) = 0$ , то предыдущее уравненіе привѣдется очевидно къ

$$Y_i[Y_k(\varphi)] = 0$$

ибо если  $\varphi$  есть интеграль уравненія  $Y_1(f) = 0$ , то тождественно имѣемъ  $Y_1(\varphi) = 0$ , и это показываетъ, что  $Y_k(\varphi)$  есть также интеграль уравненія  $Y_i(z) = 0$ .

Интеграль  $\psi_k$  уравненія  $Y_1(f) = 0$ , приводящійся къ  $x_{m+k}$  при  $y_1 = 0$ , долженъ имѣть форму

$$\psi_k = x_{m+k} + y_1 P_k$$

гдѣ  $P_k$  есть функція переменныхъ

$$y_1, y_2, y_m, x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_{m+n}$$

На основаніи того, что мы сейчасъ говорили,  $Y_i(\psi_k)$  есть интеграль уравненія  $Y_1(f)$ , но

$$Y_i(\psi_k) = Y_i(x_{m+k} + y_1 P_k)$$

По свойству символа вообще

$$X(z_1 + z_2) = X(z_1) + X(z_2)$$

$$X(z_1 z_2) = z_1 X(z_2) + z_2 X(z_1)$$

и

$$X[f(z)] = \frac{\partial f}{\partial z} X(z)$$

въ примѣненіи къ нашему случаю

$$Y_i(\psi_k) = Y_i(x_{m+k}) + Y_i(y_1 P_k)$$

или

$$Y_i(\psi_k) = Y_i(x_{m+k}) + y_1 Y_i(P_k) + P_k Y_i(y_1)$$

но  $Y_i(y_1) = 0$ , слѣдовательно остается

$$(50) \quad Y_i(\psi_k) = Y_i(x_{m+k}) + y_1 Y_i(P_k)$$

Далѣе, вообще

$$Y_i(f) = \frac{\partial f}{\partial y_i} + c_1^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + c_k^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}} + \dots$$

Слѣдовательно

$$Y_i(x_{m+k}) = \frac{\partial x_{m+k}}{\partial y_i} + c_1^i \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_{m+1}} + \dots + c_k^i \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_{m+k}} + \dots$$

но такъ какъ  $y_1, y_2 \dots y_n, x_{m+1} \dots x_{m+k} + \dots$  суть переменныя незави-  
мыя, то изъ всего этого остается только

$$Y_i(x_{m+k}) = c_k^i$$

поэтому выраженіе (50) представляется въ видѣ

$$Y_i(\psi_k) = c_k^i + y_1 Y_i(P_k)$$

но  $c_k^i$  непремѣнно содержитъ множителя  $y_1$ , слѣдовательно

$$Y_i(\psi_k) = y_1 Q$$

гдѣ  $Q$  есть нѣкоторая функція.

Мы сказали, что  $Y_i(\psi_k)$  есть правильный интеграль уравненія  $Y_1(f) = 0$ , если онъ обращается въ нуль при  $y_1 = 0$ . Съ другой стороны  $Y_1(f) = 0$  допускаетъ очевидный интеграль  $f = 0$ , удовлетворяющій этому условію. Такъ какъ это уравненіе можетъ допускать только одинъ интеграль обращающійся въ нуль для  $y_1 = 0$ , то необходимо

$$Y_i(\psi_k) = 0$$

этимъ и подтверждается то положеніе, которое мы высказали выше.

Итакъ рѣшеніе вопроса объ интегрированіи уравненій (49) приводится къ интегрированію перваго изъ этихъ уравненій, именно  $Y_1(f) = 0$ , или что все равно къ интегрированію системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$(51) \quad \frac{\partial y_1}{1} = \frac{\partial y_2}{0} = \dots = \frac{\partial y_m}{0} = \frac{\partial x_{m+1}}{c_1^i} = \dots = \frac{\partial x_{m+n}}{c_n^i}$$

Въ этой системѣ находятся пропорціи относящіяся къ такимъ дифференціаламъ, которые не входятъ въ уравненіе  $Y_1(f) = 0$ , мы говоримъ про

пропорціи

$$\frac{\partial y_2}{0} = \frac{\partial y_3}{0} = \dots = \frac{\partial y_m}{0}$$

эти пропорціи приводятъ къ уравненіямъ, интегралы которыхъ суть

$$y_2 = C_2, \quad y_3 = C_3 \dots y_m = C_m$$

гдѣ  $C_i$  суть произвольныя постоянныя, и это уравненіе показывается между прочимъ, что при интегрированіи уравненія  $Y_1(f) = 0$  величины  $y_2 \dots y_m$  должны быть приняты за постоянныя. Поэтому для нашей цѣли достаточно интегрировать систему

$$\frac{\partial y_1}{1} = \frac{\partial x_{m+1}}{c'_1} = \dots = \frac{\partial x_{m+n}}{c'_n} \tag{52}$$

при этомъ въ функціяхъ  $c'_1, c'_2 \dots c'_n$  только  $y_1, x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_{m+n}$  должны быть разсматриваемы какъ переменныя.

Предположимъ что

$$y_2, y_3 \dots y_m, \quad \psi_1 \dots \psi_n$$

Составляютъ систему  $m + n - 1$  различныхъ интеграловъ уравненія  $Y_1(f) = 0$ . Всѣ другіе интегралы этого уравненія могутъ быть выражены посредствомъ этихъ. Если  $f_1, f_2 \dots f_n$  суть какія либо интегралы разсматриваемой системы тогда

$$f_i(y_1, y_2 \dots y_m, x_{m+1} \dots x_{m+n}) = F_i(y_2, y_3 \dots y_m, \psi_1 \dots \psi_n) \tag{53}$$

гдѣ  $i$  замѣняется отъ 1 до  $n$ .

Чтобы получить интегралы  $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$  необходимо знать форму функцію  $F_i$ , по предположенію при  $y_1 = 0$ , имѣемъ

$$\psi_1 = x_{m+1}, \quad \psi_2 = x_{m+2} \dots \psi_n = x_{m+n}$$

поэтому изъ (53) мы должны имѣть тождественно

$$f_i(0, y_2, y_3 \dots y_m, x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_{m+n}) = F_i(y_2 \dots y_m, x_{m+1} \dots x_{m+n})$$

и это тождество опредѣляетъ функцію  $F_i$ , такъ что для этого имѣемъ

$$F_i(y_2, y_3 \dots y_m, x_{m+1} \dots x_{m+n}) = f_i(0, y_2 \dots y_m, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_n)$$

Изъ этого заключаемъ, что когда данъ какой нибудь интегралъ уравненія  $Y_1(f) = 0$ , то чтобы представить его посредствомъ

$$y_2 \dots y_m, \quad \psi_1 \dots \psi_n$$

достаточно замѣнить  $y_1$  нулемъ и  $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_{m+n}$  замѣнить соответственно чрезъ  $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$ .

Слѣдовательно чтобы найти интегралы  $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$  достаточно, найдя интегралы  $f_1, f_2 \dots f_n$  системы совокупныхъ уравненій, рѣшить  $n$  соотношеній

$$f_i = f_i(0, y_2 \dots y_m, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_n)$$

относительно

$$\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$$

Кромѣ всѣхъ этихъ соображеній относящихся къ общему интегралу Мейеръ показалъ, что если знаемъ одинъ интегралъ системы совокупныхъ уравненій (52), то можемъ найти по крайней мѣрѣ хотя одинъ интегралъ системы (49), а слѣдовательно и системы (40) или (41). Въ самомъ дѣлѣ пусть

$$f(y_1, y_2 \dots y_m, x_{m+1} \dots x_{m+n})$$

будетъ интегралъ системы (52) и пусть  $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$  будетъ основная система интеграловъ (независимыхъ) для уравненій (49). Тогда, какъ мы видѣли,

$$f = f(0, y_2 \dots y_m, \psi_1 \dots \psi_n)$$

Рѣшимъ это соотношеніе относительно  $\psi_1$  и будемъ имѣть

$$(54) \quad \psi_1 = \theta_1(y_1, y_2 \dots y_m, x_{m+1} \dots x_{m+n}, \psi_2 \dots \psi_n)$$

если бы въ это выраженіе не входили  $\psi_2 \dots \psi_n$ , то  $\psi_1$  представляло бы интегралъ. Если же  $\psi_2 \dots \psi_n$  входятъ въ  $\theta$ , напомнимъ условіе, при которомъ  $\psi_1$  удовлетворяетъ уравненію  $Y_k(f) = 0$ , это условіе есть

$$Y_k(\psi_1) = 0$$

чтобы развить это условіе замѣтимъ, что если вообще

$$X[F(x, y, z)] = \frac{\partial F}{\partial x} X(x) + \frac{\partial F}{\partial y} X(y) + \frac{\partial F}{\partial z} X(z)$$

то въ примѣненіи къ нашему случаю

$$Y_k(\psi_1) = \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} Y_k(y_1) + \frac{\partial \theta_1}{\partial y_2} Y_k(y_2) + \dots + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{m+n}} Y_k(x_{m+n}) = 0$$

гдѣ подъ  $k$  разумѣемъ каждое изъ чиселъ отъ 1 до  $m$ . Если вторая часть этихъ уравненій не обращается въ нуль, то она должна содержать величины  $\psi_2, \psi_3 \dots \psi_n$ , безъ этого она представляла бы соотношеніе между

независимыми переменными  $y_1, y_2 \dots y_m, x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_{m+n}$ , чего не может быть.

Допустимъ, что вторая часть содержитъ  $\psi_2$ . Опредѣляя изъ этого  $\psi_2$  имѣемъ

$$\psi_2 = \theta_2(y_1, y_2 \dots y_m, x_{m+1} \dots x_{m+n}, \psi_3 \dots \psi_n)$$

для этого подобно предыдущему имѣемъ

$$Y(\psi_k) = \frac{\partial \theta_2}{\partial y_1} Y_k(y_1) \dots \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{m+n}} Y(x_{m+n}) = 0$$

Если вторая часть не равна тождественно нулю, то это уравненіе можно рѣшить относительно  $\psi_3$  и т. д. Если можно будетъ такъ продолжать далѣе, то наконецъ получимъ уравненіе, изъ котораго опредѣлимъ  $\psi_n$  и возвращаясь найдемъ всѣ  $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$  т. е. всѣ интегралы системы (49).

Можетъ однако случиться что для одного изъ  $\psi$  напр. для  $\psi_i$  всѣ  $Y_k(\psi_i)$  тождественно обращаются въ нули, но въ такомъ случаѣ достаточно замѣнить въ выраженіи

$$\psi_i = \theta_i(y_1, y_m, x_{m+1} \dots x_{m+n}, \psi_{i+1} \dots \psi_n)$$

всѣ остальные  $\psi_{i+1} \dots \psi_n$  черезъ произвольныя постоянныя для того, чтобы имѣть интеграль.

Поясимъ теорію Мейера на частномъ примѣрѣ.

Будемъ интегрировать систему

$$X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_3 + x_4 - 3x_1) \frac{\partial f}{\partial x_3} + (x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4) \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \tag{a}$$

$$X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2} + (x_3 x_4 - x_2) \frac{\partial f}{\partial x_3} + (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

чтобы получить полную или замкнутую систему прибавимъ къ этому выраженію

$$X_1[X_2(f)] - X_2[X_1(f)]$$

Составимъ эту разность для нашего случая.

По выраженію (7\*) стр. 1216 мы имѣемъ

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = \sum_{h=1}^{h=n} [X_i(a_h^{(k)}) - X_k(a_h^{(i)})] \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

гдѣ

$$X_i(a_h^{(k)}) - X_k(a_h^{(i)}) = \sum_{h=1}^{h=n} \left[ a_h^{(i)} \frac{\partial a_h^{(k)}}{\partial x_h} - a_h^{(k)} \frac{\partial a_h^{(i)}}{\partial x_h} \right]$$

Мы имѣемъ систему двухъ уравненій, поэтому будемъ считать  $i = 1$  и  $k = 2$ , что касается до  $h$ , то при четырехъ переменныхъ  $h$  измѣняется отъ 1 до 4. При такомъ условіи разность

$$X_1[X_2(f)] - X_2[X_1(f)]$$

принимаетъ видъ

$$(A) \quad \sum_h \left[ a_h^{(1)} \frac{\partial a_1^{(2)}}{\partial x_h} - a_h^{(2)} \frac{\partial a_1^{(1)}}{\partial x_h} \right] \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_h \left[ a_h^{(1)} \frac{\partial a_2^{(2)}}{\partial x_h} - a_h^{(2)} \frac{\partial a_2^{(1)}}{\partial x_h} \right] \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ + \sum_h \left[ a_h^{(1)} \frac{\partial a_3^{(2)}}{\partial x_h} - a_h^{(2)} \frac{\partial a_3^{(1)}}{\partial x_h} \right] \frac{\partial f}{\partial x_3} + \sum_h \left[ a_h^{(1)} \frac{\partial a_4^{(2)}}{\partial x_h} - a_h^{(2)} \frac{\partial a_4^{(1)}}{\partial x_h} \right] \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

или

$$\sum_g \sum_h \left[ a_h^{(1)} \frac{\partial a_g^{(2)}}{\partial x_h} - a_h^{(2)} \frac{\partial a_g^{(1)}}{\partial x_h} \right] \frac{\partial f}{\partial x_g}$$

для нашихъ двухъ уравненій

$$a_1^{(1)} = 1; \quad a_2^{(1)} = 0; \quad a_3^{(1)} = (x_2^2 + x_4 - 3x_1); \quad a_4^{(1)} = x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4 \\ a_1^{(2)} = 0; \quad a_2^{(2)} = 1; \quad a_3^{(2)} = (x_3 x_4 - x_2); \quad a_4^{(2)} = x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2$$

такъ какъ  $a_1^{(1)}$ ,  $a_1^{(2)}$ ,  $a_2^{(1)}$ ,  $a_2^{(2)}$  въ нашемъ случаѣ нули или постоянныя величины, то первыя двѣ суммы въ выраженіи (A) обращаются въ нули.

Въ двухъ остальныхъ суммахъ входятъ производныя

$$\frac{\partial a_3^{(2)}}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial a_{31}^{(2)}}{\partial x_2} = -1; \quad \frac{\partial a_3^{(2)}}{\partial x_3} = x_4; \quad \frac{\partial a_3^{(2)}}{\partial x_4} = x_3 \\ \frac{\partial a_3^{(1)}}{\partial x_1} = -3; \quad \frac{\partial a_3^{(1)}}{\partial x_2} = 1; \quad \frac{\partial a_3^{(1)}}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial a_3^{(1)}}{\partial x_4} = 1 \\ \frac{\partial a_4^{(2)}}{\partial x_1} = x_3 x_4 - x_2; \quad \frac{\partial a_4^{(2)}}{\partial x_2} = 1 - x_1; \quad \frac{\partial a_4^{(2)}}{\partial x_3} = x_1 x_4; \quad \frac{\partial a_4^{(2)}}{\partial x_4} = x_1 x_3 \\ \frac{\partial a_4^{(1)}}{\partial x_1} = x_2 + x_4; \quad \frac{\partial a_4^{(1)}}{\partial x_2} = x_1; \quad \frac{\partial a_4^{(1)}}{\partial x_3} = 1; \quad \frac{\partial a_4^{(1)}}{\partial x_4} = x_1$$

а потому двѣ остальные суммы приводятся къ

$$(1 - x_2 x_4 - x_4^2 + 3x_1 x_4 - x_3^2 - x_1 x_2 x_3 + x_2 - x_1 x_2) \left[ \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} \right]$$

такъ какъ это тождественно въ нуль не обращается, то приравняемъ эту

сумму нулю, получимъ третье уравненіе совмѣстное съ двумя данными и необходимое для рѣшенія вопроса. Мы не можемъ предположить что множитель

$$1 - x_2 x_4 - x_4^2 + 3x_1 x_4 - x_3^2 - x_1 x_2 x_3 + x_2 - x_1 x_2$$

обращается въ нуль, ибо кромѣ двухъ данныхъ дифференціальныхъ уравненій мы не знаемъ ни какихъ соотношеній между независимыми переменными  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Въ виду этого должны принять

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \tag{b}$$

это и есть искомое третье уравненіе, которое вмѣстѣ съ данными составляетъ уже полную систему; при четырехъ переменныхъ  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . болѣе уравненій быть не можетъ. Изъ этихъ трехъ уравненій (a) и (b) опредѣлимъ три производныхъ черезъ четвертую, именно  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$  выразимъ по  $\frac{\partial f}{\partial x_4}$ . Такимъ образомъ составится Якобьенъ<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= - (x_3 + 3x_1^2) \frac{\partial f}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} \end{aligned} \tag{c}$$

эти уравненія соотвѣтствуютъ уравненіямъ (40) общей теоріи.

Для интегрированія этого Якобьена введемъ новыя переменныя по соотношеніямъ

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1 y_2, \quad x_3 = y_1 y_3 \tag{d}$$

эти соотношенія соотвѣтствуютъ выраженіямъ (47) общей теоріи, только мы принимаемъ  $x_1^0 = 0; x_2^0 = 0; x_3^0 = 0$ . Въ нашемъ случаѣ  $m = 3$  и первое изъ уравненія (48) теперь принимаетъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3$$

а внося сюда вмѣсто производныхъ ихъ величины изъ Якобьена (c)

<sup>1)</sup> При этомъ изъ уравненій (b) опредѣляемъ  $\frac{\partial f}{\partial x_3}$  и вносимъ это въ уравненія (a).

имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = - (x_3 + 3x_1^2) \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4} y_2 - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} y_3$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = - (x_3 + 3x_1^2 + x_2 y_2 + x_1 y_3) \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

вводя сюда вмѣсто  $x_1, x_2, x_3$  новыя переменныя  $y_1, y_2, y_3$  по соотношеніямъ  $(\partial)$ , имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = - (2y_1 y_3 + 3y_1^2 + y_1 y_2^2) \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + (2y_1 y_3 + 3y_1^2 + y_1 y_2^2) \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

это уравненіе соотвѣтствуетъ первому изъ уравненій (49) общей теоріи. т. е. уравненію  $Y_1(f) = 0$ .

Соотвѣтствующія этому совокупныя уравненія составленныя по формѣ (51) суть

$$\frac{\partial y_1}{1} = \frac{\partial y_2}{0} = \frac{\partial y_3}{0} = \frac{\partial x_4}{2y_1 y_3 + 3y_1^2 + y_1 y_2^2}$$

это показываетъ, что при интегрированіи этихъ совокупныхъ уравненій мы должны считать  $y_2$  и  $y_3$  за параметры. Тогда приходится интегрировать единственное уравненіе

$$\partial x_4 = (2y_1 y_3 + 3y_1^2 + y_1 y_2^2) \partial y_1$$

интегралъ его есть

$$C = x_4 - y_1^2 y_3 - y_1^3 - \frac{y_1^2 y_2^2}{2}$$

переходя къ начальной системѣ переменныхъ, замѣтимъ, что

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = \frac{x_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$y_3 = \frac{x_3}{y_1} = \frac{x_3}{x_1}$$

Слѣдовательно интегралъ есть

$$C = x_4 - x_1 x_3 - x_1^3 - \frac{x_2^2}{2}$$



15. Другой способ интегрирования линейных совместных уравнений с частными производными состоит в том, что известным преобразованием число уравнений, составляющих систему, понижается на единицу и число переменных в остающейся системѣ становится однимъ менѣе. Сущность этого способа заключается въ слѣдующемъ.

Пусть данная система состоит изъ слѣдующихъ  $m$  уравнений съ  $n$  независимыми переменными ( $m < n$ )

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_n} &= X_1(z) = 0 \\ a_1^{(2)} \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2^{(2)} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(2)} \frac{\partial z}{\partial x_n} &= X_2(z) = 0 \\ \dots &\dots \\ a_1^{(m)} \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2^{(m)} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(m)} \frac{\partial z}{\partial x_n} &= X_m(z) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Пусть полная система частныхъ интеграловъ перваго изъ этихъ уравнений будетъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ . Каждый изъ этихъ интеграловъ есть функция независимыхъ переменныхъ, такъ что вообще

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n) \\ &\dots \\ y_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, x_2 \dots x_n) \end{aligned}$$

Эти интегралы мы примемъ за новыя переменныя, и изъ  $n - 1$  уравнений опредѣлимъ  $n - 1$  первоначальныхъ переменныхъ, т. е. всѣ за исключеніемъ одного напр.  $x_1$ . Тогда эти остальные переменныя т. е.

$$x_2, x_3 \dots x_n$$

представятся функциями  $x_1$  и независимыхъ интеграловъ въ числѣ  $n - 1$ . Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\begin{aligned} x_2 &= F_2(y_1, y_2 \dots y_{n-1}, x_1) \\ x_3 &= F_3(y_1, y_2 \dots y_{n-1}, x_1) \\ &\dots \\ x_n &= F_n(y_1, y_2 \dots y_{n-1}, x_1) \end{aligned}$$

Если преобразуемъ данныя уравненія (55) по новымъ переменнымъ, то преобразованныя уравненія будутъ зависѣть отъ  $x_1, x_2 \dots x_n$  только по-

тому, что эти переменныя будутъ входить въ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ ; только  $x_1$  будетъ входить еще явно. Слѣдовательно всѣ переменныя  $x_2 \dots x_n$  будутъ входить однообразно, а  $x_1$  будетъ входить явно и въ зависимости отъ интеграловъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ . Итакъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n}$$

Подставляя эти производныя въ данныя уравненія, будемъ имѣть по постановкѣ въ первое изъ нихъ

$$\begin{aligned} & a_1^{(1)} \left[ \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} \right] \\ & + a_2^{(1)} \left[ \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} \right] \\ (56) \quad & + \dots \dots \dots \\ & + a_n^{(1)} \left[ \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \right] = 0 \end{aligned}$$

это можемъ представить въ видѣ

$$\begin{aligned} & a_1^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \left[ a_1^{(1)} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + a_2^{(1)} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(1)} \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \right] \frac{\partial z}{\partial y_1} \\ & + \left[ a_1^{(1)} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + a_2^{(1)} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(1)} \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \right] \frac{\partial z}{\partial y_2} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \left[ a_1^{(1)} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} + a_2^{(1)} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + a_n^{(1)} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \right] \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

что по принятымъ означеніямъ представляется въ видѣ

$$(57) \quad a_1^1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_1(y_1) \frac{\partial z}{\partial y_1} + X_2(y_2) \frac{\partial z}{\partial y_2} + \dots + X_{n-1}(y_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} = 0$$

подобнымъ же образомъ другія уравненія обращаются въ

$$a_1^{(2)} \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(y_1) \frac{\partial z}{\partial y_1} + X_2(y_2) \frac{\partial z}{\partial y_2} + \dots + X_2(y_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} = 0$$

(58)

$$a_1^{(m)} \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_m(y_1) \frac{\partial z}{\partial y_1} + X_m(y_2) \frac{\partial z}{\partial y_2} + \dots + X_m(y_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} = 0$$

но такъ какъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$  предполагаются частными интегралами перваго изъ уравненій (55), т. е. уравненія  $X_1(z) = 0$ , то очевидно всѣ функціи

$$X_1(y_1), X_1(y_2) \dots X_1(y_{n-1})^1$$

тождественно обращаются въ нули и потому отъ уравненія (57) остается только

$$a_1^1 \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$

но такъ какъ  $a_1^1$  не обращается въ нуль, ибо въ противномъ случаѣ первое изъ уравненій не имѣло бы перваго члена, то остается предположить что

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$

или что  $z$  въ остающихся уравненіяхъ (58) переменнаго  $x_1$  не содержитъ. Итакъ послѣ разсматриваемаго преобразованія число уравненій и число неизвѣстныхъ на единицу уменьшается.

Такъ какъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$  суть частные интегралы уравненія  $X_1(z) = 0$ , то по теоремѣ упомянутой на стр. 1229-ой заключаемъ, что функціи

$$X_k(y_i)$$

гдѣ  $k$  измѣняется отъ  $k = 2$  до  $k = m$  и  $i$  измѣняется отъ 1 до  $n - 1$ , должны быть всѣ интегралами уравненія  $X_1(z) = 0$ , и всѣ эти функціи  $X_k(y_i)$  должны зависетьъ только отъ переменныхъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ . Если

<sup>1)</sup> Мы предполагаемъ, что

$$y_1, y_2 \dots y_{n-1}$$

суть интегралы *только* перваго уравненія, а потому другимъ уравненіямъ они не удовлетворяютъ и функціи

$$X_2(z), X_3(z) \dots X_m(z)$$

отъ подстановки этихъ интеграловъ вмѣсто  $z$  въ нули не обращаются.

сдѣлаемъ въ этомъ смыслѣ такое означеніе

$$\begin{aligned} X_2(y_1) &= Y_1^{(1)}, & X_2(y_2) &= Y_1^{(2)} \dots X_2(y_{n-1}) = Y_1^{(n-1)} \\ &\dots \dots \dots \\ X_m(y_1) &= Y_{m-1}^{(1)}, & X_m(y_2) &= Y_{m-1}^{(2)} \dots X_m(y_{n-1}) = Y_{m-1}^{(n-1)} \end{aligned}$$

то оставшіяся  $(m - 1)$  уравненій, преобразованныя по переменнымъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ , окончательно примутъ видъ

$$\begin{aligned} & Y_1^1 \frac{\partial z}{\partial y_1} + Y_1^2 \frac{\partial z}{\partial y_2} + \dots + Y_1^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} = 0 \\ & Y_2^1 \frac{\partial z}{\partial y_1} + Y_2^2 \frac{\partial z}{\partial y_2} + \dots + Y_2^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} = 0 \\ (59) \quad & \dots \dots \dots \\ & Y_{m-1}^1 \frac{\partial z}{\partial y_1} + Y_{m-1}^2 \frac{\partial z}{\partial y_2} + \dots + Y_{m-1}^{(n-1)} \frac{\partial z}{\partial y_{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

Въ этой системѣ уравненій на единицу меньше противъ первоначальной и независимыхъ переменныхъ также на единицу меньше. Съ этой системой поступимъ также какъ съ данной.

Прежде всего найдемъ полную систему интеграловъ перваго изъ уравненій (59). Затѣмъ введемъ эти интегралы какъ новыя и независимыя переменныя вмѣсто переменныхъ  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$  въ уравненія этой системы, послѣ этого система (59) приведется къ новой системѣ, число уравненій въ которой и число независимыхъ переменныхъ будетъ единицею меньше. Мы будемъ поступать такъ до тѣхъ поръ, пока останется одно уравненіе съ  $n - (m - 1)$  независимыми переменными. Пусть это уравненіе будетъ

$$V_1 \frac{\partial z}{\partial v_1} + V_2 \frac{\partial z}{\partial v_2} + \dots + V_{n-(m-1)} \frac{\partial z}{\partial v_{n-(m-1)}} = 0.$$

Полная система частныхъ интеграловъ послѣдняго уравненія представитъ полную систему интеграловъ данныхъ уравненій (55).

Такимъ образомъ интегрированіе предложенной замкнутой системы уравненій приведется къ интегрированію  $m$  отдѣльныхъ уравненій (перваго въ каждой преобразованной системѣ) но каждое послѣдующее изъ этихъ содержитъ однимъ переменнымъ меньше предыдущаго.

16. Способъ предложенный Якоби для интегрированія совмѣстныхъ линейныхъ уравненій состоитъ въ слѣдующемъ.

Предположимъ, что дана система  $m$  совмѣстныхъ линейныхъ уравненій. Рѣшимъ эту систему относительно  $m$  производныхъ, тогда данная

система замѣнится системой (40); всѣ уравненія этой послѣдней заключаются въ формѣ

$$X_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + b_1^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + b_n^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} = 0$$

гдѣ  $i$  имѣеть значенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до  $m$ .

Разсмотримъ первое изъ этихъ уравненій, именно

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + b_1^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + b_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} = 0 \quad (60)$$

составимъ для этого уравненія обыкновенныя совокупныя и изъ сочетанія двухъ какихъ либо пропорцій найдемъ интеграль, который означимъ чрезъ  $\varphi_1$ .

Тогда на основаніи теоремы доказанной на стр. 1216 имѣемъ

$$\varphi_2 = X_2(\varphi_1)$$

и это есть также интеграль уравненія (60), а слѣдовательно

$$\varphi_3 = X_2(\varphi_2)$$

также будетъ интеграломъ уравненія (60).

Такимъ образомъ мы составимъ рядъ функцій  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i$ , которыя всѣ будутъ интегралами уравненія

$$X_1(f) = 0$$

т. е. уравненія (60). Мы знаемъ, что это уравненіе имѣеть только  $m+n-1$  различныхъ интеграловъ, ибо оно содержитъ  $m+n$  независимыхъ переменныхъ. поэтому, составляя рядъ интеграловъ, мы придемъ къ такому, который уже не будетъ отличаться отъ какого либо изъ найденныхъ; онъ будетъ или тождественъ съ однимъ изъ нихъ, или же будетъ функціей прежде найденныхъ. Предположимъ, что это имѣеть мѣсто послѣ  $i$  операций; предположимъ, что интеграль  $\varphi_{i+1}$  является функціей найденныхъ. Такимъ образомъ

$$\varphi_{i+1} = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, x_2, \dots, x_m)$$

(ибо по предыдущимъ соображеніямъ въ послѣднемъ выраженіи  $i < n$  или  $i = n$ )

Послѣ этого опредѣлимъ такую функцію  $\theta$ , которая, будучи функціей найденныхъ интеграловъ, удовлетворяла бы второму изъ системы Якобьена, именно уравненію  $X_2(f) = 0$ .

Если предполагаемая функция  $\theta$  удовлетворяет уравнению  $X_2(f)=0$  то

$$X_2(\theta) = 0.$$

Но такъ какъ  $\theta$  есть функция  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_i, x_2 \dots x_m$ , то по свойству знака  $X$  имѣемъ

$$(61) \quad X_2(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} X_2(\varphi_1) + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} X_2(\varphi_2) + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} X_2(\varphi_i) = 0$$

Въ самомъ дѣлѣ, если имѣемъ систему уравненій

$$X_1(f) = 0; \quad X_2(f) = 0 \dots X_m(f) = 0$$

и если  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$  суть интегралы этой системы, и при этомъ существуетъ соотношеніе

$$\Phi(x_1, x_2 \dots x_m, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n) = 0$$

то

$$X_h(\Phi) = 0$$

а въ этомъ случаѣ

$$X_h(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} X_h(\varphi_1) \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_n} X_h(\varphi_n) = 0$$

но такъ какъ мы принимаемъ

$$\varphi_2 = X_2(\varphi_1); \quad \varphi_3 = X_2(\varphi_2) \dots \varphi_i = X_2(\varphi_{i-1})$$

$$\varphi_{i+1} = F(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_i, x_2 \dots x_m)$$

то предыдущее уравненіе (61) принимаетъ видъ

$$(62) \quad X_2(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \varphi_2 + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} \varphi_3 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{i-1}} \varphi_i + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} F = 0$$

Интегрированіе этого уравненія приводится къ интегрированію совместныхъ уравненій

$$\frac{\partial \varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\varphi_3} = \dots = \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\varphi_i} = \frac{\partial \varphi_i}{F} = \frac{\partial x_2}{1}$$

пусть  $\psi_1 = C$  будетъ одинъ изъ интеграловъ этой системы, тогда  $\psi_1$  (безъ произвольной постоянной) будетъ интеграломъ уравненія (62), а слѣдовательно онъ будетъ интеграломъ уравненій

$$X_1(f) = 0 \quad \text{и} \quad X_2(f) = 0$$

Послѣ этого подобно предыдущему составимъ рядъ

$$\psi_1, \psi_2 \dots \psi_i$$

гдѣ всѣ эти интегралы заключаются въ формѣ

$$\psi_i = X_3(\psi_{i-1})$$

Всѣ эти интегралы будутъ интегралами двухъ уравненій

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0$$

и такъ какъ эта система допускаетъ только  $m - n - 2$  различныхъ интеграловъ, то непремѣнно послѣ нѣсколькихъ операцій, опять получится интегралъ, который является уже функцией найденныхъ. Пусть этотъ интегралъ будетъ

$$\psi_{i+1} = \Phi(\psi_1, \psi_2 \dots \psi_i, x_3, x_4 \dots x_m)$$

имѣя это, будемъ искать такую функцію

$$\omega(\psi_1, \psi_2 \dots \psi_i, x_3, x_4 \dots x_m)$$

которая удовлетворяла бы уравненію

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega}{\partial \psi_1} \psi_2 + \dots + \frac{\partial \omega}{\partial \psi_{i-1}} \psi_i + \frac{\partial \omega}{\partial \psi_i} \Phi = 0$$

одна изъ интеграловъ системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій, составленныхъ для этого линейнаго, пусть будетъ  $\omega_1$ ; онъ будетъ общимъ для трехъ уравненій

$$X_1(f) = 0; \quad X_2(f) = 0; \quad X_3(f) = 0$$

Продолжая такимъ образомъ, мы найдемъ одинъ интегралъ системы Якобьена (40).



## IV.

### Интегрирование нелинейных уравнений съ частными производными.

17. Мы знаемъ, что общій видъ теперь разсматриваемыхъ уравненій есть <sup>1)</sup>

$$(1) \quad F(z, x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = 0$$

здѣсь  $z$  искомая функція;  $x_1, x_2 \dots x_n$  независимыя переменныя и  $p_1, p_2 \dots p_n$  частныя производныя искомой функціи взятыя относительно переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ .

Пусть

$$(2) \quad f(z, x_1, x_2 \dots x_n) = 0$$

будеть то соотношеніе, которое удовлетворяетъ данному дифференціальному уравненію (1), т. е. величина  $z$  опредѣленная изъ этого уравненія, будучи подставлена въ уравненіе (1) обращаетъ его въ тождество.

Будемъ брать отъ уравненія (2) частныя производныя по независимымъ переменнымъ, тогда получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z} p_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z} p_2 = 0$$

. . . . .

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n = 0$$

---

<sup>1)</sup> См. стр. 125.



гдѣ

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

и подъ  $i$  разумѣемъ всё цѣлыя числа отъ 1 до  $n$ .

Изъ этихъ уравненій выводимъ

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots p_n = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

подставляя это въ уравненіе (1), имѣемъ

$$F\left(x_1, x_2 \dots x_n, z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \dots, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = 0.$$

такимъ образомъ преобразованное данное уравненіе вообще имѣетъ видъ

$$\psi\left(x_1, x_2 \dots x_n, z, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

и изъ него мы видимъ, что  $z$  можетъ быть здѣсь принято за такое же независимое переменное, какъ всё другія, т. е.  $x_1, x_2 \dots x_n$ , слѣдовательно теперь оно содержитъ  $n + 1$  переменныхъ и  $n + 1$  производныхъ функцій  $f$ , взятыхъ относительно этихъ  $n + 1$  переменныхъ, сама же функція  $f$  не входитъ явно; на основаніи этого за общую форму уравненія съ частными производными перваго порядка мы можемъ принимать такую функцію независимыхъ переменныхъ и частныхъ производныхъ взятыхъ относительно этихъ переменныхъ, которая не содержитъ явно самой функціи, отъ которой упомянутыя частныя производныя берутся.

Интегрировать уравненіе съ частными производными

$$F(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = 0 \tag{3}$$

гдѣ подъ  $p$  разумѣемъ частныя производныя

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

значитъ вычислить производныя  $p_1, p_2 \dots p_n$  удовлетворяющія тому условію, что

$$p_1 \partial x_1 + p_2 \partial x_2 + \dots + p_n \partial x_n \tag{4}$$

есть точный дифференціалъ. Одна изъ этихъ производныхъ напр.  $p_1$  можетъ быть вычислена изъ даннаго уравненія (3), а для того чтобы выполнить задачу интегрированія предстоитъ составить еще  $n-1$  уравненій совмѣстныхъ съ даннымъ.

Эти уравненія можно составить на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Если производная  $p_i$  есть функція не только переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$ , но и нѣкоторыхъ изъ остальныхъ производныхъ, такъ напр. если

$$p_i = f(x_1, x_2 \dots x_n, p_\mu)$$

то производная отъ  $p_i$  по какому либо изъ переменныхъ  $x_k$  будетъ имѣть видъ

$$(4_0) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial p_\mu} \left( \frac{\partial p_\mu}{\partial x_k} \right)$$

гдѣ производная заключенная въ скобки относится къ дифференцированію по переменному входящему въ зависимости отъ  $p_\mu$  (но не явно).

Допустимъ, что каждая изъ производныхъ  $p_1, p_2 \dots p_n$  содержитъ въ своемъ выраженіи кромѣ независимыхъ переменныхъ еще производныя за ней слѣдующія, т. е. допустимъ, что

$p_1$  есть функція отъ  $x_1, x_2 \dots x_n, p_2, p_3 \dots p_n$

$p_2$  " " " "  $x_1, x_2 \dots x_n, p_3, p_4 \dots p_n$

и вообще

$$p_i = f(x_1, x_2 \dots x_n, p_{i+1}, p_{i+2} \dots p_n)$$

Въ такомъ случаѣ условіе полнаго дифференціала (4) вообще представляемое въ видѣ

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$$

будемъ имѣть форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \left( \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_k} \right) + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_n}{\partial x_k} \right) \\ = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \left( \frac{\partial p_{k+1}}{\partial x_i} \right) + \dots + \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_n}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

но по условію точнаго дифференціала

$$(5) \quad \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+1}}; \quad \frac{\partial p_{k+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+1}}$$

Слѣдовательно предыдущее можно представить въ видѣ

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \left( \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+1}} \right) + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_k}{\partial x_n} \right) = \\ = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \left( \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}} \right) + \dots + \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_i}{\partial x_n} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

но такъ какъ по предположенію каждая производная  $p$  есть функція всѣхъ слѣдующихъ за нею, то конечно

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+1}} \right) = \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \left( \frac{\partial p_{k+1}}{\partial x_{i+1}} \right) + \dots + \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_n}{\partial x_{i+1}} \right) \\ \left( \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+1}} \right) = \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \left( \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{k+1}} \right) + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_n}{\partial x_{k+1}} \right) \end{aligned}$$

Внося это въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \left[ \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \left( \frac{\partial p_{k+1}}{\partial x_{i+1}} \right) + \dots + \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_n}{\partial x_{i+1}} \right) \right] \\ + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_k}{\partial x_n} \right) \\ = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \left[ \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \left( \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{k+1}} \right) + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_n}{\partial x_{k+1}} \right) \right] \\ + \dots + \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_i}{\partial x_n} \right) \end{aligned} \tag{10}$$

последніе члены въ уравненіи (6) въ той и другой части остаются безъ перемѣны, ибо  $p_n$  по предположенію есть послѣдняя производная.

Въ этомъ уравненіи всѣ члены состоящіе изъ произведенія трехъ производныхъ сокращаются, ибо по перенесеніи всего, что состоитъ изъ трехъ производныхъ въ первую часть, получимъ

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \left( \frac{\partial p_{k+1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{k+1}} \right) + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial x_{k+1}}$$

последнюю сумму можно написать въ видѣ

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+1}}$$

а принимая во вниманіе условіе полнаго дифференціала, это можно на-

писать въ видѣ

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial p_{k+1}}{\partial x_i}$$

т. е.

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$$

что по упомянутому условію равно нулю.

Слѣдовательно всѣ члены состоящіе изъ трехъ производителей обращаются въ нуль, и изъ ур. (10) остается только слѣдующее

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \frac{\partial p_k}{\partial x_n} \\ & = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}} \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+2}} + \dots + \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \frac{\partial p_i}{\partial x_n} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial p_k}{\partial x_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \frac{\partial p_k}{\partial x_n} \\ (11) \quad & - \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}} \frac{\partial p_i}{\partial x_{k+2}} - \dots - \frac{\partial p_k}{\partial p_n} \frac{\partial p_i}{\partial x_n} \\ & = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \end{aligned}$$

всѣ входящія сюда производныя суть частныя, т. е. берутся по переменнымъ входящимъ явно.

Это уравненіе представляетъ условіе необходимое для того, чтобы дифференціалъ

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

былъ точнымъ.

Имѣя все это, не трудно показать какъ можно опредѣлить  $p_2$  въ функции другихъ производныхъ. Если въ уравненіи (11) примемъ  $i = 1$ ,  $k = 2$ , то будемъ имѣть

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \frac{\partial p_2}{\partial x_3} - \dots - \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \\ (12) \quad & + \frac{\partial p_1}{\partial x_3} \frac{\partial p_2}{\partial p_3} + \frac{\partial p_1}{\partial x_4} \frac{\partial p_2}{\partial p_4} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \end{aligned}$$

Это есть линейное уравненіе перваго порядка съ  $2n - 1$  переменными

эти переменныя суть  $x_1, x_2 \dots x_n, p_2, p_3 \dots p_n$ . Такое уравненіе мы умѣемъ интегрировать, и изъ него опредѣлимъ  $p_2$  въ функціи сейчасъ упомянутыхъ переменныхъ.

Полагая въ томъ же уравненіи (11) сначала  $i=1$  и  $k=3$ , а потомъ  $i=2$  и  $k=3$ , мы составимъ слѣдующія два уравненія

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial p_3}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_3}{\partial x_2} - \dots - \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \\ &+ \frac{\partial p_1}{\partial x_4} \frac{\partial p_3}{\partial p_4} + \frac{\partial p_1}{\partial x_5} \frac{\partial p_3}{\partial p_5} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial p_3}{\partial p_n} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial x_3} &= \frac{\partial p_3}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4} \frac{\partial p_3}{\partial x_4} - \dots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \\ &+ \frac{\partial p_2}{\partial x_4} \frac{\partial p_3}{\partial p_4} + \frac{\partial p_2}{\partial x_5} \frac{\partial p_3}{\partial p_5} + \dots + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \frac{\partial p_3}{\partial p_n} \end{aligned}$$

Изъ этихъ двухъ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій мы должны опредѣлить  $p_2$  такъ, чтобы эта функція была общимъ для двухъ этихъ уравненій интеграломъ.

При этомъ возможно нѣкоторое упрощеніе, состоящее въ слѣдующемъ.

Интегрируя уравненіе (11), мы получимъ  $p_2$  въ функціи

$$p_3, p_4 \dots p_n, x_1, x_2 \dots x_n.$$

Если данное уравненіе рѣшимъ относительно  $p_1$  то найдемъ

$$p_1 = \varphi(p_2 \dots p_n, x_1, x_2 \dots x_n)$$

если упомянутую сейчасъ величину  $p_2$  подставимъ сюда, то будемъ имѣть выраженіе  $p_1$  въ функціи

$$p_3, p_4 \dots p_n, x_1, x_2 \dots x_n.$$

Чтобы сдѣлать уравненія (13) сообразными съ этой подстановкой, помножимъ второе изъ уравненій (13) на  $\frac{\partial p_1}{\partial p_2}$  и сложимъ съ первымъ, тогда найдемъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial x_3} + \frac{\partial p_2}{\partial x_3} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} &= \frac{\partial p_3}{\partial x_1} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \\ &+ \frac{\partial p_1}{\partial x_4} \frac{\partial p_3}{\partial p_4} + \frac{\partial p_2}{\partial x_4} \frac{\partial p_3}{\partial p_4} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \\ &- \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4} \frac{\partial p_3}{\partial x_4} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \\ &+ \frac{\partial p_1}{\partial x_5} \frac{\partial p_3}{\partial p_5} + \frac{\partial p_2}{\partial x_5} \frac{\partial p_3}{\partial p_5} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \\ &\dots \dots \dots \\ &- \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial p_3}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \\ &+ \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial p_3}{\partial p_n} + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \frac{\partial p_3}{\partial p_n} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \end{aligned}$$

Замѣтимъ что по выраженію (4<sub>0</sub>)

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_3} = \frac{\partial p_1}{\partial x_3}$$

что показываетъ, что  $p_1$  зависитъ двояко отъ  $x_3$ , непосредственно и какъ функція отъ  $p_2$ , которая въ свою очередь есть функція  $x_3$ .

Далѣе замѣтимъ, что сумма слѣдующихъ двухъ отрицательныхъ членовъ представляется въ видѣ

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \right) = \\ & = - \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \left( \frac{\partial p_1}{\partial p_3} + \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \right) = - \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \end{aligned}$$

потомъ слѣдуетъ сумма положительныхъ членовъ

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_4} \frac{\partial p_3}{\partial p_4} + \frac{\partial p_2}{\partial x_4} \frac{\partial p_3}{\partial p_4} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} = \frac{\partial p_3}{\partial x_4} \left( \frac{\partial p_1}{\partial p_4} + \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial p_4} \right) = \frac{\partial p_3}{\partial p_4} \frac{\partial p_1}{\partial x_4}$$

наконецъ послѣднія двѣ группы отрицательныхъ и положительныхъ членовъ суть

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial p_3}{\partial x_n} + \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \right) = - \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \left( \frac{\partial p_1}{\partial p_n} + \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \right) = - \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \\ & \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial p_3}{\partial p_n} + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \frac{\partial p_3}{\partial p_n} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \right) = \frac{\partial p_3}{\partial p_n} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial p_3}{\partial p_n} \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \end{aligned}$$

такимъ образомъ все упомянутое преобразование приводитъ насъ къ уравненію

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_3} = \frac{\partial p_3}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} - \frac{\partial p_1}{\partial p_4} \frac{\partial p_3}{\partial x_4} - \dots - \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \\ + \frac{\partial p_1}{\partial x_4} \frac{\partial p_3}{\partial p_4} + \frac{\partial p_1}{\partial x_5} \frac{\partial p_3}{\partial p_5} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial p_3}{\partial p_n}$$

это уравненіе вмѣстѣ со вторымъ изъ уравненій (13) составляетъ систему, и если найдемъ рѣшеніе общее этимъ двумъ линейнымъ уравненіямъ перваго порядка, то получимъ соотношеніе, которое служитъ для опредѣленія  $p_3$  въ функціи остальныхъ  $p$  и независимыхъ переменныхъ, т. е. въ функціи  $p_4, p_5 \dots p_n, x_1, x_2 \dots x_n$ .

Вообще когда опредѣлимъ  $i$  функцій  $p_1, p_2 \dots p_i$  посредствомъ  $p_{i+1}, p_{i+2} \dots p_n, x_1, x_2 \dots x_n$ , то функція  $p_{i+1}$  будетъ общимъ рѣшеніемъ  $i$  линейныхъ уравненій перваго порядка слѣдующаго вида

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \dots - \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_n} \\ + \frac{\partial p_1}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \dots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_n} \\ + \frac{\partial p_2}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n} \quad (14_*)$$

.....

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \dots - \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_n} \\ + \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n}$$

Итакъ если дано линейное уравненіе перваго порядка

$$F(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = 0$$

то изъ него опредѣлимъ  $p_1$  въ функціи  $p_2, p_3 \dots p_n, x_1, x_2 \dots x_n$ . Послѣ этого  $p_2$  опредѣлится интегрированіемъ линейнаго уравненія перваго порядка съ  $2n-1$  переменными. Производная  $p_3$  будетъ общимъ рѣшеніемъ двухъ линейныхъ уравненій съ  $2n-3$  переменными, и вообще  $p_{i+1}$  будетъ общимъ рѣшеніемъ  $i$  линейныхъ уравненій съ  $2n-2i+1$  переменными.

Такимъ образомъ по этому приему интегрированіе нелинейнаго уравненія приводится къ интегрированію системы совокупныхъ линейныхъ уравненій.

18. Якоби замѣнилъ этотъ утомительный и сложный приемъ болѣе простымъ. Прежде чѣмъ изложимъ первый, первоначальный способъ Якоби, докажемъ нѣкоторыя общія теоремы.

Одна изъ этихъ теоремъ заключается въ слѣдующемъ.

Если два уравненія

$$F(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = C$$

$$F_1(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = C_1$$

имѣютъ общій интеграль, то функція  $F$  и  $F_1$  должны удовлетворять условію

$$(F, F_1) = 0$$

гдѣ скобки представляютъ символъ Пуассона составленный изъ этихъ функцій.

Для доказательства этого предположимъ, что два уравненія  $F = C$  и  $F_1 = C_1$  имѣютъ одинъ и тотъ же интеграль, который удовлетворяетъ имъ, не удовлетворяя никакому третьему уравненію, несодержащему новыхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Если уравненія  $F = C$  и  $F_1 = C_1$  имѣютъ одинъ и тотъ же интеграль, то функціи  $p_1, p_2 \dots p_n$  должны совместно удовлетворять этимъ уравненіямъ и кромѣ того должны быть таковы, чтобы составленное по нимъ выраженіе

$$p_1 \partial x_1 + p_2 \partial x_2 + \dots + p_n \partial x_n$$

было точнымъ дифференціаломъ.

Послѣднее условіе, какъ мы знаемъ, удовлетворится, когда

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu}$$

Разсматривая  $p_1, p_2 \dots p_n$  какъ функціи независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$  и взявъ отъ данныхъ дифференціальныхъ уравненій полныя производныя по  $x_i$ , получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0: \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0$$

помножая первое изъ этихъ уравненій на  $\frac{\partial F_1}{\partial p_i}$ , а второе — на  $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ , вычтемъ



одно произведение изъ другаго, тогда найдемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \left[ \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right] \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0$$

составимъ сумму подобныхъ выраженій по  $i$  отъ  $i=0$  до  $i=n$ , получимъ

$$\sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) + \sum_i \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0 \quad (15)$$

Легко видѣть, что двойная сумма обращается въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, если выполнимъ суммованіе по  $k$  и по  $i$ , то понятно, что если въ полной суммѣ есть членъ

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \frac{\partial F_1}{\partial p_\nu} - \frac{\partial F}{\partial p_\nu} \frac{\partial F_1}{\partial p_\mu} \right] \frac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu}$$

то также будетъ и членъ вида

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial p_\nu} \frac{\partial F_1}{\partial p_\mu} - \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \frac{\partial F_1}{\partial p_\nu} \right] \frac{\partial p_\nu}{\partial p_\mu}$$

каждая такая пара членовъ соединяется въ одинъ такой

$$\left( \frac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \frac{\partial F_1}{\partial p_\nu} - \frac{\partial F}{\partial p_\nu} \frac{\partial F_1}{\partial p_\mu} \right)$$

но такъ какъ по условію интегрируемости

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu}$$

то всѣ члены двойной суммы, будучи извѣстнымъ образомъ соединены въ пары, обратятся въ нули, и выраженіе (15) приметъ видъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \right) = 0$$

Что по означенію Пуассона представляется въ формѣ

$$(F, F_1) = 0$$

Понятно что эта теорема распространяется и на случай многихъ совмѣстныхъ уравненій. Если уравненія

$$F = C, \quad F_1 = C_1, \dots, F_{n-1} = C_{n-1}$$

имѣютъ одинъ и тотъ же общій интеграль, который кромѣ нихъ не удовлетворяетъ никакому другому дифференціальному уравненію, не содержащему тѣхъ же постоянныхъ, то символъ Пуассона составленный по двумъ какимъ либо изъ функций  $F, F_1, F_2 \dots F_{n-1}$  обращается въ нуль.

Это заключеніе конечно справедливо и для линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, но тамъ оно можетъ быть представлено въ иной формѣ, въ зависимости отъ символа  $X_i(f)$ . Мы уже дали доказательство этого на стр. 1231 и представили форму условия въ видѣ уравненія (42), но считаемъ не лишнимъ дать выводъ этого послѣдняго уравненія, на основаніи тождества Якоби [ур. (25) стр. 1224].

19. Предположимъ, что имѣемъ совмѣстныя линейныя уравненія

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2 \dots F_m = a_m$$

Будемъ комбинировать двѣ какія нибудь функции  $F_i$  и  $F_k$  съ третьей  $\Phi$ . Для этихъ трехъ функций по упомянутому тождеству Якоби составляемъ

$$[(F_i, F_k), \Phi] + [(F_k, \Phi), F_i] + [(\Phi, F_i), F_k] = 0$$

Но если разсматриваемыя уравненія имѣютъ общій интеграль, то по доказанной теоремѣ

$$(F_i, F_k) = 0$$

Слѣдовательно первый членъ тождества обращается въ нуль и остальное имѣетъ видъ

$$[(F_k, \Phi) F_i] + [(\Phi, F_i) F_k] = 0$$

или

$$- [F_i (F_k, \Phi)] - [F_k \cdot (\Phi, F_i)] = 0$$

или

$$- [F_i, (F_k, \Phi)] + [F_k, (F_i, \Phi)] = 0$$

т. е.

$$(15) \quad [F_i, (F_k, \Phi)] - [F_k, (F_i, \Phi)] = 0$$

но на стр. 1222 [формула (18)] мы видѣли, что

$$X_i(\Phi) = (F_i, \Phi)$$

$$X_k(\Phi) = (F_k, \Phi)$$

поэтому тождество (15) принимаетъ видъ

$$(16) \quad [F_i, X_k(\Phi)] - [F_k, X_i(\Phi)] = 0$$

но если въ первое изъ двухъ предыдущихъ уравненій поставимъ вмѣсто  $\Phi$  функцію  $X_k(\Phi)$ , то найдемъ

$$X_i [X_k(\Phi)] = [F_i, X_k(\Phi)] \tag{18}$$

точно также подстановка  $X_i(\Phi)$  вмѣсто  $\Phi$  во второе изъ тѣхъ же уравненій даетъ

$$X_k [X_i(\Phi)] = [F_k, X_i(\Phi)]$$

а слѣдовательно тождество (16) принимаетъ видъ

$$X_i [X_k(\Phi)] - X_k [X_i(\Phi)] = 0 \tag{19}$$

Итакъ если линейнымъ уравненіямъ

$$X_1(\Phi) = 0, \quad X_2(\Phi) = 0 \dots X_m(\Phi) = 0$$

удовлетворяетъ одинъ и тотъ же интеграль, то совмѣстно съ ними существуетъ уравненіе (19).

Кромѣ этого рассмотримъ еще одно свойство символа Пуассона, которымъ мы будемъ пользоваться для интегрированія совмѣстныхъ уравненій съ частными производными.

Предположимъ, что въ функціяхъ  $F$  и  $G$ , изъ которыхъ составляется символъ Пуассона ( $F, G$ ) переменныя входятъ явно и чрезъ другія функціи. Положимъ, что переменныя суть

$$x_1, x_2 \dots x_n, \quad p_1, p_2 \dots p_n$$

и допустимъ, что въ функціи  $F$  и  $G$  входятъ еще функціи  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_k$ , которыя сами завясятъ отъ  $x_i$  и  $p_i$ . Такимъ образомъ

$$F = f(x_i, p_i, \varphi_k); \quad G = \psi(x_i, p_i, \varphi_k)$$

тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

или для краткости представимъ это въ видѣ

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{\mu}} \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_i}$$

гдѣ  $\left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)$  есть производная взятая относительно  $x_i$  входящаго явно. За-

мытимъ, что при этомъ дифференцированіи функций  $\varphi_\mu$  принимаются за постоянныя.

Подобно предыдущему

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) + \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_i}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right) + \sum_{\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) + \sum_{\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_i}$$

но

$$(F, G) = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right)$$

Внося сюда предыдущія формы производныхъ, составлѣмъ

$$\begin{aligned} (F, G) &= \sum_i \left[ \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) + \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \right] \left[ \left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) + \sum_{\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_i} \right] \\ &\quad - \sum_i \left[ \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) + \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_i} \right] \left[ \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right) + \sum_{\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (F, G) &= \sum_i \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right) \right\} \\ &\quad + \sum \left\{ \left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \sum_{\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_i} + \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_i} \right\} \\ &\quad - \sum_i \left\{ \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right) \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \sum_{\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} + \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \right\} \end{aligned}$$

гдѣ производныя заключенныя въ скобки берутся относительно переменныхъ входящихъ независимо отъ функций  $\varphi_\mu$  и  $\varphi_\nu$ .

Это можемъ представить въ видѣ

$$\begin{aligned}
 [F, G] = (F, G) &+ \sum_i \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{\mu}} \left[ \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \left( \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial p_i} \right] \\
 &+ \sum_i \sum_{\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_{\nu}} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial p_i} - \left( \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial x_i} \right] \\
 &+ \sum_i \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{\mu}} \frac{\partial G}{\partial \varphi_{\nu}} \left( \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned}$$

Если круглыми скобками будемъ означать символы, которые составлены изъ производныхъ взятыхъ относительно переменныхъ  $x_i$  и  $p_i$  входящихъ явно, то предыдущее можемъ написать въ видѣ

$$\begin{aligned}
 [F, G] = (F, G) &+ \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{\mu}} (\varphi_{\mu}, G) + \sum_{\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_{\nu}} (F, \varphi_{\nu}) \\
 &+ \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{\mu}} \frac{\partial G}{\partial \varphi_{\nu}} (\varphi_{\mu}, \varphi_{\nu}).
 \end{aligned} \tag{A}$$

Если одна изъ функций  $F$  и  $G$ , напр.  $G$  не содержитъ функций  $\varphi_k$ , то  $\frac{\partial G}{\partial z} = 0$ . Слѣдовательно изъ предыдущаго общаго выраженія остается

$$[F, G] = (F, G) + \sum_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{\mu}} (\varphi_{\mu}, G) \tag{20}$$

Если предположимъ, что въ выраженіи (A)  $\mu$  измѣняется отъ 1 до  $r$  и  $\nu$  отъ 1 до  $s$ , то послѣдній членъ этого выраженія можемъ раскрыть въ слѣдующую форму

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{\mu}} \frac{\partial G}{\partial \varphi_{\nu}} (\varphi_{\mu}, \varphi_{\nu}) = \\
 &= \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} (\varphi_1, \varphi_1) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} (\varphi_1, \varphi_2) + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial G}{\partial \varphi_s} (\varphi_1, \varphi_s) \\
 &+ \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} (\varphi_2, \varphi_1) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} (\varphi_2, \varphi_2) + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial G}{\partial \varphi_s} (\varphi_2, \varphi_s) \\
 &\dots \dots \dots \\
 &+ \frac{\partial F}{\partial \varphi_r} \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} (\varphi_r, \varphi_1) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_r} \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} (\varphi_r, \varphi_2) + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_r} \frac{\partial G}{\partial \varphi_s} (\varphi_r, \varphi_s)
 \end{aligned}$$

при  $r = s$  всѣ члены этой суммы, начиная съ перваго, расположенные по діагонали, до послѣдняго включительно обращаются въ нули, ибо множители  $(\varphi_1, \varphi_1), (\varphi_2, \varphi_2) \dots (\varphi_r, \varphi_r)$  обращаются въ нули. Такимъ образомъ вся сумма діагоналю нулей раздѣлится на два треугольника. Всю совокупность членовъ составляющую нижній треугольникъ можно представить суммами по вертикальнымъ столбцамъ въ видѣ

$$\sum_{k=2}^{k=r} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} (\varphi_k, \varphi_1) + \sum_{k=3}^{k=r} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} (\varphi_k, \varphi_2) + \dots + \sum_{k=r}^{k=r-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \varphi_{k-1}} (\varphi_k, \varphi_{r-1})$$

послѣдней суммой очевидно представлень одинъ только членъ.

Эту сумму можно написать въ видѣ

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \varphi_i} (\varphi_k, \varphi_i)$$

но здѣсь суммирование по  $i$  распространяется на значенія  $i$  отъ  $i = 1$  до  $i = r - 1$ , а по  $k$  на значенія отъ 2 до  $r$ .

Подобнымъ же образомъ совокупность членовъ въ верхнемъ треугольникѣ можно представить суммами

$$\sum_{i=1}^{i=1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} (\varphi_i, \varphi_2) + \sum_{i=1}^{i=2} \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_3} (\varphi_i, \varphi_3) + \dots + \sum_{i=1}^{i=r-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_r} (\varphi_i, \varphi_r)$$

что можно написать въ формѣ

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_k} (\varphi_i, \varphi_k)$$

гдѣ суммирование по  $i$  и по  $k$  производится подобно предыдущему.

Итакъ при  $r = s$

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_k} (\varphi_i, \varphi_k) = \sum_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_k} (\varphi_i, \varphi_k) + \sum_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \varphi_i} (\varphi_k, \varphi_i)$$

или

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_k} (\varphi_i, \varphi_k) = \sum_i \sum_k \left[ \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \varphi_i} \right] (\varphi_i, \varphi_k)$$

а следовательно выражение (A) принимает вид

$$[F, G] = (F, G) + \sum_i \left\{ (F, \varphi_i) \frac{\partial G}{\partial \varphi_i} - (G, \varphi_i) \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \right\} + \sum_i \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial G}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \frac{\partial G}{\partial \varphi_i} \right) (\varphi_i, \varphi_k) \quad (B)$$

19. Предположим, что дано уравнение первого порядка в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = a$$

где  $a$  есть постоянная, она может быть и нулем.

Прежде всего Якоби составлять уравнение

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = a_1$$

где  $a_1$  есть постоянная и  $F_1$  неизвестная функция, удовлетворяющая линейному уравнению

$$(F, F_1) = 0 \quad (21)$$

ибо если уравнение  $F_1 = 0$  имеет общий интеграл с данным, то как мы видели, непременно удовлетворяется это условие (21).

Таким образом для определения функции  $F_1$  имеем линейное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial F_1}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0 \quad (21*)$$

интегрирование этого уравнения приводится к интегрированию обыкновенных совокупных уравнений вида

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial F}}{\frac{\partial p_1}{\partial F}} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial F}}{\frac{\partial p_2}{\partial F}} = \dots = \frac{\frac{\partial x_n}{\partial F}}{\frac{\partial p_n}{\partial F}} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial F}}{\frac{\partial x_1}{\partial F}} = \dots = \frac{\frac{\partial p_n}{\partial F}}{\frac{\partial x_n}{\partial F}} \quad (22)$$

Если

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = \text{пост.}$$

есть интеграл этой системы, то за функцию  $F_1$  можно принять эту функцию  $f_1$  и положить

$$F_1 = f_1 = a_1$$

После этого будем искать функцию  $F_2$ , именно

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

которая удовлетворяла бы уравненіямъ

$$(23) \quad (F, F_1) = 0, \quad (F, F_2) = 0, \quad (F_1, F_2) = 0$$

Если замѣтимъ, что первое изъ этихъ уравненій, или что все равно, уравненіе (21\*), т. е.

$$(24) \quad (F, F_1) = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \right) = 0$$

также можетъ служить для опредѣленія  $F_2$ , какъ и для опредѣленія  $F_1$ , то намъ достаточно найти еще интеграль совмѣстныхъ уравненій (22) отличный отъ интеграла

$$f_1 = a_1$$

и этотъ интеграль приравненный постоянной можетъ служить для опредѣленія одной изъ искомыхъ производныхъ.

Пусть этотъ интеграль, отличный отъ предыдущаго  $f_1$ , будетъ

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = \text{пост.}$$

Если подставимъ этотъ интеграль вмѣсто  $F_2$  въ третье изъ уравненій (23), то можемъ встрѣтить такіе случаи.

1) Уравненіе

$$(f_1, \varphi) = 0$$

возникающее отъ такой подстановки, удовлетворяется, тогда  $\varphi$  будетъ искомымъ интеграломъ общимъ разсматриваемымъ уравненіямъ, и мы можемъ принять

$$F_2 = \varphi = a_2$$

2) Результать подстановки отличенъ отъ нуля, и пусть имѣеть значеніе  $\varphi_1$ , такъ что

$$(F_1, \varphi) = \varphi_1$$

подобно этому составимъ рядъ символовъ

$$(25) \quad (F_1, \varphi_1) = \varphi_2, \quad (F_1, \varphi_2) = \varphi_3, \dots, (F_1, \varphi_{i-1}) = \varphi_i \text{ и т. д.}$$

Докажемъ прежде всего, что функціи  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и т. д. удовлетворяютъ уравненію  $(F, F_2) = 0$ , если будутъ подставлены на мѣсто  $F_2$ , т. е. докажемъ, что удовлетворяются уравненія

$$(26) \quad (F, \varphi_1) = 0, \quad (F, \varphi_2) = 0, \quad (F, \varphi_3) = 0 \text{ и т. д.}$$



Для доказательства этого предположенія обратимся къ тождеству Якоби

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0$$

которое имѣетъ мѣсто для всякихъ функций  $A, B, C$ . Поэтому мы можемъ принять

$$A = F, \quad B = F_1$$

тогда это тождество обратится въ

$$[F, (F_1, C)] + [F_1, (C, F)] + [C, (F, F_1)] = 0$$

но мы уже видѣли, что  $(F, F_1) = 0$ , поэтому остается только

$$[F, (F_1, C)] + [F_1, (C, F)] = 0 \tag{27}$$

положимъ здѣсь

$$C = \varphi$$

тогда изъ этого остального получимъ

$$[F, (F_1, \varphi)] + [F_1, (\varphi, F)] = 0$$

а такъ какъ  $(\varphi, F) = 0$  (ибо  $\varphi$  есть интеграль урвненія  $(F, F_1) = 0$  отличный отъ  $f_1$ ), то

$$[F, (F_1, \varphi)] = 0$$

но по нашему предположенію

$$(F_1, \varphi) = \varphi_1$$

Слѣдовательно предыдущее принимаетъ видъ

$$(F, \varphi_1) = 0$$

это есть первое изъ уравненій (25).

Положимъ теперь въ уравненіи (27)  $C = \varphi_1$ , тогда это уравненіе приметъ видъ

$$[F, (F_1, \varphi_1)] + [F_1, (\varphi_1, F)] = 0$$

но  $(F, \varphi_1) = 0$  и остается

$$[F, (F_1, \varphi_1)] = 0$$

что по нашему означенію обращается въ

$$(F, \varphi_2) = 0$$

Полагая  $C = \varphi_2$ , найдемъ  $(F, \varphi_2) = 0$  и т. д., что мы имѣли въ виду доказать.

Касательно функций  $\varphi_i$  мы можем сделать два следующие предположения.

1) Если  $\varphi_i = 0$ , тогда очевидно  $\varphi_{i-1} = a_2$  будет искомой функцией, это будет интегралъ общій уравненій (23), ибо если  $\varphi_i = 0$ , то послѣднее изъ уравненій (25) есть

$$(F_1, \varphi_{i-1}) = 0$$

что и показываетъ, что  $\varphi_{i-1}$  есть интегралъ этого уравненія.

2) Если функция  $\varphi_i$  отлична отъ нуля и не есть постоянная величина, то составляя посредствомъ нея символы подобные (25), мы придемъ къ такой функции  $\varphi_k$ , которая будетъ выражаться посредствомъ интеграловъ уже прежде найденныхъ, такъ  $\varphi_{k+1}$  будетъ зависеть отъ функций  $F, f_1, \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{k-1}$ .

Предположимъ, что функция, выражающаяся посредствомъ предыдущихъ, есть именно функция  $\varphi_i$ . Такъ что

$$(28) \quad \varphi_i = \psi (F, f_1, \varphi, \varphi_1 \dots \varphi_{i-1})$$

Составимъ функцию  $\varphi_{i+1}$ . Мы имѣемъ

$$\varphi_{i+1} = (\varphi_i, f_1) = (\psi, f_1)$$

т. е.

$$\varphi_{i+1} = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial p_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \right)$$

или по соотношенію (28) это будетъ

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1} &= \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{i-1}} \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x_1} \right] \\ &- \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{i-1}} \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial p_1} \right] \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

или

$$\varphi_{i+1} = \frac{\partial \psi}{\partial F} (F, f_1) + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} (f_1, f_1) + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} (\varphi, f_1) + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{i-1}} (\varphi_{i-1}, f_1)$$

но такъ какъ  $(F, f_1) = 0$  и  $(f_1, f_1) = 0$  то

$$\varphi_{i+1} = \varphi_1 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} + \dots + \psi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{i-1}}$$

отсюда и заключаемъ, что  $\varphi_{i+1}$  есть только функція отъ

$$F, f_1, \varphi, \varphi_1 \dots \varphi_{i-1}$$

Имѣя все это, рѣшимъ теперь такую задачу. Составимъ такую функцію интеграловъ

$$F, f_1, \varphi, \varphi_1 \dots \varphi_{i-1}$$

которая, будучи подставлена на мѣсто  $F_2$ , удовлетворяла бы двумъ послѣднимъ изъ уравненій (23), т. е. уравненіямъ

$$(F, F_2) = 0 \quad \text{и} \quad (F_1, F_2) = 0$$

Пусть эта неизвѣстная намъ функція будетъ

$$F_2 = f_2(F, f_1, \varphi, \varphi_1 \dots \varphi_{i-1}) \tag{29}$$

Составляя символы  $(F, F_2)$  и  $(F_1, F_2)$ , мы примѣнили къ этому случаю общую формулу (16) стр. 1222 и такъ какъ  $F_2$  зависятъ отъ переменныхъ  $F, f_1, \varphi, \varphi_1 \dots \varphi_{i-1}$ , при чемъ связь представляется функціей  $f_2$ , то въ примѣненіи къ нашему случаю имѣемъ

$$(F, f_2) = (F, F) \frac{\partial f_2}{\partial F} + (F, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial f_1} + (F, \varphi) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \dots + (F, \varphi_{i-1}) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}} = 0$$

$$(f_1, f_2) = (f_1, F) \frac{\partial f_2}{\partial F} + (f_2, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial f_1} + (f_1, \varphi) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \dots + (f_1, \varphi_{i-1}) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}} = 0$$

здѣсь подъ  $f_1$  разумѣемъ функцію

$$f_1(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = 0$$

отличную отъ даннаго уравненія, но съ нимъ совмѣстную для опредѣленія производныхъ  $p_1, p_2 \dots p_n$ . Подъ  $f_2$  разумѣемъ функцію (29).

Но такъ какъ

$$(F, F) = 0, \quad (F, f_1) = 0, \quad (F, \varphi) = 0 \dots (F, \varphi_{i-1}) = 0$$

$$(f_1, F) = 0, \quad (f_1, f_1) = 0, \quad (f_1, \varphi) = \varphi_1 = 0, \quad (f_1, \varphi_{i-1}) = \varphi_i = \psi$$

то первое изъ предыдущихъ уравненій удовлетворяется тождественно, а второе обращается въ линейное уравненіе перваго порядка слѣдующаго вида

$$\varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \dots + \varphi_{i-1} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-2}} + \psi \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}} = 0 \tag{30}$$

въ которомъ независимыя переменныя суть  $\varphi, \varphi_1 \dots \varphi_{i-1}$  и количества  $F$

и  $f_1$  рассматриваются как постоянные, ибо уравнение (30) не содержит производных взятых относительно  $F$  и  $f_1$ .

Таким образом достаточно найти частный интеграл системы обыкновенных совместных уравнений

$$(31) \quad \frac{\partial \varphi}{\varphi_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\varphi_2} = \dots = \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\psi}$$

для того, чтобы имѣть искомую функцию  $F_2$ .

*Примѣчаніе.*

1) Если, составляя рядъ функций  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{i-1}, \varphi_i$ , мы наконецъ получимъ такую, которая обращается въ нуль, такъ напр. если  $\varphi_i = 0$ , то  $\varphi_{i-1}$  есть искомая, и тогда  $f_2$  находится прямо безъ интегрированія уравненія (30). Въ самомъ дѣлѣ мы знаемъ, что  $\varphi_i = (\varphi_{i-1}, F_1)$ , но если  $\varphi_i = 0$ , то  $(\varphi_{i-1}, F_1) = 0$ , а это показываетъ, что функция  $\varphi_{i-1}$  есть искомая, ибо она удовлетворяетъ уравненіямъ  $(f_2, F) = 0$  и  $(f_2, F_1) = 0$ , если будетъ поставлена на мѣсто  $f_2$ . Первому изъ этихъ уравненій она удовлетворяетъ потому, что всѣ функции ряда  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  удовлетворяютъ этому уравненію  $(f_2, F) = 0$ , будучи поставлены на мѣсто  $f_2$ ; а уравненію  $(f_2, F_1) = 0$ , функция  $\varphi_{i-1}$  удовлетворяетъ, какъ мы сейчасъ сказали, потому что  $\varphi_i = 0$ .

2) Если одна изъ функций  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_i$ , напр.  $\varphi_i$  окажется равною постоянной величинѣ  $C$ , тогда изысканіе функции  $f_2$  также упрощается. Мы видѣли, что по уравненіямъ (31)

$$\frac{\partial \varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\varphi_i}$$

но если  $\varphi_i = C$ , то это уравненіе обращается въ

$$C \partial \varphi_{i-2} = \varphi_{i-1} \partial \varphi_{i-1}$$

интегралъ этого есть

$$2C \varphi_{i-2} - (\varphi_{i-1})^2 = \text{пост.}$$

и такъ какъ эта разность является постоянной, то на основаніи предыдущаго примѣчанія вся эта разность можетъ считаться искомою функциею, такъ что можно положить

$$f_2 = 2C \varphi_{i-2} - (\varphi_{i-1})^2 = a_2$$

3) Изложеннымъ способомъ данное уравненіе не интегрируется, когда функция  $\varphi_1$  обращается въ постоянную величину, или выражается чрезъ предыдущія функции.

Если  $\varphi_1 = K$ , гдѣ  $K$  есть постоянная величина, или функція отъ  $\varphi$ , то изъ уравненій (30) остается

$$\varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0$$

или

$$K \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0.$$

Это показываетъ что  $f_2$  не содержитъ  $\varphi$  и по формулѣ (29) имѣемъ

$$F_2 = f_2(F_1, f_1)$$

Опредѣляемая такимъ образомъ функція не годится для нашей цѣли,— она не можетъ вмѣстѣ съ функціями  $F$  и  $f_1$  служить для опредѣленія производныхъ, ибо ихъ не содержитъ, и уравненіе  $F_2 = a_2$  составленное по такой функціи не есть самостоятельное, отличное отъ уравненій  $F = a$  и  $F_1 = a_1$ .

Если такой случай встрѣтится на практикѣ, то слѣдуетъ снова обратиться къ совокупнымъ уравненіямъ (22) и искать изъ нихъ еще интеграль независимый отъ интеграловъ  $F = a$ ;  $F_1 = a_1$  и  $\varphi = a'$ . Съ этимъ новымъ интеграломъ надо повторить всѣ описанныя дѣйствія.

4. Если случится, что найденный интеграль  $\theta = a''$ , опять выражается чрезъ предыдущіе, или есть постоянная величина, тогда не только  $\varphi_1 = K_1$ , но и  $\theta_1 = L$ , гдѣ  $K$  и  $L$  суть постоянныя или выражаются чрезъ предыдущія функція.

Если  $\varphi_1 = (F_1, \varphi)$ , то точно также  $\theta_1 = (F_1, \theta)$ , при условіи что

$$(F_1, \varphi) = K; \quad (F_1, \theta) = L$$

Въ этомъ случаѣ  $F_2$  легко находится.

Въ самомъ дѣлѣ, можно показать, что тогда

$$F_2 = f_2(\varphi_1, \theta)$$

Допуская, что это уравненіе имѣетъ мѣсто, по формулѣ (16) стр. 1222 составляемъ

$$(f_2, F) = (\varphi, F) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, F) \frac{\partial f_2}{\partial \theta}$$

$$(f_2, F_1) = (\varphi, F_1) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, F_1) \frac{\partial f_2}{\partial \theta}$$

но  $(\varphi, F) = 0$  и  $(\theta, F) = 0$ , ибо и  $\varphi$  и  $\theta$  суть интегралы уравненій (22)

и слѣдовательно при принятой формѣ  $(f_2, F) = 0$ .—Мы ищемъ  $f_2$  подъ условіемъ, чтобы удовлетворялось уравненіе  $(f_2, F_1) = 0$ , а это по послѣднему изъ предыдущихъ уравненій теперь принимаетъ видъ

$$(\varphi, F_1) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, F_1) \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0$$

или

$$K \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + L \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0$$

Слѣдовательно  $f_2$  опредѣлится какъ интеграль уравненія

$$\frac{\partial \varphi}{K} = \frac{\partial \theta}{L}$$

гдѣ  $K$  и  $L$  суть постоянныя величины или функція:  $K$  отъ  $\varphi$  и  $L$  отъ  $\theta$ ; слѣдовательно, интегрируя это, находимъ

$$\int \frac{\partial \varphi}{K} - \int \frac{\partial \theta}{L} = a_2$$

и

$$f_2 = a_2 \quad \text{или} \quad f_2 = \int \frac{\partial \varphi}{K} - \int \frac{\partial \theta}{L}$$

Не останавливаясь болѣе на разборѣ этихъ частныхъ случаевъ, будемъ продолжать интегрированіе даннаго уравненія, найдемъ по тремъ теперь извѣстнымъ функціямъ  $F, F_1, F_2$  четвертую, которая, будучи приравнена постоянной, представила бы собою еще уравненіе для опредѣленія производныхъ  $p_1, p_2 \dots p_n$ . Мы знаемъ, что эта функція должна совмѣстно удовлетворять тремъ уравненіямъ

$$(F_3, F) = 0; \quad (F_3, f_1) = 0; \quad (F_3, f_2) = 0$$

По изложенному уже способу будемъ искать функцію, которая удовлетворяла-бы двумъ какимъ либо изъ этихъ уравненій, напр. двумъ первымъ. Для этого достаточно найти еще одинъ интеграль уравненій (31) т. е. уравненій

$$\frac{\partial \varphi}{\varphi_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} = \dots = \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\varphi_i}$$

Представимъ этотъ новый интеграль въ видѣ

$$F_3 = \Phi(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n)$$

Итакъ положимъ, что функція  $\Phi$  удовлетворяющая уравненіямъ  $(\Phi, F) = 0$ ,  $(\Phi, F_1) = 0$  найдена. Если символъ  $(\Phi, F_2) = 0$  тождественно обращается въ нуль, то  $\Phi = F_3$ , будетъ искомая четвертая функція. Если же этотъ символъ не обращается въ нуль, то вообще онъ представляетъ нѣкоторую функцію  $\Phi_1 = (\Phi, F_2)$ . Посредствомъ этой функціи  $\Phi_1$  составляемъ рядъ

$$\Phi_2 = (F_2, \Phi_1); \quad \Phi_3 = (F_2, \Phi_2) \dots \Phi_k = (F_2, \Phi_{k-1})$$

Въ этомъ ряду найдется такая функція  $\Phi_k$ , которая будетъ представляться чрезъ предыдущія, ибо, какъ выше было показано, легко убѣдиться, что функціи  $\Phi_1, \Phi_2 \dots$  суть интегралы уравненій

$$(F_3, F) = 0 \quad (F_3, f_1) = 0$$

вѣсь они удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ, если будутъ поставлены на мѣсто  $F_3$ .

Въ этомъ легко убѣдиться слѣдующими соображеніями. Въ тождествѣ Якоби

$$[A(B, C)] + [B(C, A)] + [C(A, B)] = 0$$

примемъ  $A = F$  и  $B = f_2$ , а потомъ  $A = f_1$  и  $B = f_2$ , тогда составимъ

$$[F(f_2, C)] + [f_2(C, F)] + [C(F, f_2)] = 0$$

$$[f_1(f_2, C)] + [f_2(C, f_1)] + [C(f_1, f_2)] = 0$$

но  $(f_1, f_2) = 0$  и  $(F, f_2) = 0$ , слѣдовательно изъ этого остается

$$[F(f_2, C)] + [f_2(C, F)] = 0$$

$$[f_1(f_2, C)] + [f_2(C, f_1)] = 0$$

(32)

принимая здѣсь  $C = \Phi$ , находимъ

$$[F(f_2, \Phi)] + [f_2(\Phi, F)] = 0$$

$$[f_1(f_2, \Phi)] + [f_2(\Phi, f_1)] = 0$$

но  $(\Phi, F) = 0$  и  $(\Phi, f_1) = 0$ , поэтому остается

$$[F(f_2, \Phi)] = 0, \quad [f_1(f_2, \Phi)] = 0$$

но  $(f_2, \Phi) = \Phi_1$ , поэтому

$$(F, \Phi_1) = 0; \quad (f_1, \Phi_1) = 0$$

Принимая въ уравненіяхъ (32)  $C = \Phi_1$ , имѣемъ

$$[F, (f_2, \Phi_1)] + [f_1, (\Phi_1, F)] = 0$$

$$[f_1, (f_2, \Phi_1)] + [f_2, (\Phi_1, f_1)] = 0$$

но

$$(\Phi_1, F) = 0, \quad (\Phi_1, f_1) = 0$$

поэтому остается

$$[F, (f_2, \Phi_1)] = 0; \quad [f_1, (f_2, \Phi_1)] = 0$$

но  $(f_2, \Phi_1) = \Phi_2$ ; слѣдовательно

$$(F, \Phi_2) = 0, \quad (f_1, \Phi_2) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Такимъ образомъ видимъ, что всѣ функціи  $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots$  удовлетворяютъ уравненіямъ

$$(F_1, Y) = 0, \quad (f_1, Y) = 0$$

если будутъ подставляемы на мѣсто  $Y$ . Остается изъ ряда функція выбрать такую, которая удовлетворяла бы вмѣстѣ съ этимъ и уравненію  $(f_2, Y) = 0$ . если будетъ поставлена на мѣсто  $Y$ .

Когда такая функція будетъ опредѣлена, она будетъ искомою функціею  $F_3$ .

Предположимъ, что въ ряду функцій  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  найдена такая функція  $\Phi_k$ , которая выражается чрезъ предыдущія, такъ что

$$\Phi_k = \theta (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k-1})$$

Составимъ изъ этой функціи и функціи  $f_2$  символъ Пуассона. Этотъ символъ по выраженію (16) стр. 1222 имѣетъ видъ

$$(f_2, \Phi_k) = (f_2, \Phi) \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi} + (f_2, \Phi_1) \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi_1} + \dots + (f_2, \Phi_{k-1}) \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi_{k-1}}$$

или

$$(f_2, \Phi_k) = \Phi_1 \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi} + \Phi_2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi_1} + \dots + \Phi_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi_{k-1}}$$

Слѣдовательно  $\Phi_k$  какъ функція удовлетворяющая уравненію  $(f_2, \Phi_k) = 0$



опредѣляется изъ линейнаго уравненія

$$\Phi_1 \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi} + \Phi_2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi_1} + \dots + \Phi_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Phi_{k-1}} = 0$$

Если  $\Phi_k$  удовлетворяетъ уравненію  $(f_2, \Phi_k) = 0$ , то она можетъ быть принята за четвертую искомую функцію. Такимъ образомъ искомая функція опредѣлится чрезъ интегрированіе линейнаго уравненія съ частными производными

$$\Phi_1 \frac{\partial f_3}{\partial \Phi} + \Phi_2 \frac{\partial f_3}{\partial \Phi_1} + \dots + \theta(\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_{k-1}) \frac{\partial f_3}{\partial \Phi_{k-1}} = 0$$

которое содержитъ только переменныя  $\Phi, \Phi_1 \dots \Phi_{k-1}$ .

Эта искомая функція  $f_3$  опредѣлится какъ одинъ изъ интеграловъ совмѣстныхъ уравненій

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Phi_2} = \dots = \frac{\partial \Phi_{k-1}}{\theta}$$

Полагая  $f_3 = F_3 = a_3$ , мы будемъ имѣть уравненіе, которое совмѣстно съ даннымъ  $F = a$  и уже найденными  $F_1 = a_1, F_2 = a_2$  будетъ служить для вычисленія частныхъ производныхъ  $p_1, p_2 \dots p_n$ .

Когда все  $p_i$  будутъ вычислены, тогда функція  $z$  найдется интегрированіемъ точнаго дифференціала

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

Пояснимъ изложенную теорію на частномъ примѣрѣ. Будемъ интегрировать уравненіе

$$F = (x_2 p_1 + c_1 p_2) x_3 + a p_3 (p_1 - p_2) = a$$

это уравненіе содержитъ три независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2, x_3$  и три частныхъ производныхъ  $p_1, p_2, p_3$ . Для интегрированія этого уравненія необходимо кромѣ даннаго составить еще два уравненія  $F_1 = a_1$  и  $F_2 = a_2$ , которыя вмѣстѣ съ даннымъ будутъ достаточны для опредѣленія трехъ частныхъ производныхъ.

По изложенной теоріи найдемъ прежде функцію  $F_1$  удовлетворяющую уравненію  $(F, F_1) = 0$ , въ нашемъ случаѣ это уравненіе есть

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial F_1}{\partial p_3} - \frac{\partial F}{\partial p_3} \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0$$

и  $F_1$  должна быть опредѣлена, чрезъ интегрированіе этого уравненія ли-

нейнаго относительно производныхъ функции  $F_1$ . Обыкновенныя совмѣстныя уравненія, соответствующія этому уравненію съ частными производными суть

$$\frac{\partial p_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)} = \frac{\partial p_2}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)} = \frac{\partial p_3}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)} = -\frac{\partial x_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)} = -\frac{\partial x_2}{\left(\frac{\partial F}{\partial p_2}\right)} = -\frac{\partial x_3}{\left(\frac{\partial F}{\partial p_3}\right)}$$

Для даннаго уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = p_2 x_3; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = p_1 x_3; \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = (x_2 p_1 + x_1 p_2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = x_2 x_3 + a p_3; \quad \frac{\partial F}{\partial p_2} = x_1 x_3 - a p_3; \quad \frac{\partial F}{\partial p_3} = a (p_1 - p_2)$$

поэтому въ нашемъ случаѣ предыдущія совмѣстныя уравненія принимаютъ видъ

$$(A) \quad \frac{\partial p_1}{x_3 p_2} = \frac{\partial p_2}{p_1 x_3} = \frac{\partial p_3}{x_2 p_1 + x_1 p_2} = \frac{-\partial x_1}{x_2 x_3 + a p_3} = \frac{-\partial x_2}{x_1 x_3 - a p_3} = \frac{-\partial x_3}{a (p_1 - p_2)}$$

Изъ двухъ первыхъ отношеній по извѣстному свойству пропорцій составимъ

$$\frac{\partial p_1 + \partial p_2}{x_3 p_2 + x_3 p_1} = \frac{\partial p_2}{p_1 x_3}$$

аже четвертое и пятое отношенія дають

$$\frac{-(\partial x_1 + \partial x_2)}{x_2 x_3 + x_1 x_3} = \frac{-\partial x_1}{x_1 x_3 - a p_3}$$

но такъ какъ по первоначальнымъ пропорціямъ

$$\frac{\partial p_2}{p_1 x_3} = \frac{-\partial x_1}{x_1 x_3 - a p_3}$$

то очевидно

$$\frac{\partial (p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} = \frac{-\partial (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}$$

интегралъ этого есть

$$\lg (p_1 + p_2) + \lg (x_1 + x_2) = \lg C$$

или

$$(p_1 + p_2) (x_1 + x_2) = \text{пост.}$$

Слѣдовательно можно принять

$$F_1 = (x_1 + x_2)(p_1 + p_2)$$

Теперь слѣдуетъ опредѣлить  $F_2$ , т. е. функцію совместно удовле-  
творяющую уравненіямъ  $(F, F_2) = 0$  и  $(F_1, F_2) = 0$ . Для этого, слѣдуя  
общей теоріи, найдемъ интеграль уравненій (A) отличный отъ найденнаго  
интеграла  $F_1 = a_1$ .

Первое и второе отношенія пропорцій (A) даютъ

$$\frac{\partial p_1}{p_2} = \frac{\partial p_2}{p_1}$$

интеграль этого есть

$$\frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2} = \text{пост.}$$

Слѣдовательно та функція, которую мы означили въ общей теоріи чрезъ  
 $\varphi$ , есть

$$\varphi = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}$$

Пользуясь этой функціей, нужно составить символъ  $(F_1, \varphi)$ . Въ нашемъ  
случаѣ

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = p_1 + p_2; \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_1} = x_1 + x_2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = p_1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = p_1 + p_2; \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = x_1 + x_2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = -p_2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} = 0$$

такимъ образомъ

$$\varphi_1 = (F_1, \varphi) = (p_1 + p_2)p_1 - (p_1 + p_2)p_2 = p_1^2 - p_2^2$$

или

$$\varphi_1 = 2\varphi$$

Слѣдовательно функція  $\varphi_1$  не есть новая функція, а выражается чрезъ  $\varphi$   
и на основаніи выше сдѣланнаго замѣчанія найденная функція  $\varphi_1$  не го-  
вится для опредѣленія  $F_2$ . Въ виду этого найдемъ интеграль уравненій  
(A) отличный уже отъ найденныхъ интеграловъ  $F_1$  и  $\varphi$ .

Если въ двухъ первыхъ отношеніяхъ возьмемъ отношеніе разности предыдущихъ къ разности послѣдующихъ, то это отношеніе посредствомъ послѣдняго изъ (A) можетъ быть написано въ видѣ

$$\frac{\partial (p_1 - p_2)}{\partial x_3 (p_1 - p_2)} = \frac{-\partial x_3}{a (p_1 - p_2)}$$

интеграль этого есть

$$2a (p_1 - p_2) - x_3^2 = \text{const.}$$

что, по означенію общей теоріи, должно быть принято за функцію  $\theta$ . Итакъ

$$\theta = a (p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}$$

посредствомъ этого составимъ символъ  $(F_1, \theta)$ . Мы видимъ, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = -x_3; \quad \frac{\partial \theta}{\partial p_1} = a; \quad \frac{\partial \theta}{\partial p_2} = -a; \quad \frac{\partial \theta}{\partial p_3} = 0$$

поэтому легко видѣть, что

$$(F_1, \theta) = 0$$

а слѣдовательно функція  $\theta$  можетъ быть принята за  $F_2$ .

Итакъ для опредѣленія производныхъ  $p_1, p_2, p_3$  имѣемъ уравненія

$$F = (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + a p_3 (p_1 - p_2) = a$$

$$F_1 = (x_1 + x_2) (p_1 + p_2) = a_1$$

$$F_2 = a (p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2} = a_2$$

Изъ этихъ уравненій, рѣшая ихъ относительно  $p_1, p_2, p_3$ , легко находимъ

$$p_1 = \frac{a_1}{2(x_1 + x_2)} + \frac{a_2}{2a} + \frac{x_3^2}{4x}$$

$$p_2 = \frac{a_1}{2(x_1 + x_2)} - \frac{a_2}{2a} - \frac{x_3^2}{4x}$$

$$p_3 = \frac{2a - a_1 x_3}{2a_2 - x_3^2} + \frac{1}{2a} (x_1 - x_2) x_3$$

Такимъ образомъ полный дифференціалъ

$$\partial z = p_1 \partial x_1 + p_2 \partial x_2 + p_3 \partial x_3$$

въ нашемъ случаѣ принимаетъ видъ

$$\begin{aligned} \partial z = & \frac{a_1}{2} \frac{\partial(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{1}{2a} (\partial x_1 - \partial x_3) \left( a_2 + \frac{x_3^2}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{2a} (x_1 - x_2) x_3 \partial x_3 + \frac{2a - a_1 x_3}{2a_2 + x_3^2} \partial x_3 \end{aligned} \quad (B)$$

Опредѣливъ функцію  $F_1$ , мы можемъ идти къ интегралу даннаго уравненія другимъ путемъ, применяя послѣдовательно тотъ же изложенный способъ Якоби.

За исходную точку изысканія функціи  $F_2$  мы можемъ принять уравненіе  $(F_1, F_2) = 0$ . Этотъ путь нѣсколько длиннѣе предыдущаго, но на немъ удобнѣе прослѣдить всѣ изгибы способа Якоби.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0$$

то уравненіе  $(F_1, F_2) = 0$  приводится къ

$$(F_1, F_2) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial p_2} - \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0$$

или къ

$$(p_1 + p_2) \frac{\partial F_2}{\partial p_1} - (x_1 + x_2) \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + (p_1 + p_2) \frac{\partial F_2}{\partial p_2} - (x_1 + x_2) \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0$$

Интегрированіе этого уравненія приводится къ интегрированію совокупныхъ уравненій вида

$$\frac{\partial p_1}{p_1 + p_2} = \frac{-\partial x_1}{x_1 + x_2} = \frac{\partial p_2}{p_1 + p_2} = \frac{-\partial x_2}{x_1 + x_2}$$

сравнивая первое отношеніе съ третьимъ и интегрируя полученное уравненіе, имѣемъ

$$p_1 - p_2 = \text{пост.}$$

Слѣдовательно за функцію  $\varphi$  въ этомъ случаѣ можемъ принять

$$\varphi = p_1 - p_2$$

Составляя по указанію общей теоріи

$$\varphi_1 = (F, \varphi)$$

имѣемъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = -1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} = 0;$$

Производныя функции  $F$  мы уже имѣемъ и теперь посредствомъ нихъ составляемъ

$$\varphi_1 = (F, \varphi) = x_3 (p_2 - p_1)$$

Слѣдовательно

$$\varphi_1 = -x_3 \varphi$$

Это есть новая функция и вмѣстѣ съ тѣмъ интегралъ уравненія

$$(F_1, F_2) = 0.$$

По общей теоріи слѣдуетъ составить функцию  $\varphi_2 = (F, \varphi_1)$ . Мы видѣли, что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = p_2 - p_1$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} = -x_3; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} = x_3; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} = 0$$

Слѣдовательно

$$\varphi_2 = (p_1 - p_2) x_3^2 + \alpha (p_1 - p_2)^2$$

что очевидно представится въ видѣ

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1^2}{\varphi} + \alpha \varphi^2$$

Итакъ  $\varphi_2$  не представляетъ собою новой функции, а выражается чрезъ предыдущія, поэтому дальнѣйшихъ функций производить не будемъ и для опредѣленія  $f_2$  удовлетворяющей совместно уравненіямъ  $(F, f_2) = 0$ ;  $(F_1, f_2) = 0$  мы должны обратиться теперь къ уравненію (30) стр. 1269 общей теоріи. Уравненію  $(F, f_2) = 0$ , какъ мы знаемъ, удовлетворяетъ каждая изъ функций  $F, \varphi, \varphi_1, \varphi_2$  будучи подставлена на мѣсто  $f_2$ . Функция же  $f_2$ , удовлетворяющая уравненію  $(F_1, f_2) = 0$  опредѣлится по уравненію (30), которое въ нашемъ случаѣ принимаетъ видъ

$$\varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} = 0$$

или

$$\varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \left( \frac{\varphi_1^2}{\varphi} + \alpha \varphi^2 \right) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} = 0$$

Интегрирование этого линейнаго уравненія приводится къ интегрированию обыкновеннаго уравненія вида

$$\frac{\partial \varphi}{\varphi_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\frac{\varphi_1^2}{\varphi} + a\varphi^2}$$

чтобы интегрировать это уравненіе, напишемъ его въ видѣ

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} = \frac{\varphi_1}{\varphi} + a \frac{\varphi^2}{\varphi_1}$$

введемъ сюда новое переменнае  $u$  подь условіемъ

$$\varphi_1 = u\varphi$$

тогда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} = u + \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

и разсматриваемое уравненіе принимаетъ видъ

$$u + \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = u + a \frac{\varphi}{u}$$

или

$$u \, \partial u = a \, \partial \varphi$$

откуда

$$a\varphi = \frac{u^2}{2} + \text{пост.}$$

или

$$a\varphi - \frac{\varphi_1^2}{2\varphi^2} = \text{пост.}$$

такимъ образомъ

$$F_2 = a\varphi - \frac{\varphi_1^2}{2\varphi^2} = a(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}$$

тоже, что нашли другимъ путемъ.

Для полнаго рѣшенія задачи остается интегрировать уравненіе (B). Примѣняя извѣстный приемъ интегрированія полныхъ уравненій, находимъ

$$z + A = \frac{a_1}{2} \lg(x_1 + x_2) + \frac{1}{2a} (x_1 - x_2) \left( a_2 + \frac{x_3^2}{2} \right) + \\ + \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a_2}} \arcsin \left( \frac{x_3}{\sqrt{2a_2}} \right) - \frac{a_1}{2} \lg(2a_2 + x_3^2)$$

что и представляетъ собою полный интеграль даннаго уравненія съ ча-

стными производными; этотъ интеграль, какъ и должно быть, содержитъ три произвольныхъ постоянныхъ  $A, a_1, a_2 \dots$

20. Рассмотримъ еще нѣкоторые изъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ интегрированіе даннаго уравненія съ частными производными можетъ быть упрощено.

Предположимъ, что данное уравненіе представлено въ видѣ

$$(33) \quad F(x_1, x_2 \dots x_n; p_1, p_2 \dots p_n, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m) = a$$

гдѣ  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$  суть функціи переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n$  удовлетворяющія условію

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0$$

для всѣхъ значеній  $r$  и  $s$  представляемыхъ числами  $1, 2 \dots m$ .

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ функціи  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$  при интегрированіи уравненія  $F = a$  могутъ быть рассматриваемы какъ постоянныя величины.

Мы знаемъ, что для интегрированія уравненія (33) по способу Якоби нужно составить еще  $n - 1$  уравненій, необходимыхъ для опредѣленія всѣхъ производныхъ  $p_1, p_2 \dots p_n$ . Предположимъ, что рассматривая

$$\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$$

какъ постоянныя величины, извѣстнымъ намъ приѣмомъ составлена часть этихъ уравненій, именно

$$(34) \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2 \dots F_l = a_l$$

гдѣ  $l < n$ . Функціи  $F_1, F_2 \dots F_l$  не содержатъ постоянныхъ  $a_1, a_2 \dots a_l$ , но могутъ содержать въ себѣ функціи  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$ . Если уравненія (33) и (34) имѣютъ, какъ мы предполагаемъ, общій всѣмъ имъ интеграль, то какъ извѣстно

$$(F_i, F_k) = 0$$

гдѣ подъ  $i$  и  $k$  можно разумѣть каждое изъ чиселъ  $0, 1, 2 \dots l$  (принимая  $F_0 = F$ ).

Мы знаемъ, что если  $F_i$  и  $F_k$  содержатъ переменныя  $x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n$  явно и въ зависимости отъ нѣкоторыхъ величинъ  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$ , то по выраженію (B) и (стр. 1265) можно написать

$$\begin{aligned} [F_i, F_k] &= (F_i, F_k) + \sum_{r=1}^{r=m} \left[ (F_i, \varphi_r) \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_r} - (F_k, \varphi_r) \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_r} \right] \\ &+ \sum_r \sum_s \left[ \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_r} \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_s} - \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_s} \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_r} \right] (\varphi_r, \varphi_s). \end{aligned}$$



Мы знаемъ, что  $(F_i, F_k) = 0$  въ предположеніи что  $\varphi_1, \varphi_2$  и т. д. суть постоянныя величины; эти функціи  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$  при интегрированіи даннаго уравненія могутъ быть разсматриваемы какъ постоянныя величины, если  $[F_i, F_k] = 0$ ; такое условіе удовлетворится, если вторая часть предыдущаго уравненія обращается въ нуль; первый и третій членъ обращаются въ нули по принятымъ допущеніямъ, т. е. по предположенію

$$(F_i, F_k) = 0 \quad \text{и} \quad (\varphi_r, \varphi_s) = 0,$$

а потому условіе  $[F_i, F_k] = 0$  удовлетворится, если

$$(F_i, \varphi_r) = 0$$

гдѣ  $i$  имѣеть значенія  $0, 1, 2 \dots l$ ;  $r = 1, 2, \dots m$ . Для  $i = 0$  это условіе приводится такимъ образомъ къ

$$(F, \varphi_1) = 0; \quad (F, \varphi_2) = 0; \quad (F, \varphi_m) = 0$$

Итакъ для того, чтобы при интегрированіи уравненія (33) можно было разсматривать  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$  какъ постоянныя величины, необходимо, чтобы эти функціи удовлетворяли условіямъ

$$(F, \varphi_r) = 0 \quad \text{и} \quad (\varphi_r, \varphi_s) = 0$$

Если дано уравненіе

$$F(x_1, x_2 \dots x_i, p_1, p_2 \dots p_i, \varphi) = 0 \tag{A}$$

содержащее независимыя переменныя

$$x_1, x_2 \dots x_i, x_{i+1} \dots x_n$$

и производныя

$$p_1, p_2 \dots p_i, p_{i+1} \dots p_n,$$

но такимъ образомъ что  $\varphi$  есть функція только остальныхъ переменныхъ

$$x_{i+1}, \dots x_n, p_{i+1}, \dots p_n,$$

то понятно, что для того, чтобы можно было принять функцію  $\varphi$  за постоянную величину, необходимо, чтобы удовлетворялось только первое изъ условій, т. е. чтобы  $(F, \varphi) = 0$ . Въ разсматриваемомъ случаѣ предполагается что функція  $\varphi$  переменныхъ

$$x_1, x_2 \dots x_i, p_1, p_2 \dots p_i$$

не содержитъ и указанное условіе выполняется.

Въ самомъ дѣлѣ

$$(F, \varphi) = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)$$

что можно написать въ видѣ

$$(35) \quad (F, \varphi) = \sum_{k=1}^{k=i} \left( \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=i+1}^{k=n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)$$

Первая изъ этихъ суммъ обращается въ нуль, потому что производныя  $\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$  для всѣхъ значеній  $k$  отъ  $k=1$  до  $k=i$  обращаются въ нули, ибо  $\varphi$  по предположенію не содержитъ переменныхъ

$$x_1, x_2 \dots x_i, p_1, p_2 \dots p_i.$$

Вторая сумма выраженія (35) обращается въ нуль потому, что для всѣхъ значеній  $k$  отъ  $k=i+1$  до  $k=n$  производныя  $\frac{\partial F}{\partial x_k}$  и  $\frac{\partial F}{\partial p_k}$  обращаются въ нули, ибо функціи  $F$  явно переменныхъ

$$x_{i+1} \dots x_n, p_{i+1} \dots p_n$$

не содержитъ; такимъ образомъ  $(F, \varphi) = 0$ , и въ разсматриваемомъ случаѣ мы можемъ принять  $\varphi = c$ , тогда вмѣсто даннаго будемъ интегрировать уравненіе

$$(36) \quad F(x_1, x_2 \dots x_i, p_1, p_2 \dots p_i, C) = 0$$

принимая при этомъ

$$(37) \quad \varphi(x_{i+1} \dots x_n, p_{i+1} \dots p_n) = C$$

Если интегралы этихъ двухъ уравненій въ отдѣльности суть

$$z = f(x_1, x_2 \dots x_i, a_1, a_2 \dots a_i)$$

$$z = \psi(x_{i+1} \dots x_n, a_{i+1} \dots a_n)$$

то интеграль даннаго уравненія (A) будетъ

$$z = f + \psi$$

ибо это выраженіе удовлетворяетъ данному уравненію и содержитъ надлежащее число произвольныхъ постоянныхъ.

Итакъ если въ данномъ уравненіи переменныя въ упомянутомъ смыслѣ раздѣлены, то интегрированіе этого уравненія замѣняется интегрированіемъ уравненій (36) и (37) отдѣльно. Каждое изъ этихъ уравненій содержитъ меньшее число переменныхъ нежели данное уравненіе, и интегрированіе упрощается.

Интегрированіе уравненія съ частными производными упрощается еще въ томъ случаѣ, когда въ него не входятъ нѣкоторыя изъ независимыхъ переменныхъ. Въ этомъ случаѣ производныя искомой функціи  $z$ , взятыя по этимъ переменнымъ могутъ быть замѣнены въ данномъ уравненіи произвольными постоянными величинами.

Предположимъ, что дано для интегрированія уравненіе

$$F(x_{i+1} \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = 0$$

предположимъ, что интеграль этого уравненія есть

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_i x_i + u \tag{38}$$

гдѣ  $u$  есть нѣкоторая функція переменныхъ  $x_{i+1}, x_{i+2} \dots x_n$ . Въ такомъ предположеніи выводъ полнаго интеграла даннаго уравненія приводится къ опредѣленію функціи  $u$ . Если (38) есть общій интеграль даннаго уравненія, то частныя производныя отъ  $z$ , выведенныя по этому интегралу, должны удовлетворять данному уравненію, но эти частныя производныя суть

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = a_1; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = a_2 \quad \dots \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = a_i$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

ибо переменныя  $x_{i+1} \dots x_n$ , при формѣ (38) общаго интеграла, содержатся только въ  $u$ . Эти производныя должны удовлетворять данному уравненію, а потому для опредѣленія  $u$  получимъ уравненіе, если предыдущія величины производныхъ внесемъ въ данное уравненіе.

Результатъ этой подстановки будетъ

$$F\left(x_{i+1}, \dots, x_n, a_1, a_2 \dots a_i; \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{i+2}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{39}$$

Итакъ интегрированіе даннаго уравненія въ разсматриваемомъ случаѣ приводится къ интегрированію уравненія (39), а это послѣднее получается изъ даннаго замѣною частныхъ производныхъ, взятыхъ по переменнымъ входящимъ въ данное уравненіе, произвольными постоянными величинами.

Для поясненія этого на частномъ примѣрѣ будемъ интегрировать уравненіе

$$(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + p_3 (p_1 - p_2) [p_4^2 + (p_5 + x_4) (p_5 + x_6) p_6] = a$$

Въ этомъ уравненіи переменныя  $x_4, x_5, x_6, p_4, p_5, p_6$  входятъ въ особую изолированную группу, а потому, на основаніи предыдущихъ теоретическихъ соображеній, функція этихъ переменныхъ въ данномъ уравненіи можетъ быть замѣнена произвольной постоянной величиной, которую означимъ чрезъ  $a$ . Тогда интегрированіе данного уравненія можетъ быть замѣнено интегрированіемъ двухъ уравненій вида

$$(a) \quad \begin{aligned} (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + p_3 (p_1 - p_2) a &= a \\ p_4^2 + (p_5 + x_4) (p_5 + x_6) p_6 &= a \end{aligned}$$

Второе изъ этихъ уравненій интегрируется весьма просто, безъ примѣненія способа Якоби. Въ немъ переменное  $x_5$  не входитъ, а потому производную  $p_5$  змѣнимъ произвольной постоянной  $\beta$ . Итакъ вмѣсто второго изъ уравненій (a) будемъ интегрировать уравненіе

$$p_4^2 + (\beta + x_4) (\beta + x_6) p_6 = a$$

Въ этомъ уравненіи переменныя  $x_6, p_6$  составляютъ отдѣльную группу, а потому ее замѣнимъ произвольной постоянной  $\gamma$ , и вмѣсто предыдущаго уравненія будемъ интегрировать два такіа

$$\begin{aligned} (\beta + x_6) p_6 &= \gamma \\ p_4^2 + (\beta + x_4) \gamma &= a \end{aligned}$$

отсюда находимъ

$$p_6 = \frac{\gamma}{\beta + x_6}; \quad p_4 = \sqrt{a - (\beta + x_4) \gamma}$$

Вообще функція  $z$ , удовлетворяющая второму изъ уравненій (a), должна быть опредѣлена по выраженію

$$\partial z = p_4 \partial x_1 + p_5 \partial x_5 + p_6 \partial x_6$$

что въ нашемъ случаѣ принимаетъ видъ

$$\partial z = \sqrt{a - (\beta + x_4) \gamma} \partial x_4 + \beta \partial x_5 + \frac{\gamma \partial x_6}{\beta + x_6}$$

откуда

$$z = C_1 - \frac{2}{3\gamma} (a - \beta x - \gamma x_4)^{\frac{3}{2}} + \beta x_5 + \gamma \lg (\beta + x_6)$$

интегралъ перваго изъ уравненій (а) мы нашли выше по способу Якоби, а потому полный интегралъ даннаго уравненія есть

$$\begin{aligned} z = C + C_1 + \frac{a_1}{2} \lg (x_1 + x_2) + \frac{1}{2a} (x_1 - x_2) \left( a_2 + \frac{x_3^2}{2} \right) \\ + \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a_2}} \operatorname{arc} \left( \operatorname{tang} = \frac{x_3}{\sqrt{2a_2}} \right) - \frac{a_1}{2} \lg (2a_2 + x_3^2) \\ - \frac{2}{3\gamma} (a - \beta\gamma - \gamma x_4)^{\frac{3}{2}} + \beta x_5 + \gamma \lg (\beta + x_6) \end{aligned}$$

гдѣ двѣ произвольныя постоянныя  $C + C_1$  должны считаться за одну, и тогда этотъ полный интегралъ, какъ и должно быть, содержитъ шесть произвольныхъ постоянныхъ

$$C + C', \quad a_1, \quad a_2, \quad a, \quad \beta, \quad \gamma$$

Будемъ еще интегрировать уравненіе

$$p_1 p_2 p_3 = x_1 x_2 x_3$$

такимъ образомъ данное уравненіе есть

$$F = p_1 p_2 p_3 - x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Мы должны составить еще два уравненія  $F_1 = 0$  и  $F_2 = 0$ , чтобы опредѣлять три производныхъ  $p_1, p_2, p_3$  удовлетворяющихъ условіямъ точнаго дифференціала.

Для опредѣленія  $F_1$  составимъ уравненіе

$$(F, F_1) = 0$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \right) = 0$$

въ нашемъ случаѣ

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 x_3; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 x_3; \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = x_1 x_2 \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} = p_2 p_3; \quad \frac{\partial F}{\partial p_2} = p_1 p_3; \quad \frac{\partial F}{\partial p_3} = p_1 p_2 \end{aligned}$$

Слѣдовательно уравненіе  $(F, F_1) = 0$  будетъ

$$x_2 x_3 \frac{\partial F_1}{\partial p_1} + x_1 x_3 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} + x_1 x_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_3} - p_2 p_3 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - p_1 p_3 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - p_1 p_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0.$$

Обыкновенныя, соответствующія этому, совокупныя уравненія будутъ

$$(a) \quad \frac{\partial x_1}{p_2 p_3} = \frac{\partial x_2}{p_1 p_3} = \frac{\partial x_3}{p_1 p_2} = \frac{\partial p_1}{x_2 x_3} = \frac{\partial p_2}{x_1 x_3} = \frac{\partial p_3}{x_1 x_2}$$

такъ какъ по данному уравненію произведенія  $p_1 p_2 p_3$  и  $x_1 x_2 x_3$ , равны, то помноживъ первыя три пропорціи на  $p_1 p_2 p_3$ , а вторыя три на  $x_1 x_2 x_3$  будемъ имѣть

$$(b) \quad p_1 \partial x_1 = p_2 \partial x_2 = p_3 \partial x_3 = x_1 \partial p_1 = x_2 \partial p_2 = x_3 \partial p_3$$

сочетаніе первой части съ четвертой даетъ

$$\frac{\partial x_1}{x_1} = \frac{\partial p_1}{p_1}$$

Слѣдовательно

$$\lg x_1 = \lg p_1 - \lg a_1$$

откуда

$$(c) \quad x_1 a_1 - p_1 = 0$$

гдѣ  $a_1$  есть произвольная постоянная.

Такимъ образомъ можно положить

$$F_1 = p_1 - a_1 x_1 = 0.$$

Функцию  $F_2$  мы должны опредѣлять изъ совокупности двухъ уравненій

$$(F, F_2) = 0; \quad (F_1, F_2) = 0.$$

Изысканіе интеграла перваго изъ этихъ уравненій, какъ мы сказали, равносильно полученію другаго частнаго интеграла тѣхъ же уравненій (a), отличнаго отъ интеграла (c). Для этого сочетаніе второй и пятой части въ уравненіяхъ (b) дастъ

$$p_2 \partial x_2 = x_2 \partial p_2$$

Слѣдовательно

$$p_2 = a_2 x_2$$

Полагая

$$\varphi = p_2 - a_2 x_2$$

и замѣняя  $F_2$  чрезъ  $\varphi$  въ уравненіи

$$(F_1, F_2) = 0$$

находимъ

$$\begin{aligned} (F_1, \varphi) &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ &+ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{aligned}$$

но такъ какъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0$$

то

$$(F_1, \varphi) = 0$$

Слѣдовательно

$$\varphi = p_2 - a_2 x_2 = 0$$

есть общее рѣшеніе уравненій

$$(F, F_2) = 0; \quad (F_1, F_2) = 0$$

и мы имѣемъ теперь для опредѣленія производныхъ  $p_1, p_2, p_3$  три слѣдующія уравненія

$$p_1 p_2 p_3 = x_1 x_2 x_3$$

$$p_1 = a_1 x_1$$

$$p_2 = a_2 x_2$$

откуда

$$p_1 = a_1 x_1; \quad p_2 = a_2 x_2; \quad p_3 = \frac{x_3}{a_1 a_2}$$

Слѣдовательно

$$\partial z = a_1 x_1 \partial x_1 + a_2 x_2 \partial x_2 + \frac{x_3}{a_1 a_2} \partial x_3$$

или

$$z = a_1 \frac{x_1^2}{2} + a_2 \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2a_1 a_2} + \beta$$

Это есть полный интегралъ даннаго уравненія содержащій три произвольныхъ постоянныхъ. Чтобы получить общій интегралъ, надо принять

$$\beta = f(a_1, a_2)$$

гдѣ  $f$  есть произвольная функція, и исключить  $a_1, a_2$  между слѣдующими тремя уравненіями

$$z - \frac{a_1 x_1^2}{2} - \frac{a_2 x_2^2}{2} - \frac{x_3^2}{2a_1 a_2} - f(a_1, a_2) = 0$$

$$-\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_3^2}{2a_1^2 a_2} - f'_{a_1}(a_1, a_2) = 0$$

$$-\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2a_1 a_2^2} - f'_{a_2}(a_1, a_2) = 0$$

Два послѣднія суть частныя производныя взятая отъ перваго по  $a_1$  и  $a_2$ .

21. Кромѣ изложеннаго Якоби предложимъ еще другой способъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. По формѣ этотъ способъ мало отличается отъ предыдущаго, но имѣетъ предъ нимъ несомнѣнныя преимущества.

Въ этомъ способѣ данное уравненіе рѣшается относительно одной изъ входящихъ производныхъ и тогда эта послѣдняя является функціей независимыхъ переменныхъ и остальныхъ производныхъ. Послѣ этого ищутся такія функціи, которыя, будучи приравнены произвольнымъ постояннымъ, представляются уравненіями, имѣющими съ даннымъ одинъ и тотъ же полный интегралъ. Какъ скоро одна такая функція будетъ найдена, изъ нея исключается та производная, которая была вычислена по первому уравненію. Изъ этого преобразованнаго уравненія опредѣляется одна изъ остающихся производныхъ, и поступая съ этимъ рѣшеннымъ относительно другой производной уравненіемъ также, какъ поступали съ даннымъ начальнымъ, находимъ наконецъ число уравненій необходимыхъ и достаточныхъ для вычисленія всѣхъ производныхъ.

Проще всего второй способъ Якоби можно представить въ слѣдующемъ общемъ очеркѣ.

Предположимъ, что дано уравненіе съ частными производными. Оно зависить отъ  $n$  независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n$  и  $n$  производныхъ  $p_1, p_2 \dots p_n$  неизвѣстной функціи  $z$ .

Пусть это уравненіе будетъ  $f = h$  гдѣ  $h$  есть постоянная. Рѣшимъ это уравненіе относительно производной  $p_1$  и рѣшеніе представимъ въ видѣ

$$(a) \quad p_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n, h, p_2, p_3 \dots p_n)$$



или для краткости въ видѣ

$$p_1 - \varphi_1 = 0. \tag{b}$$

Опредѣлимъ новую функцію  $f_1$  подъ тѣмъ условіемъ, чтобы уравненіе  $f_1 = h_1$  имѣло одинъ и тотъ же полный интеграль съ даннымъ уравненіемъ. Какъ мы знаемъ, для этого должно удовлетворяться условіе

$$(p_1 - \varphi_1, f_1) = 0$$

Какъ скоро функція  $f_1$  чрезъ интегрированіе этого линейнаго уравненія найдена, то рѣшивъ уравненіе  $f_1 = h_1$  относительно  $p_2$ , получимъ

$$p_2 = \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n, h, h_1, p_3 \dots p_n) \tag{c}$$

Если эту величину  $p_2$  внесемъ въ уравненіе (a), то получимъ

$$p_1 - \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n, h, h_1, p_3 \dots p_n) = 0 \tag{d}$$

Это уравненіе не содержитъ  $p_2$  и по упомянутому условію, что уравненія (c) и (d) удовлетворяются однимъ полнымъ интеграломъ имѣемъ

$$(p_1 - \varphi_1, p_2 - \varphi_2) = 0$$

Послѣ этого опредѣлимъ функцію  $f_2$  удовлетворяющую уравненіемъ

$$(p_1 - \varphi_1, f_2) = 0; (p_2 - \varphi_2, f_2) = 0$$

Если функція  $f_2$  найдена, то рѣшимъ уравненіе  $f_2 = h_2$  относительно  $p_3$  и найденную величину  $p_3$  внесемъ въ уравненія (c) и (d) и т. д.

Въ этомъ состоитъ общій обзоръ второго способа Якоби.

При составленіи по этому способу уравненій, которыми опредѣляются производныя  $p_2, p_3 \dots$  эти послѣднія, какъ показываютъ уравненія (a), (d) и т. д. являются функціями каждая всѣхъ или нѣкоторыхъ за ней слѣдующихъ, это обстоятельство должно быть принято во вниманіе при составленіи уравненій  $f_1 = h_1; f_2 = h_2$  и т. д.

Въ виду этого полное развитіе второго способа Якоби можетъ имѣть слѣдующую форму.

При интегрированіи даннаго уравненія

$$f(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = h \tag{40}$$

производныя  $p_1, p_2 \dots p_n$  опредѣляются при условіи

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$$

но теперь, какъ мы сейчасъ сказали,

$$p_i = F_i(x_1, x_2 \dots x_n, p_{i+1}, p_{i+2} \dots p_n)$$

въ эту же функцію могутъ входить и постоянныя. Такимъ образомъ, если каждая изъ производныхъ по послѣднему выраженію представляется функціей другихъ за ней слѣдующихъ, то въ выраженіе (40) входитъ каждое изъ переменныхъ  $p$  и  $x$  явно и кромѣ того въ зависимости отъ остальныхъ производныхъ. Если рассмотримъ только двѣ производныхъ  $p$  и  $p_{i+1}$ , то по выраженію (40), имѣемъ

$$(41) \quad \frac{\partial f_i}{\partial p} + \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x} = 0$$

это относится и къ остальнымъ.

Имѣя это въ виду, помножимъ первое изъ выраженій (14<sub>\*</sub>) стр. 1257 на  $\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}$ , тогда получимъ

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} =$$

$$\frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_1} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \dots - \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}$$

$$+ \frac{\partial p_1}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial x_i}{\partial p_{i+1}} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}$$

по уравненіямъ (41) имѣющимъ мѣсто для всякаго  $p$  и  $x$  мы находимъ

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p} = - \frac{\partial f_i}{\partial p}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x} = - \frac{\partial f_i}{\partial x}$$

а потому предыдущее представляется въ видѣ

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} = - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}$$

$$+ \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial f_i}{\partial x_n}$$

$$- \frac{\partial p_1}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} - \frac{\partial p_1}{\partial x_{i+3}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+3}} - \dots - \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial f_i}{\partial p_n}$$

или простой перестановкой членовъ представляемъ это въ видѣ

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_1}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial f_i}{\partial p_n} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+2}} - \dots - \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0$$

точно также и другія уравненія группы (14<sub>\*</sub>) приведутся къ виду

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_2}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \frac{\partial f_i}{\partial p_n} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+2}} - \dots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} \frac{\partial f_i}{\partial p_n} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+2}} - \dots - \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0$$

Всѣ эти формы заключаются въ

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda} + \sum_{k=i+1}^{k=n} \left( \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) = 0 \tag{42}$$

гдѣ  $\lambda$  имѣеть всѣ значенія отъ 1 до  $i$ .

Замѣтимъ при этомъ, что уравненіе, которымъ опредѣляется  $p_\lambda$  въ зависимости отъ

$$p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_n$$

есть

$$p_\lambda - \varphi_\lambda(p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{43}$$

Принимая во вниманіе эти общія соображенія, будемъ интегрировать уравненіе  $F = c$ , гдѣ  $c$  есть постоянная, могущая быть нулемъ. Если рѣшимъ это уравненіе относительно одной производной, то такое рѣшеніе можетъ быть представлено уравненіемъ (43). Затѣмъ предстоитъ опредѣлить функцію  $f_i$  по уравненію

$$(\varphi_\lambda - p_\lambda, f_i) = 0$$

Это уравненіе въ развернутомъ видѣ представляется формой (42).

Предполагая, что мы рѣшили данное уравненіе относительно производной  $p_1$ , изъ уравненія (42) при  $i = 1$  имѣемъ

$$(42_*) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{k=n} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial p_k} - \frac{\partial p_1}{\partial p_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \right) = 0,$$

Чтобы интегрировать это уравненіе, линейное относительно производныхъ искомой функціи  $f_1$ , составимъ соотвѣтствующія совокупныя уравненія. именно

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{\partial x_2}{\frac{\partial p_1}{\partial p_2}} = \frac{\partial x_3}{\frac{\partial p_1}{\partial p_3}} = \dots = \frac{\partial x_n}{\frac{\partial p_1}{\partial p_n}} = \frac{\partial p_2}{\frac{\partial p_1}{\partial x_2}} = \dots = \frac{\partial p_n}{\frac{\partial p_1}{\partial x_n}}$$

предположимъ, что одинъ изъ частныхъ интеграловъ этого уравненія есть  $f_1 = C_1$ .

Гдѣ  $C_1$  есть произвольная постоянная; это уравненіе служить для опредѣленія  $p_2$  въ функціи

$$p_3, p_4 \dots p_n, \quad x_1, x_2 \dots x_n.$$

Опредѣляя изъ него  $p_2$ , имѣемъ

$$(44) \quad p_2 = \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n, p_3, p_4 \dots p_n, C_1)$$

подставляя эту величину  $p_2$  въ данное уравненіе рѣшенное относительно  $p_1$ , т. е. въ уравненіе

$$p_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n, p_2, p_3 \dots p_n)$$

выразимъ  $p_1$  въ функціи

$$x_1, x_2 \dots x_n, \quad p_3, p_4 \dots p_n;$$

это выраженіе имѣеть такимъ образомъ видъ

$$(45) \quad p_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n, p_3, p_4 \dots p_n, C, C_1)$$

Послѣ этого перейдемъ къ опредѣленію  $p_3$ . Для этого найдемъ интеграль  $f_2 = C_2$  общій двумъ уравненіямъ

$$(p_1, f_2) = 0; \quad (p_2, f_2) = 0$$

или правильнѣе

$$(\varphi_1 - p_1, f_2) = 0 \quad \text{и} \quad (\varphi_2 - p_2, f_2) = 0$$

которые въ раскрытомъ видѣ получимъ изъ уравненія (42), если примемъ въ немъ  $i=2$  и послѣдовательно положимъ  $\lambda=1$  и  $\lambda=2$ , тогда составятся уравненія

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \sum_{k=3}^{k=n} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_k} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} - \frac{\partial p_1}{\partial p_k} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \sum_{k=3}^{k=n} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \right) = 0$$
(46)

Для упомянутой цѣли найдемъ частный интегралъ одного изъ этихъ уравненій, напр. перваго. Соответствующія этому совокупныя обыкновенныя уравненія суть

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{\partial x_3}{\frac{\partial p_1}{\partial p_3}} = \dots = \frac{\partial x_n}{\frac{\partial p_1}{\partial p_n}} = \frac{\partial p_3}{\frac{\partial p_1}{\partial x_3}} = \dots = \frac{\partial p_n}{\frac{\partial p_1}{\partial x_n}}$$

Пусть  $\psi = \text{const.}$  есть одинъ изъ интеграловъ этихъ уравненій. Такъ какъ въ этихъ уравненіяхъ нѣтъ пропорціи содержащей  $\partial x_2$ , или правльнѣе, такъ какъ это отношеніе есть  $\frac{\partial x_2}{0}$ , то заключаетъ, что  $x_2$  должно быть принимаемо за постоянную величину.

Посредствомъ интеграла  $\psi$  составляемъ символы

$$\psi_1 = (p_2, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sum_{k=3}^{k=n} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)$$

$$\psi_2 = (p_2, \psi_1) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \sum_{k=3}^{k=n} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} \right)$$

.....

$$\psi_\mu = (p_2, \psi_{\mu-1}) = \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial x_2} + \sum_{k=3}^{k=n} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial x_k} \right)$$
(47)

которые по извѣстной теоремѣ Якоби (ур. 25 стр. 1284) суть всѣ интегралы перваго изъ ур. (46).

При изысканіи функций  $\psi$  могутъ встрѣтиться три случая.

- 1) Функция  $\psi_\mu$  выражается посредствомъ предыдущихъ.

- 2) Эта функция  $\psi_\mu$  приводится къ постоянной величинѣ.
- 3) Она обращается тождественно въ нуль.

Пусть

$$\psi_\mu = \theta(x_2, \psi, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_{\mu-1})$$

гдѣ  $\mu \leq 2n - 2$  и  $x_2$  принимается за постоянную. Въ этомъ случаѣ нѣтъ надобности продолжать рядъ этихъ функций, которыя будутъ интегралами уравненій (46), и послѣдующія будутъ выражаться посредствомъ предыдущихъ; новыхъ рѣшеній не получимъ. Мы знаемъ, что всякая функция интеграловъ дифференціального уравненія есть также интегралъ этого уравненія.

Форма функции  $\theta$  удовлетворяющей первому изъ уравненій (46) совершенно произвольна, мы можемъ поэтому выбрать ее такъ, чтобы она удовлетворяла и второму изъ уравненій (46).

Пусть

$$\Phi(x_2, \psi, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_{\mu-1}) = \text{пост.}$$

будетъ искомая функция. Замѣняя во второмъ изъ выраженій (46)  $f_2$  черезъ  $\Phi$ , получимъ

$$(48) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \sum_{k=3}^{k=n} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = 0$$

или принимая во вниманіе предыдущій составъ функции  $\Phi$ , имѣемъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) + \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}$$

и далѣе

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$$

ибо всѣ другія переменныя, начиная съ  $x_3$ , входятъ въ зависимости только отъ функций  $\psi$ . Такимъ образомъ уравненіе (48) представляется въ видѣ

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) + \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \sum_{k=3}^{k=n} \left[ \frac{\partial p_2}{\partial x_k} \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \right] = 0$$

или въ раскрытомъ видѣ

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{\mu-1}} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial x_2} \\
 & + \frac{\partial p_2}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial p_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_3} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{\mu-1}} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial p_3}\right) \\
 & + \dots \\
 & + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial p_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{\mu-1}} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial p_n}\right) \\
 & - \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{\mu-1}} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial x_3}\right) \\
 & - \dots \\
 & - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{\mu-1}} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial x_n}\right) = 0
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sum_{k=3}^{k=n} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)\right) \\
 & + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \sum \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k}\right)\right) \\
 & + \dots \\
 & + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{\mu-1}} \left(\frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial x_2} + \sum \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial x_k}\right)\right) = 0
 \end{aligned}$$

Обращая внимание на уравнение (47), представляемъ это въ видѣ

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right) + \psi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} + \dots + \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{\mu-1}} = 0$$

такимъ образомъ функция  $\Phi$  определяется какъ интегралъ этого линейнаго уравненія. Соответствующая система обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій есть

$$\frac{\partial x_2}{1} = \frac{\partial \psi}{\psi_1} = \frac{\partial \psi_1}{\psi_2} = \dots = \frac{\partial \psi_{\mu-2}}{\psi_{\mu-1}} = \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\xi}$$

Изъ этой системы послѣдовательно находимъ

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \psi_2 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \\ &\dots \dots \dots \\ \xi &= \frac{\partial \psi_{\mu-1}}{\partial x_2} = \frac{\partial^\mu \psi}{\partial x_2^\mu} \end{aligned}$$

Слѣдовательно функція  $\xi$  есть первый интегралъ обыкновеннаго уравненія порядка  $\mu$ , именно

$$\frac{\partial^\mu \psi}{\partial x_2^\mu} = \xi \left( x_2, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^{\mu-1} \psi}{\partial x_2^{\mu-1}} \right)$$

если этотъ первый интегралъ есть

$$\Phi \left( x_2, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^{\mu-1} \psi}{\partial x_2^{\mu-1}} \right) = \text{пост.}$$

то искомый интегралъ общій уравненіямъ (46) получится, когда замѣнимъ производныя  $\psi$  ихъ величинами. Этотъ интегралъ будетъ такимъ образомъ

$$\Phi(x_2, \psi, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_{\mu-1}) = \text{пост.}$$

Уравненіе

$$f_2 = \Phi(x_2, \psi, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_{\mu-1}) = C_2$$

дасть производную  $p_3$  въ функціи

$$p_4 \dots p_n, \quad x_1, x_2 \dots x_n, \quad C, C_1, C_2$$

т. е.

$$p_3 = \varphi_3(x_1, x_2 \dots x_n, p_4 \dots p_n, C, C_1, C_2)$$

Во второмъ случаѣ, когда функція  $\psi_\mu$  приводится къ постоянной величинѣ, имѣемъ

$$\frac{\partial^\mu \psi}{\partial x_2^\mu} = C$$

откуда

$$\frac{\partial^{\mu-1} \psi}{\partial x_2^{\mu-1}} - Cx_2 = \text{пост.}$$



и интегралъ общій двумъ уравненіямъ (46) будетъ

$$f_2 = \psi_{\mu-1} - Cx_2 = C_2$$

Если въ частномъ случаѣ  $\psi_{\mu} = 0$ , то очевидно

$$f_2 = \psi_{\mu-1} = C_2$$

будетъ искомое общее рѣшеніе.

Мы видимъ такимъ образомъ, что во всякомъ случаѣ можно найти производную

$$p_3 = \varphi_3(x_1, x_2 \dots x_n, p_4, p_5 \dots p_n, C, C_1, C_2)$$

подставивъ ее въ выраженія (44) и (45), будемъ имѣть

$$p_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n, p_4 \dots p_n, C, C_1, C_2)$$

$$p_2 = \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n, p_4 \dots p_n, C, C_1, C_2)$$

Далѣ функція  $p_4$  опредѣлится изъ уравненія

$$f_3(x_1, x_2 \dots x_n, p_4, p_5 \dots p_n, C, C_1, C_2) = C_3$$

которое будетъ общимъ рѣшеніемъ для уравненій

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \sum_{k=4}^{k=n} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_k} \frac{\partial f_3}{\partial p_k} - \frac{\partial p_1}{\partial p_k} \frac{\partial f_3}{\partial x_k} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \sum_k \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_k} \frac{\partial f_3}{\partial p_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial f_3}{\partial x_k} \right) = 0 \tag{48}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \sum_k \left( \frac{\partial p_3}{\partial x_k} \frac{\partial f_3}{\partial p_k} - \frac{\partial p_3}{\partial p_k} \frac{\partial f_3}{\partial x_k} \right) = 0$$

Сначала найдемъ, какъ выше, рѣшеніе

$$\psi(x_1, x_2 \dots x_n, p_4 \dots p_n) = \text{пост.}$$

общее двумъ первымъ изъ предыдущихъ уравненій. Это рѣшеніе можетъ содержать  $x_3$  какъ постоянную величину.

Сдѣлавъ это, замѣнимъ въ третьемъ изъ предыдущихъ уравненій  $f_3$  чрезъ  $\psi$ , и составимъ уравненія

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \sum_{k=4}^{k=n} \left( \frac{\partial p_3}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial p_3}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)$$

$$\psi_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \sum_k \left( \frac{\partial p_3}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_k} - \frac{\partial p_3}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} \right)$$

которыя будутъ интегралами перваго и втораго изъ уравненій (48).

Продолжая такъ, будемъ находить различныя функціи  $f$ , изъ которыхъ опредѣлятся всѣ производныя  $p$ .

Предположимъ, что мы нашли  $n - 1$  этихъ производныхъ

$$p_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n, p_n, C, C_1 \dots C_{n-2})$$

$$p_2 = \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n, p_n, C, C_1 \dots C_{n-2})$$

.....

$$p_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2 \dots x_n, p_n, C, C_1 \dots C_{n-2})$$

Прослѣдимъ порядокъ опредѣленія функціи

$$f_{n-1}(x_1, x_2 \dots x_n, p_n, C, C_1 \dots C_{n-2}) = C_{n-1}$$

изъ которой слѣдуетъ опредѣлять  $p_n$  въ функціи  $x_1, x_2 \dots x_n$ .

Эта функція  $f_{n-1}$  должна удовлетворять  $n - 1$  уравненіямъ вида

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

.....

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

Чтобы найти рѣшеніе общее этимъ уравненіямъ, поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Начнемъ съ того, что будемъ искать интеграль перваго, или частный интеграль соотвѣтствующихъ ему совокупныхъ уравненій

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{\partial x_n}{\frac{\partial p_1}{\partial p_n}} = \frac{\partial p_n}{\frac{\partial p_1}{\partial x_n}}$$

пусть  $\sigma = \text{пост.}$  есть этотъ интеграль содержащій  $p_n, x, x_n$ , а всѣ другія

переменные  $x_2, x_3 \dots x_{n-1}$ , если входят въ него, то разсматриваются какъ постоянныя величины.

Подставляя  $\sigma$  во второе изъ уравненій (49) вмѣсто  $f_{n-1}$ , имѣемъ

$$\sigma_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \frac{\partial \sigma}{\partial p_n} - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial \sigma}{\partial x_n}$$

и подобно этому составимъ символъ  $\sigma_2$  въ видѣ

$$(p_2, \sigma_1) = \sigma_2 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \frac{\partial \sigma_1}{\partial p_n} - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_n}$$

Можетъ случиться, что  $\sigma_1$  будетъ функцией  $\sigma, x \dots x_n$ , и тогда интегралъ двухъ первыхъ уравненій (49) получимъ, интегрируя уравненіе перваго порядка

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \sigma_1$$

Если же  $\sigma_2$  будетъ функцией  $\sigma, \sigma_1, x_2 \dots x_n$ , тогда интегралъ этихъ двухъ уравненій будетъ первымъ интеграломъ такого уравненія втораго порядка

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} = F_2 \left( \sigma, \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}, x_2 \dots x_n \right)$$

съ условіемъ, что здѣсь можно принять

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \sigma_1$$

Если означимъ чрезъ  $\eta$  интегралъ общій двумъ упомянутымъ уравненіямъ, то чтобы найти интегралъ общій тремъ уравненіямъ [первымъ изъ (49)] составимъ слѣдующія два уравненія

$$\eta_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial p_3}{\partial p_n} \frac{\partial \eta}{\partial x_n}$$

$$\eta_2 = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_n} \frac{\partial \eta_1}{\partial p_n} - \frac{\partial p_3}{\partial p_n} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n}$$

Если  $\eta_1$  есть функция  $\eta, x_3 \dots x_n$ , то искомый интегралъ опредѣлится интегрированіемъ уравненія перваго порядка

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} = \eta_2$$

Если же  $\eta_2$  есть функция  $\eta, \eta_1, x_3 \dots x_n$ , то онъ опредѣлится интегриро-

наиѣмъ уравненія второго порядка

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2} = F_1 \left( \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x_3}, x_3 \dots x_n \right)$$

такъ будемъ продолжать до тѣхъ поръ, пока не получимъ функцію  $f_{n-1}$  какъ интеграль удовлетворяющій всѣмъ уравненіямъ (49).

Сдѣлавъ все это, имѣемъ достаточное число уравненій для опредѣленія всѣхъ производныхъ, и искомаѣ функція  $z$ , удовлетворяющая данному уравненію какъ интеграль, найдется интегрированіемъ точнаго дифференціала

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

Для поясненія примѣромъ этихъ общихъ соображеній будемъ интегрировать то-же уравненіе, которое интегрировали по первоначальному способу Якоби, т. е. уравненіе

$$p_1 p_2 p_3 = x_1 x_2 x_3$$

рѣшая это относительно  $p_1$ , имѣемъ

$$(50) \quad p_1 = \frac{x_1 x_2 x_3}{p_2 p_3}$$

для опредѣленія всѣхъ трехъ производныхъ, кромѣ даннаго уравненія, мы должны имѣть еще два съ нимъ совмѣстныхъ. Эти уравненія могутъ имѣть видъ

$$f_1(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = a_1$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = a_2$$

Функція  $f_1$  должна быть опредѣлена какъ интеграль линейнаго уравненія

$$(p_1, f_1) = 0$$

Это уравненіе составленное по формѣ (48) стр. 1296, въ раскрытомъ видѣ будетъ

$$(a) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial p_2} - \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_1}{\partial p_3} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

Соотвѣтствующія совокупныя уравненія будутъ

$$(b) \quad \frac{\partial x_1}{1} = \frac{\partial p_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{\partial p_3}{\partial p_1} = -\frac{\partial x_3}{\partial p_1}$$

по смыслу теории всё производныя берутся относительно переменных входящих явно, а потому изъ уравненія (50), имѣемъ

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{x_1 x_3}{p_2 p_3}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial p_2} = - \frac{x_1 x_2 x_3}{p_2^2 p_3}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = \frac{x_1 x_2}{p_2 p_3}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_3} = - \frac{x_1 x_2 x_3}{p_2 p_3^2}$$

Слѣдовательно въ нашемъ случаѣ совокупныя уравненія будутъ

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{p_2^2 p_3 \partial x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{p_2 p_3^2 \partial x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{p_2 p_3 \partial p_2}{x_1 x_3} = \frac{p_2 p_3 \partial p_3}{x_1 x_2}$$

Отсюда мы должны получить рѣшеніе зависящее отъ  $p_2$ . Соединеніе второго и четвертаго отношенія даютъ

$$p_2 \partial x_2 = x_2 \partial p_2$$

Интеграль этого есть

$$p_2 = ax_2 \tag{51}$$

это есть вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе  $f_1$  разрѣшенное относительно  $p_2$ .

Подставляя эту величину  $p_2$  въ уравненіе (50), имѣемъ

$$p_1 = \frac{x_1 x_3}{ap_3} \tag{52}$$

Функция  $f_2 = a_2$  опредѣлится какъ интеграль двухъ линейныхъ уравненій (46), которыя въ нашемъ случаѣ приводятся къ

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial p_3} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial p_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$$

(53)

Интегрированіе перваго изъ этихъ уравненій приводится къ интегрированію системы

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{\partial p_3}{\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_3}\right)} = - \frac{\partial x_3}{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\right)}$$

обращаясь къ уравненію (52), видимъ, что въ нашемъ случаѣ

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_3} = \frac{x_1}{ap_3}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial p_3} = - \frac{x_1 x_3}{ap_3^2}$$

Слѣдовательно предыдущія совокупныя уравненія суть

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{ap_3}{x_1} \frac{\partial p_3}{x_1} = \frac{ap_3^2}{x_1 x_3} \frac{\partial x_3}{x_3}$$

Сочетаніе двухъ послѣднихъ отношеній даетъ

$$\frac{\partial x_3}{x_3} = \frac{\partial p_3}{p_3}$$

или

$$\frac{p_3}{x_3} = \beta$$

Слѣдовательно во второмъ уравненіи (53) мы должны замѣнить  $f_2$  чрезъ  $p_3 = \psi$ , но тогда это уравненіе обращается въ

$$\psi_1 = (p_2, \psi) = 0$$

и оно тождественно удовлетворяется, ибо  $\psi$  не содержитъ  $x_2$  и  $p_2$  по выраженію (51) не содержитъ ни  $p_3$  ни  $x_3$ ; слѣдовательно общее рѣшеніе обоихъ уравненій (53) есть

$$\psi = \beta \quad \text{или} \quad p_3 = \beta x_3$$

Такимъ образомъ для опредѣленія производныхъ имѣемъ теперь три такія уравненія

$$p_1 = \frac{x_1}{\alpha\beta}, \quad p_2 = \alpha x_2; \quad p_3 = \beta x_3$$

а слѣдовательно для опредѣленія искомой функціи  $z$  составляемъ

$$\partial z = \frac{x_1}{\alpha\beta} \partial x_1 + \alpha x_2 \partial x_2 + \beta x_3 \partial x_3$$

и полный интеграль даннаго уравненія есть

$$z = \frac{x_1^2}{2\alpha\beta} + \frac{\alpha x_2^2}{2} + \frac{\beta x_3^2}{2} + \gamma$$

тоже самое мы нашли и по первоначальному способу Якоби.

Будемъ еще интегрировать уравненіе

$$z - ap_1 p_2 = 0.$$

Это уравненіе содержитъ неизвѣстную функцію  $z$ . Мы преобразуемъ это уравненіе такъ, чтобы функція  $z$  не входила.

Для этого пусть

$$f(x_1, x_2, z) = 0$$

будет искомый интеграль. Мы имѣемъ частныя производныя

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$$

или при сдѣланныхъ означеніяхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z} p_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z} p_2 = 0$$

тогда нашему уравненію, исключая изъ него  $p_1$  и  $p_2$ , можно дать видъ

$$z \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 - a \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

принимая  $z$  за третью независимую переменную, мы можемъ написать это въ такомъ видѣ

$$p_3^2 x_3 - a p_1 p_2 = 0.$$

Замѣтимъ, что теперь  $p_1$  и  $p_2$  имѣютъ иныя значенія чѣмъ въ данномъ уравненіи. Такимъ образомъ въ предыдущее уравненіе съ частными производными входятъ три независимыхъ переменныхъ  $x_1, x_2, x_3$ .

Изъ этого уравненія мы имѣемъ

$$p_1 = \frac{p_3^2 x_3}{a p_2} \tag{54}$$

Производная  $p_2$  должна быть опредѣлена изъ уравненія  $f_1 = a$ , гдѣ  $f_1$  должна удовлетворять уравненію

$$(p_1, f_1) = 0$$

которое имѣетъ видъ

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial p_1}{\partial p_2} + \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial p_1}{\partial p_3} + \frac{\partial f_1}{\partial p_3} \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = 0$$

Въ нашемъ случаѣ

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2} = -\frac{p_3^2 x_3}{ap_2^2}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = \frac{p_3^2}{ap_2}; \quad \frac{\partial p_1}{\partial p_3} = \frac{2p_3 x_3}{ap_2}$$

Слѣдовательно соотвѣтствующія совокупныя уравненія будутъ

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{ap_2^2 \partial x_2}{p_3^2 x_3} = \frac{\partial p_2}{0} = \frac{ap_2 \partial x_3}{2p_3 x_2} = -\frac{ap_2 \partial p_3}{p_3^2}$$

Искомое рѣшеніе этой системы, единственное зависящее отъ  $p_2$ , есть

$$p_2 = c_1$$

Слѣдовательно предыдущее выраженіе производной  $p_1$  принимаетъ видъ

$$(55) \quad p_1 = \frac{p_3^2 x_3}{ac_1}$$

Далѣе, производная  $p_3$  должна быть выведена изъ уравненія  $f_2 = C_2$ , гдѣ  $f_2$  удовлетворяетъ уравненіямъ (46), т. е. уравненіямъ

$$(p_1, f_2) = 0; \quad (p_2, f_2) = 0$$

первое въ развернутомъ видѣ есть

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial p_3} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$$

слѣдовательно соотвѣтствующія совокупныя уравненія суть

$$\frac{\partial x_2}{1} = \frac{\partial p_3}{\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_3}\right)} = -\frac{\partial x_3}{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\right)}$$

въ нашемъ случаѣ, какъ показываетъ уравненіе (55),

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_3} = \frac{p_3^2}{ac_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial p_3} = \frac{2p_3 x_3}{ac_1}$$

Слѣдовательно предыдущія совокупныя уравненія имѣютъ видъ

$$\frac{\partial x_2}{1} = -\frac{\partial x_3 ac_1}{2p_3 x_3} = \frac{ac_1}{p_3^2} \partial p_3$$

откуда выводимъ

$$-\frac{\partial x_3}{2x_3} = \frac{\partial p_3}{p_3}$$



или

$$\lg p_3 + \frac{1}{2} \lg x_3 = \lg C_2$$

т. е.

$$p_3 \sqrt{x_3} = C_2$$

или по нашему означенію

$$\psi = p_3 \sqrt{x_3} = \text{пост.}$$

подставляя  $\psi$  на мѣсто  $f_2$  во второе изъ уравненій (53), имѣемъ

$$\psi_1 = (p_2, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_3} \frac{\partial \psi}{\partial p_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0$$

во такъ какъ мы нашли  $p_2 = \text{пост.}$ , то это тождественно удовлетворится. Слѣдовательно функція  $p_3$  опредѣлится изъ выраженія

$$p_3 \sqrt{x_3} = C_2$$

такимъ образомъ для опредѣленія производныхъ мы имѣемъ уравненія

$$p_1 = \frac{p_3^2 x_3}{ac_1}; \quad p_2 = C_1; \quad p_3 = \sqrt{x_3} = C_2$$

откуда выводимъ

$$p_1 = \frac{C_2^2}{ac_1}; \quad p_2 = C_1; \quad p_3 = \frac{C_2}{\sqrt{x_3}}$$

Слѣдовательно  $f$ , посредствомъ котораго мы устранили  $z$  изъ даннаго уравненія, теперь опредѣлится интегрированіемъ такого точнаго дифференціала

$$df = \frac{c_2^2}{ac_1} dx_1 + c_1 dx_2 + \frac{c_2}{\sqrt{x_3}} dx_3$$

Итакъ

$$f = \frac{c_2^2}{ac_1} x_1 + c_1 x_2 + 2c_2 \sqrt{x_3}$$

приравнявъ это нулю и замѣнивъ  $x_3$  чрезъ  $z$ , получаемъ полный интегралъ даннаго уравненія въ видѣ

$$4c_2^2 z = \left[ \frac{c_2^2}{ac_1} x_1 + c_1 x_2 \right]^2$$

или

$$z = \frac{(c_2^2 x_1 + a c_1^2 x_2)^2}{4 c_1^2 c_2^2 a^2}$$

Будемъ еще интегрировать такое уравненіе

$$x_1^2 p_1 + x_1^2 p_2 - 2x_1 z - b \lg p_2 + 2b \lg x_1 = a$$

Чтобы устранить  $z$ , положимъ, что

$$\varphi(x_1, x_2, z) = 0$$

есть искомый интегралъ. Изъ этого интеграла имѣемъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$$

оскуда

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}; \quad p_2 = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

внося это въ данное уравненіе, имѣемъ

$$-x_1^2 \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} - 2x_1 z - b \lg \left(-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\right) + b \lg x_1^2 - a = 0$$

замѣнимъ здѣсь

$$z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

черезъ

$$x_3, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3$$

тогда будемъ имѣть

$$x_1^2 (p_1 + p_2) + 2x_1 x_3 p_3 + b p_3 \lg \left(-\frac{p_2}{p_3}\right) - b p_3 \lg x_1^2 + a p_3 = 0$$

или

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_1^2 + 2x_1 x_3 p_3 + b p_3 \lg \left(\frac{p_2}{x_1^2 p_3}\right) + a p_3 = 0$$

будем интегрировать это по второму способу Якоби. Для этого, определяя отсюда  $p_1$ , имѣемъ

$$p_1 = \frac{-b p_3 \lg\left(-\frac{p_2}{x_1^2 p_3}\right) - a p_3 - 2x_1 x_3 p_3 - x_1^2 p_2}{x_1^2} \quad (e)$$

тогда для опредѣленія  $p_3$  составляемъ символъ

$$(p_1, f_1) = 0$$

который въ раскрытомъ видѣ для нашего случая представляется уравненіемъ (а) стр. (1302), которому соотвѣтствуютъ совокупныя уравненія (b) стр. (1302).

Для нашего случая по выраженію (с) составляемъ

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial p_2} = -\left(\frac{b p_3}{x_2^2 p_2} + 1\right); \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = -2 \frac{p_3}{x_1}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_3} = \frac{-\left[b_3 \lg\left(-\frac{p_2}{x_1^2 p_3}\right) + a + 2x_1 x_3 - b\right]}{x_1^2}$$

Слѣдовательно совокупныя уравненія (b) стр. 1302 принимаютъ видъ

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{\partial p_2}{0} = \frac{x_1^2 \partial x_2}{x_1^2 + \frac{b p_3}{p_2}} = \frac{x_1^2 \partial x_3}{a + 2x_1 x_3 + b \lg\left(-\frac{p_2}{x_1^2 p_3}\right) - b} = \frac{x_1^2 \partial p_3}{-2 p_3 x_1}$$

По второму отношенію имѣемъ

$$p_2 = -a_1$$

то и есть уравненіе опредѣляющее  $p_2$ . Внося это въ предыдущее выраженіе (с) для  $p_1$ , имѣемъ

$$p_1 = \frac{-b p_3 \lg\left(\frac{a_1}{p_3 x_1^2}\right) - a p_3 - 2x_1 x_3 p_3 + a_1 x_1^2}{x_1^2}$$

тѣмъ будемъ искать  $p_3$  какъ рѣшеніе общее уравненіямъ

$$(p_1, f_2) = 0, \quad (p_2, f_2) = 0$$

которыя въ раскрытомъ видѣ суть уравненія (53). Для перваго изъ уравненій имѣемъ слѣдующую систему обыкновенныхъ совокупныхъ

$$\frac{\partial x_1}{1} = \frac{x_1^2 \partial x_3}{a + 2x_1 x_3 + b \lg\left(\frac{a_1}{x_1^2 p_3}\right) - b} = \frac{x_1^2 \partial p_3}{-2x_1 p_3}$$

Сочетаніе перваго отношенія съ третьимъ даетъ

$$\psi = x_1^2 p_3 = \text{пост.}$$

замѣняя во второмъ изъ уравненій (53)  $f_2$  чрезъ  $\psi$ , тождественно получаемъ

$$(p_2 \psi) = 0$$

Слѣдовательно

$$x_1^2 p_3 = a_2$$

есть то уравненіе, изъ котораго должно опредѣлиться  $p_3$ .

Такимъ образомъ производныя  $p_1, p_2, p_3$  въ нашемъ случаѣ имѣютъ такой составъ

$$p_2 = -a_1, \quad p_3 = \frac{a_2}{x_1^2}$$

$$p_1 = \frac{-\frac{ba_2}{x_1^2} \lg \left( \frac{a_1}{a_2} \right) - \frac{a a^2}{x_1^2} - 2x_1 x_3 \frac{a_2}{x_1^2} + a_1 x_1^2}{x_1^2}$$

поэтому

$$d\varphi = -\frac{ba_2}{x_1^4} \lg \left( \frac{a_1}{a_2} \right) dx_1 - \frac{a a_2}{x_1^4} dx_1 - \frac{2a_2 x_3}{x_1^3} dx_1 + a_1 dx_1 - a_1 dx_2 + \frac{a_2}{x_1^3} dx_3$$

отсюда полный интеграль преобразованнаго уравненія есть

$$\varphi = \frac{ba_2 \lg \left( \frac{a_1}{a_2} \right)}{3x_1^3} + \frac{a a_2}{3x_1^3} + a_2 \left( \frac{x_3}{x_1^2} \right) + a_1 x_1 - a_1 x_2 - \beta$$

полагая  $\varphi = 0$ , замѣняя  $x_3$  чрезъ  $z$  и  $\beta$  чрезъ  $\theta \left( \frac{a_1}{a_2} \right)$ , а  $\frac{a_1}{a_2}$  чрезъ  $\gamma$ , находимъ полный интеграль даннаго уравненія въ видѣ

$$z = -\frac{b \lg \gamma}{3x_1} - \frac{a}{3x_1} - \gamma x_1^3 + \gamma x_1^2 x_2 + x_1^2 \theta(\gamma)$$

или

$$z = \gamma x_1 x_2 - \gamma x_1^3 - \frac{b \lg \gamma + a}{3x_1} + x_1^2 \theta(\gamma)$$

гдѣ  $\theta$  есть произвольная функція.

22. Изложенные способы, которые Якоби далъ для интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка, имѣютъ несомнѣнныя преимущества передъ всѣми приемами предложенными для той же цѣли

другими учеными. Послѣ обзора способовъ Якоби едва-ли есть надобность обращаться даже и къ тѣмъ изысканіямъ, которыя предпринималъ для рѣшенія этой задачи Коши. Но при дальнѣйшемъ изложеніи рѣшенія во-просовъ, относящихся къ этой области анализа, мы будемъ ссылаться на одно положеніе, которое доказалъ Коши. Въ своемъ способѣ онъ указы-ваетъ на возможность найти такой интеграль уравненія съ частными производными, который при данномъ частномъ значеніи одного перемен-наго обращался бы въ данную функцію остальныхъ переменныхъ. Этотъ интеграль называется интеграломъ Коши.

Посмотримъ, какъ этотъ интеграль можетъ быть выведенъ изъ пол-наго интеграла.

Мы видѣли, что всякій интеграль можетъ быть полученъ изъ пол-наго, если этотъ послѣдній будетъ продифференцированъ по произволь-нымъ постояннымъ и въ полученное уравненіе вмѣсто произвольныхъ по-стоянныхъ будутъ поставлены такія функціи, которыя удовлетворяютъ этому уравненію.

Предположимъ, что полный интеграль представляется въ видѣ

$$z = f(x_1, x_2 \dots x_n, c_1, c_2 \dots c_n)$$

Дифференцируя его по произвольнымъ постояннымъ, получаемъ

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} \partial c_1 + \frac{\partial f}{\partial c_2} \partial c_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial c_n} \partial c_n = 0 \tag{1}$$

Имѣя это, приведемъ задачу о выводѣ интеграла Коши изъ полного инте-грала къ тому, чтобы опредѣлить  $c_1, c_2 \dots c_n$  подъ такими условіями: 1) чтобы функціи подставленные въ предыдущее уравненіе вмѣсто  $c_1, c_2 \dots c_n$  удовлетворяли этому уравненію, 2) чтобы при нѣкоторомъ частномъ зна-ченіи переменнаго  $x_1$ , напр. при  $x_1 = h$ , интеграль обращался въ данную функцію остальныхъ переменныхъ, т. е. чтобы имѣло мѣсто такое урав-неніе

$$f(h, x_2, x_3 \dots, c_1 \dots c_n) = F(x_2, x_3 \dots x_n) \tag{2}$$

такъ какъ  $h$  есть нѣкоторое данное частное значеніе  $x_1$ , то  $h$  есть по-стоянная величина; что касается до  $c_1, c_2 \dots c_n$ , то они разсматриваются какъ функціи остальныхъ переменныхъ. Дифференцируя предыдущее урав-неніе при такомъ условіи, получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \partial x_n + \frac{\partial f}{\partial c_1} \partial c_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial c_n} \partial c_n = \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \partial x_n \end{aligned} \tag{3}$$

Вычитая отсюда уравнение (1), имѣемъ

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \partial x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \partial x_n = \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \partial x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \partial x_n$$

такъ какъ переменныя независимы и дифференціалы произвольны, то это уравненіе удовлетворится при условіи

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial F}{\partial x_3}; \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

и эти уравненія должны имѣть мѣсто при выбранномъ частномъ значеніи  $x_1$ , т. е. при  $x_1 = h$ .

Легко доказать, что функціи  $c_1 \dots c_n$ , опредѣленныя изъ уравненій (2) и (4), удовлетворяютъ также и уравненію (1). Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (3) непосредственно выводится изъ уравненія (2) черезъ дифференцирование; а предполагая что уравненія (5) имѣютъ мѣсто, сократимъ равные члены въ обѣихъ частяхъ уравненія (3), и тогда изъ этого уравненія остается уравненіе (1).

Если при  $x_1 = h$ , изъ уравненій (3) и (5) величины  $c_1, c_2 \dots c_n$  получатся какъ постоянныя, то подставляя ихъ въ полный интегралъ, мы получимъ то рѣшеніе, которое желали имѣть, т. е. интегралъ который при частномъ значеніи одного переменнаго обращается въ данную функцію другихъ.

Такой случай можемъ видѣть въ уравненіи

$$(A) \quad p_2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) + p_1 p_3 = 0$$

Полный интегралъ этого уравненія есть

$$(B) \quad z = c_1 + \frac{c_2 x_2 + c_3 x_3}{x_1 + c_3}$$

Будемъ посредствомъ этого искать такой интегралъ, который при  $x_1 = 0$  обращается въ сумму остальныхъ переменныхъ. Слѣдовательно условіе, при которомъ предстоитъ опредѣлить постоянныя  $c_1, c_2, c_3$  представляется въ видѣ

$$(a) \quad c_1 + \frac{c_2}{c_3} x_2 + c_2 x_3 = x_2 + x_3$$

посредствомъ этого условія составимъ уравненія (5). Въ нашемъ случаѣ

$$f = c_1 + \frac{c_2}{c_3} x_2 + c_2 x_3; \quad F = x_2 + x_3$$

Слѣдовательно

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{c_2}{c_3}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = c_2; \quad \frac{\partial F'}{\partial x_2} = 1; \quad \frac{\partial F'}{\partial x_3} = 1; \quad \frac{\partial F'}{\partial x_1} = 0$$

и самыя уравненія (5) въ нашемъ случаѣ принимаютъ видъ

$$\frac{c_2}{c_3} = 1; \quad c_2 = 1$$

Внося эти величины въ уравненіе (а), находимъ  $c_1 = 0$ , а послѣднія уравненія прямо показываютъ, что  $c_2 = 1$  и  $c_3 = 1$ . Дѣйствительно мы видимъ, что при  $x_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 1$  разсматриваемый полный интегралъ обращается въ сумму остальныхъ переменныхъ, т. е.  $z = x_2 + x_3$ .

Если при нѣкоторомъ частномъ значеніи одного переменнаго, напр. при  $x_1 = h$  величины  $c_1, c_2 \dots c_n$  изъ уравненій (3) и (5) опредѣляются какъ функціи переменныхъ, то исключая при  $x_1 = h$  переменныя изъ уравненій (3) и (5), мы получимъ одно или нѣсколько соотношеній между величинами  $c_1, c_2 \dots c_n$ . Если число этихъ соотношеній меньше числа постоянныхъ  $c_1, c_2 \dots c_n$ , то изъ нихъ опредѣлимъ нѣкоторые изъ постоянныхъ по остальнымъ и получимъ соотношенія вида

$$\begin{aligned} c_1 &= \varphi_1(c_{i+1}, c_{i+2} \dots c_n) \\ &\dots \dots \dots \\ c_i &= \varphi_i(c_{i+1}, c_{i+2} \dots c_n) \end{aligned} \tag{b}$$

Изъ этихъ соотношеній опредѣлимъ  $i$  дифференціаловъ

$$\begin{aligned} \partial c_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_{i+1}} \partial c_{i+1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_{i+2}} \partial c_{i+2} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_n} \partial c_n \\ &\dots \dots \dots \\ \partial c_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_{i+1}} \partial c_{i+1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_{i+2}} \partial c_{i+2} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_n} \partial c_n \end{aligned}$$

Внося это въ уравненіе (1), сдѣлаемъ его зависимымъ отъ  $n - i$  дифференціаловъ  $\partial c_{i+1}, \partial c_{i+2} \dots \partial c_n$ . Такое преобразованное уравненіе есть

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial c_1} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_{i+1}} \partial c_{i+1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_{i+2}} \partial c_{i+2} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_n} \partial c_n \right) + \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial c_i} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_{i+1}} \partial c_{i+1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_{i+2}} \partial c_{i+2} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_n} \partial c_n \right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial c_{i+1}} \partial c_{i+1} + \frac{\partial f}{\partial c_{i+2}} \partial c_{i+2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial c_n} \partial c_n = 0 \end{aligned}$$

такъ какъ остающіеся дифференціалы произвольны, то уравненіе удовлетворяется, если приравняемъ нулю коэффициенты при остающихся дифференціалахъ. Такимъ образомъ будемъ имѣть уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_{i+1}} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial c_{i+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial c_{i+1}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial c_{i+2}} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial c_{i+2}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial c_{i+2}} = 0$$

.....

Всѣ эти уравненія заключаются въ формѣ

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial c_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_k} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial c_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial c_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_k} + \frac{\partial f}{\partial c_k} = 0$$

гдѣ  $k$  имѣетъ значеніе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ  $i + 1$  до  $n$ . Такимъ образомъ будемъ имѣть еще  $n - i$  уравненій.

Опредѣливъ изъ уравненій (6) и (7) всѣ постоянныя  $c_1, c_2 \dots c_m$  и поставивъ ихъ въ полный интегралъ, мы получимъ интегралъ Коши.

Нельзя сказать, что всякое рѣшеніе уравненій (6) и (7) удовлетворяетъ уравненію (2), при  $x_1 = h$ , но такое рѣшеніе всегда существуетъ.

Найдемъ для дифференціального уравненія (A) и для его полного интеграла (B) интегралъ Коши съ условіемъ, что при  $x_1 = 0$  полный интегралъ обращается въ слѣдующую функцію остальныхъ переменныхъ

$$\psi(x_2, x_3) = x_3 + 2\sqrt{x_2}$$

при этихъ условіяхъ имѣемъ уравненіе

$$(b) \quad c_1 + \frac{c_2 x_2}{c_3} + c_2 x_3 = x_3 + 2\sqrt{x_2}$$

здѣсь

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{c_2}{c_3}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = c_2; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_2}}; \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 1.$$

Слѣдовательно уравненія (5) принимаютъ видъ

$$(c) \quad \frac{c_2}{c_3} = \frac{1}{\sqrt{x_2}}; \quad c_2 = 1$$

изъ уравненій (b) и (c) величины  $c_1$  и  $c_3$  опредѣляются какъ функціи переменныхъ. Такъ какъ  $c_2 = 1$ , то  $c_3 = \sqrt{x}$ ; внося это въ уравненіе (b) находимъ

$$c_1 = c_3$$



Внося это въ полный интеграль, представляемъ его въ видѣ

$$z = c_3 + \frac{x_2}{c_3} + x_3$$

Для того чтобы удалить отсюда  $c_3$ . Возьмемъ отъ второй части производную по  $c_3$  и приравняемъ ее нулю, тогда будемъ имѣть

$$1 - \frac{x_2}{c_3^2} = 0$$

откуда  $c_3 = \sqrt{x_2}$ . Поэтому интеграль Коши есть

$$z = x_3 + 2\sqrt{x_2}$$

онъ и имѣеть требуемую форму.



## V.

### Интегрирование канонических системъ.

23. Съ вопросомъ объ интегрированіи уравненій съ частными производными въ тѣсной связи находится вопросъ объ интегрированіи особаго класса совокупныхъ уравненій, называемыхъ уравненіями каноническими.

Система совместныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, представляющая соотношеніе между независимымъ переменнымъ  $t$  и  $2n$  его неизвѣстными функциями  $x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n$ , вообще можетъ быть написана въ видѣ

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= A_1; & \frac{\partial x_2}{\partial t} &= A_2 \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t} &= A_n \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} &= B_1; & \frac{\partial y_2}{\partial t} &= B_2 \dots & \frac{\partial y_n}{\partial t} &= B_n \end{aligned}$$

гдѣ  $A_1, A_2 \dots A_n, B_1, B_2 \dots B_n$  суть данныя функціи независимой переменной  $t$  и ея функцій  $x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n$ .

Канонической системой называется такая частная форма предыдущей, въ которой  $A_1, A_2 \dots A_n, B_1, B_2 \dots B_n$  суть частныя производныя одной и той же функціи  $H$ , именно

$$H = F(t, x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n)$$

эти частныя производныя берутся относительно переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n$  и имѣютъ видъ

$$A_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad B_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

гдѣ подъ  $i$  разумѣемъ цѣлыя числа отъ 1 до  $n$ .

Такимъ образомъ каноническая система будетъ имѣть видъ

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (1)$$

она по предположенію состоитъ изъ  $2n$  совокупныхъ уравненій.

Интеграломъ этой системы вообще называется уравненіе  $V = a$ , въ которомъ  $a$  есть произвольная постоянная и  $V$  функція отъ  $t, x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n$  не содержащая постоянной  $a$ , и притомъ такая функція, полная производная которой относительно  $t$  приводится тождественно къ нулю, если изъ нея исключимъ посредствомъ каноническихъ уравненій производныя взятыя отъ  $x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n$  относительно главнаго переменнаго  $t$ .

Если извѣстный вопросъ приводится къ интегрированію уравненій канонической формы, то рѣшить его значить найти  $2n$  интеграловъ вида

$$V = a$$

Эти  $2n$  уравненій дадутъ возможность выразить каждое изъ переменныхъ  $x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n$  въ зависимости отъ главнаго переменнаго  $t$ .

Полная производная функціи  $V$  относительно  $t$  есть

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t}\right)$$

Слѣдовательно если  $V = a$  есть одинъ изъ интеграловъ канонической системы, то исключая отсюда посредствомъ каноническихъ уравненій (1)

производныя  $\frac{\partial x_i}{\partial t} \dots \frac{\partial y_i}{\partial t}$ , мы должны тождественно имѣть

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0$$

или по означенію Пуассона

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + (V, H) = 0 \quad (2)$$

Это выраженіе представляетъ критеріумъ того, что  $V = a$  есть интеграль канонической системы, именно если функція  $V$  удовлетворяетъ уравненію (2) съ частными производными, то она есть интеграль канонической системы.

Полное рѣшеніе состоитъ изъ  $2n$  различныхъ между собою интеграловъ содержащихъ  $2n$  произвольныхъ постоянныхъ. Рѣшая эти интегралы относительно произвольныхъ постоянныхъ, приведемъ ихъ къ виду

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1, & \varphi_2 &= a_2 \dots \varphi_n &= a_n \\ \psi_1 &= b_1, & \psi_2 &= b_2 \dots \psi_n &= b_n \end{aligned}$$

здѣсь  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  суть нѣкоторыя функціи отъ  $t, x_i, y_i$ .

Пуассонъ показалъ, что если  $\varphi = a$  и  $\psi = b$  суть два изъ интеграловъ канонической системы, то символъ  $(\varphi, \psi)$ , приравненный произвольной постоянной, есть также интегралъ этой системы.

Для доказательства этой теоремы Пуассона, замѣтимъ прежде всего, что на основаніи предыдущей теоремы, если  $\varphi$  и  $\psi$  суть интегралы каноническихъ уравненій, то тождественно должны удовлетворяться уравненія

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0$$

Замѣтивъ это, составимъ изъ трехъ функцій  $\psi, H, \varphi$  тождество Якоби, т. е.

$$[(\psi, H), \varphi] + [(H, \varphi), \psi] + [(\varphi, \psi), H] = 0$$

подставляя сюда вмѣсто  $(\psi, H)$  и  $(H, \varphi)$  ихъ значенія по уравненіямъ (3), имѣемъ

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \varphi\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + [(\varphi, \psi), H] = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \varphi\right) - [(\varphi, \psi), H] = 0$$

Но мы знаемъ, что

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$$

поэтому предыдущее принимаетъ видъ

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} - [(\varphi, \psi), H] = 0$$

отсюда заключаемъ, что  $(\varphi, \psi) = C$  есть интегралъ канонической системы.

Итакъ если  $\varphi = c$  и  $\psi = c'$  суть интегралы канонической системы, то приравнявъ символъ  $(\varphi, \psi)$  постоянной величинѣ, получимъ еще интегралъ каноническихъ уравненій.

24. Прежде чѣмъ будемъ говорить о способахъ интегрированія каноническихъ системъ, рассмотримъ условія ихъ преобразованія безъ измѣненія формы.

Интегрировать уравненія канонической системы значитъ представить переменныя  $x_i, y_i$  въ функціи независимаго переменнаго  $t$  и  $2n$  произвольныхъ постоянныхъ  $c_1, c_2 \dots c_{2n}$ . Итакъ выраженіе каждаго изъ переменныхъ имѣетъ видъ

$$\varphi(t, c_1, c_2 \dots c_{2n})$$

Если будемъ измѣнять одно переменное  $t$ , то дифференціалъ функціи  $\varphi$  представится въ видѣ

$$\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \partial t \tag{4}$$

Если будемъ принимать за переменныя величины  $c_1, c_2 \dots c_{2n}$  и измѣненіе функціи зависящее отъ измѣненія постоянныхъ представимъ характеристикой  $\delta$ , то будемъ имѣть

$$\delta\varphi = \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial\varphi}{\partial c_i} \delta c_i \tag{5}$$

Если будемъ дифференцировать уравненіе (4) по произвольнымъ постояннымъ, то получимъ

$$\delta\delta\varphi = \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial c_2} \delta c_2 + \dots \right) \partial t \tag{6}$$

дифференцируя по  $t$  выраженіе (5), найдемъ

$$\partial\delta\varphi = \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial c_1 \partial t} \delta c_1 \partial t + \frac{\partial^2\varphi}{\partial c_2 \partial t} \delta c_2 \partial t + \dots \right)$$

или

$$\partial\delta\varphi = \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial c_1 \partial t} \delta c_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial c_2 \partial t} \delta c_2 + \dots \right) \partial t \tag{7}$$

сравнивая выраженія (6) и (7), видимъ, что

$$\delta \partial\varphi = \partial \delta\varphi$$

это показываетъ, что при разсматриваемыхъ дифференцированіяхъ характеристики могутъ быть переставляемы.

Послѣ этого замѣчанія перейдемъ къ рѣшенію вопроса о преобразованіи каноническихъ уравненій.

Напишемъ уравненія (1) въ видѣ

$$\partial x_i - \frac{\partial H}{\partial y_i} \partial t = 0; \quad \partial y_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \partial t = 0$$

такъ какъ мы принимаемъ  $c_1, c_2 \dots c_{2n}$  за произвольныя постоянныя, то и измѣненія ихъ совершенно произвольны.

Характеристика  $\delta$  представляетъ по условію тѣ измѣненія, которыя завясятъ отъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ поэтому  $\delta x_i$  и  $\delta y_i$  совершенно произвольны. Имѣя это въ виду, помножимъ первое изъ предыдущихъ уравненій на  $\delta y_i$ , второе на  $\delta x_i$  и вычтемъ первое изъ второго, тогда получимъ

$$\delta x_i \delta y_i - \partial x_i \delta y_i + \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y_i \right) \partial t = 0$$

будемъ суммовать это отъ 1 до  $n$ , тогда найдемъ

$$(8) \quad \sum_i (\delta x_i \delta y_i - \partial x_i \delta y_i) + \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y_i \right) \partial t = 0$$

Если будемъ функцію  $H$  дифференцировать по характеристикѣ  $\delta$ , то при этомъ  $t$  должны считать за величину постоянную, ибо  $\delta$  относится только къ измѣненіямъ зависящимъ отъ измѣненія постоянныхъ. Такъ какъ

$$H = f(x_i, y_i, t)$$

то

$$(9) \quad \delta H = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y_i \right)$$

поэтому уравненіе (8) принимаетъ видъ

$$(10) \quad \sum (\delta x_i \delta y_i - \partial x_i \delta y_i) + \delta H \cdot \partial t = 0$$

Легко показать, что это уравненіе равносильно данной канонической системѣ. Въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе по произвольности  $\delta x_i$  и  $\delta y_i$  возможно только тогда, когда коэффициенты при  $\delta x_i$  и  $\delta y_i$  отдѣльно обращаются въ нули, а принимая во вниманіе выраженіе (9), находимъ, что эти условія суть

$$(10_0) \quad \partial y_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \partial t = 0; \quad \partial x_i - \frac{\partial H}{\partial y_i} \partial t = 0.$$

Распространяя это на всѣ значенія  $i$  отъ 1 до  $n$ , получаемъ изъ этого  $2n$  начальныхъ каноническихъ уравненій.

Итакъ система каноническихъ уравненій можетъ быть замѣнена однимъ уравненіемъ (10), и обратно уравненіе (10) по произвольности величинъ  $\delta x_i$  и  $\delta y_i$  распадается на  $2n$  каноническихъ уравненій.

25. Разсмотримъ теперь преобразование каноническихъ уравненій при извѣстныхъ условіяхъ.

Предположимъ, что переменное  $t$  формулами преобразования не измѣняется и замѣнимъ переменныя

$$x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n$$

черезъ

$$p_1, p_2 \dots p_n, q_1, q_2 \dots q_n,$$

придавая этимъ новымъ переменнымъ слѣдующія значенія. Предположимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую функцію

$$f(t, x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) \tag{11}$$

составимъ производныя этой функціи по  $x_i$  и  $y_i$  и по  $p_i$ , и примемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = -q_i \tag{12}$$

при этомъ мы принимаемъ, что функція  $f$  такова, что изъ уравненій (11) для  $i = 1, 2 \dots$  могутъ быть вычисляемы новыя переменныя по первоначальнымъ и наоборотъ.

Взявъ полный дифференціалъ функціи (11), находимъ

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

а принимая во вниманіе положенія (12), отсюда выводимъ

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \sum (y_i \delta x_i - q_i \delta p_i) \tag{13}$$

Если функцію (11) будемъ дифференцировать по характеристикѣ  $\delta$ , то переменное  $t$  не будетъ измѣняться и мы получимъ

$$\delta f = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

или

$$\delta f = \sum (y_i \delta x_i - q_i \delta p_i) \tag{14}$$

Замѣтимъ, что такъ какъ  $\frac{\partial f}{\partial t}$  въ общемъ случаѣ зависитъ отъ  $x_i$  и  $y_i$ , то вариация этой производной (здѣсь подъ вариацией мы разумѣемъ дифференціалъ по характеристикѣ  $\delta$ ) не равна нулю и ее означимъ чрезъ  $\delta \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)$ , самъ же  $\partial t$  измѣненію не подлежитъ; итакъ вариация выраженія (13) будетъ

$$\delta \delta f = \partial t \delta \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \sum (\partial x_i \delta y_i + y_i \delta \partial x_i - \delta q_i \partial p_i - q_i \delta \partial p_i)$$

дифференціалъ же выраженія (14) есть

$$\partial \delta f = \sum (\partial y_i \delta x_i + y_i \partial \delta x_i - \partial q_i \delta p_i - q_i \partial \delta p_i)$$

Мы видѣли, что

$$\partial \delta f = \delta \partial f; \quad \delta \partial x_i = \partial \delta x_i; \quad \delta \partial p_i = \partial \delta p_i$$

Вычитая одно изъ другаго два предыдущія выраженія, получимъ

$$(15) \quad 0 = \partial t \delta \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \sum (\partial x_i \delta y_i - \partial y_i \delta x_i) - \sum (\delta y_i \partial p_i - \partial q_i \delta p_i)$$

Мы видѣли, что система (10<sub>0</sub>) каноническихъ уравненій можетъ быть замѣнена однимъ уравненіемъ (10).

Складывая уравненія (10) и (15), имѣемъ

$$\partial t \delta \frac{\partial f}{\partial t} + \delta H \partial t - \sum_i (\delta q_i \partial p_i - \partial q_i \delta p_i) = 0$$

если положимъ здѣсь

$$\left( H + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = Q$$

то представимъ это въ видѣ

$$\partial Q \partial t - \sum (\delta q_i \partial p_i - \partial q_i \delta p_i) = 0$$

предполагая, что функція  $Q$  представлена по новымъ переменнымъ  $p_i$  и  $q_i$ , имѣемъ

$$\partial Q = \sum \left( \frac{\partial Q}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial Q}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

Внося это въ предыдущее уравненіе и приравнявая нулю коэффициенты при произвольныхъ  $\delta p_i$  и  $\delta q_i$ , будемъ имѣть



$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial p_i} \frac{\partial t}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial q_i} \frac{\partial t}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial p_i}$$

это и суть уравнения (10<sub>0</sub>) преобразованныя по новымъ переменнымъ.

Итакъ если пользуемся для преобразования 2n уравненіями

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = q_i \quad (16)$$

то каноническія уравненія въ преобразованной формѣ остаются каноническими, и эти уравненія (16), посредствомъ которыхъ дѣлаемъ преобразование, сами зависятъ только отъ одной функціи (11), которая можетъ быть названа преобразовательной.

26. Обратимся теперь къ главнымъ теоремамъ объ интегрированіи каноническихъ уравненій.

Разсматривая систему каноническихъ уравненій (1), мы принимаемъ въ нихъ

$$H = F(t, x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n) \quad (17)$$

предположимъ, что

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2 \dots \varphi_n = a_n \quad (18)$$

суть интегралы каноническихъ уравненій рѣшенныя относительно постоянныхъ  $a_1, a_2 \dots a_n$ . Опредѣлимъ изъ этихъ интеграловъ переменныя  $y_1, y_2 \dots y_n$  и подставимъ ихъ въ уравненіе (17). Означимъ результатъ этой подстановки чрезъ (H). Легко видѣть, что функція

$$y_1 \partial x_1 + y_2 \partial x_2 + \dots + y_n \partial x_n - (H) \partial t \quad (19)$$

есть точный дифференціалъ. Чтобы показать это, достаточно доказать, что

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = - \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

для всякаго значенія i отъ 1 до n.

Если  $(H)$  есть результатъ подстановки всѣхъ  $y$  въ  $H$ , то  $(H)$  будетъ содержать  $x_i$  двояко: явно и въ зависимости отъ  $y_i$ ; итакъ

$$(20) \quad \frac{\partial (H)}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial H}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

Если  $\varphi_1 = a_1, \varphi_2 = a_2, \dots, \varphi_n = a_n$  суть интегралы каноническихъ уравнений, то они должны удовлетворять условию

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0$$

Если это существуетъ, то существуетъ равенство

$$(a) \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

имѣя это въ виду, преобразуемъ уравненіе (20) посредствомъ канонической системы и приведемъ его къ виду

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_k} = - \frac{\partial y_k}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial t} \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

что посредствомъ предыдущаго условія (a) точнаго дифференціала представляется въ видѣ

$$(21) \quad \frac{\partial (H)}{\partial x_k} = - \frac{\partial y_k}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial y_k}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial t} \frac{\partial y_k}{\partial x_n}$$

посредствомъ интеграловъ (18) каждую изъ величинъ  $y_k$  мы можемъ представить въ видѣ функціи  $t$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , слѣдовательно

$$\frac{\partial y_k}{\partial t} = \left( \frac{\partial y_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial y_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial y_k}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

подставляя это въ уравненіе (21), найдемъ

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_k} = - \left( \frac{\partial y_k}{\partial t} \right)$$

Этимъ и подтверждается, что сумма (19) есть точный дифференціалъ.

Пусть  $V$  будетъ функція, отъ которой происходитъ точный дифференціалъ (19). Такимъ образомъ  $V$ , будучи интеграломъ выраженія (19), должна быть функціей  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$  и произвольныхъ постоянныхъ  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Итакъ

$$y_1 \partial x_1 + y_2 \partial x_2 + \dots + y_n \partial x_n - (H) \partial t = \partial V$$

откуда заключаемъ, что

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = y_1; \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = y_2 \dots \frac{\partial V}{\partial x_n} = y_n; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = - (H) \quad (22)$$

27. Предположимъ, что функция  $V$  чрезъ интегрирование упомянутого точнаго дифференціала найдена, тогда если возьмемъ частныя производныя этой функции относительно каждой постоянной, входящей въ этотъ интегралъ, и такую производную приравняемъ новой произвольной постоянной, то выраженія, такимъ образомъ составленныя, будутъ интегралами канонической системы. Докажемъ эту теорему; докажемъ что выраженія

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n$$

суть интегралы уравненій канонической системы.

Эта теорема будетъ доказана, если покажемъ, что полный дифференціалъ относительно  $t$  взятый отъ первыхъ частей этихъ уравненій, по исключеніи производныхъ

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} \dots \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

посредствомъ каноническихъ уравненій, тождественно обращается въ нуль.

Понятно, что

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial a_i} \right)}{\partial t} = \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial a_i} \right)}{\partial t} \right) + \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial a_i} \right)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial a_i} \right)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

гдѣ первый членъ второй части есть производная взятая относительно  $t$  входящаго явно. Измѣняя здѣсь порядокъ частнаго дифференцированія, имѣемъ

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial a_i} \right)}{\partial t} = \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial a_i} \right)}{\partial t} \right) + \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \right)}{\partial a_i} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)}{\partial a_i} \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

но принимая во вниманіе уравненія (22) и исключая производныя

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} \dots \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

посредствомъ каноническихъ уравненій, находимъ

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial a_i} = - \frac{\partial (H)}{\partial a_i} + \frac{\partial y_1}{\partial a_i} \frac{\partial H}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial a_i} \frac{\partial H}{\partial y_n}$$

Если  $(H)$  получается из  $H$  по исключению всех  $y$  посредством интеграловъ  $\varphi_1 = a_1, \varphi_2 = a_2 \dots \varphi_n = a_n$ , то  $(H)$  будетъ содержать  $a_i$  только въ зависимости отъ  $y$ . Итакъ

$$\frac{\partial (H)}{\partial a_i} = \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial a_i} + \frac{\partial H}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial a_i} + \dots + \frac{\partial H}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial a_i}$$

Внося это въ предыдущее уравненіе, видимъ, что вторая часть его тождественно обращается въ нуль, изъ этого заключаемъ, что  $\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i$  есть интеграль канонической системы.

28. Докажемъ еще одну весьма важную теорему, которая вмѣстѣ съ предыдущей даетъ полное указаніе на правило интегрированія каноническихъ уравненій.

Эта теорема состоитъ въ томъ, что интегрированіе каноническихъ уравненій приводится къ нахожденію одной характеристической функціи, которая есть полный интеграль уравненія съ частными производными перваго порядка.

Функція  $V$ , о которой мы сейчасъ говорили, опредѣляется слѣдующимъ образомъ.

Послѣднее изъ уравненій (22), т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (H) = 0$$

должно удовлетворяться тождественно; но второй членъ этого уравненія, т. е.  $(H)$  есть результатъ подстановки въ функцію

$$F(t, x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n)$$

величинъ

$$y_1, y_2 \dots y_n$$

взятыхъ изъ уравненій  $\varphi_1 = a_1, \varphi_2 = a_2 \dots \varphi_n = a_n$ ; эти величины, какъ мы видѣли, тождественны съ величинами

$$y_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad y_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2} \dots y_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

Слѣдовательно функція  $V$  должна удовлетворять уравненію

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, x_1, x_2 \dots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

но  $V$  кромѣ переменныхъ  $t, x_1, x_2 \dots x_n$  должна содержать  $n$  произвольныхъ постоянныхъ  $a_1, a_2 \dots a_n$ , слѣдовательно  $V$  должна быть опредѣлена какъ полный интегралъ предыдущаго уравненія съ частными производными перваго порядка.

Итакъ заключаемъ, что если опредѣлимъ функцію  $V$  какъ интегралъ упомянутаго уравненія съ частными производными перваго порядка, то полная система  $2n$  интеграловъ  $2n$  каноническихъ уравненій посредствомъ той функціи представится въ видѣ

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = y_1; \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = y_2 \dots \frac{\partial V}{\partial x_n} = y_n$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1; \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2 \dots \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n$$

Легко убѣдиться, что первая изъ этихъ системъ именно  $\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i$  есть дѣйствительно интегралы уравненій канонической системы.

Дифференцируя по  $t$  выраженіе

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i \tag{23}$$

имѣемъ

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial t} + \sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \tag{24}$$

но

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)$$

или обращая вниманіе на (23), прямо имѣемъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \tag{25}$$

а такъ какъ кромѣ того

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_k}$$

то выражение (24) принимает видъ

$$(26) \quad \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial t} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_k}$$

Далѣ дифференцируя уравненіе

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

по  $x$  имѣемъ

$$(27) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{i=n} \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0$$

Выраженію (25) можно дать видъ

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial x_k} \right)}{\partial x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

а такъ какъ

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = y_k$$

то

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

поэтому выраженіе (27) можно написать въ видѣ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = 0$$

Вычитая это изъ выраженія (26), имѣемъ

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

такимъ образомъ чрезъ дифференцированіе выраженія

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i$$

мы пришли къ каноническому уравненію, и изъ этого заключаемъ, что

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i$$

есть интеграль канонической системы.

Эти важные теоремы, относящіяся къ интегрированію каноническихъ системъ можно подтвердить посредствомъ преобразованія канонической системы въ каноническую по новымъ переменнымъ.

Разсмотримъ уравненіе съ частными производными

$$\frac{\partial z}{\partial t} = H\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \quad (28)$$

гдѣ  $H$  есть такая же функція какъ въ уравненіяхъ канонической системы, но отличается отъ нея только тѣмъ, что переменныя  $y_1, y_2, \dots, y_n$  замѣнены производными функціи  $z$ .

Предположимъ, что полный интегралъ этого уравненія съ частными производными есть

$$z = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) + a \quad (29)$$

Слѣдовательно если подставимъ въ предыдущее уравненіе (28) на мѣсто  $z$  эту функцію  $f$ , то получимъ тождество

$$\frac{\partial f}{\partial t} = H\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \quad (30)$$

(ибо отъ подстановки интеграла въ дифференціальное уравненіе это послѣднее обращается въ тождество).

Примемъ функцію (29) за преобразовательную, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial a_i} = -\beta_i \quad (31)$$

будутъ формулами преобразованія къ новымъ переменнымъ  $a_1, a_2, \dots, a_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . При этомъ условіи данная каноническая система отъ преобразованія не измѣняетъ своей канонической формы и каноническія уравненія

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

переходятъ въ каноническія же вида

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial \beta_i}; \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial a_i} \quad (32)$$

гдѣ

$$Q = H(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) - \frac{\partial f}{\partial t}$$

и эта функция  $Q$  должна быть выражена по новымъ переменнымъ. Подставляя въ эту формулу вмѣсто  $y_1, y_2 \dots y_n$  ихъ значенія по первому изъ выраженій (31), т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

найдемъ

$$Q = H \left( t, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) - \frac{\partial f}{\partial t}$$

а по тождеству (30) отсюда заключаемъ, что  $Q$  тождественно обращается въ нуль, слѣдовательно уравненія (32) теперь будутъ

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial t} = 0$$

т. е. что  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  суть произвольныя постоянныя, а потому заключаемъ, что уравненія (31) суть интегралы каноническихъ уравненій, ибо послѣдній мы получимъ, дифференцируя полный интеграль извѣстнаго дифференціального уравненія съ частными производными по произвольнымъ постояннымъ и приравнивая производную новой произвольной постоянной.

29. Чтобы пояснить эти общія соображенія на частномъ примѣрѣ, будемъ интегрировать уравненія движенія матеріальной точки при дѣйствіи центральной силы, при этомъ допустимъ, что сила есть функция разстоянія.

Итакъ пусть сила направленная къ неподвижному центру представляется уравненіемъ

$$F = \varphi(r)$$

проложенія этой силы на оси координатъ будутъ

$$-\frac{x}{r} \varphi(r); \quad -\frac{y}{r} \varphi(r); \quad -\frac{z}{r} \varphi(r)$$

а потому уравненія движенія представляются въ видѣ

$$(a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{x}{r} \varphi(r) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{y}{r} \varphi(r) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{z}{r} \varphi(r) \end{aligned}$$

Легко видѣть, что эти уравненія приводятся къ канонической формѣ, ибо легко составить такую функцию  $H$ , посредствомъ которой выполняется это преобразование.



Для составленія этой функціи  $H$ , помножимъ соответственно уравненія движенія на  $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$  и сложивъ произведенія, найдемъ

$$\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\varphi(r) \left( x \frac{\partial x}{\partial t} + y \frac{\partial y}{\partial t} + z \frac{\partial z}{\partial t} \right),$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right] = -\varphi(r) \frac{\partial r}{\partial t}$$

ибо

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Интегрируя это, получимъ

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right] + \int \varphi(r) \partial r = \text{const.}$$

Положимъ

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x'; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = y'; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = z'$$

и означимъ найденную функцію чрезъ  $H$ , т. е. примемъ

$$H = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \int \varphi(r) \partial r \tag{b}$$

Легко видѣть, что посредствомъ этой функціи уравненія движенія приводятся къ канонической формѣ.

Замѣтимъ прежде всего, что  $\int \varphi(r) \partial r$  какъ функція одного  $r$ , производныхъ  $x', y', z'$  содержать не можетъ, а потому

$$\frac{\partial H}{\partial x'} = x'; \quad \frac{\partial H}{\partial y'} = y'; \quad \frac{\partial H}{\partial z'} = z' \tag{c}$$

и кромѣ того

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \int \varphi(r) \partial r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi(r) \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial \int \varphi(r) \partial r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \varphi(r) \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial \int \varphi(r) \partial r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \varphi(r) \frac{z}{r}$$

Слѣдовательно уравненія (а) представляются въ видѣ

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{\partial H}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - \frac{\partial H}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial x}; \quad \frac{\partial y'}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial z}$$

если прибавимъ къ этому уравненію (с) имѣющія видѣ

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial z'}$$

то будемъ имѣть каноническую систему уравненій движенія.

Чтобы интегрировать эту систему по способу Якоби, мы должны интегрировать уравненіе съ частными производными перваго порядка вида

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

гдѣ  $H$  имѣетъ видѣ (b). Мы должны найти полный интегралъ этого уравненія, т. е. уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, x, y, z, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0.$$

Замѣнимъ прежде всего прямолинейныя координаты полярными, принимая

$$x = r \cos b \cos l$$

$$y = r \cos b \sin l$$

$$z = r \sin b$$

такимъ образомъ новыя координаты будутъ  $r$ ,  $l$  и  $b$ , которыя однообразно означимъ чрезъ  $q$ , такъ что

$$q_1 = r, \quad q_2 = b, \quad q_3 = l$$

Полагая

$$T = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

гдѣ  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  имѣютъ тоже значеніе какъ прежде. Преобразование по новымъ координатамъ приводитъ функцію (живую силу системы)  $T$  къ виду

$$T = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + r^2 \cos^2 b \left( \frac{\partial l}{\partial t} \right)^2 + r^2 \left( \frac{\partial b}{\partial t} \right)^2 \right]$$

положимъ подобно предыдущему

$$q_1' = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad q_2' = \frac{\partial b}{\partial t}, \quad q_3' = \frac{\partial l}{\partial t}$$

и примемъ

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2; \quad \frac{\partial T}{\partial q_3'} = p_3$$

Такъ какъ въ общей теоріи мы принимали

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = y_k$$

то теперь сообразно съ этимъ должны принять

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = p_k$$

У насъ

$$p_1 = \frac{\partial r}{\partial t}; \quad p_2 = r^2 \cos^2 b \frac{\partial l}{\partial t}; \quad p_3 = r^2 \frac{\partial b}{\partial t}$$

а потому

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial p_1}; \quad \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{1}{r^2 \cos^2 b} \frac{\partial V}{\partial p_2}; \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial p_3}$$

Слѣдовательно предыдущему выраженію  $T$  можно дать видъ

$$T = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 b} \left( \frac{\partial V}{\partial l} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial V}{\partial b} \right)^2 \right]$$

Чтобы составить функцію  $H$  намъ нужно еще знать часть

$$\int \varphi(r) \partial r$$

составъ этой части зависитъ отъ закона дѣйствія силы. Мы предположимъ, что сила дѣйствуетъ по закону Ньютона, тогда

$$\varphi(r) = \frac{k^2 \mu}{r^2}$$

Слѣдовательно

$$\int \varphi(r) \partial r = -\frac{k^2 \mu}{r}$$

поэтому

$$H = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial V}{\partial b} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 b} \left( \frac{\partial V}{\partial l} \right)^2 \right] - \frac{k^2 \mu}{r}$$

такимъ образомъ уравненіе

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

принимаетъ видъ

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial V}{\partial b} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 b} \left( \frac{\partial V}{\partial l} \right)^2 \right] - \frac{k^2 \mu}{r} = 0$$

итакъ въ это уравненіе входятъ четыре переменныхъ

$$r = q_1, \quad b = q_2, \quad l = q_3, \quad t = q_4$$

и четыре производныхъ взятыхъ отъ неизвѣстной функціи  $V$  по этимъ переменнымъ. Мы для краткости положимъ

$$\frac{\partial V}{\partial r} = v_1; \quad \frac{\partial V}{\partial b} = v_2; \quad \frac{\partial V}{\partial l} = v_3; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = v_4$$

при такихъ означеніяхъ предыдущее уравненіе съ частными производными принимаетъ видъ

$$(d) \quad v_4 + \frac{1}{2} \left[ v_1^2 + \frac{v_2^2}{q_1^2} + \frac{v_3^2}{q_1^2 \cos^2 q_2} \right] - \frac{k^2 \mu}{q_1} = 0$$

это уравненіе можетъ служить для опредѣленія одной изъ производныхъ, напр.  $v_1$ ; для опредѣленія другихъ составимъ уравненіе

$$(F_1, F) = 0$$

принимая за  $F_1$  предыдущую функцію, т. е.

$$v_4 + \frac{1}{2} \left[ v_1^2 + \frac{v_2^2}{q_1^2} + \frac{v_3^2}{q_1^2 \cos^2 q_2} \right] - \frac{k^2 \mu}{q_1} = F_1$$

такъ какъ

$$(F_1, F) = \sum_{k=1}^{k=4} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial v_k} - \frac{\partial F_1}{\partial v_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} \right)$$

то для составленія этого линейнаго уравненія имѣемъ

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial \left[ \frac{v_2^2}{q_1^2} + \frac{v_3^2}{q_1^2 \cos^2 q_2} - \frac{k^2 \mu}{q_1} \right]}{\partial q_1} = M$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_2} = \frac{v_3^2 \frac{\partial \left( \frac{1}{\cos^2 q_2} \right)}{\partial q_2}}{2q_1^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_3} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial q_4} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_1} = v_1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial v_2} = \frac{v_2}{q_1^2}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial v_3} = \frac{v_3}{q_1^2 \cos^2 q_2}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial v_4} = 1$$

Слѣдовательно уравненіе  $(F_1, F') = 0$  въ раскрытомъ видѣ есть

$$M \frac{\partial F}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{v_3^2 \frac{\partial \left( \frac{1}{\cos^2 q_2} \right)}{\partial q_2}}{2q_1^2} \frac{\partial F}{\partial v_2} - \frac{v_2}{q_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{v_3}{q_1^2 \cos^2 q_2} \frac{\partial F}{\partial q_3} - \frac{\partial F}{\partial q_4} = 0.$$

Слѣдовательно соответствующія этому совокупныя уравненія будутъ

$$\frac{\partial v_1}{M} = \frac{2q_1^2 \partial v_2}{v_3^2 \frac{\partial \left( \frac{1}{\cos^2 q_2} \right)}{\partial q_2}} = \frac{\partial v_3}{0} = \frac{\partial v_4}{0} = \frac{\partial q_1}{-v_1} = \frac{\partial q_2}{v_2} = \frac{\partial q_3}{q_1^2 \cos^2 q_2} = \frac{\partial q_4}{-1}$$

отсюда заключаемъ, что

$$v_3 = \text{пост.} = a_2; \quad v_4 = \text{пост.} = a_1$$

Затѣмъ изъ сочетанія второго съ шестымъ отношеніемъ, имѣемъ

$$2v_2 \partial v_2 = -v_3^2 \frac{\partial \left( \frac{1}{\cos^2 q_2} \right)}{\partial q_2} \partial q_2$$

НО ТАКЪ КАКЪ  $v_3 = a_2$ , ТО ОТСЮДА ИМѢЕМЪ

$$v_3^2 = - \frac{a_2^2}{\cos^2 q_2} + a_3^2$$

ИМѢЯ ВСЕ ЭТО, ИЗЪ УРАВНЕНІЯ (θ) МОЖЕМЪ ОПРЕДѢЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ  $v_1$ . ДЛЯ ЭТОГО ВНОСЯ НАЙДЕННЫЯ ВЕЛИЧИНЫ  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  ВЪ УРАВНЕНІЕ (θ), ПОЛУЧИМЪ

$$a_1 + \frac{v_1^2}{2} + \left( a_3^2 - \frac{a_2^2}{\cos^2 q_2} \right) \frac{1}{2q_1^2} + \frac{a_2^2}{2q_1^2 \cos^2 q_2} - \frac{k^2 \mu}{q_1} = 0$$

ОТКУДА

$$2a_1 + v_1^2 + \frac{a_3^2}{q_1^2} - \frac{2k^2 \mu}{q_1} = 0$$

ИЛИ

$$v_1^2 = \frac{2k^2 \mu}{q_1} - 2a_1 - \frac{a_3^2}{q_1^2}$$

ТОКИМЪ ОБРАЗОМЪ МЫ ИМѢЕМЪ ВСѢ ПРОИЗВОДНЫЯ ДЛЯ СОСТАВЛЕНІЯ ПОЛНАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛА  $\partial V$ , ВООБЩЕ ИМѢЮЩАГО ВИДЪ

$$\partial V = v_4 \partial t + v_3 \partial l + v_2 \partial b + v_1 \partial r$$

И ВЪ НАШЕМЪ СЛУЧАѢ

$$\partial V = a_1 \partial t + a_2 \partial l + \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\cos^2 q_2}} \partial b + \sqrt{\frac{2k^2 \mu}{q_1} - 2a_1 - \frac{a_3^2}{q_1^2}} \partial r$$

ИЛИ

$$V = a_1 t + a_2 l + \int \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\cos^2 q_2}} \partial b + \int \sqrt{\frac{2k^2 \mu}{q_1} - 2a_1 - \frac{a_3^2}{q_1^2}} \partial r$$

ЭТОТЪ ПОЛНЫЙ ИНТЕГРАЛЪ КАКЪ И ДОЛЖНО БЫТЬ СОДЕРЖИТЬ ТРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХЪ ПОСТОЯННЫХЪ  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ .

ТЕПЕРЬ, ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ ТРИ КОНЕЧНЫХЪ ИНТЕГРАЛА УРАВНЕНІЙ ДВИЖЕНІЯ, СЛѢДУЕТЪ ВЗЯТЬ ОТЪ ЭТОГО ИНТЕГРАЛА ПРОИЗВОДНЫЯ ПО ПРОИЗВОЛЬНЫМЪ ПОСТОЯННЫМЪ И ПРИРАВНЯТЬ КАЖДУЮ ПРОИЗВОДНУЮ НОВОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ. ЭТИ ИНТЕГРАЛЫ БУДУТЪ ТАКИМЪ ОБРАЗОМЪ

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \beta_1; \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = \beta_2; \quad \frac{\partial V}{\partial a_3} = \beta_3$$

Въ нашемъ случаѣ эти интегралы суть

$$\beta_1 = t - \int \frac{\partial r}{\sqrt{\frac{2k^2\mu}{r} - 2\alpha_1 - \frac{\alpha_3^2}{r^2}}}$$

$$\beta_2 = -\alpha_2 \int \frac{\partial b}{\cos^2 b \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 b}}} + l \tag{e}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 \int \frac{\partial b}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 b}}} - \alpha_3 \int \frac{\partial r}{r^2 \sqrt{\frac{2k^2\mu}{r} - 2\alpha_1 - \frac{\alpha_3^2}{r^2}}}$$

чтобы выполнить оставшіяся здѣсь квадратуры замѣтимъ, что

$$\sqrt{\frac{2k^2\mu}{r} - 2\alpha_1 - \frac{\alpha_3^2}{r^2}} = \sqrt{2\alpha_1 \left( \frac{k^2\mu}{\alpha_1 r} - 1 - \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1 r^2} \right)}$$

Замѣнимъ здѣсь постоянныя  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  двумя другими по соотношеніямъ

$$\frac{k^2\mu}{\alpha_1} = 2a; \quad \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1} = a^2(1 - e^2)$$

тогда разсматриваемый радикаль приведется къ виду

$$\sqrt{\frac{k^2\mu}{a} \left( \frac{2a}{r} - 1 - \frac{a^2(1 - e^2)}{r^2} \right)}$$

Слѣдовательно первый изъ интеграловъ (e) будетъ

$$t + \beta = \int \frac{r \partial r}{\sqrt{\frac{k^2\mu}{a} \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}}$$

полагая

$$r = a - ae \cos u$$

имѣемъ

$$t + \beta_1 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k^2\mu}} (u - e \sin u) \tag{f}$$

уравненіе Кеплера.

Второй изъ интеграловъ (*e*) представимъ въ видѣ

$$\beta_2 = l - \frac{a_2}{a_3} \int \cos^2 b \sqrt{1 - \frac{\partial b}{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 \cos^2 b}}$$

Замѣняя отношеніе постоянныхъ  $\frac{a_2}{a_3}$  черезъ постоянную *i* по формулѣ

$$\frac{a_2}{a_3} = \cos i$$

находимъ

$$\beta_2 = l - \cos i \int \sqrt{1 - \frac{\partial (\text{tang } b)}{\cos^2 i \cos^2 b}}$$

откуда

$$l - \beta_2 = \text{arc}(\sin = \text{cotg } i \text{ tang } b)$$

Слѣдовательно

$$\text{cotang } i \text{ tang } b = \sin(l - \beta_2)$$

этому интегралу можно дать видъ

$$\sin b \cos i = \sin i \cos b \sin(l - \beta_2)$$

умноживъ обѣ части уравненія на *r* представимъ это въ формѣ

$$r \sin b \cos i = r \sin l \cos b \sin i \cos \beta - r \cos b \cos l \sin i \sin \beta$$

но

$$x = r \cos b \cos l$$

$$y = r \cos b \sin l$$

$$z = r \sin b$$

Слѣдовательно найденный интегралъ можно написать въ видѣ

$$z \cos i - y \sin i \cos \beta_2 + x \sin i \sin \beta_2 = 0$$

онъ зависитъ отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ *i* и  $\beta$  и представляетъ собою уравненіе плоскости, въ которой происходитъ движеніе. Мы видимъ, что эта плоскость проходитъ черезъ начало координатъ, въ нашемъ случаѣ черезъ центръ солнца.



Выполнимъ наконецъ третій изъ интеграловъ (e). Мы видѣли, что

$$\sqrt{\frac{2k^2\mu}{r} + 2a_1 - \frac{a_3^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{k^2\mu}{a} \left( \frac{2a}{r} - 1 - \frac{a^2(1-e^2)}{r^2} \right)}$$

и кромѣ того

$$\frac{a_2}{a_3} = \cos i; \quad a_3^2 = k^2\mu a (1 - e^2)$$

а потому третій интеграль представляется въ видѣ

$$\beta_3 = \int \frac{\cos b \, db}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 b}} - \int \frac{a \sqrt{1-e^2} \frac{\partial r}{r^2}}{\sqrt{\frac{2a}{r} - 1 - \frac{a^2(1-e^2)}{r^2}}}$$

положимъ здѣсь

$$\frac{\sin b}{\sin i} = \sin g$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ числителя и знаменателя подынтегральной функціи во второмъ интегралѣ умножимъ на

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}$$

тогда найдемъ

$$\beta_3 = g - \int \frac{\frac{a(1-e^2)}{e} \frac{\partial r}{r^2}}{\sqrt{1 - \left[ \frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e} \right]^2}}$$

пусть

$$\frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e} = \psi$$

тогда по выполненіи остающейся квадратуры найдемъ

$$\beta_3 = g - \text{arc}(\cos = \psi)$$

откуда

$$\psi = \cos(g - \beta_3)$$

или наконецъ

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos(g - \beta_3)}$$

то есть уравненіе коническаго сѣченія отнесеннаго къ фокусу.

Итакъ три интеграла движенія при дѣйстви центральнѣй силы суть

$$t - \beta_1 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k^2 \mu}} (u - e \sin u)$$

$$z \cos i - y \sin i \cos \beta_2 + x \sin i \sin \beta_2 = 0$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(g - \beta_3)}$$

Эти интегралы содержать, какъ и должно быть, шесть слѣдующихъ произвольныхъ постоянныхъ

$$a, e, i, \beta_1, \beta_2, \beta_3.$$

## Анатомическій субстратъ души, resp. сознанія.

С. И. Чирьева.

Изъ Физиологической Лабораторіи Императорскаго Университета Св.Владимира.

„S'il n'est pas permis... de percer jusqu'à la nature de l'ame, ni jusqu'aux lois de son union avec le corps, on peut au moins essayer de découvrir le siége ou le premier instrument de ces opérations“.

*De la Peyronnie, 1741.*

Процессы, совершающіеся въ животномъ организмѣ, суть химическіе, физическіе и біологическіе, или жизненные. *Біологическіе процессы* животного организма распадаются на двѣ группы: *физиологическіе* и *психическіе*.

Разсмотримъ, теперь, біологическіе процессы животного организма и постараемся выяснитъ: *a)* какіе процессы относятся къ физиологическимъ и какіе —къ психическимъ,—*b)* какими характерными особенностями обладаютъ тѣ и другіе—и *c)* какое количественное соотношеніе существуетъ между ними.

Органомъ всѣхъ получаемыхъ организмомъ сознательныхъ ощущеній и волевыхъ импульсовъ, а равно органомъ всѣхъ вообще безсознательныхъ психическихъ процессовъ, является, несомнѣнно, въ животномъ организмѣ головной мозгъ и специально область большихъ полушарій. Слѣд., удаляя большія полушарія у животного, мы удаляемъ у него органъ психической дѣятельности, и *всѣ процессы, совершающіеся въ такомъ организмѣ*, за исключеніемъ чисто химическихъ и

физическихъ, *суть процессы физиологическіе*. Къ этимъ процессамъ будутъ, слѣдовательно, относиться простые и сложные двигательныя рефлексы, со включеніемъ всей разумности этихъ движеній; далѣе, сюда будутъ относиться дыхательныя движенія и рефлексы на нихъ,—прямое и рефлекторное отдѣленіе пищеварительныхъ, кожныхъ, половыхъ и другихъ железъ,—прямое и рефлекторное выдѣленіе мочи,—всѣ сосудодвигательныя явленія и рефлексы на нихъ,—явленія регулированія тепла,—трофическія явленія и т. д.

Словомъ, къ физиологическимъ процессамъ будутъ относиться всѣ процессы, совершающіеся въ живомъ животномъ организмѣ, у котораго удаленъ большой мозгъ, за исключеніемъ, конечно, простыхъ химическихъ и физическихъ процессовъ.

Характерною особенностью физиологическихъ процессовъ, отличающею ихъ отъ психическихъ, является то, что *всѣ они занимаютъ известное мѣсто въ пространствѣ и требуютъ известнаго измѣряемаго времени для своего совершенія*. Возьмемъ какой-нибудь рефлекторный отдѣлительный процессъ—напр., отдѣленіе слюны при раздраженіи языка у животнаго—*nota bene*: лишеннаго головного мозга. Здѣсь мы имѣемъ, сначала, возбужденіе окончаній вкусовыхъ нервовъ языка и время, потребное для этого возбужденія,—затѣмъ, время, потребное для распространенія этого возбужденія вдоль центростремительныхъ нервовъ языка вплоть до центра, завѣдующаго отдѣленіемъ слюны,—далѣе, возбужденіе этого центра и время, потребное для этого,—время, потребное для распространенія возбужденія отъ этого центра до слюнной железы,—и, наконецъ, время, необходимое для того, чтобы наступило возбужденіе слюннаго эпителия и послѣдовало самое отдѣленіе слюны.

Слѣдовательно, описанный рефлекторный физиологическій актъ состоитъ изъ процессовъ возбужденія различныхъ тканей, участвующихъ въ немъ и занимающихъ известное протяженіе въ пространствѣ и, наконецъ, требуетъ для своего совершенія известнаго времени.

Если мы, теперь, возьмемъ животное, совершенно неповрежденное и обладающее всѣми психическими отправлениями, то увидимъ, что многіе физиологическіе процессы въ немъ будутъ возбуждаться и психическіе. Положимъ, что мы показали такому животному или человѣку какой-нибудь вкусный кусокъ. Этотъ кусокъ, прежде чѣмъ быть проглоченнымъ, вызоветъ, съ одной стороны, рядъ чисто физиологи-

ческихъ процессовъ, а съ другой—воспріятіе, или ощущеніе, этого куска въ зрительныхъ сферахъ и рядъ послѣдующихъ психическихъ процессовъ: бессознательныхъ и сознательныхъ.

*Ощущенія*, получаемыя организмомъ отъ внѣшнихъ предметовъ, чрезъ посредство фізіологическихъ процессовъ возбужденія концевыхъ аппаратовъ внѣшнихъ органовъ чувствъ и проведенія возбужденія въ кортикальные центры, до сознательнаго ихъ воспріятія въ *этихъ* центрахъ, и *суть тѣ первичныя психическія акты, изъ которыхъ уже затѣмъ возникаютъ* всѣ другіе: представленія, чувственные и волевые, различныя ассоціаціи этихъ представлений, запоминаніе и воспроизведеніе послѣднихъ, мышленіе, умо-заключеніе и т. д.—въ концѣ концовъ сознаніе и самосознаніе.

Для психическихъ процессовъ характерно, во-первыхъ, то, что всѣ ови, путемъ направленія на нихъ вниманія, *могутъ быть сознательно восприняты*.

Во-вторыхъ, сознательныя психическія процессы *не занимаютъ никакого опредѣленнаго мѣста въ пространство*; что-же касается времени, то *они, несомнѣнно, совершаются во времени*, потому что *они не сосуществуютъ*, а проходятъ чрезъ фокусъ сознанія *последовательно*, такъ что намъ представляется возможность измѣрить время ихъ протяженности въ этомъ отношеніи.

Въ третьихъ, между фізіологическими и психическими явленіями различіе заключается въ томъ, что *первыя воспринимаются нашими органами чувствъ и дѣлаются предметомъ изученія при помощи внѣшняго опыта*,— *вторыя*, напротивъ, совершенно *не воспринимаемы нашими органами чувствъ*, а изучаются только *при помощи внутренняго опыта*, или *самонаблюденія*. Другими словами: первыя могутъ служить предметомъ объективнаго метода изслѣдованія, вторыя—только *субъективнаго*.

Гранью между фізіологическими и психическими процессами въ мозгу служатъ мѣста, въ которыхъ впервые происходитъ воспріятіе раздраженій органовъ внѣшнихъ чувствъ, и соотношеніе между физическими процессами, ихъ обусловливающими, и психическими опредѣляется „психо-физическими законами“ *Е. Н. Weber'a* и *G. Th. Fechner'a*.

Не подлежит никакому сомнѣнiю, что психическiе процессы животнаго организма также имѣютъ свой анатомическiй субстратъ въ мозгу, и цѣль настоящаго экспериментальнаго изслѣдованiя заключается именно въ томъ, чтобы попытаться опредѣлить опытнымъ путемъ мѣстонахожденiе въ мозгу тѣхъ тканей, цѣлость которыхъ составляетъ непремѣнное условiе возможности сознательной душевной дѣятельности.

Великiй философъ и натуралистъ *Descartes* (*Cartesius*, 1596—1650) въ *Discours V* своей *La Dioptrique*, говоря объ изображенiяхъ въ нашемъ глазу отъ внѣшнихъ предметовъ, говоритъ <sup>1)</sup>: „qu'il se forme derechef une peinture 789 (см. рисунокъ), assés semblable aux objets V, X, Y, en la superficie interieure du cerveau qui regarde ses concavités. Et de là je pourois encore la transporter jusques à une certaine petite glande (судя по рисунку: gl. pinealis), qui se trouve environ le milieu de ces concavités, & est proprement la siege du sens commun“.

Такимъ образомъ, уже *Descartes*, въ первой половинѣ 17 столѣтiя, допускалъ въ мозгу извѣстный анатомическiй субстратъ для души и утверждалъ, что душа, или *sens commun*, помѣщается именно въ gl. pinealis.

Знаменитый англiйскiй анатомъ *Th. Willis* <sup>2)</sup> полагалъ, что если какая нибудь внѣшняя часть души—напр., какой нибудь органъ чувствъ,—затронута, то *impressio sensibilis* (напр., *species optica*), распространяясь внутрь, достигаетъ до *corpora striata*, и здѣсь уже происходитъ *perceptio sive sensus internus sensationis communis*; если это *impressio* проходитъ дальше черезъ *corpus callosum*, то за *sensus* слѣдуетъ *imaginatio*; если-же, наконецъ, *fluctuatio spirituum* достигаетъ *cortex* головного мозга, то оно производитъ въ корѣ отпечатокъ внѣшняго предмета и, будучи отражено оттуда, возбуждаетъ память о предметѣ. Это *sensibilis impressio* можетъ

<sup>1)</sup> *Oeuvres de Descartes*, publ. par Ch. Adam et P. Tannery, t. VI, *Discours de la Méthode & Essais. La Dioptrique. Des images qui se forment sur le Fonds de l'Oeil. Discours Cinquième*, pp. 128—129. Paris, 1902.

<sup>2)</sup> *Cerebri Anatome, Nervorumque Descriptio & Usus. Caput XI*, стр. 38. Amstelodami, M, DC, LXIV (1664)

отражаться назадъ отъ *corpora striata*, отъ *corpus callosum* и отъ коры мозга въ формѣ различныхъ *motus locales* и другихъ *actiones: appetitus* (стремленіе, понужденіе), *memoria*, *phantasia* etc. <sup>3)</sup>.

*De la Peyronnie* <sup>4)</sup>, въ первой половинѣ 18 столѣтія, на основаніи вскрытіи 16 новыхъ и старыхъ случаевъ заболѣваній головного мозга у людей, приходитъ къ слѣдующимъ выводамъ: 1) „que l'ame ne réside pas dans toute l'étendue de la substance du cerveau prise collectivement,—2) qu'elle (l'âme) ne reside non plus dans la glande pinéale,—3) que nous ne trouverons pas non plus l'instrument de ces fonctions dans les corps cannelés (*corpora striata*), quoiqu'un Anglois (*Th. Willis*) de grande reputation y ait placé le *sensorium commune*,—4) qu'il résulte des observations que nous venons de rapporter, que les fonctions de l'ame ne dépendent point du cervelet. de ses péduncules, de ses cordons, des *nates*, des *testes*, de la glande pinéale, des corps cannelés, des couches, des nerfs optiques,..... ni enfin de la substance corticale du cerveau,..... il paroît, qu'on peut conclurre *que le corps calleux est le siège des fonctions de l'Ame*“.

Такимъ образомъ *De la Peyronnie* рѣшительно останавливается на *corpus callosum*, какъ на мѣстѣ пребыванія души.

Эти изслѣдованія, несмотря на фактическую сторону послѣднихъ, были, однако, въ началѣ прошлаго столѣтія отвергнуты французскими-же учеными.

Такъ *Magendie* <sup>5)</sup>, демонстрируя одного кролика, у котораго вмѣстѣ съ полушаріями мозга была удалена *gl. pinealis*, говоритъ: „Si Descartes eût en l'idée de faire cette expérience, il n'eût pas émis une hypothèse à jamais absurde“ и показываетъ, что перерѣзка обѣихъ „гѣнъ де л'аме“, т. е. *taeniae thalamor. optic.*, не вызываетъ никакого движенія. Путемъ этихъ несложныхъ операцій и изслѣдованій, онъ думаетъ, что доказалъ ненужность *gl. pinealis* съ ея

<sup>3)</sup> *Cerebri Anatome Th. Willis'a* написана такою плохую латынью, что я долженъ былъ прибѣгнуть къ помощи многоуважаемаго коллеги, проф. *Лениуса*, чтобы хотя нѣсколько выяснитъ себѣ содержаніе того, о чемъ говорится въ этомъ мѣстѣ знаменитаго сочиненія.

<sup>4)</sup> *Observations, par les quelles on tâche de découvrir la partie du Cerveau où l'Ame exerce ses fonctions.—Memoires de Académie Royale des Sciences L'année 1741, p. 199. Paris, 1744.*

<sup>5)</sup> *Leçons sur les fonctions et les maladies du système nerveux. T. I. p. 201. Paris, 1841.*

pedunculi и taeniae talam. opt. для души, т. е. для душевныхъ от-  
правлений!

*Flourens*<sup>6)</sup> говорить: „Les lobes cérébraux concourant effective-  
ment, par tout leur ensemble, à l'exercice de leurs fonctions, il est  
tout naturel qu'une de leurs parties puisse suppléer à l'autre, que  
l'intelligence puisse conséquemment subsister ou se perdre par cha-  
cune d'elles. Et voila bien plus de raisons qu'il n'eu fallait pour pla-  
cer tour à tour le *siège de cette intelligence* dans chacune de ces par-  
ties, et pour l'exclure ensuite tour à tour de chacune. L'erreur con-  
sistait à ne considérer que tels on tels points donnés de lobes céré-  
braux, quand il fallait les considérer tous“. Далѣе онъ прибавляетъ,  
что всѣ эти пораненія мозга, болѣе или менѣе обширныя, доказы-  
ваютъ только то, „*qu'une lésion déterminée des lobes cérébraux, quel  
qu'en soit le siège, peut très bien, pourvu qu'elle ne dépasse pas cer-  
taines limites, coexister avec l'exercice de fonctions intellectuelles; tandis  
qu'il n'est aucune lésion de ces organes, quel qu'en soit le siège encore,  
qui, dès qu'elle dépasse certaines limites, puisse coexister avec ces  
fonctions*“.

Словомъ, не дѣлая никакихъ спеціальныхъ экспериментовъ,  
*Flourens* напередъ отказываетъ въ довѣрїи всѣмъ попыткамъ опре-  
дѣлить анатомическїи субстратъ души, и прежнимъ и будущимъ,  
потому что слишкомъ убѣжденъ, что „les fonctions intellectuelles“,  
какъ и другїя функціи мозга, не имѣютъ опредѣленнаго мѣста въ  
мозгу, а распределены по всему мозгу.

Такимъ образомъ, вопросъ о локализаци души, благодаря  
*Magendie* и *Flourens*'у, былъ снятъ съ очереди вопросовъ, подле-  
жащихъ экспериментальному разрѣшенію.

Между тѣмъ еще *G. R. Treviranus*<sup>7)</sup> говорить: „Die innige  
Vereinigung aller ungleichartigen Hirnorgane unter sich und mit der  
im Innern der Hirnmasse über der grauen Hervorragung des Trich-  
ters liegenden Ansammlung von Mark vermittelt des Gewölbes und  
der sich nach allen Seiten erstreckenden Fortsätze dieser Masse giebt

<sup>6)</sup> Recherchés expérimentales sur les Propriétés et les Fonctions du sy-  
stème nerveux etc. Séc. ed., § VI: Détermination du siège de l'âme, pp. 264—265.  
Paris, 1842.

<sup>7)</sup> Biologie oder Phylosophie der lebenden Natur etc. Bd. VI, Abth. 1.  
стр. 161. Göttingen, 1821.



einen Grund zur Erklärung der Einheit des Bewusstseyns bey aller Mannichfaltigkeit der Empfindungen und zur Beantwortung der Frage: Wie ein Eindruck auf einen einzelnen Sinnesnerven Erinnerungen, Gefühle und willkürliche Handlungen veranlassen kann, die sich auf Gegenstände von ganz verschiedener Beschaffenheit beziehen“?

Теперь обратимся къ паталогоанатомическимъ наблюдениамъ неврологовъ.

Уже *Sir Everard Home* <sup>8)</sup> сообщаетъ въ началѣ прошлаго столѣтія слѣдующія свои наблюденія относительно вліянія частичнаго давленія на функціи мозга: „Although the quantity of water may be so much increased without material injury to the functions of the brain when the skul is not ossified, yet after that period even a few ounces in the lateral ventricles has been known to produce so much undue pressure, as to bring on head-ache, general uneasiness, a sensation as if the head were too large, loss of spirits, convulsions, loss of memory of recents events, idiotism, insensibility, and death“.

„Blood in the lateral and third ventricles was attended by repeated fits of vomiting and coma“.

Лобная кость была значительно утолщена и давила „on both of the anterior lobes of the brain“, и при этомъ наблюдались: „heaviness, loss of memory, depression of spirits, bordering on idiotism“.

Опять въ другомъ случаѣ, лобная кость и одна изъ паріетальныхъ утолщены до трети дюйма и производили давленіе „on the anterior lobes of the brain, both anteriorly and laterally, with thickening of the pia mater, spasme in the lower extremities, and total loss of memory, so that the person did not know what he had done a few hours before: although in other respects in health“.

„A deep wound into the right anterior lobe of the brain, attended with inflammation and suppuration, produced no sensation whatever; the senses remained entire, and the person did not know that the head was injured“.

*F. W. Hagen* въ своей статьѣ: *Psychologie und Psychiatrie*, говоритъ <sup>9)</sup>: „Die Bewusstlosigkeit tritt in solchen Fällen immer ein,

<sup>8)</sup> Observations on the Functions of the Brain. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1814, Part II, p. 469. London.

<sup>9)</sup> R. Wagner's Handwörterbuch der Physiologie etc. Bd. II, стр. 705. Braunschweig, 1841.

wenn der drückende Körper eine solche Lage und Ausdehnung bekommt dass er gegen den Mittelpunkt des Gehirns drückt“.

Далѣе, патологоанатомическія наблюденія различныхъ нейропатологовъ, съ самаго начала и по настоящее время, приводятъ къ тому-же заключенію, а именно: что стойкія измѣненія стѣнокъ третьяго (infundibuli) и боковыхъ желудочковъ мозга, --наконецъ, опухоли и кровоизліянія въ эти поля пространства ведутъ къ продолжительной потерѣ сознанія, къ сопорозному состоянію и къ coma, изъ котораго возврата къ нормальнымъ психическимъ отправленіямъ уже не бываетъ. Впрочемъ Prof. *H. Nothnagel*, въ своей *Topische Diagnostik etc.* (Berlin, 1879), говоритъ (стр. 508): „Weniger im Interesse der Diagnose, als vielmehr der Vollständigkeit wegen erscheint es uns wünschenswerth, der Betheiligung der Ventrikel, wie sie bei einigen Processen sich ereignet eine besondere Besprechung zu Theil werden zu lassen“, и дѣйствительно, разсмотрѣвъ относящіяся сюда исторіи болѣзни, приходитъ къ выводу, что постоянныхъ и характеристическихъ явленій при кровоизліяніяхъ въ боковые желудочки нѣтъ.

Относительно пораженія *hypophysis cerebri, tuberi cinerei, corporii* и *corpore callosi* въ новѣйшей литературѣ имѣются слѣдующія указанія.

*V. Horsley* <sup>10)</sup> удалялъ у 2-хъ собакъ *gl. pituitaria*. Собаки жили 5--6 мѣсяцевъ и не обнаруживали никакихъ болѣзненныхъ симптомовъ.

*G. Vassale* ed *E. Sacchi* <sup>11)</sup> разрушали у собакъ и кошекъ *hypophysis cerebri per os*; въ лучшихъ случаяхъ животныя погибали чрезъ 10--46 дней при явленіяхъ апатіи, сонливости, шаткой походки, хроническихъ и тетаническихъ судорогъ и проч.

*Friedmann* и *Maass* <sup>12)</sup> экстерпировали у кошекъ *hypophysis* и не нашли никакихъ измѣненій.

<sup>10)</sup> *Modern Pathology of the central nervous System. The Lancet, 1886. № 1.* Цитировано по *Neurol. Centralblatt.*

<sup>11)</sup> *Sulla distruzione della ghiandola pituitaria. Revista Sperim. di frenatria etc. 1892, Vol. XVIII.* Цит. по *Neur. Cent-blatt.*

<sup>12)</sup> *Zur Totalexstirpation des Hypophysis. Neur. Cent-blatt, 1900, стр. 1037.*

*Д-ръ Саковичъ* <sup>13)</sup> поражая *tuber cinereum* или сверху, приподнимаемая у животного *lobi frontales*,—или снизу, трепанируя *sella turcica*,—или прямо разрушая иглою, замѣчалъ повышеніе температуры до 43°C.

*Richard Schulz* <sup>14)</sup> сообщаетъ объ одной гліомѣ *gl. pinealis s. conarium*. Пользуясь этимъ случаемъ онъ сопоставляетъ 8 извѣстныхъ въ литературѣ случаевъ опухолей этой железы и изъ этого сопоставленія выводитъ слѣдующее заключеніе: „wir können Tumoren dieser Stelle höchstens muthmaassen, wenn bei intensivem Hinterkopfschmerz keine Lähmungserscheinungen, keine Sensibilitätsstörungen bestehen etc.“.

*Ph. Zenner* <sup>15)</sup> сообщаетъ объ овальной ( $1\frac{1}{4}$  на  $1\frac{3}{4}$  дюйма) опухоли *gl. pinealis*, обусловившей *hydrocephalus int.* При жизни наблюдалась первоначально боль въ затылкѣ, а затѣмъ уничтоженіе зрѣнія и упадокъ психики.

*Ransom* <sup>16)</sup> говоритъ объ опухоли *corporis callosi*. Наблюдалось психическое разстройство и разстройство зрѣнія. Опухоль началась по срединѣ *corporis callosi* и выросла въ желудочки.

*Zingerle* <sup>17)</sup> сообщаетъ о случаѣ саркомы *corporis callosi*, начавшейся отъ правой *taenia talami opt.* При жизни наблюдались слабоуміе, слѣпота и *Balkenataxie*.

*Dr. Voegele* <sup>18)</sup> сообщаетъ о психическомъ заболѣваніи и физической слабости вслѣдствіе опухоли, исходящей изъ *hypophysis cerebri* и давящей на *lobi frontales*.

И, наконецъ, *A. Giannelli* <sup>19)</sup>, на основаніи сопоставленія многихъ исторій болѣзни, сопровождавшихся вскрытіями, приходитъ къ выводу, что при неоплазмахъ въ фронтальной части мозга, по

<sup>13)</sup> Ueber den Einfluss des Tuber cinerei auf die Temperatur der Thiere. Neur. Cent-blatt, 1897, стр. 520.

<sup>14)</sup> Tumor der Zirbeldrüse. Ibidem, 1886, стр. 439—445 и 500.

<sup>15)</sup> A case of tumor of the pineal gland. Цитир. по Neur. Cent-blatt, 1898.

<sup>16)</sup> On tumour of the corpus callosum. Brain, 1895. Цитир. по Neur. Cent-blatt, 1896.

<sup>17)</sup> Zur Symptomatik der Geschwülste des Balkens. Jahrbuch f. Psychiatrie und Neurologie, 1900, XIX, стр. 367. Цитир. по Neur. Cent-blatt, 1903.

<sup>18)</sup> Beitrag zur Kenntniss der Stirnhirnerkrankungen. Neur. Cent-blatt, 1898, стр. 225.

<sup>19)</sup> Gli effetti diretti ed indiretti dei neoplasmii encefaliti etc. Цитир. по Neur. Centralblatt, 1897.

преимуществу, наблюдаются психическія заболѣванія съ измѣненіемъ характера больного.

Недавно, въ Кіевскомъ военномъ Госпиталѣ, лежалъ солдатъ сифилитикъ, сильно исхудавшій. Онъ лежалъ обыкновенно неподвижно и ничего не ѣлъ, если ему не давали насильно пищу. Что особенно поражало, такъ это полное отсутствіе интеллектуальной жизни. По временамъ сознание какъ-будто возвращалось, и онъ стоналъ отъ боли въ различныхъ мѣстахъ тѣла и отъ холода въ конечностяхъ. Такъ какъ онъ былъ старый сифилитикъ, то ему дѣлали ртутныя втиранія. Но вѣроятно это было уже слишкомъ поздно, и онъ умеръ. При вскрытіи оказалась, соотвѣтственно *laminae septi pellucidi*, небольшая опухоль съ красноватою окружностью -- по всей вѣроятности рассасывающаяся гумма.

Такимъ образомъ, пораженія *hypophysis cerebri*, по наблюденіямъ за послѣднія 20 лѣтъ, не дали никакихъ результатовъ; пораженія *coraegii*, какъ постоянный симптомъ, давали упорныя головныя боли въ затылкѣ; пораженія *corporis callosi* съ смежными частями впервые вызываетъ, какъ постоянное явленіе, психическое разстройство. Наблюденія *De la Peyronnie* дали ему такой же результатъ; почему онъ и былъ приведенъ къ тому результату, что душа, какъ совокупность всѣхъ психическихъ отравленій, помѣщается въ *corpus callosum*.

Принимая во вниманіе, что, съ одной стороны, пораженія *corporis callosi* и фронтальныхъ частей мозга обыкновенно бываютъ связаны съ психическимъ разстройствомъ и что, съ другой стороны, потеря значительныхъ мозговыхъ массъ при проникающихъ раненіяхъ лобной кости не оказываютъ, послѣ выздоровленія, обыкновенно никакого вліянія на психическія отравленія, нужно предположить, что по сѣдству съ *corpus callosum* и внутри фронтальной части мозга находятся ткани, поврежденіе которыхъ и вызываетъ разстройство высшихъ психическихъ функций. Слѣд., въ этомъ мѣстѣ головного мозга и нужно искать анатомическій субстратъ души.

Знаменитый знатокъ человѣческаго мозга, лейпцигскій профессоръ психіатріи *P. Flechsig*, въ 1894 году<sup>20)</sup>, на основаніи изслѣ-

<sup>20)</sup> Ueber ein neues Eintheilungsprincip der Grosshirnoberfläche.—Neurol. Centralblatt, 1894, S. 674.

дованія головного мозга внутритробрныхъ и новорожденныхъ младенцевъ, при чемъ онъ пользовался тѣмъ-же методомъ изслѣдованія, который ему раньше помогъ разобраться относительно пучковъ спиннаго мозга, былъ приведенъ къ построению слѣдующаго общаго плана головного мозга. По этому плану онъ раздѣлилъ всѣ кортикальные его центры на Sinnescentren и Associationscentren,—или, какъ онъ предлагаетъ въ своей Rectoratsrede <sup>21)</sup>, произнесенной въ Лейпцигской Universitätskirche 31 октября 1894 года, называть ихъ: Wahrnehmungscentren и Coagitationscentren.

Первые центры непосредственно соединяются проекціонными волокнами съ нижележащими центрами—центрами средняго мозга, продолговатаго и спиннаго, и при томъ: и центростремительными и центробѣжными волокнами. Сюда будутъ относиться центры конечностей, затылка, туловища, рѣчи, зрительные, слуховые и обонянія. Онѣ занимаютъ по пространству только треть всей поверхности мозга.

Вторые центры суть ассоціаціонные центры особеннаго строенія, и включены между первыми. Онъ различаетъ ихъ главнымъ образомъ три: передній или фронтальный, средній или инзулярный и задній или parieto-occipito-temporalis. Самый большой по протяженію—это задній. Вторые центры занимаютъ по своему протяженію почти двѣ трети поверхности мозга.

Первые центры суть мѣста по преимуществу возникновенія простѣйшихъ и самыхъ первыхъ психическихъ актовъ; вторые—суть мѣста болѣе сложныхъ и высокихъ психическихъ процессовъ.

Воспріятіе внѣшнихъ предметовъ и явленій, дѣйствующихъ на наши органы чувствъ, происходитъ въ Sinnescentren, или Wahrnehmungscentren, а болѣе сложная и высокая психическая дѣятельность—въ Associationscentren, или Coagitationscentren. Самую важную роль въ психической дѣятельности играетъ задній центръ; но центръ, дѣятельность котораго связана съ *представленіемъ собственной персоны, какъ дѣйствующаго существа*,—это *передній центръ*, размѣщающійся въ лобныхъ извилинахъ. Сильное развитіе этого центра особенно совпадаетъ съ душевной Superiorität людей. „Man

<sup>21)</sup> Gehirn und Seele. 2-te Ausgabe Leipzig, 1896.

wird hier u. A. auch an die Fähigkeit zu denken haben *die Aufmerksamkeit nach persönlichen Motiven, d. h. willkürlich zu lenken*, welche bei doppelseitiger Erkrankung regelmässig verloren geht“.

Такимъ образомъ, по мнѣнію проф. *P. Flechsig*, не всѣ Coagitationscentren, или органы мышленія, фізіологически равнозначущи, и центръ, связанный по преимуществу съ сознаниемъ и съ самосознаниемъ, есть фронтальный центръ.

Я не буду здѣсь много говорить о другой гипотезѣ строенія и функціи мозга, принадлежащей извѣстному испанскому гистологу, проф. *S. Ramon y Cajal*'ю. Критикуя гипотезу проф. *P. Flechsig*, единственно фізіологически возможную и дѣйствительно согласную съ хорошо наблюдаемыми фактами неуропатологii, онъ даетъ свою „теорію“<sup>22)</sup>, передать содержаніе которой вкратцѣ я не берусь; но въ основѣ этой „теоріи“ лежитъ совершенно фізіологически-невозможная неуронная гипотеза строенія центральной нервной системы, на что я уже имѣлъ случай указывать<sup>23)</sup>, обязанная своимъ происхожденіемъ фигурамъ съжившихся клѣтокъ центральной нервной системы, окрашенныхъ по способу проф. *C. Golgi*. Подобной гипотезы могутъ держаться только люди, непронзведшіе за всю жизнь ни одного хорошаго фізіологическаго эксперимента. Мнѣ, пожалуй, могутъ привести даже фізіологическіе факты, говорящіе въ пользу неуронной гипотезы — напр. наблюденія проф. *H. Ушинскаго*<sup>24)</sup>. Этотъ изслѣдователь, при раздраженіи заднихъ корешковъ спиннаго мозга лягушки, не получалъ въ обрѣзанномъ n. ischiadicus никакого рефлекторнаго отрицательнаго колебанія и объясняетъ это размыканіемъ нейроновъ (!). Но, вѣдь, это только его объясненіе и очень неудачное, потому что у той же лягушки, при сохраненіи мышцъ того же n. ischiadici, вѣроятно получались-бы рефлекторныя сокращенія мышцъ; а что онъ не получалъ никакого электрическаго колебанія на самомъ нервѣ, то это только доказываетъ вѣрность положенія, которое вытекаетъ изъ только-что цитированной моей работы, а именно: что, раздражая центроприводный

<sup>22)</sup> Studien üb. die Hirnrinde des Menschen. 5 Hft. Leipzig, 1906.

<sup>23)</sup> Электродвигательныя свойства мозга и сердца. Универ. Изв., 1904, стр. 12. Кіевъ.

<sup>24)</sup> Centralbl. für Physiologie, 1900. Bd. XIII, S. 6.

нервъ какой-нибудь неповрежденной клѣтки центральной нервной системы, мы не въ состояніи вызвать въ ней и въ центробѣжномъ ея нервѣ какое-нибудь электрическое колебаніе.

Прежде, однако, чѣмъ перейти къ изложенію самыхъ изслѣдова- ній, ради полноты обзора, посмотримъ, какъ дѣло стоитъ съ душою у философовъ и психологовъ.

Изъ метафизическихъ гипотезъ о сущности души наиболѣе, по моему мнѣнію, обращаютъ на себя вниманія двѣ: старая гипо- теза д-ра *Ed. Beneke* и самая новая, монадологическая д-ра *И. С. Продана*.

Первая гипотеза предполагаетъ <sup>25)</sup>, что „l'âme et les facultés primitives de l'âme (qu'a l'âme de voir, d'ouïr etc.): c'est la même chose. Les facultés de l'âme humaine constituent l'âme... qui sont innées de l'âme et d'où procèdent toutes les autres facultés et forces animiques.

Далѣе, эта гипотеза предполагаетъ душу постепенно разви- вающуюся и совершенствующуюся, также какъ развиваются другія ткани тѣла <sup>26)</sup>: „les forces ou les éléments que le corps s'approprie se fusionnent toujours avec celles fondées antérieurement, de façon que l'homogène vienne à l'homogène... La même chose est aussi va- lable... pour les éléments (les facultés et les impressions) de l'âme: l'homogène attire l'homogène et se fusionne en un tout... Le corps continue sa vie intime en prenant de l'externe ce dont il forme con- tinuellement de nouvelles facultés homogènes. Par conséquent, c'est totalement la même opération qui régit aussi dans l'âme... Il en ré- sulte que les deux espèces de forces (âme et corps) se développent suivant les mêmes lois naturelles“.

Далѣе *Ed. Beneke* спрашиваетъ <sup>27)</sup>: въ чемъ состоитъ фунда- ментальная разница между силами души и тѣла? Всѣ однородныя

<sup>25)</sup> Nouvelle Psychologie du Dr. Beneke, composé etc. par G. Rane, tra- duite de l'allemand etc. par J. Blockhuis. Gand, 1861, стр. 17, прим. Къ сожа- лѣнію, въ библиотекѣ Университета Св. Владиміра нѣтъ оригинальнаго сочи- ненія Dr. Eduard'a Beneke: Die neue Psychologie etc. Berlin, 1845, и потому я пользуюсь французскимъ текстомъ.

<sup>26)</sup> L. с., стр. 224 и 225.

<sup>27)</sup> L. с., стр. 228.

впечатлѣнія души, говоритъ онъ, сливаются въ одно цѣлое, и чрезъ это новыя производныя такого развитія, такого сліянія дѣлаются все яснѣе и яснѣе для сознанія; но, если эти производныя слагались-бы даже изъ милліоновъ слѣдовъ, то и тогда они *не* занимали-бы болѣе мѣста въ пространствѣ. Въ тѣлѣ же ткани, чрезъ постепенную агрегацію и присоединеніе однородныхъ частей, сливаются въ болѣе сложныя производныя, постепенно возрастающія по протяженію въ пространствѣ. Словомъ, по закону протяженія однороднаго, *душа, не занимая никакой протяженности, вырабатываетъ сознаніе, матерія же только увеличивается по протяженію въ пространство.*

Находя, что тѣло къ старости постепенно слабѣетъ и разрушается, тогда какъ душа постепенно увеличивается и крѣпнеть, онъ чувствуетъ себя вынужденнымъ допустить, что духъ, или душа, послѣ смерти тѣла, освобождается, и чтобы сдѣлать понятнымъ такое раздѣленіе души отъ разрушающаго тѣла, *Beneke* дѣлаетъ новое допущеніе, а именно: что тогда какъ тѣло состоитъ изъ элементовъ или силъ тѣлесныхъ матеріи, душа — изъ силъ совершенно отличныхъ, нематеріальныхъ <sup>28)</sup>.

Слѣд., *гипотеза Beneke*, до этого раздѣленія духа и тѣла, къ которому онъ былъ приведенъ на основаніи невѣрно имъ предположеннаго постояннаго наростанія нашего духа, включительно до смерти самаго организма, *можетъ быть признана вполне научною и отвечающей фактамъ.*

Вторая, монадологическая гипотеза, основанная еще *Leibniz*'омъ и въ послѣднее время повторенная съ нѣкоторыми видоизмѣненіями *Ch. Renouvier* и *L. Prat* <sup>29)</sup>, принадлежитъ, какъ было сказано выше, магистру философіи *И. С. Продану* <sup>30)</sup>.

По этой гипотезѣ всѣ тѣла, какъ неорганическія, такъ и органическія, въ томъ числѣ одушевленныя, состоятъ изъ элементовъ бытія—*монадъ*, этихъ простѣйшихъ элементовъ дѣйствительности, не имѣющихъ протяженія, слѣдовательно нематеріальныхъ, но реальныхъ. Изъ этихъ монадъ построены матеріальные, или физиче-

<sup>28)</sup> L с., стр. 245.

<sup>29)</sup> La nouvelle Monadologie Paris, 1899.

<sup>30)</sup> Организация души. Отрывокъ изъ новой эволюціонной монадологіи. Юрьевъ, 1905.



скіе, атомы. Въ предѣлахъ этихъ атомовъ монады также должны быть ограничены пространствомъ и временемъ.

Монады по источнику дѣятельности раздѣляются на *самодѣятельныя* и *викарныя*, или передаточныя, а по свойству дѣятельности распаются на *физическія* и *духовныя*.

Живыя существа: растенія, животныя и человѣкъ, состоятъ изъ *духовныхъ* монадъ двухъ родовъ: *формирующихъ*, „которыя изъ мертвой матеріи образуютъ отдѣльные органы и цѣлыя системы (организмы (?))“, и *управляющихъ*, „которыя управляютъ какъ этими формирующими монадами, такъ и органами и организмами“.

Субстратъ душевныхъ процессовъ *И. С. Проданъ* называетъ *душою*, а дѣятельность души обнаруживается въ актахъ этого субстрата <sup>21)</sup>.

Слѣд., душа человѣка есть очень сложная „*совокупность особыхъ духовныхъ монадъ съ особой духовной организаціей*“.... и „*каждый сознательный актъ, происходитъ отъ совокупной дѣятельности извѣстныхъ монадъ низшихъ порядковъ и дѣятельности „автомонады“ съ ея системой*“.

Эту систему духовныхъ монадъ души авторъ представляетъ себѣ слѣдующимъ образомъ: однородныя монады души объединены между собою въ „одно индивидуальное общество“ одной монадой высшаго порядка *архимонадою*; эта послѣдняя объединена съ другими архимонадами того-же порядка въ одну систему одною *архимонадою* другого высшаго, *второго порядка* и т. д. „Въ концѣ концовъ всѣ архимонады высшихъ порядковъ, а черезъ нихъ и всѣ системы и сообщества монадъ (какъ душевныхъ, такъ и тѣлесныхъ) подчинены *одной*—самой высшей монадѣ—*автомонадѣ*“. Такъ, по его мнѣнію, „объясняется *единство сознанія и всей души*“, ибо *дѣятельность автомонады обнаруживается актомъ самосознанія*.

Какъ видно монадологическая гипотеза души—особенно въ той новой формѣ, которую ей придалъ *И. С. Проданъ*,—представляетъ собою дальнѣйшій шагъ впередъ, по сколько она охватываетъ міръ вещественный и міръ духовный и не дѣлаетъ никакого принципиальнаго различія между силами души и тѣла.

<sup>21)</sup> Л. с., стр. 36, 37 и 38.

Но объ названныя гипотезы не затрогиваютъ, однако, вопроса о мѣстѣ проявленія духовныхъ силъ въ мозгу совершенно.

И такъ, простѣйшіе и первые психическіе акты—ощущенія внѣшнихъ раздраженій органовъ внѣшнихъ чувствъ,—имѣютъ мѣсто въ *Sinnescentren*, или *Wahrnehmungsentren*, *Flechtsig'a*, и съ этихъ ощущеній начинается психическая дѣятельность; напротивъ, всѣ болѣе сложные психическіе процессы, связанные съ ассоціаціей различныхъ примитивныхъ ощущеній и представленій, съ запоминаніемъ ихъ, съ сужденіемъ и т. д., имѣютъ, повидимому, мѣсто въ остальныхъ кортикальныхъ центрахъ—въ *Associationscentren*, или *Coagitationscentren*,—въ *Denkorgane Flechtsig'a*.

Большинство этихъ психическихъ процессовъ встрѣчается въ двухъ состояніяхъ: сознательномъ и безсознательномъ, смотря по тому проходятъ-ли они чрезъ наше сознание, т. е. направляемъ-ли мы на нихъ вниманіе, или нѣтъ.

Гдѣ-же помѣщается сознание, съ какимъ мѣстомъ мозга связано его отправленіе? Или, быть можетъ, оно распредѣлено довольно равномерно между всѣми кортикальными центрами мозга, между всѣмъ сѣрымъ веществомъ головного мозга, на долю котораго выпадаетъ роль психическихъ центровъ, какъ это предполагалъ *Flourens*? Наблюденія прежнихъ авторовъ, а также проф. *Flechtsig'a* и д-ра *Giannelli*, говорятъ, напротивъ, что сознание помѣщается гдѣ-то въ переднихъ частяхъ мозга, кнутри отъ фронтальной доли. И, наконецъ, несомнѣнно, что все говоритъ за единство сознанія „bey aller Mannichfaltigkeit der Empfindungen“ (*Trevisanus*)—за то, что оно должно помѣщаться въ какомъ-нибудь непарномъ мѣстѣ мозга, соединенномъ со всѣми психическими кортикальными его центрами.

Посмотримъ, теперь, какія-же ткани имѣются въ мозгу, которыя не принадлежали бы уже къ такимъ тканямъ, отправленіе которыхъ болѣе и менѣе извѣстно, и которыя были-бы въ тоже время непарны?

Таковыми тканями являются, прежде всего, сѣрыя массы тѣла *fornicis* и, затѣмъ, развѣтвленія, образуемая его *columnae, crura* и *taeniae*. Къ двумъ послѣднимъ относятся: кпереди, *septi pellucidi*,

отростки, загибающіеся кольцеобразно снаружи и по периферіи *septa pellucida*,—большіе конусообразные отростки, вершиною обращенные впередъ и лежащіе въ верхней половинѣ *septa pellucida*,—и меньшіе, проходящіе по нижней половинѣ *septa pellucida*, при чемъ и тѣ и другіе направляются къ *genu corporis callosi*; далѣе, снаружи—*taeniae semicirculares s. striae corneae*, залегающія между *nucleus caud.* и *talamus opt.* съ каждой стороны; затѣмъ, къади—*taeniae talam. opt., crura post.*, идущія къ *cornu Ammonii*, и заключенный между ними *psalterium*; наконецъ, къади и книзу—*crura ant. et columnae*. Сюда-же будутъ относиться стѣнки *tuberis cinerei* и нервныя части *hypophysis cerebri et conarii*.

Связь всѣхъ этихъ *crura* и *taeniae fornicis* съ кортикальными центрами—этими послѣдними этапами физиологическихъ процессовъ и началами психической дѣятельности,—пока почти вовсе неизвѣстна; съ другой стороны, строеніе *fornicis*, стѣнокъ *ventriculi quinti*, *tuberis cinerei* и нервныхъ частей обѣихъ железъ мозга также извѣстно лишь въ самыхъ общихъ чертахъ.

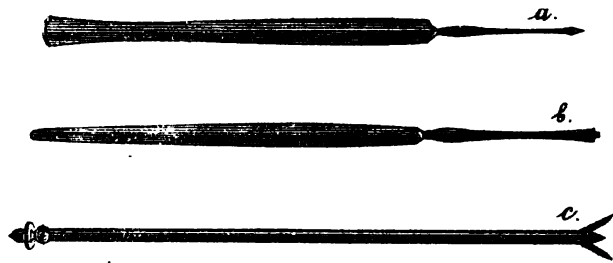
Вотъ нѣкоторые изъ опытовъ, произведенныхъ мною надъ лягушками, кроликами и собаками, которые, хотя и немногочисленны, но дали такіе опредѣленные результаты, подтвержденные вскрываніями, что я считаю возможнымъ уже теперь сообщить объ нихъ.

Если у лягушки, прикрѣпленной тесмою къ особенной деревянной держалкѣ навзничъ, разрѣзать слизистую оболочку нѣба, разрушить *hypophysis cerebri* и, чрезъ отверстіе въ *tuber cinereum*, войти иглою въ третій желудочекъ и постараться разрушить его нижне-переднюю стѣнку оставивъ нетронутыми большія мозговые гангліи, то животное видимо теряетъ волю и сознательное воспріятіе внѣшнихъ раздраженій. Если на него не дѣйствуютъ никакія достаточныя внѣшнія раздраженія, то оно остается сидѣть неподвижно неопредѣленно долгое время. Напротивъ, если животное раздражать, то оно обнаруживаетъ такія-же сложныя движенія, какъ и животное, лишенное полушарій головного мозга.

Кроликамъ, чрезъ отверстіе трепана, сдѣланное соотвѣтственно передней половины *corp. callosi*, первоначально вспрыскивались, при помощи провацовскаго шприца, въ полость боковыхъ и третьяго желу-

дочковъ, подъ *corpus callosum*, растворы *argenti nitrici*, *formalini* и *formalini* съ примѣсью китайской туши. Такое впрыскиваніе обыкновенно влекло за собою полную потерю сознанія и протрацію тѣла животнаго, въ какомъ состояніи оно оставалось отъ 3 до 24 часовъ, и, затѣмъ, не приходя въ себя, погибало.

У наркотизованныхъ животныхъ, кроликовъ и собакъ, трепанировался черепъ сверху, приблизительно соотвѣтственно передней половинѣ *corporis callosi* сбоку отъ *fissura long.* у кроликовъ и соотвѣтственно концу поперечной борозды *sulci cruciati* у собакъ, и, чрезъ отверстіе трепана, вводилась или игла съ копьевиднымъ концемъ (а), или Bernard'овская игла (б), или, наконецъ, особая плоская, около 3 мм. ширины, тупая игла, изъ которой, при нажатіи на верхній конецъ иглы, выдвигались два маленькихъ ножа, обращенные кверху и кнаружи своими остріями (с).



Эти иглы вводились отступя нѣсколько отъ *fissura longitudinalis cerebri*, чтобы не поранить *sinus long.*, чрезъ верхнюю поверхность мозга и наклоняя иглу нѣсколько кнутри. Когда конецъ иглы долженъ былъ быть въ *forix*, я, въ случаѣ послѣдней иглы, выдвигалъ ножи и старался разрушить или соотвѣтствующую половину *fornicis*, или весь *forix*. Въ другихъ случаяхъ я вводилъ иглы косо кнутри и старался провести иглу подъ *corpus callosum* въ противоположную сторону, съ цѣлью поранить *forix* и его *crura* съ противоположной стороны.

Изъ всѣхъ оперированныхъ подобнымъ образомъ животныхъ приведу слѣдующихъ двоихъ, потому что животныя перенесли операцию хорошо и совершенно оправились, т. е. извѣстныя явленія исчезли, а прочія остались стаціонарными. Животныя черезъ три мѣсяца были убиты, мозги ихъ закрѣплены формалиномъ и, затѣмъ, под-

вергнуты изслѣдованію, съ цѣлью констатировать произведенныя равенія.

Кролику, наркотизированному chloralhydrath'омъ, введеннымъ въ желудокъ, трепанированъ черепъ сверху и слѣва, отступя отъ срединной линіи въ сторону и нѣсколько кзади отъ передняго конца corporis callosi. Черезъ трепанированное отверстіе введена копьеобразная игла въ сильно наклонномъ направленіи кнутри, чтобы пройти подъ corp. cal. и поранить fornix и его развѣтвленія съ правой стороны.

Послѣ потери животнымъ сознанія, общей простраціи тѣла и разныхъ вынужденныхъ движеній, на другой день животное успокоилось, двигалось по *правому* кругу и обнаруживало при этомъ горизонтальный nystagmus головы, особенно глазъ; лѣвое ухо лежало на спинѣ.

При болѣе внимательномъ изслѣдованіи кролика, однако, оказалось, что онъ на *лѣвой* глазъ душевно слѣпъ. Предлагаемый животному овесъ и капустные листья слѣва—если на правый глазъ была наложена повязка,—не производилъ на него никакого впечатлѣнія, и онъ, очевидно, видимо не понималъ. При раскрытіи праваго глаза, онъ начиналъ обнюхивать показываемые ему капустные листья и, затѣмъ, быстро схватывалъ ее. На *лѣвомъ* ухе онъ также видимо былъ душевно глухъ. Маленькій кричащій музыкальный аппаратъ, поднесенный къ лѣвому уху, во 1-хъ, не вызывалъ никакого движенія въ этомъ ухѣ,—во 2-хъ, животное видимо слышало звукъ и волновалось, но вниманія никакого не обращало на звучащій предметъ. Напротивъ, тотъ-же звучащій аппаратъ, будучи поднесенъ къ правому уху, тотчасъ-же вызывалъ движеніе въ ухѣ, животное быстро поворачивало голову къ источнику звука и его обнюхивало. Относительно обонянія можно было только констатировать, что на всѣ пахучіе предметы, подносимые слѣва, животное совершенно не реагировало, а предметы справа тотчасъ-же обнюхивало. Лѣвыя конечности, шея и туловище *слѣва* были нечувствительны къ тактильнымъ раздраженіямъ; при болевыхъ раздраженіяхъ *слѣва* животное видимо чувствовало боль, беспокоилось, но на раздражаемое мѣсто не обращало никакого вниманія; напротивъ, болевое раздраженіе справа обращало на себя тотчасъ-же вниманіе животного, и оно устранилось.

Съ теченіемъ времени манежныя движенія и *nystagmus* мало по малу прошли и остались, какъ стационарныя явленія, душевная слѣпота на *лѣвый* глазъ, душевная глухота на *лѣвое* ухо, и, при всякомъ вниманіи животнаго къ какимъ нибудь звукамъ и зрительнымъ образамъ, животное реагировало, между прочимъ, правымъ ухомъ, а *лѣвое* оставалось лѣжать. Тактильная чувствительность *лѣвыхъ* конечностей и *лѣваго* уха, а равно обоняніе *слѣва*, оставалось пониженнымъ. Въ общемъ животное казалось совершенно нормальнымъ.

Вскрытіе мозга, произведенное черезъ 3 мѣсяца, показало (х. Fig. 1 и 2), что игла, введенная чрезъ лѣвое полушаріе, приблизительно соотвѣтственно задней границѣ *fornicis*, проникла подъ *corpus callosum* въ правый желудочекъ, поранила *fornix* справа и сзади, *nucleus caud. dex.* и, сначала, проникла въ направленіи нѣсколько кзади, въ *crus fornicis post. dex.*, идущій къ *cornu Ammonii*, а оттуда произвела своимъ копьемъ разрѣзъ кпереди и книзу, отдѣливъ *fornix* отъ его правыхъ заднихъ и боковыхъ продолженій, нѣсколько кзади отъ *commissura ant.*, и уперлась въ кость, недалеко отъ наружнаго края *substantiae perf. ant. dex.* Почти все тѣло *fornicis* справа цѣло; *n. opticus dex.*, *chiasma* и *tractus opt. dex.* были также совершенно нетронуты, и желудочки мозга совершенно свободны.

Собака была вспрыснута *morphium acet.*, и, затѣмъ, она еще подверглась полной наркотизаціи *chloroform*'омъ съ эфиромъ. Трепанированъ черепъ слѣва, приблизительно у наружнаго лѣваго конца *sulci cruciati*. Чрезъ трепанированное отверстіе, нѣсколько кзади отъ поперечнаго лѣваго конца *sulci cruciati* (Fig. 3, х, слѣва), введена *Bernard*'овская игла въ направленіи внизъ и нѣсколько кнутри, съ цѣлью поранить *fornix* слѣва.

Послѣдовала полная протрація тѣла, съ нѣкоторыми вынужденными движеніями, и потеря сознанія. На третій день животное начало лакать молоко и ходило по *лѣвому* кругу. Затѣмъ, при внимательномъ изслѣдованіи, у него, во 1-хъ, констатировалась душевная слѣпота на *правый* глазъ. Закрытіе лѣваго глаза и поднесеніе къ правому куску мяса или хлѣба не вызывало со стороны животнаго никакой реакціи, хотя животное несомнѣнно видѣло подносимый предметъ; при раскрытіи же лѣваго глаза животное тотчасъ-же

схватывало подносимый кусокъ. Во 2-хъ, у животнаго констатировалась душевная глухота на *правое* ухо. Звучащій предметъ, поднесенный къ правому уху, видимо воспринимался, животное безпокоилось, но не знало гдѣ искать безпокоившій его предметъ; напротивъ, тотъ-же звучащій предметъ, поднесенный къ лѣвому уху, тотчасъ-же обращать на себя вниманіе животнаго. Въ 3-хъ, у той-же собаки обоняніе на *правую* ноздрю и тактильная чувствительность *правой* половины тѣла и конечностей также были почти потеряны. Болевое раздраженіе *правой* стороны тѣла воспринималось животнымъ; но оно видимо не знало какое мѣсто раздражалось.

Съ теченіемъ времени обоняніе и тактильное чувство справа значительно возстановились, животное мало по малу перестало совершать монетныя движенія по лѣвому кругу, и, какъ стаціонарныя явленія, остались: душевная слѣпота на *правый* глазъ и душевная глухота на *правое* ухо. Въ остальномъ собака въ концу второго мѣсяца производила впечатлѣніе совершенно здороваго и веселаго животнаго, щенилась и съѣла своихъ дѣтенышей. Черезъ три мѣсяца, со дня операціи, собака была убита <sup>82)</sup>.

Вскрытіе, какъ это показываютъ фотографическія снимки съ разрѣзовъ мозга (*x*, Fig. 3, 4, 5, 6 и 7) <sup>83)</sup>, обнаружило, что игла, пройдя нѣсколько сзади лѣваго конца *sulci cruciati*, поранила *nucleus caud. sin.*, и сзади слѣва нѣсколько тѣло *fornicis*, разрушила слѣва всѣ его заднія и боковыя ножки и *taeniae. commisura ant. sin.*, лѣвую передненижнюю стѣнку третьяго желудочка и, не достигая просвѣта *tuberi cinerici* слѣва на 1 mm., уперлась въ осячвную кость, кваружн отъ *tractus opt. sin.* Опять таки почти все тѣло *fornicis*, за исключеніемъ его лѣвой задней части, было нетронуто; желудочки мозга свободны.

Такимъ образомъ мы получили кролика и собаку, которые производили впечатлѣніе животныхъ, у которыхъ удалены кортикальные центры: зрительные, слуховые, отчасти обонятельные, и

<sup>82)</sup> Кролика и собаку я демонстрировалъ нѣкоторымъ коллегамъ по Университету; мозги этихъ животныхъ хранятся въ физиологич. лабораторіи.

<sup>83)</sup> Всѣ фотографическіе снимки разрѣзовъ мозга кролика и собаки сдѣланы моимъ многоуважаемымъ коллегой, проф. Анатоміи человѣка Ф. А. Стефанисомъ и его ассистентомъ д-ромъ Овенюмъ, за что я здѣсь и приношу имъ мою сердечную благодарность.

центры, въ которыхъ животное получаетъ ощущенія отъ собственнаго тѣла (Körpergefühle): у собаки—слѣва, у кролика—справа. Такъ какъ, однако, означенные всѣ центры были цѣлы, а поврежденными оказались заднiя и боковыя сгуга и taeniae fornicis: слѣва у собаки и справа у кролика, то отсюда мы вправѣ заключить, что этимъ поврежденiемъ прервано было сообщенiе между кортикальными центрами: у собаки—лѣвыми, а у кролика—правыми. и тою частью мозга, функція которой тѣсно связана съ *сознанiемъ, свободной волей, памятью и чувствомъ* животного, откуда оно направляетъ вниманiе на данный безсознательный психическiй процессъ.

Слѣд., такимъ единичнымъ органомъ сознанiя животного и человека мы должны признать сѣрыя массы непарнаго тѣла fornicis, съ включенiемъ пятаго желудочка; сгуга и taeniae fornicis суть пути, соединяющiе органъ сознанiя съ кортикальными центрами—мѣстами совершенiя всѣхъ безсознательныхъ психическихъ процессовъ.

Прямо въ пользу перваго предположенiя, а именно: о значенiи тѣла fornicis, какъ органа сознанiя, говоритъ слѣдующiй, правда, несовершенный опытъ—въ томъ смыслѣ, что животное жило только пять дней послѣ операцiи.

Собака была наркотизована морфиемъ и хлороформомъ съ сѣриэфиромъ. Черезъ отверстiе трепана, животному сдѣланъ тупою плоскою иглою проколъ нѣсколько спереди праваго отростка sulci sciatici и проведена игла кнутри и въ противоположную сторону: когда игла уперлась съ кость, выдвинуты были ножи и игла нѣсколько поднята кверху.

Животное послѣ операцiи оставалось лежать сутки безъ всякаго движенiя и сознанiя, правая передняя нога была вытянута и напряжена. На другой день животное оставалось въ прежнемъ состоянiи. На третiй день ей попробовали насильно, черезъ раскрытый ротъ и желудочный зондъ, ввести нѣсколько молока. Будучи поставлено на ноги животное дѣлало нѣсколько шаговъ по лѣвому кругу; на зовъ и другiя раздраженiя совершенно не реагировало, обнаруживая совершенное отсутствiе сознанiя. Иногда, лежа и оставаясь по прежнему безъ сознанiя, оно приподнималось нѣсколько на переднiя ноги и издавало стоны или отдѣльные звуки.



Такъ, оно прожило еще два дня не приходя въ себя и ночью съ 5 на 6 день околѣло.

Вскрытіе мозга обнаружило (Fig. 8, 9, 10 и 11), что игла уже на высотѣ *corporis callosi* достигла срединной линіи и затѣмъ перешла нѣсколько влѣво, разрушивъ какъ разъ посрединѣ длинны тѣло *fornicis* слѣвой стороны. Далѣе игла проникла нѣсколько кзади, поранила *nucleus caudatus* слѣва, разрушила *commissura ant. слѣва* и вышла черезъ *substantia perfor. ant. sin.*, тотчасъ въ лѣвомъ углу *chiasma per. opt.* Желудочки мозга, за исключеніемъ ниже-передней части третьяго, были свободны отъ крови.

Слѣд., въ этомъ послѣднемъ случаѣ удалось разрушить самое тѣло *fornicis*, и животное оказалось въ состояніи полной потери сознанія, изъ какого состоянія уже оно не выходило до самой смерти. Такъ какъ животное прожило только пять дней, то можно предположить, что тѣло *fornicis* не функционировало въ цѣломъ, хотя непосредственно было разрушено по преимуществу слѣва.

Такимъ образомъ, этотъ опытъ служить подтвержденіемъ того, что тѣло *fornicis* дѣйствительно сосредоточиваетъ въ себѣ высшія психическія отправления, которыя, конечно, у низшихъ животныхъ, обладающихъ *Associationscentren* (по *Flechsig*'у) лишь въ незначительной степени, гораздо въ меньшей степени развиты, чѣмъ у высшихъ и человѣка.

Въ своихъ *Gehirn und Seele* проф. *P. Flechsig* говоритъ—а говоритъ онъ только о вещахъ, съ положительностью ему извѣстныхъ!—„nach der Meinung zahlreicher *neuerer* (мною подчеркнута) Forscher *nur die graue Rindensubstanz der Grosshirnlappen, die Grosshirnrinde* fähig Bewusstsein zu vermitteln. Dieser Satz ist indess *keineswegs* endgiltig erwiesen (стр. 12)“.

Далѣе, тотъ-же проф. *P. Flechsig* и *A. Giannelli* пришли, на основаніи сопоставленія описанныхъ ими случаевъ заболѣванія лобной доли, вблизи которой лежитъ *fornix* съ пятымъ желудочкомъ, къ тому выводу, что, именно, заболѣванія этой части бывають связаны съ психическимъ расстройствомъ, измѣненіемъ характера больного, ослабленіемъ и полною потерю сознанія. Если мы, теперь, припомнимъ, что иногда глубокія раны фронтальной доли, съ потерей мозгового вещества и нагноеніемъ, залѣчивались и проходили

для больныхъ почти совершенно безслѣдно, не влеча за собою никакого психическаго разстройства, то это указываетъ на то, что и въ случаяхъ Flechsig'a и Giannelli психическое разстройство зависило не отъ заболѣванія самой *lobus frontalis*, а отъ смѣжныхъ органовъ—именно стѣнокъ пятого желудочка, переднихъ ножекъ *fornicis* и главнымъ образомъ самага тѣла *fornicis*.

Наконецъ, многочисленныя наблюденія неуропатологовъ, сначала и по настоящее время, свидѣтельствуютъ о томъ, что стойкія измѣненія стѣнокъ пятого, третьяго и боковыхъ желудочковъ, равнымъ образомъ опухоли и кровоизліянія въ эти полныя пространства мозга неизбѣжно ведутъ къ продолжительной или окончателъной потерѣ сознанія, сопорозному состоянію и coma.

Мнѣ остается еще упомянуть о центрѣ болевыхъ ощущеній. Наблюденія надъ нервными больными, особенно надъ случаями *tabes dorsalis*, дѣлаютъ вѣроятнымъ, что пути, которые проводятъ болевое чувство, начинаются въ видѣ самостоятельныхъ пучковъ только въ спинномъ мозгу, а не въ периферической нервной системѣ. Многое говоритъ за то, что всѣ болевые пути центральной нервной системы собираются гдѣ-то около *conarium*, около *ganglia habenulae*, и *taeniae talamorum opt.* суть пути, по которымъ сознаніе реагируетъ на болевья раздраженія.

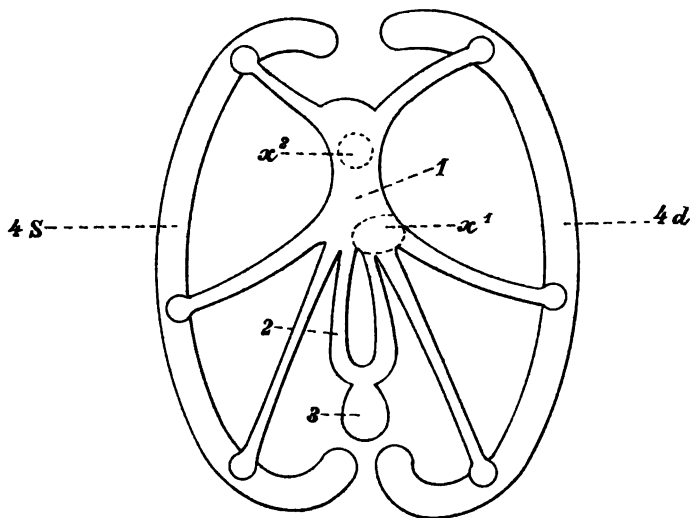
Съ этимъ вполне согласуются вышеприведенные случаи заболѣванія *conarii*, собранные д-ромъ *R. Schulz'*омъ. Хотя въ пользу этого предположенія я еще не привелъ никакихъ экспериментальныхъ данныхъ; но провѣрка его этимъ путемъ не представляетъ особыхъ трудностей.

И такъ, выводы, къ которымъ я былъ приведенъ на основаніи всего вышеизложеннаго, слѣдующіе.

Всѣ психическія отправления животныхъ и человѣка могутъ быть раздѣлены на безсознательныя и сознательныя. Безсознательныя психическія отправления совершаются въ корѣ большихъ полушарій, сознательныя—въ *fornix* съ пятымъ желудочкомъ и его различныхъ слага и *taeniae*. Органъ сознанія помѣщается въ самомъ *fornix* и въ пятомъ желудочкѣ (Fig. 12, 1); ножки и *taeniae fornicis*, соединяющія его съ кортикальными центрами большихъ полушарій (4 s, 4 d) и съ *conarium* (3).

Если сознание, или внимание, направляется на какой-нибудь кортикальный центръ, то процессы, совершающіеся въ немъ, познаются нами. Если внимание направляется въ какой-нибудь изъ центровъ *Denkorgane Flechsig'a*, въ которомъ нѣсколько разъ уже происходилъ процессъ запоминанія какого-нибудь предмета, обстоятельства и т. д., то, какъ говорятъ, въ памяти нашей возникаетъ этотъ предметъ, обстоятельство и т. д., и они опознаются нами, какъ уже бывшіе нѣкогда въ нашемъ сознаніи. Такъ, слѣд., про-

Фиг. 12.



исходитъ произвольное воспроизведеніе какихъ-нибудь образовъ, уже бывшихъ въ нашемъ сознаніи. Если я сознательно хочу что-нибудь, то я направляю внимание въ соотвѣтствующіе кортикальные центры волевыхъ движеній, и данное волевое движеніе совершается при участіи сознанія и т. д. Наконецъ, если вслѣдствіе какихъ нибудь условій раздражается центръ, залегающій гдѣ-то около *gl. pinealis*, и раздраженіе это распространяется по *taeniae thalamorum opt.* въ *fornix*, то оно вызываетъ въ насъ чувство боли, которое уже благодаря раздраженію мѣстныхъ тактильныхъ кожныхъ или иныхъ нервовъ, локализируется въ извѣстномъ мѣстѣ тѣла.

Слѣд., если разрушить съ одной стороны задніе, боковые и нижніе (*columna*) пути, соединяющіе *fornix* съ кортикальными центрами соотвѣтствующаго полушарія головного мозга (Fig. 12, *x¹*),

какъ я это сдѣлалъ у пережившихъ операцію кролика и собаки, то бессознательные процессы, возбуждаемые въ этихъ кортикальныхъ центрахъ со стороны органовъ чувствъ противоположной стороны, не воспринимаются животнымъ сознательно. Если же я наносилъ разрушеніе въ самомъ fornix (Fig. 12,  $x^2$ ), и животное переживало эту операцію, то у него наблюдалось полное отсутствіе сознанія, и въ такомъ бессознательномъ состояніи оно и погибало.

Заканчивая эту работу я долженъ сказать, что хотя мои опыты и недостаточно многочисленны, и многіе вопросы подлежатъ еще дальнѣйшему разрѣшенію, то по крайней мѣрѣ капитальный вопросъ объ анатомическомъ субстратѣ души въ общихъ чертахъ разрѣшенъ, и мною впервые выясненъ общій планъ анатомическаго субстрата бессознательныхъ и сознательныхъ психическихъ управленій.

За помощь при этихъ экспериментальныхъ изслѣдованіяхъ приношу сердечную благодарность моимъ ассистентамъ: приватъ-доценту д-ру *А. В. Леонтовичу* и д-ру Барону *Э. Э. Майделю*.

Кіевъ, мартъ. 1907.

## Объясненіе рисунковъ.

Fig. 1—фотографическіе снимки мозга кролика, разрѣзаннаго горизонтально на отдѣльные срѣзы, снятые сверху.

*x*—раненіе иглою съ копьеобразнымъ наконечникомъ; направленіе иглы сверху и слѣва (правый нижній разрѣзъ *x*) внизъ и вправо (лѣвый верхній разрѣзъ *x*),

1—fornix,

2—nuc. caudatus.

3—nuc. lentiformis,

4—thalamus opt,

5—cornu Ammonii,

6—commissura ant.,

7—commissura post.,

8—нижняя часть ventriculi tertii.

9—crus. post. fornices ad cornu Ammonii,

11—taeniae thal. opt.

Fig. 2—тѣ-же пять срѣзовъ мозга кролика, снятые снизу; значеніе *x* и цифръ—прежнее.

Fig. 3—верхніе горизонтальные, нѣсколько наклонные справа налѣво, срѣзы лѣваго полушарія мозга собаки;

*x*—мѣсто вкола иглы Bernard'a въ лѣвое полушаріе мозга, нѣсколько каади отъ конца лѣвой поперечной вѣтви sulc. cruciati; значеніе цифръ тоже, что и на предъидущихъ рисункахъ срѣзовъ мозга кролика.

Fig. 4—слѣдующіе два горизонтальныхъ срѣза лѣваго полушарія мозга собаки:

*x*—раненія, произведенныя игрою,

10—corp. callosum;

значеніе другихъ цифръ тоже, что и прежде

Fig. 5—слѣдующіе два горизонтальныхъ срѣза всего мозга собаки; значеніе *x* и цифръ тоже, что и прежде.

Fig. 6—слѣдующіе два горизонтальныхъ срѣза всего мозга собаки; значеніе *x* и цифръ тоже, что и прежде.

Fig. 7—слѣдующій срѣзъ мозга собаки; значеніе *x* и цифръ тоже, что и прежде

- Fig. 8—два горизонтальных сръза мозга собаки, прожившей около 5 дней. I *a*—видъ сверху, I *b*—видъ того-же сръза снизу, значеніе *x* и цифръ тоже, что и прежде.
- Fig. 9—слѣдующій сръзъ мозга той-же собаки, видъ—сверху; значеніе *x* и цифръ тоже.
- Fig. 10—слѣдующіе два горизонтальных сръза той-же собаки: I *a*—видъ сверху, I *b*—видъ того-же сръза снизу; значеніе *x* и цифръ прежнее.
- Fig. 11—слѣдующіе два горизонтальных сръза мозга той-же собаки: I *a*—видъ сверху, I *b*—видъ того-же сръза снизу; значеніе *x* и цифръ тоже; 12—*crus ant. fornisis*.
- Fig. 12—схематическій рисунокъ кортикальныхъ центровъ, *fornisis* и соединительныхъ путей между ними.

---

### ЗАМЪЧЕННАЯ ОПЕЧАТКА.

На стр. 16, въ послѣдней строкѣ, вмѣсто словъ: „septi pellucidi“  
должно быть —

---





## Памяти Васи́лія Васи́льевича Чиркова \*).

Въ ночь подь 1-е января текущаго года скончался профессоръ университета св. Владиміра *Василій Васильевичъ Чирковъ*. — Окончивъ на 23-мъ году жизни медицинскій факультетъ Московскаго университета, онъ вскорѣ былъ опредѣленъ ординаторомъ терапевтическаго отдѣленія Московской факультетской клиники, обязанности котораго исполнялъ въ теченіе шести лѣтъ. Вынужденный матеріальными условіями занять частное мѣсто, *Василій Васильевичъ* продолжалъ работать въ той же клиникѣ и спустя нѣсколько лѣтъ получилъ степень доктора медицины за представленную работу—„О смѣщеніи сердца и супсоре при плевритическомъ экссудатѣ“, изъ лабораторіи проф. *Фохта*. Получивъ званіе приватъ-доцента по кафедрѣ Терапевтической факультетской клиники Московскаго университета, онъ около 2-хъ лѣтъ занимался тамъ преподавательскою дѣятельностью, пока не былъ назначенъ въ 1886 году на освободившуюся кафедру терапевтической факультетской клиники университета св. Владиміра ординарнымъ профессоромъ. 1-го сентября 1903 года, за выслугою 30 лѣтъ государственной службы, онъ вышелъ въ отставку по прошенію.

*Ученыя работы Васи́лія Васи́льевича въ московскій періодъ* его жизни начинаются вслѣдъ за окончаніемъ имъ университета. Первой была „Работа о диабетѣ“ (Дисс. проф. Чернова и Учебникъ общей паталогіи—Пашутина. 1885). 2) Діагностика аневризмъ дуги аорты при легочной эмфиземѣ (Прот. Моск. Физ.-Медиц. Общества 1870). 3) Клиническія наблюденія надъ случаями отравленія соленой рыбой (Тамъ же. 1871). 4) О промываніи желудка (Моск. Врачебный Вѣстн. 1874). 5) О лѣченіи пневмоніи холодной водой (Прот. Моск.

---

\*) Читано въ Кіевскомъ физико-медицинскомъ обществѣ 25 янв. 1907 г.

Ф-Мед. Общ. 1873). 6) Случай сифилитической печени и лѣчение каломелемъ (Тамъ же. 1879). 7) Три случая сахарной болѣзни въ одной семьѣ (Тамъ же. 1880). 8) О синкопическихъ явленіяхъ при плевритическомъ эксудатѣ (Тамъ же. 1881). 9) Экспериментальное изслѣдованіе о перитонитѣ (Тамъ же. 1883). 10) Забѣтка о водобоязни. 11) Случай hyperidrosis у сифилитика (Тамъ же. 1884). 12) О самостоятельномъ (автохтонномъ) отравленіи въ послѣтифозномъ періодѣ (Труды М. Физ.-Мед. Общ. 1886). 13) Вышеупомянутая диссертация (Москва 1882).

Всѣ эти работы сохранили свое научное значеніе и теперь, а многія по взглядамъ, проводимымъ въ нихъ, какъ разъ соотвѣтствуютъ современнымъ воззрѣніямъ науки.

Въ Кіевѣ съ большой любовью онъ работалъ надъ такими въ то время мало изученными и трудно поддающимися выполненію изслѣдованіями, какими являются спектрофотометрическія опредѣленія содержанія гемоглобина. Его интересовали измѣненія крови вообще, а также измѣненія въ ней при Аддисоновой болѣзни, при маляріи и при миксѣдемѣ. Результатомъ изысканій его въ этомъ направленіи появились въ печати весьма цѣнныя работы.

1) Объ опредѣленіи содержанія гемоглобина въ крови спектрофотометрическимъ способомъ (Медиц. Обзор. 1890).

2) Количественное опредѣленіе гемоглобина при анэміи, хлорозѣ и другихъ патологическихъ случаяхъ спектрофотометрическимъ способомъ (Мед. Обзор. 1890).

3) Ueber die Blutveränderungen bei der Addison'schen krankheit (Zeitschrift für klinische Medicin. Bd. XIX).

4) Изслѣдованіе объ измѣненіяхъ въ крови и обмѣна веществъ при миксѣдемѣ, а также объ измѣненіяхъ въ крови (гемоглобинѣ) при febris intermittens (IX съѣздъ естествоиспытателей и врачей).

Очень интересуясь обмѣномъ веществъ въ организмѣ, Василій Васильевичъ съ большимъ вниманіемъ относился къ болѣзнямъ печени и напечаталъ между прочимъ работу—Изслѣдованіе печени при гипертрофическомъ циррозѣ (Медицина, 1894). Болѣзни почекъ и особенно урэмія всегда привлекали вниманіе Василя Васильевича; въ этой области его наблюдательность заставила обратить свои знанія къ изученію и описанію такъ называемыхъ безбѣлковыхъ отековъ. Первой изъ относящихся къ этому отдѣлу работъ было сообщеніе его на IV съѣздѣ русскихъ врачей.

1) О безбѣлковыхъ отекахъ (Труды IV съѣзда русскихъ врачей). Затѣмъ 2) статья „По поводу безбѣлковыхъ отековъ“ (Медицина. 1894). 3) Oedèmes vaso-moteurs sans albuminurie (Revue de

Médecine. 1895), и наконецъ, рядъ лекцій: 4) О сморщенной почкѣ. 5) Уремія. 6) Патогенезъ уреміи, и 7) Нефритъ съ кровавой мочей (Курсъ клиническихъ лекцій. Вып. I, 1891).

Я забылъ упомянуть, что Василій Васильевичъ считалъ гипертрофическій циррозъ печени болѣзью инфекціоннаго характера, а при болѣзняхъ почекъ, и при уреміи въ особенности, придавалъ огромное значеніе дѣйствию горячихъ ваннъ въ качествѣ метода, способствующаго выдѣленію изъ организма ядовито дѣйствующихъ на него веществъ \*).

Очень интересовали Василія Васильевича и легочныя болѣзни, туберкулезъ легкихъ—и подъ его редакціей переведена была на русскій языкъ извѣстная въ свое время работа *Röhle* „О чахоткѣ“; при чтеніи лекцій по поводу лѣченія послѣдней онъ всячески старался еще тогда приучать своихъ слушателей къ мысли, что борьба съ этой болѣзью возможна и будетъ успѣшна только тогда, если всѣ усилія у постели больного мы употребимъ на индивидуализацію безконечно разнообразныхъ формъ проявленія ея и, не возлагая большой надежды на лѣкарственное лѣченіе—къ которому онъ всегда относился съ большимъ разборомъ,—будемъ стараться создать въ каждомъ данномъ случаѣ наилучшую гигиеническую обстановку. Взгляды его на терапію чахотки изложены частью въ его докладѣ—О лѣченіи легочнаго туберкулеза по способу проф. *Koch'a* (Труды IV съѣзда русскихъ врачей).

Напечатаны еще работы: 2) О такъ называемыхъ бронхіальныхъ камняхъ (Медицина. 1891). 3) Плевритическій экссудатъ. 4) Рядъ лекцій о висцеральномъ Iues'ѣ (Курсъ клиническихъ лекцій, вып. I, 1891). Сюда же можно отнести и докладъ, сдѣланный имъ Кіевскому Физико-Медицинскому Обществу „О діафрагмальной астмѣ“.

Вообще нужно сказать, что научные интересы Василія Васильевича были очень широки и разнообразны, всѣ работы его отличаются большой точностью, строгимъ научнымъ основаніемъ и

\*) Кстати, между прочимъ, замѣтимъ, что онъ не обмолвился ни словомъ о томъ, что 3-й изъ описанныхъ въ послѣдней работѣ случаевъ безѣлочнаго отека, врачъ—явился въ клинику съ консиліума, на которомъ ему было объявлено, что въ груди его растетъ новообразование и что дни его отчены, а самъ больной съ отеками головы, шеи, верхнихъ конечностей и верхней трети туловища представлялъ такое ужасное зрѣлище, что мы въ началѣ усумнились, было, въ вѣрности діагноза своего учителя, блестяще оправдавагося впоследствии полнымъ излѣченіемъ больного.

стремленіемъ къ дальнѣйшему усовершенствованію науки. Ту любовь къ ней, которая заставляла его удѣлять для своихъ работъ и докладовъ Московскому Физико-Медицинскому Обществу много времени помимо своихъ ординаторскихъ обязанностей у такого строгаго и требовательнаго преподавателя, какимъ былъ проф. Захарьинъ,—онъ перенесъ и въ Кіевскій университетъ, гдѣ явился между прочимъ однимъ изъ дѣятельнѣйшихъ членовъ учредителей здѣшняго Физико-Медицинскаго Общества и однимъ изъ первыхъ предсѣдателей его. Дѣятельность Василя Васильевича въ немъ, помимо постояннаго и внимательнаго участія въ преніяхъ по поводу большей части дѣлавшихся въ немъ сообщеній, выразилась слѣдующими докладами и демонстраціями, кромѣ уже упомянутого выше, а именно: 5) Пилокарпинъ при Брайтовой болѣзни. 6) Къ вопросу о вазомоторныхъ параличахъ при инфекціонныхъ заболѣваніяхъ. 7) Болѣзнь Adams Stokes'a. 8) Успѣхи терапіи въ концѣ XIX столѣтія. 9) Двухъ ярусный, нагноившійся эхинококкъ печени: въ послѣднемъ онъ отмѣтилъ значеніе купслообразно приподнятой верхней границы печени при эхинококкѣ ея, въ отличіе отъ той же границы, при поддіафрагмальномъ абсцессѣ.

Наконецъ, содержаніе 2-го, готовившагося имъ выпуска клиническихъ лекцій должно было составиться изъ лекцій—о сердечныхъ больныхъ съ обращеніемъ особаго вниманія на лѣченіе паперсточной травой и каломелемъ, о скрытой аневризмѣ дуги аорты, остромъ и хроническомъ, перитонитахъ, о круглой язвѣ желудка и о брюшномъ тифѣ—болѣзней, изученію которыхъ съ особою любовью предавался Василій Васильевичъ и казуистическій матеріалъ ихъ былъ у него особенно богатъ и великъ.

Что касается дѣятельности его въ качествѣ преподавателя, то здѣсь надо подчеркнуть прежде всего то, что Василій Васильевичъ понималъ задачи очень важной для студента-медика общей клиники въ самомъ широкомъ смыслѣ этого слова. Безъ преувеличенія можно сказать, что все свое время онъ отдавалъ на служеніе клиникѣ,—однимъ изъ первыхъ начиналъ чтеніе лекцій и однимъ изъ послѣднихъ оканчивалъ въ виду наступленія вакаціоннаго времени. Не ограничиваясь официальными 6-ю часами въ недѣлю, онъ читалъ еженедѣльно двѣ вечернія лекціи, которыя посѣщали и многіе изъ студентовъ 5-го курса; по желанію слушателей часы и дни этихъ вечернихъ лекцій иногда мѣнялись, а случалось, въ виду того, что студенты были заняты уроками,—лекціи эти переносились и на праздничные дни. Если штатная лекція была пропущена по какому-нибудь неотложному дѣлу, по вызову въ судъ въ качествѣ эксперта,

напр., то взаємнѣ ея читалась лекція въ ближайшій празничний или другой нелекціонный день по выбору слушателей. Даже во время государственныхъ экзаменовъ Василій Васильевичъ читалъ студентамъ лекціи по вечерамъ, вмѣсто пропущенныхъ изъ-за экзаменовъ, несмотря на то, что послѣдніе иногда оканчивались около 4-хъ часовъ пополудни.

Кромѣ этихъ систематическихъ урочныхъ и бесплатныхъ вечернихъ лекцій онъ дѣлалъ ежедневные обходы больныхъ со студентами, очень часто и два раза въ день и, если тодько кураторы больныхъ были возлѣ послѣднихъ, то тутъ ех tempore, читались настоящія лекціи иногда далеко переходящія за предѣлы обычной двухчасовой.

И на лекціяхъ и во время своихъ обходовъ Василій Васильевичъ никогда не забывалъ учить студентовъ обращенію съ больными, уходу за ними, строго соблюдая при этомъ интересы самыхъ больныхъ, какъ въ смыслѣ состоянія ихъ здоровья, такъ и въ моральномъ отношеніи. Его знанію человѣка вообще и окружающей его обстановки въ частности, проявляемому имъ при изслѣдованіи картины болѣзни въ прошломъ, и этиологій ея нужно было только удивляться и случалось, что тотъ или другой пациентъ, пораженный свѣдѣніями профессора по своей специальности, когда онъ внимательнѣйшимъ образомъ собиралъ анамнестическія данныя, осторожно задавалъ вопросъ кто изъ его близкихъ родныхъ занимался профессіей больного.

Самая система лекцій была у него чрезвычайно разнообразной. Талантливый ученикъ такого выдающагося клинициста, какимъ былъ профессоръ Захарьинъ, Василій Васильевичъ не былъ, однако, слѣпымъ подражателемъ его, но, стараясь возможно полно и въ извѣстномъ порядкѣ изслѣдовать каждого больного, онъ отдавалъ должное и методу проф. *Nothnagel'*я и другихъ иностранныхъ и русскихъ клиницистовъ. Разбирая больного на лекціи онъ старался всегда привлекать къ участію въ разборѣ всю аудиторію и достигалъ этого, то назначеніемъ къ сложному случаю до шести со-кураторовъ, подвергая обсужденію аудиторіи высказанія ими предположенія, или вызывая, для провѣрки и опредѣленія сообщаемыхъ кураторами больного болѣзненныхъ измѣненій, случайныхъ студентовъ изъ числа присутствующихъ. Въ концѣ каждого учебнаго года Василій Васильевичъ обыкновенно посвящалъ нѣсколько лекцій разбору амбулаторныхъ больныхъ съ цѣлью подготовки слушателей къ переходу ихъ въ госпитальную клинику, съ гѣмъ отличіемъ, что все изслѣдованіе велъ кто-нибудь изъ выра-

жившихъ желаніе студентовъ, а разборъ его исправляла и дополняла вся аудиторія.

Не малымъ трудомъ со стороны Василя Васильевича являлась и оцѣнка исторій болѣзни, составляемыхъ студентами. Исторіи эти были необходимымъ условіемъ для зачета семестра и прочитывались сначала ординаторами, а затѣмъ поступали къ Василю Васильевичу, который читалъ ихъ отъ первой до послѣдней и отъ начала до конца каждую, и часто не соглашался съ оцѣнкой ординаторовъ. Въ этихъ исторіяхъ болѣзни онъ цѣнилъ больше всего умѣнье излагать строго логически свои мысли, при чемъ не разъ бывали примѣры, что получали отличную отмѣтку студенты, доказывавшіе свой собственный и несогласный съ мнѣніемъ ординатора или самого профессора взглядъ. Повятно, что строгія требованія, предъявляемые Василю Васильевичемъ къ студентамъ у постели больныхъ и къ исторіямъ болѣзни въ частности, иногда бывали причиной неудовольствія ихъ на него, но шереховатости эти исчезали еще до окончанія университета, и лучшимъ доказательствомъ справедливости моихъ словъ, помимо отзывовъ многихъ врачей, служить усердное посѣщеніе вечернихъ лекцій его студентами 5-го курса.

Интересъ къ лекціямъ покойнаго помимо формы и метода чтенія, возбуждало и умѣнье его будить въ своихъ слушателяхъ мысли, расширять ихъ умственный кругозоръ. Онъ часто старался освѣжать въ памяти студентовъ въ интересной и неутомляющей вниманія формѣ данныя общей патологіи, физиологіи, паталогической и описательной анатоміи. Однимъ изъ первыхъ указывалъ на то, что внутренняя клиника получаетъ все болѣе и болѣе точекъ тѣснаго соприкосновенія съ быстро развивающейся хирургіей и что поэтому приходится иногда самому терапевту настаивать на операціи и указать при этомъ хирургу не только общій планъ, но и то мѣсто, гдѣ онъ долженъ произвести операцію.

Не могу удержаться, чтобы не отмѣтить, что такія указанія со стороны Василя Васильевича не были голословными, такъ напр., въ одномъ неописанномъ имъ случаѣ (въ 1890 году) поставивъ въ клиникѣ діагнозъ метапневмонического абсцесса, прорвавшагося въ бронхъ, онъ предложилъ проф. *Θ. К. Борнаунтъ* удалить фокусъ оперативнымъ путемъ. Несмотря на то, что пробные уколы предъ началомъ операціи не дали гноя, онъ все-таки настаивалъ на ней. Отрицательная пробная пункція послѣ резекціи ребра не заставила его отступить и онъ потребовалъ разрѣза толстыхъ плевральныхъ наслоекъ; послѣднимъ былъ обнаруженъ гнойникъ, по

заживленіи котораго большая избавилась отъ мучившаго ее въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ кашля съ обильнымъ отдѣленіемъ гнойной мокроты и совершенно выздоровѣла.

Упорно пропагандируя мягкій желудочный зондъ, полузабытыя или отвергнутыя мушки и пьавки, онъ прилагалъ все это у постели больныхъ, но и по отношенію къ нимъ никогда не отказывался отъ свойственной ему строгой критической оцѣнки въ каждомъ данномъ случаѣ. Что касается новыхъ средствъ и мало изслѣдованныхъ или сомнительныхъ методовъ, то по отношенію, напр., къ прогремѣвшему и увлекшему міръ знаменитому туберкулину *Koch'a*, онъ былъ одинъ изъ немногихъ имѣвшихъ смѣлость высказывать слушателямъ свои сомнѣнія въ дѣйствительности значенія приписываемаго тогда этому реактиву.

Являясь горячимъ защитникомъ рациональнаго примѣненія минеральныхъ водъ, гидротерапіи и вообще физическихъ методовъ лѣченія, Василій Васильевичъ никогда не позволялъ своимъ слушателямъ забывать, что главной ареной будущей дѣятельности для большинства изъ нихъ будетъ деревня съ ея бѣднымъ, темнымъ населеніемъ и потому онъ всегда старался параллельно указывать на возможно простые и дешевые методы лѣченія, на умѣнье создавать при самыхъ примитивныхъ условіяхъ наиболѣе подходящую для даннаго больного гигиеническую обстановку.

Въ терапіи онъ былъ противникомъ употребленія весьма сложныхъ лѣкарственныхъ средствъ, настаивая на томъ, что хорошимъ надо считать врача, умѣющаго обходиться съ сравнительно несложнымъ арсеналомъ хорошо изученныхъ препаратовъ, руководясь при ихъ назначеніи показаніями болѣзни, а не „рекомендаціями“ различныхъ фирмъ и изобрѣтателей. Ставя выше всего терапію на строго этиологической почвѣ, онъ ограничивалъ иногда все лѣченіе назначеніемъ одного какого-либо средства въ простѣйшей его формѣ, строжайше, до мелочей, вавѣсивъ, предварительно жизненную обстановку больного. Драгоценны были и его діететическія предписанія, точно устанавливавшія весь режимъ больного и указывавшія на громадный опытъ его и знанія въ этой области.

При такомъ отношеніи къ клиникѣ и къ своему служенію въ ней нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что она, въ смыслѣ научнаго учрежденія, играла въ жизни его громадную роль и измѣнившіяся условія преподавательской дѣятельности, постоянныя перерывы въ ней не только весьма удручали его, но, повторяясь все чаще и чаще, вызвали въ немъ ослабленіе столь характерныхъ

для него энергій и бодрости духа, стимуловъ беззавѣтнаго служенія его наукѣ и человѣчеству.

Позволю себѣ указать также въ общихъ чертахъ и на заслуги его по отношенію къ клиникѣ въ качествѣ директора ея, должность котораго Василій Васильевичъ занималъ въ теченіе 17 лѣтъ. Какъ извѣстно онъ засталъ терапевтическую факультетскую клинику въ главномъ зданіи университета, недостатки котораго хорошо извѣстны. Относясь съ необыкновенной чуткостью ко всякимъ нарушеніямъ интересовъ клиники, онъ хлопоталъ объ открытіи новыхъ клиникъ, ревниво слѣдилъ за возведеніемъ зданія для своей клиники, старался обратить вниманіе на замѣченные имъ недостатки и, къ сожалѣнію, добился немногаго. За то внутренность клиники или вѣрнѣе каждая пядь ея, начиная съ этой аудиторіи, и кончая всѣми ея приспособленіями—вся была создана долгой, упорной борьбой, направленной къ изысканію вѣчно недостававшихъ на нужды клиники въ университетѣ средствъ. И какъ эта пріятная своей чистотой масляная окраска стѣпъ, такъ и эти керамиковые полы и паркеты выкроены были Васиціемъ Васильевичемъ изъ такъ назыв. платныхъ суммъ клиники. Самымъ больнымъ мѣстомъ ея въ глазахъ покойнаго была и невозможность хорошо обставить питаніе больныхъ уже по одному тому, что за дальностью разстоянія пища доставлялась больнымъ почти остывшей (не говоря уже о классическомъ въ смыслѣ отсталости опредѣленіи суточного пайка cadaго больного), а также и вѣчный недостатокъ дровъ, благодаря которому приходилось сравнительно рано закрывать клинику въ весеннемъ полугодіи.

Постоянной заботой Васиція Васильевича были—кабинетная и лабораторная обстановка, библіотека и архивъ клиники. Отпускаемыхъ по штату 300 рублей на все это, далеко не хватало даже на одну студенческую лабораторію, не говоря уже о книгахъ и кабинетныхъ приборахъ; клиническаго архива и библіотеки (теперь оба имѣютъ большую цѣнность)—до него не существовало. Всѣ эти расходы клиники и такіе, напр. какъ устройство и оборудованіе бактериологическаго помѣщенія, приходилось покрывать доходами отъ такъ называемыхъ платныхъ больныхъ клиники.

Обыкновенно такіе паціенты на амбулаторномъ клиническомъ приѣмѣ встрѣчались крайне рѣдко, и Василій Васильевичъ заполнялъ эти мѣста своими частными больными, принося такимъ образомъ и свои матеріальные интересы въ жертву клиникѣ и наукѣ

Наконецъ, аудиторія эта часто предоставлялась покойнымъ въ распоряженіе другихъ преподавателей; засѣданія физико-медицин-



скаго общества происходили въ ней благодаря любезному вниманію его.

Я говорю все это для того, чтобы указаніемъ на эти видимые слѣды, лишній разъ отгвннить ту крѣпкую моральную связь, которая существовала между Василиемъ Васильевичемъ и любимымъ дѣтищемъ его—клиникой, бывшей въ теченіе долгихъ лѣтъ ареной его дѣятельности и въ свою очередь одухотворявшей его. Все то лучшее, чему онъ такъ настойчиво училъ въ стѣнахъ ея, давно уже облеклось въ плоть и кровь самостоятельной дѣятельностью многихъ сотенъ учениковъ, прошедшихъ завѣты его клиники и предъ многими и многими изъ нихъ, при воспоминаніи о покойномъ, встанетъ образъ учителя, иногда можетъ быть и заблуждавагося по свойственному человѣчеству вообще несовершенству знаній, но всегда честно и безкорыстно служившаго на пользу дорогихъ ему науки и юношества.

Прив.-доц. *А. Своехотовъ.*



Пола, Паренцо, Велья), господствуют итальянцы, которым и принадлежит первенствующая роль какъ въ администраціи, такъ въ культурной и экономической жизни области. Въ Далмаціи сербо-хорваты въ числѣ до 630,000 составляютъ преобладающее население провинціи, но и здѣсь въ городахъ (главн. Задаръ, Сплѣтъ, Дубровникъ, Трогиръ, Шебеникъ, Которъ) имъ приходится защищать свою народность отъ культурныхъ притязаній итальянцевъ и притѣсненій центрального вѣнскаго правительства. Ничтожные по численности, отрѣзанные политическими границами, а отчасти и самой природой страны отъ прочихъ своихъ собратій, истрийскіе и далматинскіе сербо-хорваты посылаютъ въ вѣнскій рейхсратъ всего нѣсколько депутатовъ, которые, конечно, лишены тамъ возможности отстаивать съ успѣхомъ національные интересы своего народа.

Въ другой, мадыарской половинѣ монархіи, въ Транслейтаніи, сербо-хорватовъ ок. 2,910,000. Политическое положеніе ихъ не одинаково. Большинство (ок. 2,200,000), составляющее главное населеніе Хорватско-Славонскаго королевства (Хорватія, Славонія, бывшая Военная граница), пользуется значительной автономіей, обезпечивающей возможность болѣе свободной національной жизни. Здѣсь сербо-хорваты имѣютъ свой сеймъ, свои школы — низшія, среднія и высшія, національный университетъ, Академію Наукъ и другія просвѣтительныя учрежденія. Главный городъ королевства Загребъ имѣетъ значеніе политическаго и культурнаго центра преимущественно хорватовъ. Однако, до полной политической свободы въ Хорватско-Славонскомъ королевствѣ далеко. Успѣхъ политическаго и національнаго развитія королевства тормозится зависимостью мѣстнаго управленія сербо-хорватовъ во всѣхъ важнѣйшихъ вопросахъ отъ мадыарскаго правительства и будапештскаго сейма, въ который посылаются депутаты и отъ Хорватскаго королевства. Сверхъ того помѣхами къ достиженію болѣе полной политической и національной свободы служатъ постоянныя распри между сербами и хорватами, между православными и католиками, а равно необходимость борьбы съ культурными притязаніями нѣмцевъ (ок. 180,000) и мадыаръ (ок. 90,000), разсѣянныхъ по всѣмъ значительнымъ населеннымъ мѣстамъ королевства.

Меньшинство (ок. 710,000), живущее въ собственной Венгріи, именно въ Темешскомъ банатѣ, находится подъ суровымъ правленіемъ господствующей мадыарской народности и только благодаря нѣкоторымъ національнымъ учрежденіямъ (самостоятельная цѣрковь, церковно-народный соборъ, Сербская Матица, школы) съ трудомъ

отстаиваетъ свое существованіе. Главный политическій и культурный центръ этой части сербства—Новый Садъ (Neusatz). Другой городъ Карловцы—мѣстопробываніе сербскаго патриарха.

Въ особыхъ отношеніяхъ къ Австро-Венгерской монархіи находятся сербо-хорватскія области *Боснія* и *Герцеговина*, въ настоящее время имѣющія ок. 1,863,000 славянскаго населенія. По Берлинскому трактату 1878 г. онѣ предоставлены во временную оккупацию Австро-Венгрии, но эта оккупация продолжается и доселѣ, и обѣ провинціи фактически находятся въ обладаніи австро-венгерскаго императора. Онѣ управляются императорскими намѣстниками и австрійскими чиновниками въ направленіи, клонящемся къ ослабленію православной части населенія и къ широкой пропагандѣ среди него австрійско-нѣмецкой культуры. Главные политическіе и культурные центры провинцій—Сараево и Мостаръ.

Всего подъ владычествомъ Австро-Венгрии сербо-хорватовъ 5,551,760, т. е. ок. 64% всего народа.

Подъ турецкимъ владычествомъ остается сербовъ ок. 530,000, или 5% всего народа. Они разсѣяны въ новобазарскомъ и косовскомъ вилайетахъ (въ т. н. Старой Сербіи), въ скадарскомъ вилайетѣ и въ сѣверной Македоніи. Положеніе этой части народа особенно тяжело вслѣдствіе безправія и анархіи, царящихъ въ государствѣ Османовъ. Наиболѣе угрожаютъ здѣсь сербской народности албанцы, съ которыми болѣе или менѣе солидарны сербы-потурченцы.

Сербо-хорваты, живущіе въ качествѣ колонистовъ въ другихъ государствахъ (въ Америкѣ, Россіи, Румыніи, Болгаріи, Италіи) представляютъ слишкомъ ничтожныя по численности группы, чтобы имѣть какое-нибудь вліяніе на судьбы своего народа, сидящаго на своей коренной землѣ.

Въ виду указанной крайней политической раздробленности сербо-хорватовъ и постояннаго антагонизма между отдѣльными частями народа, имѣющихъ свои корни въ отдаленномъ прошломъ, трудно допустить, чтобы въ близкомъ будущемъ весь сербо-хорватскій народъ могъ достигнуть полной политической свободы и успѣлъ образовать собственное единое государство или по крайней мѣрѣ общій политическій союзъ всѣхъ своихъ разрозненныхъ частей.

## 6. Литература.

Указанныя выше въ I гл. (стр. 16—18) общія карты славянства Шафарика, Мирковича, Риттиха, Зарянка, Вергуна, Шимачка, и этнографическія карты: а) Балканскаго полуострова—А. Буэ, Лежана, Брадашки, Петермапа, Мекензи и Ирби, Киперта, Сакса, Плетершняка; б) Австро-Венгріи: Гейфлера, Чёрнига, Фикера, Киперта, ЛеМонье, Гатшки, Гомолки, Ретей, Балога, Гикмана, Де-Волана, Наберта, Ланханса.

*М. С. Милојевичъ*, 1) Етнографска мапа Срба и српских (југословенских) земаља. 1873. 2) Народности и земљописни преглед средног дела праве (Старе) Србије са етнографском мапом српских земаља у кнежевинама: Србији, Црној Гори, Бугарској, краљевини Румунији, Австро-Угорској и Турској царевинама. Београд. 3) Путопис дела праве (старе) Србије. Две кнѣге и 3 карте. Београд. 1872.

*Ј Драгашевичъ*, Carte ethnographique de la presqu'île des Balkans dressée d'après les documents historiques et philologiques. 1885.

*М. В. Веселиновичъ*, 1) Етнографска мапа Срба (Српство. 1886. 9); 2) Срби у Македонији и у јужној Србији 1888.

*Ѕ. Гопчевић*, 1) Die ethnographische Verhältnisse Macedoniens und Alt-Serbien's (Petermann's Geographische Mittheilungen 1889. III 59); 2) Alt-Serbien und Macedonien. Wien 1890. Русскій переводъ Спб. 1899. Съ картој.

*М. Андоновић*, Carte ethnographique serbe avec les limites méridionales la de Vielle Serbie et celles de la Serbie du Tsar Douchan. Ancienne édition des étudiants de l'Université de Belgrade revue et corrigée par M. And. Belgrade 1903.

*В. Карпић*, Српска земља са 1 картом. Београд. 1882.

*М. В. Веселиновичъ*, Гранични дијалекат међу србима и бугарима. Са 1 картом. Београд. 1-90.

Етнографска карта српских земаља израђена на основи језика, историје, обичаја и појезије. Београд. 1900.

*К. Реуцкер*, Makedonien, Alt-Serbien. und Albanien. Wien. 1902.

Другія етнографическія карты Македоніи и изслѣдованія по етнографіи Македоніи, указанныя въ главѣ III. § 8. стр. 79—81.

*В. Јајић*, 1) Jihoslovane. Obraz historicko-statistický 1864. (Riger, Slovnik naučný. Praha) 2) Historija književnosti naroda hrvat-

koga i srbskoga I. Staro dova. Zagreb. 1867. Русскій переводъ М. Петровскаго. Казань. 1871.

Jihoslovane. «Статьи въ чешскомъ изданіи» Ottův Slovník naučný. Praha.

*Н. Овсяннѣй*, Сербія и Сербы. Спб. 1897.

*А. Липовскій*, Хорваты. Спб. 1900.

*Josef Staré*, Die Kroaten im Königreiche Kroatien und Slawonien. Wien und Teschen 1882. (Die Völker Oesterreich-Ungarns Bd. X).

*Th. Stefanović*, Die Südslaven in Dalmatien und im südlichen Ungarn, in Bosnien und in der Herzegowina. Wien. 1882.

*Die Österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild*  
а) Ungarn. Band II. Die Serben in Süd-Ungarn, v. *A. Hadzics* Wien. 1891; б) Croatien und Slavonien. Wien 1902; в) Das Kustenland. 1891; г) Dalmatien. 1892; д) Bosnien und Herzegowina 1901.

*Dr. J. Цвијић*, Насеља српских земаља. Расправе и грађа. Београд. I. 1902. II. 1903. (Етнографски Зборник. Издаје Српска, Краљевска Академија кн. IV, V).

*Бдин*, Србинство у Европској Турској. Београд. 1903.

*Н. Стојановић*, Срби и Хрвати. Друго издање. Нови Сад. 1902.

*Джерѣх*, 1) О српском имену у западнијем крајевим нашег народа. У Бнограду 1901; 2) О српском имену у Старој Србији и у Маѣдонији. Београд. 1904.

*Uvicini (et Chopin)* 1) «Provinces Danubiennes (Univers Pittoresque» Т. 39); 2) Les Serbes de Turquie, études historiques, statistiques et politiques sur la Principauté de Serbie, le Montenegro et les pays serbes adjacents. Paris. 1865.

*А. О. Гильбердинг*, Боснія, Герцеговина и Старая Сербія. Спб. 1856. (Собраніе сочиненій. Т. III. Спб. 1873); 2) Западные Славяне (Собраніе сочиненій. Т. II).

*В. И. Ламанскій*, Сербія и южно-славянскія провинціи Австріи. Спб. 1864.

*В. В. Макушевз*, Задунайскіе и адриатическіе славяне. Спб. 1867.

*Јов. Гавриловичз*, Рѣчникъ географійско-статистичный Србіе. Бѣлградъ 1846.

*F. Kanitz*, Serbien. Historisch-ethnographische Reise-studien aus den Jahren 1859—1868 Leipzig. 1868. Новое изданіе 1900 г.

*М. Мишевић*, 1) Кнежевина Србија. Географија, орографија, гидрографија, топографија, археологија, историја, етнографија, стати-

стика, просвета, культура, управа. У Београду 1875; 2) Краљевина Србија. У Београду. 1884.

*Карић*, Србија. Опис земље, народа и државе. У Београду. 1888.

*Горџевић*, Serbien und Serben. Leipzig. 1888.

*А. Тута*, Serbien. Hannover. 1894.

*Coquelle*, Le royaume de Serbie. Paris. 1894.

*Kohn*, Serbien in geo-ethnographisch — administrativ-volkswirthschafflicher und kommerzieller Hinsicht. Zemblin. 1895.

*Gubernatis*, La Serbie et les Serbes. Paris 1898.

Статистички годишњак краљевине Србије. Кн. I—VI.

Статистика краљевине Србије. Кн. 23—24: Попис становништва у Краљевини Србији 31 Децембра 1900 г.

*G. Weigand*, Die Rumänen in Serbien (Globus T. LXXVII № 17).

*М. Радивојевић*, Путовања кроз Србију. Београд 1899.

Подробныя карты Сербскаго королевства изданы Сербскимъ генеральнымъ штабомъ, въ масштабахъ 1:200,000 и 1:750,000.

*П. Балмански*, (Агатоновић), Српски народ у Скопљанској епархији и његове школе у 1896—97 г. Београд. 1899.

*Бр. Нушић*, Косово. Опис земље и народа, издање со сликама. Нови Сад. 1902.

*Ал. С. Јовановић*, Враћа и њено Поморавље. («Дело» кн. XX).

*Ст. Новаковић*, Два дана у Скопљу. Белешке и размишљања с пута. Годишњица Николе Чупића XXV. 1906).

*А. Ровинскій*, Черногорія въ ея прошломъ и настоящемъ. Географія, исторія, этнографія, археологія, современное положеніе. Изданіе Императорской Академіи Наукъ. Спб. I. 1885. II. 1897.

*В. Караджичъ*, Montenegro und Montenegriener. Stuttgart, 1837.

*Е. Ковалевскій*, Четыре мѣсяца въ Черногоріи. Спб. 1841.

*А. Поповъ*, Путешествіе въ Черногорію. Спб. 1847.

*Wilkinson*, Dalmatia and Montenegro. London. 1848. Нѣмецкій переводъ. Leipzig. 1849.

*Paić und Scherb*, Crnagora. Eine umfassende Schilderung des Landes und der Bewohner v. Montenegro. Agram. 1851.

*J. Kohl*, Reise nach Istrien, Dalmatien und Montenegro. Dresden 1851, изд. 2-е 1856.

*X. Marmier*, Lettres sur l'Adriatique et le Montenegro 1854.

*Арх. Н. Душић*. Црна гора (Гласник Српског ученог Друштва. 1874. XL). Извлеченія въ кievскомъ «Славянскомъ Ежегодникѣ». 1878.

*G. Rasch*, Vom Schwarzen Berge. Dresden. 1875.

*Frilley et Jowan Wlahovitz*, Le Montenegro contemporain. Русскій переводъ: Современная Черногорія. Спб. 1876.

*Sp. Gorčević*, Montenegro und Montenegriner. Leipzig. 1877.

*К. Петковичъ*, Черногорія и Черногорцы. Спб. 1877.

*B. Schwarz*, Montenegro. 2-е изд. Leipzig. 1888.

*Бар. Каумбарсъ*, Замѣтки о Черногоріи. Спб. 1881.

*Hassert*, Reise durch Moutenegro, Wien. 1893.

*Л. Ненадовић*, Писма о Црногорцима. (Целокупна дела. кн. 16—19. Београд 1892—1896).

*J. Holeček*, Na Černou Horu a Černa hora koncem věku V Praze. 1899.

*K. Hassert*, Reise durch Montenegro im Sommer 1900 (Mittheilungen d. k. k. Geogr. Gesel. in Wien XLIV).

*Jensen*, 1) Montenegro (Ordoch bild. Stockholms X. 1901) 2) Ragusa (тамъ-же).

Подробныя карты Черногоріи изданы: 1) Русскимъ генеральнымъ штабомъ; 2) П. А. Ровинскимъ при указанномъ выше его монументальномъ сочиненіи о Черногоріи; 3) Военно-Топографическимъ Институтомъ въ Вѣнѣ. (1893 г. на 19 листахъ).

*Л. Березинъ*, Хорватія, Славонія, Далмація и Военная Граница. Спб. 1879.

*V. Klaić*, Opis zemalja u kojih obitavaju Hrvati. Zagreb. 1880—1883.

*Fr. Krauss*, 1) Die Vereinigten Königreiche Kroatien und Slavonien. Wien. 1889; 2) Sitte und Brauch des Südslawen. Wien. 1885.

*Hranilović Hir*. 1) Zemljopisni i narodopisni opis kraljevina Hrvatske, Slavonije i Dalmacije. Zagreb 2) Zemljopis Hrvatske. Zagreb.

*М. Цар*, Низ родно приморье. Сликe и утисци са Јадрана-Мостар. 1899.

*Пуко*, Срби у Угарској. I. II. Београд. 1883.

*Petter*, Das Königreich Dalmatien. Wien. 1857.

*H. Bidermann*, O etnografiji Dalmacie.

*Kukuljević-Sakcinskij*, Putne uspomene iz Hrvatske, Dalmacije i t. d. Zagreb 1873.

*Nož*, Dalmatien. Berlin 1870.

*De Nolhac*, La Dalmatie Paris. 1882.

*Jackson*, Dalmatia, The Quarnero und Istria. Oxford. 1887.



*J. Modrić*, La Dalmazia. Turino. 1891.

*M. Czerminski*, W Dalmacji i Czarnogórze. Tekst ozdobiony 75 rycinami, planem i dwoma markami. W Krakowie. 1896.

*Иванић*, Буџевци и шокци у Бачкој Барањи и Лици. Историја, етнографија, култура, друштвено, бројно и привредно стање, етничке особине. Београд 1899.

(*Matija Mažuranić*), Pogled u Bosnu ili kratak put u onu krajinu učinjen (1839—1840) po jednom domorodcu. U Zagrebu 1892.

*Jukić*, Zemljopis i poviestnica Bosne. Zagreb. 1851.

*G. Tömmel*, Beschreibung des Vilayet Bosnien. Wien. 1867.

*J. Roskiewicz*, Studien über Bosnien und die Herzegowina. Leipzig. 1868.

*Н. Поповъ*, Положеніе райи въ современной Босніи 1875. (Славянскій Сборникъ. Т. I. Спб.).

*A. v. Schweiger-Lerchenfeld*, Bosnien. Das Land und seine Bewohner. 2-te Auflage. Wien. 1879.

*A. Strausz*, Bosnien. Land und Leute. Historisch-ethnographisch-geographische Schilderung. Wien. I. 1882. II. 1884.

Bosniens Gegenwart und nächste Zukunft. Leipzig F. A. Brockhaus. 1886.

Bosnien unter österreichisch-ungarischer Verwaltung. Leipzig. 1886. (Verlag von Dunker und Humbolt).

*Joh. v. Asboth*, Bosnien und die Herzegovina. Reisebilder und Studien. Wien. 1887.

*Robert Munro*, Rambles and studies in Bosnia, Hercegovina und Dalmatia. Edinburgh und London. 1896.

*G. Capus*, A travers la Bosnie et l'Herzegovine Paris. 1896.

*H. Renner*, Durch Bosnien und die Herzegovina, Kreuz und Quer Berlin. 1897.

*J. Holeček*, Bosna und Hercegovina za okupace. V Praze. 1901

*B. Nikaschinovitsch*, Bosnien und die Herzegowina unter der Verwaltung der österreichisch-ungarischen Monarchie und die österreichisch—ungarische Balkanpolitik. I. Bd. Berlin. 1901. По сербски: Босна и Херцеговина. Београд. 1901.

*Харузинъ*, Боснія и Герцеговина. Очерки оккупационной провинціи Австро-Венгрии. Спб. 1901.

*Louis Olivier*, La Bosnie et l'Herzégovine 4<sup>o</sup>. Paris. 1901.

*André Barr*, La Bosnie-Herzegovine. Administration autrichien de 1878 à 1903. Paris.

*И. Александровъ*, Юдоль славянскихъ страданій. 25-тилѣтніе итоги австрійской оккупации Босны - Герцеговины (Славянскія Извѣстія. 1906. № 3).

Hauptresultate der Volkszählung in Bosnien und Herzegowina von 22 April 1895. Sarajevo. 1896.

*Baudouin de Courtenay*, Slovane v Italii (Slovanský sbornik III. 1884).

*Р. Ковачић*, Српске насеобине у јужној Италији. (Гласник српског ученог друштва 62. (1885).

Oesterreichische Statistik, herausgegeben von d. K. K. Statistischen Central-Commission, особ. Bd. LXIII.

*J. Vargy*, Volkszählung in den Ländern der ungarischen Krone im J. 1900. I. Budapest. 1902.

Другіе труды по этнографіи и статистикѣ Австро-Венгріи, указанные выше въ ч. I § 7 стр. 20—21.

*Вук Караџић*, 1) Ковчежић за историју, језик и обичаје Срба сва три закона 1849; 2) Живот и обичаја укупног народа српскога; 3) Српске народне песме; 4) Српски рјечник. У Бечу 1818. 3-е изд. у Београду 1898. Ново «државно издање Вукових списа» у Биограду съ 1893 г.

*Rajacsics*, Das Leben, die Sitten und Gebräuche der im Kaiserthum Oesterreich lebenden Südslaven. Wien. 1873.

*М. Медаковић*, Живот и обичаји Црногораца. Нови Сад. 1860.

*М. Миличевић*, Живот Срба сељака (Гласник српског ученог друштва XXII. XXXVII). Новое издание: Српски Етнографски Зборник кн. I.

*И. С. Јстребовъ*, Обычаи и пѣсни турецкихъ сербовъ въ Призренѣ, Ипекѣ, Моравѣ и Дибрѣ. Спб. 1886. 2-е изд. 1889.

*V. Jagić*, 1) Ein Kapitel aus der Geschichte der Südslavischen Sprachen (Archiv für Slavische Philologie. Bd. XVII. 1895); 2) Einige Streitfragen (Тамъ-же, XX, XXII).

*Даничић*, Разлике између језика српскога и хрватскога (Гласник IX).

*M. Rešetar*, Die Čakavština und deren einstige und jetzige Grenzen. 1891. (Archiv für Slavische Philologie XIII).

*A. Лукьяненко*, Кайгавское нарѣчіе. Кіевъ. 1905.

*Ol. Brock*, Die Dialekte des südlichsten Serbiens. (Kaiserliche Akademie der Wissenschaften. Wien. Schriften des Balkankommission. Linguistische Abtheilung).

*V. Oblak*, Macedonische Studien. Wien. 1896. (Sitzungsberichte d. k. Akademie der Wissenschaften Philol-histor. Cl.).

*A. Белић*, 1) Дијалекти источне и јужне Србије. Београд 1905. (Издание Сербской Королевской Академии); 2) Диалектологическая карта сербского языка. Спб., (Сборникъ по славяновѣдѣнію II. 1905).

*Мисирковъ*, О значеніи Моравскаго или Ресавскаго нарѣчія для современной и исторической этнографіи Балканскаго полуострова. (Живая Старина VII, 483).

*Т. Флоринскій*. Лекціи по славянскому языкознанію. Т. I. Кіевъ. 1895. (Сербо-Хорватскій языкъ).

**Главнѣйшія періодическія изданія, содержащія матеріалы, изслѣдованія и библиографическія указанія по этнографическому изученію сербо-хорватскаго народа.**

*Сербски Лѣтописъ* (съ 1825 г.), в послѣдствіи *Летопис Матице српске*. Новый Садъ.

*Гласник Дружтваи српске словесности* (съ 1847 г.), в послѣдствіи *Гласник српског ученог друштваи*. Бѣлградъ.

*Glasnik Matice Dalmatinske u Zadru*.

«Глас» Српске Краљевске Академије. Бѣлградъ съ 1887 г.

*Споменик Српске Краљевске Академије*. Бѣлградъ.

*Српски етнографски зборник*. Бѣлградъ.

*Rad Jugoslvaenske Akademije znanosti i umjetnosti*. Загребъ (съ 1867 года).

*Sbornik za narodni život i običaje Južnih Slavena*. Na sviet izdaje Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti. Загребъ (съ 1896 г.).

*Књижевник, Časopis za jezik i poviest hrvatskn i srbsku i prirodne znanosti*. Podporom Matice ilirske uredjuju i izdaju Dr. Fr. Rački, V. Jagić, J. Torbar. Загребъ. (1864—1866).

*Сербско-Далматинскій Магазинъ*. Задръ (1836—1867).

*Годишњица Николе Чуића*. Бѣлградъ (съ 1877 г.).

*Vijenac zabavi i pouci.* Загребъ (съ 1869).

*Јавор.* Лист за забаву, поуку и књижевност. Новый Садъ (1874—1892).

*Отаџбина.* Књижевност, наука, друштвени живот. Бѣлградъ. 1882—1892.

*Дело.* Лист за науку, књижевност и друштвени живот. Бѣлградъ. (съ 1893 г.).

*Бранково Коло.* Новый Садъ.

*Наставник.* Лист професорског друштва. Бѣлградъ.

*Просветни Гласник.* Бѣлградъ.

*Nastawni Vjesnik.* Zagreb.

*Glasnik zemaljskoga muzeja u Bosni i Hercegovini.* Сараево (съ 1886 г.).

*Босанска Вила.* Лист за забаву, науку и књижевност. Сараево. (съ 1886).

*Nada.* Sarajevo.

*Караџић.* Лист за српски народни живот, обичаје и предање. Алексинацъ (съ 1899 г.).

*Српски књижевни гласник.* Бѣлградъ.

*Братство.* Къиге Друштва Светог Саве. Бѣлградъ.

*Prosvjeta.* List za zabavu, znanost i umjetnost. Zagreb.

*Луча.* Књижевни лист. Цетинье.

## V.

**Словинцы (Словенцы).<sup>1)</sup>****1. Словинская область и ея границы.**

Словинцы—небольшой народъ, обитающій на западъ отъ сербохорватовъ, въ горной странѣ Штирійскихъ и Карнійскихъ Альповъ, Триглава и плоскогорья Краса (Карста). Приблизительно точно предѣлы земли словинцевъ обозначаются слѣдующей пограничной линіей. Начинаясь у Кота на лѣвомъ берегу Муры, недалеко отъ угро-штирійской границы, она направляется къ сѣверу отъ Дольней Лендавы черезъ Ходожъ къ С.-Готгарду на Рабъ, оттуда на ЮЗ. черезъ словинское село Горицу вступаетъ въ Штирію, у Радгоны переходитъ Муру, идетъ водораздѣломъ между Мурой и Щавницею, снова переходитъ Муру у Цмурка и, черезъ Гомилскую долину, между Лучанами и Арвежемъ по горѣ Реншнику, южнѣе Св. Ловренца и Событы достигаетъ хорутано-штирійской границы; въ Хорутани (Каринтіи) пограничная черта идетъ къ Лабоду на Дравѣ, черезъ Дубъ, С.-Мартинъ, св. Кольманъ, подымается на С. до Кнежа и Декши, захватываетъ поселенія св. Грегоръ, Теманъ, Варповесь, черезъ Госпосвятское поле, мимо Сморовчиць (нѣмецкій), Великака

<sup>1)</sup> Настоящее народное имя — *словенцы*. Другое названіе „словинцы“, болѣе распространенное въ русской ученой литературѣ, книжнаго происхожденія. Последнее, однако, предпочитается, такъ какъ производное отъ него прилагательное „словинскій“ устраняетъ возможность смѣшенія данной разновидности славянства съ угорскими словаками, которые образуютъ имя прилагательное отъ своего народного имени—*словенскій*, т. е. совершенно такъ, какъ и словенцы.

Дола и Порочиць направляется въ Целовецкій округъ къ Костаньѣ надъ Осоянскимъ озеромъ, между св. Ленартомъ и нѣм. Сухой (Zauschen), вдоль нижней Зилы, мимо нѣм. Топлицъ подъ Бѣлякомъ, по склону Доброшской плавнины черезъ с. Модринью, мимо нѣмецкаго Понтебла къ итальянской границѣ. Перейдя послѣднюю, линия захватываетъ Резьянскую долину, направляется черезъ Терчетъ, Св. Гору къ Кормину, гдѣ совпадаетъ съ границей Горицкой области; отсюда мимо селъ Мирникъ, Медона, Церово, черезъ Сочу, села Здравшину и Добердобъ, близъ Тержича достигаетъ недалеко отъ Дивина (у Штивани) морского берега; далѣе идетъ берегомъ моря, минуя Триестъ, имѣющій смѣшанное населеніе, и итальянскіе города Муджіа, Капо д'Истріа, Изола, Пирано, къ рѣкѣ Драгони, долиной Драгони, черезъ Пасьякъ и Елшане достигаетъ Крайна и направляется вдоль областной крайнской и штирійской границы на СВ. къ Коту на угро-штирійской границѣ, не захватывая лишь нѣсколькихъ селъ (Бояна, Марьинъ Долъ, Прелока, Храсть и нѣсколькихъ чакавскихъ поселковъ около Костаньевицы), лежащихъ на западъ отъ этой границы и заселенныхъ хорватами.

Такъ называемыхъ кайкавцевъ, живущихъ въ предѣлахъ Хорватіи и Венгріи, относимыхъ нѣкоторыми къ словинцамъ, правильнѣе считать разновидностью сербо-хорватскаго народа. (См. гл. IV § 3, стр. 87).

Такимъ образомъ, словинцы живутъ главнымъ образомъ въ числейтанскихъ провинціяхъ Австріи и отчасти въ Венгріи и Италіи. Именно, въ Австріи они занимаютъ весь Крайнъ, южныя части Штирії и Хорутаніи, Горицу, Градиску и сѣверную часть Истріи; въ Венгріи—части жупаній салатской, желѣзной и веспримской; въ Италіи—Резьянскую долину въ удинскомъ округѣ или т. н. Фріуль (по слов. Фурлявско), въ пяти уѣздахъ Видемской префектуры (Моджіо, Кремона, Тарченто, Чивидале, Санъ-Пьетро). Въ указанныхъ предѣлахъ площадь словинской области занимаетъ около 437 квадр. миль. За границами этой области немногочисленныя словинскія поселенія спорадически встрѣчаются въ нѣмецкой Штирії и Хорутаніи, а также въ Истріи южнѣе р. Драгони.

Въ старыя времена, на зарѣ славянской исторіи, словинцы занимали болѣе обширную территорію. Они населяли всю Хорутанію, всю Штирію, Ракусы (собств. Австрію) на правомъ берегу Дуная, часть Зальцбурга и Тироля. Объ этомъ свидѣлствуютъ какъ письменные историческіе памятники, такъ и сохранившіяся въ этихъ областяхъ, теперь уже занятыхъ нѣмцами, многочисленныя мѣстныя славянскія названія. Ранняя утрата политической

самостоятельности (VIII—IX в.в.) и подчинение сильнымъ сосѣдямъ-иноплеменникамъ вызвали постепенное уменьшение словинской территории, представляющей въ настоящее время тѣ скромные размѣры, какіе указаны выше.

Съ двухъ сторонъ, восточной и южной (въ Штиріи, Каринтіи и Истріи), словинцы сосѣдятъ съ родственнымъ хорватскимъ народомъ. Естественнымъ переходомъ и связью между словинскимъ и сербо-хорватскимъ языками служитъ кайкавское нарѣчіе. Съ остальныхъ сторонъ и на значительно большемъ протяженіи къ словинцамъ примыкають иноплеменные народы: на югѣ и юго-западѣ (Триестъ, Горица и Градиска)—итальянцы и фурляны, на сѣверо-западѣ и сѣверѣ (Хорутанія и Штирія)—нѣмцы, на сѣверо-востокѣ (въ Венгріи)—мадьяры. По отношенію къ нѣмцамъ идеальную границу составляетъ линія отъ Понтебла на хорутано-итальянской границѣ до Радгоны на штирійско-венгерской: на альпійскихъ кряжахъ словинцы переходять за эту границу, въ равнинахъ же уступаютъ нѣмцамъ. Нѣмцы, въ теченіе вѣковъ захватившіе обширныя земли, нѣкогда занятыя словинцами, продолжаютъ распространять свои колоніи и на нынѣшней словинской территоріи. Особенно численны эти колоніи въ Штиріи и Хорутаніи. Онѣ встрѣчаются здѣсь не только во всѣхъ болѣе значительныхъ городахъ, но кое-гдѣ и въ селлахъ. Главные центры политической и культурной жизни Хорутаніи и Штиріи—Цѣловець (Клагенбургъ, словинцевъ 7,17%), Мариборъ (Марбургъ, словинцевъ 17,32%), Целле (Цилли, словинцевъ 22,64%), не говоря уже о лежащемъ за предѣлами нынѣшней словинской территоріи Градцѣ (Граць, словинцевъ 1,16%), главномъ городѣ Штиріи, имѣютъ господствующее нѣмецкое населеніе. Наиболѣе словинской областью является Крайнъ (словинцевъ 94,24% по переписи 1900 г.), но и въ этой области, въ юго-восточномъ углу ея, имѣется большой нѣмецкій островъ—*Кочевье* (11 кв. миль съ 20 крупными поселками), а въ главномъ городѣ ея Люблянѣ (Лайбахъ) живетъ не мало нѣмцевъ (15,23% на 83,52% словинцевъ). Не только въ Штиріи и Хорутаніи, но и въ наиболѣе славянской Крайнѣ нѣмецкій языкъ играетъ первенствующую роль, какъ органъ высшей образованности, администраціи и общественной жизни. На западѣ, въ Горицѣ, Триестѣ и по морскому побережью такую же роль носителей высшей образованности по отношенію къ словинцамъ выполняютъ итальянцы, распространяющіе свои поселенія и свой языкъ на словинской землѣ. Терстъ или Триестъ—совсѣмъ итальянскій городъ, въ Горицѣ (Гѣрцѣ) и Градишкѣ господствующее населеніе фріульцы. Словинцы, живущіе въ собственной Венгріи,

стѣснены съ запада и сѣвера нѣмцами, а съ востока мадьярами. Каждая изъ этихъ народностей имѣетъ свои, разбросанныя тамъ-сямъ, поселки на словинской землѣ и стремится то къ политическому, то къ культурному господству въ странѣ.

## 2. Общія и частныя названія народа.

Древнее народное имя *словенцевъ* въ настоящее время не въ равной степени распространено на словинской территоріи. Оно держится преимущественно въ Штирии, Хорутани и Приморьѣ; но въ Крайнѣ, гдѣ особенно сильна словинская народность, простой народъ называетъ свой языкъ не *словенскимъ*, какъ въ другихъ поименованныхъ областяхъ, а „*краинскимъ*“. Въмѣсто общаго племеннаго имени употребительнѣе въ устахъ народа областныя названія: *краинны*, *приморны*, *корошны*, *штайерны*. Рядомъ съ ними живетъ множество частныхъ мѣстныхъ названій. Въ Хорутани, кромѣ общаго областного *корошны*, особенно извѣстны два названія: *зиллы* въ Зильской долинѣ (Gailthal) на р. Зилѣ; *рошаны* въ Рожнѣ (Rosenthal) по р. Дравѣ. Въ Крайнѣ, жители которой имѣютъ общее имя *краинны*, существуетъ еще рядъ частныхъ названій; а именно: 1) въ Верхней Крайнѣ—*горены*, въ сѣверо-западной, наиболѣе гористой части страны; *долинны* въ Кошенской долинѣ Савы; *бохинны* въ Бохинской долинѣ (Bohinj, Wochein); *блейны* въ блейскомъ уѣздѣ; *полянны*—въ другихъ болѣе низменныхъ частяхъ области; 2) въ Нижней Крайнѣ (т. е. восточной, лежащей въ бассейнѣ р. Грка) —*доленны*, въ долинѣ р. Грка, *горяны*, въ наиболѣе гористой части страны, и *бьлокраинны*, на границѣ Хорватіи; 3) въ Средней Крайнѣ (на югъ отъ Любляны къ Истрии) живутъ *нотранцы*, представляющіе нѣсколько подраздѣленій: *пивчаны* на р. Пивцѣ, *випавцы* въ Випавской долинѣ, *крашевы* на Красѣ (Карств).—Въ Горицѣ извѣстны *толминцы* или *тминцы*, въ окрестностяхъ гор. Толмина, *бовчаны*, близъ гор. Бовца (Bovec, Flitsch).—Въ Штириі (Штайерѣ) живутъ *горичаны* въ словинской Горицѣ, *погорны* въ горахъ на югъ отъ Дравы (Погорье, Wachergebirge), *погоряны*, *песничары*, на Песницѣ, *шавничары* на Шавницѣ, *мурскіе поляне* на Мурскомъ полѣ, *дравскіе поляны*—въ Птуйской равнинѣ, *халожаны* въ Халозахъ, близъ Птуи. Обитатели словинскихъ Горицъ вообще носятъ имя *прлеки*. Словинцы, живущіе въ Италиі, вообще удерживаютъ свое имя *словани*, а въ сѣверной части сверхъ того извѣстны подъ именемъ *резьяны*.



Въ старія времена иностранные писатели называли словинцевъ „*Carantani*“, по имени главной ихъ области „*Carantanum*“ (*Goratan*). Русскій лѣтописецъ Несторъ называетъ ихъ *хорутанами*, чешскій Далемиль *Korutane*; и въ настоящее время вм. корошцевъ кое-гдѣ употребительно названіе *горатани*. Нѣмцы называютъ словинцевъ, особенно въ Штиріи и Хорутаніи, *виндами* (*Winden, Windische Sprache*).

### 3. Численность словинцевъ.

Для 1900 г. проф. Л. Нидерле предположительно опредѣлили общее число словинцевъ въ 1,450,000. Собранныя имъ данныя указываютъ, что приростъ словинской народности совершается очень медленно, что словинцы съ трудомъ отстаиваютъ свое существованіе въ борьбѣ съ сильными инородческими стихіями и въ нѣкоторыхъ областяхъ, напримѣръ, въ Венгріи, подвергаются опасности полнаго вымиранія. Слѣдовательно, для даннаго времени указанная цифра, основанная отчасти на оффиціальныхъ статистическихъ данныхъ, едва-ли значительно измѣнилась вслѣдствіе естественнаго прироста населенія за истекшія 6 лѣтъ. Слѣдуетъ предполагать, что этотъ приростъ не превышаетъ 25,000. Въ такомъ случаѣ общая численность словинцевъ для 1906 г. опредѣляется приблизительно въ 1,475,000. Это число распредѣляется слѣдующимъ образомъ:

въ Австріи . . . . .	ок. 1,200,000
а именно:	
въ Крайніѣ . . . . .	ок. 478,000
въ Штиріи . . . . .	ок. 411,000
въ Приморьѣ . . . . .	ок. 215,000
въ Каринтіи . . . . .	ок. 91,000
въ прочихъ провинціяхъ . . . . .	ок. 5,000
въ Венгріи и Хорватіи . . . . .	ок. 103,000
въ Италіи . . . . .	ок. 42,000
въ Америкѣ . . . . .	ок. 110,000
въ другихъ земляхъ (особ. въ Германіи) . . . . .	ок. 20,000
<hr/>	
Всего . . . . .	ок. 1,475,000

### 4. Общія замѣчанія объ этнографическихъ особенностяхъ и политическомъ положеніи словинцевъ.

Безотраднo прошлое словинскаго народа. Не успѣвъ образовать своего государства, онъ былъ поставленъ въ необходимость за

длинный рядъ вѣковъ сократиться численно, потерять значительную часть своей территоріи и войти въ составъ чужихъ государствъ. Тяжело и современное положеніе словинцевъ, стѣсняемыхъ и угрожаемыхъ съ трехъ сторонъ сильными инородческими стихіями. При всемъ томъ и эта одна изъ меньшихъ разновидностей славянскаго племени еще въ достаточной степени сохраняетъ свою народную личность, представляя не мало своеобразныхъ этнографическихъ особенностей въ своемъ языкѣ, бытѣ, пѣсняхъ, вѣрованіяхъ и обрядахъ. Гористыя свойства страны, занятой словинцами, значительно помогли народу въ его стремленіи отстоять себя отъ поглощенія нѣмцами и итальянцами. Въ наибольшей чистотѣ словинская народность представлена въ болѣе возвышенныхъ частяхъ Крайна. Штирин и Хорутани; напротивъ, въ долинахъ и на морскомъ побережѣ открывается болѣе широкій доступъ чужеземнымъ стихіямъ, которыя вообще особенно сильны въ городахъ. Такъ, народный покрій одежды, вообще исчезающій, сохраняется еще у словинцевъ, живущихъ на высотахъ Альповъ и Краса (Карста); у нихъ же наблюдается наибольшее количество народныхъ суевѣрій и болѣе богатство и своеобразие народнаго пѣснотворчества, вообще значительно уступающаго сербо-хорватскому пѣснотворчеству.

Главнымъ выраженіемъ народности остается языкъ, отличающійся характерными особенностями среди другихъ славянскихъ языковъ и распадающійся на множество болѣе или менѣе характерныхъ говоровъ. Всѣ словинскіе говоры обыкновенно подводятъ подъ 8 нарѣчій; а именно: 1) нижне-краинское, 2) верхне-краинское; 3) средне-краинское; 4) хорутанское; 5) резьянское; 6) венеціанско-словинское; 7) штирійское (драво-мурское) и 8) угро-словинское. Нижне-краинское нарѣчіе лежитъ въ основаніи современнаго литературнаго языка словинцевъ, объединяющаго въ одно цѣлое всѣ разновидности народа. Словинская литература, небольшая по объему соотвѣтственно малочисленности народа и, однако, представляющая рядъ крупныхъ именъ въ поэзіи (Водникъ, Прешернь, Вессель-Косесскій, Грегорчичъ, Левстикъ, Ашкерць и др.) и наукѣ (Янежичъ, Крекъ, Облакъ, Мурко)<sup>1)</sup>, не только служитъ культурнымъ задачамъ народа, но и является однимъ изъ главнѣйшихъ средствъ защиты его противъ полнаго національнаго обезличенія.

<sup>1)</sup> Знаменитые слависты-словинцы Копитаръ и Миклошичъ писали на нѣмецкомъ и отчасти на латинскомъ языкахъ.

Въ политическомъ отношеніи словинцы, живущіе на коренной своей землѣ, не представляютъ единого цѣлаго. Одна, небольшая, часть ихъ принадлежитъ Итальянскому королевству, другая— Венгрии, а третья, самая большая, обнимающая главную массу словинскаго населенія, входитъ въ составъ Австріи или цислейтанскихъ провинцій монархіи Габсбурговъ. Въ предѣлахъ Австріи словинцы распределены между четырьмя областями, имѣющими свои провинціальныя сеймы и свое административное устройство. Только въ Крайнѣ они составляютъ господствующее населеніе; при всемъ томъ и здѣсь первенствующая роль въ управленіи, общественной жизни и школѣ принадлежитъ нѣмецкому языку и нѣмецкой народности. Въ Приморьѣ, Штирии и Хорутаніи (Каринтіи) словинцы составляютъ меньшинство населенія и по необходимости должны признавать надъ собою господство чужихъ народностей, болѣе сильныхъ въ политическомъ и культурномъ отношеніяхъ: въ Приморьѣ—итальянцевъ, въ Штирии и Хорутаніи—нѣмцевъ. При такомъ разъединеніи словинцы лишены возможности сообща добиваться правъ для обезпеченія своей народности. Политическій идеалъ народа—образованіе автономной словинской области, которая заключала бы въ себѣ всѣ разъединенныя части словинскаго народа въ Австріи—оказывается трудно исполнимымъ. Главный политическій и культурный центръ словинцевъ—Любляна. Здѣсь находятся важнѣйшія народно-просвѣтительныя общества, какъ *Matica Slovenska*, *Društvo slovenskih pisateljev*, *Dramatično društvo*, *Učiteljsko društvo*, *Zgodovinsko društvo* и др., здѣсь лучшія школы съ преподавательскимъ словинскимъ языкомъ, здѣсь выходятъ главнѣйшія политическія и литературныя изданія словинцевъ. Сверхъ того, нѣкоторую роль въ культурно-народной жизни словинцевъ играютъ города: Целовець, Мариборъ, Горица, Целья и Триестъ.

Въ религіозномъ отношеніи словинцы почти всѣ—католики; только ок. 20,000 угорскихъ словинцевъ исповѣдуютъ протестантство.

## 5. Литература.

Указанныя выше, въ I гл. (стр. 16—18) этнографическія карты: а) всего славянства—Шафарика, Мирковича, Риттиха, Зарянка, Вергуна, Шимачка и б) Австро-Венгрии: Бергхауза, Гейфлера, Чернига, Фикера, Киперта, Ле-Моньё, Гатшки, Гомолки, Ретея, Балоба, Гикмана, Наберта, Лангханса.

Указанныя выше, въ I гл. (стр. 20—21) труды по этнографіи и новейшей статистикѣ Австро-Венгрии: Чёрнига, Фикера, Брахелли, Раухберга, Твардовскаго, Матлековича, Варги, Центральной Статистической комисси, въ изд. *Oesterreichisch-Ungarische Monarchie in Wort und Bild*.

*Jan Majciger in M. Pleteršnik, Slovanstvo. Slovenci* (съ картой). V Ljubljani (безъ года).

*Langhans, Karte der Verbreitung von Deutschen und Windischen in Südösterreich* (въ журн. «*Deutsche Erde*»).

*Ante Beg, Slovensko-nemska meja na Štajerskem. S zemljepisnom načrtom. Ljubljana 1905* (Ср. *Slovanský Přehled. VIII. 5. 6. 1906* статья Ад. Чернаго).

*Slovenska zemlja, I—IV. Izdala Slovenska Matica v Ljubljani.*

*Murko, Slovinci* въ статьѣ *Jihoslovane* въ изд. *Ottův, Slovník naučný*.

*И. И. Срезневскій, 1) О словенскихъ нарѣчіяхъ* (Журн. Мин. Нар. Просв. 1841); 2) *Фриульскіе славяне 1881* (Сборникъ Отдѣленія русскаго языка и словесности Императорской Академіи наукъ т. XXI).

*P. Kozler, Slovenski zemljepis. 1854.*

*J. Šuman, 1) Slovenski Štajer. Ljubljana. 1868. Izdala Matica Slovenska; 2) Die Slovenen. Wien und Teschen. 1881* (Die *Völker Oesterreich-Ungarus Bd. X*).

*В. Ф. Ключъ, Словенцы. Этнографическій очеркъ* (Русская Бесѣда. 1857. III).

*В. И. Ламанскій, Сербія и южно-славянскія провинціи Австріи. Спб. 1864.*

*Die Österreichisch-Ungarische Monarchie, а) Steiermark Wien. 1890; б) Kärnten und Krain. 1891.*

*Т. Флоринскій, Словенская матица и ея изданія* (Университетскія Извѣстія. Кіевъ. 1886).

*Hlubek-Weiss, Ein treues Bild des Herzogthums Steiermark. Graz. 1860.*

*Czoernig, Das Land Görz und Gradisca, geographisch-statistisch-historisch dargestellt. Wien. 1873.*

*Valvazor, Ehre des Herzogthums Krain. Laibach. 1689. 4 тома. Новое изданіе. 1877.*

*Dr. K. Glazer, Zgodovina slovenskega slovstva. I D. V Ljubljani. 1894.*

*Dr. Hofmann von Wallenhof, Steiermark, Kärnten, Krain und Küstenland. 1899 (Der Kampf um das Deutschtum. H. 8).*

*Kordon, Die windische Frage. Marburg a. D. 1898.*

*H. Wastian, Der Kampf um Cilli.*

*A. Hauffer, Die Deutsche Sprachinsel Gottschee.*

*K. Schober, Die Deutschen in Nieder und Ober-Oesterreich, Salzburg, Steiermark, Kärnten und Krain. Wien und Teschen. 1881.*

*Gabriel-Louis Saroy, Les nationalités en Autriche-Hongrie. Autour de Trieste: Italiens, Slaves et Allemands. Paris. 1902.*

*Бодуэнъ де Куртень, Резья и Резьяне. Спб. 1876 (Славянскій Сборникъ. Т. III).*

*Харузинъ, Австрійская Крайна. 1902.*

*В. Харузина, Крайна. Москва. 1902.*

*A. Trstenjak, 1) Slovenci na Ogrskem (Ljubljanski Zvon 1904. 4): 2) Slovenci v Šomodski županiji na Ogrskem. Ljubljana. 1905 («Slovenski narod»).*

*St. Klíma, Slovinci v Uhersku. 1906 (Slovanský Přehled. B. VIII. 3 -4. 1906).*

*Zmago Valjavec, Slovenci v Ameriki. 1902 (Ljubljanski Zvon. 1902).*

*Dr. Karel Štrekelj, Slovenske narodne pesmi. Izdala in založila Slovenska Matica v Ljubljani. 1900.*

*Т. Флоринскій, Лекціи по славянскому языкознанію. Часть первая. III. Словинскій языкъ. Кіевъ. 1895.*

---

**Важнѣйшія періодическія изданія, содержачія статистико-этнографическія свѣдѣнія о Словинцахъ.**

*Letopis Matice Slovenske. V Ljubljani (съ 1866)*

*Zbornik znanstvenich in poučnich spisov. Na svetlo daje Slovenska Matica v Ljubljani. I—VI.*

*Kres. Leposloven in znanstven list. V Celovci (съ 1881).*

*Ljubljanski Zvon. Leposloven in znanstven list. V Ljubljani (съ 1881).*

*Časopis za zgodovino in narodopisje. Izdalo Zgodovinsko društvo v Mariboru (съ 1904 г.).*

*Slovenski prijatelj.* V Celovci. Izdaje Društvo sv. Mohora (сб. 1857 г.).

*Slovenski narod.* V Ljubljani.

*Cvetje z vertov sv. Franciška.* Gorica.

*Dom in Svet.* Ilustrovan list za umetnost in znanstvo. Ljubljana.

*Izvestja Muzejskoga Društva za Kranjsko.* Ljubljana.

*Knjige Drušbe sv. Mohorja.*

---

## VI.

## Чехи.

## (Чехо-мораване).

## 1. Чешская область и ея предѣлы.

Чехи населяютъ области Австрійской имперіи: Чехію (Čechy Чешское королевство, Богемія), Моравію (Morava, Моравское маркграфство) и небольшія части Силезіи (Slezko, Силезкое герцогство) и Нижней Австріи (Dolní Rakousy). Это страны, расположенныя главнѣйше въ извѣстномъ среднеевропейскомъ четырехугольникѣ, ограниченномъ высокими горами—Чешскимъ лѣсомъ (Šumava) Рудными, Судетами (Krkonoši) и Малыми Карпатами—и орошаемомъ рѣками—Лабой (Эльбой, съ ея притокомъ Волтавой) и Моравой (съ притоками Дней и Бечвой). Только небольшая часть чешской территоріи лежитъ за этими естественными предѣлами, именно за Судетами по верховьямъ р. Одры (въ Силезіи).

Имя *чеховъ* собственно принадлежитъ славянскимъ обитателямъ Чешскаго королевства и ведетъ происхожденіе отъ племени, обитавшаго по р. Волтавѣ, въ окрестностяхъ Праги, столицы королевства, и положившаго начало политическому и національному объединенію западной части народа. На востокѣ, въ Моравіи, славяне называютъ себя не чехами, а мораванами или же слывуть подъ частными названіями *гораковъ*, *ганаковъ* и *валаховъ*. Простонародныя нарѣчія мораванъ представляють болѣе или менѣе значительныя отличія отъ нарѣчія чеховъ королевства, но въ школѣ, литературѣ и общественной жизни какъ въ Чехіи, такъ въ Моравіи (а равно въ чешской Силезіи) господствуетъ одинъ общій выработанный

ный вѣками чешскій языкъ или собственная чештина, въ основаніи которой лежитъ нарѣчіе старого племени чеховъ. Съ широкимъ распространеніемъ образованія и укрѣпленіемъ политическаго и національнаго сознанія въ народныхъ массахъ и въ Моравіи имя чеховъ получаетъ широкое право гражданства, какъ общее обозначеніе всего племени <sup>1)</sup>).

Во всѣхъ поименованныхъ областяхъ Австріи чехо-мораване живутъ не одни, а совмѣстно съ нѣмцами, которые окружаютъ славянъ съ трехъ сторонъ, съ сѣвера, запада и юга, да и на славянской территоріи имѣютъ не мало поселеній, образуя рядъ значительныхъ острововъ. Это сожительство двухъ народовъ, находящихся въ постоянной борьбѣ между собою, есть результатъ неблагоприятныхъ историческихъ условій, поставившихъ небольшой чехо-моравскій народъ въ близкія отношенія съ сильнымъ германскимъ племенемъ. Въ VIII—IX ст. чехо-мораванамъ, нужно думать, принадлежалъ весь упомянутый географическій четырехугольникъ; но съ теченіемъ времени нѣмцы успѣли овладѣть его окраинами, прилегающими къ горамъ, а также ратпространились и внутри страны. Этнографическія границы чехо-моравской области въ историческое время мѣнялись нѣсколько разъ и въ настоящую пору представляютъ собой очень извилистую линію, точное обозначеніе которой сопряжено съ немалыми трудностями и, между прочимъ, требуетъ длиннаго перечня мѣстныхъ названій. Этимъ, вѣроятно, объясняется, что чехи при всѣхъ заботахъ объ изученіи своего народа еще не издали подробной этнографической карты родной земли.

Приблизительно предѣлы площади, занятой чешскимъ пародомъ, можно опредѣлить слѣдующей пограничной линіей. Начинаясь на крайнемъ западѣ у деревни Млинечекъ (въ Ходскомъ окр.), пограничная линія идетъ къ В. черезъ Кубицу, Пецъ, Пострековъ, Гоносицы, Нирияны, Кимицы, Манетинъ, Березно, Райну, Требенице, Терезинъ, теченіемъ Лабы къ Нучинцѣ и отъ Коховицъ къ

---

<sup>1)</sup> Многие чешскіе и инославянскіе ученые-филологи, этнографы, историки—причисляють къ чешской вѣтви славянства также венгерскихъ и моравскихъ словаковъ объединяя ихъ вмѣстѣ съ чехами и мораванами въ одну племенную группу, въ одинъ народъ подъ именемъ *чехо-славянъ*. Я не раздѣляю этого мнѣнія и считаю словаковъ за такую же самостоятельную вѣтвь, какую представляютъ собой чехо-мораване. Главнѣйшія, преимущественно филологическія, данныя для обоснованія такого мнѣнія изложены въ моемъ трудѣ „Лекціи по славянскому языкознанію“ ч. II (Кіевъ. 1897. Стр. 233 и слѣд.). Несомнѣнно они находятъ себѣ опору и въ данныхъ этнографическихъ и историко-культурныхъ.



Вегловицъ; затѣмъ поворачиваетъ на С.-В. около Мпены и Бѣлой, обхватываетъ на С. Чешскій Дубъ и черезъ Илове, Бездечинъ почти достигаетъ Танвальда, уклоняясь немного на югъ къ силезской границѣ, отсюда къ Ю.-В. на Двуръ Кралове, Яромѣръ, Хвачковицы, Хлистовъ, Маршовъ, Полицу, Заднюю и Переднюю Худобу, Сланы, Еленовъ, Левинъ къ Олешницѣ; отсюда заворачивая къ Седловѣу на Ю.-В. около Рокитницы къ моравской границѣ; черезъ Орличку и Студеную на Писарево, Богдиково, Свановъ, Усово, Стрѣлицъ, Желеховицы, Бѣлковицу, В. Быстрицу, Подгорье, около Спалѣва на югъ къ Границѣ на Бернаржицы, Веровицы, минуя Тернавку, обходить Студенку и Климовицы, захватываетъ Братриковицы, переходитъ въ Силезію на Броницы, Баворовъ. Вербицъ, отъ Дѣтмаровицъ, въ сосѣдствѣ съ польскимъ народомъ, черезъ Домброву, Суху, Блудовицы, Жерманицы, Шебишовицы, Тошоновицы, Добротицу, Моравку, Ст. Гамри; достигнувъ венгерской границы линія поворачиваетъ на Ю.-З. вдоль Карпатъ, на Вызовицы, Злинъ, Напаедлы, Кіевъ, Чейковицы, Подивинъ, затѣмъ на З. черезъ Зноимъ, Подмокле, Павлицу, Бытовъ, Дачицы, Вольфировъ, Терезиновъ, Индриховъ Градецъ, Н. Быстрицу, переходитъ въ Нижнюю Австрію черезъ Лиговъ къ Виторазу и возвращается у Границы въ Чехію, черезъ Петриковъ, Каплицу; отсюда на С.-З. черезъ Зубчицу, Берлогъ, Прахатицы, Хлистовъ, Винбергъ, Стаховъ, Неждицы, Сушицы, вдоль Шумава черезъ Тѣшовъ, Есень, Березье, Стражовъ къ Млинечку.

Такимъ образомъ, въ Чехіи и Моравіи чешская народность господствуетъ въ срединныхъ, менѣе возвышенныхъ, частяхъ этихъ областей. Склоны же горъ, окружающихъ исконную чешско-моравскую территорію съ сѣвера, запада и юга, уже заняты нѣмцами. Только въ немногихъ мѣстахъ чешскія поселенія достигаютъ областныхъ границъ: напримѣръ, на югѣ у Новыхъ Градовъ, Великихъ Мошовицъ и Брецлава, на западѣ—у Домажлицъ, на сѣверѣ у Сегиля и Жамберга; у Находа чешская народность переступаетъ даже на почву Германіи (село Нѣмеска Ёгна). Нѣмцы проникли и въ глубь чешской земли, образовавъ здѣсь рядъ большихъ и малыхъ острововъ. Главнѣйшіе нѣмецкіе острова: Индрихо-Градецкій (чеховъ 25,21%, нѣмцевъ 74,79%), Иглавско-штоцкій (чеховъ 24,20%, нѣмцевъ 75,80%), Ланшкрудскій (чеховъ 5,79%, нѣмцевъ 94,21%), Рокитницкій и Кралицкій (чеховъ 6,7%, нѣмцевъ 93,5%), Будѣвицкій (чеховъ 46,18%, нѣмцевъ 53,82%), Берненскій, Оломуцкій, Глубочанскій, Русиновскій, Войковичскій. Съ другой стороны въ огромныхъ частяхъ Чехіи и Моравіи, почти сплошь засе-

ленных пѣмцами, попадаются то большіе, то меньшіе чешскіе островки, напримѣръ, около Стрибра, между Хомутовымъ и устьемъ на Лабѣ. Вообще во многихъ округахъ наблюдается смѣшанное чешско-нѣмецкое населеніе съ численнымъ преобладаніемъ то одной, то другой народности. Такъ, по даннымъ переписи 1900 г. нѣмцы имѣютъ перевѣсъ въ округахъ: хебскомъ (99,41%), жатецкомъ (89%), литомѣрицкомъ (79,46%), младо-болеславскомъ (54%), зноимскомъ (76,53%); во всѣхъ остальныхъ преобладаютъ чехи, причѣмъ наиболѣе славянскими являются округа: таборскій (99,95%), пражскій (99%), чаславскій (99,30%), хрудимскій (99,89%), кралево-градецкій (98,41%), писецкій (99,36%), ичинскій (96,77%), пильзенскій (91,62%), будѣвицкій (78,23%); въ Моравіи: градищскій (99,01%), иглавскій (80,32%), берненскій (88,91%), ново-цѣшинскій (77%), оломуцкій (54%). Въ общемъ въ Чехіи нѣмецкій элементъ (вмѣстѣ съ евреями (ок. 2%) составляетъ ок. 37%, а чешскій ок. 63% (82,67%), въ Моравіи нѣмцевъ ок. 27,91%, а чеховъ—ок. 71,35%. Въ Прагѣ, столицѣ королевства и главнѣйшемъ культурномъ центрѣ Чешскаго народа, чеховъ 89,50%, а нѣмцевъ 10,19, между тѣмъ въ Бернѣ, главномъ городѣ Моравіи, чеховъ всего 35,74%, а нѣмцевъ 63,97%. Тоже преобладаніе нѣмцевъ замѣчается и въ нѣкоторыхъ другихъ городахъ Моравіи, напримѣръ, въ Иглавѣ (нѣм. 81,79%, чех. 17,49%), Оломуцѣ (нѣм. 65,75%, чех. 31,93%), Зноимѣ (нѣм. 88%, чех. 11,64%), Моравской Требовѣ.

Въ Силезіи чехи занимаютъ лишь крайній юго-востокъ области, составляя всего 21,8% всего ея населенія. Въ опавскомъ уѣздѣ вполнѣ чешскіе судебные округа—климковицкій, опавскій и фридецкій; половину населенія составляютъ чехи въ богуминскомъ судебномъ округѣ и меньшинство въ судебныхъ округахъ: фриш-тацкомъ и бѣловецкомъ, также въ тѣшинскомъ и витковскомъ. Вмѣстѣ съ чехами въ Силезіи живутъ поляки (33,2%). Обѣ народности вмѣстѣ берутъ перевѣсъ надъ нѣмцами (45%). Точное разграниченіе чешской и польской народности въ Силезіи представляетъ большія трудности и служитъ предметомъ спора между филологами. Вѣроятноѣ всего пограничная линія чешской области проходитъ восточнѣе Моравки. Чешская народность въ Австрійской Силезіи имѣетъ свое продолженіе въ Прусской Силезіи. Здѣсь чехи, называемые *моравцами*, образуютъ два острова. Границы меньшаго (западнаго) идутъ вдоль р. Опавы черезъ села: Браница, Посутица, Храстелѣвъ, Либтыни, Лидмерица, на югъ къ австрійской границѣ. Границы второго острова начинаются нѣсколько южнѣе, отъ австрійской Силезіи, и направляются черезъ села Судлицъ, Градчанъ,

Черненки къ Баворову, затѣмъ вдоль р. Пштины къ Творкову и отсюда къ Богумину.

Въ Нижней Австріи чехи образуютъ небольшой полуостровъ и островъ, составляющіе продолженіе основной чехо-моравской территории. Полуостровъ примыкающій къ Чешскому королевству, составляютъ села: Нѣмецка, Рабшахи, Гундшахи и Шварцбахъ; островъ образуютъ села: Глоговецъ, Нова весъ, Пошторна, Раншпуркъ, Валчицы, Перниталь и Цагнова. Кромѣ того отдѣльныя поселенія чеховъ встрѣчаются спорадически въ другихъ частяхъ Нижней Австріи. Въ самой Вѣнѣ, центрѣ области и вмѣстѣ съ тѣмъ столицѣ всего государства, находится обширная колонія чеховъ, приблизительно до 200,000 ч. <sup>1)</sup>

За предѣлами родной земли чехи встрѣчаются въ болѣе или менѣе значительномъ числѣ во всѣхъ другихъ областяхъ Австро-Венгерской Монархіи: въ Верхней Австріи, Зальцбургѣ, Штирії, Каринтіи, Крайнѣ, Приморьѣ, Тиролѣ, Галиціи, Буковинѣ, Венгріи <sup>2)</sup>, Хорватіи, Босніи и Герцеговинѣ. Изъ другихъ государствъ болѣе значительныя колоніи чеховъ находятся въ Россіи, главнѣйше на Воляни (въ уѣздахъ: дубенскомъ (29 селъ) луцкомъ, ровенскомъ, житомирскомъ, острожскомъ и владиміро-волынскомъ) и кое-гдѣ въ Черноморской области, но особенно въ сѣверо-американскихъ Соединенныхъ Штатахъ, куда направляется обширная эмиграція изъ Чехіи и Моравіи, какъ и изъ другихъ западно-славянскихъ земель. Главными средоточіями чеховъ въ Америкѣ служатъ города: Чикаго, Нью-Йоркъ, Клевлэндъ и штаты Омала и Небраска. Въ Германіи также не мало чеховъ помимо отмѣченныхъ поселеній въ Прусской Силезіи. Многочисленные представители этой энергичной, стойкой и трудолюбивой народности, въ качествѣ работниковъ, мастеровъ, техниковъ, музыкантовъ расходятся по всему свѣту, всюду унося съ собою живое сознаніе народности и искреннюю любовь къ своей, покинутой ими, родинѣ.

Окруженные на своей родной землѣ съ трехъ сторонъ нѣмцами, чехи только на востокѣ имѣютъ своими сосѣдями славянъ: поляковъ на небольшомъ пространствѣ въ Силезіи и словаковъ на всемъ протяженіи восточной границы. Словаки находятся въ наи-

<sup>1)</sup> Чешскіе этнографы увеличиваютъ эту цифру до 250,000. Ср. *Národná výstava Českoslavanská v Praze. 1895. Стр. 79.*

<sup>2)</sup> Въ Венгріи чешскій островъ находится въ крашовской столицѣ, близъ Дуная (села—Ровенска, Св. Елена, Эйбепталь, Шпелерсруэ, Вейценридъ и Штейерлакъ-Анипо).

болѣе близкомъ племенномъ родствѣ съ чехами. Нѣкоторыя восточно-моравскія нарѣчія (напримѣръ, валашское и дольское) служатъ переходною ступенью отъ чешскаго языка къ словацкому.

## 2. Частныя названія народа.

Въ предѣлахъ Чешскаго королевства въ настоящее время не наблюдается раздѣленія чешскаго народа на рѣзко-характерныя племенные разновидности, а потому здѣсь и неизвѣстны частныя названія народа. Въ старыя времена и въ этой области жили разрозненныя славянскія племена и колѣна, имѣвшія свои особыя названія, сохранившіяся въ историческихъ памятникахъ. Это были: *чехи* (въ срединѣ земли), давшіе имя всему королевству и народу, *лужане* (въ Жатецкой равнинѣ), *седмичане* (въ долинѣ Огры), *литомыричи* (на сѣверѣ отъ Рипа), *дечане* (въ долинѣ Лабы отъ Устья до Перна), *лемуци* (Lemuzi, на крайнемъ западѣ), *пиоване* (близъ Мельника), *хорваты* (на востокѣ), *зличане* (между Сазавой и Лабой), *дудлебы* (на югѣ), *нетолицы*, *домажлицы*, *мжане*. Всѣ эти частныя названія племени давно уже исчезли, за исключеніемъ имени чеховъ, которое стало обозначать весь вообще славянскій народъ въ предѣлахъ Чешскаго королевства и широко распространено, какъ культурно-народный терминъ и среди моравянъ.

Славянское населеніе Моравіи представляетъ болѣе замѣтное этническое разнообразіе. Отдѣльныя части народа различаются между собой не только по особенностямъ своей живой рѣчи, но и по физическому типу, по характеру, по одеждѣ, еще недавно сохранявшей, а кое-гдѣ и теперь сохраняющей свой народный покрой. Здѣсь, кромѣ общаго земскаго имени *мораванъ* употребительны и частныя названія народа, имѣющія опредѣленное этнографическое значеніе. Главнѣйшія изъ нихъ: *ганакки*, *гораки*, *ляхи*, *валахи*, *доляки*.

*Ганакки* называются жители большей части средней Моравіи, именно уѣздовъ: голешовскаго, кромержскаго, преровскаго, оломучскаго, штенрбергскаго, простѣвскаго, вышковскаго, драганскаго, летовицкаго, литовльскаго, коницкаго, іевического, забрѣжскаго, сладковскаго, бучовицкаго, дѣдоницкаго, блонскаго, бернейскаго, жадлоховицкаго, клобукскаго, русиновскаго, тишновскаго, иванчицкаго, крумлевскаго, зноимскаго, междурѣчьскаго, тревичскаго, и мор. будѣйевицкаго. Нарѣчіе ганаконъ, представляющее значительное количество говоровъ, можетъ быть по преимуществу названо моравскимъ, такъ какъ имъ говорятъ настоящіе мораване или мо-

равские чехи. Собственно ганаками называют себя славянские обитатели долины р. Ганы, отъ Вышкова до Коетина. Другіе жители средней Моравіи имѣютъ свои частныя имена: *блатяны* или *блатяки* (по р. Блатѣ и Васовѣ), *моравяки* (отъ Вѣрованѣ къ Цитову), *забечваки* (по лѣвому берегу нижней Бечвы), *заморовяки* (въ Гулинской области), *подгораки* (отъ Быстрицы къ Голешову), *баняки* (въ кромержскомъ и голешовскомъ уѣздахъ) и *чугаки* (отъ глагола *čihat'*—*торчатъ*); но всѣ они вслѣдствіе извѣстнаго сходства употребляемыхъ ими говоровъ извѣстны у своихъ сосѣдей, валаховъ и словаковъ, подъ однимъ общимъ именемъ ганаковъ. Прежде ганаки по преобладающему цвѣту одежды дѣлились на два разряда: *Žlutí Hanáci* и *Červení Hanáci* (*желтые и красные ганаки*).

*Гораки* занимаютъ порѣчье Шварцавы и Свитава, погорье между Зноимомъ и Берномъ, горныя страны отъ Плумлѣва къ Коницѣ и Литовлѣ, а оттуда къ Лошницамъ и Забрѣгу, наконецъ, Драганскія высоты. Нарѣчіе ихъ близко къ ганацкому, но представляетъ и свои особенности.

*Ляхи* обитаютъ въ сѣверо-восточномъ углу Моравіи (въ окрестностяхъ городовъ: Френштата, Штамберга, Прибора, Брушберга, Моравской Острavy, Мистка и Фридланда), въ западной части тѣшинскаго уѣзда и въ южной Силезіи. Славянскіе обитатели указанной территоріи собственно считаютъ свой языкъ моравскимъ, себя они также не называютъ *ляхами*, а слывуть подъ такимъ названіемъ у ближайшихъ своихъ сосѣдей. Ляшское нарѣчіе представляетъ нѣсколько крупныхъ чертъ, свойственныхъ собственно польскому языку и служить переходной стадіей отъ чешскаго языка къ польскому.

Подъ именемъ *валаховъ* извѣстна небольшая часть (ок. 150,000) славянскаго населенія Моравіи, занимающая область р. Бечвы, именно окрестности городовъ: Злина, Вызовиць, Всетина, Валашскихъ Клобуковъ, Карловиць, Рожнова и Междурѣчья. Своимъ названіемъ эта въ высшей степени любопытная разновидность моравскаго народа обязана пастушескимъ румынамъ, которые въ XII—XVI ст. въ своихъ странствованіяхъ по Карпатамъ заходили въ горныя мѣста Моравіи, осѣдали тамъ и потомъ слились съ туземнымъ славянскимъ населеніемъ<sup>1)</sup>. Валахи отличаются красивымъ типомъ, сохраняютъ еще (хотя не повсюду) народную одежду и

<sup>1)</sup> Ср. *F. Miklosich*, Ueber die Wanderungen der Rumunen in den dalmatinischen Alpen und den Karpathen.

говорять нарѣчіемъ, представляющимъ черты сходства со словацкимъ языкомъ.

*Доляки* живутъ на правомъ берегу Моравы, отъ Напаедль до Брненскихъ Клобуковъ. Нарѣчіе ихъ также, какъ валашское, представляетъ черты сходства со словацкимъ. Оба нарѣчія представляютъ переходъ отъ чешско-моравскаго языка къ словацкому.

### 3. Численность чеховъ.

Точное исчисленіе чешскаго народа представляетъ большія трудности. Онѣ обусловлены, однако, не столько недостаткомъ статистическихъ данныхъ, сколько качествомъ ихъ. Для главной массы чеховъ, живущихъ въ предѣлахъ Австрійской монархіи, имѣется не мало официальныхъ данныхъ, добываемыхъ народными переписями, производимыми правильно каждыя десять лѣтъ. Но эти данныя чешскіе этнографы и публицисты не всегда признаютъ соответствующими дѣйствительности. Въ частности дѣлаются противъ нихъ возраженія и съ нѣмецкой стороны. Дѣло въ томъ, что происходящая въ Чехіи, Моравіи и Силезіи національная борьба отражается и на работѣ лицъ, собирающихъ и обрабатывающихъ статистическія данныя, при чемъ въ зависимости отъ народности и патриотизма этихъ лицъ принимаются во вниманіе преимущественные интересы то нѣмцевъ, то чеховъ. Чаше, однако, итоги исчисленія оказываются менѣе справедливыми и благопріятными по отношенію къ чехамъ, особенно въ округахъ со смѣшаннымъ населеніемъ при преобладаніи нѣмцевъ. Возможность крупныхъ неточностей въ результатѣ переписи обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что при заявленіяхъ объ языкѣ требуется указаніе не на родной языкъ, а на языкъ разговорный, а также тѣмъ, что въ областяхъ со смѣшаннымъ населеніемъ многіе указываютъ два разговорныхъ языка—чешскій и нѣмецкій. Вотъ почему проф. Л. Нидерле, относясь съ недоувѣріемъ къ нѣкоторымъ цифрамъ послѣдней переписи 1900 г., считалъ необходимымъ ихъ исправить.

По даннымъ этой переписи было насчитано чеховъ въ Австріи 5,955,397 д. а именно: въ Чехіи—3,930,093, въ Моравіи—1,727,270, въ Силезіи—146,265, въ Нижней Австріи—132,968, въ Верхней Австріи—8,535, въ Зальцбургѣ—561, въ Штирії—733, въ Каринтіи—196, въ Крайнѣ—390, въ Приморьѣ—1,348, въ Тиролѣ и Форальбергѣ—1,945, въ Галиціи—9,014, въ Буковинѣ—596, въ Далмаціи—1,157. Но приведенная общая цифра заключаетъ въ себѣ не только чеховъ, но и словаковъ, живущихъ въ восточной Моравіи и кое-

гдѣ въ Нижней Австріи, а также въ Вѣнѣ. Послѣднихъ приблизительно ок. 100,000. Слѣдовательно, оффиціальная цифра чеховъ въ Австріи (Цислейтани) для 1900 г. должна быть уменьшена на 100,000, т. е. равнялась приближ. 5,855,000. Съ другой стороны, проф. Л. Нидерле исправляетъ эту цифру такимъ образомъ. Основываясь на вычисленіяхъ проф. Чиперы <sup>1)</sup>, онъ полагаетъ, что вслѣдствіе разныхъ неисправностей въ счетѣ, число чеховъ въ Чехіи и Моравіи, въ мѣстностяхъ со смѣшаннымъ населеніемъ, уменьшено въ оффиціальной статистикѣ по крайней мѣрѣ на 300,000. Равнымъ образомъ оффиціальная цифра чеховъ, живущихъ въ Вѣнѣ—102,974, по его мнѣнію, не соотвѣтствуетъ дѣйствительности и должна быть увеличена по крайней мѣрѣ на 100,000, а проф. Я. Сербъ полагалъ, что уже въ 1895 г. чеховъ въ Вѣнѣ было не менѣе 250,000 <sup>2)</sup>. Итакъ, болѣе достовѣрная цифра чеховъ въ Австріи для 1900 г.—6,320,000. Затѣмъ, число чеховъ, живущихъ въ Прусской Силезіи и въ другихъ частяхъ Германіи проф. Нидерле, на основаніи оффиціальныхъ данныхъ, опредѣляетъ въ 114,309. Въ сѣверо-американскихъ Соединенныхъ Штатахъ считаютъ чеховъ приблизительно отъ 200,000 до 250,000: Въ остальныхъ земляхъ и государствахъ проф. Нидерле насчитывалъ чеховъ всего ок. 50,000. Но эта цифра также ниже дѣйствительной. Въ Россіи чеховъ не менѣе 60,000 (по переписи 1897 г. 0,04%), въ Триединомъ Хорватскомъ Королевствѣ и вообще въ Венгріи ок. 52,000, на Балканскомъ полуостровѣ—въ Болгаріи, Сербіи, Босніи, Герцеговинѣ и Турціи едва ли менѣе 20,000, во всѣхъ прочихъ государствахъ Европы и Азіи до 50,000. На основаніи приведенныхъ данныхъ и сдѣланныхъ къ нимъ поправокъ нужно думать, что общее число чеховъ къ 1900 г. достигло 6,867,000 <sup>3)</sup>.

Въ настоящее время, т. е. къ концу 1906 г. эта цифра должна увеличиться вслѣдствіе естественнаго прироста населенія. За десять лѣтъ, съ 1890 по 1900 г. средній коэффициентъ прироста населенія въ Австріи составлялъ около 0,9% <sup>4)</sup> или по 9 че-

<sup>1)</sup> Narodni Listy, 1902. 17 Listopad.

<sup>2)</sup> Národopisná Vystava Česko-slovanská v Praze. 1895. 79.

<sup>3)</sup> Проф. Л. Нидерле (Slovanský Přehled. R. V. 4. 159—160) считаетъ вмѣстѣ чеховъ и словаковъ и опредѣляетъ максимальную цифру обѣихъ народностей для 1900 г.—9,500,000. Сколько именно изъ этого числа онъ отводитъ на долю словаковъ, изъ его подсчета не видно: 2,500,000 или нѣсколько больше?

<sup>4)</sup> Oesterreichische Statistik, herausgegeben von d. k. k. Statistischen Central-Commission LXIII. I. Heft.

ловѣкъ на 1000 ежегодно. Принимая увеличеніе численности чешскаго народа во всѣхъ областяхъ, имъ населяемыхъ, и на ближайшее будущее въ томъ же размѣрѣ, необходимо допустить, что приростъ чешскаго населенія за шесть лѣтъ составлялъ ок. 370,000. Слѣдовательно, къ концу 1906 г. общее число чеховъ должно равняться приблизительно 7,237,000. Вѣроятное распредѣленіе этого числа представляется въ слѣдующемъ видѣ:

въ Австро-Венгріи . . . . .	6,695,000
именно:	
въ Цислейтаніи (Чехіи, Моравіи, Силезіи, Нижней Австріи и другихъ областяхъ) . . . . .	6,641,000
въ Транслейтаніи (Хорватіи и Венгріи) . . . . .	54,000
въ Босніи и Герцеговинѣ, Сербіи, Болгаріи и Турціи . . . . .	21,000
въ Гермавіи . . . . .	124,000
въ Россіи . . . . .	63,000
въ Америкѣ . . . . .	282,000
въ прочихъ государствахъ Европы и Азіи . . . . .	52,000
<hr/>	
Всего . . . . .	7,237,000

Въ религіозномъ отношеніи главная масса чешскаго народа принадлежитъ къ римско-католической церкви; только около 200,000 исповѣдуютъ протестантство. Сверхъ того небольшое число чеховъ (нѣсколько десятковъ тысячъ) во второй половинѣ XIX ст. приняли православіе.

#### 4. Общія замѣчанія объ этнографическихъ особенностяхъ и политическомъ положеніи чешскаго народа.

Одного внимательнаго взгляда на этнографическую карту средней Европы достаточно, чтобы понять главный смыслъ всей исторіи чешскаго народа и обусловленное ею современное положеніе этой вѣтви славянства въ этнографическомъ и политическомъ отношеніяхъ. Широкимъ полуостровомъ выдвигаются чехи въ море нѣмецкой народности, которая окружаетъ ихъ съ трехъ сторонъ, врывается въ средину занимаемой ими территоріи и стремится разорвать ея цѣлость и единство. Историческая судьба чешскаго народа тѣсно сплетается съ судьбой нѣмецкаго народа. Взаимныя отноше-



нія обоихъ народовъ и въ старыя и въ новыя времена исполнѣны. Нѣмцы стремились и стремятся овладѣть чешской землею, подчинить себѣ славянъ въ политическомъ, національномъ, экономическомъ и культурномъ отношеніи. Чехи отстаивали и отстаиваютъ свою землю и свою народность. Отсюда многовѣковая борьба чеховъ, какъ передового бастиона славянства, съ германизмомъ, борьба, уже принесшая много страданій и потерь чешскому народу, но далеко не оконченная и въ настоящее время. Нѣмцы благодаря своему численному преобладанію, политической сплоченности и рано выработанной культурности умѣло пользовались слабостью и раздробленностью западнаго славянства и уже въ средніе вѣка стали одерживать большіе успѣхи надъ чехами. Гуситство и религіозныя войны въ XV в. на нѣкоторое время дали сильный отпоръ притязаніямъ германизма, но несмотря на проявленныя въ нихъ силу національнаго чувства и героизмъ народа, эти историческія явленія не могли предупредить ни наступленія въ скоромъ времени нѣмецко-католической реакціи, ни включенія чешской земли въ составъ нѣмецкой имперіи Габсбурговъ, блестяще выполнившей задачу постепеннаго ослабленія и частичнаго искорененія чешской народности. Новый отпоръ этимъ стремленіямъ и болѣе энергичская борьба съ ними стали возможны только въ XIX ст., съ эпохи т. н. славянскаго возрожденія. Само собой разумѣется, что при такихъ условіяхъ національное существованіе чешской народности очень тяжелое. Потерявъ, въ теченіе ряда вѣковъ значительную часть своей земли, чехи съ трудомъ успѣвали отстаивать особенности своей славянской народной личности. Нѣмцы, являясь не только постоянными близкими сосѣдями чеховъ, но очень часто полновластными господами въ чешской землѣ, навязывали славянамъ свои церковныя и политическія учрежденія, свои законы, нравы и обычаи, свой языкъ и литературу. Послѣ Бѣлогорской битвы (1620 г.), въ XVII—XVIII ст., все національное чешское подвергалось систематическому гоненію и истребленію. Въ XIX ст., когда съ пробужденіемъ чешскаго національнаго сознанія и измѣненіемъ государственнаго строя Австріи, началось поспѣшное и энергичское приведеніе въ ясность національнаго достоянія, оказалось, что потери, понесенныя чешскою народностью, огромны. Славянская народная стихія, еще такъ сильная на русскомъ востокѣ и на Балканскомъ полуостровѣ, уцѣлѣла въ чешской землѣ лишь въ слабой степени, въ обломкахъ. Тѣмъ болѣе значеніе имѣютъ заботы чешскихъ ученыхъ и патріотовъ о томъ, чтобы сохранить то сравнительно немногое народное, что еще уцѣлѣло отъ

погрома. Въ этомъ отношеніи съ особенною благодарностью должна быть помянута устроенная въ 1895 г. въ Прагѣ этнографическая выставка (Národopisná Výstava Česko-slovanská) и возникшіе послѣ нея въ Прагѣ Этнографическій Музей и Этнографическое Общество съ ихъ прекрасными изданіями. Несмотря на постоянный ростъ въ народѣ національнаго самосознанія чужеземное культурное вліяніе не перестаетъ проникать въ самыя укромныя захолустныя уголки чешской земли, все болѣе сглаживая характерныя народныя особенности.

Впрочемъ, относительно степени удержанія этнографическихъ индивидуальныхъ чертъ земли чехо-моравскаго народа находятся не въ одинаковомъ положеніи: чѣмъ ближе къ западу, къ Германіи, тѣмъ меньше этихъ чертъ, чѣмъ дальше на востокъ, тѣмъ ихъ больше. Въ собственной Чехіи или въ Чешскомъ королевствѣ славянская народность сохранилась гораздо слабѣе, чѣмъ въ Моравіи. Въ Чехіи жизнь сельскаго люда мало чѣмъ отличается отъ жизни горожанъ: народная одежда почти вышла изъ употребленія, обычаи и обряды старины позабыты, старая народная пѣсня или совсѣмъ исчезаетъ, или передѣлывается на новый ладъ, утрачивая свою естественную прелесть и народный характеръ, самый языкъ подвергся порчѣ и носитъ на себѣ замѣтныя слѣды вліянія нѣмецкаго языка. Напротивъ, въ Моравіи чешская народность еще въ значительной степени удерживаетъ всѣ эти характерныя этнографическія особенности. Преимущественно въ восточной части страны оказываются любопытныя разновидности племени, какъ *ганаци* и *валахи*, въ которыхъ по справедливости слѣдуетъ видѣть наиболѣе типическихъ и характерныхъ представителей чешскаго народа. У нихъ еще можно встрѣтить народный покрой одежды, видѣть характерныя народные танцы, слышать чисто-народныя пѣсни, наблюдать патриархальные обряды и обычаи, изучать значительное разнообразіе народной рѣчи.

Главной этнографической чертой всего народа остается его языкъ, по своимъ характернымъ особенностямъ и свойствамъ занимающій свое опредѣленное мѣсто въ ряду другихъ славянскихъ языковъ. Какъ драгоценнѣйшее достояніе народа, онъ стойко оберегается и защищается всѣми классами населенія при помощи такихъ могущественныхъ средствъ, какъ крѣпкое національное сознаніе, національная школа и постоянно развивающаяся національная литература. Подобно другимъ славянскимъ языкамъ, чешскій языкъ на всемъ протяженіи занимаемой имъ территоріи, не представляетъ вполнѣ однороднаго цѣлаго, а дѣлится на значительное

VI.

Слово свѣтаго Григорія папы римскаго, како родися от брата и от сестры<sup>1)</sup>.

1.

(Л. 89). Бысть же бл҃женный Григорей папа римскій от королевскаго роду. Отцу ихъ отойде<sup>2)</sup> сего свѣта, и остася оу него два дѣтища, мужескъ полъ да женескъ. женескъ же полъ баше лепа лицемъ. Бысть же мужескій полъ в возрастѣ, и ра<sup>3</sup>же дияволъ брата на сестру похотию плоцкою нанъ, и не моги терпѣти, (89 об.) и падеся съ нею и оскверни тѣло свое. И зачатъ сестра его во оутробѣ дѣтище, и начатъ братъ ея скорбѣти во мнозе печали и гла: «оувы мнѣ грѣшно<sup>м</sup>», и како явлюся лицу Божию, что гл҃ю чл҃вкоу, яже на земли согрѣшихъ в ср҃дцы своемъ. И гла сице: отдасть старейшиноу сестроу свою на сохранение. Во един дѣнь призва старейшиноу, и рече емоу: «возми сестру (л. 90) мою на сохраненіе, и сохранив ю до родинъ ея, по неже бо зачатся в ней от мене, и аще что родится о<sup>т</sup> нея, мужескъ полъ или женескъ, не мози дѣтища погубити и вѣщи обличити. Но о<sup>т</sup> дѣтища самъ токмо оукрыйся». И пойде из града вонъ печаленъ.

<sup>1)</sup> Повѣсть издана у Кушелева-Безбородка, Памятники старинной русской литер., вып. 2, стр. 418, въ качествѣ второго варианта легенды о кровосмесителѣ. Издаваемый здѣсь текстъ по рукоп. XVII в. собранія Унд. № 632—значительно разнится отъ извѣстныхъ, печатныхъ текстовъ, являясь особой редакціей.

<sup>2)</sup> Слѣдуетъ исправить: „отшедшу“.

вельми, старейшина же поят ю к себѣ, и начат ю в чести творити в дому своемъ. По времени же сестра его роди дѣтища (л. 90 об.) мужскъ пол, и в то время приде к ней вѣсть, яко братъ ея оумре. Она же начат скорьбѣти во мнозехъ печали и г҃ла: «оувый мнѣ, окаянной! камо ми ся дѣти, или како скрью дѣтище и комоу о҃ да<sup>м</sup> или како оутаю срамъ свой». И оумысли в ср҃цы своемъ: повелѣ здѣлати колодицу, и вложи своего мл<sup>а</sup>ца и о҃пусти его на водоу, якоже древле от Моисея, и с ни<sup>м</sup> (л. 91) положи ̄ литръ сре<sup>б</sup>ра да три тысячи литръ золота, и написа над ним цкоу свиньцовую: «а сие отроча родися от брата и от сестры, аще кто его возметъ, то ему серебро, а злато дѣтищу». И плакася над ним горко, и отпусти его на водоу, сама же обещася Б҃гоу и г҃ла: «живъ Г҃дь Б҃гъ і жива боудеть д҃ша моя, яко отселе не имамъ знати брака». И сяде на цр҃тво брата своего и мѣсто (л. 91 об.) и нача д҃воу быти и Б҃га молити о гресѣ своемъ.

Повелѣнием Б҃жиимъ приплы дѣтище под нѣкои мнѣстырь, и видѣ игоумень колодицу, и повелѣ слоужебникомъ своимъ взяти ю и принести к себѣ: и повелѣю открыти колодицу, и виде дѣтище лѣжаще, и с нимъ много злата и серебра, и цка свиньцовая, на ней же бѣ написано; и почюдися игуменъ зело о вещи той, и прочте (л. 92) цкоу свиньцовую и плачеша горько. Игоумень приимъ дѣтище и крести его, и начатъ хранити, и вскорьми его до девяти лѣтъ и наоучи грамотѣ м<sup>а</sup>ра. И поиде дѣтище на игралище свое, якоже бѣ обычай, оуспе в мале возрастѣ и с нѣкимъ дѣтищемъ подрася; и приде дѣтище ко игумену и рече ему: «гдѣ не отче, прочто мя оубиль сыи твои?» Игоумень же нача ихъ судити (л. 92 об.) и рече своему со гневомъ: «прочто ево биеши, родиль бося еси<sup>1)</sup> в какихъ гресѣхъ суцихъ зачат». И оужасеся о словеси сѣмъ дѣтище, и нача скорьбѣти во мнозехъ печали и г҃ла: «како могу вопрошити о словеси семъ?» он же зело оскорьбѣхся. Игоуменъ же, видевъ, [яко] отрокъ прилежаниемъ скорбит, и показа ему цку свиньцовую, на ней же бѣ написано, яко отрокъ сей родися от брата и от сестры. Отрокъ же (л. 93) вземъ и прочте цку свиньцовую, оужасеся о писаніи томъ и плачеша над нею горько, цку омывая слезами; и наде пред ногами игумена и рече ему: «гдѣ не отче отпусти мя из мнѣстря сего, понеже недостойнъ есмь азъ окаянный за своя грѣхи в мнѣстре жити. бл҃гослови мя и помоли за мя Б҃га, да очищусь от грѣховъ своихъ. Игоуменъ же плакася надъ нимъ горько, и даде ему дань злата (л. 93 об.)

<sup>1)</sup> Здѣсь, можетъ быть, какой то пропускъ.

его, и отпусти вонъ из монастыря своего. Он же иде и плачесь горько, и обрѣте корабль, купи его і иде в немъ и нача торговати и обогатѣ зело и потомъ бысть воинъ великъ, вельми славенъ, и многия грады по-воева.

Повелѣниемъ же Бѣжимъ приде под град мѣтри своея и ста под градом. Граждане же видевше его, яко воевода некто славенъ зело, [і сие]<sup>1)</sup> стретоша его за градомъ, и начаша его молити, сѣжею своею, дабы посягнула за него и глѣюще к ней: «пойди, гѣже, дабы оу насъ былъ пастырем, многих бо еси отпустила, не мози, гѣже, сего отпустити, понеже бо славенъ есть воевода». Она же послушаше ихъ и посягнула за него замужъ, и живяше с нимъ, он же обычай держаше таковъ, яко на всяк дѣнь пред трапезою исходит от нея в нутреннюю хранину оутаявся (об. 94 л.) и прочиташе цѣкоу свинцовую, и омывашея слезами своими. Она же начат стрещи его, что он творит, и не мози оусмотрити, и начаша его вопрошати: «скажи ми гдѣне, что пред трапезою долго медлѣши в нутренней хранинѣ?» Он же не повѣда ей ничтоже. Во един же дѣнь едина дѣвица оувидѣла цѣкоу свинцовую, взем ю и принесла гѣже своей и глѣла: «возми, гѣже, цѣкоу свинцовую сию, над тою (л. 95) цѣкоу моужъ твой, Григорей, плачется всегда». Она же взем цѣкоу, и прочте ю и паде во оужасе мертва, и плакася горько, глѣголаше: «оувы мнѣ, окаянной, и како могоу зрѣти на свѣт сей азъ многогрѣшная!» И приде мужъ ея, Григорей, она же рече емоу: «во истинноу, гдѣне, сѣнь мой еси, аз бо ты родихъ от брата своего». Слышав же Григорей, и паде мртвъ пред нею и оста оума своего на долгъ часъ. Воста рекоша (95 л. об.) къ ней, паки нача другъ другу глѣлати: «камо есть намъ грѣшнымъ дѣтися». И рече мѣти его к нему: «прости мя, гдѣне, азъ болѣ ты согрѣшихъ и преступихъ обѣтъ ко Гѣду Бѣгоу, приять кровосмешеніе». Григорей же, вземъ съ собою образ Прѣчтыя Бѣцы да псалтырь, и поиде из града вонъ и плакася горько.

И обрете рыболова Григорей, начатъ его молити со слезами своими, дабы ему повѣдал (л. 96) и скрыл въ таковомъ мѣсте, якоже бы никто вѣсть. Рыболов же ему повѣда: «в пустыни есть полата, ея же никто же вестъ». Григорей вельми его моляше, дабы его отвелъ тамо, моли же дабы его и замкнулъ и ключъ бы ввѣрглъ в море. Рыболов же сотвори тако по глѣлоу его, блѣженный же Григорей жилъ тоуть въ пустыни кѣ лѣтъ, и никтоже его не вѣде ту, токмо единъ рыболов.

<sup>1)</sup> Приписано на полѣ съ крестикомъ +.

По смотрению (об. 96) же Бѣжию бысть в Рыме папы не стало, и начаша людіе на прѣтль изыскавати папы, и явися во сне мужу стару и честну, яко не ищите в Рыме папы, бл҃говоли Бѣгъ быти папоу Григорию, оуже бо онъ сидит в пустыни ѿ лѣтъ, не вѣде его никтоже. токмо единъ рыболов. Они ж начаша молити его: «сей Григорей кдѣ?» Мл҃тву твориши (sic); и обрѣтоша рыболова, они же начаша (л. 97) молити его и вопрошати, рыболовъ же повѣда им, яко «посадил его я, посадил въ полатоу по его велѣнію, иже два на десять лѣтъ въ пустой полатѣ, а ключь полатной вверженъ в море, чаю оуже не живъ». Они же ему реша: «оукажи намъ полату оцоу». Он же оуказа имъ, они же начаша толкаті вельми в полатные двери и не могоша отбити, и повелѣ рыболову на обѣдъ рыбы изловити, что (л. 97 об.) ясти. По смотрѣнію ж Бѣжию ловець той оулові рыбину и начаша ю пороти, и обрѣтоша в ней ключь полаты той, и отвори полатоу, и виде в ней ст҃ля сидяща. И вси возрадовашася зело, и почюдишася вси о сицѣвой бл҃годати, и взяша его с молением и с великою чѣстїю, и пойдоша с ним в Рим, и моли его, дабы оу нихъ был в Рыме папоу: Он же не раздражи ихъ, и (л. 98) пребысть о у нихъ в Рыме папоу, и молящеся Бѣгу, а мѣти его тоу живяше без спокаянія, все срамляся студныхъ своихъ грѣховъ.

И нѣкогда расмысливъ, и гла в себѣ, «како приидет на мя смертныи часть и обряцеть мя без спокаянія, и что ми будетъ, многогрѣшной, развѣя горшия муки»; и рече: «пойду ко ст҃лю и падоу пред нимъ и повѣмъ ему вся бывшая грѣхи своя». Приидѣ (об. 98) къ нему и рече: «отче, приими мя, грѣшную, на покаяние». Онъ же приимъ ея, она исповѣдаеть, яко отцоу, вся бывшая грѣхи своя. Онъ же приимъ и разоумѣ, яко мѣти его, и падъ пред нею: «воистинну ты еси мати моя, азъ же сѣнъ твой, Григорей». Она же пад от оужасти мртѣва и возопі гласомъ веліимъ: «щедрыи Гдѣ мой, яко приимъ сѣна моего на покаяние, тако и мене приемля (л. 99) сѣно моему. Бѣ же чл҃колюбче, слава тебѣ». Бл҃женный же Григорей облече мѣтерь свою во иноческіи чинъ, и моли за нее Бѣга, дабы очистил грѣхи ея. Бл҃женный же Григорей живяше въ Рыме и пасоша стадо Хр҃тово до исхода живота своего; сеже бысть намъ, братис, на ползоу всѣмъ слышацимъ, нѣнѣ и присно и во вѣки вѣком. Аминь.

## VIII.

Сказаніе о царевиче рахменьскомъ Оирыгисе <sup>1)</sup>).

(л. 1). Бысть негде Рахменьское царство, и в томъ царстве царевичъ царствова Оирыгисъ, юнъ сы возрастомъ. И възскати себѣ похоте въ супружество подобно своему царскому величеству; избирая той царевичъ себе невесту многа время и послы посылая своего царствія ближнихъ своихъ вельможъ на възсканіе себе невесты во многія царства и королевства искати; и не исполни (?) възскати, возвратишася и сказаша, что не обретоша подобной царскому величеству невесты. Той же царевичъ Оирыгисъ вниде в недоумение. Нигде ему подобну себѣ обрести [неве]сту. І пріять во уме своемъ, чтоб ити [ему] в некоторыя пустыни і възпросити тамо пр[е]подобныхъ святыхъ отцевъ, чтоб они возвестили ему (л. 1 об.) о семъ, где бы обрести ему невесту, и поеде въ путь свои.

И какъ будетъ въ некоемъ лесе, и явися ему неки монахъ и вопроша его: «камо идеши, государь царевичъ»? Гря[ду], отце честны, въ пустыню ко отцемъ, вопрошати ихъ, чтоб возвестили мне, где мнѣ обрести невесту, подобну моему царскому величеству. Той же монахъ отвѣща ему: «государь царевичъ Оирыгисъ, не обрящеши ни единого отца сего ради во пустыни о семъ възпросити. Аще хощеши вопрошати, азъ тебѣ возведу невеста твоя; в будокомъ (sic.) царстве нищая есть и страмна, лежитъ на улице всегда; аще хощеши известно испытати и виждь (?) ея, какова она есть; царевичъ же слыша бысть в недоуменіи и в велице печали о семъ вопросы.

<sup>1)</sup> Рукон. Имп. Публ. Библ., Древлехр. Погодина. № 2004, 4<sup>о</sup>. нач. XVІІІ в.

Видиши ли человека сего во гробѣ лежаща мертва: и той был властителинъ нашего града, [бог]ать зело и славенъ, по многимъ градамъ [слухъ?] про него производилъ, и много служаху ему князи и во всякихъ людехъ и чиновъ со страхомъ предъ нимъ предстояли. И той велможа былъ золъ и немилостивъ и не милуя сироть (л. 2) и вдовиць, неподатливъ былъ, мздоимецъ и сребролюбецъ; во вся дни изжившая во пьянстве своя проводаша, въ блуде и в прелюбодѣйстве и во многихъ злобахъ греховныхъ. и бѣзпокаяния умроша. Внезалу приде смерть к нему і восхоте <sup>1)</sup> душу его отъ тела неготову. Такожде на семъ месте положенъ бысть, его же ты видиши. И позна его той члѣвкъ, яко же и ему знаемъ бысть, что жилъ во власти велицей и со страхомъ предъ нимъ предстояли.

И воздохнувъ члѣвкъ той изъ глубины сердца своего и тогда глаголя: «зрю тя во гробѣ и ужасаюся, страшно бо ми есть і виде і ужасно <sup>2)</sup>. О смерти, кто ты можеть удержати, царь или князь, или воинъ, богатъ, или нищъ? Но всехъ земля покрыеть, и вси единому гробу предадимся, токмо воземъ срачицу и саванъ. А слава что есть? все останется. О любимая братия моя, по[слу]шай Бога ради малбѣ (?) учение мое со вниманіемъ: зрять на тело сие и ужасайтесь и помните смертной часъ и разумеятъ (л. 2 об.) суетное богатство мира сего. Вечеръ былъ съ нами, а ныне единъ во гробѣ. Смердить тело почермело и червми изъядено. Все едину срачицу и саванъ и то все во гроб замкнуша. Слыши, братия моя, и разумеите, расскажу (?) вамъ, чада, слышавше ума моего. Поистинне, прелестъ житие наше на семъ свете: в день ростемъ, утре гниемъ. Смотрите, братия моя, и розумеите свету жития мира сего: овие прахъ творять, а иные по мертвыхъ жалосно провожаютъ. О суета мира сего; вмале является, а вскоре богатство погибаемъ <sup>3)</sup>».

И нача члѣвкъ той плакати и рыдати надъ гробомъ, убиватися, воспоминая жития своего кончину и смертное посещение и тако [гла]голя: «смотрите братия моя на тело сие и разумеите, где красота человека сего, но в красоты мѣста смрадъ зол из гроба ісходи ту. Тело почермело и червми изъедома. Горе намъ, горе, братия. Будеть (л. 3) велия беда и велика скорби: велика туга на

<sup>1)</sup> Сл. исправить: „восхити“.

<sup>2)</sup> Испорченное мѣсто. М. б., слѣдуетъ исправить: „і видеті ужасно“.

<sup>3)</sup> М. б., слѣдуетъ читать: „погибаетъ“.



семъ светъ чл̄вкомъ бываетъ: во единомъ часѣ чл̄вкъ видимъ и не-видимъ бываетъ. Единъ путь смертны праведнымъ и грешнымъ, единъ бо есть мечъ, общай праведнымъ и грешнымъ,—и не обинуется, но всѣхъ сечетъ: ни царя боится, ни князя срамится, ни светителя чтить, ни сидины, ни старости не милуетъ, не мучителя боится, ни млада падить, ни красна возраста милуетъ, ни хитрыми словеса своими не можетъ отъ смерти бо избыти, не можетъ смерть утолить на (ни?) ласковыми словеса не можетъ смерть утешити, ни слезами отъ смерти не оплакаться, но всѣхъ смерть равно приметъ: ни царя падить, ни убога, но в чемъ застанетъ, в томъ и судить. Слышать (слышите?), братіе, и разумейте: где цари немилостивы, где князи немилостивы, где судьи неправедныя, мзды неправедныя ради судяще, где князи объятницы (?), обидящи сироты (л. 3 об.) и вдовицы, где златолюбцы и сребролюбцы, где пьяницы и блудницы, прелюбодѣицы, клеветницы и чародеи, не все ли погибоша и не все ли смерть похитиша. Смотрите братіе на тело сие и ужасайтесь. Помните часъ смертны: и вчера былъ с нами человекъ сей, пилъ, веселился со други своими. а н̄не одинъ во гробѣ смадимъ (sic).

Посълушайте, братія моя, и разумейте, да кажу ва<sup>м</sup> смерть праведныхъ душъ, како имъ бываетъ: сие есть младенцо<sup>м</sup> утѣха, смерть праведнымъ отданиѣ, смерть служебнымъ свобода, плачущимъ утѣшение, смерть грешнымъ—смерть люта есть и немилостива, в чемъ застанетъ, в томъ и судить. Слышите бо, братія, во святомъ Евангеліе слово Божіе і глаголюще: аще когда тать придетъ (sic) в домъ некоего господина и подкопаеть <sup>1)</sup> хранину і покрадетъ; то бы ведалъ человекъ крепко стреляхся (sic) <sup>2)</sup>, не далъ бы подкопати храма своего. Такжеже і смерть, аки тать: к кому придетъ, при дверяхъ стоять і ждетъ (л. 4) повеленія Господня. Когда повелитъ Господъ ангеломъ своимъ взяти кою душу отъ тела, праведну или грешну, то скоро придетъ и не замедлитъ, і не даетъ времени не на единъ часъ, како бы покаяться и Богу исповедати сеи грехи своя отцу духовному; в чемъ смерть застанетъ в томъ и судити. Скоро разлучаютъ душу ту ангели отъ тела и понесутъ на воздухъ ко второму испытанию, идеже сотворены 29 мытарствъ на испытаніе всякой души, ісходящей отъ тела, праведной и грешной. Аще и душа праведна і безгрешна, то радуется, идетъ ко

<sup>1)</sup> Въ рук.: таты придемъ, подкопаемъ.

<sup>2)</sup> Слѣд. исправить „стрѣжахся“.

престолу Господню поклонитися подножию Господа Бога і Спаса нашего. Иисуса Христа; аще ли душа грешна и безпокояння умреть, то не дастъ ей до перваго мытарства дойти: возмут лютыя і немилостивыя ангели. Тогда та душа ізъязана будетъ і отвещающе <sup>1)</sup> харатейныя, съ ваги (sic) обличающе душу. что согрешихомъ в житие своемъ во дни іли (л. 4 об.) в нощи, и вся грехи ея обявлени будутъ во святцахъ бесовскихъ. Тогда сведуть душу ту во адово место і посадятъ в темницу до втораго страшнаго суда Христова. Моеи (?) никогда же ангели Божии на земли не живутъ, і те Бога боятся. И заповеди его не соблюдаемъ, всегда бы прогневаемся, грехи ко грехомъ припосимъ, а о душахъ своихъ не радеемъ и о покояние день от дни отлагаемъ. Слышите, братия моя, и разумеите, есть бо в мире семь, тако много человецы глаголють: «утрися покою, а не в день»; доиже тья (?) того человекъ до утреннаго покою. Слышите, человецы: вчера были с нами, а нѣне во гробе лежитъ мертвъ, а иныя на одрехъ лежатъ: да в томъ размышлени многи человецы бѣспокаяння помирають. Горе темъ, братия, будетъ, иже zde живущимъ, а о душамъ своихъ нерадеють, грабятъ и насилуютъ, крадутъ и разбиваютъ, чужая внимають, блудъ творятъ и прелюбодейства, мужи от женъ, [жены] от мужей, и законъ разоряють, к церкви Божей не ходятъ, о гресѣхъ своихъ отцу духовному (л. 5) не покаются, і во злобахъ греховныхъ дни своя провождаютъ, и без покояние помирають. Горе темъ, братия, будетъ! лутчебъ не родитесь, нежли имъ во веки мучитися. По истинне конечно сердце человека того, иже кто не плачится о грехахъ своихъ и не поминая смертнаго часа, и на покаяння не приходитъ ко отцу духовному, в грехахъ своихъ не каются. О господинѣ, братия моя, помните Бога ради часъ смертны, како быти согнателью (sic) телесемъ нашимъ и разлучению костемъ нашимъ, якоже позн <sup>2)</sup> родихомся, такожде многи отидохомъ. токмо возьмемъ едину срачицу и саванъ, а слава и богатство все минуется, и вси единому гробу предадимся, и всехъ равно земля покрываетъ. Аще мы, братия, zde Богу угодим о добрыми дѣлы, правдою и любовию, кротостию, смиреннемъ, милостыню нищимъ, покаяниемъ и к Богу о гресехъ своихъ чистою душевною і телесною, по истинне сынове Божии наречемся, царствию (л. 5 об.) небесному наслѣдницы будите

<sup>1)</sup> М. б., слѣдуетъ исправить: „отверзающе“, и далѣе—„харатейныя книги“; но и чтение „съ ваги (= съ вѣсами) обличающе“ даетъ смыслъ.

<sup>2)</sup> Слѣдуетъ исправить: „нази“, или, лучше,—„мнози“?

Слышите, братия моя, и разумеите, уже житию нашему конецъ приближается; мало уреченныхъ лѣтъ оставляется, времени дня скончаются, анѣтихристово рождество является на прелесть мира сего. Тогда будутъ пророцы лъживы, учителя несправедны, священницы будутъ пьяницы и зопоицы, а не учителя. Тогда велика тщета и молва, скорбь и туга умножится и ненависть велика. тщета в человецехъ, возненавидим другъ друга. Тогда возненавидеть отецъ сына и сынъ отца, и возненавидеть дщерь матеръ свою. Тогда возненавидеть брать брата и соседъ соседа, и сметение много в человецехъ о вере Христове. Да престанем, братия моя, от клятвы глаголати. Что житие наше на семь свете? аки степь мимоидеть и яко бы (л. 6) трава уведаеть (sic). Аще бы жития нашего было на семь свете по тысящи леть, [не] избыти нам горкия смерти, не убежати нам люты муки. Аще, братия, zde добрыми (sic) и без покаяния умереть, то не можетъ намъ тако отецъ сыну, і сынъ отцу, и мать дщери, [і дщерь] матери, не можетъ там брать брату, ни другъ другу, ни соседъ соседу: ідеже вся? равно станеть славни и неславни, цари и князи, и богаты и убоги и свободни. Никогда же возможеть всякъ человекъ ответъ воздати і пред Богомъ о себе в день суда Христова. Тогда повелить Господъ разлучити овцы от козлиць (sic), сиречь праведныхъ от грешныхъ. Праведницы стануть о десную руку престола Господня, лица ихъ просвя[тя]тца, а грешницы о шую престола Господня, лица ихъ почернеша. Всегда ныне и присно и во вѣки вековъ. Аминь.

---

IX.

Повѣсть о Басаргѣ.

л. 100. Слово о Дмитреѣ Басарги, и о сѣнѣ его, о отрочатѣ  
седемь лѣтъ <sup>1)</sup>).

Дмитрей Басарга го<sup>ст</sup>бу дѣяше, и покладошася в корабль, и поидоша со отроки в корабле за море. И Б<sup>ж</sup>имъ посещениемъ восташа вѣтръ велии, и носипа ихъ по морю седьмъ дней и <sup>2)</sup> принесоша ихъ ко градуу, и оу того града стоить кораблей безчисленно много. И Дмитрей ре<sup>ч</sup> (об.): «Что сия кораблей безчисленно много стояще? Мню, яко земля богата есть. Купцы в ней торгоуютъ». И сниде с корабля Дмитрей коупецъ и поиде во гра<sup>д</sup>. И стретоша его граждане, и рече ему: «Откоуду еси, купчине, и коя еси вѣры?» И рече имъ Дмитрей коупецъ: «Азъ, г<sup>с</sup>дне, из роуския страны, вѣрую во единого Б<sup>г</sup>а, отца и с<sup>н</sup>а і ст<sup>а</sup>го д<sup>х</sup>а». И рече ему граждане: «Брате коупецъ, (л. 101) единыя еси вѣры с нами роуския, то яко за н<sup>ш</sup>е согрѣшеніе посла<sup>н</sup> намъ Б<sup>г</sup>ъ ц<sup>р</sup>я законопрестоупника еллинския вѣры; томит насъ, хоцетъ привлещи к своей вѣре: и видиши ли, купчине, приходятъ коупцы со всѣхъ странъ, и хотяще торговати на семъ цр<sup>т</sup>вие, и ц<sup>р</sup>ь имъ велить три загатки о<sup>т</sup>гадать, а все то приводячи к своей вѣре: сихъ ради трехъ словесъ, г<sup>с</sup>, и л<sup>г</sup> кораблей (об.) тѣхъ коупцы сядятъ в тѣмнице. и заповѣдывае<sup>т</sup> ц<sup>р</sup>ь, не велить хлѣбов печи на торгѣ, дабы гладомъ измерьли». Купе<sup>ч</sup> же Дмитрей, слыша<sup>в</sup> то от гражданъ,

<sup>1)</sup> Рукоп. собранія Ундольскаго, № 632, XVII в.

<sup>2)</sup> На полѣ приписка тѣмъ же полууст. и идчаі (?).

и возвратися скоро на корабль свой, хотяще о̀плыти о̀ града. И приде на корабль свой, аже на корабле стоять стражи црѣвы: законъ таковъ црѣвъ, како приде корабль, той ча̀ велигъ пѣрь стражемъ своимъ стречи, дабы не о̀шелъ (л. 102) прочь. Дмитрий купецъ взя дары великия, и поиде ко црѣю. И тому црѣю имя Несмиянъ гордыи. И приде коупецъ Дмитрий, ста предъ црѣмъ, и рече коупецъ црѣю: «Гѣдрю црѣю, Несмияне гордыи, коупчишко пришелъ изъ рускія страны, что бы ты гѣдрь дары приня̀, а торговати велѣлъ на своемъ црѣтвѣ всякимъ товаромъ». И рече црѣрь коупцоу: «Буди, купче, обѣдати ко мнѣ, а дары оу тебя приму. По (об.) времени же приде коупецъ обѣдати ко црѣю; яко же пообѣда оу црѣря, и црѣрь рече коупцоу: «Коя еси вѣры?» Купецъ рече ко црѣю: «Азь еси земли роускія, вѣрую во сѣтоу трѣцоу, о̀ца и сѣна и стѣаго дѣха». И рече црѣрь коупцоу: «Азь чая̀, купче, единыя еси вѣры со мною и единого Бѣга; и азъ хотѣлъ тебѣ власть дати, да и торговати бы велѣлъ на своемъ црѣтве всякимъ товаромъ, и з дары и с проводники от (л. 103) оупустити ты хотѣлъ в твою землю; а нѣнѣча сказываешъ про себя, что не моя вѣры, но роускія, и нѣпѣ же вѣдомо ти боуди, купче: о̀гадай ми загадку, что азъ тебѣ загадаю. Аще ли ты о̀гадаешъ, и азъ тебѣ загадаю другою; аще ли о̀гадаешъ другою, и азъ тебѣ загадаю и третью; аще ли третью о̀гадаешъ, и азъ тебѣ велю торговати на своемъ црѣтвѣ всякимъ товаромъ, з дары и с про(об.)водники оупустити ты имамъ в землю твою. Аще ли моихъ загадокъ не о̀гадаешъ ни единыя загадки, и ты паки пребывай в моей вѣре, и азъ тебѣ воздамъ великую честь и торговати велю на своемъ црѣтвѣ всякимъ товаромъ, з дары и с про(об.)водники оупустити ты в твою землю; аще ли загадокъ моихъ не о̀гадаешъ, а в вере моей не пребудешъ, вѣдомо ти буди, купче, повѣлю главу твою мечем (л. 104) оусекнути, а товар твой велю весь в казну къ собѣ взять». Коупецъ же Дмитрий, слышавъ такіе речи, на долгъ ча̀ пониче главу свою на землю, и не имѣя. что црѣю отвѣща̀тѣ. И рече купецъ црѣю: «Годе. црѣю, державе твоей и тако будетъ; дай ми. црѣю, сроку на три дни помыслити; в четвертыи дѐ придоу къ тебѣ, да о̀гадаю загадку». Црѣрь емоу даде сроку на три дни. И прииде купецъ Дмитрий (об.) на корабль свой плачючі, о̀ црѣря смѣрти чаючі. А сѣнъ его играетъ на корабле, на древце вѣдzące, роукою за конецъ держитъ, а другою плеткою побиваетъ, творщесе, яко на копѣ скакаше, яко же дѣтемъ подобаетъ тако игры творити. И віде о̀ца своего плачущесе, вельми иэнемогающа, и абие дѣтѣще о̀ложивъ игру свою

и скоро прише<sup>л</sup> ко о<sup>т</sup>цоу своему; и рече дѣтище о<sup>т</sup>цоу своему: «Что (л. 105) ты вижоу, о<sup>т</sup>че, печальна, велми и<sup>н</sup>емогающа? Кое зло приключи<sup>л</sup>я на ты на семъ цр<sup>т</sup>вѣ»? И рече о<sup>т</sup>цъ сыну своему: «Чадо мое поломянное (sic), играеши по децки, а о<sup>т</sup>цовы печ<sup>а</sup>ли не вѣдаеши; не вѣси ли, чадо мое, что ми ц<sup>р</sup>ь о<sup>т</sup>вѣщал смертныи часъ. А о<sup>т</sup>вѣту не имамъ пособити о<sup>т</sup>цоу твоемоу». И рече дѣтище о<sup>т</sup>цоу своему: «(О<sup>т</sup>че, скажи ми, что тебѣ ц<sup>р</sup>ь извѣщалъ, скажи ми какоую реч<sup>ь</sup>? Азъ помогоу ти». И рече (об.) о<sup>т</sup>цъ с<sup>н</sup>у своему, во<sup>з</sup>дохвоу<sup>а</sup> и<sup>з</sup> глоубины ср<sup>д</sup>ца своего: «Тебѣ помочи мнѣ, о<sup>т</sup>цоу твоемоу, младому о<sup>т</sup>рочати не мошно; а<sup>з</sup> сверше<sup>н</sup> мужъ и смысленъ, а не<sup>н</sup>аю, что ц<sup>р</sup>ю о<sup>т</sup>вѣпцати». И рече дѣтище о<sup>т</sup>цоу своему: «О<sup>т</sup>че, скажи ми, что тебѣ ц<sup>р</sup>ь извѣщ<sup>а</sup>л, какоую реч<sup>ь</sup>? Повѣдай, а<sup>з</sup> помогу ти. Вѣдомо буди, о<sup>т</sup>че: конь на рати познаваеця, а милой друг оу бѣды; о<sup>т</sup>че, скажи ми, что тебѣ ц<sup>р</sup>ь извѣщ<sup>а</sup>л». И реч<sup>ь</sup> (л. 106): «Скажи ми, младому о<sup>т</sup>рочати; аще ли, не скаже<sup>ш</sup> мне, то самъ от ц<sup>р</sup>я смерть восприимешъ и меня погубишь». Слыша<sup>в</sup> же о<sup>т</sup>цъ от с<sup>н</sup>а своего моудрую реч<sup>ь</sup>, и рече о<sup>т</sup>цъ с<sup>н</sup>у своему: «То и печаль и рыданіе имам: ц<sup>р</sup>ь мнѣ велѣлъ загадкоу о<sup>т</sup>гадывать оу собя: трехъ си ради трехъ загадокъ, т<sup>ѣ</sup> и л<sup>ѣ</sup> купцы седа<sup>т</sup> в темницахъ, терпятъ наготу и скорбь и жажду имѣни ради Хр<sup>т</sup>ства. И заповѣдываетъ ц<sup>р</sup>ь неве(об.)лить хлѣба печи на то<sup>р</sup>гъ, дабы гладом изымерли. Аз же страха ради цр<sup>в</sup>а взя сроку на три дни, а в четвертыи д<sup>н</sup>ь хоче<sup>т</sup> ц<sup>р</sup>ь гл<sup>ѣ</sup>ву мою мечем о<sup>т</sup>сеци, а товарь мой на собя взяти». И рече с<sup>н</sup>ъ о<sup>т</sup>цоу своему: «Прости мя, о<sup>т</sup>че, гл<sup>ѣ</sup>ати пред собою; безоумныхъ мужей рыданіе твое: хочешъ единъ печал<sup>ь</sup> свою оутати, а мнѣ, младому о<sup>т</sup>рочате, свое<sup>му</sup> возлюбленному с<sup>н</sup>у не повѣдаешъ: а<sup>з</sup>. о<sup>т</sup>че, помогу (л. 107) ти; во<sup>з</sup>вѣрзи на Г<sup>д</sup>а печал<sup>ь</sup> свою, и той ты препитае<sup>т</sup>; молися Б<sup>г</sup>оу, а<sup>з</sup> ц<sup>р</sup>ю загатки о<sup>т</sup>гадаю». И взя игру свою и нача играти. О<sup>т</sup>цъ же о<sup>т</sup> с<sup>н</sup>а своего малую оутѣхоу приим, и рече в себѣ: «С<sup>н</sup>ъ меня тѣши<sup>т</sup>, а ничево ему младому о<sup>т</sup>рочате не помочи». И плакахоуся всю три д<sup>н</sup>и, и оуже свѣтающу четвертому д<sup>н</sup>и, и призва купец<sup>а</sup> с<sup>н</sup>а своего и рече к нему: «Се, с<sup>н</sup>ъ мой, тот д<sup>н</sup>ь прише<sup>л</sup> которого есми просил<sup>ь</sup> оу (об.) ц<sup>р</sup>я; что мнѣ велишъ прѣ<sup>д</sup> ц<sup>р</sup>емъ гл<sup>ѣ</sup>ати»? И рече с<sup>н</sup>ъ о<sup>т</sup>цоу своему: «Пойдем, о<sup>т</sup>че, пред ц<sup>р</sup>я, да возмем с собою единаго раба; воля Господня да будетъ; яко же годѣ Гд<sup>в</sup>и, тако и будетъ, боуди имя Г<sup>д</sup>не бл<sup>г</sup>гословенно о<sup>т</sup> н<sup>н</sup>ѣ и до вѣка». О<sup>т</sup>цъ же дивися разоумному о<sup>т</sup>вѣту с<sup>н</sup>у своему, помышляюще в себѣ: «Г<sup>д</sup>и, что буде<sup>т</sup>!» И поиде купецъ Дмитрей с сыном своимъ и с рабомъ и ста пред ц<sup>р</sup>емъ, и поклонишася

всѣ три равно до (л. 108) земли; и рече сѣнъ коупцо: «Дай ми, цѣрю, нити, аз тобѣ огадаю загадку». И рече цѣрь дѣтищю: «Не подобаетъ тобѣ загадки мои огадывати: аз коупцу томуо загадываю загадки, а не тебѣ, младому отрочате». И рече дѣтище ко цѣрю: «А оу отца сѣнъ превозлюбленныи и азъ ото оца своего огадываю огатки». Цѣрь же налия в чашу злату медоу и дасть коупцу; дѣтище же рече оцу своему: «Отче выпей и скры (об.) в нѣдра свое, занеже цѣрво даynie не ходитъ вспять». Отцъ же послоуша сѣна и скрыша чашу в нѣдра своя. Цѣрь налия другою чашу медоу и дасть дѣтищу, дѣтище же, испив, и тоу чашу скры в нѣдра свое, тако же и рабоу повелѣ скрыти; и рече дѣтище: «Цѣрво даynie не ходитъ вспять». И рече цѣрь: «Тебѣ г҃лю, дѣтище, огадай мнѣ загадку мою: много ли того или мало о востока до западоу, скажи ми»? И (л. 109) г҃ла дѣтищу: огадывай огатку!» Дѣтище же г҃ла ко цѣрю: «Ни мало того, ни много—днѣ с нощию: сл҃нце преидеть весь кру҃ небный от востока до западоу единымъ днем; а нощию единою преидеть сл҃нце о севера и до юга; то тебѣ цѣрю моя огатка». Оудивися цѣрь разоумному о҃вѣтоу его, что ему добрѣ разумно о҃вѣща<sup>1)</sup>. Цѣрь же, налия в чашу златую медоу, и дасть купцоу и сѣноу такоже и рабоу (об.). Дѣтище же повелѣ и тѣ скрыти в нѣдра свое, и рече: «Цѣрво даynie не ходитъ вспять». И рече цѣрь дѣтищу: «Другою ми загадку огадай до утрий же днѣ, а ннѣ повеселимся». Почтив же цѣрь коупца і сѣна и раба и опусти ихъ. На оутрии же повелѣ цѣрь собрати наты и тираны, кнѣзи и бояря, и граждане на предивное чюдо: седми лѣтъ дѣтище царевы загадки огадываетъ. Цѣрь же сяде за сто(л. 110) лом среди двора своего, на престолѣ цѣрком. Приидѣ же коупецъ с сѣномъ и с рабою и ста пред цѣремъ, и поклонихася всѣ три равно до земли. И рече цѣрь: «Млады<sup>2)</sup> отрокъ, а разоумом смышленъ, огадай мнѣ сегодни другою загадку: что днѣмъ десятая часть в миру оубоудеть<sup>1)</sup> а нощию десятая часть в мироу прибываетъ». И рече дѣтище ко цѣрю: «Млады<sup>2)</sup> отрокъ твои загадки; сихъ ради словестъ, г҃и и л҃ (об.) коупцовъ сядят в тѣмницѣ оу тобя. То, цѣрю, дне<sup>2)</sup> десятая часть воды усыхает о сл҃нца из моря і из рекъ и из озеръ, а нощию десятая часть в мироу прибываетъ, на тог ча<sup>2)</sup> воды исполняется, занеже сл҃нцоу зашедшу и не сияющю; то тебѣ, царю, мѣя огатка».

1) На полѣ: „убываетъ“.

Дивишеся цѣрь томоу разоумному оѣвѣтоу, что ему разоумно оѣвѣщал, и рече цѣрь: «Младыи отрокъ, разоумом смышленъ, (л. 111) оѣгадай ми сегодѣни третьюю загатку, чтобы<sup>сѧ</sup> вамъ, крѣстьяномъ, поганой не смеялся». И рече детище ко цѣрю: «Потомоу что мало оу тебя людей, не перед кемъ сказати; дай мнѣ цѣрю срокоу на пять дѣне»,— в шести дѣни повели проповѣдникомъ клякати по всеѣмъ торгомъ, дабы шли на цѣревъ дворъ паты и тираны, кнѣзи и бояря, и всякие люди: моужи, жены и двѣцы; (об.) а вамъ граждане добро будетъ». Цѣрь же ладе емоу сроку на пять дѣней. Въ 5 дѣни повелѣ проповѣдникомъ клякати по всеѣмъ торгомъ: и снидеса весь градъ на цѣревъ дворъ. Цѣрь же сѣдя на прѣтле своемъ среди двора своего, держа в роукахъ своихъ жезлъ и мечъ, хотя глѣвы оѣсеци купцоу и сѣну и рабоу. И прииде коупецъ с сыномъ своимъ и с рабомъ на цѣревъ дворъ, и стапа оу прѣтла цѣрского и поклонишася (л. 112) цѣрю всеѣ три равно до земѣли. И рече цѣрь дѣтицоу: «Младыи отрокъ, разоумомъ смышленъ, оѣгадай ми сего дѣни третьюю загатку, чтобы сѧ поганой вамъ крѣстьяномъ, не смѣялся». И рече дѣтище цѣрю: «Ты, цѣрю, великъ естъ, сѣдяще на престоле своемъ висоцѣ: а яѣ есми отрокъ млада, стою оу престола твоего, и аѣ тобѣ что скажу, и ты молвиши: «не послушаѣ». И ты, цѣрю, ссѣди с прѣтла своего да пусти меня, и (об.) азъ стану на прѣтлѣ твоємъ, и дай ми с себя одеяние свое и жезлъ и мечъ своимъ роукама ми, и аѣ тобѣ оѣгадаю загатку». Цѣрь же, слышавъ отъ отрока и стаѣ иступления оума своего, и отцѣпляше кости его, и ступиша с престола своего, и пусти дѣтища на престолъ, и дасть ему с сѣбѣ одѣяние свое и жезлъ и мечъ своимъ роукама. И рече цѣрь в себя: «Азъ его тѣшу, а что емоу здѣлати млада (л. 113) дому отрочатѣ». А не вѣдаеть того, яко Бѣга дасть власть, комуждо восхоцѣт. И бысть голка во дворѣ томъ, и рече дѣтище ко цѣрю: «Повели молчати людемъ». Цѣрь же повелѣ молчати людемъ, и бысть тишина велия, и возопи отрокъ великомъ гласомъ: «Паты и тираны, кнѣзи и бояря, и все люде граждане, мужие и жены и двѣцы! В которого Бѣга хотите зѣрвати?» И возопиша люде вси единымъ гласомъ: «Хотимъ (об.) зѣрвати во сѣтую Тройцу, оѣца и сѣна и сѣтаго дѣха, помози намъ дѣтище!» Дѣтище же, извлекъ мечъ, оѣсече глѣву цѣрю; и рече дѣтище цѣрю: «Вотъ тебѣ третьяя загатка—моя оѣгатка! Не смейся, поганой, намъ, крѣстьяномъ!» И бысть голка велика в томъ дворе. И рече дѣтище: «Повелите людемъ молчати». И бысть тишина велия во дворе томъ, и рече дѣтище: «Паты и тираны, кнѣзи и бояря (л. 114) и вси люде граждане, мужие и жены,



того <sup>1)</sup> себѣ царемъ поставите?» И возопиша вси людие единымъ гласомъ, гл҃аша: «Ты насъ избавилъ о҃т горькаго сего мучителя, ты оу насъ и ц҃рь боуди!»—«Коли есте произволили меня над собою ц҃ремъ быти, не вашимъ то произвольнїемъ, Б҃жїимъ оустроениемъ все възбѣстеся: аще Б҃гъ по насъ, кто на ны. Десница твоя, Г҃ди, прославися в кр҃пости, десная ти рука, (об.) Г҃ди, сокруши враги. Аще бы не Г҃дь преда<sup>н</sup> мнѣ сего гонителя. младому о҃рочате, то како мочно зрѣти на таковое величество и гордость его? Ц҃рь бо именуется и все цр҃тво покоренено соуть емоу, н҃нѣ же Г҃дь предаде в роуцѣ наши; и возвеличимъ Г҃да и прославимъ милосердіе его, и даваша на<sup>м</sup> побѣды на враги наша: избавилъ есть Г҃дь о҃ца моего и мене, единочадна<sup>г</sup> и<sup>з</sup>любленнаго раба своего, (л. 115) Г҃ди, и рабѣ нашихъ о҃т лютаго сего мучителя и горькаго см҃рти. обья насъ Г҃дь милостию своею, посетилъ. не о҃торгъ соущия вѣры; кр҃стьянinem на<sup>м</sup> подобае<sup>т</sup> славити с҃тоую Тр҃цоу, о҃ца и с҃на и с҃таго д҃ха». И вси людие кликнуша едінымъ гласомъ с великою радостію, а иныя о҃т радости слезы испустиша: «О мл҃рдїе вл҃чнє! Многа лѣтъ ц҃рю нашему новому Борзосмыслу!» И дивїшеся вси великой (об.) моудрости и младости. И рече ц҃рь Борзосмысл: «Взыщите патриарха». Онї же ему рекоша: «Г҃дь ц҃рь новой, патриархъ. наш оуч҃тель, гонимъ бысть злымъ наши<sup>м</sup> о҃ступникомъ ц҃ремъ в заточенїе». И повелѣ<sup>т</sup> ц҃рь вскоре и<sup>з</sup>заточенїя выпустити да бл҃гословити себя на цр҃тво. И прииме<sup>т</sup> свой пр҃толъ, яко же и первїе, и нача люди оучити закону Б҃жїю, и по заповедѣмъ Б҃жїимъ ходити. (л. 116) И бысть радость велия во цр҃твїи томъ, и дивїшася вси разоумному словеси его. Онѣ же с радостію кн҃зи и бояра и воеводы послаша множество посланнїко[вѣ], изыскаша патриарха в заточенїе, и сказа<sup>ша</sup> все порядоу патриархоу, что содѣяшася во цр҃твїи то<sup>м</sup> и какъ по него послалъ новыи ц҃рь Борзосмыслъ. Патриархъ же, слыша<sup>в</sup> то, прослезися, и роуцѣ воздѣвъ на н҃бо, и рече: «О вл҃ко, (об.) что ти во<sup>з</sup>дамъ, мл҃рдїю твоемоу, иже намъ даровалъ еси в послѣднїе лѣта наши, не преда<sup>н</sup> еси насъ в роуцѣ беззаконному ц҃рю, избавилъ еси цр҃тво и люди о҃т горькаго сего мучителя». И поїде патриархъ с радостію великою с посланными к цр҃тvoу. И прїиде патриархъ ко цр҃тvoу, и возвестиша ц҃рю приходъ патриархъ<sup>ш</sup>скїи. Ц҃рь же повелѣ<sup>т</sup> всемоу цр҃рствоу встрѣтити патриар(л. 117)ха с великою честїю, со кресты

<sup>1)</sup> Слѣдуетъ исправить по смыслу: „кого“.

и со иконы, и со сѣщеннаки, и с клирасы; и вси граждане стары и велицы и младыя мужи и жены и девицы и вси стретоша патриарха: не обрести такового члѣка, еже не плачущесе, но вси плачют о радости великия; патриарх же покѣнишася новому цѣрю, Борзосмыслоу, и весь град слезами исполнися, и вскрикнуша вси людие о радости великия: «Многа (об.) лѣтъ цѣрю гдѣрю нашему новому, Борзосмыслу! Тебѣ повелѣ Гдѣ црѣтовати, тебя Гдѣ посла<sup>н</sup> избавити насъ и градъ нашъ о горкаго сего мучителя!» И дивися патриархъ возрастоу его и смыслоу. И вниде в цѣрквь, сотвори млѣтвую, яко же подобаетъ патриархомъ, поставити на немъ ро<sup>г</sup> и ма<sup>с</sup>ла древянаго; и воскипѣ ключемъ ро<sup>г</sup>, и блѣгослови его патриархъ на црѣтво, и люди вси кликнуша, (л. 118) от млада и до велика: «Многа лѣтъ гдѣрю нашему новому, цѣрю, Бѣгом венчанному [Борзосмыслу] <sup>1)</sup> Дмитреевичю о нѣнѣ и до вѣка». Аминь.

<sup>1)</sup> Добавляемъ имя, очевидно, пропущенное по недосмотру писцомъ.

Х.

**Новѣсть о Иване Понаморевице, како имѣлъ брань с турскимъ сатано<sup>1)</sup>.**

(Л. 119). Бысть в древнихъ лѣтахъ близъ турецкой земли живяше при цркви иѣки понамарь, именовъ Германъ. Той имѣя у себя единого сына, именовъ Ивана. зѣло прекрас (об.)на и разумна (?), силна и премудра, и изучена всякому премудрому художеству. Во едино время случися мимо той страны ити турецкому послу, именовъ Куарту, которой посыланъ отъ турецкаго салтана к персидскому шаху, и стояти в дому того понаморя Германа; снъ же ево Иванъ нача в гусли играть преславны игры. I удивися турецкой посоль играшию тому, красотѣ i разуму и премудрости Ивановой, и (л. 120) умыслилъ Куартъ, дабы ево у тово понаморя взят и отвести в подарки гдрю съвоему, турецкому салтану. II отъ правя посольство персидскому шаху, возврати<sup>1)</sup>ся в землю свою и послал к тому понамарю на взятне сына ево с чловѣкъ, а самъ посо<sup>1)</sup> ста<sup>1)</sup> отъ тоя цркви в семи поприцахъ. И какъ узрѣвъ такой приездъ турски<sup>1)</sup> людей Германъ понамарь, ужасеся зѣло, и бѣжавъ скоро, повѣда сыну своему Ивану. I рече к нему сынъ ево Иванъ: «Не (об.) страшися, государь батюшка, приходу тѣхъ поганыхъ турокъ, дай мнѣ благословенне свое». I взялъ у отца своего благословенне. Не успель коня съвоего оседлать, и палицы желѣзныя взять, турки же оступиша дворъ ево. Иванъ же ухвативъ заборину, i выскочилъ борзостию, побилъ у двора своего всю с члвкъ до смерти, толко оставил живыхъ дву члвкъ, и рече к ним: «Ше<sup>1)</sup>, возвѣстите о мнѣ Куарту,

<sup>1)</sup> Рукоп. Импер. Публ. Б. О. XVII, № 57 (=Бусл. 97), полов. XVIII в.

послу своему,, чтоб онъ онъ отсюда уехалъ здравъ в зе[м]лю (л. 121). свою». Они же шедъ сказаша послу своему, что Иванъ понаморевичъ побилъ всю сѣ члѣвкъ и хочеѣ доехавъ тебя до смерти убить. Куарт же, слыша то, скоро побѣжаѣ в зе[м]лю съвою и, приехавъ, возвести все по[д]робно салтану, г[о]с[т]рю свое[му]; салтан же, слыша оѣ Куарта такія словеса, послаѣ с нимъ по Ивана ꙗ[к]о. И какъ по[д]лышалъ Иванъ Понаморевичъ велики приездъ по себя турскихъ людей, шедъ на конюшню оседлалъ своего добраго коня и взялъ палицу желѣзную і рече (об.) оѣцу своему: «Государь мой батюшка, иду я на битвенное дѣло противъ поганыхъ турокъ на се[б]е добромъ свое[м] конѣ, а другой богатырской конь на конюшне будеѣ стояѣ. И какъ я буду убить, то конь станеть в крови по колени стояѣ, и ты осе[д]лавъ пое[д]ждаѣ ко мѣѣ; тоѣ конь до моего мертваго тѣла тебя самъ довезеѣ». Пото[м], простяся со отцемъ свои[м] и матерею, сѣлъ на своего добраго (bis) коня, поехалъ противъ турскихъ людей и (л. 122) нача ихъ крѣпко побиваѣ на обѣ стороны: сколко бьетъ палицею, вдвое тово коне[м] топчеѣ. И побилъ всю ꙗ[к]о, не оставилъ ни единого человекъ жива. У турскаго салтана в то время была война с королемъ Аринарской земли, имене[м] Елиострогомъ. Слышавъ то Иванъ, что Аринарской король имѣеѣ брань с турецки[м] салтаномъ, и поехаѣ до него. Пото[м] паеха велику силу побиту лежить. Иванъ Понаморевичъ закричалъ богатырски[м] голосомъ: «Есть-ли (об.) в сей рате живъ человекъ, и онъ бы повѣдалъ мнѣ, чья сия сила побита лежиѣ». І рече къ нему ис той рати живъ человекъ: «Сия, государь. раѣ побита Лпострога, короля Аринарсково; побивалъ сию силу турецкой салтанъ, а доступалъ дочери ево, прекрасной королевны Клеопатры». Пото[м] рече ему: «Поѣ симъ кустомъ ракиновымъ лежитъ мечъ кладенець; и ты возми ево себѣ». Он же, взявъ мечъ, и рече: «Сей мечъ легокъ; вѣдаю, что не силнаго б[о]гатыря», и положиѣ ево (л. 123) (ево) пот той же кустъ, и поехаѣ в путь свой. Пото[м] паехаѣ другую силу побиту лежиѣ; он же второе закричалъ громкимъ гласомъ: «Есть ли в сей рате живъ человекъ?» Рече къ нему из рати живъ человекъ: «Сия рать короля Лпострога, а побивал еѣ турецкой салтанъ, доступалъ дочери ево, королевны Клеопатры». І рече ему: «Поѣ си[м] кустомъ лежить мечъ кладенець». Иван же взяв мечъ і рече: «Сей мечъ не силнаго богатыря», и положил ево по[д] тоѣ же кутѣ і оѣехалъ оѣ того места.. И нае(об.)халъ в близости королевства Аринарсково зѣло велику силу побиту воинскихъ людей і во[д]кричалъ б[о]гатырскимъ голосомъ: «Есть ли в сей рате живъ чело-

вѣкъ?» Ис той рати рече ему живъ человекъ: «Ся рать Аринарского короля, побита о<sup>т</sup> турскаго салтана». Потомъ рече ему: «По<sup>а</sup> си<sup>м</sup> ку-сто<sup>м</sup> ракиковы<sup>м</sup> лежитъ мечъ кладенець». Иванъ Понаморевичъ выня<sup>т</sup> мечъ і бысть радощенъ и рече: «Сей мечъ моево плеча б<sup>г</sup>гатырскова». И поеха<sup>т</sup> до кралевства Аринарского. И какъ приехал, прине<sup>с</sup>ся (л. 124) в знако<sup>м</sup>цы служить к некое<sup>му</sup> тоя зе<sup>м</sup>ли великому князю. Къняз же той ве<sup>м</sup>и ево любилъ, такъ, какъ сына своего. І не во<sup>м</sup>нозѣ времени приде по<sup>а</sup> кралевство Аринарское турской са<sup>т</sup>танъ, а с нимъ войска пришло ꙗ<sup>к</sup>ѡ. Аликестрогъ король повелѣ войско свое збирать, и собра войска ꙗ<sup>к</sup>ѡ и поиде со всею ратию проти<sup>в</sup> турскаго салтана. Иван же По<sup>на</sup>маревичъ видѣ собрание кралево на турскаго салтана, нача князя своего молити, дабы ему поволи<sup>т</sup> еха<sup>т</sup> на то битвенное [дѣло] и по<sup>с</sup>мотре<sup>т</sup> сло<sup>в</sup>(об.)ства обоихъ войскъ. Князь же о не<sup>м</sup> імяше велико желание. не поволи<sup>т</sup> ему ехать на то битвенное дѣло; он же видѣвъ, что князь не о<sup>т</sup> пускае<sup>т</sup> ево на то битвенное дѣло, взмешкавъ малы ча<sup>с</sup>, ше<sup>а</sup> на конюшню, осе<sup>а</sup>лавъ добраго коня і взявъ мечъ свой, тайны<sup>м</sup> обычае<sup>м</sup> поеха<sup>т</sup> на то би<sup>т</sup>венное дѣло; и приехавъ в пол<sup>к</sup>и, крикну<sup>т</sup> свои<sup>м</sup> богатырски<sup>м</sup> гласо<sup>м</sup>, что всѣ пол<sup>к</sup>и о<sup>т</sup> тово ево гласу возмутились; и напусти<sup>т</sup> на полки турския, нача<sup>т</sup> ихъ жестоко руби<sup>т</sup>, что все (л. 125) турки в бѣгство себя пре<sup>т</sup>вориша. И побивъ турскую силу, в той чя<sup>с</sup> приехавъ х князю тому и ра<sup>с</sup>се<sup>а</sup>лавъ своего добраго коня, ше<sup>а</sup> в полату свою. Приехавъ и король со всею ратию в кралевство свое, и нача благодарствовать всеси<sup>л</sup>наго Бога, что Богъ избавилъ ево о<sup>т</sup> турскаго са<sup>т</sup>тана. И спутя послѣ того ꙗ<sup>к</sup>ѡ года, в чет<sup>в</sup>ертое лѣто собралъ турской салтанъ войска своего ꙗ<sup>к</sup>ѡ и приде на разорение кралевства Аринарскова; Алиострох же ко(об.) роль, видѣвъ собрание велико турскаго войска, и бысть в велицей печали, і поиде со всею силою своею противъ турскаго салтана. Иван же Понаморевичъ, видѣвъ похоть на турскаго са<sup>т</sup>тана, ста<sup>т</sup> прошатца у князя своего посмотре<sup>т</sup> того битвеннаго дѣла (по<sup>с</sup>мотре<sup>т</sup>). Князь же той, видѣвъ ево крѣпкое хотѣние, поволи<sup>т</sup> ему ехать. Иван же, ше<sup>а</sup> на конюшню, осе<sup>а</sup>лавъ своего добраго коня, и поеха<sup>т</sup> с великою борзостію. І какъ доехавъ до (л. 126) полковъ, і видѣ сло<sup>в</sup>а обои<sup>х</sup> войскъ, и напусти<sup>т</sup> на полки турския всею прытостію своею, и нача их жестоко рубить, и турския пол<sup>к</sup>и едва могли убѣжать, і са<sup>м</sup> турской салтанъ едва мо<sup>г</sup> убѣжа<sup>т</sup> с небольшими лю<sup>д</sup>ми<sup>1</sup>), Иван же,

<sup>1</sup>) Можетъ быть, слѣдуетъ исправить: „с наболшими“.

отбивъ силу турецкую всю, і поехалъ въ домъ свой х князю тому. Князь же видѣвъ приездъ Ивановъ і коня ево утомлена<sup>1)</sup> въ крови человѣческой, разумѣвъ, что онъ силен и премудрый богатырь. И приехавъ король Алиострогъ со всею (об.) силою своею невреди<sup>м</sup>, і начя всемогущему Богу хвалу воздавать, и повелѣ съ прилѣжаніем<sup>м</sup> во все<sup>м</sup> кралевствѣ своемъ искать того б<sup>г</sup>гатыря. Князь же той рече ему: «Государь король Алиострогъ, при мнѣ пребываетъ, не вѣмъ, какой человѣкъ. Онъ двжды о<sup>т</sup> мене тайно ездилъ на бой и приеждя<sup>н</sup> въ домъ мой: коня своего имѣеть измучима і [въ] великой крови человѣческой. Король же повелѣ ево привести пре<sup>д</sup> себя; князь же въ той часъ поставилъ Ивана пре<sup>д</sup> (л. 127) короля; і видѣвъ ево король лице<sup>м</sup> прекрасна і [до]ро<sup>ч</sup>на роста<sup>м</sup>, выда<sup>е</sup> за него дочь свою, Клеопатру, и пото<sup>м</sup> поживе Алиострогъ невелико время, представися и погребенъ бысть Иваномъ. Иван же начя правити кралевство, и послѣ того спусти немало время при<sup>е</sup> по<sup>д</sup> кралевство турецкой салтанъ і ста о<sup>т</sup> града за воси<sup>м</sup> поприщъ. И взя салтанъ мочнаго своего пашу, именемъ Бѣгаря, і идоша во градъ нищенски<sup>м</sup> образомъ. И въ то время Иванъ имѣлъ гуляние за охотою. И войде салтанъ во градъ, приде на кралевской дворъ просить милостыни, Клеопатра же стала милостыню дава<sup>т</sup>. Видѣвъ же салтанъ прекрасную Клеопатру, рече ей: (об) «Покажи, госпоже, мечъ кладенецъ, которымъ Иванъ Пономаревичъ воюетъ». Она же повелѣ вынести, и вынесли мечъ б<sup>г</sup>и<sup>и</sup> человѣкъ, и салтанъ велѣ<sup>н</sup> взя<sup>т</sup> мочпо<sup>му</sup> паше и унесли со двора кралевскаго и скоро<sup>ст</sup>ию приступиша по<sup>д</sup> градъ. Иван же, Пономаревичъ скоро приеха<sup>н</sup> и повелѣ<sup>н</sup> коня се<sup>д</sup>ла<sup>т</sup>, самъ вооружися, войде въ полату і не обрѣте меча того; спросивъ жены своей, она же рече: «Не вѣмъ, какой нищей приходилъ и несе мечъ той». Он же взявъ палицу желѣзную і выеха<sup>н</sup> въ чистое поле и начя их жестоко бити палицею, и пробился въ средину силы тоя; и видѣ мочны паша і уби<sup>н</sup> Ивана (л. 128), до смерти. Салтанъ же турецкой приехавъ во кралевство, Клеопатра же принимаетъ салтана любезно. И по обычаю, Ивана Пономаревича отецъ, Германъ, войде въ конюшню — ажно конь въ крови по колени стои<sup>т</sup>. Он же начя горко плакати и, осе<sup>д</sup>лавъ добраго коня, поеха<sup>н</sup>. И тотъ конь доведъ ево до мертваго тѣла сына ево. Германъ же видя сына своего изрублена, и не вѣдае<sup>т</sup>, что об немъ сотворити; провещетъ же конь ево (члѣвче) человѣчески<sup>м</sup> гласомъ: «Гсдинъ

<sup>1)</sup> М. б., слѣдуетъ читать: „утомлена“?

мой, Германъ, аще хоцещи сына своего здрава видѣть, разрѣши чрево мое и вынь всю (об.) внутренню<sup>1)</sup> мою и вымажь кровию ево: и меня стану<sup>т</sup> враны младыя клева<sup>т</sup>, и ты поймай врана и проси живой воды и мертвой». Герман же здѣла<sup>л</sup> все по<sup>а</sup>робно, и прилете вран<sup>а</sup> млада и ста<sup>л</sup> конево мясо клева<sup>т</sup>. Герман же пойма<sup>л</sup> врана и хоче<sup>т</sup> растерзати: провеще<sup>т</sup> же вранъ человѣчески<sup>м</sup> гласо<sup>м</sup>: «Господине Геръманъ, не терзай мене, я тебѣ принесу живой и мертвой воды на и<sup>ц</sup>еление сына и коня твоего». И полетѣ вранъ за Воклонския реки х королю Редозубу. И в то время мыли дѣвицы королевское платье, он же вранъ во<sup>х</sup>итивъ (л. 129) лутчею срачицу, и рече вранъ человѣчески<sup>м</sup> гласо<sup>м</sup>: «Дайте мнѣ два сосуда живой и мертво[й] воды». Они же даша ему живой и мертвой воды, и полете вранъ к Герману. Герман же взял и о<sup>п</sup>усти<sup>л</sup> жива врана. Потом Герма<sup>н</sup> взял воды и сприсну<sup>л</sup> сына своего живою водою и бы<sup>т</sup>ь сынъ ево здравъ. И спрысну<sup>л</sup> тою же водою и коня своего, и конь ево бы<sup>т</sup>ь здра<sup>в</sup>. Иван же рече о<sup>т</sup>цу своему: «Гдѣрь батюшка, изволь еха<sup>т</sup> в до<sup>м</sup> свой, а я управлюся с не<sup>д</sup>руго<sup>м</sup> свои<sup>м</sup>». Он же Иванъ узрѣ на пути кресьянина идуща и рече ему: «Аще хоцещи (об.) добро тебѣ, а<sup>з</sup> стану предивнымъ коне<sup>м</sup>, шер<sup>с</sup>ть имуща златую, и ты поведи мимо са<sup>н</sup>танскова двора». И ста<sup>л</sup> предивны<sup>м</sup> коне<sup>м</sup>, кре<sup>с</sup>янин<sup>н</sup> же пове<sup>л</sup> мимо са<sup>н</sup>танскова двора. Узрѣвъ же са<sup>н</sup>танъ коня тово, и начя торговати, и даде за него  $\text{Ѡ}$  рублевъ, и велѣ<sup>л</sup> постави<sup>т</sup> на конюшню...<sup>2)</sup> Он же рече ей: «Купил ешь предивнаго коня, шер<sup>с</sup>ть имуща златую»; она<sup>ж</sup> рече: «Ето не конь, то Иванъ Понаморевиць. Прикажи ево сруби<sup>т</sup>»; он же велѣ<sup>л</sup> ево срубить. И (л. 130) дѣвка чернавка збѣжала х коню и сказала Ивану все подробно. Иван же рече ей: «Какъ срубятъ меня, и ты во<sup>з</sup>ми о<sup>т</sup> главы моя крови и бро<sup>с</sup> к са<sup>н</sup>тански<sup>м</sup> быка<sup>м</sup>». И пришли о<sup>т</sup> са<sup>н</sup>тана, о<sup>т</sup>секоша коневу главу. Она же взявъ крови и бросила к быка<sup>м</sup>. И ту<sup>т</sup> ста<sup>л</sup> быкъ златошерстны. И сказала са<sup>н</sup>тану, он же видѣ быка и ста<sup>л</sup> непрестанно к нему ходи<sup>т</sup>. Клеопатра же рече ему: «Како ты, гдѣрь, непрестанно ходишь на<sup>к</sup>отной дворъ? «Он же рече ей: «Есть у меня быкъ зъла(об.)тошерстны». Она же рече: «Ето не быкъ, то Иванъ Понаморевиць, прикажи ево срубить». Са<sup>н</sup>танъ велѣ<sup>л</sup> быка срубит<sup>ь</sup>, и дѣвка чернавка прибѣжавъ сказала Ивану. Иванъ же рече

<sup>1)</sup> Кажется, въ рукоп. „внутренню“.

<sup>2)</sup> Здѣсь, какъ видно изъ контекста, пропускъ: вѣроятно, слѣдовалъ вопросъ жены султана и затѣмъ уже его похвальба.

ей: «Какъ срубятъ меня, і ты во<sup>3</sup>ми г<sup>л</sup>аву мою и закопай главу мою в са<sup>л</sup>танско<sup>м</sup> саду». И пришли о<sup>т</sup> са<sup>л</sup>тана, о<sup>т</sup>секоша<sup>3</sup>) главу, д<sup>ѣ</sup>вка же закопала в са<sup>л</sup>у. На утро выросла пре<sup>с</sup>лавная яблоня, яблоки имуща златыя. И сказаша са<sup>л</sup>тану, са<sup>л</sup>танъ же видѣ яблонь, начя в саду не<sup>п</sup>рестанно гулять. И рече Клеопа<sup>т</sup>ра са<sup>л</sup>тану: «Како (л. 131) ты, г<sup>д</sup>рь, не<sup>п</sup>рестанно в саду гуляешь». И рече ей са<sup>л</sup>танъ: «Выросла пре<sup>с</sup>лавная яблонь, яблоки имуща златыя». И рече Клеопа<sup>т</sup>ра: «То государь, то Иванъ Понаморовичъ, прикажи еѣ срубятъ». И са<sup>л</sup>танъ велѣ<sup>л</sup> срубить. И д<sup>ѣ</sup>вка чернавка прибѣжавъ сказала Ивану Понаморовичю, и рече ей Ива<sup>н</sup>: «Какъ меня срубятъ, и ты во<sup>3</sup>ми перваго и верня (?)<sup>2</sup>) щепу и брось в са<sup>л</sup>танской прутъ». Пришли о<sup>т</sup> салтана и начяша сѣщи. она же взявъ первую щепу и бросила в са<sup>л</sup>танской прутъ, и начя пла<sup>в</sup>ати пре<sup>с</sup>лавны селезень. И сказаша салтану, салтан же велѣ<sup>л</sup> ево (об.) слуга<sup>м</sup> свои<sup>м</sup> ловитъ, са<sup>м</sup> ра<sup>з</sup>девся поплы<sup>л</sup> за ни<sup>м</sup>. И тако селезень о<sup>т</sup>веде на <sup>д</sup>ругую сторону салтана, самъ<sup>ж</sup> селезень вспорхну на брегъ. І ста<sup>л</sup> Иванъ Понаморовичъ живъ и одѣвся в салтанское пла<sup>т</sup>е. Увидѣли стражи са<sup>л</sup>танские пруда того и сказаша са<sup>л</sup>тану, что живъ Иванъ Понаморовичъ. И побѣжалъ Иванъ Понаморовичъ за салтаномъ, і поймаша са<sup>л</sup>тана и приведоша на королевской дворъ і по совѣту князей і бояръ Клеопатру съ турски<sup>м</sup> салтаномъ сожгоша в струбѣ, (л. 132) Иван же привезе о<sup>т</sup>ца своего і мать, і начяша добрѣ жити. И не по мнозѣ времени преставися отецъ ево, Герма<sup>н</sup>, а Иванъ Понаморовичъ взялъ у князя великаго дочь за себя и начя съ нею житъ, и приживе дѣти, і тако ско<sup>ч</sup>чася повѣсть сия.

<sup>1</sup>) Въ рукописи „отсекока“.

<sup>2</sup>) Неразборчиво; кажется, мѣсто испорчено



## XI.

### Повѣсть о бражникѣ.

#### 1.

#### Житие о бражнику<sup>1)</sup>.

(л. 10). Билъ нѣкоторый человекъ, именовъ бражникъ, который на каждой день по ковшу браги выпивалъ, а за казимъ (sic) ковшемъ Бога прославлялъ. А гдѣ ему пришлоль часъ умерти, прииде къ нему ангель Господень и взялъ душу его и принесе предъ рай и отиде от него. Бражникъ же всталъ от сна своего и видѣ стѣни високия и двері зельзние, и не може войти. И обрѣте всколобъ (?) и сталъ калатати во врата райскіе; и прииде к нему апостоль Петръ и рече: «Кто ти сей толкаепъ во врата райскіе?» И отвѣща ему бражникъ: «Я естъ паниця, бражникъ, и желаю бити с вами в рай». И рече ему апостоль Петръ: «Брате бражнику. отиди от раю, бо не входимое вамъ паницамъ царство небесное, толко мука вѣчная во адѣ». И рече бражникъ: «Господень гласъ твой слышу, а имени твоего не знаю; кто еси?» Отвѣща ему: «Я естъ апостоль Петръ, ключарь царства небесного». — «Вѣмъ тя Петре: коли тебѣ Христосъ казалъ: «еще куръ не возгласить—три крати отвержеся мене»; а ти поиди молися за Христа умрети. Аще бы ти не со слезами не помолился Христу, не

<sup>1)</sup> Моск. Публ. Муз. № 1244, малор. скоронисн. сборн. апокрифовъ и другихъ статей, XVIII в.

бил би ти въ раи». Сливашъ Петръ, пошолъ посрамленъ от него. Бражникъ же знову сталъ калатати во врата райские. Прииде к нему апостоль Павелъ и рече: «Кто ти такой толкаешъ во врата райские?» (10 об.) «Азь есмь паница, бражникъ, и желаю бити с вами въ раи». И рече ему: «Брате бражнику, отийди от раю, бо не входимое вамъ паницамъ царство небесное, толко мука вѣчная во адѣ со прелюбодѣйци и разбойники». Отвѣща ему бражникъ: «Господень гласъ твой слышу, а имени твоего не вѣмъ, кто ти?»—«Азь есть Павелъ, котории (bis) крестиль землю»<sup>1)</sup>. «Вѣмъ тя, Павле, коли сей билъ гонитель на крестиянъ, и узал еси уариа (sic) дочку и пошолъ еси до Дамаску и блиста ты свѣтъ Христовъ. Аще бы не со слезами не помолился Христу, не билъ би ти въ раи». Сливашви Павелъ пошовъ, посрамленъ отъ него; бражникъ же знову сталъ калатати во врата райские. И прииде къ нему царь Давидъ и рече: «Кто ти еси, толкаешъ во врата райские?» И рече: «Азь есмь паница, бражникъ, и желаю бити съ вами в раи».—«Брате бражнику, отийди от раю бо невходимое вамъ, паницамъ, царство небесное, толко мука вѣчная во адѣ со прелюбодѣйци, ада же скрежетъ зубомъ и черви несипущии». И рече бражникъ: «Господень гласъ твой слышу, а имени твоего не вѣмъ, кто еси?»—«Азь есмь царь Давидъ, которий Голиафа побѣдивъ».—«Вѣмъ тя, царю Давиде, коли еси послалъ Урию, слугу своего, на войну и казалъ еси убити<sup>2)</sup> его, а жену его за себе взяти. Царь, блудникъ ти, разбойникъ (л. 11) и прелюбодѣецъ, а теперъ еси въ раи. Азь отъ вѣку жадной жеши не малъ, толко по ковшу браги выпивалъ, а за кожнимъ ковшемъ Бога прославлялъ». То сливашви царь Давидъ, и пошовъ посрамленъ отъ него. Бражникъ сталъ знову калатати во врата райские. Прииде к нему царь Салимонъ и рече: «Кто еси толкаешъ во врата райские?»—«Я есть паница, бражникъ, и желаю бити съ вами въ раи». И отвѣща ему царь Салимонъ: «Брате бражнику, отийди отъ раю, бо невходимое вамъ, паницамъ, царство небесное, толко мука вѣчная во адѣ, идѣже огонь неугасимый и тма кромѣшная». И рече ему бражникъ: «Господень гласъ твой слышу, а имени твоего не вѣмъ: кто ти еси?» И рече къ нему: «Я царь Салимонъ, которий будовалъ Святая Святыхъ». Рече ему бражникъ: «Вѣмъ

<sup>1)</sup> Кажется, здѣсь есть пропускъ.

<sup>2)</sup> Очень неразборчиво. м. б. „убити“, „уморити“:

тя, Салимоне, коли еси послухалъ жени своей и поклонился идоламъ. Аще би не заспѣвалъ еси в пеклѣ: «Воскресни Господи, Боже мой, да возне[се]тся рука твоя, не забуди нищихъ своихъ до конца»— не биль би ти въ раю, бувъ би з врагомъ». Сливавши тое, царь Салимонъ пошовъ посрамленъ отъ него въ той часъ. Бражникъ же сталъ калатати и горко рыдати, мовячи: «Господи Боже мой, иже еси напу[с]калъ во царство небесное блудниковъ чужоложства, идолопоклонниковъ, ненавистниковъ, а мене толко единого не хочъ принять». И пристойно сталъ калатати во врата райские. И пришовъ к нему Иоанъ Богословъ и рече: «Кто еси толкаешъ во врата райские?» И рече к нему: «Азь есмь пяница, бражникъ, и желаю (л. 11 об.) быти с вами въ рай». И отвѣща ему Иоанъ Богословъ: «Брате бражнику, отийди от раю, бо невходимое вамъ, пяницамъ, царство небесное, бо пяницъ, блудниковъ Богъ не принимаетъ толко». И рече ему бражникъ: «Господень гласъ твой слышу. а имени твоего не вѣмъ: кто еси?»— «Азь есмь Иоанъ Богословъ».—«Вѣмъ тя, Иоане Богословъ, коли еси писалъ евангелие святое, и написалъ еси въ немъ «возлюби[мъ] другъ друга, и Богъ насъ возлюбитъ», а чему жъ ти себе любишь, а мене ненавидишь? Чрезъ тое слово вирѣжъ, албо руки своя отпишися». Иоанъ .....<sup>1)</sup> тое слово размножилось, и по всемъ свѣту трудится его рѣчь вирѣзати, озмитежъ руки своей отпишѣтесе<sup>2)</sup>. И отворивши врата райские и рече: «Вниди, брате бражнику, въ рай и почивай с нами, со всѣми святыми, вѣки вѣковъ». Аминь. Конецъ бражнику.

<sup>1)</sup> Неразборчиво; можетъ быть, слѣдуетъ читать „мислить что“. Мѣсто въ данномъ спискѣ испорченное; смыслъ восстанавливается изъ текста напечатаннаго въ „Памятникахъ старинной русской литературы“ Кушелева-Безбородко, подъ ред. Костомарова и Пыпина.

<sup>2)</sup> Последнiя четыре слова, кажется, лишнiя, или передъ ними какой то пропускъ.

(л. 1). Книга беседы Евангелския, глава выписана о пияницахъ и о бражникахъ слово <sup>1)</sup>).

Во днехъ некихъ посла Господь ангела своего взяти душу бражникову о[тъ] тела; и приде ангель и разлучи душу от тела и постави у вратъ причистаго рая. Бражникъ же нача толкаться у вратъ причистаго рая. И приде ко вратамъ Петръ апосталь и рече: «Кто есть толкися у вратъ святаго рая?» Онъ же отвеща ему: «Азь есмь бражникъ, желаю здесь с вами в раю жити». Отвеща ему Петръ апосталь: «бражники здесь не водворяются, уготована вамъ мука вечная з блудниками и с прелюбадеями: отиди, человекче, прочь отсюда». (об.) Браж[н]икъ же рече: «Скажи мне, господини, кто еси ты? Гласъ твой слышу, а лица твоего ни вижу, имени твоего не вемъ». Отвеща ему: «Азь есмь Петръ апосталь, яже име давы (sic) ключи сего царствия небеснаго». Бражникъ же рече ему: «А ты, господине, помниши ли, когда от Христа трижди отрекся, и аще бы не покаяние твое и теплыя слезы тебе помогли, ты бы и самъ в раю не былъ: а я, хотя и бражникъ, по вся дни Божия пиль, а за всякимъ ковшемъ Господа Бога прославлялъ, а от него не отрекался». Слышывъ же Петръ апосталь от бражни<sup>ка</sup> таковъ ответъ, подивися и отиди прочь, размышляя о немъ. Бражникъ же еще нача толкаться у вратъ святаго рая. И приди ко вратамъ царь Давытъ и рече: «Кто есть (л. 2) толкися у вратъ святаго рая?» И отвеща ему: «Азь есмь бражникъ, желя<sup>ю</sup> с вами здесь в раю жити». Отвеща ему царь Давытъ: «Бражники здесь не водворяются, уготована вамъ мука вечная со блудниками и прелюбадеими: отиди человекче отсюда прочь». Бражникъ же рече: «Скажи мне, господини, кто еси ты? Гласъ твой слышу, а лица твоего не вижу, имени твоего не вемъ». Отвеща: «Азь есмь царь, Богу отца (sic) и прарокъ Давытъ, почиваю на лони у Авраама, Исаака, Иакова от нынѣ и до века». Бражникъ же рече ему: «А ты, господини, царю Давыде <sup>2)</sup>, помниши ли, когда слугу своего, Урию, на вайну послать убити, а жену его, Вирсавию, к себе взялъ на любодеяние, от нея же родися царь Саламонъ: и аще бы не покая-

<sup>1)</sup> Рукоп. Историко-Филологическаго Института кн. Безбородка въ г. Нѣжинѣ, полов. XIX в., скороп., № 124.

<sup>2)</sup> Передѣлано е изъ и.

ние твое (об.) и теплыя слезы тебе помогли, ты бы и самъ в раю не былъ; а я, хотя и бражникъ, по вся дни Божия пиль, да за всякимъ ковшомъ Господа Бога прославлялъ, а никаго не погубилъ и ни убилъ, а жены от раждения своего и до смерти своей ни позналъ». Слышевши царь Давыдъ ответъ, подивися, отиде, посрамленъ бысть. Бражникъ же еще нача толкаться у вратъ причистаго рая. И прииди ко вратамъ царь Саломонъ и рече: «Кто есть толкися у вратъ святаго рая?» Отвеща ему: «Азъ есмь бражникъ, желаю с вами здесь въ раю жити». Отвеща ему царь Саломонъ: «Бражники здесь не водворяются, уготована вамъ мука вечная со блудниками и с прелюбодеями; отиди, человеце, отсюда прочь». (л. 3) Бражникъ же рече: «Скажи мне, господини, кто еси ты? Гласъ твой слышу, а лица твоего не вижу, имени твоего не вемъ». Отвеща ему: «Азъ есмь царь Саломонъ, яже создавый церковь Святая Святыхъ во гради Иерусалими». Бражникъ же рече ему: «А ты, господини, царю Саломони, помниши ли, когда жены своей послушалъ, диаволомъ поклонился; а я, хотя и бражникъ, по вся дни Божия пиль, а за всякимъ ковшомъ Господа Бога прославлялъ, а от него не отрекался и идоломъ не поклонялся: и аще бы не покаяние твое и теплыя слезы тебе помогли, ты бы и самъ в раю не былъ». Слышивъ же царь Саломонъ от бражника таковъ ответъ, почудися и отиди прочь. (об.) Бражникъ же еще нача толкаться у вратъ святаго рая. И прииди ко вратомъ Иоаннъ Богословъ: «Кто есть толкися у вратъ причистаго рая?» И отвеща ему: «Азъ есмь бражникъ, желаю с вами здесь в раю прибывати». И отвеща ему Иоаннъ Богословъ: «Бражники здесь не водворяются, уготована вамъ мука вечная со блудниками и с прелюбадеями. Отиди, человеце, отсюда прочь». Бражникъ же рече: «Скажи мне, господини, кто еси ты? Гласъ твой слышу, а лица твоего не вижу, имени твоего не вемъ». И отвеща ему: «Азъ есмь Иоаннъ Богословъ, другъ Христовъ, ему же возлегая (sic) на тайни вечери (л. 4) на перьси его и его же (sic) написалъ светое Евангелие во Ефесе гради со ученикомъ своимъ, Прохоромъ». Бражникъ же отвеща ему: «А ты, господини, Иоаннъ Богословъ, помниши ли, ты же самъ написалъ во святомъ Евангелии: «Другъ друга любити и обою васъ Богъ любить». А ты самъ в раю, а меня не пуцаишь в рай и друга своего не любишь; и ты тотъ листъ изъ скниги выдири, либо слово того отоприса: или рука твоя описалась?» И рече ему Иоаннъ Богословъ: «Слышиши, бражнике: слова того отперется не хочю.

и рука моя не опесалася, а я то писалъ, что мне Господь Богъ мой повелелъ и Духамъ Святымъ мне возгремелъ». (об.) Бражникъ же рече: «Господине мой возлюблены, Иоанне Богослове, послушай, и мне Господь Богъ мой повелелъ здесь с вами во светомъ раю прибывати и со всеми святыми вечно ликовати и честныя ваши стопы лобызати». Тогда рече святы Иоаннь Богослови ко ангеломъ: «Святы архангели и ангели, отвори врата святаго рая и пустити бражника во святы рай, ибо Господь Богъ ему повелелъ быти с нами в раю от ныне и до века и во веки векомъ. Аминь.

---

**ХІІ.**

**Повѣсть о старомъ мужѣ и молодой дѣвицѣ.**

1.

(242 об.) Повѣсть о старыхъ, поймающихъ молодыхъ жены<sup>1)</sup>.

Горе несмысленному, въ старости велице в неразум'и пребывающаго! Горѣ преклоняющемуся на долгій вѣкъ, помышляя житие старости, а о будущемъ вѣце не пекущегося безумнемъ своимъ, на послѣдокъ вѣка сего не хотяще Богу угодити, но хотяще жити скверно и до смерти хотя грѣховной похоти работати и до исхода души своея обѣщаетъ свое житие молодымъ женамъ, иже бы за негъ или. Дѣвицы, по смерти его, взявши имѣние его, обнищаютъ, видящи имѣние отца своего за инымъ, безумнымъ же. Старче, отдав имѣнія своя молодымъ женамъ (л. 243) похоти ради, толко от своихъ детей клятву приметъ, а от челоувѣкъ ненавидимъ будетъ. О таковыхъ пророкъ Давидъ рече: «О несмысленне безумие старче, не в той седине дѣв поймаютъ».

Дѣца же стару рече: «Како могу азъ прилѣпитися, или утѣху содѣяти с тобою, старцемъ? Якожь упадетъ серязъ златъ, или каменъ драгий въ злосмрадную тину, тако жъ и азъ выпаду в твои руцѣ, старче. Якожь не имѣетъ очиститися свиння, въ кале валяющися, тако\* и азъ не имамъ радости, ни утѣхи с тобою, старцемъ». Старъ же рече: «Кра-

<sup>1)</sup> Рукоп. Погод. Древлехранилища, № 1606, небрежная скоропись. XVII в., въ 4-ку л. 242 об и слѣд.

сная моя дѣвица, почто умножила еси словеса сии, аки много листвие? Аще хоцещи многим рабом и рабынямъ государыня быти, и опочивати, и ясти различная брашна без урока, и на ковре седѣти. умывши свои бѣлыя рѹцѣ в день, и не дам ти ожещи лица твоего зною солнечному, но храню тя въ полатах, и не дам руки твоя огневи ожещи и ноги твоя (л. 243 об.) о камень претолкнутися. Егда востанеш от сна ношнаго, и не успѣши умыти лица своего бѣлово, уготованна тебѣ трапеза различными брашны. И посажу тя на мѣстех ни знойных, ни студеных; і велю ти на всяк день мылну уготовляти, да в ней умываешися; и сиѣжу тѣло твое, аки лѣторасль малинную; и украшу тя, аки невѣсту, златом и серебром и драгимъ каменiem; и облеку тя в различныя порты; и сотворю пирове частые тебѣ ради. и возведу тя въ высок терем, и посажу тя на драгих коврахъ, и поставлю всяко веселие и утѣху тебѣ ради: певцы и гутцы, и скомороси, и дѣвицы, и не дам по вся дни скорби сердцу твоему. То ти есть <sup>1)</sup>, а егда идещи за мя, получиши вся, еже глаголах ти, и будет ти радость і веселие великое за мною, и імѣние мое все у тебя будет. Аще ли идещи за него отрока, и начнеши (л. 244) за ним яко египетския работы работати, а свои бѣлыя рѹцѣ от огня изожжеши, еству вараци (sic) и протчия работы работая». Старъ же девицы рече: «Не зри моя старости и не мни въ сердца своемъ, яко стар есмь. Ими ми вѣру дѣвицы <sup>2)</sup>, яко не отошла ми естъ плотцкая юность первая от мене». Дѣца же рече: «Не преста враг. воюя над родом чловѣческим и погубити хотя чловѣки!» Дѣца ж рече стару: «Твою плот разжизает теплостъ творити, аки мертву, и вся уды твоя ослабѣют: тогда начнешь тужити и плакати от безумия своего, і не успѣшно ти будет ничтож, і ввержет тя въ размышлении многа». Дѣца же рече: «Моя юная плоть без соблазну разжизатися начнет на похот грѣховную, зане же уна есми суши». И рече дѣца ж: «Разсмотриши, старче, яко твою плот на старость осквернив, и повержет тя, и паки буду, аки огнем, жьгома похотию плотцкою; не могущи терѣти, выпаду въ законопреступление со иным <sup>3)</sup> отроком (л. 244 об.) обою наю (sic) <sup>4)</sup>». И рече дѣца ж: «Послушай мене, старче, аз гла-

<sup>1)</sup> Сомнительное чтение.

<sup>2)</sup> Можно также читать: „дѣвице“; скорописное е и ы порою очень сходны.

<sup>3)</sup> Слѣдуетъ исправить: „со юным“...

<sup>4)</sup> Здѣсь, видимо, какой то пропускъ—словъ, относящихся къ „обою наю“.



голю хотящи души своей ползы: иже ты мнѣ обѣщеваеши много имѣнія дат(ь), дай имѣние свое чадом своим; аще ли не будет чад, а раздавай убогим, и приимеши сокровище на небесѣхъ. по глаголу Господню. «идѣже тля не тлит, ни татие крадут». Аще ли имѣеши рабы, то тѣхъ пусти на свободу, и приимеши простыни от Бога грѣхов своихъ. А питъ ми и ясти уготоваеши различная брашна и на ковре седети» — двѣца\* рече стару — «седи ти старче, въ монастырѣ, в кѣл(ь)е своей, а в пития мѣсто и ядения восприими постъ, да спасеши душу свою. Аще обѣщеваеши ми полаты, и различныя порты носити датъ ми — нагия одежи, да приимеши одежду отъ Бога нетлѣнную<sup>1)</sup>; златомъ и серебромъ, аки купецъ, купи себѣ царство небесное, продаемо ничимъ. А в пиру мѣсто и веселія сходяся на духовныя бесѣды, а в певцев и гутцевъ (л. 245) мѣсто пой на крѣпосе святое пѣние и псалтир, и молитвы исполняй день и пощъ, да будеши собесѣдникъ со ангелы. Игрецы и скоморохи и певцы хоцещи ми собрати на утѣху, то в тѣхъ мѣсть веселія тое въ кѣлии своей». И рече двѣца\*: «Отпусти мене, старче, млада ко убогому отроку; аще лице жгу и рудъ окаляю и позъ свои рыщучи пою (?)<sup>2)</sup> о камень, но тѣхъ болѣзней не слышу [въ] радости сердца своего. Аще ли уноша убогъ будет, ино Богъ богат своею милостию, и подасть нам богатства и славу. Аще ли не подасть, то одинаго хлѣба с водою съѣдим и сыти будем и възграемъ со юношею. Отиди от мене, старче, [съ] своею сединою, не лукавствуй мною. Аще ли не хоцещи плоти своей воздержати, то ищи<sup>3)</sup> по своей верстѣ такой ж: бабы, старой же. Рече [старъ]: «Двѣцы такой нѣрав имѣю[т]: всякая не вѣсть понятия прежде жениха . .<sup>4)</sup> любить, а егда будет за ним, и тако возлюбит его». Двѣца\* рече: «Нѣ силой<sup>5)</sup> тебѣ любити, старого смрада и гнилаго, обещавшаго<sup>6)</sup> деньми и приближив(л. 245 об.)шася яко [ко] гробу смертному». Стар же рече двѣцы: «Нѣси убѣжати от руки моея, приставлю многи чти родителемъ твоим и племяннн твоему многие дары подам, и будеши ми жена». Двѣца\* рече стару: «Люте тебѣ, стару, безумну<sup>7)</sup> будет:

<sup>1)</sup> Въ рукоп.: „неплѣнную“.

<sup>2)</sup> Прочтено по догадкѣ; въ рукописи — неразборчиво.

<sup>3)</sup> Въ рукописи: „тощи“.

<sup>4)</sup> Слово не разобрано; кажется, по смыслу должно быть: „не“.

<sup>5)</sup> М. б., слѣдуетъ исправить: „нѣсть ми“.

<sup>6)</sup> Такъ въ рукоп., слѣдуетъ: „обетшавшаго“.

<sup>7)</sup> Слово вписано сверху, надъ строкою.

аще ли аз буду тебѣ жена, то скоро превращу ся<sup>1)</sup> и старость твою тайными дѣлы, и скоро умрѣши; и аз, вземши имѣние твое, иду за иного, отрока». Старец же рече двѣцы: «Повѣждь ми, которыми тайными дѣлы хочещи превратити старость мою?» Двѣца жь рече стару, не обинуясь: «Уготоваю на тя всякую ядь не по твоему норову: аще ли начнеши любити кисло, и аз ти доспѣю прѣсно; а возлюбиши прѣсно, и я доспѣю<sup>2)</sup> кисло; а мяккова ти хлѣба не дамъ, но сухими<sup>3)</sup> ты начну кормити. Зубамъ твоимъ будетъ кончина, а самому ти сухота; а младава отрока начну пшеничными хлѣбы кормити, и ему<sup>ж</sup> будетъ мясо свиное и говядина тучная (л. 246) || и боранина молодая, а тебѣ стару мокло<sup>4)</sup> недовареной, а каша водяная, и та без соли; а отроку младому въ молокъ с маслом. Да тебѣ же, старцу, сыворотка—журба<sup>4)</sup> чреву твоему и ворчанье кишкамъ твоимъ. Да младому<sup>ж</sup> отроку коровай молочной въ масле да въ меду, а тебѣ, старче, пресниць ржаной<sup>5)</sup>, парены въ водѣ без соли, а отроку пиръ зи съ яицы и олад[ь]и, пряжены въ масле, и протчая ядь, яже ему уготованна будетъ». Двѣца<sup>ж</sup> рече стару нісмысленну: «Не довольно ти будетъ ни пити ни ясти». Стар же рече двѣцы: «Аще ты начну ранами учащати и муками мучити, учнеши меня, аки огня, бояться». Двѣца<sup>ж</sup> рече стару: «Разумѣши ли ты, старче, таковыхъ бо аз наведу на тя чародѣвъ, и потворятъ тя: от своего чюствия изверженъ будещи и начнеши кланятисъ предъ ногами моими и учнеши радоватьца коли быхъ (sic) слово добро дала лютьцакаго зазора. И еще наведу на тя необразную смерть (л. 246 об.); со отроками и оружиемъ: погубятъ ты, или удавятъ, аки старого ворога. Аз же начну со унымъ отрокомъ пити и ясть и веселитисъ веселиемъ». Старец же рече—несмысленны не внимаху глаголь ея—рече: «Добра будещи за мною» И пача старец<sup>6)</sup> мыслити на девицу и шедъ обрете нѣкакова мужа частословлива, пригожа на прощение и словицмъ (sic)<sup>7)</sup> вельмя, от него же, аки медъ, изо усть его словеса изхождаше; и шедъ обаяше родителя девицы сладкими словесы, испросиша же девицу за

<sup>1)</sup> М. б., слѣдуетъ исправить: „ты“.

<sup>2)</sup> Въ рукоп. „доспѣю“.

<sup>3)</sup> Пропущено, видимо, слово.

<sup>4)</sup> Въ рукописи: „журба“.

<sup>5)</sup> Въ рук. другимъ черниломъ исправлено: „пресницы ржаные“.

<sup>6)</sup> Въ рукописи неудачное исправленіе другимъ черниломъ: „старые“.

<sup>7)</sup> М. б., слѣдуетъ исправить: „словесна“.

стара. И поя стар девицу и імѣни<sup>1)</sup> свое все напросѣхъ (sic)<sup>2)</sup> роздаваше; и нача творити, яко же глагола ему девица. И тогда стар нача тужити и плакати, и глагола: «Люте мнѣ, старцу безумному!» Девица\* рече стару: «Виждь, такова ти есть злоба, поймаючи не по своей верстѣ. Стару молода жена—людямъ корысть<sup>3)</sup>, а тебѣ напасть, и старость, и сухота, и безвѣчье». ||<sup>4)</sup>.

2.

(л. 8). Слово о старомъ муже, какъ сватался на прекрасной девице<sup>5)</sup>.

Бысть некимъ человекъ сватаецца на прекрасной девице, а самъ говоритъ:

«Душа моя есмь милая, красная девица, виноградная ягода, пеленельные твои кости, сахарные твои уста, медвеное твои дыханіе, ясного сокола очи, черного соболя брови<sup>6)</sup>, чудное румяное лице, (8 об.) белой лѣбѣди плаваніе, павиное позлащенное періе, сѣденіе твои тихое, умилньи твои речи, слаткая твои тихая беседа, поиди за меня, за старого человекъ, замужъ. Аз есмь человекъ доброй, образомъ старъ, бороною сѣдъ, теломъ младъ, костію здравъ, плотію станливъ, умомъ совершенъ и разуму, душа моя, доволна; а носить (л. 9) тебѣ у меня, есть что; слухъ и рабын много же, а при тебѣ, моя любушка, что есть множество ис<sup>(2)</sup> портищъ драгоценыхъ, а носить тебѣ у меня, пяти и ясти и веселитися о своемъ з<sup>2</sup>равіи, много сахарные ествы».

Рече девица старому мужу: «Безумный и несмышленный старый человекъ! Коли ты меня, прекрасную девицу, замужъ за себѣ поймешъ, тогда храбрость твои укротитца, и образ (9 об.) твои помернеть<sup>7)</sup>, и седина твои пожелтеть (sic), и тело твои почернѣть, кости твои исох-

<sup>1)</sup> Т. е. імѣніе.

<sup>2)</sup> Слово неразборчиво.

<sup>3)</sup> Пословичное выраженіе.

<sup>4)</sup> Слѣдуетъ выписка изъ Алфавита: „Что есть со удивленіемъ зримое бываетъ“ и т. д.

<sup>5)</sup> Рукоп. Церковно-Арх. Муз. при Киевской Дух Академіи № 471 (О. 8.75), скороп. половины XVIII в.

<sup>6)</sup> Въ рукоп. „бровя“, но можно читать и, которое часто бываетъ въ рукоп. нач. и полов. XVIII в. пѣхоже на я.

<sup>7)</sup> Слѣд. исправить: „померкнеть“.

нуть, а уды твои ослабеють, и плоть твоя обленится, и не угодить тебѣ будетъ младости мо[е]й и всему животу моему, а умъ твой от тебѣ отыдетъ; а учнешь ходити, аки лихая понурая свинья, а на добро и на любовь николи (л. 10) несмыслить<sup>1)</sup>, а уды твои ослабеють, плоть цкому естеству моему не утѣха будетъ. Тогда азъ девица на плоть свою распалюся, а ты старой не возможешъ угодити младости моей и всему животу моему; и азъ, девица, на плоть свою распалюся и от распаления плоти своея впадуся в преступленіе со младымъ отрокомъ, а не с тобою, (10 об.) старымъ мужомъ, с вонячею (sic) душею, с понюрою свинньею».

И рече ей старый мужъ прекрасной девице: «Душа естми, моя милая красная девица, виноградная ягода, нелепелніе твои кости, сахарніе уста, медвеное твое дыханіе, ясного сокола очи, черного соболя брове, чудное румяное твое лице, белой лебеди плаваніе, павинное позлащенное періе, сиденіе (л. 11) твое тихое, разумные умелніе (sic) твои речи, слаткая твоя тихая беседа, поїди за меня, старого чело-вѣка, замуж! На что ты сладки словеса она говорила мнѣ, аки древо листьвиемъ цветъ по земли разцвѣтила; и в доме моемъ будешъ гсударнею над рабы и над рабынями; и станешъ, свѣтъ, моя милая, на драгоцѣныхъ (11 об.) коврахъ сидеть, пити и ясти со мною много-различные и сахарные яствы, радоватися и веселитися незречено; и не дамъ тебѣ у пѣчи омаратца и погамъ твоимъ о камень разбитца; и сдешъ, миленькая, в каменной полате, и учьнуть (л. 12) тебѣ рабы согрѣвать во теплой банѣ. По вся дни живота моего украшу тебѣ, аки цвѣтъ<sup>2)</sup> в чистомъ полѣ, аки паву птицу прекрасную, аки Волгу рѣку при дубраве, упокою во всемъ нарядѣ; сотворю про тебя пиръ великъ, а на пиру велю всякія потеги сделат (12 об.), гусленны и гудочные: и трубы прогласятъ, и плясавицы и плясцы начнутъ тебѣ тѣшити, а ты, миленькая, начнешъ владеть всемъ домомъ, именьемъ всемъ по вся дни живота моего».

И рече девица старому мужу: «Безумные несмысленные старой (л. 13) чело-вѣкъ, хочешъ ты со мною сотворити любовь, аднакошъ не угодить тебѣ будетъ младости моей и всему животу моему. А какъ ты, безумный старый чело-вѣкъ, не<sup>3)</sup> попечешіся о будущемъ жи-

<sup>1)</sup> Слѣд. исправить: „несмыслишь“.

<sup>2)</sup> Въ рукоп. описка: „увѣтъ“.

<sup>3)</sup> Въ рукоп.: „на“.

воте и о смерти, какъ бы душу свою спасти (13 об.), однакошъ ты, старой чертъ, не Богу хочешь угодить—жене, и сотворити со мною, прекрасною девицею, любовь, а однакошъ не угодить тебѣ будетъ младости моей и всему животу моему, а какъ ты, безумный старой человѣкъ, не попечешься о будущемъ животе и о смерти, какъ бы (л. 14) душу свою спасти, хочешь ты, безумный и нерасудный старой мужъ, угодити к (?) жене, а не Богу; пора тебѣ мение свое одать нищимъ и раздат по честнымъ по монастырямъ и Божіим<sup>1)</sup> церквам и пусть бы за тебя Господа Богу моли (sic); и пора тебѣ, старому черту и окаяной души, обратитися, (14 об.) итить во чесной монастырь и спастися и постритися в монастырь, Богу молитися; тебѣ не падобно помышлять, окаянному, женитися».

И в той поры старой мужъ обдарил весь род и племя прекрасной девицы дорогоценными дарами, дарами и портищами (л. 15) драгоценными, и прекрасной девицы далъ множество слата (sic) и сребра. И понялъ прекрасную девицу за мужъ за себе, и нелко<sup>2)</sup> времяни пожилъ, и впаласе девица в преступление со младымъ отрокомъ, а не с нимъ, старым мужемъ, вонячею душею, с понюрою свинею.

---

<sup>1)</sup> Въ рукоп. „божіи“.

<sup>2)</sup> Такъ въ рукоп.; слѣдуетъ исправить: „несколко“.

## XIII.

## Повѣсть о Ершѣ.

(л. 1). Список с одного дела, какъ тягался Лещъ съ Ершем о Ростовском озере и о реках<sup>1)</sup>.

И подал Лещъ челобитную, а в челобитной ево пишет: «Господам моим, новгородскимъ судьямъ, великому Осетру и Белугѣ и Белой рыбице, бьет челом Ростовского озера кормовой сынчишко боярской, Лещишко с товарищи. Жалоба моя, гда, вам того же Ростовского озера на лихово члвѣка, на Ерша Ершева, сына Щетинника, в том, что тот Ершъ владеетъ насилством своим в Ростовском озере старинными вотчинами дедов и отцев моих, Леща с товарищи, а своих лишился старинных жировъ и расплодился по рекам и по озерам (л. 1 об.) і по истоком. А сам тот Ершъ собою мал, а щетины у него как бысть вострѣе рогатины; да где тот Ершъ ни впроситца начеват, и хто ево неведаячи впустит, и он хоцет тут и вселится и хозяина вон выжит, а мы, господа, люди Божіи, збойством жит не умѣем, тягатца и бранитца не хотим, а хотим оборонены быть вамі, праведными судьями.

Допросъ, учиненной в пополненіе челобитья: и судьи спросили ответчика Ерша: «Что же ты, Ершъ против челобитья отвечаешь исца Леща»? И Ершъ сказал: «Отвечаю, господа, в том, что то Ростовское озеро старинные вотчины дедов и отцев моих, Ершев с товарищи, а челобитчикъ Лещъ жил в соседях на днѣ Ростовского озера и на свет нигде не выхаживал (л. 2). І в том, господа, я еще стану и

<sup>1)</sup> Рукоп. Моск. Музея № 1194, XVІІІ в., изъ собранія Лукашевича.

бесчестия своего искат, что Лещъ назвал меня, Ерша, лихим человѣком; а я, господа, отца своего благословением и материнюю молитвою человѣкъ доброй и живу своею силою и знают<sup>1)</sup> меня, Ерша, на Москве и в иныхъ городехъ князья и бояре, дьяки і подьячие, и гости сурож[с]кие, и всякого чину люди, и покупают род мой, ершевъ, дорогою ценою, и варят в ухахъ с перцем и с шаераном и со всяким немецкимъ узорочьемъ, и ставят пред собою честно; и многие добрые люди с похмелья валяютца в ершемъ оправляю[т]ца».

И судьи спросили исца: «Лещъ, ты истецъ чем того Ерша уличаешь, и какие у тебя на него улики есть?» (л. 2 об.). Истецъ Лещъ сказалъ. «Уличаю я того Ерша Божиею правдою і справедливостію да<sup>2)</sup> креснымъ целованиемъ, что есть у меня знающие люди добрые, а живут они в Новгородскомъ уезде, в реке Волхове; а зовут рыба Сигъ да Лодога і Сырть; на техъ, господа, шлюсь потому что они знаютъ, чье то Ростовско озеро подлинно: истари дедев и отцевъ моихъ, Леща с товарищи». Судьи спросили ответчика Ерша: «Что ты, Ершъ, шлесся ли на Сига и на Лодогу и на Сырть?»

І Ершъ сказал: «Господа, мои судьи, Богомъ сотворенъ<sup>3)</sup>, скажу я вам, Сигъ и Сырть да Ладуга—рыбы великия и прожиточныя, а мы, господа, люди малые. А се ж они, Сигъ, Сырть да Ладуга с нимъ съезжаютца (хлебъ соль водють)<sup>4)</sup> и пють и едят за одно, потому слатца на нихъ я не смею, что в правды они не скажутъ все<sup>5)</sup>» (л. 3). И судьи спросили исца Леща: «Ты истецъ, Лещъ, сверхъ того чем того Ерша уличаешь, и какие у тебя улики есть на него, ібо он на показанныхъ свидетелей не шлется».

Истецъ лещъ выслушавъ сказалъ: Уличаю же, господа, того Ерша общею правдою, і есть еще человѣкъ доброй, а живет онъ в Переславскомъ озере Залескаго, а зовут рыба Сель переславская. Она, господа, знаетъ, чье то Ростовское озеро». И судьи спросили ответчика Ерша: «Что ты де, Ершъ, шлесся ли на общую правду и на Сель переславскую?»

<sup>1)</sup> Въ рукописи „знает“.

<sup>2)</sup> Въ рукоп. „за“.

<sup>3)</sup> М. б., слѣдуетъ исправить „сотворены“.

<sup>4)</sup> Заключенное въ скобки—на поляхъ.

<sup>5)</sup> Въ рук., кажется, „всю“ или „все“.

И Ершъ сказал: «Господа, мои судьи, Селдь переславская тому Лещу племянница; потому, господа, на нѣе слатца я не смею, что в правде не скажет».

(л. 3 об.). Судьи (не поверя ершевой отговорки) приговорили поставить общую правду пред судьями.

И послали пристава Окуня, и пристав Окун пошел и взял в понятые Сома, и Сом с болшим усом почел говорити и посулъ давати: «Братецъ де пристав Окун, не пригожусь я в понятые: брюхо велико, ходит нѣ могу, глазами вдал не вижу, губы велики, пред добрыми людьми говорит не умею»,—и пристав Окун ево Сома и отпустил по дружбе и взял в понятые Язя и поставил Селдь переславскую перед судьями.

И судьи спросили Селдь переславскзю: «Рыба, скажи ты нам правду, что ведаеш меж Лещем и Ершем, чье то Ростовское (л. 4) озеро? Старинные л вотчины дедев и отцев Ерша с товарищи, и знают<sup>1)</sup> ли того Ерша на Москве и в ыных городех князя и бояра, дьяки и подьячие, и гости сурожские, і всякаго чину люди, и покупают ли Ерша дорогою ценою, и варят ли в ухах с перцем и с шаѳраном и со всяким нѣмецким узорочьем, и ставят ли пред собою честно; и добрые люди, когда с похмѣлья валяютца—Ершем оправляюца?».

Общая правда, Селдь переславская, сказала, что то Ростовское озеро старинные вотчины Леща с товарищи, а тот Ершъ жил у них в соседях и лишился своих старинных (л 11 об.) жировъ, и расплодился по рекам и озерам и по истокам, и знают того Ерша на Москве и в ыных городех всякаго чину нѣбогатые люди, у кого етъ одна полущка, и на тое много Ершевъ купит, да столко не съестъ, сколко расплюет; да где тот Ершъ ни впроситца начеват, и хто ево, нѣведаючи, пустит—и он хочет тут и вселится и хозяина хочет вон выжит».

І став сам судья из за стола, Осетръ, и почал говорит: «Скажу де я вам, братцы, и сам про того Ерша, как он обманул роду моего старого Осетра, назвал его братом; пошли же<sup>2)</sup> братецъ Осетръ из Волги в Ростовское озеро жироват, там де мелкой (л. 5) рыбы много; и он ево послушалъ и тамъ (?) пошел; а в мелких рыбах бока свои протер и хребет и хвостъ и глаза (?)<sup>3)</sup> истер; а глаза ево были, как

<sup>1)</sup> Въ рукоп., кажется, „знает“.

<sup>2)</sup> Кажется, слѣдуетъ читать: „де“.

<sup>3)</sup> Въ рукоп. „гаара“.



полные болшие хлебные чаши<sup>1)</sup>, а бока і хребет и хвостъ, как судовою болшой парус; и как привел ево в озеро, ажно рыбаки невод тащат; и тот Ершъ выскочилъ и Осетръ за ним же в невод ввалился, да запутался. И тот Ершъ в заднею ечею выскочил да и насмеялся: «Ужели ты, Осетръ, рыбы наелся»? И как того Осетра потащили из озера вон, и тот Ершъ молвил: «Прости же, братецъ Осетръ, нѣ поминай лихом»; и как того Осетра почалі бит чакушами, и тот Ершъ закричал: «Слушайте, болшие рыбы и малые, тут де (л. об.) нашего созона околея (sic) побиваютъ»!

И судьи приговорили: исца Леща с товарищи оправит и ответчика Ерша обвинит и всех их ссолит и в жаркие дни против солнышка развешиват. И как того Ерша повели ис приказу вонъ, и он оборотился к судьямъ и почел говорити: «Вы де, судьи, ден судили, а два бегали и домов своих не видали, металис на мзду Леща с товарищи» — и вилнул хвостом да в хвородскъ (sic) ушелъ: толко Ерша и видали.

Суд судили судьи, а записывал Вьюн, а печат приложил Рак заднею клещею, а у печати сидели Вандоршъ<sup>2)</sup> переславской да Лин плуговской, Сазан сибирской да Щука трепетуха, пристав Окунь.

---

<sup>1)</sup> Въ рукоп. „чаши“.

<sup>2)</sup> М. б., слѣдуетъ исправить: „Вандышъ“ — мелкая рыбка.



Деканъ Историко-Филологическаго Факультета Императорскаго Университета Св. Владиміра симъ доводитъ до общаго свѣдѣнія, что съ разрѣшенія г. Министра Народнаго Просвѣщенія назначенъ конкурсъ на свободную въ названномъ Университетѣ экстраординатуру по кафедрѣ русской исторіи (преимущественно древней) съ допущеніемъ къ конкурсу и лицъ имѣющихъ степень магистра.

Срокъ конкурса трехмѣсячный, начиная съ 10 августа 1907 г.; лица, желающія принять участіе въ конкурсѣ, благоволятъ, до истеченія этого срока, прислать на имя декана факультета, вмѣстѣ со своимъ о томъ заявленіемъ также краткое жизнеописаніе и по экземпляру своихъ печатныхъ трудовъ или по крайней мѣрѣ перечень таковыхъ съ указаніемъ изданій, въ которыхъ они напечатаны.

И. д. декана *И. Ардашевъ.*

---





Δ  
P Slav 392.10

HARVARD COLLEGE LIBRARY  
FROM THE  
ARCHIBALD CARY COOLIDGE FUND

5 May 1938

---

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра  
Ректоръ Н. М. Цытовичъ.

---