

Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 23

Fourierreihen

Unter den periodischen Funktionen spielen die trigonometrischen Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ bzw. die komplexe Exponentialfunktion e^{iz} eine besondere Rolle, die die Periode 2π haben. Neben diesen enthält man weitere periodische Funktionen, indem man das Argument x bzw. z durch ganzzahlige Vielfache nx bzw. nz ersetzt. Diese haben die kleineren Perioden $\frac{2\pi}{n}$, aber 2π bleibt eine Periode. Im Rahmen der Fourieranalysis (man spricht auch von harmonischer Analysis) möchte man periodische Funktionen als Reihen von trigonometrischen Funktionen darstellen. Eine periodische Funktion mit Periode T ist vollständig bestimmt durch ihren Verlauf auf dem Intervall $[0, T[$. Wir arbeiten im Kontext von Hilberträumen und insbesondere in $L^2([0, T])$, der Übergang vom halboffenen zum abgeschlossen Intervall ist für diesen Funktionenraum unerheblich. Besonders wichtig sind die Periodenlängen 1 und 2π , wir werden zumeist eine beliebige Periodenlänge T zulassen und dann $\omega = \frac{2\pi}{T}$ setzen.

Die Funktionen $e^{\frac{2\pi}{T}int}$ sind auf $[0, T]$ quadratintegrierbar, wie sofort aus der Beschränktheit folgt. Daher sichert Lemma 21.3, dass die folgenden Definitionen sinnvoll sind. Insbesondere kann man sie auf messbare beschränkte periodische Funktionen und auf stückweise stetige Funktionen auf $[0, T]$ anwenden.

DEFINITION 23.1. Es sei $T > 0$ und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf $[0, T]$ quadratintegrierbare T -periodische Funktion. Dann nennt man (zu $n \in \mathbb{Z}$)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T}nt} dt$$

den n -ten (komplexen) *Fourierkoeffizienten*.

Bis auf den Vorfaktor ist dieser Koeffizient gleich dem L^2 -Skalarprodukt $\langle f, e^{\frac{2\pi}{T}nt} \rangle = \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi}{T}nt} dt$.

DEFINITION 23.2. Es sei $T > 0$ und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf $[0, T]$ quadratintegrierbare T -periodische Funktion. Dann nennt man (zu $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}_+$ für die b -Koeffizienten)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt$$

2

und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt$$

die n -ten (reellen) *Fourierkoeffizienten*.

Nur wenn f reellwertig ist sind die Koeffizienten a_n bzw. b_n reell, die Koeffizienten c_n sind auch in diesem Fall nicht reell.

LEMMA 23.3. *Es sei $T > 0$ und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf $[0, T]$ quadratintegrierbare T -periodische Funktion. Dann besteht zwischen den reellen und den komplexen Fourierkoeffizienten von f die Beziehungen*

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

$$a_0 = 2c_0,$$

$$a_n = c_n + c_{-n},$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Beweis. Unter Verwendung von Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (1) ist

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T}nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{T}nt\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{T}nt\right) \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(-\frac{2\pi}{T}nt\right) dt + \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(-\frac{2\pi}{T}nt\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt - \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt. \end{aligned}$$

Bei $n \geq 0$ ist dies $\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}ib_n$, bei $n < 0$ muss man zum Negativen übergehen und noch einmal Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (3) verwenden. \square

LEMMA 23.4. *Es sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann bildet die Familie*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\omega nx}$$

zu $n \in \mathbb{Z}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum $L^2([0, T], \mathbb{C})$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
 \langle f_m, f_n \rangle &= \int_0^T f_m \overline{f_n} dx \\
 &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i m x} \frac{1}{\sqrt{T}} \overline{e^{\omega i n x}} dx \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\omega i m x} e^{-\omega i n x} dx \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\omega i (m-n)x} dx.
 \end{aligned}$$

Bei $m = n$ ist dies

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^0 dx = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dx = 1.$$

Bei $m \neq n$ ist dies

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^T e^{\omega i (m-n)x} dx &= \frac{1}{T \omega i (m-n)} (e^{\omega i (m-n)x}) \Big|_0^T \\
 &= \frac{1}{2\pi i (m-n)} (e^{T \omega i (m-n)} - e^0) \\
 &= \frac{1}{2\pi i (m-n)} (e^{2\pi i (m-n)} - e^0) \\
 &= \frac{1}{2\pi i (m-n)} (1 - 1) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

LEMMA 23.5. *Es sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann besteht die von den*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n x}$$

zu $n \in \mathbb{Z}$ erzeugte \mathbb{C} -Algebra aus allen endlichen Summen $\sum_n r_n f_n$. Diese Algebra enthält mit jeder Funktion auch ihre komplex-konjugierte Funktion und trennt die Punkte aus $[0, T[$.

Beweis. Wegen

$$f_m f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i m x} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n x} = \frac{1}{T} e^{\omega i (m+n)x}$$

ist die Familie (bis auf den skalaren Vorfaktor) unter Multiplikation abgeschlossen. Daher sind die endlichen Linearkombinationen der f_n auch multiplikativ abgeschlossen und bilden eine \mathbb{C} -Algebra, der Fall $n = 0$ sichert, dass auch die Konstanten dazu gehören. Wegen

$$\overline{f_n} = f_{-n}$$

ist die Algebra auch unter komplexer Konjugation abgeschlossen. Die Trennung ist allein schon durch die Funktion $e^{i\omega x}$ gesichert. □

Ausdrücke der Form

$$\sum_n r_n f_n = \sum_n \frac{r_n}{\sqrt{T}} e^{\omega i n z}$$

zu einer endlichem Indexmenge nennt man auch *trigonometrische Polynome*. Zumeist schreibt man sie als $\sum_{n=-N}^N \frac{r_n}{\sqrt{T}} e^{\omega i n z}$.

SATZ 23.6. *Es sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann bildet die Familie*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n x}$$

zu $n \in \mathbb{Z}$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum

$$L^2([0, T], \mathbb{C}).$$

Beweis. Die Orthonormalitätsrelationen wurden in Lemma 23.4 gezeigt. Nach Lemma 23.5 ist die von den $e^{\omega i n x}$ erzeugte Algebra punktetrennend und stimmt mit dem erzeugten Vektorraum überein. Nach dem komplexen Satz von Stone-Weierstrass gibt es zu jeder stetigen Funktion

$$h: [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$$

und jedem $\epsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom p mit

$$|h(x) - p(x)| \leq \epsilon$$

für alle x . Die entsprechende Approximationseigenschaft gilt dann auch in der L^2 -Norm. Die beschriebene Algebra ist also dicht in $C([0, T], \mathbb{C}) \subseteq L^2([0, T], \mathbb{C})$. Nach Korollar 20.10 ist die Algebra dann auch dicht in

$$L^2([0, T], \mathbb{C}).$$

□

Aus Satz 23.6 folgt mit Satz 22.10, dass jede quadratintegrierbare Funktion

$$f: [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$$

eine konvergente Darstellung

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle f_n, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n t} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n t}$$

besitzt, die Konvergenz ist dabei im Sinne der L^2 -Norm zu verstehen. Im Allgemeinen liegt keine punktweise Konvergenz vor. Es ist

$$\begin{aligned} \left\langle f_n, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n t} \right\rangle &= \int_0^T f(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-\omega i n t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{-\omega i n t} dt \end{aligned}$$

und somit

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(t) e^{-\omega i n t} dt \right) e^{\omega i n t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\omega i n t}$$

mit den komplexen Fourierkoeffizienten c_n . Diese beziehen sich also nicht unmittelbar auf das Orthonormalsystem, sondern auf eine skalierte Version davon. Die Darstellung $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$ nennt man die *Fourierreihe* zu f , auch wenn über \mathbb{Z} aufsummiert wird. Man spricht auch von der *Fourierentwicklung*. Die Umformung

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\omega n t} &= c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} (c_n e^{\omega n t} + c_{-n} e^{-\omega n t}) \\ &= c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} (c_n (\cos \omega n t + i \sin \omega n t) + c_{-n} (\cos \omega n t - i \sin \omega n t)) \\ &= c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} ((c_n + c_{-n}) \cos \omega n t + i(c_n - c_{-n}) \sin \omega n t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} a_n \cos \omega n t + b_n \sin \omega n t \end{aligned}$$

unter Verwendung von Lemma 23.3 ergibt die Darstellung mit den reellen Koeffizienten.

SATZ 23.7. *Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine periodische stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig und insbesondere punktweise gegen f .*

Beweis. Es sei 2π die Periodenlänge. Die stückweise existierende Ableitung von f ist stückweise stetig und ebenfalls periodisch, daher gibt es eine Fourierentwicklung

$$f' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{int}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-itn} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(f(t) e^{-itn} \Big|_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-itn} \right) \\ &= in c_n. \end{aligned}$$

Es ist

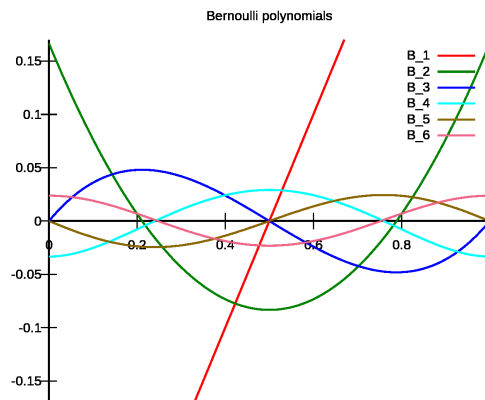
$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = \sum_{n \neq 0} \frac{|d_n|}{|n|} \leq \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \left(|d_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

wobei die Abschätzung rechts summandenweise auf $(|d_n| - \frac{1}{n})^2 \geq 0$ beruht. Nach der Besselschen Abschätzung sind die Betragsquadrate $|d_n|^2$ summierbar und nach Beispiel 9.12 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) sind die Quadrate der Stammbrüche summierbar und somit sind die Beträge der Fourierkoeffizienten zu f summierbar. Da die Beträge der Exponentialfunktionen e^{int} auf $[0, 2\pi]$ durch 1 beschränkt sind, ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz aus Satz 16.6 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). \square

Auch wenn f nur stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, liegt auf jedem Teilintervall ohne Sprungstellen gleichmäßige Konvergenz vor.

Bernoulli-Polynome

Jedes Polynom kann man auf $[0, 1[$ einschränken und dann 1-periodisch fortsetzen. Wir wollen verstehen, wie die zugehörigen Fourierreihen aussehen. Die Bernoulli-Polynome B_n , $n \in \mathbb{N}$, bilden eine Familie von normierten Polynomen vom Grad n mit vergleichsweise übersichtlichen Fourierreihen. Aus diesen kann man die Fourierreihe zu jedem Polynom linear berechnen.



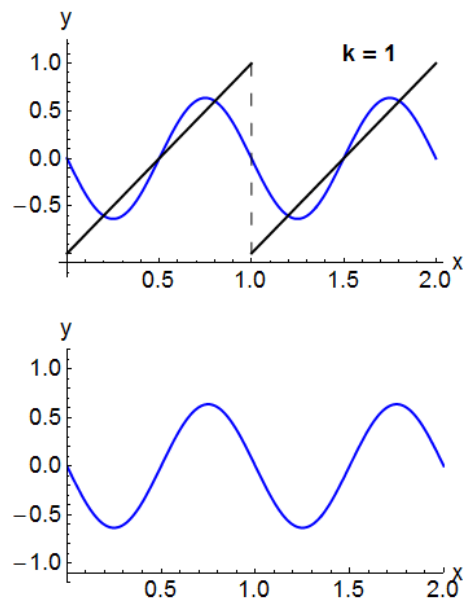
DEFINITION 23.8. Die *Bernoulli-Polynome* B_n für $n \in \mathbb{N}$ sind Polynome vom Grad n , die rekursiv definiert werden: B_0 ist das konstante Polynom mit dem Wert 1 und Polynom B_{n+1} ist durch die beiden Bedingungen festgelegt: B_{n+1} ist eine Stammfunktion von $(n+1)B_n$ und es ist

$$\int_0^1 B_{n+1}(x) dx = 0.$$

Die ersten Bernoulli-Polynome lauten.

$$\begin{aligned} B_0(t) &= 1, \\ B_1(t) &= t - \frac{1}{2}, \\ B_2(t) &= t^2 - t + \frac{1}{6}, \\ B_3(t) &= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, \\ B_4(t) &= t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(t) &= t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{6}t, \end{aligned}$$

$$B_6(t) = t^6 - 3t^5 + \frac{5}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{42}.$$



LEMMA 23.9. Die Identität auf dem Einheitsintervall (die Sägezahnfunktion) besitzt die Fourierreihe

$$t = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n}.$$

Beweis. Mit partieller Integration ist für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 t e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \frac{i}{2\pi n} t e^{-2\pi i n t} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{i}{2\pi n} e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \frac{i}{2\pi n}, \end{aligned}$$

da der hintere Integrand eine periodische Stammfunktion besitzt. Ferner ist $c_0 = \frac{1}{2}$. Somit ist gemäß Lemma 23.3 $a_n = c_n + c_{-n} = 0$ und

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i\left(\frac{i}{2\pi n} - \frac{i}{2\pi(-n)}\right) = -\frac{1}{\pi n}.$$

Die Fourierreihe ist also

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{2\pi n} e^{2\pi i n t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n}.$$

□

SATZ 23.10. Die Bernoulli-Polynome besitzen auf dem Einheitsintervall die folgenden Darstellungen als Fourierreihen.

$$B_{2k}(t) = 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^{2k}}$$

im geraden Fall ($k \geq 1$) und

$$B_{2k+1}(t) = 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n^{2k+1}}$$

im ungeraden Fall.

Beweis. Es seien F_{2k} bzw. F_{2k+1} die rechten Seiten der Gleichung. Wir zeigen, dass diese die gleichen Rekursionen wie die Bernoulli-Polynome erfüllen und daher mit diesen übereinstimmen müssen. Zunächst ist

$$F_1(t) = 2 \cdot (-1) \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n} = t - \frac{1}{2} = B_1(t)$$

nach Lemma 23.9. Es ist

$$\begin{aligned} F'_{2k} &= 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^{2k}} \right)' \\ &= 2 \cdot (-1)^k \frac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n^{2k-1}} \\ &= (2k)F_{2k-1}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F'_{2k+1} &= 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n^{2k+1}} \right)' \\ &= 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^{2k}} \\ &= (2k+1)F_{2k}. \end{aligned}$$

Ferner ist $F_{2k}(0) = F_{2k}(1)$ und $F_{2k+1}(0) = F_{2k+1}(1) = 0$, woraus die Normierungseigenschaft über das Integral folgt. □

KOROLLAR 23.11. Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweis. Satz 23.10 für $k = 1$ besagt

$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^2},$$

wobei Konvergenz im Sinne der L^2 -Norm vorliegt. Wegen

$$B_2(0) = B_2(1)$$

kann man Satz 23.7 anwenden, die Konvergenz liegt also auch punktweise vor. Für $t = 0$ ergibt dies

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Bernoulli polynomials.svg , Autor = Benutzer Linas auf en.
Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 6
- Quelle = Sawtooth Fourier Animation.gif , Autor = Benutzer 4dhayman
auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 7
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor
bzw. Hochlader und der Lizenz. 11
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 11