Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 25

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 25.1. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 25.2. Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.3. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.4. Bestimme, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

über dem Körper mit fünf Elementen trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.5.*

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K, seien

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

die Produktabbildung. Zeige, dass φ genau dann trigonalisierbar ist, wenn dies für alle φ_i gilt.

Aufgabe 25.6. Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein trigonalisierbarer Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\varphi)$ ebenfalls trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.7. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und

$$\varphi^* \colon V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung. Zeige, dass φ genau dann trigonalisierbar ist, wenn φ^* trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann trigonalisierbar ist, wenn φ bezüglich einer geeigneten Basis durch eine untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{n-1} & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & a_n \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 25.9.*

Es sei M eine 2×2-Matrix über einem Körper K. Zeige, dass M genau dann trigonalisierbar ist, wenn M einen Eigenvektor besitzt.

Aufgabe 25.10. Zeige dass die Hintereinanderschaltung von zwei diagonalisierbaren Abbildungen im Allgemeinen nicht trigonalisierbar sein muss.

Aufgabe 25.11. Bestimme, ob die Permutationsmatrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.12. Bestimme die Minimalpolynome der (links oben) Untermatrizen zu
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.13. Bestimme, ob die folgende Kette von Untervektorräumen im $\mathbb{R}^3$ eine Fahne ist.
$$V_0 = 0,\, V_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix},\, V_2 = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle,\, V_3 = \mathbb{R}^3 .$$

Aufgabe 25.14. Bestimme, ob die folgende Kette von Untervektorräumen im $\mathbb{R}^3$ eine Fahne ist.
$$V_0 = 0,\, V_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$V_2 = \operatorname{kern} \varphi,$ wobei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch die Matrix $(1,\, 2,\, -2)$ gegeben ist , $V_3 = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 25.15. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass es Fahnen in V gibt.

Aufgabe 25.16.*

Es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n und es seien
$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$
und
$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset W_n = W$$
Fahnen in V bzw. W. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung
$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$
mit
$$\varphi(V_i) = W_i$$
für alle $i = 0, 1, \ldots, n$ gibt.

Aufgabe 25.17. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und V ein zweidimensionaler K-Vektorraum. Bestimme die Anzahl der Fahnen in V.

Aufgabe 25.18. Es sei K der Körper mit drei Elementen und V ein dreidimensionaler K-Vektorraum. Bestimme die Anzahl der Fahnen in V.

Aufgabe 25.19. Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K und es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in V. Zeige, dass die

$$W_i := V_{n-i}^{\perp}$$

eine Fahne im Dualraum V^* bilden.

Aufgabe 25.20. Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Wir betrachten V als reellen Vektorraum der reellen Dimension $2n$. Zeige, dass es reelle Untervektorräume

$$W_i \subseteq V$$

derart gibt, dass

$$0 \subset W_1 \subset V_1 \subset W_2 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset W_n \subset V_n$$

eine reelle Fahne ist.

Aufgabe 25.21.*

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K. Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in V. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

derart gibt, dass diese Fahne die einzige φ-invariante Fahne ist.

Aufgabe 25.22.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über einem Körper K.

a) Zeige, dass es eine zu M ähnliche Matrix gibt, in der mindestens ein Eintrag gleich 0 ist.

b) Zeige, dass es nicht unbedingt eine zu M ähnliche Matrix geben muss, in der mindestens zwei Einträge gleich 0 sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.23. (4 Punkte)

Trigonalisiere die komplexe Matrix

$$\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 3 \\ 5\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 25.24. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.25. (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.26. (4 Punkte)

Es sei M eine reelle 2×2-Matrix, die über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist. Zeige, dass M über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 25.27. (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über $\mathbb{Q}$, deren Spur gleich 0 sei. Zeige, dass es eine zu M ähnliche Matrix N der Gestalt

$$N = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

gibt.