Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 13

Übungsaufgaben

AUFGABE 13.1. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

AUFGABE 13.2. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

AUFGABE 13.3.*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

AUFGABE 13.4. Finde für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

AUFGABE 13.5.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0,1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

AUFGABE 13.6. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 + 4x^2 - x + 3.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[-5,-4]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 13.7. Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f jeden Wert $c \neq 0$ an mindestens zwei Stellen annimmt.

Aufgabe 13.8. Es sei I ein reelles Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige, injektive Funktion. Zeige, dass f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 13.9. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei x „nahe“ an einer Nullstelle von f. Ist dann $f(x)$ nahe bei 0?

Aufgabe 13.10.*

Fridolin sagt:

„Irgendwas kann am Zwischenwertsatz nicht stimmen. Für die stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

gilt $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz müsste es also eine Nullstelle zwischen -1 und 1 geben, also eine Zahl $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = 0$. Es ist doch aber stets $\frac{1}{x} \neq 0$.“

Wo liegt der Fehler in dieser Argumentation?

Aufgabe 13.11.*

Es sei $z \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es gibt ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$, mit ganzzahligen Koeffizienten und mit $P(z) = 0$.
(2) Es gibt ein Polynom $Q \in \mathbb{Q}[X]$, $Q \neq 0$, mit $Q(z) = 0$.
(3) Es gibt ein normiertes Polynom $R \in \mathbb{Q}[X]$ mit $R(z) = 0$.

Aufgabe 13.12.*

Es seien

$$f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

AUFGABE 13.13.*

(1) Skizziere die Graphen der Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x-1,$$

und

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x},$$

(2) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Graphen.

AUFGABE 13.14. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht stetig ist, aber dem Zwischenwertsatz genügt.

AUFGABE 13.15. Zeige, dass das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht abgeschlossen sein muss.

AUFGABE 13.16. Zeige, dass das Bild eines offenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht offen sein muss.

AUFGABE 13.17. Zeige, dass das Bild eines beschränkten Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht beschränkt sein muss.

AUFGABE 13.18. Zeige, dass durch

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

eine stetige, streng wachsende, bijektive Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$$

gegeben wird, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des Fixpunktes.

Es sei M eine Menge und

$$f\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

AUFGABE 13.19. Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

AUFGABE 13.20. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$, $P \neq X$. Zeige, dass P maximal d Fixpunkte besitzt.

Aufgabe 13.21. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gebe $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \leq x$$

und

$$f(y) \geq y.$$

Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 13.22. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass a die einzige Nullstelle von f ist.

Aufgabe 13.23. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

Aufgabe 13.24. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine streng wachsende stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

Aufgabe 13.25. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 13.26. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

definiert. Zeige, dass diese Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

Aufgabe 13.27. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

Aufgabe 13.28. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 13.29. Es sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 13.30. Es sei

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow [0,1[$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.31. (5 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 13.32. (3 Punkte)

Es sei $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass das Bild von f sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ist. Zeige, dass f surjektiv ist.

Aufgabe 13.33. (4 Punkte)

Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 13.34. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow [a,b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a,b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 13.35. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 + 13n^2 + n}{8n^3 - 7n + 10}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 13.36. (2 Punkte)

Bestimme das Minimum der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 + 3x - 5.$$

(Achtung: Ableitungen haben wir noch nicht eingeführt!)