SERIES DE LA EDUCACIÓN MODERNA

ARITMETICA ELEMENTAL

POR

A. G. GUERÍN

Spanish-American Educational Co.

210-212 PINE STREET

SAINT LOUIS, MO., E. U. de A.

SERIES DE LA EDUCACIÓN MODERNA

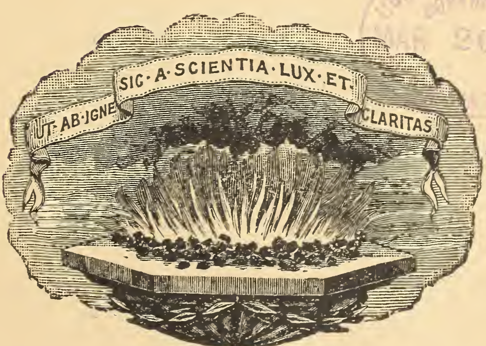
ARITMÉTICA ELEMENTAL

PARA

EL USO DE LAS ESCUELAS

POR

A. G. GUERÍN



SAINT LOUIS, MO.
SPANISH-AMERICAN EDUCATIONAL CO.
LIBREROS EDITORES
1895

TRADE MARK

Spanish-American Educational Co.

Departamento Editorial Espanol.

Saint Louis, Mo.

Muy Señores míos :

Hacía varios años era mi deseo escribir un pequeño libro de Aritmética que, apartándose del sistema generalmente seguido por otros autores, diera á estudio de tanta importancia cierta amenidad que lo hiciera atractivo. Por varias veces dí principio á mi obra y teníala muy avanzada cuando fuí favorecido por su apreciable carta del 8 de Julio próximo pasado, que leí con placer, tanto por estar de acuerdo con mis ideas respecto de la obra que hoy envío á Uds., como por la distinción que me dispensan.

Al hacer el trabajo he procurado exponer con la mayor claridad las cuestiones, ilustrar con la práctica cuanto es de necesidad aprender por teoría, plantear los problemas en el orden marcado por la dificultad que presenta su resolución y finalmente, he tratado que estos sean de utilidad real á la vez que interesantes.

Respecto de la parte práctica, comprendiendo que en Aritmética es lo más importante, he dado á ella preferencia; y en los problemas, al lado de los más sencillos se encuentran otros cuya dificultad está sólamente en el enunciado; pero que al resolverlos, se consigue ejercitar las facultades y familiarizar á los niños con las diferentes maneras en que los problemas aritméticos pueden serles presentados.

Me será en extremo satisfactorio que mi humilde trabajo responda á sus esperanzas y deseos, y que los encargados de la enseñanza en los países por cuyo progreso tanto Uds. trabajan, dispensen á la "Aritmética Elemental" algo del merecido favor hasta aquí acordado á los otros libros publicados por The History Company.

De Uds. Att.º y S. S.

A. G. GUERÍN.

ÍNDICE POR CAPÍTULOS.

ARITMÉTICA ELEMENTAL.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

Los *signos* que representan los *números* son diez, y se leen y escriben así :

cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.

La *Aritmética* enseña á leer, escribir, contar, y en general, á combinar los números entre sí, conforme á ciertas operaciones y reglas.

Los números tienen en la aritmética un uso semejante al de las letras en la escritura, pues de la misma manera que con el alfabeto ó conjunto de letras, se representan y expresan las palabras, así también con los números se representan y expresan las cantidades.

Cantidad es todo aquello que puede aumentarse, disminuirse, ó medirse, bien sea distancia, tiempo, peso, movimiento, etc.; por ejemplo : una legua, un año, un quintal, son cantidades, porque pueden medirse imaginándolas divididas en otras menores, de las cuales se toma una de ellas para que sirva de término de comparación con las demás.

Unidad es la cantidad que se toma ó elige para comparar y medir las cantidades de la misma especie: así, el *metro* es la unidad que sirve para medir el *kilómetro*, el día para medir el año, el *kilogramo* para medir el quintal *métrico*, etc.

Número es una unidad ó conjunto de unidades ó de partes de la unidad, como una legua, tres leguas, mil metros; un año, seis meses, diez días; una tonelada métrica; siete kilogramos, cinco gramos.

Los números, en cuanto á su formación, pueden ser enteros, quebrados y mixtos.

Se llama *número entero* al que está compuesto de unidades exactas, como 2, 5, 8.

Es *número quebrado* el que está compuesto de partes de la unidad, como: un tercio ($\frac{1}{3}$), un cuarto ($\frac{1}{4}$), un séptimo ($\frac{1}{7}$).

Número mixto es aquel que está compuesto de unidades y partes de la unidad, como: cuatro y dos tercios ($4\frac{2}{3}$), siete y cinco octavos ($7\frac{5}{8}$).

Número abstracto es el que no determina la especie de sus unidades, como: 3, 9, 5; y *concreto* el que la determina, como: 2 hombres, 3 casas, 7 libros.

Los *números homogéneos* expresan unidades de la misma especie de cantidad, como: 3 pesos, 5 pesos, 7 pesos; y los *heterogéneos*, expresan unidades de diferente especie, como 4 pesos, 3 kilos, 7 minutos.

Complejos se llaman los números que, aunque entre sí son de especie diferente, pueden reducirse á una sola que siempre es la expresada por la última subdivisión, como: 3 horas, 18 minutos, 9 segundos; é *incomplejos* aquellos que, además de pertenecer á especies diferentes son irreducibles entre sí, como: 2 pesos, 7 kilos, 5 litros.

Los números tienen además, otros caracteres y propiedades que se denotarán después de que se conozcan las cuatro operaciones elementales de la aritmética.

NUMERACIÓN.

La *numeración* es el método que enseña á representar y expresar las cantidades por medio de los diez signos ya conocidos, á los cuales se les da también el nombre de cifras ó guarismos. La numeración comprende dos partes: la *escrita* que tiene por objeto representar todos los números por medio de las figuras que les corresponden, y la *hablada* expresa los números representados por los mismos signos.

La cifra *0*, cuando está sola, carece de valor, y representa la falta de unidades. Los otros signos se llaman *cifras significativas*, porque cada uno de ellos tiene un valor propio. El 1 representa la unidad, es decir, el valor elegido para medir la cantidad; la reunión de esta unidad con otra igual, forma el 2; la de ésta con otra, el 3; la de ésta con otra, el 4; la de ésta con otra, el 5; la de ésta con otra, el 6; la de ésta con otra, el 7; la de ésta con otra, el 8; la de ésta con otra, el 9. De esta manera, agregando sucesivamente una unidad, se continuarían formando los demás números; pero como es imposible inventar un signo y un nombre arbitrarios para cada uno de ellos, se ha convenido en representar el número diez que sigue al 9, escribiendo la unidad, ó sea el número 1, y á su derecha la cifra *0* de este modo : *10,* formando así un grupo de unidades de orden superior que se llama *decena.*

Las unidades de este orden se escriben y se expresan así :

2	decenas,	ó 20	veinte.
3	id	ó 30	treinta.
4	"	ó 40	cuarenta.
5	"	ó 50	cincuenta.
6	"	ó 60	sesenta.
7	"	ó 70	setenta.
8	"	ú 80	ochenta.
9	"	ó 90	noventa.

Es decir, que se usan los mismos signos que denotan las unidades simples, y se leen repitiendo los nombres de estos signos con un ligero cambio en la terminación.

Los números intermedios entre la primera y la segunda decena, esto es, entre *10* y *20*, son :

once,	doce,	trece,	catorce,	quince,	diez y seis,	diez y siete,
11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,

diez y ocho,	diez y nueve.
18,	19.

De igual manera entre 20 y 30 :

21 veintiuno,	22 veintidos,	23 veintitrés,
24 veinticuatro,	25 veinticinco,	26 veintiseis
27 veintisiete,	28 veintiocho,	29 veintinueve.

Por el modo de formarse de las decenas, se comprende que todo número compuesto de dos cifras, corresponde al orden que ellas indican , y se representa escribiendo las unidades en el primer lugar á la derecha y las decenas á su izquierda.

La última decena es 99. Para pasar á otra unidad de un orden superior y continuar la numeración, el medio es muy sencillo, pues así como con la reunión de diez unidades simples se formó otra llamada decena, igualmente con diez decenas, se forma otra reunión de orden superior denominada *centena* que se representa escribiendo la unidad y á su derecha dos ceros, así : 100 (cien).

Las cantidades de este orden son :

100 cien	200 doscientos	300 trescientos.
400 cuatrocientos	500 quinientos	600 seiscientos.
700 setecientos	900 ochocientos	900 novecientos.

Los números intermedios entre 100 y 200, 200 y 300, etc., hasta 900 y 999, que es la última cifra de las centenas, se forman de un modo análogo al que se empleó para formar las decenas ; es decir, que debiendo constar precisamente los guarismos del orden de las centenas de tres cifras, se colocan las unidades en el primer lugar á la derecha, y las decenas y centenas á su izquierda.

Ejercicios :

Represéntense con cifras los siguientes números:

1 — Quinientos cincuenta y ocho.
2 — Setecientos cuarenta y uno.
3 — Doscientos diez y ocho.
4 — Ciento noventa y dos.
5 — Seiscientos diez y seis.
6 — Trescientos doce.
7 — Cuatrocientos veinte.
8 — Novecientos sesenta.

Léanse los siguientes números :

764, 436, 226, 945, 618, 372 824.

Las cifras tienen en la numeración, además de su valor propio, otro que se llama relativo dependiente del lugar que ocupan. Examinando por ejemplo, el número 824, se nota que la cifra 8, que aislada representaría sólo unidades, representará decenas si á su derecha se escribe el 2, y centenas si á continuación se agrega el 4. De aquí se infiere que, el valor relativo de una cifra aumenta *diez veces* por cada lugar que se mueve á la *izquierda* ; y recíprocamente, disminuye *diez veces* por cada lugar que se mueve á la *derecha.*

El signo *0*, se emplea para llenar los lugares de las unidades de cualquier orden que no estén expresadas por cifras significativas. Por ejemplo, en el número 704, el lugar de las decenas se llena con un *0*, porque no hay unidades de esa especie en dicho número.

La unidad de orden superior á la centena, se llama *millar*, que se representa así : 1000, y para su formación se sigue el mismo método que en las precedentes. La decena de millar, que es la unidad inmediata de orden superior, se representa así: 10,000; esto es, agregando á la cifra anterior un cero á la derecha, lo cual equivale á mover la unidad un lugar á la izquierda, que es tanto como aumentar su valor relativo diez veces, conforme á lo que se ha dicho antes.

Después de las *centenas de millar* que se expresan así : 100,000, sigue otra unidad diez veces mayor que se llama *millón*, á continuación de la cual siguen formándose grupos superiores en que cada uno es diez veces mayor que el que le antecede. El millón de millones se llama *billón*; el millón de billones, *trillón*; el millón de trillones, *cuatrillón*: y de esta manera se ha completado el sistema de la numeración.

La siguiente tabla manifiesta los nombres con que se designan en la numeración los diferentes órdenes de unidades, y el número de cifras que representa á cada uno de ellos:

Órdenes	Nombres	N° de cifras
1°	Unidades.	1.
2°	Decenas.	2.
3°	Centenas.	3.
4°	Millares.	4.
5°	Decenas de millar.	5.
6°	Centena de millar.	6.
7°	Millón.	7.
8°	Decena de millón.	8.
9°	Centena de millón.	9.
10°	Millar de millón.	10.
11°	Decena de millar de millón.	11.
12°	Centena de millar de millón.	12.
13°	Billón.	13.

Ejercicios: Escríbanse y léanse los siguientes números dictados en esta forma:

1.—Una unidad de tercer orden, tres de segundo, seis de primero.

2.—Dos unidades de cuarto orden, dos de tercero, seis de primero.

3.—Cuatro unidades de tercer orden, tres de segundo, cinco de primero.

4.—Tres unidades de octavo orden, seis de sexto, cinco de cuarto, nueve de tercero.

5.—Tres unidades de séptimo orden, una de quinto, ocho de cuarto, nueve de tercero, siete de segundo y tres de primero.

6.—Cuatro unidades de sexto orden, tres de quinto, dos de cuarto, una de segundo y ocho de primero.

7.—Una unidad de séptimo orden, cuatro de sexto, siete de cuarto, cinco de tercero, dos de segundo.

8.—Cinco unidades de noveno orden, dos de séptimo, uno de sexto, seis de quinto, dos de cuarto, cuatro de tercero y nueve de primero.

Observando el método que se sigue para numerar las cantidades, se advierte que las cifras se encuentran reunidas en grupos de tres en tres figuras, en los cuales se repiten constantemente las unidades, decenas y centenas de cada orden. Se ha convenido en llamar á cada uno de estos grupos, *períodos*, y se les da el nombre de la unidad inferior que representan, separando uno de otro por medio de una coma.

Para familiarizarse con la escritura y lectura de los guarismos de cualquier orden, conviene repetir todos los ejercicios posibles, preparando una tabla de referencia en la forma siguiente :

Períodos	4°			3°			2°			1°		
Nombres	M. de Millón			Millones			Millares			Unidades		
Órdenes de Unidades	C.	D.	U.	C.	D.	U.	C.	D.	U.	C.	D.	U.
NÚMEROS											2	5
										7	3	6
									9	4	1	8
								8	4	5	0	7
							6	2	5	9	3	6
						4	3	7	8	5	4	9
					7	2	8	3	5	6	0	1
				2	0	1	6	4	0	9	3	2
			7	9	5	3	0	1	8	0	0	6
		2	0	3	6	4	3	0	9	1	0	0
	5	3	2	0	7	6	5	8	1	4	9	2

Para escribir una cantidad, se comienza por las unidades de orden superior, escribiendo de izquierda á derecha las centenas, decenas y unidades de cada período, supliendo con ceros los lugares ó períodos que carezcan de unidades del orden que ellas representan.

Toda cantidad debe leerse separando sus cifras de tres en tres por medio de una coma. Al hacer esta separación deberá empezar á contarse por la derecha; mientras que para leerla, se hace por la izquierda. En cada período se denominan las unidades en el orden correspondiente con los guarismos que las representan. Cuando hubiere ceros no se leen; pero no dejan de ocupar su propio lugar: así, para leer 1,004, decimos *mil cuatro*, donde se ve que los dos ceros, no obstante no ser leídos, ocupan el lugar de las centenas y el de las decenas.

Para facilitar la lectura de las cantidades compuestas de muchos guarismos, se acostumbra poner con números pequeños 1, 2, 3, etc., arriba de cada período de seis cifras que representan millones, billones, trillones, etc.

El sistema de numeración que se acaba de explicar se llama *arábigo*, por haber sido los árabes quienes inventaron los signos que en él se usan.

Se llama también *décuplo* ó *decimal*, por ser 10 el número que sirve de base á su combinación.

OPERACIONES DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

CAPÍTULO II.

ADICIÓN.

El objeto de la aritmética, como se ha dicho al principio, es combinar los números entre sí, lo cual se verifica por medio de operaciones ó cálculos.

Las operaciones elementales de la aritmética son cuatro : *adición, sustracción, multiplicación* y *división.*

Para indicar las operaciones hay que servirse de ciertas señales llamadas *signos.*

La *adición* tiene por objeto reunir en *un* número el valor de *varios* de la misma especie.

Suma es el número que resulta de la adición.

Se llaman *sumandos* las cantidades que se suman.

El signo de la adición es + y se lee *más.*

El signo de igualdad es = y se lee *igual,* ó *igual á.*

Cuando se quiere significar que dos cantidades son iguales, se colocan á los dos lados del signo = y la expresión que resulta se llama *ecuación.*

La cantidad escrita antes del signo de igualdad, se llama *primer miembro* de la *ecuación,* y la que se escribe después, *segundo miembro.* Si la cantidad consta de varios números, se les llama *términos* de la ecuación. Para ejecutar con rapidez las operaciones de la adición, se necesita tener presente los resultados de la suma de las unidades, por lo menos de 1 á 10, lo cual se logra repitiendo con frecuencia la siguiente tabla :

1+ 1= 2	1+ 2= 3	1+ 3= 4	1+ 4= 5	1+ 5= 6
2+ 1= 3	2+ 2= 4	2+ 3= 5	2+ 4= 6	2+ 5= 7
3+ 1= 4	3+ 2= 5	3+ 3= 6	3+ 4= 7	3+ 5= 8
4+ 1= 5	4+ 2= 6	4+ 3= 7	4+ 4= 8	4+ 5= 9
5+ 1= 6	5+ 2= 7	5+ 3= 8	5+ 4= 9	5+ 5=10
6+ 1= 7	6+ 2= 8	6+ 3= 9	6+ 4=10	6+ 5=11
7= 1= 8	7+ 2= 9	7+ 3=10	7+ 4=11	7+ 5=12
8+ 1= 9	8+ 2=10	8+ 3=11	8+ 4=12	8+ 5=13
9+ 1=10	9+ 2=11	9+ 3=12	9+ 4=13	9+ 5=14
1+ 6= 7	1+ 7= 8	1+ 8= 9	1+ 9=10	1+10=11
2+ 6= 8	2+ 7= 9	2+ 8=10	2+ 9=11	2+10=12
3+ 6= 9	3+ 7=10	3+ 8=11	3+ 9=12	3+10=13
4+ 6=10	4+ 7=11	4+ 8=12	4+ 9=13	4+10=14
5+ 6=11	5+ 7=12	5+ 8=13	5+ 9=14	5+10=15
6+ 6=12	6+ 7=13	6+ 8=14	6+ 9=15	6+10=16
7+ 6=13	7+ 7=14	7+ 8=15	7+ 9=16	7+10=17
8+ 6=14	8+ 7=15	8+ 8+16	8+ 9=17	8+10=18
9+ 6=15	9+ 7+16	9+ 8=17	9+ 9=18	9+10=19

Cuando se quiere indicar una operación en la que figuran cantidades compuestas de varios términos, se colocan dentro de un paréntesis, así : (2+4+1).

Ejercicios preparatorios : Exprésense los segundos miembros de las siguentes ecuaciones :

2+6+3=	7+5+2=	6+3+8=
7+3+5=	6+3+1=	7+9+2=
6+5+8=	4+2+8=	5+9+1=
3+4+9=	4+8+5=	4+6+8=

Cuéntese	de 2	en	2	unidades,	desde	2	hasta	20.
“	3	“	3	“	“	2	“	32.
“	4	“	4	“	“	0	“	40.
“	5	“	5	“	“	6	“	56.
“	6	“	6	“	“	3	“	66.
“	7	“	7	“	“	4	“	74.
“	8	“	8	“	“	0	“	80.
“	9	“	9	“	“	7	“	97.

Ejemplos:

1.—Juan da $4 á Pedro, $2 á Enrique y $9 á Miguel, ¿cuántos pesos ha dado?

2.—Un tendero vende 17 kilos de azúcar á un hombre, 13 á otro y 8 á otro, ¿cuántos kilos vendió?

3.—Un viajero recorrió 6 kilómetros el primer día, 15 el segundo y 22 el tercero, ¿cuántos kilómetros anduvo?

4.—En un jardín hay 5 manzanos, 3 cerezos y 16 duraznos, ¿cuántos árboles hay en el jardín?

5.—Elena dió á Emilia 6 rcsas, 12 claveles y ocho margaritas, ¿cuántas flores les dió?

6.—José compró un gabán en $12, un pantalón en $5 y un sombrero en $3, ¿cuánto gastó en junto?

7.—En una escuela se repartieron 4 premios de aritmética, 8 de gramática y 6 de geografía, ¿cuántos premios se distribuyeron?

8.—Carlos trabajó en un mes, 3 semanas. En la primera ganó $4, en la segunda $9 y en la tercera $12, ¿cuánto ganó en el mes?

Ejercicios orales:

Si á uno de los sumandos se le agrega ó quita una cantidad, la suma resulta aumentada ó disminuida en la misma cantidad.

Sea la ecuación —

$$4+8+5=17.$$

Agregando 2 unidades al sumando 4 y haciendo la operación, resulta: $6+8+5=19$; por lo que se ve que la suma ha aumentado en la misma cantidad que se aumentó el sumando. Si en vez de agregar á la cifra 4 las 2 unidades, se le hubieran quitado, el resultado sería análogo y la suma aparecería disminuida en la misma cantidad. La razón es que, lo que se hace con las partes que constituyen un todo, queda hecho con el todo: luego, siendo la suma la reunión de las unidades de los sumandos, cuando á alguno de ellos se le agrega ó quita una cantidad, la suma resulta aumentada ó disminuida de la misma.

Si á uno de los sumandos se le agrega una cantidad, y á otro se le quita la misma cantidad, la suma no se altera —

$4+8+5=17$ es lo mismo que $6+6+5=17$; porque al agregar 2 unidades al primer sumando, la suma resultó aumentada del valor de esas unidades ; pero al quitar la misma cantidad al segundo sumando, resultó disminuida de la misma cantidad, por lo cual los resultados son iguales.

La suma de varias cantidades es la misma, cualquiera que sea el orden que guarden los sumandos.

$4+8+5=17.$
$8+5+4=17.$
$5+4+8=17.$
$4+5+8=17.$
$8+4+5=17.$
$5+8+4=17.$

La razón de esto es que, debiendo ser la suma el resultado de la agregación de las unidades contenidas en los sumandos, cuando estos sean los mismos, el resultado contendrá en totalidad el mismo número de unidades.

Sumemos las cantidades 321, 418 y 576. Supuesto que esta operación sólo puede efectuarse con unidades de la misma especie, será preciso hacer separadamente la adición de las unidades, decenas y centenas que hay en estos guarismos, así :

321.	
418.	
576.	
15	suma de las unidades.
100	suma de las decenas.
1200	suma de las centenas.

Como en la práctica sería muy dilatado este procedimiento, se abrevia ejecutando desde luego la operación del modo siguiente :

$$\begin{array}{r} 321. \\ 418. \\ 576. \\ \hline 1315. \end{array}$$

Es decir, que sumando las unidades simples, se obtiene por resultado 15, que es igual á 5 unidades y una decena. Se colocan las unidades en su columna y se lleva la decena para reunirla con las unidades de su especie. El resultado de esta segunda suma, es 11 decenas, igual á 1 decena y una centena. Se coloca la decena en su lugar y se lleva la centena para agregarla á las de su especie, escribiendo la suma resultante al pie de la columna de las centenas, que son las unidades de orden superior contenidas en el número.

La suma obtenida es la verdadera, porque expresa el valor total de las unidades, decenas y centenas de que están compuestos los sumandos.

Regla para la adición : Escríbanse los sumandos de manera que las unidades del mismo orden se encuentren colocadas en la misma columna, esto es : las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc.; tírese una línea para separar el resultado, y princípiese la adición por las unidades de especie menor. Si la suma es menor que diez, se escriben debajo las unidades simples; pero si es igual ó mayor que diez, se lleva la decena ó las decenas que resulten á la columna de éstas, repitiendo en ella y en las siguientes la misma operación, hasta la última de la izquierda, debajo de la cual se escribe el resultado de la última suma.

Al hacer una suma, piénsese en los resultados y no en los números que los producen. Así, al sumar 4, 5, 7, en vez de decir : 4 y 5 son 9 y 7 son 16, dígase : 4, 9, 16.

Prueba : La adición se prueba de dos modos : 18, sumando de abajo para arriba los mismos guarismos que se sumaron de arriba para abajo, y si los resultados son iguales la suma es exacta, porque el orden de los sumandos no altera la suma ; 2°, separando los sumandos en dos ó varias porciones, y haciendo la suma de cada una de ellas, el total de estas sumas debe ser igual al primer resultado, porque una cantidad es igual á la reunión de sus partes y las sumas parciales son las partes de la suma total.

Ejercicios escritos :

Cópiense, súmense y pruébense.

241 523 472	527 64 496	701 890 548	280 15 342
6437 1672 374	5024 7848 8366	5136 91 618	40735 7823 29285
638867 783476 865927	212752 923175 627426	425539 459213 537182	827334 123689 534176

1. Un hombre dejó en su testamento $3256 á su esposa, $1258 á su hija y $580 á su hijo; ¿cuánto era su capital?

2. Un ganadero compró un lote de 560 terneras, 6 toros, 2308 borregos, 225 caballos y 493 mulas; ¿cuántos animales suma la partida?

3. Un comerciante exportó 300 sacos de café en una semana, 2437 la siguiente, 4358 la tercera y 830 la cuarta; ¿cuánto suman las exportaciones?

4. Un especulador compró en una ciudad, tres lotes; el primero le costó $2530, el segundo $3225, y el tercero $1836. Los vendió después, y en el primero ganó $1230, en el segundo $426 y en el tercero $125; ¿cuánto era su capital antes de la especulación y cuánto después de la venta?

5. ¿Cuál es el área total de los Estados de la raza española, supuesto que sus áreas parciales son las siguientes?

ESTADOS	KILÓMETROS CUADRADOS	ESTADOS	KILÓMETROS CUADRADOS
Argentina	4,195,000	Méjico	1,920,000
Bolivia	1,300,000	Nicaragua	150,000
Chile	330,000	Paraguay	350,000
Colombia	830,000	Perú	1,200,000
Costa Rica	56,000	Puerto Rico	10,000
España	507,000	Salvador	20,000
Ecuador	650,000	Santo Domingo	46,000
Guatemala	106,000	Uruguay	180,000
Honduras	122,000	Venezuela	1,140,000

6. ¿Cuál es la población total de las principales Capitales de los Estados de la raza española, siendo que el número de habitantes de cada una de ellas es el siguiente?:

CAPITALES	HABITANTES	CAPITALES	HABITANTES
Buenos Aires	466,267	Puerto Príncipe	50,000
Chuquisaca	25,000	Tegucigalpa	12,000
Río de Janeiro	357,332	Méjico	350,000
Santiago	200,000	Managua	18,000
Bogotá	50,000	Asuncíon	24,838
San José	18,000	Lima	101,488
Habana	230,000	Puerto Rico	25,000
Madrid	410,000	San Salvador	16,327
Quito	76,000	Santo Domingo	25,000
Manila	270,000	Montevideo	115,462
Guatemala	59,000	Caracas	70,078

CAPÍTULO III.

SUSTRACCIÓN

La Sustracción tiene por objecto encontrar la *diferencia* entre dos cantidades de la misma especie; entendiéndose por diferencia lo que le sobra ó falta á una cantidad para ser igual á otra.

Se llama *minuendo* la cantidad mayor de la cual se tiene que restar la otra conocida.

Se llama *sustraendo* la cantidad menor que tiene que sustraerse.

El resultado de la operación se denomina *resta, exceso,* ó *diferencia.*

El minuendo debe ser igual á la suma del sustraendo y de la resta.

El signo de la sustracción es el siguiente, —, y se lee *menos.*

Para expresar la desigualdad de dos cantidades, se usan los signos $>$ y $<$, y se leen *mayor que* ($>$) ó *menor que* ($>$) poniendo la cantidad mayor del lado de la abertura.

Para facilitar las operaciones de la sustracción, conviene tener presente las diferencias anotadas en la siguiente tabla que damos con ese propósito:

1 − 1 = 0	2 − 2 = 0	3 − 3 = 0	4 − 4 = 0	5 − 5 = 0
2 − 1 = 1	3 − 2 = 1	4 − 3 = 1	5 − 4 = 1	6 − 5 = 1
3 − 1 = 2	4 − 2 = 2	5 − 3 = 2	6 − 4 = 2	7 − 5 = 2
4 − 1 = 3	5 − 2 = 3	6 − 3 = 3	7 − 4 = 3	8 − 5 = 3
5 − 1 = 4	6 − 2 = 4	7 − 3 = 4	8 − 4 = 4	9 − 5 = 4
6 − 1 = 5	7 − 2 = 5	8 − 3 = 5	9 − 4 = 5	10 − 5 = 5
7 − 1 = 6	8 − 2 = 6	9 − 3 = 6	10 − 4 = 6	11 − 5 = 6
8 − 1 = 7	9 − 2 = 7	10 − 3 = 7	11 − 4 = 7	12 − 5 = 7
9 − 1 = 8	10 − 2 = 8	11 − 3 = 8	12 − 4 = 8	13 − 5 = 8
10 − 1 = 9	11 − 2 = 9	12 − 3 = 9	13 − 4 = 9	14 − 5 = 9
6 − 6 = 0	7 − 7 = 0	8 − 8 = 0	9 − 9 = 0	10 − 10 = 0
7 − 6 = 1	8 − 7 = 1	9 − 8 = 1	10 − 9 = 1	11 − 10 = 1
8 − 6 = 2	9 − 7 = 2	10 − 8 = 2	11 − 9 = 2	12 − 10 = 2
9 − 6 = 3	10 − 7 = 3	11 − 8 = 3	12 − 9 = 3	13 − 10 = 3
10 − 6 = 4	11 − 7 = 4	12 − 8 = 4	13 − 9 = 4	14 − 10 = 4
11 − 6 = 5	12 − 7 = 5	13 − 8 = 5	14 − 9 = 5	15 − 10 = 5
12 − 6 = 6	13 − 7 = 6	14 − 8 = 6	15 − 9 = 6	16 − 10 = 6
13 − 6 = 7	14 − 7 = 7	15 − 8 = 7	16 − 9 = 7	17 − 10 = 7
14 − 6 = 8	15 − 7 = 8	16 − 8 = 8	17 − 9 = 8	18 − 10 = 8
15 − 6 = 9	16 − 7 = 8	17 − 8 = 9	18 − 9 = 9	19 − 10 = 9

Ejercicios preparatorios:

Exprésense las siguientes diferencias:

6 − 3 =	5 − 4 =	15 − 7 =	11 − 5 =
9 − 2 =	3 − 2 =	12 − 9 =	14 − 6 =
8 − 1 =	2 − 2 =	19 − 1 =	17 − 9 =
5 − 3 =	7 − 4 =	10 − 4 =	16 − 4 =

Réstese de 2 en 2 unidades de 21 á 1.
" " 3 en 3 " de 40 á 4.
" " 4 en 4 " de 51 á 3.
" " 5 en 5 " de 63 á 3.
" " 6 en 6 " de 65 á 5.
" " 7 en 7 " de 77 á 14.
" " 8 en 8 " de 88 á 16.
" " 9 en 9 " de 99 á 18.

1.—Un mercader compró 9 barriles de harina y vendió 5; ¿ cuántos le quedan?

2.—Un hombre vendió una vaca en $25, y compró un arado en $12; ¿ cuánto dinero le quedó?

3.—María tiene 14 años y Luisa 8; ¿ cuántos años es mayor María?

4.—Un pintor compró 16 litros de aceite, y después de usar 7 vendió el resto; ¿ cuántos vendió?

5.—Un labrador tiene sembradas 16 fanegas de trigo y 9 de maíz; ? en cuántas fanegas excede la siembra de trigo á la de maíz?

6.—Un artesano gana $18 cada semana, y gasta $9; ¿ cuánto economiza semanalmente?

Ejercicios orales:

Cuando al minuendo se le agrega ó quita una cantidad, la resta resulta aumentada ó disminuida en la misma cantidad; porque como la resta expresa el valor numérico de la diferencia, cuando el sustraendo permanece constante, el aumento ó la diminución tiene que aparecer en la resta.

Cuando al sustraendo se le agrega ó quita una cantidad, la resta resulta aumentada ó disminuida en la misma cantidad; porque como el minuendo es igual á la suma del sustraendo con la resta, si el primero permanece constante, y el segundo no, el aumento ó diminución tiene que aparecer en la resta.

La resta no se altera cuando al minuendo y al sustraendo se les agrega ó quita la misma cantidad; porque como al aumentar al minuendo una cantidad, la resta resulta aumentada del valor de esa cantidad, y al aumentarla al sustraendo resulta disminuida de la misma, la resta no se altera.

Restemos la cantidad 342 de 865. Como es condición indispensable que las cantidades en la sustracción sean de la misma especie, se restarán las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, y así sucesivamente; procediendo de un modo semejante al seguido en la adición, se escribirán las cifras que representan los diferentes órdenes de unidades, en el lugar que les corresponde. Si todas las cifras del sustraendo son menores que sus correspondientes del minuendo, como sucede en el ejemplo propuesto, sólo habrá que ir anotando ordenadamente las diferencias que se vayan obteniendo, y su conjunto representará la resta. Al practicar la operación, el número menor se coloca siempre debajo del mayor, así:

$$\begin{array}{r} 865 \\ 342 \\ \hline 523 \end{array}$$

5 unidades — 2 unidades = 3 unidades que se escriben debajo de las unidades; 6 decenas — 4 decenas = 2 decenas que se escriben debajo de las decenas; 8 centenas — 3 centenas = 5 centenas, que se escriben debajo de las centenas.

El número 523 que resulta es la resta, por ser la cantidad que sumada con el sustraendo, produce el minuendo.

Si alguna ó algunas de las cifras del sustraendo son mayores que las correspondientes del minuendo, como sucede al sustraer el número 466 del 653, se indica la operación como en el primer caso, y al efectuarla se hace el raciocinio siguiente:

$$\begin{array}{r} 653 \\ 466 \end{array}$$

Puesto que 6 unidades es mayor que 3 unidades, y que la resta debe ser un número tal que sumado con las unidades del sustraendo, produzca las 3 unidades que figuran en el minuendo, habrá que aumentar éstas tomando 1 unidad del orden superior y agregarla á las 3 que existen para formar 13 unidades, con lo cual ya se hace posible la resta : 13 unidades — 6 unidades = 7 unidades que se escriben en el lugar correspondiente.

Pasando á la columna de las decenas se advierte que, habiendo tomado una de ellas para agregarla á las unidades, no quedan ya sino 4 decenas en vez de 5 ; y como 6 decenas del sustraendo no pueden restarse de 4 decenas del minuendo, será preciso tomar 1 unidad del orden superior inmediato, que es igual á 10 decenas, para reunirla con las 4 que habían quedado : 14 decenas — 6 decenas = 8 decenas, que se escriben debajo de las decenas.

Como las centenas están disminuidas de la unidad de su especie, que pasó al orden inferior, no quedan mas que 5 realmente : 5 centenas — 4 centenas = 1 centena que se escribe para completar la resta.

La suma de 187 con 466 es igual al minuendo 653, de donde se deduce que la operación es correcta.

Regla para la sustracción :

Escríbase el sustraendo debajo del minuendo, de manera que las unidades simples se correspondan con las unidades, las decenas con las decenas, las centenas con las centenas y así sucesivamente. Tírese una línea y comiéncese la sustracción por la derecha, escribiendo las diferencias que resulten entre cada una de las cifras del sustraendo con las correspondientes del minuendo. Si alguna de las cifras del minuendo fuése 0, ó menor que la correspondiente del sustraendo, agréguese le una unidad del orden superior inmediato, y hágase la sustracción ; teniendo cuidado de disminuir una unidad á la cifra que la sigue á la izquierda, y continúese la sustracción como antes.

En vez de *disminuir* una unidad á las del orden superior inmediato en el minuendo, se puede *aumentar* una unidad á las de orden superior en el sustraendo, y se obtendrá el mismo resultado.

Cuando los guarismos del sustraendo y del minuendo son iguales, la resta es igual á 0 ; y cuando el sustraendo es 0, la resta es igual al minuendo.

Prueba. Súmese el sustraendo con la resta, y si la suma es igual al minuendo, la operación será correcta.

Ejercicios escritos :

Cópiense, réstense y pruébense.

3287	5636	7521	8003
2168	2425	3245	5872

kilómetros.	Hectáreas	Pesos	Toneladas
43006	69721	78303	52673
14348	44650	61572	28354

$$12375+729+1068-5689=$$
$$763+3412-1892+406=$$
$$47062+34965-52689=$$
$$16371+80413-35223+15250=$$

1.—Un comerciante había depositado en un banco \$5,489, otro \$3,415, un tercero \$2,896 y un cuarto \$1979; ¿cuánto más tenía cada uno de ellos comparado con el que le sigue?

2.—La República Argentina exportó en 1884, \$16,200,000 por valor de cueros y pieles; y en 1887, \$20,650,318 de la misma mercancía; ¿cuánto aumentó el tráfico en ese período?

3.—Méjico exportó en el año de 1884, por \$33,473,185 de metales preciosos y \$4,630,000 de henequen; y en 1887, \$31,006,188 de metales preciosos y $6.229,460 de henequen; ¿en qué cantidad aumentó en ese tiempo la exportación del henequen y cuánto decreció la de los metales?

4.—En el presente año de 1891, hace 1001 años que los árabes inventaron los signos de la numeración; ¿en qué año los inventaron?

5.—En 1887, Cuba exportó 623,453 toneladas de azúcar, y Puerto Rico 80,792; ¿en cuánto excedió la exportación de Cuba á la de Puerto Rico?

6.—Inglaterra exportó 40.000,000 de toneladas de carbón en el año de 1854; en 1884 exportó 23.000,000, y en 1887 24.500,000; ¿qué número expresa las diferencias de estas exportaciones?

7.—Un comerciante tiene en giro un capital de $541,365 en tiempo normal, es decir cuando los negocios no son ni muy activos ni tampoco quietos, y lo puede aumentar con las reservas á $2.500,000 en circunstancias favorables; ¿á cuánto ascienden las reservas?

8.—Los Estados Unidos tenían en explotación 23 millas de ferrocarril el año de 1830, y en 1887 tenían 150,710; ¿cuántas millas se construyeron durante ese tiempo y cuántos años se han empleado en su construcción?

CAPÍTULO IV.

MULTIPLICACIÓN.

La multiplicación es una operación por medio de la cual se suma abreviadamente, ó se toma un número por sumando tantas veces cuantas unidades contiene otro.

Se da el nombre de *multiplicando* al número que debe sumarse varias veces, y *multiplicador* al que indica cuantas veces es necesario sumar el multiplicando.

Se llama producto al resultado de la multiplicación.

El multiplicando y el multiplicador juntos se denominan *factores del producto.*

El signo de la multiplicación es × y se lee *multiplicado por* ó simplemente *por.*

La operación de multiplicar puede indicarse también por medio de un punto entre los dos factores.

El multiplicando y el multiplicador representan las más veces números de especie diferente; aunque en rigor el multiplicador debe considerarse como un número abstracto.

Para practicar las operaciones de la multiplicación, se necesita tener presentes los productos de los números simples ó dígitos que constan en la siguiente tabla:

1×1= 1	4×1= 4	7×1= 7
1×2= 2	4×2= 8	7×2=14
1×3= 3	4×3=12	7×3=21
1×4= 4	4×4=16	7×4=28
1×5= 5	4×5=20	7×5=35
1×6= 6	4×6=24	7×6=42
1×7= 7	4×7=28	7×7=49
1×8= 8	4×8=32	7×8=56
1×9= 9	4×9=36	7×9=63
2×1= 2	5×1= 5	8×1= 8
2×2= 4	5×2=10	8×2=16
2×3= 6	5×3=15	8×3=24
2×4= 8	5×4=20	8×4=32
2×5=10	5×5=25	8×5=40
2×6=12	5×6=30	8×6=48
2×7=14	5×7=35	8×7=56
2×8=16	5×8=40	8×8=64
2×9=18	5×9=45	8×9=72
3×1= 3	6×1= 6	9×1= 9
3×2= 6	6×2=12	9×2=18
3×3= 9	6×3=18	9×3=27
3×4=12	6×4=24	9×4=36
3×5=15	6×5=30	9×5=45
3×6=18	6×6=36	9×6=54
3×7=21	6×7=42	9×7=63
3×8=24	6×8=48	9×8=72
3×9=27	6×9=54	9×9=81

En las divisiones de la tabla se halla en la primera columna un número díjito, en el lugar correspondiente de la segunda, se encuentra el otro factor, y frente á ellos está el producto en la tercera columna.

Además de esta tabla, hay otra llamada de Pitágoras puesta á continuación, por medio de la cual fácilmente se puede encontrar el producto de dos factores cualesquiera, siguiendo de izquierda á derecha la hilera ocupada por uno de ellos, hasta encontrar la vertical en cuyo extremo superior esté escrito el otro. El número anotado en la intersección de las dos líneas será el producto.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ejercicios preparatorios:

1.—¿Cuál es el costo de 8 toneladas de carbón á $6 la tonelada?

2.—Si un metro de cinta cuesta 7 centavos; ¿cuánto costarían 9?

3.—Un muchacho gana $8 en una semana; ¿cuánto ganará en 4 semanas?

4.—¿Cuánto costarán 9 barriles de harina á $9 cada barril?

5.—Si una cuerda de leña vale $5; ¿cuánto valdrán 7 cuerdas?

6.—Un comerciante vendió 8 cargas de frijol á $9, y 5 quintales de arroz á $7; ¿cuánto suman las dos ventas?

7.—En una pajarera hay 6 divisiones, cada una de las cuales contiene 7 pájaros; ¿cuántos pájaros hay por junto?

8.—Un caballo recorre 7 kilómetros por hora; ¿cuántos recorrerá en 8 horas?

Ejercicios orales:

El valor del producto de dos cantidades no se altera cuando se invierte el orden de los factores; porque si se descompone el multiplicando en las unidades que lo forman, y después se suman éstas tantas veces como indica el multiplicador, resultará repetido tantas veces cuantas unidades hay en el multiplicando. Por ejemplo :

$4 \times 3 = (1+1+1+1) \times 3$; y haciendo la multiplicación :

$$4 \times 3 = 3+3+3+3.$$

Es decir, que 4 unidades tomadas 3 veces es igual á 3 unidades tomadas 4 veces ; luego

$$4 \times 3 = 3 \times 4.$$

Si uno de los factores se hace un cierto número de veces mayor, el producto resultará igual número de veces mayor.

$$4 \times 3 = 12$$

Haciendo á 4 dos veces mayor, resulta :

$8 \times 3 = 24$, cuyo producto es doble del anterior.

La razón es, que no siendo el multiplicando mas que la expresión abreviada del número de sumandos que tienen que agregarse, según las veces que indica el multiplicador, si el valor de estos sumandos aumenta y su número permanece constante, la suma de la segunda operación, ó sea el producto, resultará mayor tantas veces cuantas fué hecho el multiplicando. Como el orden de los factores no altera el producto, lo que se dice del multiplicando debe considerarse aplicable al multiplicador, y el principio es cierto para ambos.

Si uno de los factores se hace un cierto número de veces menor, el producto resultará disminuido el mismo número de veces. El razonamiento es el mismo que el del caso anterior, con la diferencia de que el valor de los sumandos en lugar de aumentar disminuye, y el producto sufre la misma alteración.

El producto de dos factores no se altera cuando uno de ellos se aumenta y el otro se disminuye el mismo número de veces; porque experimentando el producto las mismas variaciones que los factores, claro es que si uno de ellos aumenta la misma cantidad que el otro disminuye, las variaciones se compensan y el producto queda el mismo.

Cuando el multiplicador de una cantidad es 1, el producto es la misma cantidad ; porque tomar ésta una vez, que es lo que el multiplicador indica, equivale simplemente á repetirla y por lo mismo no sufre cambio alguno.

Toda cantidad multiplicada por 0, produce 0; porque tomar ó sumar una cantidad un número 0 de veces, es no tomarla ninguna vez; y tomar ó sumar 0 cualquier número de veces, siempre producirá 0.

Cuando el multiplicando está expresado por varias cifras y el multiplicador por una sola, como en este ejemplo: 263 × 3, la operación podriá resolverse por medio de la suma, agregando tres veces consecutivas la cantidad 263, como sumando ; pero como la multiplicación es una suma abreviada, y se conocen ya por medio de las tablas los productos de las unidades simples, se escribe el multiplicador debajo del multiplicando y se multiplica por cada una de las cifras que lo componen, comenzando por las de especie menor, escribiendo cada producto en el lugar que corresponde a la unidad de su especie ; llevando las decenas, si las hay, para reunirlas al producto siguiente, así:

$$263 \times 3 =$$

Por adición.	Por multiplicación.
263	
263	263
263	3
789	789

Cuando el multiplicando y el multiplicador están expresados por varias cifras, es necesario descomponer el multiplicador en las unidades, decenas, centenas etc., de que consta, y efectuar la operación con cada uno de estos órdenes de unidades separadamente. Sea por multiplicar :

$$7243 \times 532.$$

Se colocan los guarismos, como ya se ha dicho : el multiplicador debajo del multiplicando, y se toma el producto de las unidades como queda explicado. Para obtener el de las decenas se multiplicará 7243 por 3 que es la cifra que las representa ; pero como el producto obtenido por este número usado como factor, expresa sólo producto de unidades ; y lo que debe expresar es producto de decenas, se le agregará un 0 á fin de hacerlo diez veces mayor y darle el valor que le corresponde. Pasando á las centenas y operando de un modo semejante, se efectuará la multiplicación de 7243 por 5, y al producto se le agregarán dos ceros para que exprese el producto de centenas. La suma de estos productos parciales dará el total que se busca.

Como los ceros agregados á la derecha de los productos parciales no tienen significación alguna, al hacer la suma se suprimen en la práctica ; pero se tiene cuidado de escribir la primera cifra de cada producto parcial en el lugar que le corresponde.

Operación demostrada.	*Operación práctica.*
7243	7243
532	532
14486	14486
217290	21729
3621500	36215
3853276	3853276

Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros, el producto se obtiene agregando al otro factor los ceros que siguen á la unidad, pues esto equivale á hacer al 1, 10, 100, 1,000, veces mayor, que es lo que la operación expresa.

Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros, se omite la operación, porque los productos parciales serían cero ; pero se tiene cuidado de colocar en su lugar la primera cifra del producto parcial que representa la del multiplicador que la produce, á fin de que en el producto total, que es la suma de los productos parciales, cada figura ocupe el lugar que le corresponde.

Regla para la multiplicación—Escríbase el multiplicador debajo del multiplicando, de manera que las unidades del mismo orden queden situadas en una misma columna, y multiplíquese cada figura del multiplicando por cada cifra del multiplicador, comenzando con las unidades ; colocando la primera cifra de la derecha de cada producto, debajo de la cifra del multiplicador usada para obtenerlo, y súmense los productos parciales.

Prueba :—Multiplíquese el multiplicador por el multiplicando, y si los resultados concuerdan el producto será exacto.

También se puede probar la multiplicación por medio de la suma, de la siguiente manera:

Descompónganse el multiplicando, el multiplicador y el producto total; y haciendo abstracción del valor relativo de sus cifras, súmense éstas hasta obtener unidades simples. Si la operación principal ha sido bien ejecutada, el resultado de la suma de las cifras del producto total, expresada en unidades simples, será igual al producto (también en unidades simples) que se obtenga de multiplicar el resultado de la descomposición y suma de las cifras del multiplicando, por el de la descomposición y suma de las cifras del multiplicador.

Empleemos el mismo ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r} 7243 \\ \times 532 \\ \hline 14486 \\ 21729 \\ 36215 \\ \hline 3853276 \end{array}$$

Comenzando por el multiplicando, tendremos:

$$7+2+4+3=16;\ 1+6=7$$

Pasando al multiplicador:

$$5+3+2=10 \; ; \; 1+0=1$$

Descomponiendo, en fin, las cifras del producto total, obtendremos:

$$3+8+5+3+ \quad +7+6=34 \; ; \; 3+4=7$$

Multiplicando el resultado del multiplicando 7, por 1 que es el del multiplicador, se obtendrá 7 que es el mismo número obtenido después de descomponer el producto total y sumar sus cifras hasta tener unidades simples; es decir, se obtiene la ecuación:

7=7, lo que prueba que la operación principal estuvo bien ejecutada.

Como se ve, el procedimiento de esta prueba es facilísimo, á causa de ejecutarse por medio de la operación más elemental de la aritmética, y que debe ser perfectamente conocida de los que estudian la multiplicación.

Ejercicios escritos:

656 × 12	3142 × 34	73098 × 322
983 × 33	8136 × 63	156783 × 706
394 × 25	21607 × 42	312082 × 211
2536 × 18	38565 × 72	429716 × 347

1.—Un contratista construyó 8 casas á $2,915 cada una, 4 á $3,640, y 5 á $8,320; ¿cuánto costarán todas?

2.—¿Qué cantidad de algodón podrá cosecharse en un terreno de 12,340 hectáreas, en el supuesto que una hectárea produce 352 kilos?

3.—¿Cuánto costará la construcción de un ferrocarril de 262 kilómetros de longitud á razón de $1,580 por kilómetro?

4.—Una paloma viajera recorre 50 kilómetros por hora; ¿qué distancia recorrerá en un día?

5.—Un manantial produce 18 litros por minuto; ¿cuántos producirá en 48 horas?

6.—El producto líquido de un kilómetro de vía ferrea en explotación, es de $218; ¿cuánto producirá una línea de 826 kilómetros de longitud?

7.—Un banco ha distribuido por término medio, durante 18 años, $320,762 de dividendo anual; ¿á cuánto asciende la suma distribuida?

8.—El tren de la ciudad de Méjico á El Paso, en la frontera americana, recorre 835 kilómetros diarios; ¿cuántos recorrería en tres meses?

9.—Una locomotora consume en 4 horas, 500 kilogramos de carbón y 200 de leña; ¿qué cantidad de combustible consumirá en una semana?

CAPÍTULO V.

DIVISIÓN.

La *división* tiene por objeto determinar cuántas veces un número contiene á otro.

En la división hay dos términos: *dividendo*, el número propuesto para dividirse, y *divisor*, aquel por el cual se divide el primero.

Cociente es el número que, como resultado de la operación, indica las veces que el primer término contiene al segundo. Cuando el dividendo no contiene al divisor exactamente, queda una cantidad al concluir la operación, la cual se llama *residuo*, debiendo siempre ser menor que el divisor.

El signo de la división se representa así: ÷, y se lee: *dividido por*. También se indica la operación colocando el divisor debajo del dividendo, separados por una línea.

El dividendo y el divisor pueden ser de la misma especie ó de especie diferente, y á veces, el divisor es un número abstracto. La especie de las unidades del cociente, cuando no es también un número abstracto, no las determinan ni el dividendo ni el divisor, sino el enunciado mismo del problema.

El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo si lo hubiere.

Para practicar la división, es necesario conocer los cocientes de los números inferiores á 100, divididos por las unidades simples ; y aunque sería fácil obtenerlos indirectamente por las tablas de la multiplicación en que figuran como factores, puesto que la división no es otra cosa que la operación recíproca de la multiplicación, conviene retenerlos en la memoria, bajo la forma en que los registra la siguiente tabla ;

1 en 2, 2 veces	4 en 8, 2 veces	7 en 14, 2 veces
1 " 3, 3 "	4 " 12, 3 "	7 " 21, 3 "
1 " 4, 4 "	4 " 16, 4 "	7 " 28, 4 "
1 " 5, 5 "	4 " 20, 5 "	7 " 35, 5 "
1 " 6, 6 "	4 " 24, 6 "	7 " 42, 6 "
1 " 7, 7 "	4 " 28, 7 "	7 " 49, 7 "
1 " 8, 8 "	4 " 32, 8 "	7 " 56, 8 "
1 " 9, 9 "	4 " 36, 9 "	7 " 63, 9 "
2 en 4, 2 veces	5 en 10, 2 veces	8 en 16, 2 veces
2 " 6, 3 "	5 " 15, 3 "	8 " 24, 3 "
2 " 8, 4 "	5 " 20, 4 "	8 " 32, 4 "
2 " 10, 5 "	5 " 25, 5 "	8 " 40, 5 "
2 " 12, 6 "	5 " 30, 6 "	8 " 48, 6 "
2 " 14, 7 "	5 " 35, 7 "	8 " 56, 7 "
2 " 16, 8 "	5 " 40, 8 "	8 " 64, 8 "
2 " 18, 9 "	5 " 45, 9 "	8 " 72, 9 "
3 en 6, 2 veces	6 en 12, 2 veces	9 en 18, 2 veces
3 " 9, 3 "	6 " 18, 3 "	9 " 27, 3 "
3 " 12, 4 "	6 " 24, 4 "	9 " 36, 4 "
3 " 15, 5 "	6 " 30, 5 "	9 " 45, 5 "
3 " 18, 6 "	6 " 36, 6 "	9 " 54, 6 "
3 " 21, 7 "	6 " 42, 7 "	9 " 63, 7 "
3 " 24, 8 "	6 " 48, 8 "	9 " 72, 8 "
3 " 27, 9 "	6 " 54, 9 "	9 " 81, 9 "

Ejercicios preparatorios :

1.— Repartiendo 25 manzanas entre 5 niños, ¿cuántas manzanas le tocan á cada uno?

2.— Un comerciante cortó una pieza de paño de 42 metros en 7 partes; ¿cuántos metros mide cada parte?

3.—¿Cuántas toneladas de carbón á $8 tonelada, se pueden comprar con $64?

4.—Un caballo anda 9 kilómetros por hora; ¿en cuántas horas andará 54 kilómetros?

5.—Si hay 56 días en 8 semanas, ¿cuántos habrá en una semana?

6.—Un hombre excavó un foso de cierta profundidad en 36 días; cuántos hombres se necesitarán para hacer la misma obra en 4, 6, 9 días?

Divídase	por	3,	de	3	en	3	desde	27	hasta	3.
"	"	4,	"	4	"	4	"	36	"	4.
"	"	6,	"	6	"	6	"	54	"	6.
"	"	7,	"	7	"	7	"	63	"	7.
"	"	9,	"	9	"	9	"	81	"	9.

Ejercicios orales:

Cuando se multiplica ó divide el dividendo por un número, el cociente resultará multiplicado ó dividido por el mismo; porque como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, si el primero permanece fijo, el otro factor que es el cociente, tendrá que multiplicarse ó dividirse por el mismo número por que se halla multiplicado ó dividido el dividendo. Sea $\frac{4}{2}=2$; multiplicando el dividendo por 2, resulta: $\frac{8}{2}=4$; es decir, el cociente anterior multiplicado por el factor que multiplica al dividendo.

Si se multiplica el divisor por un número, el cociente queda dividido por el mismo; y si por lo contrario el divisor es dividido, el cociente quedará necesariamente multiplicado, porque siendo invariable la relación entre dividendo, divisor y cociente, es preciso que al multiplicarse el divisor, se divida también el cociente, á fin de que su producto iguale al guarismo constante del dividendo. Así pues, si en la ecuación $\frac{16}{4} = 4$, se multiplica el divisor por 2 y se ejecuta la operación, resultará: $\frac{16}{8} = 2$; es decir, que el cociente quedará dividido por el mismo número.

Cuando el dividendo y el divisor se multiplican ó dividen por el mismo número, el cociente no se altera ; porque multiplicándose los dos términos de la división, el dividendo aumenta tanto cuanto disminuye el cociente ; y recíprocamente, cuando el dividendo disminuye, el cociente aumenta ; luego, habiendo compensación perfecta el resultado es el mismo. Sea por ejemplo, $\frac{20}{4} = 5$; multicando los dos términos por 2, se tendrá $\frac{40}{8} = 5$; ó bien, dividiendo por el mismo número, $\frac{10}{2} = 5$, en consecuencia los cocientes son iguales.

El cociente de un número dividido por la unidad, es el mismo número ; porque siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, y el producto de un número por la unidad el mismo número, el dividendo tiene que ser igual al producto de dos factores de los cuales uno es la unidad.

Cuando se trata de dividir una cantidad menor que 100, por otra menor que 10, la operación es muy sencilla y puede hacerse á la memoria, recordando los cocientes anotados en la tabla ; pero si el dividendo está expresado por un guarismo de varias cifras, será necesario descomponerlo en varias partes, conforme al orden de la numeración, para obtener tantos cocientes parciales cuantas sean las partes en que el dividendo se haya descompuesto, y la suma de ellos representará el cociente total.

Sea por dividir el número 1396 por 4. Como los cocientes parciales han de constar de un solo guarismo, se separarán á la izquierda del dividendo la cifra ó cifras que sean suficientes para formar una cantidad divisible por el divisor 4. El número 13 satisface esta condición, pues es el próximo mayor á 12, el cual produce un cociente exacto. Se descompondrá pues el número 1396 en centenas, decenas y unidades; es decir, en 13 centenas, 9 decenas y 6 unidades, y se comienza la operación obteniendo el número 3 como primer cociente, el cual expresa que el divisor 4, está contenido en las 13 centenas del dividendo 300 veces más una resta. Se escriben las 3 centenas en el cociente y se multiplica el divisor por ellas obteniendo por producto 12 centenas que se escriben debajo de las unidades del mismo orden en el dividendo. Sustrayendo este producto, queda como residuo una centena.

Para encontrar el guarismo del cociente que represente las decenas, se agregará la centena del residuo á las 9 decenas que siguen, y resultarán 19 decenas; 4 está contenido en 19, 4 decenas y un residuo. Se escriben, pues, las 4 decenas en el cociente y se multiplica el divisor por ellas, obteniendo por producto 16 decenas, ó sea, una centena y 6 decenas, que se escriben debajo de las unidades del mismo orden en el dividendo parcial. Haciendo la sustracción queda un residuo de 3 decenas.

Para encontrar el guarismo del cociente que represente las unidades, se suman las 3 decenas sobrantes con las 6 unidades que siguen, y resultan 36 unidades. 4 está contenido en 36 unidades 9 veces exactamente. Se escriben las 9 unidades en el cociente, y se multiplica el divisor por ellas, obteniendo por producto 36 unidades, ó 3 decenas y 6 unidades que se escriben debajo de las unidades del mismo orden en el dividendo parcial. Ejecutando la sustracción no hay residuo siendo cociente exacto.

Operación demostrada		Operación abreviada	
1396	4	1396	4
1200—	300 veces	129	**349.**
196—	40 veces	19	
160—		16	
36	9 veces	36	
36	——	36	
—	349 veces	—	
0		0	

Como se ve, en el segundo procedimiento se omiten los ceros á la derecha de los productos, y se escriben las cifras significativas en el lugar que les corresponde, según el orden de la numeración.

Para simplificar aún más la operación, se acostumbra hacer la sustracción de los productos á la memoria, escribiendo inmediatamente la resta debajo de las cifras correspondientes del dividendo.

Cuando el dividendo y el divisor están expresados por varias cifras, la operación se efectúa de un modo análogo, pues el fundamento de la regla es el mismo. Para determinar la primera cifra del cociente, se comienza por separar tantas cifras del dividendo como tiene el divisor, ó una más, en el caso de que las cifras separadas no puedan contener al divisor ; ó en otros términos, cuando el primer número sea menor que el segundo. Los demás cocientes parciales se obtienen continuando la operación con las restas aumentadas de las unidades de los varios órdenes de que está formado el dividendo ; debiendo observarse que por cada cifra que se baja del dividendo, se obtiene una nueva cifra en el cociente.

Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros, se separan en el dividendo, contando de derecha á izquierda, tantas cifras como ceros haya en el divisor ; y el cociente será las cifras restantes del dividendo más el residuo expresado por las cifras separadas á la derecha ; por ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 394{,}526 & 1000 \\ \hline & 394\frac{526}{1000} \end{array}$$

La exactitud de la parte entera del cociente no necesita demostrarse, puesto que toda cantidad dividida por la unidad, da por cociente la misma cantidad. Respecto de la resta debe observarse que, como los órdenes de unidades inferiores á los millares, están representados en el divisor por ceros, al multiplicar los cocientes parciales por los ceros que ocupan los lugares vacantes del divisor, resulta cero por producto, y sería inútil escribirlo, supuesto que basta reproducir las cifras separadas para que expresen la resta.

Si el divisor está expresado por un guarismo cualquiera seguido de ceros, se separan estos é igual número de cifras á la derecha del dividendo, para hacerlo menor otras tantas veces, y se ejecuta la operación con las cifras significativas, agregando á la resta las cifras separadas del dividendo.

La primera parte de la operación no necesita demostrarse, pues es el caso general de la regla, y la segunda se funda en el mismo razonamiento del caso anterior.

Cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros, se suprime igual número de ellos en los dos términos.

Por cada cero que se suprime en el dividendo, se hace el cociente, 10, 100, 1000 veces menor; pero al suprimirlos igual número de veces en el divisor, el cociente se hace 10, 100, 1000 veces mayor, por lo que habiendo perfecta compensación su valor no se altera.

Regla para la división.—Escríbase el divisor á la derecha del dividendo, separado por una línea, y tírese otra debajo para poner el cociente. Sepárense á la izquierda del dividendo tantas cifras cuantas sean necesarias para contener al divisor, y divídase la primera ó las primeras cifras del dividendo por la primera del divisor, para encontrar el primer guarismo del cociente. Cada cociente parcial debe constar de una sola cifra. Multiplíquese el divisor por este cociente y sustráigase sucesivamente el producto de las cifras correspondientes del dividendo parcial, agregando á la resta la cifra siguiente del dividendo. De la misma manera, divídase este dividendo parcial para encontrar el segundo guarismo del cociente, y continúense bajando del mismo modo todas las cifras del dividendo hasta determinar todas las unidades del cociente y el último residuo.

Si en el curso de la operación, se obtiene un producto mayor que el dividendo parcial del cual debe sustraerse, es señal de que el cociente es más alto que el verdadero; si por lo contrario, la resta resultare mayor que el divisor, es prueba de que el cociente es más bajo y la operación debe repetirse corrigiendo el cociente.

Cuando uno de los dividendos parciales no contiene al divisor, se escribe un 0 en el cociente, después se agrega otra cifra del dividendo y se continúa la operación como se ha indicado.

Prueba—Multiplíquese el divisor por el cociente y al producto agréguese el residuo cuando lo hubiere. Si la operación es correcta el resultado debe ser igual al dividendo.

Ejercicios escritos:

$5684 \div 15 =$	$17981 \div 64 =$	$315608 \div 722 =$
$8736 \div 23 =$	$90835 \div 78 =$	$496365 \div 306 =$
$7352 \div 36 =$	$23681 \div 82 =$	$702654 \div 293 =$
$4824 \div 52 =$	$45726 \div 91 =$	$563789 \div 2312 =$

1877÷100=	4265÷3100=
42375÷300=	83076÷6700=
89546÷700=	94352÷1600=
57382÷900=	75483÷2600=

1.—La población de España aumentó en el decenio de 1860 á 1870, 1.141.500 habitantes; ¿cuál fué el aumento anual por término medio?

2.—¿Cuántos viajes necesitaría hacer una embarcación para transportar 48,436 cargas de trigo; en el concepto de que en cada viaje puede cargar 483 cargas ? ó bien, ¿cuántas embarcaciones de igual arqueo se necesitarián para transportar la mercancía en un solo viaje?

3.—Perú exportó de 1853 á 1872, 8.000.000 de toneladas de guano; y de 1878 á 1887, 13.000.000 de toneladas de salitre; ¿cuál fué el promedio de la exportación anual de cada uno de estos artículos durante uno y otro período?

4.—Una exposición es visitada por 8,467 personas en una semana; se desea saber cuál fué, por término medio, el número de entradas cada día?

5.—La superficie de las Islas Filipinas es de 294,460 kilómetros cuadrados, y su población de 8,500,000 habitantes; ¿ qué número de habitantes tiene por kilómetro cuadrado?

6.—¿ Cuántos kilómetros de ferrocarril se podrán construir con un capital de $15,000,000; en el supuesto que el valor medio del kilómetro se calcula en $5,800?

Ejemplos de las cuatro operaciones precedentes:

El medio de resolver fácilmente los siguientes ejemplos, consiste en analizarlos antes de ejecutar las operaciones que deben conducir al resultado propuesto.

Se llama análisis al método que enseña á resolver los problemas determinando la relación de sus partes. Al analizar un problema, el raciocinio procede del *número dado* á la *unidad*, y en seguida de la *unidad* al número *requerido*.

1.—Si 5 hombres pueden construir una pared en 9 días, en cuántos días podrán construirla 3 hombres? Análisis—Un hombre solo necesitaría para hacer la obra 5 veces 9 días, ó 45 días; por consiguiente, 3 hombres necesitarián la tercera parte de 45 días, ó sea 15 días.

2.—Un librero vendió 24 libros á $4 cada uno y ganó $48; ¿ cuánto le costaron?

3.—La diferencia entre dos números es 18, y el mayor es 30; ¿ cuál es el menor?

4.—Á razón de 32 kilómetros en 8 horas, ¿ cuántos kilómetros caminará un hombre en 12 horas?

5.—Si un hombre recibe $25 de salario cada semana y gasta $8 en casa y comida, y $4 en otros gastos menores, ¿ en cuántas semanas podrá pagar una deuda de $476 con sus ahorros?

6.—Se han comprado 140 hectáreas de labor por $7,500, y de ellas se han vendido 86 á $75 cada una y el resto al costo; ¿ cuál es la ganancia?

7.—Con un multiplicador igual á 48 se ha obtenido el producto 166,656; cuando el multiplicando sea tres vecer mayor, ¿ cuál será el producto?

8.—La marcha de un vapor es de 13 kilómetros por hora, marchando á favor de la corriente, y de 9 en contra; después de bajar durante 24 horas, ¿ cuànto tiempo necesitará para volver al punto de partida?

9.—Un comerciante ganó $7,387 en dos años, habiendo ganado el segundo 1,053 más que el primero; ¿ cuánto ganó cada año?

10.—Un cable compuesto de 6,000 alambres puede resistir una tensión de 11,150,000 kilos; ¿ qué tensión puede resistir cada alambre?

11.—Un testador distribuyó su capital en tres partes iguales: una la dejó á su hijo, otra á su hija, y el resto á sus nietos á razón de $1,500 á cada uno. El capital era de $45,000; ¿ cuántos nietos tenía?

12.—¿ Cuál es la diferencia entre la importación y exportación anual de España, sabiendo que importa de

Europa y África....................	$65,526,396
América............................	25,891,872
Asia y Oceanía......................	3,416,895
y que exporta á	
Europa y África....................	89,913,391
América............................	18,860,585
Asia y Oceanía......................	579,598

CAPÍTULO VI.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS.—FACTORES Y DIVISORES.

Número entero, según sabemos, es el que está expresado por unidades exactas.

Número par se denomina al que es exactamente divisible por 2, como: 8,12,26,30; é *impar* al que no lo es, como: 5,11,15.

Se llama *número primo* el que no puede dividirse exactamente sino por sí mismo y por la unidad, así: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17 son números primos. *Compuesto,* es el número que tiene otros factores ó divisores, además de él mismo y la unidad. Los divisores de un número compuesto se llaman *múltiplos* ó partes *alícuotas* de él.

Se dice que varios números son *primos entre sí,* cuando su único factor común es la unidad, así : 5 y 6 son primos entre sí, y no lo son 6, 9, 12, porque estos son divisibles por 3. Todo número primo que no divide á un entero, es primo con él, como 7 y 17.

Se llaman *factores primos* á cualesquiera números primos usados como factores.

El *común divisor* de dos ó más números es aquel que los divide exactamente.

El *máximo común divisor* de dos ó más números, es el mayor número exacto divisor de cada uno de ellos.

El *múltiplo* ó *factor común* de dos ó más números, es el número que los contiene exacto número de veces.

Se llama *menor múltiplo común* de dos ó más números, al menor número que contenga exactamente á cada uno de ellos.

Descomponer un número en sus factores, es encontrar varios números cuyo producto sea el número propuesto: 24 se puede descomponer en tres factores: $4 \times 2 \times 3$, ó en $6 \times 2 \times 2$, y también en dos, como 8×3 y 12×2.

Cuando los factores de un producto son iguales entre sí, se da el nombre de *potencia* al producto de la multiplicación: $25 = 5 \times 5$, y $8 = 2 \times 2 \times 2$, son, respectivamente, la segunda y la tercera potencia de 5 y de 2, y se valúa y denomina el grado de la potencia por el número de factores que causan el producto. Á la segunda potencia se le llama *cuadrado*, y á la tercera *cubo*. Las siguientes no tienen denominación especial.

La potencia de un número se indica escribiendo á la derecha y arriba de él una cifra pequeña llamada *exponente*, que expresa cuántas veces se ha usado el número como factor, así: $5^2 = 25$ y $2^3 = 8$.

Se dice que un número es *exactamente divisible* por otro, cuando después de la operación no queda resta alguna.

Así pues, un número será divisible:

1.—Por 2, siempre que sea par, como 20, 34, 58, 86.

2.—Por 3, si la suma de sus dígitos es divisible por 3, como 135,471,1134.

3.—Por 4, si las dos cifras de la derecha son ceros, ó expresan un número divisible por 4, por ejemplo: 300, 432, 1548.

4.—Por 5, cuando termina en cero ó en 5, como 30, 45, 235.

5.—Por 6, si es un número par y divisible por 3, así: 168, 402, 1314 son divisibles por 6.

6.—Por 7, cuando constando de cuatro cifras, la primera y la cuarta expresan la misma cifra significativa, y la segunda y tercera son ceros, como 2002, 3003, 5005.

7. Por 8, si sus tres cifras de la derecha son ceros, ó expresan un número divisible por 8, como 3000, 2728, 10,576.

8.—Por 9, siempre que la suma de sus cifras sea divisible por 9, como 217,683 y 401,301.

9.—Por 10, cuando termina en uno ó más ceros, como 40, 500, 3000 que son respectivamente divisibles por 10, por 100 y por 1000.

El divisor exacto de dos números lo es también de su suma ó de su diferencia: 3 es un divisor exacto de 9 y de 12, y por consiguiente lo es también de $9+12=21$ y de $12-9=3$.

Ejercicios preparatorios:

Para determinar los números primos de 1 á 50, por ejemplo, escríbanse en su orden y después de separar el número 1 que necesariamente es primo, cuéntese de dos en dos unidades comenzando con el número 2, y márquese cada cifra que en la serie de la numeración resulte múltiplo de 2. Cuéntese en seguida de tres en tres unidades comenzando con el número 3, y márquense sus múltiplos. Continúese del mismo modo contando de 4 en 4, de 5 en 5 unidades, etc., hasta completar la serie; teniendo cuidado de no repetir la marca en las cifras que ya la tengan por ser múltiplos de los números precedentes, y todos los guarismos que no aparezcan marcados serán los números primos que se buscan.

1.—Desígnense los números pares, impares y primos de 12 á 36.

2.—Determínense los divisores de los siguientes números:

1524	9630	42840	376250
3432	7236	92475	428328
4264	23661	362088	4183200

3.—¿Cuáles son los factores comunes de 36 y 72, de 18 y 30, de su suma y de su diferencia?

4.—Descompónganse los siguientes números en sus factores simples:

12	24	30	63
16	42	27	72
18	48	45	81
20	36	56	49

5.—Cuando un número se multiplica por 4 y su producto por 6, ¿por qué cantidad se ha multiplicado el número?

6.—Cuando un número se ha dividido por 8, y su cociente por 9, ¿por qué cantidad se ha dividido el número?

Ejercicios orales:

Sea el número 756 que se trata de descomponer en sus factores primos:

756	2
378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

Puesto que todo factor primo de un número, es su exacto divisor, la determinación de los factores primos de 756 se obtendrá encontrando todos los números primos que lo dividan exactamente. Como el número dado es par, y 2 es un número primo, se dividirá desde luego por él y se obtendrá por cociente 378 que se escribirá debajo de 756. Procediendo de igual manera con 378 se divide por 2 y se escribe el cociente 189 debajo de él. Este cociente ya no es divisible por 2; pero probando el número primo inmediato á 2 que es 3, se nota que satisface á la condición requerida, por lo que se ejecuta la operación que deja 63 por cociente, divisible también por 3 y deja 21 por cociente divisible aún por 3, y deja 7 por cociente que ya no es divisible sino por sí mismo. Los factores primos de 756 serán, en consecuencia, 2, 2, 3, 3, 3, 7; ó bien, $2^2, 3^3, 7$; esto es, indicando por medio de los exponentes respectivos, el grado de la potencia de cada uno.

Así pues, para descomponer un número en sus factores primos, se dividirá por cualquier número primo que lo contenga exactamente. El cociente que resulte se dividirá por el mismo número, si es posible; y en caso contrario, se prueba otro número primo que lo contenga exactamente, continuando así hasta obtener el último cociente exacto.

Este procedimiento sirve para determinar los factores que son comunes á dos cantidades.

Sea, por ejemplo, el número 168, en el cual se desea determinar los factores que sean comunes con el guarismo anterior.

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Se hace la operación lo mismo que se ejecutó en el ejemplo anterior, y comparando los cocientes obtenidos en ambos casos, se deducen cuáles son los términos comunes que multiplicados entre sí producen el mayor factor común á las dos cantidades, el cual no es otra cosa que el *máximo común divisor* de ellas, puesto que por él pueden dividirse exactamente, siendo al mismo tiempo el mayor número que puede dividirlas.

Efectuando las operaciones indicadas, resulta:

$$756=2^2\times 3^3\times 7$$
$$168=2^3\times 3\times 7$$

Y afectando á cada guarismo del exponente menor, puesto que con ese grado es como figura de factor común en cada uno de los números propuestos, queda al fin

$$2^2\times 3\times 7=84,$$

que como se ve es el mayor número que puede dividir 9 veces á 756 y 2 veces á 168.

De lo anterior se deduce que, para encontrar el máximo común divisor de dos números descompuestos en sus factores primos, basta formar el producto de sus factores comunes, afectando á cada uno del exponente menor.

Sea ahora el número 180, cuyos divisores exactos se trata de determinar. Para que el resultado de la operación produzca siempre cocientes enteros, se descompondrá la cantidad propuesta en sus factores primos, tal como se ha explicado; pero para facilitar la determinación, tanto de dichos factores como de sus productos que son los divisores que se buscan, conviene disponer la operación en la forma siguiente:

180	2
90	2—4
45	3—6—12
15	3—9—18—36
5	5—10—20—15—30—60—45—90—180

Una vez determinado el primero y el segundo factor, se multiplica el segundo por el primero, y se coloca el producto 4 á la derecha. El tercer factor 3 se multiplica por los dos primeros y por el producto encontrado 4, y se escriben los productos 6 y 12 á su derecha; el cuarto factor 3 por los tres primeros y por los productos anteriores; teniendo cuidado de omitir, para evitar repeticiones, los productos que conducen á resultados ya obtenidos. Escribiendo ordenadamente los guarismos encontrados, resulta que los divisores de 180 son: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180.

Para determinar el máximo común divisor de dos números que no pueden descomponerse en sus factores primos, como 527 y 1207, la operación se efectúa de la siguiente manera:

Divídase 1,207 por 527 y se obtiene el cociente 2, el producto 1,054 y la resta 153. Divídase después 527 por la resta y se obtiene el cociente 3, el producto 459 y la resta 68. Divídase en seguida 153 por la resta, y se obtiene el cociente 2, el producto 136 y la resta 17. Divídase 68 por la resta, y se obtiene el cociente 4 y un producto igual á 68 que sustraído del último dividendo deja 0 por resta. El último divisor 17 que no produjo ninguna resta, es el máximo común divisor de 527 y 1,207.

Para demostrarlo, basta observar que, si 17 divide exactamente á 68, como lo prueba la operación, dividirá á dos veces 68, ó sea 136. Pero puesto que 17 se divide á sí mismo y á 136 dividirá también á su suma 153. Además, como un divisor exacto divide cualquier número de veces á su dividendo, 17 dividirá á 3 veces 153, ó sea 459; y como al mismo tiempo es común divisor de este último y de 68, según se ha visto antes, dividirá también á su suma 527 que es uno de los números dados. Para probar que 17 también divide á 1207, se prosigue el razonamiento del mismo modo, y se ve que, si divide á 527, dividirá igualmente á 2 veces 527, ó sea, 1054, y dividiendo á 1054 y 153, dividirá también á 1207 que es el mayor número.

```
                  1207 | 527
                  1054   2
             527 | 153
             459    3
        153 | 68
        136   2
   68 | 17
   68   4
   --
   00
```

Para abreviar la operación en la práctica, se omite escribir los productos, haciendo las sustracciones á la memoria, como en el caso de una división común, y se anotan sólo las restas.

De aquí se deduce la siguiente regla par encontrar el máximo común divisor entre dos cantidades:

Se divide la mayor por la menor, y si no hay resta, la cantidad menor será el máximo común divisor; si por lo contrario, resultare alguna resta, divídase el divisor por ella, y continúese la operación dividiendo sucesivamente el último divisor por la resta anterior, hasta obtener una división exacta. El último será el máximo común divisor, y si resultare ser la unidad, los números serán primos entre sí.

Sea por determinar el menor múltiplo de dos ó más números; por ejemplo de 30, 28 y 60. Como este múltiplo debe ser igual al producto de todos los factores primos de los números propuestos, se descompondrán estos en dichos factores y se formará su producto. El número buscado, no puede ser menor que el mayor número 60, puesto que debe contenerlo; pero sí debe contener todos sus factores primos que son; $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$. Además, como el menor múltiplo común debe contener igualmente todos los factores primos de los otros dos números que son: $2 \times 3 \times 5 = 30$ y $2 \times 2 \times 7 = 28$, y los términos 2 y 3 del número 60 son comunes á ellos, se omite repetirlos en la multiplicación y se agregan los restantes á los del número mayor, á fin de que su producto $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$, produzca el menor múltiplo común que se busca; y este número lo es, porque contiene todos los factores de que cada uno de los números propuestos está formado, y porque sólo contiene los indispensables para producirlos.

De aquí se deduce la siguiente regla general para determinar el menor múltiplo común

Resuélvanse los números dados en sus factores primos, y fórmese el producto de todos los diferentes factores primos encontrados, usando cada factor el mayor número de veces que figure en cualesquiera de los números propuestos; ó bien, aféctese cada uno de estos factores del mayor de los exponentes.

Ejercicios escritos :

Determínense los factores primos de los números siguientes :

64	484	3913
168	1280	26840
315	7644	11340
224	4725	38148

Encuéntrese el máximo común divisor de

169 y 195	1029 y 1197
372 y 492	1666 y 1938
702 y 945	3596 y 3768

Encuéntrese el menor múltiplo común de

60, 40 y 120	16, 20, 24 y 32
81, 45 y 108	25, 40, 75 y 80
31, 36 y 72	32, 45, 70 y 64

1.—Un hombre desea colocar 231 hectólitros de trigo y 393 de cebada en sacos de igual tamaño y de la mayor capacidad posible; ¿cuántos hectólitros deberá contener cada saco?

2.—Un labrador tiene 324 fanegas de tierra en una hacienda y 78 en otra, y quiere dividirlas en el mayor número posible de campos de igual extensión; ¿cuántos campos resultarán y qué extensión tendrá cada uno?

3. Se trata de tapizar dos cuartos que tienen 4 y 6 metros, respectivamente, de ancho. Se desea saber ¿cuál es el ancho mayor de la alfombra que se ha de acomodar exactamente á los dos cuartos?

4.—¿Cuáles son las menores cantidades iguales de dinero que un ganadero puede invertir comprando carneros á $3 cabeza, terneras á $12, vacas á $30 y caballos á $75, y á cuánto monta el total?

5.—¿Cuál es el menor número de libros que pueden distribuirse igualmente entre 16, 20, 24 y 30 niños?

6.—¿Qué longitud deberá tener una caja que ofrezca suficiente capacidad, sin desperdiciar espacio, para acomodar libros de 6, 8 y 12 pulgadas de largo respectivamente?

QUEBRADOS COMUNES Y NÚMEROS FRACCIONARIOS.

CAPÍTULO VII.

NUMERACIÓN Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

Se llama *número quebrado* al que representa una parte ó la reunión de varias partes de la unidad ; ó en otros términos, el que expresa cantidades menores que la unidad.

Unidad fraccionaria es una de las partes iguales en que se considera dividida la unidad entera. Si una unidad se divide en dos partes iguales, estas partes se llaman *medios ;* si en tres, *tercios ;* si en cuatro, *cuartos ;* y si en 5, 6, 7 8, 9, 10, estas partes se llaman, respectivamente, *quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos, décimos.* Del número 11 en adelante, se agrega la terminación *avo* á la cifra que expresa las partes en que la unidad está dividida. Por ejemplo, si fuesen 11, 12, 20, 30, 75, estas partes se denominarían *onzavos, dozavos, veintavos, treintavos, setenta y cincoavos.* Dos medios hacen una unidad ; tres tercios otra ; cuatro cuartos otra, y así sucesivamente.

Para representar un quebrado se emplean dos guarismos : uno que indica y *nombra* las partes en que se ha dividido la unidad, y se llama *denominador*, y otro que indica y *numera* cuántas partes se han tomado de la unidad para formar el quebrado, y se llama en consecuencia, *numerador*.

El numerador y denominador juntos se llaman *términos* del quebrado.

La formación de los quebrados se origina en la división de los números enteros, puesto que siempre que queda una resta en dicha operación, el cociente es un número mixto, compuesto de un entero y de un quebrado, que tiene por numerador la resta, y el divisor por denominador. Siendo, pues, una fracción, una división indicada, se escribe lo mismo que ella, esto es, se coloca el numerador encima del denominador, separados por una raya, en esta forma :

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{2}{10}.$$

El *valor* de un quebrado es el cociente del numerador por el denominador.

Se designa con el nombre de *quebrado propio*, aquel cuyo numerador es menor que su denominador ; y *quebrado impropio* ó realmente *fraccionario*, aquel en que el numerador es igual ó mayor al denominador.

$$\frac{44}{44}, \frac{85}{9}$$

Número mixto es el que está compuesto de un entero y un quebrado.

Para leer los quebrados ó fracciones, se lee primero el numerador, conforme á la regla de la numeración de los enteros, y en seguida el denominador, expresando el número y la especie de las unidades fraccionarias que la componen.

Ejercicios preparatorios :

Exprésense las siguientes fracciones por cifras :

1.—Un tercio.
Dos tercios.
Tres cuartos.
Un quinto.
Tres octavos.
Cinco novenos.
Ocho décimos.
Once quinzavos.
Veinticuatro cincuentavos.
Cuarenta y dos sesenta y dos avos.
Nueve dozavos.
Ciento veinte trescientos dozavos.

Léanse los siguientes quebrados :

2.—$\frac{7}{12}$, $\frac{12}{40}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{84}{231}$, $\frac{145}{387}$, $\frac{150}{892}$, $\frac{725}{15}$, $\frac{1207}{328}$.

3.—¿Qué parte de 6 es 3, 4, 5, 1?
" " " 9 es 2, 3, 5, 6, 4?
" " " 10 es 7, 6, 3, 1, 9, 8?
" " " 12 es 3, 5, 6, 8, 9, 7, 12?
" " " 14 es 5, 7, 9, 3, 6, 11, 8, 15?

4.—Si un kilogramo de café cuesta 36 centavos, ¿cuánto costará un tercio, dos tercios, tres cuartos de kilogramo?

5.—Un ranchero tenía 60 carneros y vendió una quinta parte á otro; ¿cuántos vendió?

6.—Habiendo 5 metros en la octava parte de una pieza de paño, ¿cuántos metros habrá en tres octavas, cinco octavas y en la pieza entera?

7.—Si la quinta parte de una barrica de harina cuesta $2, ¿cuánto costarán tres quintas, cuatro quintas, ó la barrica entera?

Ejercicios orales :

Reducir una fracción es cambiar su forma sin alterar su valor.

Todo número entero puede reducirse á quebrado, poniéndole la unidad por denominador, así: $\frac{8}{1}=8$, puesto que la unidad se la supone en este caso compuesta de una sola parte.

Todo número entero puede reducirse á quebrado de determinado denominador, poniendo por numerador el producto del denominador por el entero, y por denominador el del quebrado propuesto.

Para reducir 8 unidades á quintos, se multiplica 8 por 5 para tener el número de quintos que hay en 8 unidades, indicando en seguida su especie por el denominador 5, así: $\frac{40}{5}$.

Para reducir un entero á la forma del quebrado que le acompaña, se multiplica el denominador por el entero y se agrega el producto al numerador, poniendo por denominador el mismo del quebrado.

Por ejemplo: 7 y $\frac{5}{9}$; ejecutando la operación tendremos: $\frac{7\times9+5}{9}=\frac{68}{9}$. La razón es que al efectuar la primera parte de la operación se reducen, como en el caso anterior, unidades de especie mayor á menor; y al agregar el numerador se suman cantidades homogéneas, no quedando mas que expresar su especie, lo cual se consigue poniendo por denominador el del quebrado.

Para transformar una fracción impropia en un número entero, se ejecuta la operación que ella indica, es decir, una división; y si hay resta, se le pone por denominador el del quebrado; porque la operación se reduce á convertir unidades de especie mayor á menor, que es el caso general de la división, y por lo mismo está de acuerdo con su regla.

Ejemplo: $\frac{218}{9}=24\frac{2}{9}$.

Teniendo presente el modo de formar los quebrados, se reconoce fácilmente que, de dos ó más fracciones que tienen el mismo denominador, será mayor la que tenga mayor numerador, y que, de dos ó más fracciones cuyo numerador es común, será mayor la que tenga menor denominador. La proposición recíproca de ambos casos es igualmente cierta.

Puesto que las fracciones indican una división, todos los cambios que se operen en los términos de una fracción, producirán resultados semejantes en su valor, conforme á los principios que rigen á aquella operación, y pueden resumirse en la siguiente tabla:

1°.—Multiplicando el numerador ó dividiendo el denominador	Se multiplica la fracción
2°.—Dividiendo el numerador ó multiplicando el denominador	Se divide la fracción
3°.—Multiplicando ó dividiendo sus dos términos por el mismo número	No se altera el valor de la fracción

Los tres principios precedentes pueden compendiarse en éste general:

Cualquier cambio en el numerador, produce un cambio *semejante* en el valor de la fracción; y en el denominador, lo produce *opuesto* en dicho valor.

Simplificar un quebrado es transformarlo en otro equivalente, cuyos términos sean más sencillos.

Como el valor de un quebrado no se altera cuando se dividen sus dos términos por el mismo número, lo que habrá que hacer para simplificarlo, será determinar los varios divisores comunes al numerador y al denominador, y dividir sucesivamente por ellos ambos términos; ó bien, hallar su máximo común divisor y dividiéndolos en seguida por él, se obtendrá el quebrado simplificado que se busca.

Como ejemplo del primer caso, sea el quebrado $\frac{30}{42}$. Supuesto que sus dos términos son divisibles por 2, se suprime este divisor, y el quebrado queda reducido á $\frac{15}{21}$. Los términos de éste son divisibles por 3; suprimiendo este divisor, se obtiene $\frac{5}{7}$, cuyos términos siendo primos entre sí, manifiestan que no pueden tener otro divisor común, por lo tanto $\frac{5}{7}$ es la más simple expresión del quebrado propuesto.

Como ejemplo del segundo caso, simplifiquemos el quebrado $\frac{742}{1643}$. Observando que carece de divisores comunes, conforme á las reglas de divisibilidad, se procede á buscar el máximo común divisor y se encuentra que es el número 53.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & 1643 & |\,\underline{742} \\
 & & 742 & |\,\underline{159} & 2 \\
 & 159 & |\,\underline{106} & 4 & \\
106 & |\,\underline{53} & 1 & & \\
00 & 2 & & &
\end{array}$$

Dividiendo por él los los términos de la fracción propuesta, resulta:

$$\frac{742}{1643} \div 53 = \frac{14}{31}$$

El procedimiento razonado que se ha seguido en los dos casos anteriores, funda la siguiente regla:

Para simplificar un quebrado, se dividen el numerador y el denominador por un mismo número.

Reducir los quebrados á un común denominador, es transformarlos en otros de igual valor y de un mismo denominador. Esta operación puede practicarse, como la anterior, de dos maneras:

Elijamos como ejemplo de la primera, las fracciones: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$. Para reducirlas á un común denominador, multiplíquense los dos términos del primer quebrado por el producto de los denominadores de los otros dos; los del segundo, por el producto de los denominadores de los otros dos, y los del tercero, por el producto de los denominadores de los otros dos; y resultará que los quebrados propuestos se han transformado en $\frac{32}{96}$, $\frac{24}{96}$ y $\frac{84}{96}$, sin cambiar de valor. La razón es que al multiplicar los dos términos de cada quebrado por un mismo número, su relación no se altera; y siendo el común denominador encontrado un múltiplo de los demás denominadores, la unidad queda dividida en el mismo número de partes y éstas tendrán el mismo valor.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para reducir los quebrados á un común denominador, se multiplica el numerador de cada uno, por el producto de los denominadores de los demás, (menos por el suyo) y se pone por denominador común el producto de todos los denominadores.

El segundo procedimiento se funda en las propiedades del múltiplo común divisor, y se usa particularmente cuando se quiere reducir las fracciones al *menor común denominador.*

Sea por ejemplo:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}.$$

Una vez determinado el múltiplo común á los denominadores 2, 3, 4 y 6, que es 12, se divide sucesivamente por cada uno de ellos, y se obtienen los cocientes 6, 4, 3 y 2. Multiplicando después los términos de cada quebrado, por el cociente que de él procede, los quebrados no cambian de valor, porque sus dos términos se multiplican por el mismo número, y porque siendo el común denominador encontrado múltiplo de los demás, la unidad queda dividida en el mismo número de partes, y éstas expresan el mismo valor. Así pues,

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6} = \frac{6}{12}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}.$$

De donde se deduce la siguiente regla:

Para reducir los quebrados á un común denominador, se determina el menor múltiplo común á los denominadores, y se multiplican los dos términos de cada quebrado por el cociente que resulta de dividir el múltiplo común por su denominador.

Valuar un quebrado es expresar su valor en unidades de especie inferior á aquellas á que se refiere. Para practicar esta operación es preciso conocer de antemano las divisiones y subdivisiones de que consta la unidad á que el quebrado pertenece; ó lo que es lo mismo, convertirlo previamente en número complejo.

Sea por valuar una fracción de vara expresada por el quebrado $\frac{13}{24}$, siendo la vara una unidad de medida que está dividida en 3 pies, y cada pie en 12 pulgadas.

La operación se dispone bajo la forma de una división. Como el quebrado es propio, el numerador no es divisible por el denominador; así pues, se multiplicará 13 por 3, que es el número de pies que tiene una vara, y se dividirá por 24, obteniendo el cociente 1 que expresa pies y una resta 18. Raciocinando de igual modo, se valuará en seguida el quebrado $\frac{18}{24}$ para producir las unidades de la siguiente subdivisión, y á ese efecto se multiplicará 18 por 12 que es el número de pulgadas que tiene un pie. El producto que resulta se divide por 24 y se obtiene un cociente 7, que expresa pulgadas, más una resta 12. Para completar el cociente se le agrega esta resta bajo la forma de quebrado que le corresponde, esto es: $\frac{12}{24}$, que simplificado se reduce á $\frac{1}{2}$. De consiguiente $\frac{13}{24}$ de vara es igual á 1 pie, 7 pulgadas y $\frac{1}{2}$.

Analizando este ejemplo se comprende que la operación que lo resuelve consiste simplemente en reducir primero unidades de especie mayor á menor, conforme á uno de los usos de la multiplicación, para reducir en seguida las de especie menor á mayor, conforme á uno de los usos de la división; y como los principios que sirven de fundamento á estas operaciones, se han demostrado con anterioridad, se deduce que la operación efectuada es exacta. De aquí la siguiente regla:

Para valuar un quebrado se multiplica su numerador por el número de subdivisiones de la unidad á que el quebrado pertenece, y el producto se divide por el denominador.

Ejercicios escritos.

1.—Transfórmese 81 en una fracción cuyo denominador sea = 24.

"	36	"	"	"	"	" = 66.
"	230	"	"	"	"	" = 70.
"	137	"	"	"	"	" = 25.
"	99	"	"	"	"	" = 15.

2.—Redúzcanse:

209 á quinzavos	$204\frac{11}{24}$ á veinticuatro avos
$136\frac{11}{18}$ á dieciochoavos	$1206\frac{17}{40}$ á cuarentavos
$472\frac{7}{26}$ á veintiseisavos	$2164\frac{3}{36}$ á trenita y seis avos
$144\frac{31}{95}$ á noventa y cincoavos	$312\frac{10}{62}$ á sesenta y dos avos

3.—Redúzcanse á enteros ó mixtos:

$\frac{273}{56} =$	$\frac{1512}{81}$	$\frac{12625}{326}$
$\frac{2431}{85} =$	$\frac{71321}{38}$	$\frac{10346}{1246}$
$\frac{837}{24} =$	$\frac{23280}{464}$	$\frac{26479}{2481}$

4.—Redúzcanse á un común denominador:

$\frac{7}{8}, \frac{11}{16}, \frac{17}{24}$	$\frac{3}{4}, 2\frac{5}{7}, \frac{3}{5}$
$\frac{4}{13}, \frac{15}{26}, \frac{7}{39}$	$6\frac{1}{4}, \frac{7}{20}, 8\ 1\frac{1}{2}$
$\frac{20}{21}, \frac{9}{56}, \frac{51}{84}$	$\frac{57}{84}, \frac{62}{168}, \frac{39}{42}$

5.—¿ Cuántos dieciseisavos de kilogramo hay en 78 kilogramos?

6.—Simplifíquense los siguientes quebrados:

$$\frac{2}{6}, \frac{945}{1080}, \frac{216}{396}, \frac{1800}{3240}$$

7.—Determínese el máximo común divisor de los quebrados:

$$\frac{171}{969}, \frac{627}{1425}, \frac{477}{1219}, \frac{799}{2961}$$

8.—Redúzcanse á un común demoninador:

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{5}{8}, \frac{5}{6}\ \frac{3}{12}\ \frac{6}{9} \text{ y } \frac{2}{7}\ \frac{5}{9} \text{ y } \frac{8}{14}$$

9.—Redúzcanse al menor común denominador:

$$\frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{5}{18}$$

10.—Valúense las siguientes fracciones:

$\frac{102}{439}$ de quintal. El quintal tiene 4 arrobas, la arroba, 25 libras y la libra 16 onzas.

CAPÍTULO VIII.

ADICIÓN DE LAS FRACCIONES.

La adición de los números quebrados se funda en el mismo principio que rige á la de los enteros; así pues, su objeto es reunir en un solo número el valor de varias fracciones de la misma especie; y como el denominador de una fracción determina el valor de la unidad fraccionaria, y sólo las unidades del mismo valor pueden sumarse entre sí, se infiere que: para ejecutar la operación, es preciso reducir previamente los quebrados á un común denominador, siempre que no tengan denominadores iguales.

Cuando los quebrados por sumar tienen el mismo denominador, es evidente que bastará sumar los numeradores, y poner á la suma por denominador el denominador común.

En la adición de los quebrados se presentan tres casos:

1°.—Sumar enteros con quebrados.
2°.—Sumar quebrados con quebrados.
3°.—Sumar mixtos con mixtos.

1°.—Sea por sumar 42 y $\frac{5}{12}$. Se multiplica 12 por 42, y se agrega al producto el numerador 5, obteniéndose $\frac{509}{12}$. La operación consiste en este caso en reducir un entero á fracción, y esto se funda en que al multiplicar el denominador por el entero, se convierten unidades de especie mayor á menor; y al agregar el numerador, se suman cantidades homogéneas, siendo, por lo tanto, el resultado exacto.

2°.—Sumemos, ahora, los siguientes quebrados: $\frac{2}{5}+\frac{7}{12}+\frac{4}{15}$.

Se reducen á un común denominador, buscando para mayor facilidad, el menor múltiplo, que en este ejemplo es 60, y una vez transformados los quebrados se suman los numeradores y su suma $24+35+16=75$ se pone como numerador del denominador común encontrado, dando por resultado final $\frac{75}{60}=1\frac{1}{4}$. La operación es exacta, porque al reducir los quebrados á un común denominador, se ha satisfecho la condición fundamental de que las cantidades por sumar representen unidades fraccionarias del mismo valor. Al sumar los numeradores se han reunido todas las partes de la unidad de que se compone cada quebrado, y al total se le ha puesto el denominador común que expresa el valor de las partes de la unidad de que se compone la suma de los numeradores. La operación final de hallar los enteros, no es mas que la reducción de una fracción impropia á otra propia por el procedimiento conocido de la división.

3°.—Sea por sumar $\frac{5}{8}+6\frac{7}{12}+21\frac{5}{6}+77$. La operación se puede hacer en este caso, de dos maneras: sumando separadamente los quebrados y los enteros, y agregando á estos los que de su clase resultaren al concluir la adición.

El otro modo de llevar á efecto la operación es reduciendo previamente los enteros á fracciones y sumando en seguida los quebrados que resulten.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para sumar las fracciones se reducen á un común denominador, y se suman los numeradores poniendo por denominador á la suma que resulte el denominador común.

Si entre los sumandos hubiese números mixtos se reducen los enteros á quebrados; ó bien, se agregan separadamente los quebrados y los enteros y después se suman ambos resultados.

Ejercicios escritos :

1.—¿Cuál es la suma de $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}$?
" " " " " $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}+\frac{1}{7}+\frac{6}{7}$?
" " " " " $\frac{5}{6}+\frac{2}{8}+\frac{3}{7}+\frac{4}{5}$?

2.—Una pieza de tela mide $46\frac{1}{2}$ varas; otra, $37\frac{2}{3}$, y otra, $23\frac{1}{4}$; ¿cuántas varas suman las tres piezas?

3.—Un niño pagó $\$\frac{3}{8}$ por un libro, $\$\frac{1}{4}$ por una pizarra y $\$\frac{1}{2}$ por una botella de tinta; ¿cuánto pagó por todo?

4.—Un labrador divide sus tierras en cuatro campos: el primero contiene $15\frac{7}{12}$ hectáreas, el segundo $22\frac{16}{21}$, el tercero $31\frac{6}{7}$ y el cuarto $28\frac{3}{4}$; ¿cuántas hectáreas suman sus tierras?

CAPÍTULO IX.

SUSTRACCIÓN DE LAS FRACCIONES.

La *sustracción de las fracciones,* tiene por objeto encontrar la diferencia entre dos cantidades de esta forma, siempre que sean de la misma especie. Como el denominador de una fracción determina el valor de la unidad fraccionaria, y sólo pueden sustraerse unidades del mismo valor, se deduce que, para que la operación sea posible, se necesita que las fracciones del minuendo y las del sustraendo, tengan un común denominador. Cuando esta circunstancia se verifique por el enunciado del problema, bastará sustraer el menor numerador del mayor, y escribir el resultado encima del denominador común para obtener la resta que se busca.

En la sustracción de las fracciones se presentan tres casos :

1° Restar una fracción de un entero ;

2° restar una fracción de otra, y

3° restar un número mixto de otro mixto.

Sea por restar $\frac{3}{4}$ de 8.

Se multiplica 8 por 4, y del producto 32 se resta el numerador 3, poniendo á la resta 29 por denominador el de la fracción, así: $\frac{29}{4}$, ó bien: $7\frac{1}{4}$, extrayendo al quebrado los enteros que contiene.

La resta obtenida es la verdadera, porque el procedimiento segundo se funda en reducir unidades de especie mayor á menor, para encontrar la diferencia entre las partes de la unidad de que constan tanto el quebrado como el entero, y el denominador sigue expresando el valor de las partes de la diferencia hallada.

2.— Sea, como ejemplo del segundo caso, por restar: $\frac{3}{5}$ de $\frac{8}{9}$.

Reduciendo las fracciones á un común denominador, y efectuando la operación se tiene:

$$\frac{8}{9}-\frac{3}{5}=\frac{40}{45}-\frac{27}{45}=\frac{13}{45}.$$

El resultado es exacto, porque al reducir los quebrados á un común denominador, se han hecho homogéneas las partes de la unidad que representan, y en consecuencia, pueden sustraerse; y al poner á la resta el denominador común, se expresa el valor de la diferencia hallada.

3.— Sea, ahora, por restar: $5+\frac{3}{8}$ de $16+\frac{2}{3}$. Este caso, como su análogo de la adición, puede resolverse de dos modos; esto es, reduciendo los enteros á la forma de quebrados y restando los quebrados impropios que resulten, ó bien, restando primero los quebrados y después los enteros, cada uno conforme á su regla.

Por el primer método se tiene:

$$(16+\tfrac{2}{3})-(5+\tfrac{3}{8})=\frac{50}{3}-\frac{43}{8}=\frac{400}{24}-\frac{129}{24}=11+\frac{7}{8}.$$

Por el segundo método:

$$\begin{array}{rlr} & 16+\frac{2}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 16+\frac{16}{24} \\ - & 5+\frac{3}{8}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -5+\frac{9}{24} \\ \hline & & 11+\frac{7}{8} \end{array}$$

Sucede á veces que, al resolver la operación por este método, el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo. Lo que hay que hacer en tal caso, es agregar al quebrado deficiente una unidad del entero que lo acompaña, reducida á las unidades fraccionarias que el denominador común expresa; ó en otros términos, se agrega este denominador al numerador del quebrado del minuendo y se procede á efectuar la operación; teniendo cuidado únicamente de disminuir del número entero la unidad tomada al verificar la sustracción de los enteros.

Sea por restar $8+\frac{7}{8}$ de $14+\frac{3}{4}$. Usando el primer método se tiene:

$$(14+\tfrac{3}{4}-(8+\tfrac{7}{8})=\tfrac{59}{4}-\tfrac{71}{8}=\tfrac{118}{8}-\tfrac{71}{8}=\tfrac{47}{8}=5+\tfrac{7}{8}.$$

Como 8 es múltiplo de 4, se multiplican los dos términos del primer quebrado por 2, para reducir ambos á un común denominador; se restan los numeradores y se obtiene la diferencia $\frac{47}{8}$, de la cual se extraen los enteros que contiene, y queda por resultado final: $5+\frac{7}{8}$.

Por el segundo método se comienza á reducir los quebrados á un común denominador; pero al proceder á ejecutar la operación se advierte que el quebrado del minuendo es menor que el del sustraendo, por lo tanto la sustracción no puede efectuarse si no se agrega al quebrado una unidad del entero que lo acompaña reducido á octavos; es decir, $\frac{8}{8}$, que sumados con $\frac{6}{8}$ dan $\frac{14}{8}$, de cuya fracción se pueden restar los $\frac{7}{8}$ del sustraendo, resultando por diferencia $\frac{7}{8}$ que se coloca en la columna de los quebrados. Al pasar á la sustracción de los enteros, hay que tener en cuenta que el número 14 que los representa en el minuendo, está disminuido de la unidad que se agregó al quebrado; así pues, restando de 13 unidades que quedan el entero del sustraendo, se obtiene como expresión final de la resta, el número $5+\frac{7}{8}$.

$$\begin{array}{rcrr} 14+\frac{3}{4} & \quad & 14+\frac{6}{8} & \frac{14}{8} \\ -\ 8+\frac{7}{8} & & -\ 8+\frac{7}{8} & \frac{7}{8} \\ \cline{3-4} & & & 5+\frac{7}{8} \end{array}$$

El resultado de la operación es siempre exacto, porque al transformar los quebrados propuestos en quebrados impropios, que es lo que se hace siguiendo el primer método, cambian de forma, pero no de valor; y en el segundo método la diferencia encontrada no es otra cosa que la suma de las diferencias parciales de los enteros y quebrados tanto del numerador como del denominador.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para restar las fracciones, redúzcanse á un común denominador, si no lo tienen, y escríbase la diferencia de los numeradores sobre el denominador común.

Para restar los números mixtos, procédase de igual manera, ó bien sustráiganse separadamente los quebrados y los enteros. y agréguense los resultados para tener la resta total.

Ejercicios escritos :

1.— De	$\frac{7}{8}$ sustráigase	$\frac{3}{8}$	De	$\frac{5}{6}$ sustráigase	$\frac{2}{3}$
"	$\frac{11}{15}$ "	$\frac{4}{15}$	"	$\frac{5}{9}$ "	$\frac{3}{4}$
"	$\frac{17}{24}$ "	$\frac{9}{24}$	"	$\frac{9}{20}$ "	$\frac{4}{5}$

De	$24\frac{3}{4}$ sustráigase	$17\frac{1}{2}$	De	$18\frac{4}{5}$ sustráigase	$7\frac{2}{7}$
"	$75\frac{1}{3}$ "	$40\frac{3}{5}$	"	$240\frac{1}{6}$ "	$137\frac{7}{12}$
"	$107\frac{2}{7}$ "	$63\frac{2}{7}$	"	$39\frac{4}{9}$ "	$15\frac{3}{20}$

2.— Comprando harina á $\$6\frac{1}{2}$ la barrica, y vendiéndola á $\$7\frac{2}{5}$, ¿cuánto se gana en cada barrica?

3.— Si de un granero que contiene $230\frac{3}{4}$ cargas de cebada, se extraen en un mes $95\frac{4}{5}$ cargas, ¿cuál es el número sobrante de cargas?

4.— De un barril de aguardiente que contiene $25\frac{2}{5}$ jarras, se han sacado $19\frac{3}{4}$ jarras; ¿cuántas han quedado en el barril?

5.— Un hacendado que poseía 208 hectáreas de tierra, vendió $97\frac{7}{20}$ hectáreas; ¿cuántas le quedan?

6.— Un especulador compró $72\frac{3}{4}$ acciones de una compañía, y vendió $25\frac{2}{5}$ acciones; ¿cuántas conserva?

CAPÍTULO X.

MULTIPLICACIÓN DE LAS FRACCIONES.

Para definir la *multiplicación de las fracciones*, en términos que comprendan los tres casos que se presentan en esta operación, se necesita tener presente que multiplicar, en general, un número entero, quebrado ó mixto, por otro entero, quebrado ó mixto, es encontrar un tercer número *que sea, respecto del primero, lo que el segundo es respecto de la unidad.*

Cuando el multiplicador, ó sea el segundo número, es un entero, sus unidades indican las veces que el producto debe ser mayor que el multiplicando ; pero si el multiplicador es un quebrado, esto es, si tiene un valor menor que la unidad, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, el producto será una mitad, una tercera, una cuarta parte menor que el multiplicando.

En tal virtud, cuando el multiplicador es un quebrado, que es el caso genérico de la operación, se puede definir diciendo que : multiplicar un número cualquiera por un quebrado, es hallar el valor de las partes del multiplicando, indicadas por el multiplicador.

De lo expuesto, se ve que en la multiplicación de fracciones comunes pueden ocurrir los tres casos siguientes :

1°, multiplicar un quebrado por un entero ;

2°, multiplicar un quebrado por otro ;

3°, multiplicar un mixto por otro mixto.

1°— Sea por multiplicar: $\frac{5}{6}$ por 3. Multiplíquese el entero por el numerador: $\frac{5}{6}\times 3=\frac{15}{6}=2\frac{1}{3}$, y al producto se le deja por denominador el del quebrado.

El resultado obtenido es el verdadero, porque como el numerador expresa el número de partes de la unidad de que consta el quebrado, al multiplicar el numerador por 3, el valor del quebrado se ha hecho mayor otras tantas veces, supuesto que el denominador no sufre cambio alguno.

Como el orden de los factores no altera el producto, el procedimiento y la demostración anteriores, subsisten cuando se trata de multplicar un entero por un quebrado.

2°— Como ejemplo de este caso, sea por multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{6}{7}$. Multiplíquese numerador por numerador y denominador por denominador, y el quebrado que resulte será el producto que se busca. $\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=\frac{24}{35}$. Para demostrar la exactitud de este resultado, supóngase que cada quebrado se multiplica alternativamente por el numerador del otro considerado como número entero. Por ejemplo, $\frac{4}{5}\times 6=\frac{24}{5}$; mas como el multiplicador supuesto 6, es 7 veces mayor que el verdadero $\frac{6}{7}$, el producto obtenido lo será también. Por lo tanto, para reducirlo á su verdadero valor será preciso hacerlo 7 veces menor, lo cual se consigue multiplicando el denominador del quebrado por 7; supuesto que un quebrado se hace tantas veces menor como unidades tiene el número por el cual se multiplica su denominador. Luego

$$\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=\frac{4\times 6}{5\times 7}=\frac{24}{35}$$

2°— Este caso, como sus análogos de la adición y sustracción, se resuelve de dos modos distintos: transformando los mixtos en quebrados y multiplicando los quebrados que resulten; ó multplicando por partes los términos de ambos factores y sumando después sus productos. Como ejemplo del primer método, sean por multiplicar los números $6+\frac{2}{3}$ y $5+\frac{1}{4}$. Transformándolos en quebrados y efectuando la operación, resulta:

$$6+\tfrac{2}{3}\times 5+\tfrac{1}{4}=\tfrac{20}{3}\times\tfrac{21}{4}=\tfrac{420}{12}=35.$$

La operación no necesita demostrarse, pues no es mas que la repetición del caso anterior.

Como ejemplo del segundo método, sea por multiplicar, $5+\frac{7}{8}$ y $8+\frac{2}{3}$. La operación se dispone así;

$$\begin{array}{l} 5+\tfrac{7}{8} \\ 8+\tfrac{2}{3} \\ \hline 8\times 5=40 \\ 8\times\tfrac{7}{8}=\tfrac{56}{8}=7 \\ \tfrac{2}{3}\times 5=\tfrac{10}{3}=3+\tfrac{1}{3}\ldots\ldots\tfrac{8}{24} \\ \tfrac{2}{3}\times\tfrac{7}{8}=\tfrac{14}{24}=0+\tfrac{14}{24}\ldots\ldots\tfrac{14}{24} \\ \hline 50+\tfrac{11}{12}\ldots\ldots\tfrac{22}{24} \end{array}$$

Se multiplica primero la parte entera del multiplicando y se escribe el producto al pie de la columna que le corresponde. Se multiplica en seguida la misma parte entera del multiplicador por el quebrado del multiplicando; y del producto se separan los enteros y quebrados para colocarlos en sus columnas respectivas. Después se multiplica el quebrado del multiplicador por el entero y el quebrado del multiplicando; y sumando por último, los productos parciales, se obtiene el producto total. Antes de hacer la suma, se reducen á un común denominador los quebrados que resulten en los productos parciales.

La exactitud del resultado es evidente, pues si todas las partes se hacen cierto número de veces mayores, el todo se habrá hecho ayor el mismo número de veces.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero y se divide el producto por el denominador.

Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican los numeradores y los denominadores, y se divide el primer producto por el segundo.

Para multiplicar un número mixto por otro, se transforman previamente en quebrados, y se multiplican los resultados; ó bien, se hace la operación por partes, multiplicando sucesivamente los enteros y el quebrado del multiplicando, y después por el quebrado de éste.

Para encontrar el producto de tres ó más quebrados, se multiplican todos los numeradores y después los denominadores, y se divide el primer producto por el segundo.

Se llama *quebrado de quebrado*, el número que representa una ó varias partes iguales de otro quebrado. Por ejemplo:

$$\tfrac{1}{4} \text{ de } \tfrac{3}{5}.$$

Para dar forma más sencilla á una expresión de esta especie, se multiplican los quebrados componentes.

Así pues: $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$.

En efecto hallar el valor de $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{5}$, es determinar cuántas veces el primer quebrado está contenido en el segundo; ó lo que es lo mismo, multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{1}{4}$. Luego $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$.

Ejercicios escritos:

1.— Multiplíquense —

$\frac{9}{10}\times 6=$ | $45\times\frac{2}{3}=$
$\frac{7}{12}\times 9=$ | $68\times\frac{4}{5}=$

$\frac{3}{8}\times\frac{5}{9}=$ | $\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=$ | $\frac{3}{4}$ de $\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=$
$\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}=$ | $\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}=$ | $\frac{5}{7}$ de $\frac{1}{8}\times\frac{6}{12}=$

$12\frac{1}{4}\times 7\frac{1}{3}=$ | $\frac{4}{9}$ de $36\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ de $9=$
$6\frac{7}{12}\times 22\frac{3}{4}=$ | $\frac{3}{5}$ de 18×73 de $\frac{2}{3}=$

2.— Si una hectárea produce 32 hetólitros de grano, ¿cuánto producirán $\frac{2}{3}$ de hectárea?

3.— Si un albañil puede construir una pared en 26 días, ¿en cuánto tiempo podrá construir $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ó $\frac{5}{8}$ de ella?

4.— Costando $20 una tonelada de heno, ¿cuánto costarán $\frac{12}{27}$ de tonelada?

5.— Valiendo un lote de terreno en una ciudad, \$3,184, ¿cuánto valdrán $\frac{9}{16}$ del mismo lote?

6.— ¿Que número es mayor, $\frac{1}{4}$ de $\frac{4}{5}$ ó $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{5}$?

7.— Encuéntrese el valor de $(129 - 76\frac{5}{9})$ de $(12\frac{1}{2} - 2\frac{3}{5}) + (21\frac{1}{4} \times 6\frac{2}{7})$.

8.—Un comerciante vende $365\frac{3}{4}$ kilogramos de azúcar á $15\frac{1}{2}$ centavos kilogramo, y 38 kilogramos de café á $22\frac{2}{3}$ centavos, recibiendo en pago una moneda de \$20; ¿cuánto debe entregar de cambio al comprador?

CAPÍTULO XI.

DIVISIÓN DE LAS FRACCIONES.

La división de las fracciones tiene por objeto determinar el número de veces que el denominador del quebrado expresado por un entero, otro quebrado ó un número mixto, está contenido en el numerador, cualquiera que sea la forma del número que lo exprese.

En la división de las fracciones occurren cuatro casos :

1°, Dividir un quebrado por un entero ;
2°, dividir un entero por un quebrado ;
3°, dividir un quebrado por otro ;
4°, dividir un número mixto por un mixto.

El fundamento de la operación en todos los casos, se encuentra en uno de los principios establecidos al tratar de las propiedades de los quebrados, á saber : que cuando se divide el numerador de una fracción ó se multiplica su denominador por un número, la fracción resulta dividida por el mismo número.

1°. Para dividir un quebrado por un entero, como que es lo mismo dividir el numerador que multiplicar el denominador, ejecútese lo último para mayor facilidad, y multiplíquese el denominador de la fracción por el entero, dejando al quebrado el numerador que tiene.

Así pues, $\frac{5}{8} \div 7 = \frac{5}{56}$.

El resultado es exacto, porque expresando el denominador el número de partes en que la unidad está dividida, cuando este número aumenta, menor será cada una de las partes, y el quebrado resultará dividido.

2°. Para dividir un entero por un quebrado, multiplíquese el denominador por el entero, y divídase el producto por el numerador ; ó de otra manera, inviértanse los términos del quebrado y multiplíquese el entero por el quebrado.

Así pues, $12 \div \frac{6}{7} = \frac{84}{6} = 14$.

El resultado es cierto, porque supuesto que $\frac{1}{7}$ está contenido en 12, 7 veces 12, ó sea 84 veces, $\frac{6}{7}$ estará contenido en el mismo número la sexta parte de 84, ó sea 14 veces. Reduciendo pues el entero á séptimos y tomando la sexta parte, que es lo que expresa el numerador del quebrado, se obtendrá el cociente que se busca.

3°. Para dividir un quebrado por otro, se invierten los términos del quebrado y se multiplican por el quebrado del dividendo.

$$\frac{5}{6} \div \frac{4}{8} = \frac{5}{6} \times \frac{8}{4} = \frac{40}{24} = 1 + \frac{2}{3}.$$

Si el divisor en el ejemplo propuesto, fuése sólo 4, la operación se efectuaría conforme á la regla del primer caso, es decir, multiplicando el entero por el denominador, y resultaría $\frac{5}{24}$ por cociente; pero como el divisor no es 4, sino $\frac{4}{8}$, que es 8 veces menor que 4, el cocientre encontrado $\frac{5}{24}$ lo es también. Por lo tanto, para hacerlo 8 veces mayor, se multiplica su numerador por 8 á fin de tener el cociente verdadero: $\frac{5}{24} \times 8 = \frac{40}{24}$, que es lo que la operación expresa.

Observando el resultado que se obtiene al invertir las términos del quebrado divisor, se ve que es el mismo que se produciría reduciendo los quebrados por dividir á un común denominador, y dividiendo en seguida el numerador del dividendo por el denominador del divisor, resulta:

$$\frac{5}{6}\div\frac{4}{8}=\frac{40}{48}\div\frac{24}{48}=\frac{40\times 48}{24\times 48}=\frac{40}{24}$$

4°. Para dividir números mixtos por mixtos, se reducen primero á la forma de quebrados, y se dividen en seguida los quebrados impropios que resulten.

Sea por ejemplo:

$$(12+\tfrac{3}{4})\div(8+\tfrac{2}{5})=\tfrac{51}{4}\div\tfrac{42}{5}=\frac{51\times 5}{4\times 42}=1+\tfrac{87}{168}.$$

El resultado de la división es el cociente verdadero, porque si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

De todo lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para dividir una fracción por un entero, se multiplica el entero por el denominador, dejando al resultado por numerador el de la fracción.

Para dividir un entero por una fracción, se multiplica el entero por el denominador y se divide por el numerador.

Para dividir una fracción por otra, se invierten los términos del quebrado divisor y se multiplica por el dividendo; ó bien, se reducen el dividendo y el divisor á un común denominador, y se divide el numerador del dividendo por el denominador del divisor.

Para dividir un número mixto por otro, se reducen primeramente ambos á fracciones impropias, y después se dividen como quebrados comunes.

Ejercicios escritos :

1.— Divídase :—

$\frac{11}{16} \div 5 =$	$4\frac{2}{3} \div 9 =$	$\frac{21}{32} \div 12 =$
$18 \div \frac{2}{3} =$	$95 \div \frac{12}{18} =$	$112 \div 2\frac{1}{2} =$
$\frac{9}{12} \div \frac{4}{54} =$ $\frac{5}{8} \div \frac{2}{3} =$	$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} \div \frac{7}{8} =$ $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{6} \div \frac{4}{9} =$	$14 + \frac{2}{5} \div 7 + \frac{1}{4} =$ $23 + \frac{11}{17} \div 9 + \frac{2}{7} =$

2.— Si 8 hombres excavaron un foso de un kilómetro de longitud, en 7 días, ¿qué parte de la obra trabajó cada hombre diariamente?

3.— Si tres hombres están asociados por partes iguales en un negocio, y ganan $\$3,246\frac{7}{9}$, ¿qué ganancia corresponde á cada uno?

4.— A razón de $\frac{3}{4}$ de peso el metro de una tela, ¿cuántos metros se pueden comprar con $16?

5.— ¿Cuántas veces está contenido $\frac{1}{8}$ en 1; en $\frac{3}{8}$, en $\frac{9}{16}$, y en $\frac{4}{32}$?

6.— ¿Cuál es el número que multiplicado por $\frac{3}{7}$ produce $\frac{21}{35}$?

FRACCIONES DECIMALES.

CAPÍTULO XII.

SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Se llaman *fracciones decimales* ó simplemente *decimales*, los quebrados que tienen por denominador la unidad seguida de uno ó más ceros.

El *denominador* de una fracción decimal es siempre 10, 100, 1000, ó en general, la unidad seguida de tantos ceros como cifras hay en la decimal dada.

Así: $0.4=\frac{4}{10}$, $0.09=\frac{9}{100}$, $0.007=\frac{7}{1000}$,

que se leen respectivamente, *cuatro décimos, nueve centésimos, siete milésimos.*

El *numerador* de una fracción decimal, cuando se representa sólo, debe ocupar tantos lugares decimales, como ceros tiene el denominador :

Así: $\frac{8}{10}=0.8$, $\frac{17}{100}=0.17$, $\frac{125}{1000}=0.125$.

Las fracciones decimales pueden escribirse de dos maneras : como fracciones comunes, representando el denominador que tengan, ó bajo la forma decimal propiamente dicha ; esto es, suprimiendo el denominador.

Por ejemplo: $\frac{5}{10}$ ó 0.5 cinco décimos que es $\frac{1}{10}$ de 5 unidades. $\frac{5}{100}$ ó 0.05 cinco centésimos que es $\frac{1}{10}$ de cinco décimos.

La formación de las fracciones decimales, es semejante á la de las fracciones comunes, con la diferencia de que en las decimales, la unidad se considera siempre dividida en 10 partes iguales, y que cada una de estas partes puede subdividirse después en otras 10, y así sucesivamente, de donde resulta que las *unidades fraccionarias decimales*, siguiendo una escala uniforme, quedan expresadas por décimos, centésimos, milésimos, etc., de la unidad.

Así: $\frac{1}{10}$, se lee *un décimo* y se escribe 0.10; $\frac{1}{100}$, se lee *un centésimo*, y se escribe, 0.100.

Puesto que los décimos, centésimos, milésimos, etc., representan en las decimales órdenes de unidades 10 veces menores que la unidad de que proceden, se concibe que así como cada cifra en el sistema ordinario de numeración, representa unidades 10 veces menores que la cifra inmediata de la izquierda, del mismo modo, si se continúa el sistema á la derecha de las unidades simples, las cifras que vayan ocupando los lugares siguientes, serán cifras decimales y representarán respectivamente los décimos, centésimos, milésimos, etc. de la unidad.

Para distinguir las decimales de los enteros, se escribe un punto inmediatamente después de la cifra que expresa las unidades simples, llamado *punto decimal*.

Cuando la cantidad que queremos representar, carece de unidades enteras, se escribe un cero en su lugar, y á continuación el punto y las cifras decimales.

La relación que guardan los enteros y las decimales en la numeración, se manifiesta en la siguiente :

TABLA.

Millones.	Centenas de millar.	Decenas de millar.	Millares.	Centenas.	Decenas.	Unidades.	Décimos.	Centésimos.	Milésimos.	Diezmilésimos.	Cien milésimos.	Millonésimos.
6	4	8	7	5	3	1.	2	4	6	8	9	3

Examinando esta tabla se nota que los décimos están representados por una cifra, los centésimos por dos, los milésimos por tres y así sucesivamente; de la misma manera, aunque en orden inverso respecto á su lugar, como lo están las decenas, centenas, millares, etc., en la numeración de los enteros.

Cuando una cantidad decimal carezca de alguno ó algunos de los órdenes de unidades comprendidos dentro de sus partes, se reemplazan estos lugares vacantes con ceros, de la misma manera que se hace con las cantidades enteras.

Por ejemplo : 0.502 quinientos dos milésimos, se escribe poniendo un 0 en el lugar de las centésimas, de igual modo que, si la cantidad fuése entera, se hubiera colocado en el lugar de las decenas para escribir 502 unidades.

Cuando al enunciar una cantidad decimal, el número de sus cifras no corresponde al que debería expresar la última subdivisión del denominador, los lugares vacantes de los órdenes de unidades que faltan, se encuentran entonces entre el entero y la fracción decimal, y es necesario reemplazarlos también con ceros para darle á la decimal el valor que le corresponde.

Si, por ejemplo, se tratase de expresar el número: tres unidades, cuatro cientos quince diez milésimas, se notará, que debiendo representarse necesariamente las diezmilésimas por una fracción decimal que ocupe cuatro lugares; y no componiéndose el guarismo 415 mas que de tres cifras, será preciso interponer un 0 entre el entero y la fracción decimal, para que ella exprese exactamente el denominador que la divide.

El número propuesto se escribirá por lo tanto en esta por ma: 3.0415 y representará la cantidad que deseamos.

De lo anteriormente expuesto se deducen estas dos reglas:

1ª.— Para escribir las cantidades decimales, se escribe primero la parte entera, si la hay, y si no, se escribe un 0 que la representa, poniendo á continuación el punto y la parte decimal, colocando á la izquierda de ella, si es necesario, el número de ceros que sea suficiente, á fin de que la última cifra decimal ocupe el lugar correspondiente al orden de unides indicadas por el denominador.

2ª.—Para leer las cantidades decimales, se lee primero la parte entera, si la hay, y si no, se comienza por el cero de las unidades.

En seguida se lee la parte decimal como si fuése número entero, teniendo siempre especial cuidado de expresar al fin la denominación de la última cifra.

Ejercicios preparatorios: Escríbanse en forma decimal, las siguientes cantidades:

Nueve décimos.
Ochenta y un centésimos.
Ciento quince milésimos.
Tres mil doscientos dos diezmilésimos.
Quince mil cuatro cienmilésimos.
Cuarenta mil ciento dos cienmilésimos.
Cuatrocientos vientinueve millonésimos.
Ochocientos cuarenta cienmillonésimos.

Represéntense en forma decimal las siguientes fracciones:

1.—	$\frac{48}{100}=$	$2\frac{169}{10000}=$	$\frac{9}{1000000}=$
	$\frac{15}{1000}=$	$\frac{256}{100000}=$	$\frac{4030}{10000000}=$

Léanse las siguientes cantidades decimales, y represéntense como fracciones comunes:

2.—	0.864=	0.7321=	4.18 =
	0.031=	0.0986=	8.600789=

Ejercicios orales:

Cuando en una fracción decimal se *colocan uno ó varios ceros* entre el entero y la parte decimal, el valor de ésta *disminuye* tantas veces 10 como ceros se hayan interpuesto.

Por ejemplo: 0.05, 0.005, 0.0005 representan respectivamente, $\frac{5}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{5}{1000}$. Así pues, la adición de los ceros en la parte decimal indica que el denominador sobreentendido de la fracción, se ha multiplicado por 10, 100, 1000; y como multiplicando el denominador de una fracción, su valor disminuye, el resultado obtenido es exacto.

Recíprocamente, cuando en una fracción decimal se *suprimen uno ó varios ceros*, entre el entero y la parte decimal, el valor de ésta *aumenta tantas veces 10*, como ceros se hayan suprimido.

Así, 0.0007, 0.007, 0.07 representan, respectivamente, $\frac{7}{10000}$, $\frac{7}{1000}$, $\frac{7}{100}$; porque la expresión de los ceros en la decimal, indica que el denominador se ha dividido, y en consecuencia, que la fracción ha aumentado de valor.

Como el valor de las cifras decimales depende del lugar que ocupan con relación al signo, se deduce que, cuando se mueve una cifra un lugar *á la izquierda* del que ocupa en la numeración, su valor *aumenta diez veces;* ó en otros términos más generales: cuando en una decimal se corre el punto que la separa de los enteros, uno ó varios lugares *á la derecha*, su valor se hace *10 veces mayor* por cada lugar que se cambie el punto.

Por ejemplo: 5,638. Moviendo sucesivamente cada una de las cifras decimales un lugar hacia la izquierda, ó corriendo el punto uno, dos, ó tres lugares á la derecha, la expresión se transforma en 56.38, 563.8 y 5638. La cantidad ha aumentado de valor en cada operación 10 veces, porque desvaneciéndose gradualmente una cifra en la cantidad decimal, después de que la operación se ejecuta, se ve que el denominador ha sido dividido sucesivamente por 10, y por lo mismo el quebrado se ha hecho otras tantas veces mayor.

Por un raciocinio semejante se deduce la recíproca del principio anterior, esto es, que cuando en una fracción decimal se mueve una cifra un lugar *á la derecha* del que ocupa en la numeración, su valor *disminuye 10 veces;* ó bien, que cuando en una decimal se corre el punto que la separa de los enteros uno ó dos lugares *á la izquierda*, su valor se hace *10 veces menor* por cada lugar que se cambia el punto. Analizando á la inversa el ejemplo anterior, el principio queda demostrado.

Una fracción decimal no cambia de valor cuando se agregan ó se quitan ceros á su derecha.

Por ejemplo: 0.25=0.2500; ó bien $\frac{25}{100}$, $\frac{2500}{1000}$, $\frac{2500}{10000}$, y recíprocamente, porque al multiplicar ó dividir el numerador y el denominador por 10, 100, 1000, la relación de los términos del quebrado no se altera, y por lo mismo tampoco cambia de valor.

La *simplificación de las fracciones decimales y su reducción á un común denominador*, se fundan en el principio anterior. Para efectuar la primera bastará suprimir todos los ceros que haya á la derecha de la cantidad, y quedará reducida á su más simple expresión. Para efectuar la segunda operación, se observará cuál de las decimales propuestas expresa las subdivisiones de orden menor, y se pondrán ceros en los lugares vacantes á la derecha de las otras, hasta que todas tengan igual número de cifras decimales.

Sea por reducir las siguientes expresiones:

0.5	=	0.50000
0.38	=	0.38000
0.034	=	0.03400
7.02306	=	7.023060
5.13759	=	5.1375900

La reducción de las fracciones ordinarias á decimales, tiene por objeto encontrar una fracción decimal equivalente á la ordinaria, ó que difiera de ella en una cantidad cuyo límite pueda fijarse por la misma operación.

Para *reducir* una fracción *ordinaria á decimal*, se divide el numerador por el denominador, agregando al primero tantos ceros cuantas cifras se desee que contenga la expresión decimal.

Sea por ejemplo, la fracción $\frac{7}{125}$ que se quiere transformar en una decimal que contenga tres cifras. Ejecutando la operación que prescribe la regla se obtiene por cociente el número 56, que sólo consta de dos cifras. Para darle el valor que le corresponde, habrá que anteponerle un 0 á fin de que el número de cifras decimales que lo componen sea igual al número de ceros agregados al denominador. Escribiendo por último, á su izquierda, el 0 de los enteros, resulta: $\frac{7}{125}=0.056$

7000	125
750	56
000	

En lugar de agregar de una vez todos los ceros al numerador, se pueden ir añadiendo á las restas á medida, que se hace la división, obteniéndose el mismo resultado en ambos casos. Éste será el verdadero, porque el agregar, total ó parcialmente, los ceros al numerador ó á las restas, equivale á multiplicarlos por 10, es decir, á reducir unidades de especie menor á mayor, y el dividir los productos por el denominador, es lo mismo que reducir unidades de especie mayor á menor, cuyos principios han servido ya para demostrar la valuación de los quebrados.

Cuando el resultado de la división no da un cociente exacto, como en el ejemplo anterior, sino que, por lo contrario, queda una resta, se continúa la operación produciendo en el cociente tantas cifras decimales como se quiera, y cuyo número depende de la exactitud que se busca en el resultado. Esta operación se denomina *aproximación del cociente*, porque por su medio pueden aproximarse las decimales hasta el límite que se desee.

Si al reducir un quebrado común á decimal, por ejemplo, $\frac{4}{13}=$ 0.3076, se quiere llevar la aproximación hasta las milésimas, se efectúa la división agregando ceros á las restas hasta que se produzca en el cociente la subdivisión deseada. El guarismo 0.307 satisface á la condición propuesta, porque su diferencia con el cociente exacto es de menos de una milésima. Sin embargo, para mayor precisión se acostumbra determinar la cifra siguiente del cociente para ver si es mayor ó menor que 5; es decir, mayor ó menor que la mitad de una de las subdivisiones de ese orden. En el presente ejemplo, la cifra es 6, y como le faltan sólo cuatro unidades de su orden para formar una milésima, se puede considerar más cercana á esta subdivisión que á la de las diez milésimas; por lo tanto se aumenta una unidad á las 0.307 halladas, con lo cual la diferencia entre la decimal y la fracción queda reducida á 4 diezmilésimas.

Al reducir una fracción ordinaria á decimal, ocurre á veces que las cifras del cociente se repiten en su mismo orden. La parte que se repite se llama *período;* y *fracciones periódicas,* á las cantidades decimales compuestas de una serie de guarismos que se reproducen periódicamente. Si el período de una fracción decimal comienza inmediatamente después del punto, se dice que es una *fracción periódica simple* ó *pura,* y cuando está precedido de otras cifras, se llama *fracción periódica mixta.* La parte decimal comprendida entre el primer período y el punto, se denomina *parte no periódica* ó *decimal limitada.*

Las fracciones periódicas se distinguen escribiéndolas dentro de un paréntesis; ó bien marcando un punto arriba de la primera y de la última cifra de cada período.

Una fracción ordinaria podrá convertirse en decimal exacta, únicamente en el caso de que su denominador pueda descomponerse en los factores 2 ó 5, ó en sus múltiplos ó potencias.

La razón es que, como al convertir un quebrado común en decimal se multiplica su numerador por 10, 100, 1000, etc., y se divide por el denominador, será necesario, á fin de obtener en la división un cociente exacto, que el denominador pueda descomponerse en factores que constituyen el numerador. Por ejemplo, $\frac{11}{40}=0.275$ se reduce exactamente á decimal porque su denominador se descompone en factores múltiplos de 2 y de 5.

Por lo contrario, cuando el denominador de una fracción ordinaria no puede descomponerse en factores múltiplos de 2 ó 5, la fracción no podrá tampoco convertirse exactamente en decimal, y producirá necesariamente en el cociente una fracción periódica simple.

La razón es, que no estando compuesto el denominador de factores que puedan contener el numerador, al efectuar la división resultará una resta, y como ésta y las que la siguen tienen que ser menores que el divisor, llegará un momento en que habiéndose expresado en los guarismos de estas restas, todos los números enteros inferiores al divisor, reaparecerán de nuevo produciendo los mismos cocientes. Por ejemplo, la fracción $\frac{2}{11}$, cuyo denominador no es susceptible de producir múltiplos de 2 ó 5, no puede convertirse en decimal exacta, y efectuando la reducción se ve que da por cociente una *fracción periódica simple* $=0.1818$.

Cuando el denominador de la fracción ordinaria que quiere convertirse en decimal, se descompone en los facteres *2 ó 5, pero contiene además otro factor primo con ellos*, la fracción decimal equivalente que resulta será *periódica mixta.*

La razón es, que el denominador en este caso, está compuesto de dos clases de factores: unos que pueden constituir el numerador, y otros que no pueden satisfacer esa condición. En consecuencia, al efectuar la división los dos primeros producirán la *decimal limitada ó parte no periódica*, y el segundo la *periódica*, que reunidas aparecerán en el cociente bajo la forma de una *fracción periódica mixta.* Por ejemplo, $\frac{7}{12}=0.58.383$ .....

En la reducción de decimales á fracciones ordinarias pueden presentarse tres casos :

1°.—Reducir una *fracción decimal exacta* á fracción ordinaria.

Para resolver este caso basta poner el denominador de manifiesto y efectuar la operación indicada, simplificando después el quebrado que resulte. Por ejemplo: $0.375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$.

2°.—Reducir una *fracción periódica simple* á fracción orninaria.

Póngase por numerador el período, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período, y simplifíquese después el quebrado.

Para fundar la demostración de esta regla, hay que observar lo que se verifica al reducir un quebrado que tiene por numerador la unidad y por denominador uno ó varios nueves.

Por ejemplo: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$. Efectuando las reducciones resulta:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 9 \\ \hline 10 & 0{,}11 \\ 1 & \end{array} = 0.(1); \quad \begin{array}{r|l} 100 & 99 \\ \hline 100 & 0.0101 \end{array} = 0.(01)$$

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 999 \\ \hline 1000 & 0.001001 \end{array} = 0.(001)$$

Examinando los cocientes obtenidos, se infiere que, toda fracción periódica igual á una décima, una milésima etc., procede de un quebrado cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador consta de tantos nueves como cifras decimales hay en el período. Por consiguiente, una fracción periódica compuesta de un guarismo, será igual á un quebrado que tenga por numerador este guarismo y por denominador 9. Si el período consta de dos guarismos, la fracción será igual á un quebrado que tenga estos dos guarismos por numerador y dos nueves por denominador; y, en general: el *valor exacto de una fracción periódica simple*, será igual al de un quebrado cuyo numerador esté compuesto de los guarismos del período, y cuyo denominador conste de tantos nueves como cifras tenga dicho período.

Ejemplo: $0.121,212=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$.

3°.—Para convertir *una fracción periódica mixta* en fracción ordinaria, se transporta el punto decimal á la derecha de la *parte no periódica;* dividiéndola, á fin de que su valor no se altere, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga, y á los guarismos que forman el período, se les pone por denominador tantos nueves como cifras haya en la parte periódica, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica, y se simplifica al fin la fracción que resulte para reducirla á su menor expresión.

Sea la fracción periódica mixta 0.5838383. Ejecutando las operaciones indicadas y simplificando, se tiene:

$$0.58,383=\frac{583}{1000}+\frac{33}{99000}=\frac{583\times 99+33}{99000}=\frac{57750}{99000}=\frac{7}{12}$$

El resultado es el verdadero, porque la operación consta de dos partes cuya exactitud ya se ha demostrado.

CAPÍTULO XIII.

ADICIÓN, SUSTRACCIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE LAS DECIMALES.

La *adición* de las decimales, como el sistema de numeración es el mismo que en los enteros, se hace escribiendo las cantidades unas debajo de otras, de manera que las cifras del mismo orden se correspondan; lo que se consigue, colocando el punto decimal en la misma columna. En seguida se suman los guarismos comenzando por las unidades de orden inferior, continuando la operación como en los enteros.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{r@{.}l}
32 & 1802 \\
8 & 5023 \\
5 & 69 \\
0 & 3576 \\
9 & 04275 \\
\hline
55 & 77285
\end{array}
$$

El resultado obtenido es el verdadero, porque contiene las unidades de todos los órdenes, y por lo tanto expresa la suma de ellos.

Para efectuar la *sustracción* de las cantidades decimales, se reducen el minuedo y el sustraendo á un común denominador, igualando su número de cifras decimales con ceros, á fin de que ambos consten del mismo número de cifras decimales, y se ejecuta la operación como la de los enteros; teniendo cuidado de escribir el punto decimal en la resta, de modo que corresponda con los del minuendo y el sustraendo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 28.73070 \\ 7.21635 \\ \hline 21.51435 \end{array}$$

La resta obtenida es la verdadera, pues resulta de haber sustraído del minuendo todas las partes del sustraendo.

La *multiplicación* de las decimales se lleva á efecto igualmente que la de los enteros, y se separan con el punto en el producto total, tantas cifras decimales como haya en ambos factores.

Ejemplo:

$$7.02 \times 5.27 = 36.9954$$

$$\begin{array}{r} 7.02 \\ 5.27 \\ \hline 4914 \\ 1404 \\ 3510 \\ \hline 36.9954 \end{array}$$

El fundamento de la regla es que, al convertir en entero el multiplicador, por medio de la supresión del punto, se hace mayor tantas veces 10 como cifras decimales contiene; y al convertir en entero el multiplicador experimenta también el mismo aumento. Por consiguiente, para que el producto sea el verdadero, será preciso hacerlo menor tantas veces como haya sido hecho mayor antes, lo cual se verifica transportando el punto decimal á la izquierda tantos lugares como decimales hay en ambos factores.

La división de fracciones decimales se hace reduciéndolas primero á un común denominador; esto es, se agregan á la derecha tanto del dividendo como del divisor, los ceros que sean necesarios para que ambos tengan igual número de cifras decimales, y se dividen como si fuesen enteros. Cuando el dividendo sea mayor que el divisor, el cociente contendrá uno ó varios enteros, y para aproximarlo por decimales hasta el límite que se desee, se van agregando sucesivamente ceros á las restas. Si el dividendo fuése menor que el divisor, se anotará un cero como primera cifra del cociente, y se continúa la operación como anteriormente, extendiendo la aproximación hasta la subdivisión decimal que se quiera.

Ejemplos:

44÷0.4=110		17.6÷44=0,4		0.3276÷0.43=0,762	
440	4	1760	440	32760	4300
4	110	000	0.4	26600	0.7618
00				8000	
				37000	
				2600	

El resultado es el verdadero, porque al transformar el dividendo en entero, se le hace mayor cierto número de veces lo mismo que al cociente; pero al efectuar la misma transformación en el divisor, el cociente se hace el mismo número de veces menor, y como los resultados se compensan, el cociente obtenido es el exacto.

Ejercicios escritos:

Redúzcanse á decimales las siguientes fracciones ordinarias:

$\frac{3}{4}=$	$\frac{99}{100}=$	$101\frac{2}{3}=$
$\frac{7}{8}=$	$\frac{2}{125}=$	$245\frac{5}{8}=$

Exprésese en forma decimal la siguiente fracción:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{10}\right)\times\left(3\div\frac{4}{5}\right)}{\left(7\frac{2}{5}\div\frac{4}{7}\right)\div\left(3-1\frac{7}{9}\right)\times 52}=$$

Aproxímense hasta la quinta cifra decimal, los siguientes:

$\frac{5}{6}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{43}{56}$, $\frac{37}{150}$.

Redúzcanse á fracciones comunes las siguientes decimales:

0.75 =	0.026 =	0.872 =	15.4 =
0.225 =	0.5688 =	0.0004 =	27.375 =
2.655 =	0.3147 =	0.9007 =	2.008 =

Redúzcanse á fracciones periódicas simples:

$\frac{6}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{12}{37}$, $\frac{10}{31}$, $\frac{7}{4}$.

Redúzcanse á fracciones periódicas mixtas:

$\frac{5}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{13}{22}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{47}{150}$.

Redúzcanse á fracciones ordinarias, las siguientes fracciones periódicas simples:

0.(45), 0.(66), 0.(297), 0.(675), 0.(324), 0.(4158).

Redúzcanse á fracciones ordinarias las siguientes fracciones periódicas mixtas:

0.(57), 0.(6472), 0.(1004), 0.(048), 0.(7852), 5.(27).

Súmense las siguientes decimales:

1.251, 15.29, 126.472, 18.1875, 9.4007, 0.071.

Réstense:

12.079	463.05	30.007894
4.32529	17.0613	0.37

Multiplíquense:

$0.65 \times 43 =$	$70.05 \times 2.308 =$	$1000 \times 0.02 =$
$0.54 \times 4.5 =$	$51.27 \times 5.321 =$	$\frac{5}{8} \times 0.726 =$
$0.634 \times 0.55 =$	$\frac{3}{4}$ de $5.2 \times \frac{3}{4}$ de $6.5 =$	$0.23 \times \frac{7}{8} \div \frac{2}{3} =$
$9.8.75 \times 5.8 =$	$0.384 \times 100 =$	$0.75 \times 1008 =$

Divídanse las siguientes fracciones:

$2.450 \div 9.8 =$	$8.1198 \div 0.56 =$	$44 \div 0.4 =$
$6.2512 \div 3.7 =$	$0.531 \div 0.0037 =$	$1596 \div 100 =$
$17.213 \div 0.24 =$	$34.275 \div 0.014 =$	$1000 \div 92 =$

1.—La construcción de una casa cuesta $3,478.75; la pintura 512\frac{7}{8}$; los muebles 1246.37\frac{1}{2}$, y las alfombras 712.12\frac{1}{2}$; ¿ cuál es el importe total?

2.—El peso bruto de un bulto de mercancías es 347.3 kilogramos, y el del embalaje 12.35 kilogramos; ¿ cuál es el peso neto de la mercancía?

3.—¿ Cuál es el costo de 3021.72 quintales café á 18\frac{7}{8}$ quintal, y de 2.936 libras de azúcar á $0.737 libra?

4.—Un individuo compró 25 resmas de papel á $1.25 resma, y 7500 cubiertas á $3.65 c's millar, y pagó con un billete de á $100; cuánto importó la factura y cuánto recibió de cambio?

5.—Dividiendo 8000 por 0.004, ¿ cuál es el cociente?

6.—Cuando se divide 0.0008 por 40000, ¿ cuál es el cociente?

7.—Un ganadero compró un lote de carneros á $3.50 por cabeza. De ellos vendió 200 perdiendo $0.20 por cabeza; pero en el precio en que vendió los restantes, ganó lo suficiente para compensar la pérdida; ¿ á qué precio por cabeza vendió los que le quedaron?

CAPÍTULO XIV.

PESAS Y MEDIDAS—PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

Para que las operaciones de la aritmética, hasta ahora conocidas, sean aplicables á los números concretos, y á sus derivados los complejos é incomplejos, es preciso conocer de antemano las divisiones convencionales establecidas para valuar esta clase de cantidades.

Ya hemos dicho que cantidad es todo lo que se puede aumentar, disminuir ó medir, como la distancia, el peso, el tiempo, etc., y que la unidad es una cantidad arbitraria que se elije para valuar las variaciones que la cantidad experimenta.

En los números homogéneos simples, ó incomplejos, el número está referido siempre á unidades de la misma especie ; pero en los homogéneos compuestos ó complejos, el número se divide en unidades de especie diferente y de distinta denominación.

De aquí resulta que, para determinar esas diferentes especies de unidades, cuya escala no sigue la uniformidad característica de la que rije á la de los números enteros y decimales, se ha escojido otra clase de valores con sus correspondientes subdivisiones y nombres.

Las unidades usuales son las de longitud, de superficie, de volumen, de peso, de capacidad, de moneda y de tiempo.

El sistema más sencillo á que pueden referirse, para valuar y medir, cualesquiera clase de cantidades, es el que tiene por fundamento la división decimal ajustada á ciertas convenciones y reglas, por cuyo motivo se denomina *Sistema Métrico Decimal.*

La unidad *lineal* y á la vez *fundamental* de este sistema, es el *metro*, que es igual á la diezmillonésima parte de la distancia del Ecuador al Polo, ó sea del cuadrante de un meridiano terreste.

La unidad de *superficie* es el *área* que es un cuadrado cuyo lado es igual á 19 metros.

La unidad de *volumen* es el *metro cúbico* llamado también *estério.* Bajo esta denominación su uso está restringido á la medida de madera ó leña, y raras veces se emplean sus múltiplos.

La unidad de *capacidad* es el *litro*, cuyo volumen es igual á uu cubo que tiene la décima parte de un metro por lado.

La unidad de *peso* es el *gramo*, que es el peso de un cubo de agua destilada, cuyo lado es igual á la centésima parte de un metro.

Como el sistema métrico es de origen francés, la unidad de *moneda* es el *franco* que pesa cinco gramos de plata y está dividido en décimos y céntimos.

La base de la nomenclatura del sistema métrico decimal, para formar los múltiplos de las unidades principales, consiste en anteponer al nombre que expresa cada una de estas unidades, las expresiones numerales griegas, *Deca*, 10; *Hecto*, 100 ; Kilo, 1000 ; Miria, 10000 ; y para formar las unidades menores ó submúltiplos de la unidad principal, los ordinales latinos, *deci*, 10 ; *centi*, cien ; *mili*, 1000.

UNIDADES DE LONGITUD.

El *metro* se usa para medir las distancias de corta extensión, y el *kilómetro* y el *miriámetro*, para las distancias itinerarias.

DENOMINACIONES MÉTRICAS.

			ABREVIATURAS
1 Centímetro	=	10 Milímetros	mm.
1 Decímetro	=	10 Centímetros	cm.
1 Metro	=	10 Decímetros	dm.
1 Decámetro	=	10 Metros	m.
1 Hectómetro	=	10 Decámetros	Dm.
1 Kilómetro	=	10 Hectómetros	Hm.
1 Miriámetro	=	10 Kilómetros	Km.

Las unidades lineales crecen ó disminuyen, como se ve, en la escala de 1 á 10. Así pues, para escribir guarismos que expresen longitud, cada denominación debe ocupar un lugar decimal.

Por ejemplo: 8345 mm. puede escribirse indistintamente así:

835.4 cm., 83.54 dm., 8.345 m., 0.8354 Dm.

UNIDADES DE SUPERFICIE.

El *metro cuadrado* para las superficies de corta extensión, y la *área* para las medidas agrarias. El cuadrado que es la unidad con que se miden las superficies, es una figura plana contenida dentro de cuatro líneas rectas que se cortan en ángulos rectos.

El metro cuadrado, como lo expresa la voz misma, es un cuadrado que tiene un metro por lado, y la área es un cuadrado que tiene 10 metros por lado. La superficie de un cuadrado se obtiene multiplicando los dos lados que lo forman.

DENOMINACIONES MÉTRICAS.

				ABREVIATURAS
1 Centímetro	cuadrado	=100 Milímetros	cuadrados	$mm.^2$
1 Decímetro	"	=100 Centímetros	"	$cm.^2$
1 Metro	"	=100 Decímetros	"	$dm.^2$
1 Área	"	=100 Metros	"	$m.^2$
1 Hectárea	"	=100 Decímetros	"	$Dm.^2$
1 Kilómetro	"	=100 Hectómetros	"	$Hm.^2$

Las unidades superficiales proceden, come se ve, de la multiplicación de dos unidades lineales de igual magnitud, y que por lo tanto son iguales á la segunda potencia de dicha unidad lineal. Además, como aumentan ó disminuyen en la escala de 1 á 100 con relación á la unidad inmediata, resulta que para reducir las de especie menor á mayor, será preciso correr el punto decimal dos lugares á la izquierda, ó á la derecha en el supuesto contrario.

Por ejemplo:

áreas	hectáreas	miriáreas
51842.6763 =	518.426793 =	5.18426793

UNIDADES DE VOLUMEN.

El *metro cúbico ó estério*; esto es, el espacio limitado por seis cuadrados que tengan un metro por lado. La unidad de medida para los volúmenes es un sólido de la forma descrita, cuyos lados son iguales entre sí, y también iguales á la unidad lineal que se use como base.

El volumen de un cubo se obtiene multiplicando los tres lados que lo forman, ó bien elevando á la tercera potencia ó cubo la cantidad que represente la longitud de una de sus aristas ó lados.

DENOMINACIONES MÉTRICAS.

			ABREVIATURAS
1 centímetro cúbico	=	1000 milímetros cúbicos	mm.^{3}
1 decímetro "	=	1000 centímetros "	cm.^{3}
1 metro "	=	1000 decímetros "	dm.^{3}
1 decámetro "	=	100 metros "	m.^{3}
1 hectómetro "	=	1000000 " "	m.^{3}
1 kilómetro "	=	1000000000 " "	m.^{3}
1 miriámetro "	=	1 billón " "	m.^{3}

Por la formación de estos números se deduce que las unidades de volumen proceden del producto de tres unidades lineales de igual magnitud, ó lo que es lo mismo, de elevar á la tercera potencia el número que las expresa. En consecuencia, aumentando ó disminuyendo conforme á la escala de 1 á 1000, las cifras decimales que las representan ocuparán tres lugares en el orden de la numeración, los cuales serán los mismos que habrá que correr el punto á la izquierda, ó á la derecha, para convertirlos de especie menor á mayor y vice versa.

Por ejemplo:

$$37.459621 \text{ m.}^3 = 37459.621 \text{ dm.}^3 = 37459621 \text{ cm.}^3$$

UNIDADES DE CAPACIDAD.

El *litro* es una medida que tiene forma cilíndrica, pero cuyo volumen es equivalente á un cubo de 1 decímetro por lado. El litro y sus múltiplos y submúltiplos forman parte, en rigor, de las unidades de volumen; pero se clasifican como unidades de capacidad para medir los líquidos y los áridos. El litro se usa para los líquidos en cantidad moderada, y el *hectólitro* para cantidades mayores y para los granos.

DENOMINACIONES MÉTRICAS

				ABREVIATURAS
1 centílitro	=	10 milílitros	cúbicos	$ml.^3$
1 decílitro	=	10 centílitros	"	$cl.^3$
1 litro	=	10 decílitros	"	$dl.^3$
1 Decálitro	=	10 Litros	"	$l.^3$
1 Hectólitro	=	10 Decálitros	"	$D.^3$
1 Kilólitro	=	10 Hectólitros	"	$H.^3$

UNIDADES DE PESO.

Se usa generalmente el gramo para las cantidades menores y el *Kilogramo* y la *Tonelada* para las mayores. El gramo es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada, y la tonelada el de un metro cúbico de agua.

DENOMINACIONES MÉTRICAS.

			ABREVIATURAS.
1 centígramo	=	10 milígramos	mg.
1 decígramo	=	10 centígramos	cg.
1 gramo	=	10 decígramos	dg
1 decágramo	=	10 Gramos	g.
1 hectógramo	=	10 decágramos	Dg.
1 kilogramo	=	10 hectógramos	Hg.
1 miriágramo	=	10 kilogramos	Kg.
1 quintal	=	10 miriágramos	Mg.

SISTEMA ANTIGUO ESPAÑOL DE PESAS Y MEDIDAS.

Antes de la invención del sistema métrico, que relativamente es de fecha muy reciente, las unidades de diferentes especies elegidas para valuar las cantidades, estaban clasificadas en varias subdivisiones y denominaciones más ó menos arbitrarias, que fueron las que originaron los diversos sistemas usados por cada país particularmente. La conveniencia del sistema métrico decimal, universalmente reconocida, tiende á generalizarlo de día en día; pero como aún se hace en todas partes uso muy frecuente de las medidas antiguas ó comunes, conviene insertar aquí el antiguo sistema de pesas y medidas de España, anotando las diferencias que existen entre algunas de ellas y las correlativas que se acostumbran en casi todos los Estados hispano-americanos.

MEDIDAS DE LONGITUD.

La unidad usual es la *vara* de Burgos, que está dividida en 3 pies, el *pie* en 12 pulgadas y la *pulgada* en 12 *líneas*.

También se divide en 4 *cuartas* y cada cuarta en 12 *dedos* ó en 2 *medias* varas y en 6 *sesmas*.

El múltiplo de la vara es el *estadal* que mide 4 varas de longitud.

La medida itineraria terrestre es la *legua*, que tiene 6,666⅔ varas, ó 20,000 pies, y se divide en *medias leguas* y *cuartos*.

En América, la legua que sirve generalmente de medida longitudinal en casi todos los países de la raza española, mide 5,000 varas.

La medida itineraria marina es la *legua marina* de 20 al grado, que tiene 6,636 varas, la *milla* 1,108 brazas, el *cable* 120 brazas, la *braza* 6 pies y el *codo de ribera* 2 pies y 9 líneas.

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

La *vara cuadrada* que mide 9 pies cuadrados, el *pie cuadrado* que mide 144 pulgadas cuadradas, y el *estadal cuadrado* que mide 16 varas cuadradas.

Para las medidas agrarias las unidades son: la *aranzada*, que es un cuadrado cuyo lado tiene 20 estadales, y por consiguiente una superficie de 400 estadales cuadrados, y la *fanega superficial*, que es un cuadrado de 24 estadales por lado, y por consiguiente, de 576 estadales cuadrados, ó 9,216 varas cuadradas. La vara se divide en 12 celemines superficiales, y el *celemín* en cuatro *cuartillos superficiales*.

En Méjico, para las superficies de grande extensión, se usa como unidad de medida agraria, el *sitio de ganado mayor*, que es un cuadrado cuyo lado es igual á una legua, ó sea 5,000 varas, el *criadero de ganado mayor*, que es un cuadrado de 2,500 varas por lado; el *sitio de ganado menor* que tiene 3,333$\frac{1}{3}$ varas por lado; el *criadero de ganado menor*, que tiene 1,666$\frac{2}{3}$ varas por lado; la *caballería de tierra*, que es un paralelógramo de 1,104 varas de base por 552 de altura, y la *fanega de sembradura* que es un paralelógramo que tiene 276 varas de base por 184 de altura.

MEDIDAS DE VOLUMEN.

La *vara cúbica*, ó sea un cubo de una vara por lado, se divide en 27 pies cúbicos, y el *pie cúbico*, en 1728 pulgadas cúbicas, (de las medidas de volumen nunca se emplea como unidad de medida una mayor de una vara.)

MEDIDAS DE CAPACIDAD.

Para los líquidos la unidad usual es la *cántara* de la ciudad de Toledo, que se divide en 8 azumbres, el *azumbre* en 4 cuartillos, y el *cuartillo* en 4 *copas*. El múltiplo de la cántara es el *moyo* que contiene 16 cántaras. En América el patrón usual es el *cuartillo* para las cantidades menores y se estima generalmente que tiene el volumen correspondiente para contener el peso de una libra de agua. Las medidas mayores son el *barril*, que tiene 9 jarras, y la *jarra* que tiene 18 cuartillos.

El aceite se mide y vende al peso. La arroba de aceite tiene 25 libras y la *libra* 4 *panillas* ó *cuarterones*.

Para la medida de las aguas de los manantiales ó de cañerías, se usa la *paja*, que es la cantidad de agua que pasa en un minuto por un tubo ó abertura cuya área de sección es $\frac{1}{16}$ de pulgada, con una velocidad de 270 milésimas de vara por segundo, produciendo un cuartillo de agua. El *buey de agua* es la cantidad de líquido que puede pasar en un minuto y con la misma velocidad que la paja, por una abertura de una vara cuadrada. Las subdivisiones completas son : el *buey*, 48 surcos ; el *surco* 3 naranjas ; la *naranja* 8 reales y el *real* 18 pajas.

Para los áridos el patrón es la fanega de la ciudad de Ávila, que se divide en 12 celemines ó almudes, y el *almud* en 4 *cuartillos*. El múltiplo de la fanega es el cahiz que tiene 12 fanegas. En América el cahiz es poco usado, y la medida que lo reemplaza proporcionalmente es la *carga*, que tiene 2 fanegas.

MEDIDAS DE PESO.

La unidad es el *marco* de Castilla, y la de uso común el *quintal*, que se divide en 4 arrobas, la *arroba* en 25 libras, la *libra* en 16 onzas, la onza en 16 adarmes, el *adarme* en 3 tomines y el *tomín* en 12 *granos*. La *tonelada* tiene 20 quintales.

Para los metales preciosos se usan : la *libra* que tiene 2 marcos, el *marco*, que tiene 50 castellanos, el *castellano*, 8 tomines y el *tomín* 12 granos.

Para la plata : la *libra* que tiene 2 marcos, el *marco* 16 onzas, la *onza* 8 ochavas, la *ochava* 6 tomines y el *tomín* 12 *granos*.

Para las piedras preciosas la unidad es el *quilate* que pesa 3 granos, y sirve para valuar la ley del oro con relación á la fracción $\frac{1}{24}$ que el quilate expresa. El oro es de 18 quilates, cuando está mezclado en una proporción $\frac{18}{24}$ de oro con $\frac{6}{24}$ de liga.

En medicina y farmacia la *libra* tiene 12 onzas, la *onza* 8 dracmas, ó 576 granos, la dracma 3 escrúpulos, y el *escrúpulo* 24 *granos*.

MONEDAS.

De oro.—La onza tiene 16 *duros* ó 320 reales ; la *media onza* 8 duros; el *doblón* 4 duros; el *escudo* 2 duros, y el escudito 1 duro ó 20 *reales*.

De plata.—El duro que tiene 20 *reales*, el *medio duro*, la *peseta* de 4 reales, la *media peseta* y el real que tiene $8\frac{1}{2}$ *cuartos* ó 34 *maravedís*. La peseta *columnaria* de 5 reales, la *media peseta columnaria* de $2\frac{1}{2}$ reales y el *real columnario* de $1\frac{1}{4}$ reales.

De cobre.—La pieza de 2 cuartos, el *cuarto* que tiene 2 ochavos, y el *ochavo* que tiene 2 maravedís. El maravedí es moneda imaginaria.

Conforme al sistema métrico decimal, las monedas se acuñan actualmente en los países españoles con los valores siguientes:

De oro.—La de 100 reales ó 10 escudos, la de 40 reales ó 4 escudos, y la de 20 reales ó 2 escudos.

De plata.—La de 2 escudos, 1 duro ó 20 reales, el escudo que tiene 10 reales, la de 3 décimos de escudo ó 3 reales, la de 2 décimos de escudo ó 2 reales, y la de 1 décimo de escudo ó 1 real.

En los Estados Hispano-Americanos, las piezas de oro se están acuñando actualmente del valor de 20, 10, 5, $2\frac{1}{2}$ y 1 peso, y las de plata de 1 peso, 50, 25, 10 y 5 centavos.

La acuñación de las piezas de cobre, y demás moneda de vellón, es muy variada y se omite para no hacer difusa la clasificación.

MEDIDA DEL TIEMPO.

Las unidades de esta medida no están sujetas al sistema métrico decimal.

En el sistema común la unidad principal es el *día*, que tiene 24 horas, ó sea la duración de una revolución de la tierra al rededor de su eje. Las demás divisiones son:

El siglo que tiene 100 años, el *año* 12 meses, el *mes* 30 días, el *día* 24 horas, la *hora* 60 minutos y el *minuto* 60 segundos. La *semana* tiene 7 días, y el *lustro* 5 años.

CAPÍTULO XV.

NÚMEROS DENOMINADOS.

Se llaman números *denominados* ó *complejos* los que se refieren á unidades de diferente especie, pero relativas todas al mismo género de medida, como 5 días, 3 horas, 20 minutos; y números *incomplejos*, son los que se refieren á una sola especie de unidades, como: 8 kilómetros, 5 pesos, 9 años.

La formación de los números denominados, así como la nomenclatura y representación de las partes en que se subdividen, no tienen ninguna analogía con el sistema en que se producen los diferentes órdenes de unidades en los números enteros y decimales. En los denominados, el número de partes en que la unidad se divide es arbitrario, y se funda únicamente en las convenciones establecidas para medir ciertos valores. Su nomenclatura, por consiguiente, reconoce sólo por base las divisiones que determinan cualesquiera de los sistemas de pesas y medidas en uso en los diversos países, y cuyo conocimiento preliminar es indispensable para resolver las operaciones á que dan origen estos números.

Para representar los números denominados, basta escribir cada una de las partes en que la unidad está dividida, como si fuése un entero; teniendo cuidado de comenzar por las de mayor especie y de indicar esta especie por medio de un signo ó abreviatura arriba del guarismo.

Puesto que en los denominados cada subdivisión significa un cierto número de partes de la especie que la precede, se infiere, fundándose en un uso de la multiplicación, que pueden reducirse las unidades de especie mayor á menor ; y que por lo contrario, fundándose en un uso de la división, pueden reducirse también las de especie menor á mayor.

Sea por reducir á su menor especie el número 3 qq. 2@17 lb. 4 onz.—Puesto que 1 quintal es igual á 4 arrobas, 3 qq. y 2@ serán iguales á 3 veces 4@ más 2@. Por consiguiente, $4 \times 3+2=14$ que es el número de arrobas que hay en 3 qq. 2@.

Puesto que una arroba es igual á 25 lb., 14@+17 lb. serán iguales á 14 veces 25+17. En consecuencia, $25 \times 14+17=367$, número de libras contenido en 3 qq. 2@. 17 lb.

Puesto que una libra es igual á 16 onzas, 367 lb.+4 onz. serán iguales á 367 veces 16+4. Por consiguiente, $16 \times 366+4=5876$, que es el número de onzas contenido en 3 qq. 2 @, 17 lb, 4 onz.

3 qq. 2@17 lb. 4 onz.
4
14
25
70
28
350
17
367
16
2202
367
5872
4
5877

De aquí se deduce la siguiente Regla. — Para reducir un denominado á su menor especie, multiplíquese la mayor denominación del número dado, por el número de la escala que lo reduzca á la especie inmediata inferior, y agréguese al producto el número de esta especie. Continúese de la misma manera con las denominaciones que siguen hasta que quede reducida la última.

Sea ahora por reducir á la unidad de mayor especie 52560 minutos.

Puesto que 60 minutos componen una hora, en 52560 m. habrá tantas horas como 60 m. están contenidos en 52.560, ó sea 876 horas.

52560	60		
45	876	24	
36	156	36	30
0	12	6	1

Puesto que 24 horas componen un día, en 876 horas habrá tantos días como 24 horas estén contenidas en 876, esto es: 36 días y 12 horas que es el número que queda en la resta.

Puesto que 30 días componen un mes, en 36 días habrá tantos meses como 30 días estén contenidos en 36, ó sea 1 mes y 6 días, que es el número que queda en la resta. Por consiguiente, 52.560 m. = 1 mes, 6 días, 12 horas.

De aquí se deduce la siguiente regla:—

Para reducir uu denominado á su mayor especie, divídase por el número de la escala que lo reduzca á la especie inmediata superior, y escríbase la resta que expresará las unidades de esta especie. Divídase el cociente obtenido por el número de la escala siguiente, y repítase la operación hasta reproducir la última especie, y la suma del último cociente con las restas expresará el resultado.

Los números denominados pueden convertirse también en fracciones ordinarias y en decimales, y recíprocamente, derivándose de esta propiedad cuatro operaciones de uso muy frecuente, á saber: 1° Convertir un denominado en quebrado. 2° Convertir un quebrado en denominado. 3° Convertir un denominado en decimal y 4° Convertir una decimal en denominado.

1°.—Convertir un denominado en quebrado: redúzcase á su menor denominación y póngase al resultado por denominador el número de unidades menores de que se compone la mayor.

Sea por ejemplo el número 5d. 4h. 20m. 12.s.

Se reducen primero los días á horas, éstas á minutos, estos á segundos, y al producto final se pone por denominador el número 86,400 que son los segundos que tiene un día. La fracción que resulta expresa el número requerido, porque al reducirla á las unidades de su menor especie, ha cambiado de forma, pero no de valor; y además, por el numerador indica el número de partes de que está compuesto el denominado, y el denominador las partes en que la unidad mayor está dividida.

$$\begin{array}{l} 5\text{d. } 4\text{h. } 20\text{m. } 12\text{.s.} \\ \underline{24} \\ \underline{124 \times 60} \\ 7420 \\ \underline{20} \\ \underline{7440 \times 60} \\ 446400 \\ \underline{12} \\ 446412 \div 86400 = \frac{111603}{21600} \end{array}$$

2°.—Convertir un quebrado en denominado: Se efectúa la división indicada; ó en otroa términos, se valúa el quebrado por el método ya conocido, y si resultare alguna resta se multiplica por el número de la escala que la reduzca á la especie inferior inmediata, continuando así hasta llegar á la última denominación.

Sea por convertir el quebrado $\frac{52}{118}$ de vara en denominado. Como 52 no es divisible por 118, se multiplica por 3 para reducirlo á la especie inmediata menor, y el producto dividido por el denominador, producirá en el cociente el número correspondiente á esta especie. Para determinar la siguiente denominación, se multiplica la resta por 12, y hecha la división se obtendrá en el cociente el número que corresponde á las pulgadas. El denominado que resulte será equivalente al quebrado propuesto, porque la operación efectuada para obtenerlo, consiste en valuar el quebrado, cuyo procedimiento se ha demostrado anteriormente.

3°.—Convertir un denominado en decimal. Se convierte primero en quebrado común y después éste en decimal.

Sea por ejemple el número 3 cánts. 5 az. 2 cuart. Se reduce hasta la última denominación y al resultado se le pone por denominador el número que expresa las veces que esta denominación está contenida en la mayor. Así se obtiene el quebrado $\frac{118}{32}$, que se convierte en decimal por el método conocido, la demostración de todo lo cual está fundada en principios también ya conocidos.

$$\begin{array}{l} \underline{8} \\ 29 \\ \underline{4}\ \frac{118}{32} = 3.687 \text{ cánts.} \\ 118 \end{array}$$

4°.—Convertir una decimal en denominado: Se multiplicará la expresión decimal por el número de la escala que reduzca el denominado á la especie inferior inmediata á la que el número se refiera, separando del producto las cifras decimales que sean necesarias, conforme á la regla de multiplicación de estas cantidades, y se repite la operación hasta llegar á la última denominación.

Si la cantidad decimal propuesta contuviere enteros, deberán escribirse estos al comenzar la operación indicando desde luego la especie á que pertenezcan.

Así pues, 6.8242 varas = 6 v. 2 p. 6 pulg. La operación es exacta porque se funda en la reducción de unidades de especie mayor á menor.

$$\begin{array}{rr} \text{varas} & 6.8342 \\ & \underline{3} \\ \text{pies} & 2.5026 \\ & \underline{12} \\ & 10052 \\ & \underline{5026} \\ \text{pulg.} & 6.0312 \end{array}$$

Ejercicios escritos.

1.—¿ Cuántas	pulgadas	hay	en	2	pies?
"	"	cuartillos	"	"	5	azumbres?
"	"	litros	"	"	13	arrobas?
"	"	fanegas	"	"	7	cargas?
"	"	jarras	"	"	9	barriles?
"	"	centavos	"	"	8	pesos?
"	"	varas	"	"	3	leguas?
"	"	minutos	"	"	4	horas?

2.—Redúzcanse á su última denominación:

3 q.	2 a.	18 lbs.	9 o.	12 kl.	7 dc.	15 m.
10 d.	20 h.	15 min.		12 v.	2 p.	10 puls.

¿ Cuántas libras	hay	en	7	quintales?
" " minutos	"	"	1	año?
" " cuartillas	"	"	12	barriles?
" " metros	"	"	22	kilómetros?
" " líneas	"	"	18	varas?

3.—Redúzcanse á su mayor denominación 32,250 minutos, 238 varas, 372.829 metros cuadrados, 312.690 pulgadas cúbicas, 25.372 centavos, 7,252 cuartillos de trigo.

4.—¿ Qué parte de una	vara	son	2 pies?
" " " " "	hora	"	35 minutos?
" " " " "	cántara	"	20 cuartillos?
" " " " "	arroba	"	14 libras?
" " " "	3 @ 7 lb. 12 o.	"	15 adarmes?
" " " "	5 barrs. 2 jarrs.	"	25 cuartillos?
" " " "	1 año 5 mes.	"	39 días?
" " " "	3 v. 9 p.	"	9 pulgadas?

CAPÍTULO XVI.

OPERACIONES DE LOS DENOMINADOS

La *adición, sustracción, multiplicación y división de los números denominados*, se efectúan conforme á los métodos generales que se han usado para las operaciones semejantes de los números abstractos, y los procedimientos correspondientes á cada una de ellas están basados en los mismos principios; sin otra diferencia que la que resulta de la aplicación de una *escala variable* de subdivisiones á los denominados, en lugar de la *escala uniforme de 10* que rige á los números abstractos.

Para efectuar la *adición* de los números denominados, es necesario que los sumandos sean homogéneos.

Sea por sumar las cantidades siguientes: Como el objecto de la operación es reunir en un número el valor de todos, se comenzará por sumar los de menor especie,

7 qq.	28 lb.	12 @.	9 ads.
12 qq.	32 lb.	8 @.	12 ads.
5 qq.	61 lb.	6 @.	7 ads.
25 qq.	22 lb.	11 @.	12 ads.

para determinar si su conjunto produce una ó más unidades de la subdivisión inmediata superior, á fin de incorporarlas á ella. Sumando, pues, las cifras que expresan los adarmes, resulta el guarismo 28; pero como una onza tiene 16 adarmes, en 28 habrá 1 onza y 12 adarmes. Se escribe el 12 en la columna correspondiente á esta subdivisión, y se lleva la onza sobrante para agregarla á las unidades de su especie. Hecha la operación resultan 27 onzas, y razonando de la misma manera que antes, se escribe el número 11 en la columna respectiva y se lleva la libra retenida para agregarla á los sumandos de la columna siguiente. Efectuada la suma resultan 122 libras, es decir, 1 quintal y 22 libras. Se escriben las libras en su columna y se agrega finalmente el quintal retenido con los de su especie para obtener el último guarismo.

El resultado es exacto porque la suma total expresa el valor de todas las partes de que se componen los números propuestos.

Regla—Para sumar los números denominados, se colocan de manera que las unidades de la misma denominación se correspondan verticalmente, y se suman comenzando por las de la última denominación. Si la suma que resulta es menor que el número de unidades que forman esa denominación, se escribe desde luego al pie de la columna; pero si no fuése así, se reducirá á las unidades de la especie siguiente para sumarlas con ellas, escribiendo las de menor especie debajo de la columna. Se continuará la operación con las unidades de cada especie, escribiendo la última denominación tal como resulte.

La sustracción de los denominados es posible siempre que el minuendo y el sustraendo sean homogéneos.

Sea por sustraer los números:

MARCOS.	ONZAS.	OCHAVAS.	TOMINES.	GRANOS.
8.	5.	7.	4.	9.
5.	6.	4.	3.	10.
2.	7.	8.	0.	11.

Puesto que de 9 granos no se pueden restar 10, se toma una unidad de la especie inmediata superior, es decir, un tomín que tiene 12 granos, y se agrega á los 9, lo cual hace 21 granos. Sustrayendo 10 de 21, queda una resta de 11, que se escribe en la columna respectiva. Al pasar á la siguiente denominación, hay que tener en cuenta la unidad que se tomó; bien sea agregándola á la cifra del sustraendo, ó deduciéndola de la del minuendo, para que la diferencia no altere, y resulta 0 por resta. Continuando de la misma manera la operación con las denominaciones siguientes, se obtiene en definitiva por resta total:

MARCOS.	ONZAS.	OCHAVAS.	TOMINES.	GRANOS.
2.	7.	3.	0.	11.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para sustraer los números denominados, se coloca el sustraendo debajo del minuendo de manera que se correspondan las unidades de la misma especie, y se comienza la resta por los de menor denominación. Si alguno de los sustraendos parciales es mayor que el minuendo, se añade al minuendo una unidad de la especie inmediata superior; y para que el resultado no se altere, se deduce esta unidad del minuendo que se haya tomado al continuar la resta.

La multiplicación de los denominados se funda en el principio establecido, de que, al efectuar una multiplicación, el multiplicador debe ser considerado como un número abstracto, de lo cual se infiere que, para plantear con acierto una operación de este género en la que siempre está sobreentendido que uno de los factores debe ser un número abstracto, es indispensable determinar de antemano cuál de los dos factores propuestos es el multiplicando. Esto se resuelve fácilmente reflexionando que, como el producto por hallar debe ser de la misma especie del multiplicando, el simple enunciado de la cuestión bastará para distinguirlo desde luego. Si se desea saber, por ejemplo, cuál será el valor de 30 quintales de azogue á $48.62 cs., el quintal, el multiplicando será $48.62 cs., porque el producto que se busca es el valor de los 30 quintales expresados en pesos y centavos.

En la multiplicación de los denominados se distinguen dos casos :

1º.—Multiplicar un denominado ó complejo por un número simple ó incomplejo.

2º.—Multiplicar un denominado por otro.

Ambos casos se resuelven bien sea por el método general de reducción, transformando en quebrados los complejos, ó por partes alícuotas.

Sea como ejemplo del primer caso el seguiente problema :

Si una carga de grano pesa 2 qs. 3 @ 14 ℔, cuánto pesarán 7 cargas?	2. qs. 3 @ 14 ℔ 7 14 qs. 21 @ 98 ℔ = 20 qs. 0 @ 23 ℔

Para plantear la operación, se observará que, como lo que se busca es el peso de la cantidad de grano, el producto deberá estar expresado en unidades de esta especie. Así pues, el multiplicando será 2 qs. 3 @ 14 ℔ y el multiplicador 7 tomado como número abstracto.

La operación se efectúa comenzando por las unidades de menor especie, y continuándola con las siguientes, se obtiene 14 qs. 21 @ 98 ℔ por producto. Reduciendo las unidades que tiene á su mayor especie, queda por último: 20 qs. 0 @ 23 ℔. La operación se simplifica ejecutando simultáneamente la multiplicación y la división.

Se hubiera llegado á igual resultado reduciendo primero el denominador á su menor especie; y valuando en seguida el quebrado, el cociente que se obtenga reproducirá el mismo número.

Reducción.

2 qs, 3 @ 14 ℔
4
$\overline{11 \times 25}$
$\overline{375}$
$\dfrac{14}{289}$ — $\dfrac{289}{100} \times 7 = \dfrac{2023}{100}$

Valuación.

2023 | 100
23. 20 qs. 0 @ 23 ℔
4
$\overline{92 \times 25.}$
$\overline{2300.}$

Si se trata de multiplicar un incomplejo por un complejo, el procedimiento y el resultado serán los mismos, pues es la repetición del caso anterior, cambiando únicamente el orden de los factores.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla general:

Para multiplicar un número complejo por un incomplejo, se multiplica éste por cada una de las diferentes especies del complejo, y la suma de los productos parciales será el producto total.

2º caso.— Sea como ejemplo de la multiplicación de un complejo por otro complejo el siguiente problema:

Si un tejedor hace 16 vs. 2 p. 7 ps. de tela en un día, ¿cuántas hará en 5 días, 7 horas, 15 minutos?

16 vs. 2 p. 7 ps.
5 ds. 7 h. 15 ms.
89 vs. 1 p. 2 ps.

Como el producto que se busca debe estar expresado en unidades lineales, el multiplicando será el primer número, y la operación se dispone y ejucuta así:

Se reducen el multiplicando y el multiplicador á su menor especie, representada en el primero por la fracción $\frac{607}{36}$ y en el segundo por $\frac{7635}{1440}$. Se simplifican cuanto es posible y se efectúa la multiplicación como la de los quebrados. El quebrado que resulta se valúa, y el cociente será el producto de los denominados propuestos.

Reducción del multiplicando.

16
3
$\overline{50 \times 12}$
600
7
$\overline{607.}$ $\frac{607}{36}$ de pulgadas.

El resultado así obtenido es el verdadero, porque al hacer la reducción se han convertido unidades de especie mayor en menor, y al verificar la valuación del quebrado que expresa su producto, se han extraído ordenadamente las unidades de los diversos órdenes que lo componen.

Reducción del multiplicador.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{24} \\ 120. \\ \underline{7.} \\ \underline{127 \times 60.} \\ 7620. \\ \underline{15} \\ 7635, \quad \frac{7635}{1440}. \end{array}$$

$$\frac{607}{36} \times \frac{7635}{1440} = \frac{607}{36} \times \frac{1527}{288} = \frac{926889}{10368}.$$

Valuación.

$$\begin{array}{r|l} 926.889. & 10368. \\ \cline{2-2} 97.449. & 89 \text{ varas, 1 pie, 2 pulgadas.} \\ 4.137. & \\ \underline{3} & \\ 12.411. & \\ \underline{2043 \times 12} & \\ 24.516. & \\ 13.780. & \end{array}$$

De aqui se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un número denominado por otro denominado, se reducen ambos á quebrados, se multiplican estos y se valúa el resultado en la especie de unidades del multiplicando.

Los dos casos que ocurren en la multiplicación de los números denominados, pueden resolverse también por el método de las partes alícuotas.

Se llaman *partes alícuotas* de un número las partes iguales en que puede descomponerse y que reunidas después lo reproducen.

Por ejemplo: 9 pulgadas pueden descomponerse en 6 más 3 pulgadas; y como un pie tiene 12 pulgadas, $\frac{6}{12}$ y $\frac{3}{12}$, ó $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ de un pie, serán partes alícuotas de esta unidad.

Por este ejemplo se infiere que, las partes alícuotas de un denominado, son las fracciones comunes en que puede descomponerse, y cuyo numeradores la unidad.

Esto supuesto, sea por multiplicar un complejo por un incomplejo (1er caso) por el método de las partes alícuotas.

Ejemplo.— Si un quintal de hierro labrado, cuesta $8.75 es ¿cuánto costarán 26 quintales?

	8 pesos 75 cents	
	26qq	
	208$	Producto
$\frac{1}{2}$	26– 13	26. auxiliar
$\frac{1}{4}$	26– 6 ~~*~~ 50 ~~*~~	
	$227.50	

Para obtener el valor de 26qq á $8 no hay mas que multiplicar un número por otro y escribir desde luego su producto. Para determinar el siguiente de 26qq por 75 cents se observará que, si en vez de 75 cents el precio fuera de 1 peso, el producto buscado sería $26 \times 1 = 26$. Sin embargo, como no es 1 peso sino 75cs el factor, y 75 centavos pueden descomponerse en $50 + 25$ centavos, es decir, en la mitad y en la cuarta parte de 1 peso, porque son partes alícuotas de esta unidad, se toman desde luego estas partes del producto supuesto 26, (que se escribe aparte, ó simplemente se imagina) y los guarismos que resulten se agregan al primer producto obtenido. La suma de estos productos parciales expresará el resultado total.

Como prueba de la exactitud de la operación anterior, resuélvase el mismo ejemplo por el método de reducción.

$8 75cents
26qq
$227 50cs.

Redúzcase el complejo á quebrado; multiplíquese por el multiplicador y valúese el quebrado que resulta. El cociente $227 50cs. será igual al producto encontrado por las alícuotas.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 100 \\ \hline 800 \\ 75 \\ \hline 875 \end{array} \qquad \frac{875}{100} \times 26 = \frac{22750}{100} = \$227.50$$

Aplicando las decimales, la operación es aún mucho más fácil.

De lo anterior se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un número complejo por un incomplejo, se multiplica éste por las unidades de especie mayor del multiplicando y después por cada una de las demás denominaciones, descomponiéndolas sucesivamente en sus partes alícuotas.

Sea ahora por multiplicar un complejo por otro complejo, (2° caso), por el método de las partes alícuotas.

Ejemplo.—Si un móvil recorre en una hora 25 varas, 2 pies y 9 pulgadas, ¿qué distancia recorrerá en 14 horas, 40 minutos y 30 segundos?

El multiplicando es el primer guarismo, porque el producto deberá expresar unidades lineales.

		25v.	2 pies.	9 pulgs.	
		14h.	40 mis.	30 segs.	
Primer producto		350 varas			
Por un pie	4	2pi	0 pgs		
Por un pie	4	2	0		14 Primer producto auxiliar
Por $\frac{1}{2}$ pie	2	1	0		25 Segundo producto auxiliar
Por $\frac{1}{4}$ pie	1	0	6		
	362.	2.	6.		
Por 30 mins.	12	2	$10\frac{1}{2}$		$0+1+3\frac{11}{20}$. Tercer producto auxiliar equivalente á 1 minuto.
Por 10 mins.	4	0	$11\frac{1}{2}$		
Por 30 segs.	0	0	$7\frac{31}{40}$		
	380v.	0p.	12pgs.		

Se comienza la operación por las unidades de especie mayor, y multiplicando 25 por 14 se obtiene por primer producto 350 varas que se escribe en su lugar respectivo. Para continuar la multiplicación con las unidades de especie menor, se razona como antes se ha explicado, y se dice: si en vez de 2 pies que es el guarismo siguiente, fuése 1 vara el espacio que el móvil recorriese en 1 hora; en 14 horas habría recorrido 14×1, ó sea 14 varas.

Sin embargo, como no es 1 vara, sino 2 pies los que recorre, y 2 pies son partes alícuotas de una vara, puesto que son $\frac{2}{3}$ de vara, no habrá mas que hacer que tomar la tercera parte del producto auxiliar 14, que es 4v. 2pi. 0pugs. y escribirla dos veces debajo del primer producto.

Extendiendo el mismo raciocinio á las subdivisiones siguientes, se advierte que 9 pulgadas es igual á $6+3$ pulgadas, esto es, á $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ de un pie, por consiguiente se toman estas partes del último producto y se escriben ordenadamente debajo de los productos precedentes.

Para efectuar la multiplicación de las unidades de menor especie del multiplicador, que aún faltan, por las restantes del multiplicando, se procede de un modo semejante. Comenzando pues, por la subdivisión de minutos, se observa que, si en lugar de recorrer el móvil 25 varas en 40 minutos, las recorriera en 1 hora, el producto sería 25×1, ó sea 25 varas; pero como sólo se mueve 40 minutos, que es una fracción de hora que puede descomponerse en $30+10$ minutos, es decir, en $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ de hora, se toman sucesivamente estas partes del último producto y se escriben; continuando así la operación hasta llegar á la última denominación del multiplicando.

Sumando en seguida los productos parciales, se tendrá finalmente por resultado 380 varas, 0 pies, 12 pulgadas.

Para comprobar la exactitud de la operación, puede resolverse también por reducción de los denominados á quebrados, preparándola y ejecutándola en esta forma:

25v.	2pi.	9 pgs.
14h.	40m.	30s.

Reducción del multiplicando. Reducción del multiplicador.

$$\begin{array}{l} 25 \\ 3 \\ \underline{77 \times 12 + 9} \\ \quad 933 \end{array} \qquad \frac{933}{36} = \frac{311}{12}$$

$$\begin{array}{l} 14 \\ \underline{60+40} \\ 880 \\ \underline{\;\; 60+30} \\ \;\; 52.830 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dfrac{52830}{3600} = \dfrac{10566}{720} \\[2ex] \dfrac{311}{36} \times \dfrac{10566}{720} = \dfrac{3286026}{8640} \end{array}$$

y valuando este quebrado, produce por cociente 380v. 0p. 12ps., resultado que como vemos es igual al anterior, lo que prueba que la operación está bien hecha.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un número complejo por otro, por medio de sus partes alícuotas, se comienza la operación multiplicando las unidades de mayor especie de ambos factores. Se descomponen en seguida las unidades de menor especie del multiplicando en sus partes alícuotas y se multiplican sucesivamente por el multiplicador, hasta llegar á la última. Á continuación se descomponen las denominaciones menores del multiplicador en sus partes alícuotas y se multiplica todo el multiplicando por ellas. La suma de los productos parciales dará el total.

En la *divisiōn* de los denominados ocurren tres casos:

1°.—Dividir un denominado ó complejo por un incomplejo.

2°.—Un incomplejo por un denominado.

3°.—Un denominado por otro.

El procedimento que se sigue en los tres casos, por regla general, es transformar los dos términos en quebrados comunes; pero al disponer la operación se debe tener cuidado de determinar cual de los dos números dados es el dividendo y cual el divisor, para que, al multiplicar el cociente que resulte por el divisor, que durante la operación se considera como un número abstracto, el resultado reproduzca el dividendo, que es la condición fundamental de esta regla.

Cuando los números propuestos son homogéneos, la cuestión se reduce simplemente á determinar cuantas veces el mayor contiene al menor; pero si no lo son, la determinación del cociente significa además encontrar un número concreto que multiplicado por un abstracto dé un producto igual al otro número propuesto. El enunciado mismo de la cuestión designa la especie de unidades á que el cociente debe referirse.

1er. —Caso:—

Sea, por ejemplo, distribuir 57 cargas, 1 fanega y 8 almudes de grano entre 12 personas. Cuando, como en el presente ejemplo, el cociente que se busca debe ser de la misma especie del dividendo, y el divisor es incomplejo, la reducción preliminar del dividendo á las unidades de su menor especie, haría la operación más laboriosa, puesto que una vez hecha esa reducción, sería preciso después valuar el quebrado para obtener un cociente que expresase las unidades representadas en el dividendo. Así pues, lo que se hace es disponer la operación como la de los enteros y después de dividir las unidades de especie mayor por el divisor, se reduce desde luego la resta á la subdivisión inmediata inferior, agregándole las unidades de su especie que haya en el dividendo, continuando de la mismas manera con las subdivisiones y restas siguientes, hasta llegar á la última denominación.

57 car.	1 fan.	8 al.	12
9			4c. 1 f. $7\frac{2}{3}$ al.
2			
19			
7			
12			
84			
8			
92			
8			

2o. —Caso:—

Si un tejedor, para hacer una pieza de tela, emplea 1 día, 3 horas y 12 minutos, ¿ cuántas piezas hará en 15 días?

La operación se plantea teniendo presente que el número de piezas que podrá hacer en el tiempo marcado, estará expresado por las veces que 1 día, 3 horas y 12 minutos estén contenidos en 15 días; ó en otros términos, habrá que dividir 15 días por 1 d. 3 h. 12 m.

Reduciendo ambos números á su menor especie, y efectuando la división resulta por cociente—$13\frac{12}{51}$ piezas. En efecto, el tiempo invertido para hacer una pieza está representado por 1632 minutos, y el tiempo que debe invertirse para hacer el número de piezas que se va á determinar, está expresado por 21,600 minutos. Por consiguiente, dividiendo este guarismo por el primero, se obtendrá el número que se busca.

15 d. ÷	1 d. 3 h. 12 m.
24	27
60	60
30	1.620
360	12
60	1.632
21,600	

$$\frac{21,600}{1440} \div \frac{1.632}{1.440} = \frac{21,600 \times 1.440}{1440 \times 1632} = \frac{21,600}{1632} = 13\tfrac{12}{51} \text{ piezas.}$$

Por el pormenor del cálculo se ve que desapareciendo como factor común el número 1440, al invertir los quebrados para hacer la división, es innecesario escribirle, pudiendo hacerse desde luego la operación.

3er.—Caso:—

Si una fanega de trigo pesa 3 @. 18 lb., ¿ cuántas fanegas contendrá un carro cargado con 20 quintales, 2 arrobas y 10 libras?

Según el enunciado de la cuestión, es evidente que habrá tantas fanegas cuantas veces el peso de una de ellas, ó sea, 3 @. 18 lb. esté contenido en el peso total, ó sea, 20 qq. 2 @. 10 lb.

Reduciendo pues los dos términos á su menor especie, el divi dendo será 2060 lb. y el divisor 93 lb. Efectuado la división resulta finalmente por cociente, $22\frac{24}{93}$, que es el número de fanegas contenidas en la carga.

20 qq. 2 @. 10 lb.—	
4	3 @. 18 lb.
82	25
25	75
410	18
164	93
2050	
10	
2060	

$$\frac{2060}{93} = 22\tfrac{24}{93} \text{ fanegas.}$$

De todo lo expuesto y demostrado se deduce la siguiente regla:

Para dividir un denominado por otro, un denominado por un incomplejo, ó un incomplejo por un denominado, se reducen á su menor especie el dividendo y el divisor en el primer caso, el dividendo en el segundo, y el divisor en el tercero, y se procede á efectuar la division transformando el quebrado que resulte en denominado, valuándole en la especie de unidades que deba expresar el cociente.

Ejercicios escritos.

Súmense:—

Cargas.	2 Fanegas.	4 Cuartillas.	3 Almudes.
7.	1.	$2\frac{1}{8}$.	2.
5.	$1\frac{1}{2}$.	3.	3.
$20\frac{1}{4}$.	1.	$2\frac{7}{8}$.	1.

Leguas.	5000 Varas.	3 Pies.	12 Pulgadas.
7.	20.	2.	9.
15.	84.	1.	11.
9.	72.	1.	8.

Años.	12 Meses.	30 Días.	20 Horas.	60 Minutos.
5.	6.	20.	10.	50.
39.	8.	5.	3.	12.
8.	2.	15.	7.	24.

Réstense:

Toneladas.	20 Quintales.	4 Arrobas.	25 Libras.
132.	15.	3.	17.
75.	2.	1.	9.

Caballerías.	12 Fanegas.	784 Varas cuadradas.
25.	7.	875.
19.	8.	521.

Onzas.	8 Dracmas.	3 Escrúpulos.	24 Granos.
3.	7.	2.	20.
1.	9.	3.	16.

Surcos.	24 Reales.	18 Pajas.
7.	15.	12.
2.	19.	2.

Multipliplíquense:

Barriles.	9 Jarras.	18 Cuartillos.
3.	2.	17.
6.	$2\frac{3}{5}$.	12.

Cahices.	12 Fanegas.	12 Celemines.	4 Cuartillos.
$9\frac{1}{2}$.	8.	4.	2.
	2.	5.	1.

Marcos.	8 Onzas.	8 Ochavas.	6 Tomines.
12.	$7\frac{3}{4}$.	3.	5.
8.	6.	$1\frac{5}{6}$.	4.

Divídanse:

Cántaras.	8 Azumbres	4 Cuartillos.	Pesos.	20 Reales.	34 Maravedises.	Hectólitros.	10 Decálitros	10 Litro.
15.	6.	3.	30.	18.	12.	55.	5.	7.
9.	3.	2.	21.	7.	5.	11.	9.	6.

1.—¿ Cuál será el costo de 6 leguas de alambre telefónico, en el concepto de que 80 pies pesan una libra y que la libra vale 35 centavos?

2.—¿ Cuántos minutos han transcurrido del lunes á las 3 h. 30 m. de la tarde al viernes á las 11 h. 15 m. de la mañana?

3.—Comprando 25 cargas de grano á $8.62½ cs. y vendiendo la mitad á $9.37½ cs. y la otra mitad á $9.50 cs, ¿ cuál es el beneficio que resulta?

4.—¿ Cuánto costarán 28 qq. 2 @. 19 lb. de cobre á razón de $7.25 cs. arroba?

5.—De una propiedad rural que mide 285 fanegas se van á vender varios lotes: uno de 122 fanegas y tres de 35,722 varas cuadradas 75,638 varas cuadradas y 22,734 varas cuadradas, respectivamente; ¿cuántas fanegas quedarián después de la venta?

6.—Una persona párte á las 8 h. 50 m. de la mañana del 5 de marzo de 1890 para dar la vuelta al mundo, y regresa al punto de partida el 18 de Mayo del mismo año; ¿ cuánto tiempo estuvo ausente?

CAPÍTULO XVII.

POTENCIAS Y RAÍCES.

Se llama potencia de un número el producto que resulta de tomarlo cierto número de veces como factor. Así, 4 y 8 son potencias de 2, porque resultan de multiplicar á 2 una y dos veces for sí mismo.

Llámase *cuadrado ó segunda potencia* de un número el producto que resulta de tomarlo dos veces por factor. *Cubo ó tercera potencia* es el producto que resulta de tomarlo tres veces por factor; y, en general, *cuarta, quinta,* etc., potencias de un número, son los productos que resultan de tomarlo sucesivamente cuatro, cinco, etc., veces por factor de sí mismo.

Por ejemplo, 9 es el cuadrado ó la segunda potencia de 3, porque $9=3\times3$, y 27 es su cubo ó tercera petencia, porque $27=3\times3\times3$.

Las veces que un número se toma como factor, se indican escribiendo á su derecha y un poco arriba un pequeño número que se llama *exponente* ó *grado* de la potencia, en esta forma: 4^2. El grado de la potencia determina el número de factores.

Cuando el número está compuesto de varias cifras, se suele escribir debajo de una raya, ó dentro de un paréntesis, acompañado del exponente, de esta manera: $\overline{125}^2$, ó bien $(432)^3$.

La *elevación á potencias* tiene por objeto determinar las diferentes potencias de un número. La primera potencia de un número es el mismo número, y todas las potencias de la unidad son iguales á la unidad.

Multiplicando sucesivamente por sí mismos una, dos, tres, etc., veces los números que representan las unidades, se obtienen la segunda, tercera, cuarta, etc., potencias de ellos. Procediendo así, se puede formar una tabla tan extensa como se desee; pero como las aplicaciones usuales son las de la segunda y tercera potencias, es conveniente retenerlas en la memoria, á cuyo efecto se insertan á continuación.

Cuadrados y cubos de los nueve números enteros:

Números.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cuadrados.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49	64.	81.
Cubos.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Se llama *raíz* de una potencia, á uno de los factores iguales que la producen.

Así, 3 es *raíz cuadrada* de 9 y *cúbica* de 27, porque es el número que sirve de base para originar la segunda y la tercera potencias de sí mismo.

Las raíces se denominan de un modo semejante á las potencias: la de dos factores iguales se llama *segunda* ó *raíz cuadrada*, la de tres, *tercera* ó *raíz cúbica*; y las sucesivas, *cuarta*, *quinta*, etc., sin denominación especial.

La *extracción* de *raíces* tiene por objeto determinar las diferentes raíces de las cantidades.

El *signo* de esta operación se llama *radical*, y su forma es la siguiente: $\sqrt{}$. La cantidad cuya raíz debe extraerse se coloca debajo de la raya, y el grado de la raíz se indica por un pequeño número llamado *índice* que se escribe en la abertura del signo radical.

Por ejemplo, $\sqrt[2]{16}=4$, que se lee: raíz cuadrada de $16=4$. Cuando se omite el índice, como hubiera podido hacerse en este caso, se sobreentiende que es una raíz cuadrada la que se indica.

Llámase *raíz exacta* de un número la que es una potencia perfecta del grado que indica el radical. La raíz de un número que no es potencia perfecta del grado que el radical indica, da margen á la formación de una cantidad que se denomina *inconmensurable* ó *irracional.*

La distinción entre estas dos clases de cantidades depende de que, aunque la potencia de un número entero sea necesariamente otro entero, las de los números comprendidos entre dos unidades consecutivas, no lo son; porque proceden de los números fraccionarios comprendidos entre ambas unidades; y sucede con sus raíces una cosa análoga á la que pasa con la división de los enteros cuando no da un cociente exacto, esto es, que origina la formación de los números quebrados.

Por ejemplo, el cuadrado de 2 es 4, y el de 3 es 9; por consiguiente, las raíces cuadradas de 4 y 9 son, respectivamente, 2 y 3.

Mas como entre estas dos raíces se encuentran las de los números mixtos mayores que 2 y menores que 3, cuyas potencias están formadas por factores mixtos, ellos lo son también y sus raíces tienen que estar representadas por aproximaciones á los números enteros que las limitan.

Potencia perfecta es el número que puede descomponerse en factores iguales cuya raíz, por lo mismo, puede encontrarse exactamente. Así, 25 es potencia perfecta de segundo grado, y 27 es una potencia perfecta de tercer grado; por lo contrario, *potencia imperfecta* es el número cuya raíz no puede extraerse exactamente.

Para elevar una cantidad á una potencia cualquiera, se multiplica por sí misma tantas veces como unidades, menos una, tiene el exponente de la potencia.

Así, $3^4=3\times3\times3\times3=81$. El número de factores es 4, igual al exponente, y el de multiplicaciones 3, igual al exponente menos una unidad.

Para elevar un quebrado á una potencia cualquiera, se elevan el numerador y el denominador á la misma potencia separadamente.

$$\left(\tfrac{4}{5}\right)^3=\tfrac{4}{5}\times\tfrac{4}{5}\times\tfrac{4}{5}=\frac{4\times4\times4}{5\times5\times5}=\tfrac{64}{125}.$$

Las potencias de un quebrado son menores que el mismo quebrado, y disminuyen á medida que su grado crece; porque el producto de la multiplicación de dos quebrados propuestos, es menor que cualquiera de los dos factores, según se ha demostrado al tratar de la multiplicación de esta clase de cantidades.

Para elevar un número mixto á una potencia, se reduce primero á quebrado y se eleva éste á la potencia:

$$\left(4\tfrac{1}{2}\right)^2=\left(\tfrac{9}{2}\right)^2=\tfrac{81}{4}=20\tfrac{1}{4}.$$

Para elevar una cantidad decimal á una potencia, se omite el punto decimal y se eleva á la potencia como si fuése un número entero, separando del producto las cifras decimales correspondientes, conforme á la regla establecida para la multiplcación de las fracciones de esta especie. El número de decimales del resultado será igual al número de las que tiene la cantidad multiplicado por el exponente. Por ejemplo :

$$(0.25)^2 = 0.25 \times 0.25 = 0.0625.$$

Las raíces de las cantidades procedentes de la elevación de los números dígitos á la segunda y tercera potencias, pueden hallarse fácilmente reteniendo en la memoria los cuadrados y los cubos de estos números, puesto que cada uno de ellos expresa, en su caso, la raíz que se busca.

$$\sqrt{49} = 7, \sqrt[3]{512} = 8.$$

Cuando las cantidades bajo el radical no son potencias perfectas, la operación no puede producir una raíz entera, y la diferencia entre el número dado y el mayor cuadrado ó cubo contenido en el número, se llama *resta* ó *residuo*.

Conociendo la raíz de una cantidad y dividiéndola sucesivamente por ella, se obtiene como último cociente la unidad, y el número de divisiones indicará el grado de la raíz.

Para extraer la raíz de un quebrado, se extraen separadamente la del numerador y la del denominador: Por ejemplo :

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}.$$

Para extraer la raíz de una cantidad decimal se procede como si fuése un número entero ; teniendo cuidado únicamente de agregar á su derecha los ceros que sean necesarios á fin de que el número de sus cifras sea un múltiplo del índice de la raíz.

Se llama *cuadrado* de un número el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo. 49 es el cuadrado de 7, porque $7 \times 7 = 49$. La operación se indica escribiendo á la derecha y arriba del número el exponente 2.

En la elevación de un número al cuadrado, ocurren tres casos :

1°, cuando el número es entero ;

2°, cuando es quebrado, y

3°, cuando es decimal.

En el primer caso el cuadrado será un número entero y mayor que el número dado, porque el producto de la multiplicación de los enteros es mayor que cualquiera de los factores.

En el segundo caso, el cuadrado será un quebrado y menor que el mismo quebrado, porque el producto de dos quebrados propios es menor que cualquiera de los factores.

En el tercer caso, el número de cifras decimales del producto será doble de las que contenga la decimal, porque el producto de las decimales consta de tantas cifras como decimales hay en ambos factores.

El cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, consta de tres partidas cuya formación se manifiesta descomponiendo el número en dichos dos órdenes y analizando la operación que se ejecuta para obtener la potencia.

Sea, por ejemplo, encontrar el cuadrado de 27 en términos de sus decenas y unidades:

El producto de $20+7$ por 7, es: $7^2+7\times20$; y el producto de $20+7$ por 20, es $20\times7+20^2$. Por lo tanto, $20^2+(2\times20\times7)+7^2$, que es la suma de estos productos parciales, será el cuadrado de $20+7$, ó de 27.

Operación.

$27=$	$20+7.$
$27=$	$20+7.$
$189=$	$20\times7+7^2$
$540=$	$20^2+20\times7.$
$729=$	$20^2+(2\times\ 20\times7)+7^2$
$729=$	$20^2+2(20\times7)+7^2$

De aquí se deduce que: *el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, consta: 1°, del cuadrado de las decenas; 2°, del doble producto de las decenas por las unidades, 3°, del cuadrado de las unidades.*

El análisis del modo con que se forman las partidas del cuadrado, es indispensable, porque sirve de fundamento al método para la extracción de raíces.

Sean ahora los siguientes números y sus cuadrados:

Números	1.	9.	10.	99.	100.	999.
Cuadrados	1.	81.	100.	9,801.	10,000.	998,001.

Observando en estas dos series de números la relación que existe entre las potencias de primero ó segundo grado de los diferentes órdenes: unidades, decenas, centenas, etc., se reconoce que, el cuadrado de un número está expresado por doble número de cifras de las que él tiene, ó una menos.

De este principio se infiere que, si un guarismo cuyo cuadrado es perfecto, se divide en períodos de dos cifras cada uno, comenzando por las unidades, el número de períodos será igual al número de cifras que contenga la raíz cuadrada de aquel guarismo.

Raíz cuadrada :—Se ha dicho que la *raíz cuadrada* de un número, es la cantidad que muliplicada por sí misma, produce el número dado.

Si la formación del cuadrado de un número procede de una operación de composición, como lo es la multiplicación de un número por sí mismo, es evidente que, siendo la extracción de la raíz cuadrada de un número, una operación inversa de la anterior, el procedimiento para efectuarla debe consistir en descomponer el número dado en las partidas del cuadrado, y deducirlas sucesivamente del número hasta encontrar la base que originó la potencia, que es la raíz buscada.

Sea por extraer la raíz cuadrada del número 4,356.—

La operación se dispone como para una división, y se analiza y ejecuta de la manera siguiente:

Operación.

4356	66
36	126
75.6	
75.6	
000	

Como el número propuesto tiene cuatro cifras, se reconoce desde luego que su raíz constará de dos, que serán las decenas y unidades de donde han procedido las partidas de que el número se compone.

Para determinar el cuadrado de las decenaף, que es la primera partida que se busca, se debe tener en cuenta que como las dos primeras cifras de la derecha sólo representan decenas y unidades, las decenas de la raíz que deben derivarse del orden de las centenas, se encontrarán en las dos cifras de la izquierda. Así pues, se comenzará por dividir el guarismo en dos períodos de dos cifras cada uno.

El mayor cuadrado perfecto contenido en el primer período 43- es 36, cuya raíz 6 que se escribe á la derecha del número como si uése el divisor, expresará las decenas de la raíz. Sustrayendo su cuadrado 36 del primer período 43 se habrá deducido la primera partida, y la resta 7 al lado de la cual se baja el segundo período 56 contendrá las partidas que faltan, esto es, el doble producto de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades. Pero como el producto de las decenas por las unidades no puede ser de orden inferior al de las decenas, se deduce que, la última cifra 6 no puede ser parte de este producto, y por lo tanto habrá que separarla á la derecha.

El período 75 que queda á la izquierda, expresa ahora el producto de dos factores: uno, el duplo de las decenas, y otro, las unidades. Por consiguiente, dividiendo este producto 75 por el duplo de las decenas de la raíz, el cociente que se encuentre será el otro factor, es decir, las unidades que se buscan. Para indicar la división se escribe el número 12 duplo de las decenas, debajo de éstas, y el cociente 6 á la derecha de la primera cifra de la raíz y á la derecha también de 12 para completar las cifras del divisor por medio del cual se forman las partidas restantes que son: 36, cuadrado de las unidades y 720 doble producto de las decenas por las unidades. La suma 756 de estas partidas, se sustrae del último resultado y queda cero por resta; lo que indica que 66 es la raíz cuadrada exacta de 4,356.

Este resultado es el verdadero, porque las partes de que consta la raíz se han encontrado determinando las partidas del cuadrado del número propuesto, y se han restado sucesivamente de él, desvaneciendo así la potencia á que estaba elevado.

La resta, cuando la haya, debe ser siempre menor ó igual al duplo de la raíz hallada. Si no fuése así, indicaría que las unidades de ésta pueden aumentarse con una unidad más, y en ese caso, la operación debe repetirse. La razón de esto es que la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos, es igual al duplo del menor más una unidad.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para extraer la raíz cuadrada de un número, divídase en períodos de dos cifras cada uno, comenzando por las unidades, y búsquese la raíz del mayor cuadrado contenido en el primer período de la izquierda, la cual será la primera cifra de la raíz. Sustráigase el cuadrado de esta cifra del primer período de la izquierda, y agréguese á la resta el siguiente período para formar un dividendo. Sepárese la última cifra de la derecha de este dividendo, y las que quedan á la izquierda, divídanse por el duplo de la raíz hallada, agregando el cociente encontrado á esta parte y también al divisor, y multiplíquese el divisor así completo, por la cifra de la raíz encontrada al último, sustrayéndose el producto del dividendo. y continúese de la misma manera la operación hasta llegar al último período.

Cuando entre las cifras de la raíz ocurriese algún cero, se agregará otro al divisor, y otro período al dividendo, continuando la operación como antes.

Si el número dado no es un cuadrado perfecto, queda una resta, y se pueden agregar períodos de ceros y continuar la extracción de la raíz hasta el límite de aproximación decimal que se quiera.

Para extraer la raíz cuadrada de una cantidad compuesta de enteros y decimales, se comienza haciendo la separación de períodos en el lugar de las unidades á la derecha é izquierda de él, y se aplica en seguida la regla general ; teniendo cuidado de separar los enteros de las decimales en la raíz, al bajar el primer período decimal del número. Si el guarismo decimal fuése impar, se agregará un cero á su derecha :

$$\sqrt{72.55}=8.5.$$

Si la cantidad consta sólo de decimales, se principia por hacer que el número de sus cifras sea par, agregando un cero á su derecha si es necesario, y se escribe 0 en la raíz, como expresión de la parte entera, efectuando en seguida la extracción de la raíz de las decimales como si fuesen enteros.

$$\sqrt{0.94785}=\sqrt{0.947850}=0.973.$$

Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado, se extraen separadamente la del númerador y la del denominador, ó bien se convierten primero los dos términos en decimales y se extrae la raíz de cada uno conforme á la regla de este caso. Para extraer la raíz cuadrada de los números mixtos, se procede transformándolos también previamente en decimales.

Ejemplos:

$$\sqrt{\tfrac{16}{49}}=\tfrac{4}{7};\ \sqrt{\tfrac{5}{8}}=\sqrt{0.625}=0.79;\ \sqrt{4\tfrac{1}{3}}=\sqrt{4.3333}=2.08.$$

Cuando sólo uno de los términos del quebrado tiene raíz exacta, se le extrae al que la tenga, y la otra se aproxima. El resultado de esta operación produce un quebrado, que tiene uno de sus términos entero y el otro decimal, que puede convertirse en una fracción común conforme á las reglas prescritas para esta clase de valores:

$$\sqrt{\tfrac{16}{58}}=\tfrac{4}{7.61}=\tfrac{400}{761}.$$

Cuando ninguno de los dos términos tiene raíz exacta, se multiplican bien sea por el numerador ó por el denominador, con el objeto de que uno de los dos resulte un cuadrado perfecto, y el caso queda reducido entonces al anterior.

$$\sqrt{\tfrac{5}{7}} = \sqrt{\tfrac{35}{49}} = \frac{5.91}{7} = \frac{591}{700}.$$

Se llama *cubo* ó *tercera potencia* de un número, el producto que resulta de multiplicarlo dos veces por *sí* mismo; ó en otros términos, el producto que resulta de multiplicarlo por su cuadrado; 216 es el cubo de 6, porque $6 \times 6 \times 6$, ó $6^2 \times 6 = 216$. La elevación al cubo se indica escribiendo el exponente 3 á la derecha y arriba del número: 6^3.

En la elevación de un número al cubo ocurren tres casos: 1°.—Cuando el número es entero;

2°.—Cuando es quebrado, y

3°.—Cuando es decimal.

En el primer caso el cubo es también un número entero y mayor que el número propuesto; en el segundo, es quebrado y menor que el quebrado, y en el tercero si el número consta de enteros y decimales, el cubo resultará un número mixto, cuya parte decimal constará de un número de cifras triple de las que contiene la expresión primitiva, siendo la razón que, en el producto de las decimales, deben separarse tantas cifras como decimales hay en los factores que se usan. En cuanto á valor, el cubo será mayor que el número cuando esté formado de enteros y decimales; y menor, cuando lo esté de simples decimales.

El cubo de un número compuesto de decenas y unidades, consta de cuatro partidas, cuya formación se determina siguiendo el método analítico que se empleó para demostrar las partidas del cuadrado.

Sea, por ejemplo, encontrar el cubo de 25 en términos de sus decenas y unidades.

Operación:—

$$
\begin{array}{lcr}
25^2 & = & 20^2+(2\times 20\times 5)+5^2 \\
25 & = & 20+5 \\
\hline
25^2\times\ 5 & = & 20^2\times 5+2\times 20\times 5^2+5^3 \\
25^2\times 20 & = & 20^3+2+20^2\times 5+20\times 5^2 \qquad \\
\hline
\end{array}
$$

$$25^3=20^3+3\times 20^2\times 5+3\times 20\times 5^2+5^3.$$

De este resultado se deduce que el cubo de un número compuesto de decenas y unidades, es igual al cubo de las decenas, más tres veces el producto del cuadrado de las decenas por las unidades, más tres veces el producto de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.

La distinción de las partidas de que se compone el cubo, tiene por objeto establecer el principio en que se funda la extracción de la raíz cúbica.

Sean ahora los siguientes números y sus cubos:

Números.	Cubos.
1	1
9	729
10	1,000
99	970,299
100	1,000,000
999	997,002,999

Observando en estas dos series de números, la relación que existe entre las potencias de primero y tercer orden de las unidades, decenas, centenas, etc., se reconoce que el cubo de un número está expresado por un número triple de guarismos de los que él contiene originalmente, ó también por uno ó dos menos.

De este principio se infiere que, si un guarismo que expresa un cubo perfecto, se divide en períodos de tres cifras cada uno, comenzando por las unidades, el número de períodos será necesariamente igual al número de cifras que contenga la raíz cúbica del expresado guarismo.

Se llama raíz cúbica de un número, aquel que multiplicado por su cuadrado lo reproduce:

3, 5, 8 son respectivamente las raíces cúbicas de 27, de 125 y de 343, porque $2\times 2^2=27$; $5\times 5^2=125$; $7\times 7^2=343$.

La raíz cúbica de un número se indica escribiéndolo bajo el radical, y el índice 3, en la abertura del signo.

Como la extracción de la raíz cúbica es la operación inversa de la elevación al cubo, se infiere que, para efectuar la operación con un guarismo cualquiera, cuya expresión puede considerarse siempre como el producto más óm enos aproximado de un número elevado á la tercera potencia, bastará determinar en dicho guarismo las partidas del cubo y deducirlas consiguientemente de él. Al efectuarlo así, indudablemente conseguiremos encontrar la base que originó la potencia cuya raíz se busca.

Aplicando los principios antes establecidos, procédase á hacer aplicación de ellos por extraer la raíz cúbica del número 405,-224.

Desde luego, puesto que consta de seis cifras, su raíz cúbica constará de dos, y el guarismo se dividirá en dos períodos. Como 224 no puede formar parte del cubo de las decenas de la raíz, porque decenas cúbicas producen millares, la primera cifra de la raíz que debe expresar decenas, no puede estar contenida en este período; buscándola en el otro, 405, se encuentra que el mayor número de decenas cuyo cubo está contenido en él es 7, que se escribe á la derecha del guarismo como si fuera un divisor, y su cubo 343 se sustrae del primer período 405, con cuya operación se quita del número propuesto el cubo de las decenas. Para determinar las siguientes partidas y deducirlas luego, se baja al lado de la resta 62 el período 224 y con ellos se forma el dividendo 62,224 que expresará el triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades. Pero como el producto del cuadrado de las decenas por las unidades, no puede ser de un orden inferior al de las centenas, se deduce que el número representado por las dos últimas cifras, ó sea 24, no puede formar parte del triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades, y por consiguiente deberá encontrarse en la parte 622; y, como además, es un principio conocido que si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente es el otro factor, resulta que si se dividen 622 centenas por tres veces el cuadrado de 7 decenas, ó sea 147, el cociente 4 que se obtiene expresará las unidades de la raíz exactamente.

Operación.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{405,224} & 74 \\
343 & 147 \\
\hline
62,224. & \\
3\times 70^2\times 4 = 58,800. & \\
3\times 70\times 4^2 = 3,360. & \\
4^3 = 64. & \\
\hline
62,224. &
\end{array}
$$

Determinadas como lo han sido por este medio las decenas y unidades de la raíz, se forman las tres últimas partidas del cubo, y su suma se resta de 62,224 para eliminar todas. Como la resta es 0, se deduce que, el número 74 es la raíz cúbica exacta requerida, porque las partes de que consta se han encontrado determinando las cuatro partidas del cubo del número propuesto, y al sustraerlas sucesivamente de él, no se ha llevado á efecto otra cosa que la de desvanecer la potencia que expresaba bajo el radical.

El cociente que expresa las unidades de la raíz, suele ser á veces mayor que el verdadero, porque procede de un dividendo que contiene las centenas de las otras partidas, lo cual se conoce siempre que la resta es mayor que la suma del triple del cuadrado de la raíz, más el triple de la raíz; debiendo ser lo contrario, puesto que la diferencia de los cubos de dos números consecutivos, es igual á tres veces el cuadrado del menor, más tres veces el número, más la unidad. Cuando ocurre este caso, se procede por tanteos hasta encontrar el cociente verdadero.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para extraer la ráiz cúbica de un número, divídase en periodos de tres cifras cada uno comenzando por las unidades. Búsquese la raíz del mayor cubo contenido en el primer período de la izquierda, que podrá estar compuesto de una, dos, ó tres cifras, y sustráigase este cubo del periodo, agregando á la resta el período siguiente para formar un dividendo. Sepárense los dos guarismos de la derecha de este dividendo y divídanse los que quedan á la izquierda por el triple cuadrado de la raíz hallada, que se considera como decenas, y el cociente que se obtenga será la segunda cifra de la raíz, que se considera como unidades. Fórmense con las decenas y unidades ya encontradas, las tres partidas restantes del cubo y súmense, sustrayendo el resultado de la cantidad formada por la primera resta y el segundo período. Si el guarismo que expresa las unidades, es decir el último cociente, es mayor que el verdadero, la resta no podrá efectuarse; y si es menor, el residuo será mayor que la suma del triple del cuadrado de la raíz. Al lado de la resta bájese el período siguiente, y repítase con el nuevo dividendo y divisor la operación anterior, poniendo el cociente que se encuentre como unidades de la raíz, y réstese la suma que se obtenga de las partidas del cubo de la resta anterior, y el período bajado á su lado. Continúese así la operación hasta el último período, y si la última resta es 0, la cantidad será un cubo perfecto; en caso contrario, la resta expresará el exceso del número propuesto sobre el cubo de la raíz hallada.

Si entre las cifras de la raíz ocurriese un 0, se agregarán otros dos al divisor, y otro período al dividendo, continuando la operación como ya se sabe.

Cuando queda una resta al final de la operación y se la quiere aproximar por decimales, se le agregan tres ceros para obtener la primera cifra decimal de la raíz, y otros tantos á cada uno de los residuos siguientes, según el límite á que se quiera extender la aproximación.

En la extracción de la raíz cúbica de las expresiones compuestas de enteros y decimales, la división preliminar por períodos, debe comenzar en el lugar que ocupa la unidad de enteros á la derecha y á la izquierda de él. Si la parte decimal no consta de un número de cifras que sea múltiplo de 3, se satisface previamente esta condición agregando el número de ceros que sea necesario; y se efectúa en seguida la operación primero con los enteros, cuidando de separar los enteros de las decimales de la raíz al bajar el primer período decimal del guarismo propuesto:

$$\sqrt[3]{5.27} = \sqrt[3]{5.270} = 1.07.$$

Si la cantidad consta sólo de decimales, la operación consiste en hacer que el número de sus cifras sea múltiplo de 3, para lo cual se agregan á su derecha uno ó dos ceros. En seguida se escribe 0 en la raíz, como expresión de la parte entera, y se extrae la raíz de las decimales conforme á la regla de los enteros:

$$\sqrt[3]{0.00345} = 0.151.$$

Para extraer la raíz cúbica de un quebrado, se extraen parcialmente la del numerador y la del denominador, y si ambas son exactas el resultado lo será también:

$$\sqrt[3]{\tfrac{729}{125}} = \tfrac{9}{5}.$$

Cuando sólo uno de los términos tiene raíz exacta, se le extrae, y se aproxima la del otro por decimales, transformando en seguida la fracción decimal que resulta en quebrado común:

$$\sqrt[3]{\tfrac{8}{12}} = \tfrac{2}{2.3} = \tfrac{20}{23}.$$

Cuando ninguno de los dos términos del quebrado tiene raíz exacta, se multiplican ambos por el cuadrado del numerador, en el caso de que se quiera obtener al fin de la operación la aproximación del valor del quebrado por exceso; ó por el cuadrado del denominator, cuando por lo contrario, la aproximación se busque por defecto. Preparado así el quebrado, el caso se convierte en el anterior:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}}=\sqrt[3]{\frac{5\times 6^2}{6\times 6^2}}=\sqrt[3]{\frac{180}{6^3}}=\frac{5.6}{6}=\frac{56}{60}.$$

La extracción de la raíz cubica de los dos términos puede también efectuarse transformándolos previamente en decimales.

Para extraer la raíz cúbica de un número mixto, se reduce éste á quebrado, y luego se extrae la raíz cúbica del quebrado:

$$\sqrt[3]{5\tfrac{3}{7}}=\sqrt[3]{\tfrac{38}{7}}=1.757.$$

Ejercicios escritos.

Determínense las potencias de los siguientes números:

1.—	4.2^2	$(64\frac{1}{2})^2$	$\overline{0.41316}^2$	$(4.07\frac{1}{2})^3$
	7.75^2	$(\frac{11}{62})^3$	6^6	0.0006^5
	0.034^3	0.82^2	7.71^3	$(\frac{7}{8})^4$

Determínense por sus decenas y unidades los cubos de:

25, 38, 215, 52, 108.

Extráigase la raíz cuadrada de:

2.—	9605	$\frac{169}{196}$	0.001,225
	13274	$\frac{625}{6,561}$	196.1369
	9844007	$\frac{576}{18,225}$	10,795.21.

Extráigase la raíz cúbica de:

3.— 15,625	$\frac{1000}{1331}$	0.091125
166,375	$\frac{13824}{15,625}$	12.812,904
4.492,125	$2\frac{7}{8}$	4.408,591.92

Ejercicios orales:

1.—¿ Qué longitud debe tener el lado de un cuadrado cuya superficie mide $2\frac{1}{2}$ caballerías de tierra?

2.—La mitad del cuadrado de un número es igual á 20.808; ¿ cuál es el triple de este número?

3.—La superficie de un jardín es de 1875 varas cuadradas, y su longitud es tres veces mayor que su anchura; ¿ cuál es la longitud y cuál la anchura del jardín?

4.—¿ Cuál es el tamaño del lado de una caja cúbica cuyo volumen es de 46,656 pulgadas cúbicas?

5.—Cuántos pies cuadrados hay en la superficie de un cubo cuyo volumen es igual á 91,125 pies cúbicos?

6.—¿Cuál es la profundidad de un estanque de forma cúbica que contiene 18.934,292 litros de agua?

FIN.