ABRAHAM COHEN, PH.D. 著

微分方程初步

鄭桐蓀譯

世界書局印行

中華民國二十一年十月初版
中華民國三十六年九月再版

微分方程初步（全一冊）
（每冊定價十四元）
（外埠酌加郵費匯費）

著者 Abraham Cohen
譯者 鄭桐蓀
出版者 世界書局
印刷兼發行者 上海大連灣路 世界書局

發行所 上海四馬路暨各省 世界書局

原　　序

本書係就著者多年教授之所講編輯而成.所敎學生有屬工程系者,有屬物理學系者,亦有屬純理數學或物理數學系者,其類別之所包大致如此.

本書之目的乃在使學者對於多數習見之方程能應用解題之原則與方法.列法雖多,但在已習微積分一年之學生,應卽可以領悟而無困難;且應足使其對於許多缺少關係之方法,得有融會貫通之了解.著者之意,蓋頗思將此書成爲種參考手書而同時不失其爲敎科書之功用.文中時插按語或註語,蓋不欲使一問題之討論受間斷之影響也.同時此種註案所舉當可與學者以不少之興趣與利益.此外尙有許多歷史方面之註,於學者亦應有益.

如課程所包括,因受時間與目的之限制而範圍稍狹,則12,15 17, 22, 28, (小字部份), 33, 38−40, 46−48, 66−69(例題除外), 70, 71. 73, 75, 78, 80, 81, 諸節不妨從略,此中多節,本應稍爲完備之課程而設也.取捨標準可視時間與需要而加以酌定.

著者對於許多方程之可用初淺方法解出者,頗時注意於其方程式樣之歸類及其解題方法之減少.爲令學者得鈎要之益計於每章之末,均附一本章提要,全書之末又附一總提要.

幾何及物理方面應用之題,在本文及習題之中引用頗不少.

多數習題雖曾見用於他書,然新製之題亦復不少.且題之選擇皆以能指示微分方程與積分之種種解法為目的.已演之題於積分之求法指實多.緣積分表雖應備用,學者固亦宜具不必依賴此表之能力也.題之解案形式多屬簡易,然涵義却每具有深趣.校對一端管極注重,倘仍見誤,希用者不吝見告為盼.

用待定係數法以求常係數線性方程之特別積分,據著者所知,採用之備當以此書為始.

偏微分方程之問題太多,故本書僅擇要討論數端.至其範圍所包括,著者頗望於讀此書者之程度所需,足用有餘.

著者原頗思將李氏理論[1]加入一章,實經許多考慮而始棄初衷付之缺如.著者今意頗思將此重要問題專撰一書,以應學界需要.

著者對於麥省工業專門學校胡慈教授,阿哀惡滑大學韋爾特教授及意利諾大學湯孫教授[2],頗感其種種建議之惠,謹於簡端鄭重致謝.

一九〇六年十月馬來倫州,鮑底麻城,約翰霍布金大學柯痕亞伯拉罕[3]識.

---

1 Lie Theory.

2 Professor F. S. Woods of the Massachusetts Institute of Technology, Professor L. G. Weld of the University of Iowa and Professor E. J. Townsend of the University of Illinois.

3 Abraham Cohan, Johns Hoykins University, Baltimore, Maryland.

譯者誌言

柯痕此書,出版已二十餘年,而行銷益廣,蓋其說理明顯,實有便於初學之處.譯述之意即在介紹其適用爲課本.若欲作專門之攻讀,則自有深博之專書足供研究,固非範圍只限於初步之課本,所能任此.所譯版本係修正本,與初版比,除數處小有更動外,其餘絕少差別.

爲欲使譯本可與原書有並充課本之用,故排印頁次悉照原書.爲使讀者閱覽起見,正文之中甚少插入西字,遇需要時則加入角註,而載其西文於頁底.惟所引參考之人名書名,則概不加以翻譯,蓋能讀參考書者,西文程度已充足,固無賴乎再爲翻譯也.原書在小節上,本非絕無可以改善之處,茲因爲保全原書式樣並守忠實譯職起見,譯本排印格式,一律悉遵原書之舊.其有必須解釋之處,則亦用角註以補充其義.有時亦或就角註引述原文以資學者之參讀.

書後添增錄一門,其中所述,或錄引別法以便會通,或別論新題以補未備.作參考用可,作教材用亦可.

初次付印,訛誤難免.倘荷大雅指正,則感甚幸甚.

一九三一年譯者誌於清華園

目　　錄

第 一 章

微分方程及其解案 Differential Equations and their Solutions

第 二 章

一級一次之微分方程 Differential Equations of the First Order and First Degree

第三章

應用 Applications

第四章

一級高次之微分方程 Differential Equations of the First Order and Higher Degree than the First.

第五章

異解 Singular Solutions

第六章

全微分方程 Total Differential Equations

第七章

常係數線性微分方程 Linear Differential Equations with Constants Coefficients

第八章

二級線性微分方程 Linear Differential Equations of the Second Order

第九章

解一級以上高級方程之雜法 Miscellaneous Methods for Solving Equations of Higher Order than the First

第十章

聯立方程組 Systems of Simultaneous Equations

第十一章

以級數求積分法 Integration in Series

第十二章

偏微分方程 Partial Differential Equations

第十三章

一級偏微分方程 Partial Differential Equations of the First Order

第十四章

高級偏微分方程 Partial Differential Equations of Higher Order than the First

附　錄 Notes

微分方程

第一章

微分方程及其解案[1]

1. 微分方程. 常微分方程與偏微分[2]方程. 級與次[3]. 凡包含微分或微係數[4]之方程皆曰微分方程.下列其七例也.

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=o,$$

(2) $$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=x^2+y^2,$$

(3) $$y-x\frac{dy}{dx}+3\frac{dx}{dy}=o,$$

(4) $$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-k=o,$$

(5) $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=o,$$

(6) $$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+zx\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=xyz,$$

(7) $$x^2y^3dx+x^3y^2dy=o.$$

凡方程祇含一自變數者(故亦祇含一尋常微係數),稱曰常微分方程.上列(1),(2),(3),(4),(7)皆屬此類.

如方程中自變數不止一個,因之而式中含有偏微分者,稱曰偏微分方程.上列(5),(6)屬於此類.

---

1 解案 solutions, 亦曰答案,曰解,曰答.

2 偏微分 partial differential equation

3 級與次 Order, Degree.

4 微係數 differential coefficient 即 derivative. 後者譯稱紀數,引數,導微函數,導數等等.本書爲避用後者譯名起見,時以微係數代之.如不礙文義,有時竟以微分代之.

方程之級,視其所含微係數之等級而定.例如上列(2),(3),(5),(7)諸式皆屬一級,(1),(4),(6)諸式則屬二級.

方程之次,視其化爲有理式且已化去分數式時所含高級微係數之次數而定.上列(1),(5),(6),(7)諸式皆屬一次,(2),(3),(4)諸式則屬二次.

2. 方程之解案. 凡一種自變數與應變數[1]之關係能適合一微分方程式者,即爲後式之解案.例如 $y=\sin ax$ 爲(1)之解案,$x^2+y^2=\frac{1}{k^2}$ 爲(4)之解案,$z=x+y$ 爲(5)之解案,$x^2y^3=1$ 爲(7)之解案(學者宜取各解一一自驗之).

吾人於此,須注意一微分方程之解案,爲式可多至無限.例如 $y=2\sin ax$, $y=6\cos ax$, $y=A\cos ax+B\sin ax$(A與B爲兩個任意常數)皆易證其爲(1)之解案.按吾人由推求積分經驗,已有求出積分後加一常數之習慣,故謂 $\cos x$ 之積分爲 $\sin x+c$.今按積分之推求本不過解答微分方程之一特例.由前而言,吾人謂 $\int\cos x\,dx$ 者乃意欲推求一函數(即 $\sin x+c$),其微係數須恰爲 $\cos x$.由後而言,吾人稱 $\frac{dy}{dx}=\cos x$ 之解爲 $y=\sin x+c$,內中 c 爲一任意常數.*

凡解中常數可隨意予以一值者,謂之任意常數[3].例如 $y=\sin x+c$ 恆爲

*按在積分式中常數之發現均屬加式[4]但在微分方程解案中,常數與變數之關係錯綜不一,其法無限.

---

1 應變數 dependent variable, 亦曰因變數,曰倚變數.

2 適合 satisfy, 亦曰滿足.

3 任意常數 arbitray constant, 亦曰隨意常數.

4 加式 additive.

$\frac{dy}{dx}=\cos x$ 之解,不論 c 之所含為何值也.又如 $y=A\cos ax+B\sin ax$ 恆為 (1) 之解,不問 A 與 B 之值為何物也.凡似此之常數謂之任意常數.反之,(1) 中之 a 不得謂之任意常數.緣在 (1) 式之中,a 之值雖可隨意指定,但既定之後值即不能復變,且 a 在解中除此值之外,不能再取他值.

是故就微分方程而論*,解案之中可有一個或多個之任意常數.雖然,此常數之至多數究應為若干數耶,吾人應先討論之.

3. 由根式[1]求微分方程. 譬由微分求積分係一逆推之問題,故由微分方程以求解案亦屬一逆推問題,今之所求蓋為一組變數的關係(內中或含一個或含多個任意常數)可適合於所論之微分方程.為使此問題明確起見,茲將所論之微分方程指定為上述變數關係所適合之最低級微分方程而又不含任意常數之一類.例如 $y=A\cos x$ (內 A 係一任意常數)可適合於 $\frac{dy}{dx}+y\tan x=0$, 亦合於 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, 及 $\frac{d^3y}{dx^3}-y\tan x=0$ 等式,但吾人祇以 $\frac{dy}{dx}+y\tan x=0$ 為 $y=A\cos x$ 之微分方程.

又如 $y=A\cos x+B\sin x$ (A 與 B 為任意常數)適合於 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 及 $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}=0$ 等式,但吾人祇取前式加以討論.

由此推論,凡遇含有 n 個任意常數†之關係,吾人應先求其微

*關於偏微分方程之解案,當於第十二章中詳論之.

†此 n 個任意常數須各為主要的,換言之,須是不能以少於 n 數之常數代替者.例如在 $y=x+a+b$ 中,主要常數實祇一個,因 $a+b$ 實僅等於一個常數也.又如 ae^{x+b} 實與 ae^x 同類,其中任意常數實祇一個.

---

1 根式 primitive, 亦曰原式.

分至 n 次,合根式共得 $n+1$ 個方程,由此將原有之 n 個常數消去,因以求其微分方程.由此可見從一個具有 n 個任意常數之關係(此關係後將稱之曰根式)實生一個含有 n 級微分之微分方程.因此中過程[1]並無兩可情形之發生,故知由一根式祇能生一個微分方程.職是故知,從一個含有 n 個任意常數之根式生出一個 n 級微分方程之說,確證雖尚未備,理固可先取信焉.

下列爲由根式求微分方程之兩例:——

習題 1. $y=c_1e^{\alpha_1x}+c_2e^{\alpha_2x}$, 內 c_1 及 c_2 爲任意常數.

求微分,得 $$\frac{dy}{dx}=\alpha_1c_1e^{\alpha_1x}+\alpha_2c_2e^{\alpha_2x},$$

及 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha_2^2c_1e^{\alpha_1x}+\alpha_2^2c_2e^{\alpha_2x},$$

將三式視爲 $1, c_1e^{\alpha_1x}, c_2c^{\alpha_2x}$ 之齊次方程[2],得消去 c_1 及 c_2 之結果爲

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ \frac{dy}{dx} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \frac{d^2y}{dx^2} & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}=0, \text{即} \frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha_1+\alpha_2)\frac{dy}{dx}+\alpha_1\alpha_2y=0.$$

習題 2. $(x-c)^2+y^2=r^2$ 內 c 爲任意常數.

求微分得 $(x-c)+y\frac{dy}{dx}=0$, 即 $x-c=-y\frac{dy}{dx}$ 代入根式以消 c, 得結果爲

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=r^2.$$

---

1 過程 process.

2 齊次方程 homogeneous equation.

習題 3. $y=cx+\sqrt{1-c^2}$.

習題 4. $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$.

習題 5 $y=c_1x^2+c_2$.

習題 6. $y^2+c_1x=0$.

習題 7 $x^2=2cy+c^2$.

4. **通解,特解**[1]. 設由微分方程回求解案,則見解之具有最多任意常數者,即爲由此可生本微分方程之根式.按3節原理,解中任意常數不能過於 n.非特如此,其數且應恰爲 n,蓋苟不如是,則其根式應爲低一級微分方程之解案也.

具有最多任意常數之解案謂之通解*(亦曰全解[1]).由存在定理[2],吾人可證下述理:——凡一 n 級常微分方程之通解均爲一具有 n 個任意常數之根式.

吾人須注意通解形式雖不一致,其中變數關係却皆相同,故在實際仍可謂祇有一解.例如(7)之解爲 $x^3y^3=c$,亦爲 $\log x+\log y=c$,亦爲 $\log xy=c$,而皆實等於云(7)之解爲 xy 等於一常數.按通解之具純一性質[3],實爲存在定理之一部.

凡解,可由令通解中任意常數取一種定值而得者,謂之特解例如 $y=\cos x$ 及 $y=\cos x-\sin x$ 皆爲 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 之特解

*按一方程之解案,在以下諸章中,將見尚有可以絕異於通解之解案.在存在定理中所謂每一微分方程在相當限制之下[4]均有一解的理論之中,其所謂解實係本節之通解.

---

1 通解,特解 general, particular solution. 全解 complete solution.

2 存在定理 general existence theorem.

3 純一性質 uniqueness.

4 相當限制之下 under certain restrictions.

2 節嘗云微分方程之問題,包括積分問題在內.後者問題蓋關於解通式

$$\frac{dy}{dx}=f(x).$$

然此實不過微分方程解題之一個特例,蓋後者所解實爲一種通式如

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

內$f(x,y)$時爲一具有兩個變數之函數.通常習慣,對於解微分方程之問題稱之曰解方程或曰求積分,對於解積分式之單純工作稱之曰求積[1].

一自變數之函數,代入方程中應變數之後,可得一解案者稱爲方程之積分.積分有通有特(即普通積分及特別積分),視其解案之爲通解或特解而定之.

由根式以求微分方程,所需手續不過求微分與消常數二事,故其方法不難沿一通則[2]以進展;但求一微分方程之通解,譬諸解決他種逆推之問題,不能依一通則以求解.

在以下諸章中,本書將取多種可求解案之方程,分類列論,以便學習.

凡微分方程問題變爲一求積問題後(即祇餘一據求積分式手續之謂),吾人即視問題爲已解決.同時吾人須知在微積分學說之中,函數皆有積分之理已曾證明;惟其積分有時不能以式表示.凡遇此類情形時,吾人祇能以將題化至最後求積方式,爲已完備吾人解題之手續.

---

1 求積 quadrature 或曰直求積分.

2 通則 general plan.

第 二 章

一級一次微分方程

5　正合[1]微分方程. 積分因子[2]. 凡一級一次之微分方程可書爲

(1) $$Mdx+Ndy=0,$$

內 M 與 N 爲 x 與 y 之函數.

由每一微分方程必有一解之理論(70節),知上式之解應含一任意常數.將其常數解出,其相當式可令爲

(2) $$u(x,y)=C.$$

此根式之微分方程顯見其爲

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0.$$

此式應與(1)式相同,故兩式之係數應成比例,此卽言

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N}.$$

設令其比爲 μ(此 μ 至多爲 x 與 y 之函數[3]),則有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu M,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu N.$$

故 $$\mu(Mdx+Ndy)=du.$$

---

1 正合 exact, 亦曰適合,曰恰合,曰確合.

2 積分因子 integrating factor, 因子亦曰因數.

3 本文猶言此 μ 一式亦可爲常數,亦可爲 x 與 y 之函數.函數 function, 亦曰倚數.

凡由函數(不問其所含變數爲一個抑爲多個)直接求得之微分謂之正合微分[1],如上節之$\mu(Mdx+Ndy)$卽其一例蓋此卽u之正合微分也.凡微分方程各項盡遷左端後,所成之式爲正合微分者謂之正合微分方程.依此定義,本節所論可重述如下:設(1)式通解之存在已認爲存立,吾人必可推求一因子如$\mu(x,y)$將其引入以後,可使其式成爲一正合方程.

此因子名曰積分因子,因引入以後,方程成爲正合式,其積分由是卽易求得也(8節).

按一級一次微分方程之積分因子其數無限[2].

設μ爲一積分因子,則有

$$\mu(Mdx+Ndy)\equiv du(x,y)$$

內中符號$\equiv$,即云$\mu M=\frac{\partial u}{\partial x}$及$\mu N=\frac{\partial u}{\partial y}$之意.

今式$\phi(u)$爲u的一個連續函數[3],則有

$$\mu\phi(u)Mdx+\mu\phi(u)Ndy=\phi(u)\frac{\partial u}{\partial x}dx+\phi(u)\frac{\partial u}{\partial y}dy\equiv d\psi(u)=d\psi(x,y),$$

內設 $$\frac{d\psi(u)}{du}=\phi(u),\ \text{卽}\ \psi(u)=\int\phi(u)du.$$

由是故知$\mu\phi(u)$亦爲一積分因子.但$\phi(u)$之選擇其式無限,吾人故云,積分因子,其數亦無限也.[此理在7節例中及80節文中,均另有證明.]例如由察閱[4]方程,即知$\frac{1}{x^2}$爲$xdy-ydx=0$之一個積分因子,蓋$\frac{xdy-ydx}{x^2}\equiv d\left(\frac{y}{x}\right)$,內中$\mu=\frac{1}{x^2}$, $u=\frac{y}{x}$.但$\frac{1}{x^2}$若爲一積分因子,則$\frac{1}{x^2}\phi\left(\frac{y}{x}\right)$亦爲積分因子.若令$\phi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y}$,則由引用積分因子$\frac{1}{x^2}\frac{x}{y}$卽$\frac{1}{xy}$後,方程左端化爲$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}$而實等於$d\left(\log\frac{y}{x}\right)$也.同樣,若令$\phi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2}{y^2}$,則由$\frac{1}{x^2}\frac{x^2}{y^2}$卽$\frac{1}{y^2}$積分因子之引用,吾人得上式之左端等於$d\left(-\frac{x}{y}\right)$.

---

1 正合微分 exact differential.

2 無限 indefinite 或曰無定.

3 連續函數 continuous function 或曰綿續函數.

4 察閱 inspection 或曰視察.

6 **解題通則**[1]. 凡一級一次微分方程可由初淺方法解出者,既皆有積分因子,吾人或將謂凡遇此類問題時,俱將由先求積分因子以謀解題之一途.按諸實際,此法不定可能且亦不盡合宜.本章以下各節所舉乃一級一次微分方程之較爲重要較爲習見而皆可以用初淺方法解出者;至其解之之法,大都或先求其積分因子,或先變換其形至一可求積分因子之新式.

7. **方程爲正合之條件**[2]. 設所遇方程已屬正合,則積分因子之推求一步可以從省.故吾人今須先行討論,何者爲正合方程之必要與充分[3]條件.設

(1) $$Mdx+Ndy=0$$

爲一正合方程,卽 $Mdx+Ndy$ 爲一函數之微分,則

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M,\ \frac{\partial u}{\partial y}=N,$$

因 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$,* 故知

(2) $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

此卽(1)式正合之必要條件也.

吾人今當更進而證此種條件亦屬充分.非特如是,吾人更將證明(2)式若成立,實際上吾人確可求得一個 u 函數,其微分爲 $Mdx+Ndy$, 換言之,卽吾人確可求得一 u 函數,具有下列關係.

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x}=M,\ \frac{\partial u}{\partial y}=N.$$

*M 與 N 皆假定具有連續性,且 $\frac{\partial M}{\partial y}$ 與 $\frac{\partial N}{\partial x}$ 亦俱假定其存在而亦具有連續性.

1 通則 general plan.

2 條件 Condition.

3 必要與充分 Necessary and sufficient, 充分亦曰充要.

若(3)之第一方程,可以成立,則吾人必有

(4) $$u=\int^x Mdx+Y(y)^*$$

內 Y 爲一祇含 y 變數之函數,其所處地位與一常數無殊.緣在(4)之積分式中,當求積分之時,y 係視同一常數也.(4)式所得之 u,不論其 Y 爲任何一種之 y 函數,其值均能適合於(3)之第一方程.如欲使此 u 亦復適合於(3)之第二方程,則吾人應有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int^x Mdx+\frac{dY}{dy}=N;$$

換言之,即 Y 應適合於下列方程

(5) $$\frac{dY}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int^x Mdx.$$

但(5)之左端係一祇含 y 之函數,故其右端應復相同;換言之,即右端之中應無 x(或云其中所含應皆對於 x 爲常數).故其 x 的微係數[1]應等於零.按諸實際,此微係數實爲 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$,† 其值因(2)式關係蓋亦恰等於零.因是吾人可由此以得適合於(5)式之 Y 函數,此即

$$Y=\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int^x Mdx\right]dy,$$

且此式用入(4)式後所得之 u 函數,必適合於(3)式.

習題. 由(2)爲正合情形的必要與充分條件之理[2],證 μ 若爲一積分因子(即云 $\mu(Mdx+Ndy)\equiv du$)則 $\mu\phi(u)$ 亦爲一積分因子.

* $\int^x Mdx$ 所表,爲在視 y 爲常數時由 Mdx 所求得之積分.

† $\frac{\partial}{\partial x}\int^x Mdx=M$,其理甚顯,因在左端之兩種運算中(求微分與求積分),y 均常視爲一個常數也.

1 x 的微係數 its derivative with respect to x.

2 原文爲 using the fact that(2) is the necessary and sufficient condition for exactness.

8. 正合微分方程. 由上節吾人得正合微分方程之解法如下.因有 $Mdx+Ndy=du$, 內

$$u=\int^{x}Mdx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{x}Mdx\right]dy,$$

故得通解之式爲

$$\int^{x}Mdx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{x}Mdx\right]dy=c. \tag{6}$$

式中運算手續可述如下:先取 Mdx, 視 y 爲常數而求其積分,得 $\int^{x}Mdx$. 次取所得,求其 y 的微分,與 N 相減,得一單含 y 之函數.求此函數對於 y 的積分,加於 $\int^{x}Mdx$ 之後,卽爲(6)之左端.

按[1].—— $N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{x}Mdx$ 中所含之項與 N 中不含 x 之項常同.因此更得簡法如下:以 y 爲常數求 Mdx 之積分;次取 N 中不含 x 之各項,求其對於 y 的積分.合兩積分之和使等一任意常數,卽成爲正合方程之通解.但按 $\int^{x}Mdx$ 中含有 y 之項,其式並不純一[2],故此法有時而敗(例如 $\int^{x}(x+y)\,dx$ 之積分,可書爲 $\frac{1}{2}x^2+xy$, 亦可書爲 $\frac{1}{2}(x+y)^2$, 參觀本節習題3')雖然,此簡法在實際應用極稱便利,兹故特爲提出,惟吾人用此法時須憶由此所得之結果,應先取以重求微分視其是否合於原式,以免萬一之錯誤.

同法學者可自證正合微分方程之解,亦可書爲

$$\int^{y}Ndy+\int\left[M-\frac{\partial}{\partial x}\int^{y}Ndy\right]dx=c.$$

習題 1. $\dfrac{2xy+1}{y}dx+\dfrac{y-x}{y^2}dy=0.$

因 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2xy+1}{y}\right)=-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y-x}{y^2}\right)$;故知原式係一正合方程.

按 $\int^{x}\dfrac{2xy+1}{y}dx=x^2+\dfrac{x}{y}$, 而 N 中祇有 $\dfrac{1}{y}$ 一項不含 x, 故

1 按 remark.

2 不純 — not unique.

$$\int \frac{1}{y}dy = \log y.$$

$\therefore x^2 + \dfrac{x}{y} + \log y = c$ 爲本題之通解

習題 2. $\dfrac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}dx + \dfrac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}dy = 0$

本題亦係一正合方程,學者可自證其能合於條件

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\int^x \frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}dx = \int^x \frac{(y^2-x^2)-x^2}{x(y^2-x^2)}dx = \int\frac{dx}{x} - \int^x \frac{x}{y^2-x^2}dx =$$

$$\log x + \frac{1}{2}\log(y^2-x^2).$$

初視 N,內中似無不含 x 之項,但若將 N 之式稍加變化,則由 $\dfrac{y^2+(y^2-x^2)}{y(y^2-x^2)} = \dfrac{y}{y^2-x^2} + \dfrac{1}{y}$, 即知內中不含 x 之項,實祇 $\dfrac{1}{y}$ 一項.

$\therefore$ 原式之通解爲 $\log x + \dfrac{1}{2}\log(y^2-x^2) + \log y = c,$

即 $$x^2y^2(y^2-x^2) = c.$$

習題 3. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0.$

學者應自證本題亦爲正合式

若用積分表,則見 $\displaystyle\int^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right).$

N 中不含 x 之項爲 $\dfrac{1}{y}$,故按簡法推求題之通解似可書爲

$$\log\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) + \log y = c$$

然此答却誤,本題之解實應爲

$$\log\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)=c.$$

錯誤之生,實生於$\int^x\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$之積分式中.蓋

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}}=\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)$$

$$=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\log a.$$

在積分表中,$-\log a$一値原可併入常數之中,故自不妨刪去.但在本題之中,則因此項與後來所得積分,有對銷之功用,故一刪一留發生極大之差別,蓋留則結果正確而刪則卽致錯誤.故本節中按語一條,在演題之時務宜謹記也.

習題 4. $(y+x)dx+xdy=0.$

習題 5. $(6x-2y+1)dx+(2y-2x-3)dy=0.$

9. **分離變數及可離變數**[1]. 如M祇爲x之函數,N祇爲y之函數,則$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$之關係顯係成立,此種情形吾人稱爲變數已分離,原式之積分應爲

$$\int M\,dx+\int N\,dy=c.$$

按方程中之變數,亦時可由察閱而知其可以分離.

習題 1. $\sec x\cos^2 y\,dx-\cos x\sin y\,dy=0.$

原式可書爲 $\frac{\sec x}{\cos x}dx-\frac{\sin y}{\cos^2 y}dy=0,$*

卽 $\sec^2 x\,dx-\tan y\sec y\,dy=0.$

故得通解爲 $\tan x-\sec y=c.$

*由察閱易見$\frac{1}{\cos x\cos^2 y}$爲一積分因子.

1 分離變數及可離變數—Variables Separated or Separable.

習題 2　$(1+x)y^2dx-x^3dy=0.$

習題 3.　$2(1-y^2)xydx+(1+x^2)(1+y^2)dy=0.$

習題 4.　$\sin x\cos^2 ydx+\cos^2 xdy=0.$

10. 齊次方程[1]. 有一大類方程,其變數雖不能由察閱而分離,却可由先變換其變數而分離之.此類方程中之 M 與 N 常為 x 與 y 之函數而且係同次.因是,$\frac{M}{N}$ 成一零次[2]的齊次函數,故亦為 $\frac{y}{x}$ 之函數.*

題之原式可書為

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

令 $\frac{y}{x}=v$, 此 v 為一新變數.

則有 $y=vx$,而 $\quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}=F(v),$

即
$$\frac{dv}{F(v)-v}=\frac{dx}{x},$$

內中 v 與 x 兩變數已經分離矣.

求上式積分,將 v 仍變為 $\frac{y}{x}$,即得原式之通解.

*齊次方程之便易界說[3],可述如下:若在 x 與 y 之齊次方程中,將 tx 代替 x, ty 代替 y 後,其式變為原式之 t^r 倍,則原式為 r 次之齊次方程.(此界說可推用於函數之所含變數不止兩個者,其說亦顯與多項式之齊次定義相通.[4])換言之,若 $f(x, y)$ 為一 r 次之齊次函數,則 $f(tx, ty)=t^rf(x, y)$. 若令 $t=\frac{1}{x}$, 則 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^r}f(x, y)$, 即 $f(x, y)=x^rf\left(1, \frac{y}{x}\right)$, 若 $r=0$, 則 $f(x, y)=f\left(1, \frac{y}{x}\right)=F\left(\frac{y}{x}\right)$.

---

1 齊次方程 homogeneous equation.

2 零次 zero degree.

3 便易界說 convenient definition.

4 原文為 it is obviously consistent with the old definition of homogeneity of polynomials.

習題 1. $\left(xe^{\frac{y}{x}}+y\right)dx-x\,dy=0.$

令 $y=vx,\quad dy=v\,dx+x\,dv.$

代入,得 $x(e^v+v)\,dx-xv\,dx-x^2\,dv=0.$

卽 $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{dv}{e^v}=0.$

求積分,得 $\log x+e^{-v}=c$, 卽 $\log x+e^{-\frac{y}{x}}=c.$

習題 2. $2x^2y+3y^3-(x^3+2xy^2)\dfrac{dy}{dx}=0.$

令 $y=vx,\ \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx},$

代入,得 $\dfrac{1+2v^2}{v+v^3}dv-\dfrac{dx}{x}=0,$

卽 $\dfrac{dv}{v}+\dfrac{v\,dv}{1+v^2}-\dfrac{dx}{x}=0.$

求積分,得 $\log v+\dfrac{1}{2}\log(1+v^2)-\log x=k,$

卽 $\log v^2+\log(1+v^2)-\log x^2=2k,$

卽 $\dfrac{v^2(1+v^2)}{x^2}=e^{2k}=c;$

故 $y^2(x^2+y^2)=cx^6.$

習題 3. $(y^2-xy)\,dx+x^2\,dy=0.$

習題 4. $2x^2y+y^3-x^3\dfrac{dy}{dx}=0.$

習題 5. $y^3dx+x^3dy=0.$

習題 6. $\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx-x\cos\dfrac{y}{x}dy=0.$

11. 方程中M,N爲線性式而非齊次者. 如M與N俱爲線性式而非齊次,則由一簡單的變換變數,即可使之變爲齊次.

設方程式爲

$$(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(a_2x+b_2y+c_2)\,dy=0$$

令 $x=x'+\alpha,\ y=y'+\beta$. 則方程式變爲

$$(a_1x'+b_1y'+a_1\alpha+b_1\beta+c_1)dx'+(a_2x'+b_2y'+a_2\alpha+b_2\beta+c_2)dy'=0$$

由
$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0,$$
$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0;$$

求α,β;即令
$$\alpha=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad \beta=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

則原方程化爲

$$(a_1x'+b_1y')\,dx'+(a_2x'+b_2y')\,dy'=0,$$

內兩係數俱已化爲齊次方程矣.

習題 1. $(4x+3y+1)dx+(x+y+1)\,dy=0.$

令 $x=x'+2,\ y=y'-3$, 則原式變爲

$$(4x'+3y')\,dx'+(x'+y')\,dy'=0.$$

再令 $y'=vx'$, 則有

$$\frac{1+v}{4+4v+v^2}dv+\frac{dx'}{x'}=0,$$

即
$$\frac{dv}{2+v}-\frac{dv}{(2+v)^2}+\frac{dx'}{x'}=0.$$

$$\therefore \log\,(2+v)+\frac{1}{2+v}+\log x'=c,$$

即
$$\log x'(2+v)=c-\frac{1}{2+v},$$

故
$$\log\,(2x'+y')=c-\frac{x'}{2x'+y'}.$$

化 x', y' 為 x, y, 則式變為

$$\log(2x+y-1)=c-\frac{x-2}{2x+y-1}.$$

習題 2.　$(4x-y+2)dx+(x+y+3)dy=0.$

按——本節之法遇 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時,即不適用.但此時吾人可用他種變換法,使其變數可分離.緣令 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_1}=k$ (k 為一常數),則式成為

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+[k(a_1x+b_1y)+c_2]dy=0.$$

再令　$a_1x+b_1y=t$, 即　$y=\frac{t-a_1x}{b_1}$, 則式成為

$$(t+c_1)dx+(kt+c_2)\left(\frac{dt-a_1dx}{b_1}\right)=0,$$

即

$$dx+\frac{kt+c_2}{(b_1-a_1k)t-b_1c_1-a_1c_2}dt=0,$$

其變數亦即分離矣.

習題 3.　$(2x+y)dx-(4x+2y-1)dy=0.$

12.　方程式為 $yf_1(xy)dx+xf_2(xy)dy=0$ 者. 尚有一類方程,其中變數亦可由一簡單之變換,而使之分離,其通式如下.

$$yf_1(xy)dx+xf_2(xy)dy=0,$$

內 $f(xy)$,表 xy 積之函數.

若令　$xy=v$, 即 $y=\frac{v}{x}$, 則 $xdy=dv-\frac{v}{x}dx$, 而原式成為

$$\frac{v}{x}f_1(v)dx+f_2(v)dv-\frac{v}{x}f_2(v)dx=0,$$

即

$$\frac{f_2\,dv}{v(f_1-f_2)}+\frac{dx}{x}=0,$$

其變數已經分離矣.

習題 1. $(y+2xy^2-x^2y^3)dx+2x^2y\,dy=0.$

令 $y=\frac{v}{x},\ dy=\frac{x\,dv-v\,dx}{x^2}$,則式成爲

$$\frac{v}{x}(1+2v-v^2)dx+2xv\,\frac{x\,dv-v\,dx}{x}=0,$$

即
$$\frac{2dv}{1-v^2}+\frac{dx}{x}=0.$$

因
$$\frac{2}{1-v^2}+\frac{dx}{x}=0,$$

故得積分爲 $\log\frac{1+v}{1-v}+\log x=k,$

即
$$x\frac{1+v}{1-v}=c.$$

改 v 爲原變數,得

$$\frac{x+x^2y}{1-xy}=c.$$

習題 2. $(2y+3xy^2)dx+(x+2x^2y)dy=0.$

習題 3. $(y+xy^2)\,dx+(x-x^2y)\,dy=0.$

13. 一級線性[1]方程. 線性微分方程者,乃一次方程之一類,非特式中所含最高次微係數屬於一次,且式中之應變數及其各次微係數俱爲一次.例如一級線性微分方程之通式可書爲

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q,$$

內 P 與 Q 爲單含 x 之函數.

---

1 一級線性微分方程 Linear differential equations of the first order, 亦曰平直微分方程.按在尋常代數中,線性方程猶言一次方程;但在微分方程中,則準本節定義,線性方程實比一次方程,其性質多受一層限制.

因 $\frac{d}{dx}(ye^{\int Pdx})=e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)$, 故知 $e^{\int Pdx}$ 爲本式之一個積分因子*. 引用此因子後則本式之解卽可由簡單的求積手續而得,其式如下:

$$ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+c\dagger$$

習題 1. $\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sec x$

按法得一積分因子爲 $e^{\int Pdx}=e^{\int\cot x dx}=e^{\log\sin x}=\sin x$,

引用此因子後,得

$$y\sin x=\int\sin x\sec x\,dx=\int\tan x\,dx=-\log\cos x+c.$$

故得解爲 $\quad y\sin x=-\log\cos x+c,$

卽 $\quad y\sin x=\log\sec x+c.$

習題 2. $\quad x\frac{dy}{dx}+(1+x)y=e^x.$

*由80節吾人將見此類之積分因子,實由一極普遍之方法發生.此普遍之法,並不依據他種理由而成立,故在此討論非不可能,但爲本書布置合宜起見,則却以從緩爲宜耳.

†本法之解一級線性方程,雖於理論與實際,俱爲最簡無疑(且法亦便於記憶),但吾人於此,可兼注意於下述第二法.此法係解各級線性方程普遍法之一部份(53節及59節),其證如下:

令 $y=y_1v$, 則 $\frac{dy}{dx}=y_1\frac{dv}{dx}+\frac{dy_1}{dx}\cdot v$;代入後原式變爲 $y_1\frac{dv}{dx}+\left(\frac{dy_1}{dx}+Py_1\right)v=Q$. 次由設 $\frac{dy_1}{dx}+Py_1=0$, 以選 y_1, 得 $y_1=e^{-\int Pdx}$, 而原式化爲 $\frac{dv}{dx}=Qe^{\int Pdx}$. 求其積分,得 $v=\int Qe^{\int Pdx}dx+c$, 故 $y=e^{-\int Pdx}\int Qe^{\int Pdx}dx+ce^{-\int Pdx}$.

將原式化成本節通式(即將$\frac{dy}{dx}$之係數化爲一),則得,

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}+1\right)y=\frac{e^x}{x}.$$

因 $$\int P\,dx=\int\left(\frac{1}{x}dx+dx\right)=\log x+x,$$

故得一積分因子爲$e^{\log x+x}$即xe^x.

引用此因子後,得解爲

$$y\,xe^x=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c.$$

習題 3. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3.$

習題 4. $(x+x^3)\frac{dy}{dx}+4x^2y=2$

習題 5. $x^2\frac{dy}{dx}+(1-2x)y=x^2.$

14. 方程之可化爲線性式者. 方程式有時雖原非線性式,然可由一顯易之變換卽化爲一線性方程.下爲一習見之式:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n,^*$$

內P與Q爲單含x之函數,n爲任一數.

以y^nP除兩端得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q.$$

令$y^{-n+1}=v$,則$y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$,而原式變爲一線性式如

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)Pv=(1-n)Q$$

---

* 此式因 James Bernoulli (1654－1705) 而得名,故名爲 Bernoulli's Equation.

習題 1.　$(1-x^3)\dfrac{dy}{dx}-2(1+x)\,y=y^{\frac{5}{2}}$.

$$y^{-\frac{5}{2}}\frac{dy}{dx}-2\frac{1+x}{1-x}y^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-x^3}.$$

令　$y^{-\frac{3}{2}}=v$, 則 $-\dfrac{3}{2}y^{-\frac{5}{2}}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$.

$$\therefore\frac{dv}{dx}+3\frac{1+x}{1-x^3}v=-\frac{3}{2}\,\frac{1}{1-x^3}.$$

因　$$\int\frac{3+3x}{1-x^3}dx=2\int\frac{dx}{1-x}+\int\frac{1+2x}{1+x+x^2}dx$$

$$=-2\log(1-x)+\log(1+x+x^2).$$

故知其積分因子爲　$e^{\log\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}}$　卽　$\dfrac{1+x+x^2}{(1-x)^2}$,

因得　$$v\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1+x+x^2}{(1-x)}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(1-x)^3}dx=-\frac{3}{4}\,\frac{1}{(1-x)^2}+c;$$

故　$$y^{-\frac{3}{2}}\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}=-\frac{3}{4}\,\frac{1}{(1-x)^2}+c,$$

卽　$$y^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{4}\,\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{c(1-x)^2}{1+x+x^2}$$

以下爲幾個題易化爲一次方程之例題:

習題 2.　$y\dfrac{dy}{dx}+xy^2=x$. [令 $y^2=v$.]

習題 3.　$\sin y\dfrac{dy}{dx}+\sin x\cos y=\sin x$. [$\cos y=v$.]

習題 4.　$4x\dfrac{dy}{dx}+3y+e^xx^4y^5=0$.

習題 5.　$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y+1}{x+1}=\sqrt{y+1}$.

15 方程式爲 $x^r y^s(my\,dx+nx\,dy)+x^\rho y^\sigma(\mu y\,dx+\nu x\,dy)=0$ 者.

因吾人常有$d(x^a y^b)=x^{a-1}y^{b-1}(ay\,dx+bx\,dy)$,故$x^r y^s(my\,dx+nx\,dy)$若用$x^\alpha y^\beta$乘後,可變爲正合式,祇須$\alpha\,\beta$先能適合下列二方程,

$$cm=\alpha+r+1,\quad cn=\beta+s+1$$

內c爲任一數值.蓋相乘以後,吾人實得下式

$$x^{cm-r-1}y^{cn-s-1}x^r y^s(my\,dx+nx\,dy)=x^{cm-1}y^{cn-1}(my\,dx+nx\,dy)$$

$$=\frac{1}{c}d(x^{cm}y^{cn}).$$

若$c=0$,則此式變爲等於$d\log x^m y^n$.

待定值c之引用,乃在因是而使

$$x^r y^s(my\,dx+nx\,dy)+x^\rho y^\sigma(\mu y\,dx+\nu x\,dy)=0.$$

之積分因子可以推求.猶之$x^{cm-r-1}y^{cn-s-1}$因子之引用可使本式前項變爲正合式,故$x^{\gamma\mu-\rho-1}y^{\gamma\nu-\sigma-1}$因子引用後,可使後項亦變爲正合式.但今之所求爲全式之積分因子,故c與γ當取兩值之恰使兩個積分因子兩兩相等,方合解題之需要.職是故有

$$cm-r-1=\gamma\mu-\rho-1,$$

$$cn-s-1=\gamma\nu-\sigma-1,$$

由此二式c與γ之值通常皆可以推出.*

習題 1. $x^4y(3y\,dx+2x\,dy)+x^2(4y\,dx+3x\,dy)=0.$

題中 $m=3,n=2,r=4,s=1,\mu=4,\nu=3,\rho=2,\sigma=0.$

$$3c-5=4\gamma-3,\ 2c-2=3\gamma-1.$$

解之得 $c=2,\gamma=1$.故知題之積分因子爲xy^2.引用後,得解爲

$$\frac{1}{2}x^6y^4+x^4y^3=c_1,\text{即}\ x^6y^4+2x^4y^3=k.$$

*如$m\nu=\gamma\mu$,則原式化爲一簡式如$my\,dx-nx\,dy=0$.

習題 2. $y^2(3y\,dx-6x\,dy)-x(y\,dx-2x\,dy)=0.$

習題 3. $(2x^3y-y^2)dx-(2x^4+xy)dy=0.$

16. 積分因子之可由視察而得者. 由細察方程中各項之組織,常可直得一積分因子*.此法無一定規則可言.有一種常見之組合爲 $x\,dy-y\,dx$ 一式.此式實示 $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2\pm y^2}$, 各有爲其積分因子之可能,蓋各因子引用後,可得 $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}, \frac{x\,dy-y\,dx}{y^2}, \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}, \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2\left(1\pm\frac{y^2}{x^2}\right)}$ 各相當之式也.職是,如遇 $x\,dy-y\,dx+f(x)dx$, 則知 $\frac{1}{x^2}$ 可用爲積分因子;若 $x\,dy-y\,dx+f(y)dy$, 則知 $\frac{1}{y^2}$ 可用爲積分因子;若遇 $x\,dy-y\,dx+f(xy)(x\,dy+y\,dx)$, 則知 $\frac{1}{xy}$ 可用爲積分因子;若遇 $x\,dy-y\,dx+f(x^2\pm y^2)(x\,dx\pm y\,dy)$, 則知 $\frac{1}{x^2\pm y^2}$ 可用爲積分因子.由實際經驗,吾人尙可得他種配合之法.

習題 1. $(y^2-xy)dx+x^2dy=0.$ (10節習題 3.)

將式書爲 $y^2dx-x(y\,dx-x\,dy)=0.$

卽見 $\frac{1}{xy^2}$ 爲一積分因子,引用後得

$$\frac{dx}{x}-\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=0,$$

故得解爲 $$\log x-\frac{x}{y}=c.$$

習題 2. $\frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}}=x\,dy.$

*9節曾示,引用一積分因子後,其變數卽屬分離而方程成爲正合式,可取爲本節之一設例.

將式書爲 $\dfrac{xdy-ydx}{x\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=xdy$, 卽見一積分因子爲 $\dfrac{1}{x}$. 引用後,

式化爲 $\dfrac{xdy-ydx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=dy$, 因得解案爲

$$\sin^{-1}\frac{y}{x}=y+c$$

習題 3. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$.

將式書爲 $xdx+ydy+ydx-xdy=0$, 吾人卽見 $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 實爲方程之一積分因子.

習題 4. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$.

習題 5. $(x-y^2)dx+2xydy=0$.

習題 6. $xdy-ydx=(x^2+y^2)dx$

17. 積分因子之可由他法求得者[1]. 按 7 節理論,如欲知一方程之是否爲正合,吾人先求 $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}$. 若此值爲零,則方程爲正合.否則,此式有時或含 M (或含 N) 爲其一因子.由 80 節通法,吾人將見 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ 爲一單含 x 之函數時,設爲 $f_1(x)$ 則 $e^{\int f_1(x)dx}$ 爲一積分因子.同樣若 $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ 爲一單含 y 之函數時,設爲 $f_2(y)$, 則 $e^{\int f_2(y)dy}$ 爲一積分因子.

---

1 積分因子之可由他法求得者 Other forms for which integrating factors can be found.

按由80節法,吾人知M與N若爲齊次而且同次時,則$\frac{1}{xM+yN}$爲一積分因子,若 $M=yf_1(x,y)$, $N=xf_2(x,y)$, 則$\frac{1}{xM-yN}$爲一積分因子.*

此二類方程亦曾於10及12節提及,惟當時係用變換變數以使分離之法.萊勃尼滋 Leibnitz 1646—1716與其從者,曾思將一級一次方程,盡用變換變數使之分離一法,然後求其解案.尤拉 Euler 1707—1783與其從者,則思將一級一次方程,盡用引入積分因子一法以解決之.故此等因子嘗稱爲尤拉因子,或曰尤拉乘數.惟按引用積分因子之意,似發源於尤拉之同時疇人克雷勞 Clairaut 1713—1765.今按一切一級一次方程之解出,猶之積分因子一法之皆可應用,合式的變換變數方法以分離變數,亦已曾證其大致可能†.但實際上如濫用此法以馭題,其不便與困難,與祇用積分因子之一法,同一不足訓.按此二類方程實爲表示兩種方法俱可應用之佳例.

習題 1.　$(3x^2+6xy+3y^2)dx+(2x^2+3xy)dy=0$

今有　$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1}{x},\quad\therefore\quad e^{\int\frac{dx}{x}}=x$$ 係一積分因子.

習題 2.　$2xdx+(x^2+y^2+2y)dy=0$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=1.\quad\therefore e^{\int dy}=e^y$$ 係一積分因子.

*若$xM+yN=0$則第一法不能用,若$xM-yN=0$則第二法不能用.但此兩種情形之下,方程解案皆易於直接求出.緣吾人若有$xM+yN=0$,則方程可書爲$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=\frac{y}{x}$,故即得解爲$\frac{y}{x}=c$,若 $xM-yN=0$, 則方程可書爲$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=-\frac{y}{x}$,故即得解爲$xy=c$.

†參閱 Lie, Differentialgleichungen, Chapter 6, § 5; also the author's Lie Theory. § 20.

習題 3. $(y^4+2y)dx+(xy^3+2y^4-4x)dy=0$.

習題 4. $(x^3y-y^4)dx+(y^3x-x^4)dy=0$.

習題 5. 用本節法解10及12節中各題.

習題 6. $(y^2-x^2+2mxy)dx+(my^2-mx^2-2xy)dy=0$.

18. 變數之變換[1]. 如所遇方程不屬於以上各節之任一類,有時可用變換變數之法化之為以前各類之一.此法無通則.方程之形式,有時能示人以途.下列其數例也.

習題 1. $xdy-ydx+2x^2ydx-x^3dx=0$.

由 $xdy-ydx$ 兩項,知 $\frac{y}{x}=v$ 之變換式或可試用.經此度換後,原式可化為

$$\frac{dv}{dx}+2xv=x.$$

此屬線性式,其積分因子為 $e^{\int 2xdx}$ 即 e^{x^2}.

$$\therefore ve^{x^2}=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+c.$$

故得題之通解為

$$\frac{y}{x}e^{x^2}=\frac{1}{2}e^{x^2}+c.$$

習題 2. $(x+y)dy-dx=0$.

由第一項之係數 $x+y$, 知 $x+y=v$ 之變換或可試用.經此變換後,原式化為 $vdv-(v+1)dx=0$.

其變數已可分離,因得

$$dx=\frac{v\,dv}{v+1}=dv-\frac{dv}{v+1}.$$

---

1 變數之變換 transformation of variables.

求積分,得 $x=v-\log(v+1)+c,$

故 $x=x+y-\log(x+y+1)+c,$

即 $\log(x+y+1)=y+c.$

此題亦可用下法求之:

書原式爲 $\dfrac{dx}{dy}-x=y,$

此係一個線性式,惟式中 y 係視爲自變數.按法知本式之積分因子爲

$$e^{-\int dy}=e^{-y}.$$

故得 $xe^{-y}=\int ye^{-y}dy=-ye^{-y}-e^{-y}+c,$

即 $x+y+1=ce^{y}.$

習題 3. $xdx+ydy+ydx+xdy=0.$ (16 節,習題 3.)

由 $xdx+ydy$ 兩項知 x^2+y^2 兩項或可變換,由 $ydx-xdy$ 知 $\dfrac{y}{x}$ 或可變換.兩事參用,知 $x^2+y^2=r^2$ 及 $\dfrac{y}{x}=\tan\theta$ (即令 $x=r\cos\theta,$ $y=r\sin\theta$) 之變換,或可試用.用此變換,則有

$$xdx+ydy=rdr,$$

$$ydx-xdy=-r^2d\theta,$$

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta,$$

$$dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta.$$

原式因變爲

$$\frac{dr}{r}-d\theta=0,$$

因得解爲

$$\log r-\theta=c,\quad \text{即}\quad \log\sqrt{x^2+y^2}-\tan^{-1}\frac{y}{x}=c.$$

習題 4. $x\dfrac{dy}{dx}-ay+by^2=cx^{2a}$

此式*特別性質爲第一項係$x\dfrac{dy}{dx}$, y之係數爲右端x之指數之半數.

令$y=x^a v$,方程變爲

$$x^{a+1}\frac{dv}{dx}+bx^{2a}v^2=cx^{2a},\quad 即\quad \frac{dv}{c-bv^2}=\frac{dx}{x^{1-a}},$$

式中變數已分離矣.

19. 本章提要[1]. 實際馭題,凡求$M\,dx+N\,dy$之積分,可依下列程序進行.

先由察閱,以視

1° 題中變數已否分離及可否分離(9節),

2° M與N是否齊次而且同次(10及17節),

3° 原式是否爲線性式或可化爲線性式(13及14節),

4° M與N是否係線性而却非齊次(11節),

5° 是否$M=yf_1(xy)$, $N=xf_2(xy)$(12及17節),

6° 其式是否爲$x^r y^s(my\,dx+nx\,dy)+x^\rho y^\sigma(\mu y\,dx+\nu x\,dy)=0$ (15節).

如察閱後知其不屬於以上各類(察閱經驗殊易練成),則進驗原式是否爲一正合微分方程.†下三事時或發生:

*此係里卡提 Riccati 方程之一式.

†式爲正合有時可由察閱即知,如是則逕求其積分可也.積分因子亦有時逕由察閱可得.馭題要道乃在能速認題式之屬於何類.本章提要,與此後各章之提要,皆就各法應用之便易程度以次先後,即本此旨也

1 提要 summary.

7°　$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$（8節），

8°　$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf_1(x)$（17節），

9°　$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=Mf_2(y)$（17節）.

如上法均不適用,有時或可

10°　由視察而得一積分或

11°　由變換其變數,以便前述各法可以採用（18節），

12°　最後一途,可採用80,25,及72諸節之法

習題 1.　$x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0.$

習題 2　$\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$

習題 3.　$\frac{dy}{dx}-x^2y=x^5.$

習題 4.　$(y-x)^2\frac{dy}{dx}=1.$［令 $y-x=v.$］

習題 5.　$x\frac{dy}{dx}+y+x^4y^4e^4=0.$

習題 6.　$(1-x)\,y\,dx+(1-y)\,x\,dy=0.$

習題 7.　$(y-x)\,dy+y\,dx=0.$

習題 8.　$x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$

習題 9　$(x+a)\frac{dy}{dx}-3y=2(x+a)^5.$

習題 10.　$x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2-y^2}\,dx$

習題 11.　$\left(x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0.$

習題 12.　$(x-2y+5)\,dx+(2x-y+4)\,dy=0.$

習題 13. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{x+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^2}$

習題 14. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy=a\,xy^2.$

習題 15. $xy^2(3y\,dx+x\,dy)-(2y\,dx-x\,dy)=0.$

習題 16 $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x.$

習題 17. $(5xy-3y^3)dx+(3x^2-7xy^2)dy=0.$

習題 18. $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2\,x.$

習題 19. $(xy^2+y)dx-x\,dy=0.$

習題 20. $(1-x)y\,dx-(1+y)\,x\,dy=0.$

習題 21. $3x^2y\,dx+(x^3+x^3y^2)dy=0.$

習題 22. $(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=(x^2+y^2+x)(x\,dy-y\,dx).$

習題 23. $(2x+3y-1)dx+(2x+3y-5)dy=0.$

習題 24. $(y-2x^2y)dx+(2xy^2-x^3)dy=0.$

習題 25. $(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0.$

習題 26. $(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)+(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(y\,dx-x\,dy)=0.$

習題 27. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

習題 28. $x\,dy+(y-y^2\log x)dx=0.$

習題 29. $(x^3y^4+x^2y^3+xy^2+y)dx+(x^4y^3-x^3y^2-x^2y+x)dy=0.$

習題 30. $(2\sqrt{xy}-x)dy+y\,dx=0.$

第三章

應　　用[1]

20. 曲線群[2]之微分方程. 由幾何與物理學中問題時或引起微分方程.例如設 x 與 y 爲平面上直軸之橫縱兩坐標,則一個關係如 $\phi(x,y)=o$ 代表一種曲線,而 $\dfrac{dy}{dx}$ 實爲曲線一點上切線之斜度[3].

由一個包含有理式的任意常數之關係起論,則

(1) $$\phi(x,y,c)=o,$$

代表一羣曲線,因與每一值之 c 後,有一相當之曲線也.(1)式之相當微分方程*,可設爲

(2) $$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=o,$$

係屬一級式因與每一對 (x,y) 之值相當,必有一個 $\dfrac{dy}{dx}$ 之值,故(2)實爲規定經過曲線上任一點之斜度之式.如(1)中之 c 係屬二次,則除特例以外,每過一點實有二個曲線.因每一對之 x, y 值實予吾人兩個 c 值,而在尋常情形之中,此兩值恆不相同也.返觀(2)式,吾人知對此一對 x, y 之值,$\dfrac{dy}{dx}$ 之值亦常有二,蓋經過一點既有兩線,除兩線在此點相切之特例外,兩個切線不能取同向也.

*(1)式之曲線常稱爲(2)式之積分曲線 The integral curues of (2).

---

1 應用 applications.

2 曲線羣 a family of curves.

3 斜度 slope.

若由微分方程起論並設方程爲$\frac{dy}{dx}$之二次式,則每經線上之一普通點*,斜度之値有二,故切線亦有二,故在尋常情形之下,過此點之積分曲線亦有兩個.職是之故,此方程之積分應含一個二次之常數.(參閱24節,習題3下之注.)

同理推論,吾人可證一級n次微分方程之積分,包含一n次之積分常數.

習題 1. 求經過原點[1]且心在x軸各圓之微分方程.

按各圓之方程易知其爲$x^2+y^2-2ax=0$,內a係一次式

求微分,得 $$x+y\frac{dy}{dx}-a=0,$$

消a得 $$2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2=0,$$

係一一次方程.(學者宜從末式回求積分,以當練習.)

習題 2. 求半徑皆爲r,心皆在x軸之各圓之微分方程.

圓羣之方程爲$(x-a)^2+y^2=r^2$,內a係二次式.

求微分,得 $$(x-a)+y\frac{dy}{dx}=0.$$

*普通點 Point of general position(詳言之,應爲普通地位之點,或云尋常地位之點)者,乃點之在此地位並無特別情形發生,涉及曲線羣者(例如兩曲線在此相切類事),或涉及羣中一線者(例如重點 Double point 類事).

1 原點 Origin, 亦曰始點,曰起點.

消 a 得 $$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=r^2.$$

係一二次微分方程.

習題 3. 求同焦點錐線[1]羣,其軸與坐標軸相合者之微分方程.

按在錐線為$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$中,焦點與心之距離為$\sqrt{a^2\mp b^2}$,故凡錐線之式為$\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c-\lambda}=1$ 時,不論 c 值為何,俱同焦點.故後式即為一羣同焦點錐線之方程.其焦點之式為$(\pm\sqrt{\lambda},o)$.式中之 c 係一任意常數,求微分方程時所當消去之常數也.

習題 4. 求以焦點為原點之拋物線羣,其軸與 x 軸相合者之微分方程.

習題 5. 求切於 $x^2+y^2=r^2$ 圓之直線羣之微分方程.

習題 6. 今有直線羣,其所割兩坐標軸截段[2]之和等於一常數,求其微分方程.

習題 7. 今有結形三次曲線[3] $(y-a)^2=2x(x-1)^2$, 其線各與 y 軸相切,其結為$(1,a)$,求其微分方程.

習題 8. 今有結形三次曲線 $y^2=2x(x-a)^2$ 其線各與 y 軸相切於原點,其結為(a,o),求其微分方程.

按.——如曲線羣之方程,所含任意常數不止一個,則其相當之微分方程必高出於一級(3節).

---

1 同焦點錐線 confocal conics.

2 其所割兩坐標軸截段 whose intercepts on the coordinate axes.

3 結形三次曲線 nodal cubics, 結 node.

習題 9.　求切於 y 軸各圓之微分方程.

習題 10.　求同心錐線其軸且與坐標軸相合者之微分方程

習題 11.　求下舉兩類拋物線之微分方程,(a) 其軸與 x 軸平行者,(b) 其軸與 y 軸平行者.

習題 12.　求圓半徑俱為 r 之圓之微分方程.

21. 幾何問題之包含微分方程者. 凡幾何問題其性質用代數表示時,含有一點上之微係數,即 $\frac{dy}{dx}$ 之關者,即發生一一級微分方程,而問題之解決,亦必有待於方程之解決.茲舉數例如下:

習題 1.　今有一曲線,其任一點上之切線,及此點與原點之連線即動徑[1],合 x 軸,成一等腰三角形[2](x 軸為三角形之底)求此類曲線之最普通公式.

切線與 x 軸所成角之正切為 $\frac{dy}{dx}$,動徑之正切為 $\frac{y}{x}$.

由題意,得　　$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, 即 $xdy+ydx=0$.

求積分,得　　$xy=$ 一個常數,

其軌跡係一等邊雙曲線.

---

1 動徑 rdius vector, 亦曰矢徑.

2 等腰三角形 isosceles triangle, 即兩等邊三角形.

3 等邊雙曲線 equilateral hyperbola, 即直角雙曲線 rectangular hyperbola.

習題 2.　今有一曲線,其任一點上之法線[1]與其動徑相套合,求此曲線之最普通公式.

按法線[1]之斜度爲 $-\frac{dx}{dy}$,因得方程爲

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x},\text{ 卽 } xdx+ydy=0.$$

求積分得　　$x^2+y^2=c$, (c 爲一任意常數.)

其軌跡係一圓.

準上例,微分方程若爲一次時,則其積分中之常數對於一對 (x, y) 之值,亦祇有一個相當之值.此義在幾何方面猶言,經過平面上任一點,曲線羣中之線亦祇有一個.例如若 $x=1, y=2$,則題中之 $c=5$.故知經過 (1,2) 之點,圓羣中祇有此 $x^2+y^2=5$ 之一圓.

由上舉兩簡例,馭題通法可以推出.第一,須將曲線之性質用代數式陳述(由此得微分方程);第二,須將此方程解出;最後須將求出之結果,作一幾何方面的解釋*.

在微分學中,此類含有微係數之曲線性質,大致多已論及.學者於此,可認爲已有相當之智識.但爲便利起見,茲再益以下表,以便檢查:

1°　直角坐標[2]

a)　$\frac{dy}{dx}$ 爲曲線上 (x, y) 點處一切線之斜度;

*微分方程含有一任意常數者,代表一無限數之曲線 An infinity of curves. 如吾人知一點,一定爲曲線所必經,或由他種條件因而決定其常數之相當值,則經過此點之曲線或滿足此條件之曲線,一個或多個,即可純一的或不兩可的[3]決定之.

1　法線 normal.

2　直角坐標 rectangular coordinates, 或云正坐標.

3　原文云 either uniquely or ambiguously, 猶言曲線之地位與曲線之數可以確定也.

(b) $-\dfrac{dx}{dy}$ 爲 (x, y) 點處法線[1]之斜度;

(c) $Y-y=\dfrac{dy}{dx}(X-x)$ 爲 (x, y) 點上之切線方程, X, Y 爲切線上任一點之坐標;

(d) $Y-y=-\dfrac{dx}{dy}(X-x)$ 爲 (x, y) 點之法線方程;

(e) $x-y\dfrac{dx}{dy}$, $y-x\dfrac{dy}{dx}$ 爲切線在 x 軸與 y 軸上之截段[2];

(f) $x+y\dfrac{dy}{dx}$, $y+x\dfrac{dx}{dy}$ 爲法線在 x 軸與 y 軸上之截段;

(g) $y\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$, $x\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ 爲自切點至 x 軸及自切點至 y 軸之切線線段[3];

(h) $y\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, $x\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$ 爲自切點至 x 軸及自切點至 y 軸之法線線段[4];

(i) $y\dfrac{dx}{dy}$ 爲次法線[5]之長;

(j) $y\dfrac{dy}{dx}$ 爲次法線[6]之長;

(k) $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=dy\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$ 爲基形弧長[7];

(l) $y\,dx$ 或 $x\,dy$ 爲基形面積[7].

2° 極坐標

(m) $\tan\psi=\rho\dfrac{d\theta}{d\rho}$, 內 ψ 爲曲線上一點之通徑與其切線(指其向極軸[8](即 Initial line 之一端)所成之角;

(n) $\tau=\theta+\psi$, 內 τ 爲切線與極軸所成之角;

1 原文云 the normal through the point (x, y).
2 截段 intercepts.
3 切線線段 length of the tangent.
4 法線線段 length of the normal.
5 次切線 subtangent,
6 次法線 subnormal. (7) 基形弧長 the element of length of arc.
7 基形面積 element of area.
8 極軸 radical axis, 亦云原線 initial line, 或曰初線.

(o) $\rho\tan\psi=\rho^2\dfrac{d\theta}{d\rho}$ 爲極坐標次切線[1]之長;

(p) $\rho\cot\psi=\dfrac{d\rho}{d\theta}$ 爲極坐標次法線之長;

(q) $ds=\sqrt{d\rho^2+\rho^2d\theta^2}=d\rho\sqrt{1+\rho^2\left(\dfrac{d\theta}{d\rho}\right)^2}=d\theta\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\rho^2}$ 爲基形弧長;

(r) $\dfrac{1}{2}\rho^2\,d\theta$ 爲基形面積;

(s) $p=\rho\sin\psi=\rho^2\dfrac{d\theta}{ds}$ 爲自極至切線之垂線之長[2];

(t) $\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{\rho^4}\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\dfrac{1}{\rho^2}.$

習題 3. 今有曲線,其法線之長(由綫上一點至 x 軸之長)之變,與其縱坐標之平方成比,求曲線之式.若令此曲線又與 y 軸成直角則其式將如何?

由 (h) 得 $\quad y\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=ky^2$, 即 $1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=k^2y^2$, 即 $\dfrac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}=dx.$

求積分得 $\quad \dfrac{1}{k}\log\left(ky+\sqrt{k^2y^2-1}\right)=x+c,$

即
$$y=\frac{1}{2k}\left(ce^{kx}+\frac{1}{c}e^{-kx}\right).$$

爲一練線[3]羣.

如欲求羣中之一特別曲線,其線須與 y 軸成直角,則吾人須求在 $x=0$ 下,$\dfrac{dy}{dx}=0$ 時之 c 値,由此推求,得 $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\dfrac{1}{2}\left(c-\dfrac{1}{c}\right)$,再因此式等於零時,得 $c=\pm1$,故得所求曲線之方程爲 $\pm y=\dfrac{1}{2k}(e^{kx}+e^{-kx})$ $=\dfrac{1}{k}\cosh kx.$

---

1 極坐標次切線 polar subtangent.

2 自極至切線之垂線之長 the length of the perpendicular from the pole to the tangent.

3 練線 catenary, 或曰懸鏈線.

習題 4. 今有曲線,其弧下面積(在一固定之縱坐標與一變動的縱坐標之間及 x 軸之上),與其相當之弧長成比,求其公式.

由 (k) 及 (l) 得 $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=ky$, 即 $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=k^2y^2$.

此微分方程與習題 3 所得者相同,故知練線實具有本題之性質.

習題 5. 今有曲線,其極坐標次切線之長與其動徑成比,求其公式.

由 (o) 得 $\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}=k\rho$, 即 $\frac{kd\rho}{\rho}=d\theta$.

求積分,得 $\rho^k=ce^\theta$.

為一螺線羣[1]

習題 6. 求次法線之長為一常數之曲線公式.

習題 7. 今有曲線,其任一點上次切線之長等於其橫坐標之平方,求其公式.

習題 8. 今有曲線,其自原點至切線之垂線之長與其切點之橫坐標相等,求其公式.

習題 9. 今有曲線,其動徑與切線間之角與其動角[2]之半相等,求其公式.

習題 10. 今有曲線,其極坐標次切線之長四倍於極坐標次法線之長,求其公式.

22. 正交曲線[3]. 一曲線依一規定則與一曲線羣之各線相交,謂之後者之交割曲線.例如此線或與曲線羣中各線悉依定角相交割是.若此定角為一直角,則此曲線謂之正交曲線[4].對於第一羣之曲線,有時吾人可更求得一第二羣之曲線,一一與第一各線成正交.若有兩羣曲線具有上述性質,則任一羣曲線皆稱為他羣曲線之正交線羣.

---

1 螺線羣 a family of spirals. 2 動角 vectorial angle.

3 正交曲線 orthogonal trajectories.

4 交割曲線 trajectories, 通常云射道,亦云彈道,與此處所用,義不盡同.

今試由曲線羣起論,設其方程爲

(1) $$\phi(x, y, c)=0$$

次令其相當之微分方程爲

(2) $$f\left(\frac{dy}{dx}, x, y\right)=0,$$

內$\frac{dy}{dx}$爲經過一點的曲線之切線斜度,由是易知由

(3) $$f\left(-\frac{dx}{dy}, x, y\right)=0,$$

可得一積分曲線羣,其經過(x, y)點之曲線,與上述曲線羣之經此點之曲線者,有下舉之關係:在此點上前線之切線斜度等於後線之切線斜度之負倒數[1],換言之,即在兩曲線相交處,其切線相交成直角,故吾人謂此兩曲線相交成直角云.

由是知(3)式之積分,即爲吾人所推求之曲線羣之方程.

習題 1. 求同心圓[2]羣之正交曲線

取圓心爲原點,得圓心羣方程爲$x^2+y^2=c^2$,而$x+y\frac{dy}{dx}=0$爲其微分方程.

由是得同心圓羣之正交曲線之微分方程爲

$$x-y\frac{dx}{dy}=0, \text{即} \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0.$$

求積分,得 $y=cx$,

爲過圓心之一直線羣公式.

---

(1) 負倒數 negative reciprocal.

(2) 同心圓 concentric circles.

習題 2. 今有一圓羣,各圓俱過原點,心皆在 x 軸上,求其正交曲線羣.

圓羣方程爲 $x^2+y^2-cx=0$,

其微分方程爲 $2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2=0$,(20節,習題1)

故其正交曲線羣之微分方程爲 $2xy\frac{dx}{dy}-x^2+y^2=0$.

試取兩微分方程相比,卽見後式可由前式將 x, y 兩字互易而得.故知後者之積分爲 $x^2+y^2-cy=0$,乃一過原點而心在 y 軸之圓羣也.

[學者應取第二微分式,實行求其積分,以驗上答.]

習題 3. 證同焦點之有心錐線羣[1]自成正交[2].

由20節,習題3,知若取錐線之軸爲坐標,則羣之曲線公式爲

$\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c-\lambda}=1$,

其微分方程爲 $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2+y^2-\lambda)\frac{dy}{dx}-xy=0$.

式中 $\frac{dy}{dx}$ 各改爲 $-\frac{dy}{dx}$ 後,方程形式並不變更,故知此羣曲線係互成正交,按諸實際,同焦點有心錐線羣,本由橢圓與雙曲線兩種合成,每經一點,兩種曲線各有一個,且兩兩相交必成直角,此固有心同焦點錐線之一種重要性質也(本節17題).

習題 4. 證同焦點同軸之拋物線羣自成正交.

---

1 同焦點之有心錐線羣 a family of confocal central conics, 或曰有心同焦點錐線羣.

2 自成正交 self-orthogonal, 或曰互成正交.

習題 5. 證如一曲線,與$f\left(\frac{dy}{dx}, x, y\right)=0$之積分曲線相交成$\alpha$角,則此交割曲線羣之微分方程爲

$$f\left[\frac{\frac{dy}{dx}-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\frac{dy}{dx}}, x, y\right]=0.^*$$

由此更推下特例:交割曲線與$y=cx$線羣,常作α度交角者,係一對數螺線[1]羣,其式爲

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+k=\frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{y}{x},$$

即
$$y=ce^{\frac{\theta}{m}}$$

習題 6. 今有交割曲線羣,與經過原點,心在x軸之圓羣常作α交角,求其公式.

習題 7. 求與同心圓羣常作α交角(α爲任一角度但不等於直角)之交割曲線公式.

習題 8. 求拋物線羣$y^2=4cx$之正交曲線羣.

習題 9. 求雙曲線羣$x^2-y^2=c$之正交曲線羣.

習題 10. 求相似同心錐線$ax^2+by^2=c$(內a與b爲定值常數[2] c爲任意常數)之正交曲線羣.

設所論曲線羣之極坐標公式爲

(1′) $$\phi(\rho, \theta, c)=0;$$

則其微分方程爲

(2′) $$f\left(\frac{d\theta}{d\rho}, \rho, \theta\right)=0,$$

內$\frac{d\theta}{d\rho}$在(ρ, θ)點之值,即由本式規定.

*實際運算,用m一字代替$\tan\alpha$爲便.

---

1 對數螺線 the logrithmic spirals.

2 定值常數 fixed constants

由21節(m),設ψ爲一點之動徑與其切線(有定向)所成之角,則有$\tan\psi=\rho\dfrac{d\theta}{d\rho}$.今設$\psi'$爲經$(\rho,\theta)$且與$\Phi$曲線成正交之曲線之動徑與其切線所成之角,則因$\psi'-\psi=\pm\dfrac{\pi}{2}$,即$\psi'=\psi\pm\dfrac{\pi}{2}$,故

$$\tan\psi'=-\cot\psi=-\frac{1}{\tan\psi}.$$

今以加撇符號表示正交曲線上之相當各事,則得

$$\rho'\frac{d\theta'}{d\rho'}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta},\text{故}\ \frac{d\theta}{d\rho}=\frac{-1}{\rho\rho'}\frac{d\rho'}{d\theta'}.$$

但在交點上論,則爾時$\rho'=\rho,\theta'=\theta$,故得

$$(3')\qquad f\left(\frac{-1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta},\rho\ \theta\right)=0,$$

爲與(1')成正交之曲線羣之微分方程式,緣由此式所得之$\rho\dfrac{d\theta}{d\rho}$與由(2')所得之$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{d\theta}$式相同也.

注.—— 如θ取爲自變數,則(2')當書爲$f\left(\dfrac{d\rho}{d\theta},\rho,\theta\right)=0$,而(3')當書爲$f\left(-\rho^2\dfrac{d\theta}{d\rho},\rho,\theta\right)=0$

習題11. 求紋形線[1]羣$\rho^2=c\cos2\theta$之正交曲線羣.

求式之微分,並消去其常數c,則得紋形線羣之微分方程式爲$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{d\theta}=-\tan2\theta$.故正交線羣之微分方程應爲

---

1 紋形線 lemniscate,或曰雙紐線.

$$-\rho\frac{d\theta}{d\rho}=-\tan 2\theta,$$

即
$$\frac{d\rho}{\rho}=\cot 2\theta\, d\theta.$$

求積分,得 $\rho^2=k\sin 2\theta$, 亦為一絞形線羣,其軸與前者之軸互交成角45度.

習題12. 求心形曲線羣[1] $\rho=c(1-\cos\theta)$之正交線羣.

習題13. 求對數螺線羣$\rho=\epsilon^{c\theta}$之正交線羣.

習題14. 求 $\rho^m\sin m\theta=c^m$ 曲線羣之正交線羣.

習題15. 求 $\frac{1}{\rho}=\sin^2\theta+c$曲線羣之正交線羣.

習題16. 求拋物線羣(同焦點且又同軸)$\rho=\frac{2c}{1-\cos\theta}$ 之正交線羣.

習題17. 求同焦點橢圓 $\rho=\frac{c^2-\lambda^2}{c-\lambda\cos\theta}$ (c 為一參數[2], λ 為一定值常數[3])之正交曲線.

23. 物理問題之引起微分方程者[4]. 力學,電學,及物理學之他種分科,有時亦常引起包含微分方程之問題,因此類問題之清切了解,有賴於此種科學之本身智識,故此篇僅就問題之祗含淺近理論者,略加討論.解決此類問題之程序,與幾何問題之解決,大致從同,即首須將題意以代數關係陳述(由此得微分方程);然後將方程解出,再附以結果之解釋.有時更須就問題條件,

1 心形曲線 cardioid, 亦曰心臟線.

2 參數 parameter, 或曰褒變數,曰任意常數.

3 定值常數 a fixed constant.

4 原文爲 physical problems giving rise to differential equations.

確定其積分常數之值,此亦係問題中常有之事.

下述乃此類問題之數例:

習題 1. 一物體因受地心吸力自高直墜.設其原始速度[1]爲v_0,求物體在任一時間之速度,又求物體經過任一時間後之所經距離.

物體運動既沿直線,此題祇需一個坐標 x,已足推測其地位。令物體在 $t=0$ 時之地位爲x_0(此稱爲原始地位[2].).

次令運動之速度爲$v=\frac{dx}{dt}$,令加速度[3]$f=\frac{dv}{dt}$.若物體所受之力祇有地心吸力一種,則加速度爲一常數,以 g 字代之,今有

$$\frac{dv}{dt}=g.$$

求積分得 $$v=gt+c.$$

在 $t=0$ 時,吾人知$v=v_0$, $\therefore c=v_0$ 故得本題第一問之答爲

$$v=gt+v_0.$$

次求物體在任何時後所經過之距離,吾人求下式之積分

$$\frac{dx}{dt}=gt+v_0,$$

因得其通解爲 $$x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+c.$$

---

1 原始速度 initial velocity, 亦曰最初速度.速度亦曰速率.

2 原始地位 initial position, 亦曰最初地位.

3 加速度 acceleration 亦曰加速度.

因 $t=0$ 時, $x=x_0$, 故 $c=x_0$. 故得物體經過 t 時間之地位關係為

$$x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$$

而其所經之距離為　$x-x_0=\frac{1}{2}gt^2+v_0t.$

習題 2. 有一物質受地心吸力在一光滑之斜面下降(設斜面與地平線所成之角為 α).設此物質初本靜止,求在 t 時之速度,又求在 t 時內所經過之距離.(按在斜面上運動之加速度為 $g\sin\alpha$, 即 g 之沿斜面的支力[1].)證物質自直立圓周之最高點下降,無論其所經之道,依何一弦,其達到圓周所需之時間,與下降至圓周最低點所需時間,俱各相同.(參閱 Tait and Steele, Dynamics of a Particle.)

習題 3. 一物質在有阻力之媒介體(如空氣)中下墜,其所受阻力與其速度之平方成比,試討論其運動.

由題意得　$\frac{dv}{dt}=g-kv^2.$

其變數可分離,故可書為　$\frac{dv}{g-kv^2}=dt.$

令 $gk=r^2$, 式變為　$\frac{g\,dv}{g^2-r^2v^2}=dt$, 即　$\frac{dv}{g+rv}+\frac{dv}{g-rv}=2\,dt.$

求積分,由　$\int_{v_0}^{v}\left(\frac{dv}{g+rv}+\frac{dv}{g-rv}\right)=2\int_0^t dt$*,

*如用雙曲函數[2]則此式積分較易尋求,尤其是若 $v_0=0$.

$$\int_{v_0}^{v}\frac{g\,dv}{g^2-r^2v^2}=\frac{1}{r}\tanh^{-1}\frac{rv}{g}.\quad\therefore\ v=\frac{dx}{dt}=\frac{g}{r}\tanh rt$$

再求積分,得　$x-x_0=\frac{g}{r^2}\log\cosh rt$

1 支力 component, 亦曰分力,曰偏力,曰支線.

2 雙曲函數 hyperbolic functions.

得 $\dfrac{1}{r}\left[\log(g+rv)-\log(g+rv_0)-\log(g-rv)+\log(g-rv_0)\right]=2t,$

即 $$\frac{1}{r}\log\left(\frac{g-rv_0}{g+rv_0}\,\frac{g+rv}{g-rv}\right)=2t.$$

$$\therefore \frac{g+rv}{g-rv}=\frac{g+rv_0}{g-rv_0}e^{2rt}.$$

若以 c 字暫替常數 $\dfrac{g+rv_0}{g-rv_0}$, 則得 $\dfrac{g}{r}\cdot\dfrac{ce^{2rt}-1}{ce^{2rt}+1}$.

因 $v=\dfrac{dx}{dt}$, 故由求積分,得物質之運動公式爲

$$\int_{x_0}^{x}dx=x-x_0=\frac{g}{r}\int_0^t\frac{ce^{2rt}-1}{ce^{2rt}+1}dt,$$

內 c 即 $\dfrac{g+rv_0}{g-rv_0}$. 如題中物質係由靜而動,則 $v_0=0$, $\therefore c=1$.

學者應將本題積分自行求出,以當練習.

習題 4. 一物質沿一直線運動,其加速度與其速度之立方成比,而兩者之方向恰相反,求 t 時內之距離公式(設原始速度爲 v_0, 距離係由物質之最初地位起算,即 $x_0=0$).

由題得 $$\frac{dv}{dt}=-kv^3, \text{ 即 } \frac{dv}{-v^3}=kdt.$$

$$\therefore \frac{1}{v^2}-\frac{1}{v_0^2}=2kt, \text{ 即 } v=\frac{v_0}{\sqrt{2kv_0^2t+1}}=\frac{dx}{dt}.$$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{2kv_0^2t+1}-1}{kv_0}.$$

習題 5. 設上題中之加速度係與速度成比,則其距離公式將如何?

習題 6. 電學理論有一重要之方程式爲

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E,$$

內 i 爲電流,L 爲自感係數[1](爲一常數),R 爲阻力(亦一常數),E 爲電動力[2]或爲常數(此常數可等於零)或爲時 t 之函數,故方程式係一線性式(13 節).求下列各種情形下之 i,(a) 設 $E=0$,(b) 設 $E=$ 一常數,(c) 設 $E=E_0\sin\omega t$ (E_0 與 ω 俱爲常數) (d) 設 $E=E(t)$ 爲 t 之一任意函數.

(c) 例在電學理論中極爲重要,茲故詳爲釋之於下,在交流電中即有此式發生,爾時電動力爲時間之週期函數[3],其週期爲 $\frac{2\pi}{\omega}$, E_0 爲電動力之極大值[4].

今有 $$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L}\sin\omega t.$$

其積分因子爲 $e^{\frac{R}{L}t}$,引用後得 $ie^{\frac{R}{L}t}=\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt+c.$

因 $$\int e^{at}\sin\omega t\,dt=\frac{a\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}e^{at}$$

$$ie^{\frac{R}{L}t}=\frac{E_0}{L}\frac{\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}+c.$$

$$=E_0\left(\frac{R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t}{R^2+\omega^2L^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}+c$$

---

1 自感係數 the coefficient of self-induction.

2 電動力 the electromotive force, 亦云動電力.

3 週期函數 a periodic function.

4 極大值 the maximum value.

$$=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\frac{R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{\frac{R}{L}t}+c,$$

$$=\frac{E_0\,e^{\frac{R}{L}t}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\phi)+c,$$

內 $$\sin\phi=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},\quad \cos\phi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.$$

$$\therefore\qquad i=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\phi)+ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

通常,經過很短的時間之後,$ce^{-\frac{R}{L}t}$之值,即極微細可略.爾時電流亦變爲週期性而其週性之次數與電動力相同[1].但二者之相位[2]卻並不同電流比電動力實落後一ϕ角之數[3].

1 原文云 The current than becomes periodic with the same frequency as the electromotive force. 次數 frequency, 亦曰擺動次數.

2 相位 phase, 亦曰局面,亦曰狀態,亦曰形勢.

3 原文云 the current lagging behind by the angle ϕ.

第四章

一級高次之微分方程

24. 方程之可解爲 p 之等式者[1]. 爲簡便起見,吾人以後將並用普通承認之 p 字代替 $\frac{dy}{dx}$,故微分方程式可書爲

(1) $$f(p, x, y)=0.$$

如方程係屬 n 次,吾人可視此方程爲 n 次 p 之代數方程若方程之根爲 $f(x, y), f_2(x, y), \cdots\cdots, f_n(x, y)$, 則方程可書作下式,

(2) $$[p-f_1(x,y)][p-f_2(x, y)]\cdots\cdots[p-f_n(x, y)]=0$$

各因子各等於零時各爲一微分方程.若後者俱可以第二章各法解出之,則(1)之通式卽易求得.設由各因子所成方程求得之解爲 $\phi(x, y, c)=0, \phi_2(x, y, c)=0, \cdots, \phi_n(x, y, c)=0$, 則(1)之解爲

(3) $$\phi_1(x, y, c)\phi_2(x, y, c)\phi_3(x, y, c)\cdots\phi_n(x, y, c)=0^*,$$

其理至顯明也.緣(3)式之成零,卽云其中有一個因子應可成零,此因子代入(2)後,必能使(2)中一個因子變爲成零,故原式亦因

*如各 ϕ 中之一,係屬無理式,則式中必另有一個 φ 與此成一對共軛無理函數[2],而兩者之積則却爲一有理函數(參閱本節習題2).當吾人將此對共軛無理數之一化爲有理時,結果與此對乘積之有理式却正相同.在實際方面此點之理頗可利用,學者宜取本節習題2,自爲推演以驗此說.

---

1. 方程之可解爲 p 之等式者 equations solvable for p.
2. 共軛無理函數 conjugate irrational function.

之可以適合.非但如是.解中必有一任意常數*,其次數〔參觀(3)式〕與(1)中 p 之次數兩兩相等.(20節,理論).

習題 1. $p^2+(x+y)p+xy=0$.

本題亦可書爲 $(p+x)(p+y)=0$.

求 $\dfrac{dy}{dx}+x=0$ 之積分,得 $2y+x^2=c$;

求 $\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 之積分,得 $\log y+x=k$, 即 $y=ce^{-x}$.

故得題之通解爲 $(2y+x^2-c)(y-ce^{-x})=0$.

習題 2. $xp^2-2yp-x=0$.

求 p 得 $p=\dfrac{y\pm\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 故吾人今實有方程式二,即

$$xp-y=\sqrt{x^2+y^2},$$

與

$$xp-y=-\sqrt{x^2+y^2}.$$

二式須分別解之.

$$\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=dx \text{ 可書爲 } \frac{xdy-ydx}{x^2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=\frac{dx}{x},$$

求積分,得

$$\log\left[\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]=\log x+k, \text{ 即 } \frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-cx=0$$[1]

*按(3)式各因子既各自單獨的適合(1)式,各因子用同一 c 字之理,似可討論.若吾人認(1)爲 n 個方程,各由(2)中每一因子等於零後而成(按解題過程,實係如是),則吾人既有 n 個方程,(3)中各因子(即各個方程之解)中之常數,自應各個不同.但若吾人所求之解爲(1)之一個單獨式的通解,則按4節原理,任意常數即不容多於一個,而(3)之爲(1)之通解,既係由每一因子,各各適合於(1)而成,故吾人在各因子中,用同一之字表其常數,於理論上亦無所失.

1 將此式化爲有理式時,其式與通解相同故上頁之原註云云.

用同樣方法,求 $xp-y=-\sqrt{x^2 x y^2}$ 之積分,得

$$-\log\left[\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]=\log\left[\frac{1}{\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\right]$$

$$=\log\left[\frac{\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{-1}\right]=\log x+k,\text{ 卽 } \frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-cx=0.$$

故得題之通解爲 $\left[\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-cx\right]\left[\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-cx\right]=0,$

卽　$$c^2x^2-2cy-1=0.$$

習題 3.　$y^2+p^2=1.$

解 p,得　$p=\pm\sqrt{1-y^2}$.　$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx$ 之解,爲 $\sin^{-1}y=x+c,$

卽 $y=\sin(x+c)$.　$\frac{dy}{-\sqrt{1-y^2}}=dx$ 之解爲 $y=\cos(x+c)$. 因 c 爲一完全任意之常數,故兩解中任取其一,卽爲本題之通解* 蓋 $\sin(x+c+\frac{\pi}{2})=\cos(x+c)$ 也.

*本題解中之 c,在兩解[卽 $y=\sin^{-1}(x+c)$ 及 $y=\cos(x+c)$]之中俱非二次式,或者將疑此題於20節之理將成一例外.此實非是.緣20節所論 c 之次數係先預設 c 之發現係屬代數式[1],而本解中 c 之發現則實係超越式.[2] 如將本題之解書作 $(\sin^{-1}y-x-c)(\cos^{-1}y-x-c)=0$,則 c 之次數即爲二次,與20節理即無不合矣.實則20節之理,原發生於在二次微分方程之下,經過一普通地位之點,能過兩個積分曲線.故在此題雖對於一對 x, y 之値, c 之可適合 $y=\sin(x+c)$ 者,其値無限,然過此點之不同曲線,仍祇有兩個.再, c 之實屬兩次之理,更可以下列稍繁方法說明之.設 c 爲任一數,吾人可書 $\sin c=\frac{1-k^2}{1+k^2}$,因有 $\cos c=\frac{2k}{1+k^2}$,再用 $\sin(x+c)=\cos c\sin x+\sin c\cos x$ 之關係得題之解式爲

1　發現係屬代數式 enters algebraically.

2　超越式 transcendental.

習題 4. $(2xp-y)^2=8x^3$.

習題 5. $(1+x^2)p^2=1$.

習題 6. $p^3-(2x+y^2)p^2+(x^2-y^2+2xy^2)p-(x^2-y^2)y^2=0$

25 方程中之可以解為 y 之等式者. 如方程中之 y 可以解出,則下法頗有用.設解得之式為

$$y=\psi(x,y) \tag{4}$$

求其微分得

$$p=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}, \tag{5}$$

係一個二級微分方程.但因式中並無 y,故可作 x 與 p 二變數之一級微分方程觀.此(5)之積分或屬可求,設其解為

$$\omega(x,p)=0. \tag{6}$$

由(4),(6)消 p,得

$$\phi(x,y,c)=0. \tag{7}$$

如(4)之一解,因式含有一個任意常數,故實為其通解.

(7)為(4)解之理,可依下述成立:因(5)為(4)之微係數,故每一(4)之解必為(5)之解(視(6)為 x,y 兩變數之二級方程).因(6)為(5)之解,故每一(6)之解(視(6)為 x,y 兩變數之微分方程).亦為(5)之解.(4)與(6)俱為(5)之第一積分[1].因(4)含 y 而(6)則否,故此兩個第一積分係獨立而不相依.(4)之積分曲線其數無限*,而(6)之積分曲線,亦對於每一 c 值其數無限.求兩種積分曲線羣所共有之公共曲線,吾人須先求一方程,在其所表軌跡之任一點上,

---

*茲依幾何方面說明,係為簡便出此,並非理論上所必須也.

1 第一積分 first integral 或曰初次積分.

(4) 與 (6) 之 p 其值相同*.但由 (4),(6) 消 p 所得之式正合此條件,緣對於每一 c 值,吾人由此可得一個 (4) 之積分曲線也.故視 c 爲任意常數,吾人得 (7) 爲題之通解†.

注[1] —— 此法亦適用於一次方程,見下習題 4.

按.——(6) 之積分有時亦易求出.若然,則有積分.

(8)　　$\Phi(x, y, c, c')=0$

內含兩個常數.(8) 爲 (5) 之通解,故亦含 (4) 之通解(在一種 c 與 c' 關係之下).此 c 與 c' 之關係,可由代 (8) 入 (4),視其如何可以適合之條件以決定之.但在實際,此法不如前法之便.

習題 1.　$2px-y+\log p=0$.此卽

(1)　　$$y=2px+\log p.$$

求微分,得　　$$p=2p+\left(2x+\frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx},$$

卽　　$$p\,dx+2x\,dp+\frac{1}{p}dp=0.$$

察題易見 p 爲一積分因子,引用後得

$$p^2dx+2px\,dp+dp=0.$$

求積分得

(2)　　$$p^2x+p=c.$$

消 (1) 與 (2) 之 p,題解卽得.

*20 節曾已言及,一級微分方程,可視爲一個規定 p 值之關係(p 爲在積分曲線一 (x, y) 點上之斜度).

† 由 (4),(6) 消 p 之手續中,有時可引入額外因子[2].故錯誤亦可由此引入.爲避免起見,吾人宜將 (7) 代入 (4) 中,以驗其是否適合.

1 注 note.　2 額外因子 extraneous factors.

按.——此題第二式之 p,雖易於解出,(故以之代入(1)中,卽可得一消 p 後之公式).但此結果,式頗不簡.比較便利,不如視 p 爲一參數[1],而將(1),(2)兩式各書成 p 之函數,如

$$\begin{cases} x=\dfrac{c-p}{p}, \\ y=\dfrac{2(c-p)}{p}+\log p. \end{cases}$$

如是則此兩式之合用,卽可認爲本題之解案.

此類參用參數公式,他時亦常引用;例如橢圓公式參用離心角[2] θ 參數時,可書爲

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y= b\sin\theta. \end{cases}$$

又如圓點平旋線[3],常書爲 $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta), \end{cases}$

皆其例也.

習題 2. $4xp^2+2xp-y=0.$

式可書爲 $y=2xp+4xp^2,$

求其微分並化爲因子式,得

$$(4p+1)(2x\frac{dp}{dx}+p)=0.$$

因子 $4p^2+1$ 之意義,以下32節注中當有說明,茲暫置而不論.由第二因子求積分,得解爲 $xp^2=k^2$.

故題之解爲 $y=2k\sqrt{x}+4k^2$,或(易 $2k$ 爲 c 後)$y=c\sqrt{x}+c^2$. 化爲有理式,得

$$(y-c^2)^2=c^2x.$$

再易 c^2 爲 C,得 $(y-C)=Cx$

1 參數 parameter,或曰襄變數.

2 離心角 excentric angle,.

3 圓點平旋線 cycloid,或曰擺線,亦曰旋輪線.

習題 3.　$xp^2-2yp-x=0$.（24 節,習題 2）.

習題 4.　$p+2xy=x^2+y^2$.

習題 5.　$y=-xp+x^4p^2$.

習題 6.　$p^2+2xp-y=0$

26.　方程之可解為 x 之等式者.　為方程之 x 可以解出,則與上節同樣之法,可以引用,以解原式.設原方程可書為

$$x=\theta(y,p) \tag{9}$$

求其 y 之微分,得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial p}\frac{dp}{dy}. \tag{10}$$

式中不復含有 x,故此式可認為 y 與 p 之一級方程.若此式之積分可求,則吾人得一含有一任意常數之關係如下,

$$\chi(y,p,c)=0 \tag{11}$$

由(9)與(11)消去 p,卽得本題之通解.

習題 1.　$x+py(2p^2+3)=0$

習題 2.　$a^2yp^2-2xp+y=0$.

習題 3.　$xp^2-2yp-x=0$.（25 節,習題 3.）

習題 4.　$p^3-4xyp+8y^2=0$.

習題 5.　今有一曲線羣,其法線之長（由切點至 x 軸）等於法線在 x 軸上之截段之平方根,求其公式.

27. 克雷勞方程*. 如方程之式可書爲

(1) $$y=px+f(p),$$

內 $f(p)$ 爲 p 之一任意函數,則解案非常易得.故吾人對於此類方程式樣,應加特別注意,以期一望可以卽知其解†.

用25節法,求(1)微分得

$$p=p+[x+f'(p)]\frac{dp}{dx}=0,$$

卽
$$\frac{dp}{dx}[x+f'(p)]=0.$$

因子 $x+f'(p)$ 中不含微分式,可置不論(參閱32節注).吾人由

$$\frac{dp}{dx}=0 \text{ 得 } p=c.$$

代入(1)式,得

(2) $$y=cx+f(c),$$

卽爲(1)之通解.

習題 1. $(px-y)^2=p^2+1$.

解 y 得 $$y=px\pm\sqrt{p^2+1}$$

此係克雷勞式,故卽立知其解爲

$$y=cx\pm\sqrt{c^2-1}.$$

卽 $$(cx-y)^2=c^2+1.$$

*此名卽從 Alexis Claude Clairaut (1713–1765) 而得.氏爲引用25及26兩節方法以解微分方程之第一人.彼用此節方法因以得名之文,見1734年出版之 Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.

†學者應不待方程式已將 y 解出時,卽能認明此式.此式特點係 x 與 y 之發現,祇有 $y-px$ 一式,故凡含有 $y-px$ 及 p 之函數等於零時,如 $f(y-px,p)=0$,卽爲一克雷勞式,其解案卽爲 $f(y-cx,c)=0$.(習題 1.)

習題 2. $4e^{2y}p^2-2xp-1=0$

令 $e^{2y}=t$,則 $p=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2t}\dfrac{dt}{dx}$,而原式變爲

$$t=x\frac{dt}{dx}+\left(\frac{dt}{dx}\right)^2.$$

故知其解爲 $t=cx+c^2$ 即 $e^{2y}=cx+c^2$.

按.——如上題例,有時先將變數變換,可將本不能用以上各種方法解出之方程,化爲比較極簡之式.惟此種變換變數之法,惜乎頗不易一閱而知.實際解題,祇有經驗一事,足爲吾人選取變換方法之助.

習題 3 $4e^{2y}p^2+2e^{2x}p-e^{2x}=0.$

令 $e^x=u$, $e^{2y}=v$, 則 $p=\dfrac{u}{2v}\dfrac{dv}{du}$, 而方程變爲

$$v=u\frac{dv}{du}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

因得其解爲 $e^{2y}=ce^x+c^2$.

注.——驟觀此題,吾人或可取 $e^{2x}=u$ 及 $e^{2y}=v$ 之變換,但如是則得式爲 $v=2u\left(\dfrac{dv}{du}\right)+4u\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$. 此雖非克雷勞式,然其積分亦自可求.(參閱25節,習題2.)故此法變換數亦屬有効.

習題 4. $e^{2y}p^3+(e^{2x}+e^{3x})p-e^{3x}=0.$

習題 5. $xy^2p^2-y^3p+x=0$.(令 $x^2=u$, $y^2=v$.)

習題 6. $(x^2+y^2)(1+p)^2-2(x+y)(1+p)(x+yp)+(x+yp)^2=0.$ (令 $x+y=u$, $x^2+y^2=v$).

習題 7. $y=2px+y^2p^3$.(令 $y^2=v$.)

習題 8. $a^2yp^2-2xp+y=0$ (29節,習題2.)(令 $2x=u$,$y^2=v$.)

習題 9. $(xp-y)^2=x^2(2xy-x^2p)$

28. 本章提要. 如所論之題爲一級高次方程則試解之法計有三種*,依下列次序以爲先後:

1° 將 p 解出,然後解其由此所得之各個一次方程(24節).

2° 將 y 解出,求其 x 之微分,再求此微分方程之積分,由此積分與原式消 p,即得原式之解案(25節).

3° 將 x 解出,求其 y 之微分,由此微分方程求積分,由此積分與原式消 p,即得原式之解案(26節).

克雷勞式(29節)因其解案易於書出,曾於本章中特別提出,此式之解原係由2°法而得.

如上述各法均不能用,則由變換變數或可將方程化爲簡式以便引用已知各法.

有時就題之式,吾人即能先知某數種方法可以引用(或各法皆可引用.)此際如遇困難,常在代數方面或積分方面,而不在微分方程方面.例如下列各例:

(a)如式中之 p 係爲代數式,而各係數中 x, y 均係齊次而且同次,則各係數由主要係數[1]遍除後,俱變爲零次的齊次式,故吾人若將 p 解出(p 原設爲代數式,故此亦係一代數手續),吾人將得多數方程,其中之 p 各等於一個 x, y 的零次的齊次函數.爾時再用 $y=vx$ 變換後,其各方程之變數均屬可以分離(10節),而其解案均可由求積法得之.

再因以主要係數遍除各項後,原方程變爲一個 p 與 $\frac{y}{x}$ 之函數.故式可書爲 $f\left(p, \frac{y}{x}\right)=0$. 若解其 y $\left(或 \frac{y}{x}\right)$, 則得 $y=x\psi(p)$. 求其微分得

$$p=\psi(p)+x\psi'(p)\frac{dp}{dx}, \text{ 即 } \frac{\psi' dp}{p-\psi(p)}=\frac{dx}{x},$$

其中變數業已分離矣.

*各法並非互絕,故有時兩法或三法可同屬適用於原題.

---

1 主要係數 leading coefficient, 即指 x 最高羃 (the highest power of x) 之係數.

故在此例之下,1° 與 2° 兩法,俱可適用,惟以 p 及 y 之可以解出爲先決問題.

(b)如方程中無 x, 則式可書爲 $f(p, y)=0$, 解 p, 得 $p=\frac{dy}{dx}=\psi(y)$,即 $\frac{dy}{\psi(y)}=dx$.

或解 y, 得 $y=\psi(p)$, 求微分,得 $p=\psi'(p)\frac{dp}{dx}$, 卽 $\frac{\psi'(p)\,dp}{p}=dx$, 其中變數業已分離矣.

故在此例下, 1°, 2° 兩法亦俱可用.

(c)如方程中無 y, 則式可書爲 $f(p, x)=0$, 學者可取此作習題,自證,如式中之 p 與 x 可以解出,則 1°,3° 兩法,俱可引用.

(d)如方程中 x 與 y 均屬一次,式可書爲 $xf_1(p)+yf_2(p)+f_3(p)=0$,* 則 2° 法可易見其爲適用,稼解 y 得

$$y=x\psi_1(p)+\psi_2(p).$$

求微分得　$$p=\psi_1(p)+[x\psi_1'(p)x\psi_2'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

視 p 作一自變數,上式可書爲

$$\frac{dx}{dp}+x\frac{\psi_1'(p)}{\psi_1(p)-p}=\frac{\psi_2'(p)}{p-\psi_1(p)},$$

係一線性方程式,可由13節法求積解之.

習題 1.　$y^2(1+p^2)=a^2$.

習題 2.　$yp=(x-b)p^2+a$.

習題 3.　$x^2p^2+x^2yp+1=0$

習題 4.　$3p^2x-6yp+x+2y=0$.

習題 5.　$y=p^2(x+1)$.

習題 6.　$(px-y)(py+x)=a^2p$.（令 $x^2=u$, $y^2=v$.）

習題 7.　$p^2+2py\cot x=y^2$.

*克雷勞方程係此式之一個特例.

習題 8. $(1+x^2)p^2-2xyp+y^2-1=0$.

習題 9 $x^2p^2-2(xy+2p)p+y^2=0$.

習題10. $y=xp+\dfrac{yp^2}{x^2}$.（令 $x^2=u, y^2=v$）

習題11. $x^2p^2-2xyp+y^2=x^2y^2+x^4$.

習題12. $\dfrac{y-xp}{\sqrt{1+p^2}}=f(\sqrt{x^2+y^2})$.（令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$）

習題13. 今有曲線一羣,其切線與原點間之距離,與其切點與原點間之距離同變[1],求其公式.

習題14. 今有曲線一羣,自其線上一定點至線上某一點之弧長正方,等於一常數乘此某點之縱坐標,求其公式.（令此常數因子為$4k$以求之.）

習題15. 今有曲線一羣,在其任一切線上,有一物質由靜而動沿切線而下,其達於 x 軸所需之時間俱各相同,求其公式.

[如23節,習題2,物質在 t 時內所經過之距離為 $\dfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha$.此處 $\sin\alpha=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, 故經過距離等於 $\dfrac{y\sqrt{1+p^2}}{p}$, 參閱21節,(g).]

---

1 吾人云 a 與 b 同變 (a varies as b) 或云 a 為 b 之正變,或云 a 與 b 成比 (a is proportional to b), 或云 a 等於一常數乘 b (a is equal to a costant times b), 意義均屬相同.

第五章

異　　解

29. 包線[2]. 前已論及,如 c 爲一任意常數,則 $\phi(x,y,c)=0$ 代表一曲線羣,而對於每一 c 值,羣中有一定線[3](本章中之 c 始終設爲一有理數)故若令某曲線爲對於某 c 定值之相當形,則由 c 值之連續變動,吾人即得相當的繼續曲線之形*.

吾人今所將加討論者,乃爲每一曲線與其鄰線之最後交點之軌跡[4].吾人所爲最後交點者乃一線與其鄰線在最後相合時,交點之極限地位.[5](例如在下注之圓羣中,其最後交點乃爲其垂於 x 軸之各直徑的兩端).此軌跡之推求,吾人依下述程序而進行:例如設

(1) $$\phi(x,y,c)=0$$

爲對於某一選值[6]之 c 的相當曲線,則

(2) $$\phi(x,y,c+\Delta c)=0$$

*例如在半徑同長(設爲 r),心在 x 軸之圓羣 $(x-c)^2+y^2=r^2$ 中,若 $c=0$,則得一心在原點之圓,若令 c 漸次變大,則得無數之圓逐漸外移,其心皆爲 $(c,0)$ 點.

1 異解 singular solutions, 亦曰奇解,曰單解.

2 包線 envelope. 3 一定線 A definite curve.

4 最後交點之軌跡 the locus of the ultimate points of intersection.

5 極限地位 limiting position. 6 某一選值 some chosen value.

爲一鄰線之方程,內 $\triangle c$ 爲一有盡常數[1]而異於零.欲求二線之交點,吾人須解(1),(2)兩式以求其 x, y 之值,或則解(1)與常數乘(2)與(1)之差,此差卽

$$\frac{\phi(x, y, c+\triangle c)-\phi(x, y, c)}{\triangle c}=0. \tag{3}$$

兩線最後交點之推求,可由(1)與3在 $\triangle c$ 近零時之極限[2],卽

$$\frac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial c}=0,$$

會合求之.然由(1)及(4),交點處 x, y 之值雖可求得但吾人所求實不在此一點,而在所有各種 c 值下之交點的軌跡.此則須由(1),(4)消 c 而得也.由此所得之包線,稱爲曲線羣(1)之包線,下述一種包線的性質,吾人亦有時引用.其義曰:在包線上任一點處,必有羣中一線與之相切.此理可因下圖而明.設(I),(II),(III)爲羣之三線在最後時相合.又設 a 爲( )與(II)之最後交點,b 爲(II)與(III)之最後交點,故兩者皆屬包線上之點,而連此兩點之線,最後必爲包線之切線.但此兩點亦均在於(II)上,故此兩點之連

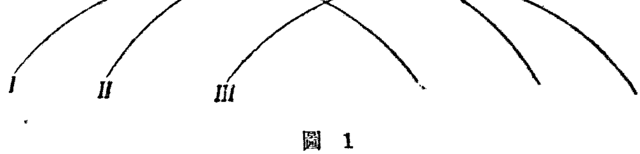

圖 1

1 有盡常數 a finite constant quantity. 有盡 Finite, 亦曰有限.

2 原文云 with what (3) becomes when we let $\triangle$c approach the limit O.

線亦成爲(II)之切線,故云,(II)在 a, b 兩點極限處與包線相切*.

習題. 求本節注中所論圖羣之包線(見 $p.61$).

30. 異解. 設

(1)　　$\phi(x, y, c)=0$

爲 $f(p, x, y)=0$ 之解.吾人曾由幾何方面推論,謂 ϕ, f 兩式間之關係,實爲在(1)羣中過 x, y 點之曲線上,切於(x, y)點上之切線的斜度,與 $f(p, x, y)=0$ 中對於此點之 p 值,兩兩相同.但上節吾人又云,在包線上一點之切線,與羣中過此點之曲線的切線相合.職是之故,包線之方程應適合於微分方程,而亦應爲後者之一解.再,包線大抵都不屬於線羣,故其方程不能由與(1)中之 c 一定值而求得,其方程係微分方程之一解,但與通解不同.方程中無任意常數,且亦非一特解,因其特性如此,故名曰異解.

習題 1.　$y=px+\dfrac{1}{p}$.

此係克雷勞式,其解爲 $y=cx+\dfrac{1}{c}$, 即 $c^2x-cy+1=0$.

*如(2)之極限地位,係(II)上一異點(如重點或齒點等,參閱33節,圖2),則本節之理即不適用.如各線具有異點,則此異點之軌跡,當對於幾何及代數上之包線條件同時滿足.包線一詞,習慣上常用以表示羣中曲線最後交點之軌跡,其在軌跡上任一點處,必有羣中一線與之相切.

---

1 異點 singular point, 亦曰奇點,曰單點.

2 重點 double point, 亦曰雙點,曰叠點.

3 齒點 cusp, 亦曰尖點,或曰迴切點.

求 c 之微分得

$$2cx-y=0$$

消 c, 得 $$y^2=4x.$$

爲題之異解.

習題 2. $xp^2-2yp-x=0$.

此題曾見24節,習題 2, 其解爲

$$c^2x^2-2cy-1=0$$

求 c 之微分得 $cx^2-y=0$.

消 c, 得異解爲 $x^2+y^2=0$.

31. 判別式[1]. 設 $f(z)$ 爲 n 次之多項式

$$cz^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n,$$

由戴勞定理[2],吾人有下列各式,

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n,$$

內 $$f'(a)=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=a}=nc_0a^{n-1}+(n-1)c_1a^{n-2}+\cdots+2c_{n-2}a+c_{n-1}$$

$$f''(a)=\left(\frac{d^2f(z)}{dz^2}\right)_{z=a}=n(n-1)c_0a^{n-2}+(n-1)(n-2)c_1a^{n-3}+\cdots+2c_{n-2},$$

....

$$f^{(n)}(a)=\left(\frac{d^nf}{dz^n}\right)_{z=a}=n!c_0.$$

---

1 判別式 discriminant.

2 戴勞定理 Taylor's theorem. 戴勞亦譯台勞,亦譯戴勒.

令 $h=z-a$, 得

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n.$$

由此易見,如 a 爲 $f(z)$ 之一根,卽 $f(a)=0$, 則 $f(z)$ 必有一因子爲 $z-a$. 反之,如欲令 $f(z)$ 具有一因子爲 $z-a$, 則 $f'(a)=0$ 爲必須同樣,若 a 爲一重根,則 $(z-a)^2$ 爲 $f(z)$ 之因子,而 $f(a)=0$ 及 $f(a)=0$ 爲必須.反之,若 $f(a)=0$ 及 $f'(a)=0$ 則 $f(z)$ 應有 $(z-a)^2$ 爲其因子,而 a 爲一重根*.是故 $f(z)$ 能有重根之必要與充分條件,爲 $f(z)$ 與 $f'(z)$ 有一共同之根(設爲 a).或云兩者一共同之因子(設爲 $z-a$).此事條件,顯係與 $f(z)$ 之係數相關.此相關之式,在等於零時表示 $f(z)$ 有重根之必要與充分條件,乃一含有 $f(z)$ 各係數之一個有理函數,其名謂之 $f(z)$ 之判別式.由代數可證,此式與方程各根之差之平方積[1](再乘以一常數 c_0 以去分數)相同.式之推算,法頗不一.按 $f(z)$ 與 $f'(z)$ 二函數推求最大公約數時,卽可示吾人以兩函數之有無公因子 $z-a$. 但此法容易引入額外因子[2].較好之法,爲由 $f(z)$ 與 $f'(z)$ 消 z 一術(或由 $nf(z)-zf'(z)$ 與 $f'(z)$ 兩 $n-1$ 次之函數消 z,於實際更便).此消 z 之結果,實得一含有 $f(z)$ 式中所有各係數之關係,表示 $f(z)=0$ 及 $f'(z)=0$ 合乎具有同根之條件.此關係式各項俱遷方程一端,並將式中所有根式及分數式盡行化去後,卽爲判別式等於零之式.此稱爲判別式關係.兩多項式間消去未知數之法甚多,在方程論書中大致均有詳論.

---

*由同樣理由,易知 $f'(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0,\cdots\cdots$, $f^{(r-1)}(a)=0$, 爲 a 爲 r 次重根之必要與充分條件.

1 原文云 the product of the squares of the differences of the various roots.

2 額外因子 extraneous factors.

但就此章需要而論,則吾人祇須記明az^2+bz+c之二次式的判別式爲b^2-4ac,及az^3+bz^2+cz+d之三次式的判別式爲$b^2c^2+18abcd-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2$,已足應用.

如視$\phi(x,y,c)=0$爲c之方程式,則式中係數爲x,y之函數.有時或可求得x,y之相當值,使方程具有等根.在幾何方面,此義猶言,經過此等之點處積分曲線之數,比平時爲少,緣與每一c值相當,吾人應有一個不同[1]的積分曲線也.判別式之關係卽表此等點之軌跡.

32. 由微分方程直接求得之異解. 求$\phi(x,y,c)=0$之包線方程,旣與求其判別式關係,屬於一同一問題,吾人因知經過包線上任意一點之處,積分曲線之數,比經過平面上普通地位之點[2],其數較少.換言之,卽經過包線之點,至少有兩個積分曲線,係屬相合.(例如前注所論之圓羣,經過其包線上任一點處祇有一圓,而在其他地位之點,可有兩圓經過其處.)

經過包線上任一點處,旣至少應少一積分曲線,則切於曲線上之切線數,經過此等點處,亦至少須少一個.故在包線點上,微分方程$f(p,x,y)=0$(此係定經過x,y點處之積分曲線之切線的斜度之式[3])之根,亦至少應有兩個相同.換言之,卽在包線點上,$f(p,x,y)=0$與$\dfrac{\partial f(p,x,y)}{\partial p}=0$,應有同根.職是之故,由此二

1 不同 distinct 亦曰各異.

2 普通地位之點 points of general position in the plane.

3 原文云 which defines the slopes of the tangents to the integral curves through the point (x,y).

方程消去 p 後之結果,亦予吾人以包線方程.故此項結果,苟能求得,卽係一異解.(參閱33節).

注.——上章解題時,曾遇有因子亦可出解,當時因其不含任意常數,故置而不議,此類因子,實常引出異解,於今可以言明矣.例如在27節之克雷勞式(1) $y=px+f(p)$ 中,吾人曾將因子(2) $x+f'(p)=0$,捨置不論.但此實係(1)式之 p 的微分.故吾人若將 p 由(1)與(2)消去,吾人即得題之異解.又如在25節,習題 2 中,吾人曾置因子 $4p+1=0$ 於不論.但如吾人將 p 由此式與原式消去,則吾人卽得 $x+4y=0$,爲原式之一個異解,惟非其異解之全部分.此題之 d 的判別式及 c 的判別式,蓋皆爲 $x(x+4y)=0$.以上二例,實示吾人以此類因子之發生,即顯原題含有異解之事.但異解之存在,却不必定有此類因子之發生.換言之,卽此類因子之是否發生,不能視爲推求異解之道,惟事實上如遇其事,宜將此類因子,加以討究,以視其所能引起之結果.

按.——若一方程有兩個等根,則方程之根至少有兩個,故一級一次方程不能有異解發生.但高次方程却亦可不生異解,此則頗係常事.

學者可自證,一級高次方程之可化爲祇含一次式之 p 及有理式之 x 與 y 之因子者,不能發生異解.以當練習.

又按異解所生之結果,有時比通解結果,更有趣味.

例如,今有曲線,其切線在坐標兩軸間之截段,係一常數 l,試求其式.

由21節公式(e),得

$$y^2\left(\frac{p^2+1}{p^2}\right)-2xy\left(\frac{p^2+1}{p}\right)+x^2(p^2+1)=l^2,$$

即

$$(y-px)^2\left(\frac{p^2+1}{p^2}\right)=l^2.$$

此係克雷勞式(27節)其通解化爲y等式後,爲

$$y=cx\pm\frac{cl}{\sqrt{c^2+1}}.$$

此式代表一羣直線,其截於縱橫兩坐標軸間之線段,俱爲l.於吾人實際有興趣之曲線,乃在其求出異解時之所得.此可由題之p的判別式,或c的判別式(在克雷勞式下,兩者實相同)求得之.其式爲

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}},$$

係一四齒形圓點內旋線[1].

習題 1. 今有曲線,自兩定點至其切線之垂直距離之乘積[2]等一常數,求其公式

習題 2. 今有曲線,自其切線至原點之距離常各相等,求其公式.

習題 3. 今有曲線,其切線與坐標軸所成三角形之面積常爲a^2,求其公式.

習題 4. 今有曲線,其切線所割兩坐標軸之截段,其和爲一常數,求其公式.

1 四齒形圓點內旋線 hypocycloid of four cusps. 圓點內旋線,或曰內旋輪線.

2 原文爲 the product of the perpendiculars drawn from two fixed points to any tangent

習題 5. 求下列各方程之積分並討究其異解:

$$x^2p^2-2(xy-2)p+y^2=0,$$

$$(y-xp)^2=b^2+a^2p^2;$$

$$xp^2-y=0.$$

33. **額外軌跡**[1]. 前曾云 c 之判別式者,乃一軌跡之方程,經過此跡上之點處,積分曲線之數,比常時爲少.今如積分曲線具有重點,則過此重點,實有此曲線之兩部份.但微分方程之次若爲 n,則 p 値亦衹有 n.故過此重點,除上述之曲線外,衹許有其他曲線 $n-2$ 個.故此點亦應屬於 c 判別式之軌跡.故若具有重點(亦稱結點[2])之積分曲線,爲數無限,則此結點軌跡,當亦含在 c 的判別式之內.除此軌跡有時亦爲包線外,此軌跡之方程,不

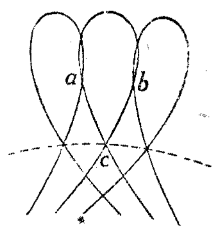

圖 2

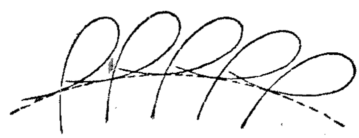

圖 3

能適合於微分方程.圖 2 所示爲一常例,圖 3 所示則一例外也.

細察圖 2,可明何以結點軌跡方程(通常情形,結點軌跡不兼爲包線),應在求包線方程時發現之理.在此圖中,有鄰線三,最後相套合.虛線所表,爲其結點軌跡.此軌跡上之任一點如 c,皆係中間曲線與兩旁任一曲線之交

---

1 額外軌跡 extraneous loci.

2 結點 node, 亦曰結.

點的極限地位(即 a 或 b 之極限地位).但在29節圖1之中,a 與 b 係由鄰點[1]地位,而相合於中間曲線之上,若在圖2,則 a 與 b 之相合,其情形不同.鄰點云云者,乃點之沿曲線上同一部份移動,漸至相合者.若由29節理論而定曲線爲一異解(39節),則吾人須用切線字義限於線之經過兩鄰點之意.若吾人採用廣義,視切線爲經過兩個隨意重合點之線,則結點軌跡亦不妨視爲一種軌跡,在跡上一點處,與曲線羣中一線相切[2].

重點之一特例爲齒點,齒點者結圈[3]縮爲點,曲線兩部份在此相切時之重點的極限地位也.齒點軌跡之方程謂之齒點軌跡,其方程亦在推求包線時求得,其式亦祇在其兼爲包線時方可適合微分方程(如圖4),此外則均不能爲微分方程之解也(如圖5).

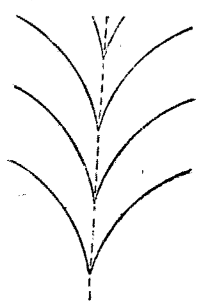

圖 4

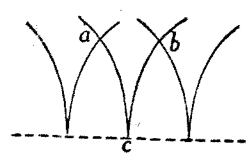

圖 5

在齒點之處,非特積分曲線之數,在此經過者,比平時至少須少一個,故其 c 的判別式應等於零,且因曲線兩部份上之切線在此相合,p 值在此應有兩個相同,故其 p 的判別式亦等於零.職是之故,齒形軌跡應亦在 p 的判別式中發現.

1 鄰點 consecutive point.

2 此句之意,卽云廣義的界說,非本書所採用,故包線軌跡不能由此而生.與 p.63 末段所云,互相關照,皆係限制本書所爲包線意義之辭.

3 結圈 loop,簡言曰圈.

以上所論之額外軌跡(或爲微分方程之解,或屬非是),皆係由積分曲線之具有特別性質而生.故如積分曲線已先知其無結點或齒點,則結點軌跡或齒點軌跡,亦已知其不能發生.但額外軌跡亦有不因積分曲線之性質而生者,例如若兩積分曲線相切,而在切點處所過積分曲線之數,並不減少時,其所有不同值之 p 爲數必減少,故在此點之處,p 的判別式應等於零,而此類點之軌跡苟若存在,應於 p 的判別式中發現.此種軌跡謂之切點軌跡[1].其方程有時適合於微分方程,亦或有時不能.例如 p.61 注中,所論之圓羣,其 p 的判別式爲 $y^2(y^2-r^2)=o$;此中 $y=\pm r$ 爲包線,而 $y=o$ 實爲一切點軌跡.實驗方程,則見 $y=o$ 並不適合於微分方程.

按.——有時參數變近某一個定值之際,羣中曲線變近一極限曲線,其形與其他曲線各各不同.此種線羣中之特別曲線,常有與羣中各線,在一定點處一一相切之特性.在此定點之外(在此點上所過曲線爲數無窮[2]),經過此特別曲線任一點處,其積分曲線之數,皆比平時爲少.故此曲線之軌跡應於 p 的判別式及 c 的判別式中同時發現.且此曲線之解之相當因子應在 c 的判別式中發現一次,在 p 的判別中發現三次.

例如在24節,習題 4 中積分曲線,係一羣三次曲線,皆在原點與 y 軸相切者(參閱20節,習題8).其方程式爲 $y^2=2x(x-c)^2$. 當 $c=\infty$ 時,其線之式爲 $x=o$, 係一切線與其餘各線皆在原點相切.其 c 的判別式爲 xy^2,p 的判別式爲 x^5. 後式中尚多一 x^2 因子之故,則因 $x=o$ 亦爲一切點軌跡,係 $c=\pm\infty$ 時之一個特解.

---

1 切點軌跡 tac-locus.

2 無窮 infinite, 亦曰無限.

在1888,年間黑爾(Mr. J. M. Hiel)曾證明*,在 c 的判別式中,與包線相當之因子發現一次,與結點軌跡相當之因子發現二次,與齒點軌跡相當之因子發現三次;在 p 的判別式中,與包線相當之因子發現一次,與切點軌跡相當之因子發現兩次,與齒點軌跡相當之因子發現一次.總合結果可列表如下:

c 的判別式中		p 的判別式中	
包線	1	包線	1
特別曲線	1	特別曲線	3
結點曲線	2	切點曲線	2
齒點曲線	3	齒點曲線	1

凡一種軌跡兼屬兩行名下,則其相當因子之發現,應與表中各行對面之總列數相同.例如若有一切點軌跡兼爲包線,則其因子應發現於 c 的判別式中一次而發現於 p 的判別式中共爲三次.又例如若有一齒跡軌跡兼爲包線,則其因子應發現四次於 c 的判別式中,兩次於 p 的判別式中.餘例類推

此表頗足爲驗算之助,惟祇能視爲一助,却不應視爲區分判別式結果之惟一線索.緣判別式推求之中,極易引入額外因子,或遺漏其本有因子,故運算苟不細心,則所得之各因子發現之次數,未必正確,因而吾人結論,常易致誤.實際運算,宜將 c 及 p 之判別式,同時求出,並將各個因子代入微分方程,以驗其是否適合.如是則在一種判別式中,倘將一因子遺漏,其在他判別式中之發現,可以爲改正之助,否則盲用表中列數,必予所得結果以一非正當的解釋.

*見 Proc. Lond. math. Society, Vol, XIX, p.561.

疑誤之事,有時亦可決其不生.例如方程次數若爲二或爲三,則用31節之判別式必得正確因子之數.又如積分曲線若爲直線(凡式爲克雷勞式者均屬此類),則額外因子必不發生,亦無須探求.

再方程所表積分曲線如爲錐線,則結點軌跡與齒點軌跡二種,易見其必不能發生.

試論下列各題之異解與額外軌跡:

習題 1. $xp^2-(x-1)^2=0$.

題之通解爲

$$9(y+c)^2=4x(x-3)^2,$$

此係一種結形三次線羣[1],其中每一曲線各與 y 軸相切,且各有結點在 $(3,c)$ 處.

p 的判別式爲 $x(x-1)^2=0$, c 的判別式爲 $x(x-3)^2=0$

彙觀兩式,卽見 $x=0$ 爲兩個判別式所共有,且適合於微分方程(因在 $x=0$ 之直線的任何一點之上,常得 $p=\infty$).故知此爲題之一異解.

$x-1=0$ 祇在 p 的判別式中發現(注意此式嘗發現兩次)故知此係一結點軌跡.

$x-3=0$ 祇在 c 的判別式中發現(注意此式嘗發現兩次),故知此係一結點軌跡.

習題 2. $8(1+p)^3=27(x+y)(1-p)^3$.

題之通解爲

$$(x-y+c)^3=(x-y)^2.$$

---

1 結形三次線羣 a family of nodal cubics.

討論此題,因若用本題係數代入31節判別式中,計算頗不便利,故茲先變換其變數如下:

令 $x+y=\xi \quad x-y=\eta.$

原式因此變爲

$$27\xi\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^3=8,$$

而其通解變爲 $(\eta+c)^3=\xi^2.$

p 判別式的關係爲 $\xi^2=0$, c 判別式的關係爲 $\xi^4=0.$

$\xi=0$ 係兩判別式所共有,且適合於微分方程,故知 $\xi=0$, 即 $x+y=0$ 爲一異解.此亦係一齒形軌跡,此可由作半三次拋物線[1] $(\eta+c)^3=\xi^2$ 之圖數個(圖 4)以見其形.檢查前表,可見按因子發現之數而論,亦應得如此之結果也.

習題 3. $4p^2=9x.$

題之通解爲 $(y+c)^2=x^3.$

p 判別式關係爲 $x=0$, c 判別式關係爲 $x^3=0.$

$x=0$ 不適合於微分方程,此係一齒點軌跡.

習題 4. 討論下列各方程之異解與額外軌跡:

$y(3-4y)^2p^2=4(1-y).$

24節,習題 3,4,5. 25節,習題 5,6, 26節,習題 2,4. 27節,習題 2,6, 28節,習題 1,2,3,5,11.

習題 5. 26節,習題 5 之圓羣,有一包線,其方程係其微分方程之一異解,試求其式.

---

1 半三次拋物線 semicubical parabola, 或曰半立方拋物線.

34. 本章提要. 由30及32二節,吾人知異解(即包線)公式在 c 的判別式與 p 的判別式中嘗同時發現.但在 c 的判別式中又有結點軌跡與齒點軌跡之發現;在 p 的判別式中則有齒點軌跡與切點軌跡之發現.此外又有特解時或同現於兩式之中.至於各種因子之應現次數,則有上節之表可供參考*.

按.——吾人須知在普通情形之下,一微分方程恆無異解,緣由 $f(p,x,y)=0$ 及 $\frac{\partial f}{\partial p}=0$, y 與 p 可以解出,如

$$y=\phi(x),\qquad p=\phi_1(x).$$

若此 y 之值係題之一解,則吾人應有

$$\phi_1(x)=\frac{d\phi(x)}{dx},$$

而此在常時却是大致不確也. Darboux 曾證,由上二式消 p 之結果,普通爲一齒點軌跡(見 Bulletin des Sciences Mathématique, 1873, p. 158). Picard 在彼之 Traité d'Analyse, Vol. III, p. 45 中,亦有一證. Fine 在 American Journal of Mathematics, Vol X I 中, Crystal 在 1896 年之 Nature 中, Liebmann 在 Differentialgleichungen, p. 95 中,各曾討論此問題.消 p 恆得齒點軌跡一事,按諸異解發生之理想似非始料所及.(按積分曲線之包線爲微分方程一解之事,首先注意者爲 Lagrange 1736–1813.)但推求包線可得額外軌跡及後者常可在無包線題中發生之理,已有人先曾注意(參閱 Picard, Vol. III, p. 51).再以上之理,皆由設通解爲 $\phi(x,y,c)=0$ (內 c 爲一有理數)而生.此等情事雖在許多方程中,時或發生,然究屬一種例外之事.

*該節原理係由 Arthur Cayley (1821–95),在 Messenger of Mathematics Vol. II(1872), p. 6, Vol VI, p.23中首先發揮其理.在同書 Vol XII, p. 1 中, J. W. L. Glaishar 曾設立多例可供參考.

第六章

全微分方程*

35. 全微分方程[1]. 一微分方程含有三變數如下述者,

(1) $$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=0$$

稱爲全微分方程.吾人今將就題解之可化爲

$$u(x,y,z)=c$$

式者,加以討論.此式之微分方程爲

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0.$$

此式與(1)或全相同,或差一積分因子 $\mu(x,y,z)$;換言之,即(1)之積分如可求,則其式必有一積分因子.如是,則 $\mu(x,y,z)$ 的函數當存在,而下列關係必成立,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\mu R.$$

因 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$, 故 $\mu\dfrac{\partial Q}{\partial z}+Q\dfrac{\partial \mu}{\partial z}=\mu\dfrac{\partial R}{\partial y}+R\dfrac{\partial \mu}{\partial y}$,

*著者以爲有數種理由,宜將此類方程,在高級一次方程之先,加以研究.如學者欲變更程序,則此章不妨置諸第九章之後.

---

1 全微分方程 total differential equations.

因 $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$, 故 $\mu\frac{\partial R}{\partial x}+R\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\frac{\partial P}{\partial z}+P\frac{\partial\mu}{\partial z}$,

因 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, 故 $\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial\mu}{\partial x}$.*

μ 須適合於此三個方程,係一不易之事,除非是 $P,Q\ R$ 三函數能先滿足一種條件.

若將 P,Q,R 分乘三方程然後相加,則得結果(內中 μ 的微係數均已消去)爲

$$(3)\qquad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0,^{\dagger}$$

其中公共因子 μ 已經取出,蓋此式不能等零,若等於零則引用此積分因子成爲毫無意義之舉也.

故(3)爲 P,Q,R 三係數關係之必要條件,由此可知.非特如是,吾人亦可證明,(1)式之能有此積分亦衹恃此條件,換言之,即(3)式亦爲一個充分條件.

若取變數之一(如 z)暫視爲常數,則(1)變爲

$$(4)\qquad P\,dx+Q\,dy=0.$$

* μP, μQ, μR 均設爲連續函數,其微係數皆設其存在而且亦爲連續函數.

† 此式亦可書成一種符號的行列式如下:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0,$$

其式較便於記憶.

仍視 z 爲常數以求(4)之積分但此時所得結果,其積分常數中可含有 z. 令其解爲

(5) $$u(x,y,z)=\phi(z).$$

今當證(3)之條件若已滿足則吾人可選擇一個 $\phi(z)$ 函數以令(5)爲(1)之解.緣(5)之全微分式應爲

(6) $$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=d\phi.$$

(5)既爲(4)之解(視 z 如常數)故吾人有

(7) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu(x,y,z)P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu(x,y,z)Q,$$

內 μ 實卽(4)之積分因子(參閱5節.)

合(6)及 μ 乘(1)兩式得

(8) $$\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\mu R\right)dz=d\phi.$$

此方程中若 $\frac{\partial u}{\partial z}-\mu R$ 利用(5)式關係後,可化爲 z 及 ϕ(卽 z 及 u)之函數,則 ϕ 之等式可以解出.視 $\frac{\partial u}{\partial z}-\mu R$ 及 u 爲單含 x 與 y 之函數(z 視爲常數或參數),則 ϕ 等式解出之可能,祇視下列耶柯皮[1]式*是否爲零,

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\mu\frac{\partial R}{\partial x}-R\frac{\partial \mu}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\mu\frac{\partial R}{\partial y}-R\frac{\partial \mu}{\partial y}\end{vmatrix}.$$

*參閱附錄[2]I

---

1 耶柯皮 Jacobi, 耶柯皮式 Jacobian.

2 附錄 note, 見書末 253 頁.

與(7)合併後,式可書為

$$\begin{vmatrix} \mu P, & \mu\dfrac{\partial P}{\partial z}+P\dfrac{\partial\mu}{\partial z}-\mu\dfrac{\partial R}{\partial x}-R\dfrac{\partial\mu}{\partial x} \\ \mu Q, & \mu\dfrac{\partial Q}{\partial z}+Q\dfrac{\partial\mu}{\partial z}-\mu\dfrac{\partial R}{\partial y}-R\dfrac{\partial\mu}{\partial y} \end{vmatrix},$$

即
$$\mu^2\left[P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right]-\mu R\left(P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}\right).$$

設 3 已適合,則式變為

$$\mu R\left[\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}\right],$$

即
$$\mu R\left[\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}-\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}\right].$$

因 μ 係(4)之積分因子,故此式等於零.故知(8)之 ϕ 係可解出;代入(5)後,吾人即得(1)解,本節理論亦因以成立.*

*(3)之必要與充分條件,亦可以較簡之法證明如下(但在此證之下,即使條件知已滿足,吾人仍不得解題之法):

方程
$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$$

等於兩偏微分方程, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{P}{R}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{Q}{R}$.

如欲兩式同時成立,則其必要與充分條件為

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{R}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{Q}{R}\right)}{\partial x}.$$

因 P, Q, R 皆係 x, y, z 之函數,故此方程變為

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)-P\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)-Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

因 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{P}{R}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{Q}{R}$, 故此式即化為(3)式.

36. **解法**[1]. 上述證法,非特證明充分條件之成立,且又指示吾人以含有三變數的全微分方程之解法(設此方程能滿足此條件).其法如下:

視一變數*爲常數求式之積分,以含此變數之未定函數代積分常數.取新積分重求其對三變數之微分[2].將所得方程與原微分方程相比,得一新微分方程,內中祇含變數兩個,一爲上述之未定函數,一爲此未定函數中所含之變數.由此新微分方程,未定函數可以決定,內中含一任意常數,原題全解至此乃備.

按.——可求積分之方程既與正合微分方程,祇差一積分因子,故積分因子,苟能由察閱或他法求得,則題解立卽可得.

試驗下列諸題有無可求積分性[3],並求其積分:

習題 1. $y^2dx+zdy-ydz=0.$

$$\begin{vmatrix} y^2 & z & -y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z & -y \end{vmatrix} = y^2(-1-1)+z(0-0)-y(0-2y)=-2y^2+2y^2=0.$$

題中某變數當選爲常數一節,殊鮮區別可言.若視 y 作常數比較或倚算便利,由是得

$$y^2dx-ydz=0,\ 故有\ yx-z=\phi(y),$$

求其微分得　$ydx+xdy-dz=d\phi,$

卽　$$y^2dx+xydy-ydz=yd\phi.$$

*選此變數之標準,以選後結果,所得含有其餘兩變數之方程式愈簡單爲愈妙.

1 解法 method of solution.

2 此所云之微分式卽指其全微分式.

3 可求積分性 integrability, 或曰積分可求性.

與原方程相比,得

$$(xy-z)dy=yd\phi,$$

即
$$\phi dy=yd\phi,$$

$$\therefore \phi=cy.$$

故其通解爲　$yx-z+cy=0.$

按本題由察閱,即易見 $\frac{1}{y^2}$ 爲一積分因子.引用後,式化爲

$$dx+\frac{zdy-ydz}{y^2}=0,$$

其解亦爲　$x-\frac{z}{y}+c=0,$

與前答相合.

習題 2.　$zydx-zxdy-y^2dz=0.$

習題 3.　$xdx+ydy-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dz=0.$

習題 4.　$(x^2-y^2-z^2)dx+2xydy+2xzdz=0.$

37. 齊次方程. 如 P, Q, R 爲齊次而且同次之式,則變數可以分離一如吾人解一含有兩變數之方程(10節).在此例下,兩個變數(設爲 x 與 y)可由令 $x=uz$ 及 $y=vz$ 變換之.因兩式之微分爲 $dx=zdu+udz$ 及 $dy=zdv+vdz$ 故原方程化爲

$$z(P_1du+Q_1dv)+(uP_1+vQ_1+R_1)dz=0^*,$$ 即

(1)
$$\frac{P_1du+Q_1dv}{uP_1+vQ_1+R_1}+\frac{dz}{z}=0,$$

內　$P_1=P(u, v, 1),\ Q_1=Q(u, v, 1),\ R_1=R(u, v, 1).$

*如 $uP_1+vQ_1+R_1=0$, 則方程立可化爲一個單含 u 及 v 兩變數之方程,

如原方程滿足求積分之條件[1]則此方程亦應滿足此條件.且此方程係屬正合式*,其積分應可即由式求出(用8節方法).

習題 1. $(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0$.

(學者應先驗其是否具有可求積分性.)

令 $x=uz,y=vz,\ dx=u\,dz+z\,du,\ dy=v\,dz+z\,dv$. 故式變

為
$$\frac{dz}{z}+\frac{(v^2+v)du+(u+1)dv}{uv^2+uv+v+v^2}=0.$$

因 $uv^2+uv+v+v^2=(v^2+v)(u+1)$, 故式可化為

$$\frac{dz}{z}+\frac{du}{u+1}+\frac{dv}{v^2+v}=0;$$

因得
$$\frac{z(u+1)v}{v+1}=c,\ 即\ \frac{y(x+z)}{y+z}=c.$$

習題 2. $(y^2+yz+z^2)dx+(z^2+zx+x^2)dy+(x^2+xy+y^2)dz=0$.

習題 3. $(x^2y-y^3-y^2z)dx+(xy^2-x^2z-x^3)dy+(xy^2+x^2y)dz=0$.

*令 $\bar{P}=\dfrac{P_1}{uP_1+vQ_1+R_1},\quad \bar{Q}=\dfrac{Q_1}{uP_1+vQ_1+R_1},\quad \bar{R}=\dfrac{1}{z},$

則(1)化為 $\bar{P}du+\bar{Q}dv+\bar{R}dz=0$.

因 $\bar{P}$ 與 $\bar{Q}$ 俱不含 z, $\bar{R}$ 不含 u 及 v, 故可求積分性之條件變為

$$\bar{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)=0.$$

$\bar{R}$ 係 $\frac{1}{z}$, 故吾人應有 $\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=0$. 但此猶言 $\bar{P}du+\bar{Q}dv$ 係一正合微分(7節),故(1)式亦為正合式.

---

1 可求積分之條件 condition for integrability.

38. 含有三變數以上之方程. 試取下式討論

$$(1)\qquad Pdx+Qdy+Rdz+Sdt=0.$$

此式若具積分可求性,則將一變數視爲常數後,其可求性依然存在.令 x, y, z, t 先後視爲常數,則可求之條件,有下四式:

$$(2)\qquad Q\left(\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial t}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial y}\right)+S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=0,$$

$$(3)\qquad R\left(\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial x}\right)+S\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+P\left(\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial t}\right)=0,$$

$$(4)\qquad S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+P\left(\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial t}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial x}\right)=0,$$

$$(5)\qquad P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0^*.$$

此四條件非皆獨立.如以 P, Q, R 分乘(2),(3),(4)再相加,則結果與 S 乘(5)相同;故知獨立之條件實祇三個†.

*推廣其說,若方程中之變數有 n 個,則條件之數,應與在 n 個變數中每次選取三個之選法之數[1]相同;換言之即條件之數應爲 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$.

†獨立條件之數,通常爲 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ (設原方程之變數爲 n 個). 此與在 $n-1$ 個變數中,每次選取兩個變數之選法之數相同.緣各獨立條件中必皆含某一變數(已選作常數者)之微係數,蓋條件之不含此微係數者,必可由含此者用法併合而得之(如上言(5)式,可由(2),(4),設法併合而得).今每一條件,皆含有三個變數之微係數,故某一變數之微係數,應在凡任一條件之含有其餘($n-1$)變數中每兩個的微係數之中,一一發現[2].

---

1 選法之數 number of ways in selection.

2 原文爲 Hence the derivatives with respect to any one variable may appear in a condition along with those with repsect to any two of the remaining n—1 variables.

此種條件亦可證明其爲充分.若條件成立,則式之積分可仿三變數之例以求之,卽除兩個變數外,其餘各變數均先視爲常數,以求積分.此積分中之積分常數,應視爲包含以前暫作常數之各變數的函數,設爲 ϕ 函數.重求此積分的對於各變數之微分,與原式相比,得一新方程,內中不復含有前曾始終視爲變數之兩變數,故式中祇含其餘 $n-2$ 之原變數及 ϕ,卽共含有 $n-1$ 之變數,此式積分有時或逕可求得,否則再用本法,以減一變數.如是推進,直至可求爲止,茲列一例,以明此法之程序.

習題. $z(y+z)dx+z(t-x)dy+y(x-t)dz+y(y+z)dt=0.$

暫視 y 及 z 爲常數,求積分得

$$xz+yt=\phi(y,z).$$

重求微分且與原式相比,得

$$(tz+zx)(dy+dz)=(y+z)\,d\phi,$$

卽

$$\phi(dy+dz)=(y+z)\,d\phi.$$

新式變數減爲 y, z, ϕ 三個,用36節法可求其積分但此式實顯有一積分因子爲 $\dfrac{1}{(y+z)\phi}$. 引用後,得

$$\phi=c(y+z),$$

故其通解爲

$$xz+yt=c(y+z).$$

39 不能滿足積分可求性條件之方程[1]. 如 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 不能滿足積分可求性之條件,則欲得一解如

$$\phi(x,y,z)=0$$

式者,爲係不可能之事.

---

1 不能滿足積分可求性條件之方程 Equations which do not satisfy the condition of integrability.

但因原方程含有三個變數,故題之解案實屬無限.按諸實際,若吾人任取一關係如 $\phi(x, y, z)=0$, 解出其 z 得一等於 x, y 兩變數之函數;代入原式卽得一祇含兩變數之新方程.此式之解,大抵皆可以求出.由此吾人知所謂不能求積分之全微分方程[1]之通解,內中實含兩式,一爲一任意選取之關係,一爲含有兩個常數之關係.後者之式,恃乎前者之如何選出,若非前者已經選定,後者之式亦不能書出.

按.——所謂可求積分方程之解,旣係一個單獨的包含三變數之關係,故吾人可任取一個其他函數,謂與此同時適合於原題.故在此例之下,吾人亦可謂解中嘗含二式,一爲一任意函數,一爲含一任意常數之函數,惟後者之式,完全係由微分方程決定,而與任意函數之選擇毫無關係.

習題. $y\,dx+x\,dy-(x+y+z)dz=0.$

此題易知其不滿足可求積分性之條件,如取一任意函數爲 $x+y+z=0$, 則原式變爲

$$y\,dx+x\,dy=0, \text{ 其解爲 } xy=0.$$

故本題之解爲 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy=0. \end{cases}$

如吾人所取任意函數爲 $x+y=0$, 則原式化爲 $y\,dx+xy-z\,dz=0$, 其解爲 $2xy-z^2=c$. 故本題之又一解爲

$$\begin{cases} x+y=0, \\ 2xy-z^2=c. \end{cases}$$

1 不能求積分之全數微分方程 non-integrable total differential equation.

40. 幾何的解釋. 吾人云 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 方程滿足積分可求性條件之意義,實猶云有一曲面羣可以求出,此羣者經過空間每一點(x_0, y_0, z_0)處,必有一曲面式,爲

$$\phi(x, y, z)=\phi(x_0, y_0, z_0),$$

且在曲面上任一點 (x, y, z) 處其切面方程係屬下式

$$P(x, y, z)(X-x)+Q(x, y, z)(Y-y)+R(x, y, z)(Z-z)=0.$$

此義亦可謂此微分方程者乃規定在空間每一點處之平面 $P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0$ 之物也.其積分式之推求,實等於規定一羣曲面†其中每一曲面(經過空間任一點之處)與微分方程在此點所規定之平面係互相切.由此推究,頗有有趣之結果,當於66節再伸論之.

若方程之積分係不可求,則可由任選之任意函數 $\psi(x, y z)=0$,及其全微分 $\frac{\partial\psi}{\partial y}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz=0$ 與原式合併而觀,實規定在任意曲面 $\psi(x, y, z)=0$ 之任一點處之切線,其式爲

$$\begin{cases}P(X-x)+Q(Y-y)-R(Z-z)=0,\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(X-x)+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(Y-y)+\dfrac{\partial\psi}{\partial z}(Z-z)=0\end{cases}$$

其積分式之推求,實等於規定一羣曲線,其中每一曲線(經過空間任一點之處)與上列兩方程所表之線,係互相切.因表示此曲線羣之方程之一[1],$\psi(x, y, z)=0$係屬任意假設,故本題之推解,實

* ϕ 函數係設爲一個x, y, z之有理式函數,否則本文宜加限制,應云,在 ϕ 函數具有單值之域內[2](參閱70節).

† 此種曲面,以後將稱之曰,積分曲面[3].

---

1 按表示此羣曲線之二方程式爲$\psi(x, y, z)=0$及由假定ψ式後所求得之積分式.

2 原文云 in the regions in which ϕ is single-valued.

3 積分曲面 integral surface.

等於求在一任意曲面上之一羣曲線,惟此羣曲面,其經過空間任一點之面,應與微分方程所定經過此點之平面,係互相切.例如在39節習題中,就第一法而論,吾人得一羣曲線爲圓柱羣 $xy=c$,在任意平面 $x+y+z=0$ 上相交而成;就第二法而論,吾人得一羣曲線爲雙曲線拋物體[1] $2xy-z^2=c$. 在任意平面 $x+y=0$ 上相交而成*.

41. 本章提要. 如全微分方程

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

滿足積分可求性之條件(35節)則積分因子必存在.如此因子,察閱可得,則逕即引用,其積分亦立即可求.

如積分因子不能由察閱而得,則36節之通法可以取用.

如 P, Q, R 係齊次而又同次,則37節之法,有時比通法爲便.

如積分可求性之條件並不滿足,則題解可由39節法求得.

方程有含三個以上變數者,除積分因子可由察閱即得者外(此時積分因子可即引入以求積分)可用38節法解出.

驗下列諸題之積分可求性,並解其式:

習題 1. $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0$.

習題 2. $(z+1)(x\,dx+y\,dy)-(x^2+y^2)dz=0$.

習題 3. $(x+y^2+z^2+1)dx+2y\,dy+2z\,dz=0$.

習題 4. $(y+a)^2dx+z\,dy-(y+a)dy=0$.

*本節理論均亦適用於可求積分的方程.惟任意曲面若即爲積分曲面,則曲面上之所有曲線盡爲一積分曲積.

---

1 雙曲線拋物體 hyperbolic paraboloid.

習題 5. $(y+z)dx+dy+dz=0.$

習題 6. $2x\,dx+dy+(2x^2z+2yz+2z^2+1)dz=0.$

習題 7. $(2x+y^2+2xz)dx+2xy\,dy+x^2\,dz-dt=0.$

習題 8. $zx\,dy-yz\,dx+x^2\,dz=0.$

習題 9. $x(y-1)(z-1)dx+y(z-1)(x-1)dy$
$$+z(x-1)(y-1)dz=0.$$

習題 10. $(y-z)dx+2(x+3y-z)dy-2(x+2y)dz=0.$

習題 11. $t(y+z)dx+t(y+z+1)dy+t\,dz-(y+z)dt=0.$

習題 12. $z(y+z)dx+z(t-x)dy+y(x-t)dz+y(y+z)dt=0$

第　七　章

常係數線性微分方程[1]

42. **線性微分方程通式**[2]. 線性微分方程者,乃一微分方程,其應變數及其各級微係數,均為一次式者也.其通式為

$$(1)\qquad X_0\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_ny=X,$$

內 $X_0, X_1, X_2, \cdots\cdots\cdots X_n, X$ 皆為 x 之函數或常數.如令 $\frac{dy}{dx}=Dy$, $\frac{d^2y}{dx^2}=D^2y\cdots$, $\frac{D^ny}{Dx^n}=D^ny$, 則(1)可書成簡式如下,

$$(X_0D^n+X_1D^{n-1}+X_2D^{n-2}+\cdots+X_{n-1}D+X_n)\,y=X,$$

即

$$F(D)y=X,$$

內 $F(D)$ 即 $X_0D^n+X_1D^{n-1}+\cdots+X_n$ 多項式,係表下舉運算符號

$$X_0\frac{d^n}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+X_{n-1}\frac{d}{dx}+X_n.$$

關於式之解案,線性方程有二特性,宜特別注意,玆述如下:

1° 設 $X=0$. 式在此時稱為齊次線性方程,因式中各項為 y 及其各次微係數之一次式故也.(如方程並非齊次則此式

---

1 常係數線性微分方程 linear differential equations with constant coefficients.

2 通式 general type.

稱爲全備線性微分方程[1].)如 $y=y_1$ 爲題之一解,則 $y=c_1y_1$ 亦爲一解.緣 $D^k(c_1y_1)=c_1D^ky_1$ 故 $F(D)(c_1y_1)=c_1F(D)y_1$ 但原設 $F(D)y_1=0$, 故 $F(D)(c_1y_1)=0$.

非特如是,若 $y=y_2$ 亦爲一解,則 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 亦爲題之一解.緣和之微係數等於微係數之和,卽 $D^k(y_1+y_2)=D^ky_1+D^ky_2$ 故

$$F(D)(c_1y_1+c_2y_2)=F(D)(c_1y_1)+F(D)(c_2y_2)$$
$$=c_1F(D)y_1+c_2F(D)y_2.$$

同理若吾人已知 r 個特解爲 $y_1y_2\cdots,y_r$ 則

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ry_r$$

亦爲一解.因 n 級之微分方程應含 n 個任意常數,故吾人知

A. 若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 爲一 n 級齊次線性微分方程之 n 個線性獨立的*特解[2],則函數 $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ 爲題之通解.

如所得特解不爲線性獨立的一類,則上式卽非通解.例如設有題之一解爲 $a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n\equiv0$, 內各 a 均異於零.則若 a_n 異於零,此式卽可書爲 $y_n\equiv-\frac{a_1}{a_n}y_1-\frac{a_2}{a_n}y_2-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_n}y_{n-1}$, 而題解變爲祇含 $n-1$ 個獨立常數的函數如

$$\left(c_1-\frac{a_1}{a_n}\right)y_1+\left(c_2-\frac{a_2}{a_n}\right)y_2+\cdots+\left(c_{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)y_{n-1}.$$

*若吾人不能覓得 n 個常數使 $a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n$ 之式,在 x 任取何值之時均化爲零,則此 $y_1,y_2,\cdots,y_n$, n 函數稱爲線性獨立之式.例如 $y_1=2x-x^2$, $y_2=x+x^2$, $y_3=x$ 係非線性獨立式.緣 x 任取何值, $y_1+y_2-3y_3\equiv0$ 常屬恆等也.

---

1. 全備線性微分方程 complete linear differential equation.

2. 線性獨立的特解 linearly independent particular integrals.

按.——特解之如何求出,吾人可不置問.以後將見方程之習見一類,大都可以用代數法解出其特解;亦有許多方程可由察閱逕得其特解.

爲便利起見,吾人以後稱右端等於零時(1)式之積分曰補充函數[1].

2° 若吾人知 $Y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ 爲(1)之補充函數,且又另知一個特別積分爲 U(不問其如何求出),則(1)之通解爲 $Y+U$. 緣方程既屬線性式,則

$$f(D)(Y+U)=f(D)Y+f(D)U=0+X=X.$$

B. 故知全備線性微分方程之通解等於其補充函數與任一特別積分之和.

43. 常係數線性微分方程式*. 設方程式爲

$$(1)\qquad k_0\frac{d^ny}{dx^n}+k_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+k_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+k_{n-1}\frac{dy}{dx}+k_ny=X,$$

卽 $$(k_0D^n+k_1D^{n-1}+k_2D^{n-2}+\cdots+k_{n-1}D+k_n)y=X,$$

卽 $$f(D)y=X,$$

內 $k_0, k_1, \cdots, k_n$ 皆爲常數.

首令 $X=0$, 則得

$$(2)\qquad f(D)y=0.$$

*此法係 Leonard Euler (1707−83) 所創.欲知 Cauchy 之法者可參閱 T. Craig's A. Treatise on Linear Differential Equations, Vol. I, ch, II, 或 C, Hermit, "E'quations Differentielles Linéaires", in Bulletin des Sciences Mathématiques, 1879.

1 補充函數 complementary function.

命 $y=e^{mx}$，得 $Dy=me^{mx}, \cdots, D^r y=m^r e^{mx}$；

故
$$f(D)(e^{mx})=e^{mx}f(m).$$

若e^{mx}爲(2)之積分，則 m 應適合於下方程

$$(3)\qquad f(m)=0,$$

即
$$k_0m^n+k_1m^{n-1}+k_2m^{n-2}+\cdots k_{n-1}m+k_n=0$$

每一 m 之值能滿足(3)式者，即予吾人以(2)之積分一個.若m_1, $m_2, m_3, \cdots, m_n$, 各不同值，則 $e^{m_1x}, e^{m_2x}, \cdots, e^{m_nx}$ 屬線性獨立式.故按42節 A, $c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots+c_ne^{m_nx}$ 爲(2)之通解，即(1)之補充積分.

按.——(3)式常稱爲輔助[1]方程*式可由(2)得，其事至易.

習題 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=0.$

輔助方程爲 $m^2-3m+2=0$. 其根爲 1, 2 故具通解爲

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}.$$

習題 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+25y=0.$

由 $m^2-6m+25=0$ 得 $m=3\pm4i$ (i 即 $\sqrt{-1}$).

$$\therefore y=c_1e^{(3+4i)x}+c_2e^{(3-4i)x},$$

即
$$y=e^{3x}(c_1e^{4ix}+c_2e^{-4ix}).$$

習題 3. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{dy}{dx}=0.$

習題 4 $(D^3-2D^2-D+2)y=0.$

*Cauchy 稱此爲 characteristic equation,

1 輔助方程 auxiliary equation.

44. 輔助方程之根有重複者[1]. 如輔助方程之根有重複者,則43節法,並不予吾人以 n 個線性獨立的積分,故通解亦不可得.在此例下,吾人若用更普通式之代替,$y=e^{mx}\phi(x)$(內 $\phi(x)$ 爲一 x 之函數,由吾人隨意選擇)則有

$$Dy=e^{mx}[m\phi+D\phi],$$

$$D^2y=e^{mx}[m^2\phi+2mD\phi+D^2\phi],$$

$$D^3y=e^{mx}[m^3\phi+3m^2D\phi+3mD^2\phi+D^3\phi],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^ny=e^{mx}\Big[m^n\phi+nm^{n-1}D\phi+\frac{n(n-1)}{2!}m^{n-2}D^2\phi+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}m^{n-r}D^r\phi+\cdots+D^n\phi\Big],$$

因得

$$f(D)y=e^{mx}\Big[f(m)\phi+f'(m)D\phi+\frac{1}{2!}f''(m)D^2\phi+\cdots$$
$$+\frac{1}{r!}f^{(r)}(m)D^r\phi+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(m)D^n\phi\Big].$$

內 $f'(m)=\dfrac{d}{dm}f(m),\cdots,f^{(r)}(m)=\dfrac{d^r}{dm^r}f(m)$.

若 m_1 係 $f(m)=0$ 式中之 r 次重根,則由31節,得

$$f(m_1)=0,\ f'(m_1)=0,\ \cdots,f^{(r-1)}(m)=0.$$

故在此例之中,如欲令 $f(D)y$ 在 $y=e^{mx}\phi(x)$ 化爲零,則吾人必須有 $D^r\phi=0$;因之 ϕ 中之較高級微係數故亦必俱等於零,換言之,吾人應有 $\phi=c_1x^{r-1}+c_2x^{r-2}+\cdots+c_{r-1}x+c_r$(內 $c_1, c_2, \cdots c_r$ 爲隨意常數).故 m_1 若爲輔助方程 r 次之重根,則非特 e^{m_1x} 爲方程之一

---

1 輔助方程之根有重複者 roots of auxiliary equation repeated.

個積分,即 $xe^{m_1x}, x^2e^{m_1x}, \cdots, x^{r-1}e^{m_1x}$ 亦皆爲題之積分;故吾人對 r 次重根仍得 r 個線性獨立式的積分.職是之故,無論輔助方程之根或爲重複或不重複,補充函數中所需之 n 個線性獨立式的積分(42節 A)必皆由此方程可得.

習題 1.　$(4D^3-3D+1)y=0.$

$4m^3-3m+1=0$ 之根爲 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1.$ 故其通解爲

$$y=e^{\frac{1}{2}x}(c_1+c_2x)+c_3e^{-x}.$$

習題 2.　$(D^3-D^2-D+1)y=0.$

習題 3.　$(D^4+2D^3-2D-1)y=0.$

習題 4.　$(D^3-6D+9D)y=0.$

45. 輔助方程之根爲複數者. 如微分方程之係數俱爲實數,而其根不盡爲實數,則吾人可由相當的布置,使補充函數祇含實數之項.例如輔助方程設有一根爲 $\alpha+i\beta$, 則因其係數皆爲實數,故必另有一複根爲 $\alpha-i\beta$, 在補充函數中對於此複根之兩相當之項爲

$$c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x},$$

即

$$e^{\alpha x}(c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x}).$$

但 $e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x,\quad e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x.$ 故上兩項可書爲

$$e^{\alpha x}[(c_1+c_2)\cos\beta x+i(c_1-c_2)\sin\beta x].$$

---

1 輔助方程之根爲複數者 roots of the auxiliary equation complex.

令　　$c_1=\dfrac{A-iB}{2},\quad c_2=\dfrac{A+iB}{2}.$

則式又變爲

$$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x),$$

內 A 與 B 爲兩個任意常數.

此式亦可書爲 $ae^{\alpha x}\sin(\beta x+b)$ 或 $ae^{\alpha x}\cos(\beta x+b)$*,內 a 與 b 爲兩任意常數.爲解釋物理問題之解案起見,此二式有時較前式便於應用.

若式中複根係屬重複,則由上節之理,易見其各根相當之項應爲

$$e^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+B_1\sin\beta x)+xe^{\alpha x}(A_2\cos\beta x+B_2\sin\beta x),$$

即　　$$e^{\alpha x}[(A_1+A_2x)\cos\beta x+(B_1+B_2x)\sin\beta x].$$

再推廣之.若式中複根至 r 項,則其各根相當之項應爲

$$e^{\alpha x}[(A_1+A_2x+\cdots+A_rx^{n-1})\cos\beta x+(B_1+B_2x+\cdots+B_rx^{n-1})\sin\beta x].$$

習題 1.　若43節習題 2 中之 α,β 爲 $\alpha=3,\beta=4$ 則其解可書爲

$$y=e^{3x}(A\cos 4x+B\sin 4x)$$

$$y=ae^{3x}\cos(4x+b).$$

習題 2.　$(D^4+2D^2+1)y=0.$

習題 3　$(D^3-D^2+D)y=0.$

* $A\cos\beta x+B\sin\beta x$ 可書爲 $\sqrt{A^2+B^2}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\beta x+\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\beta x\right).$

因 $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$,兩者之方之和等於一,故兩式可取作一角(設爲 b)之正弦或餘弦.令 $\sqrt{A^2+B^2}=a$,則原式變爲 $a(\sin b\cos\beta+\cos b\sin\beta x)$

即 $a\sin(\beta x+b)$

按.——如輔助方程之根有兩個同值而異號,則爲解釋物理問題便易起見,有時直用雙曲線函數以代指數函數.由$e^x=\cosh x+\sinh x$, $e^{-x}=\cosh x-\sinh x$之關係仿前例方法變換其函數卽可得應有之結果.

設m及$-m$爲輔助方程之二根,則在補充函數中,其相當之項爲

$$y=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$$
$$=(c_1+c_2)\cosh mx+(c_1-c_2)\sinh mx.$$
$$=A\cosh mx+B\sinh mx.$$

用雙曲線函數加法後,則上式亦可書爲

$$y=a\cosh(mx+b),$$

或 $$y=a\sinh(mx+b),$$

內a與b爲兩個任意函數.

46. $(D-\alpha)$符號之性質[1].

1° $(D-\alpha)y$者卽$\frac{dy}{dx}-\alpha y$.同樣$(D-\beta)y$者卽$\frac{dy}{dx}-\beta y$.故$[(D-\alpha)+(D-B)]y$,卽$2\frac{dy}{dx}-(\alpha+\beta)y$,而亦可以用符號$[2D-(\alpha+\beta)]y$表示之.換言之,卽用兩個運算[2]符號$(D-\alpha)$及$(D-\beta)$用於$y$上然後相加,其結果與用運算符號$[2D-(\alpha+\beta)]$用於$y$上相同.職是之故,可知兩個上舉符號運算結果之和可由其符號之和之運算結果以得之.故可書兩符號之等式爲$[(D-\alpha)+(D-\beta)]=[2D-(\alpha+\beta)]$.

推廣其說,吾人易知許多此類符號之和及兩個此類符號之較,均可以同樣之法處理之.

2° $(D-\alpha)(D-\beta)$卽$\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)\left(\frac{dy}{dx}-\alpha y\right)$,故卽$\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y$.換言之,在$y$上先用運算符號$(D-\alpha)$,再用$(D-\beta)$運算

1 $(D-\alpha)$符號之性質 properties of the symbolic operator.

2 運算 operation.

符號之結果,與用 $[D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta]$ 符號於 y 上之結果兩兩相同.職是故知連續用 $(D-\alpha)$ 式符號之運算結果,可由用其各符號之積的符號運算以得之.故施用兩種符號之結果,實有下列等式之關係.

$$[(D-\beta)(D-\alpha)]=[D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta].$$

再,右端之 α 與 β 係處於對稱地位,故左端符號運用之先後無關重要,換言之,卽左端之運算符號若互相對易[1],於結果並無妨礙.

如運算符號不止兩個,上述之理,易見其推廣之後,不問符號有多少,其理仍同樣適用.

本節所得結果,可併述如下.

運算符號之類如 $(D-\alpha)$ 者,對於加減乘三事,與尋常代數字之運算,具有同樣之性質.

按 —— 因含有 D 字之多項式而其係數爲常數者.可分解爲一個一次式因子之積,故本節理論對於運算之屬於此類者(卽常係數之 D 的多項式),均皆適用.

由是易見,若輔助方程之根爲 $m_1, m_2, \cdots, m_n$(無論其値是否各異)吾人常可書(1)爲

$$k_0(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)\,y=X.$$

47. 特別積分[2]. 求常係數全備線性微分方程之特別積分,下述亦爲一極普通適用之法(且由此方法,補充函數可以同時求出):

1 對易 commutative.

2 特別積分 particular integral.

在下列討論之中,吾人設方程兩端已先以k除過且為例示便利起見,所用方程不妨假定為一個三級微分方程式.職是吾人設方程式為

$$f(D)y=(D-m_1)(D-m_2)(D-m_3)\,y=X.$$

求此式之解者,即言求一個x的函數,如y,在此函數上,運用$f(D)$運算符號後,其結果恰為X.

先令 $$(D-m_2)(D-m_3)\,y=u,$$

內u為一新函數,則有

$$(D-m_1)\,u=X,\ \text{即}\ \frac{dn}{dx}-m_1u=X.$$

此係一級線性式 e^{-m_1x} 為其一積分因子(13節),故得

$$e^{-m_1x}u=\int e^{-m_1u}\,X\,dx+c,$$

即 $$u=e^{m_1x}\int e^{-m_1x}\,X\,dx+ce^{m_1x};$$

即 $$(D-m_2)(D-m_3)\,y=e^{m_1x}\int e^{-m_1x}\,X\,dx+ce^{m_1x}$$

再令 $$(D-m_3)\,y=v$$

則 $$(D-m_2)\,v=e^{m_1x}\int e^{-m_1x}\,X\,dx+ce^{m_1x}.$$

此係一級線性式,其積分因子為 e^{-m_1x} 引用後,得

$$ve^{-m_2x}=\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}\,X\,dx\right]dx+\frac{c}{m_1-m_2}e^{(m_1-m_2)x}+c',$$

即 $$v=e^{m_2x}\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}\,X\,dx\right]dx+\frac{c}{m_1-m_2}e^{m_1x}+c'e^{m_2x}.$$

故 $$(D-m_3)y=e^{m_2x}\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}X\,dx\right]dx+c''e^{m_1x}+c'e^{m_2x},$$

內 $$c''=\frac{c}{m_1-m_2}.$$

此亦係一線性式,其積分因子為 e^{-m_3x}. 引用後,得

$$ye^{-m_3x}=\int e^{(m_2-m_3)x}\left\{\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}X\,dx\right]dx\right\}dx$$

$$+\frac{c''}{m_1-m_3}e^{(m_1-m_2)x}+\frac{c'}{m_2-m_3}e^{(m_2-m_3)x}+c_3,$$

即 $$y=e^{m_3x}\int e^{(m_2-m_3)x}\left\{\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}X\,dx\right]dx\right\}dx$$

$$+c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+c_3e^{m_3x}.$$

推廣其理,易知若原式為 n 級*式,則有

(I) $$y=e^{m_nx}\int e^{(m_{n-1}-m_n)x}\int\cdots\int e^{(m_1-m_2)x}\int e^{-m_1x}X\,(dx)^n$$

$$+c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots+c_ne^{m_nx}.$$

按.——(I)中第二部份即係補充函數,此吾人在43節所已經熟知者也.(學者可自證如輔助方程有重根,則由此亦可得其相當之項如44節例.)按(I)中第一部份無論輔助方程之根是各異與否,常為式之特別積分.

---

*欲證此理,吾人祇需先設在 n 級下理已成立,然後推證在 $n+1$ 級下亦應相繼存立.此理學者可自為補證,以當練習.

習題 1.　$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=e^{-x}$.

輔助方程爲

$$m^3-m^2-2m=0.\quad \therefore m=0,\,-1,\,2.$$

其輔充函數爲

$$Y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}.$$

其特別積分爲

$$U=e^{2x}\int e^{(-1-2)x}\int e^{(0+1)x}\int e^{-x}(dx)^3$$

$$=-e^{2x}\int e^{-3x}\left[\int dx\right]dx$$

$$=-e^{2x}\int e^{-3x}\,xdx=\frac{1}{3}xe^{-x}+\frac{1}{9}e^{-x}.$$

因 e^{-x} 係補充函數之一部份,故吾人祇取 $\frac{1}{3}xe^{-x}$ 爲特別積分,

而題之通解因爲

$$y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+\frac{1}{3}xe^{-x}.$$

習題 2.　$(D^2+3D+2)\,y=e^{e^x}$.

習題 3.　$(D^3+3D^2+3D+1)\,y=2e^{-x}-x^2e^{-x}$.

習題 4.　$(D^2-D-2)\,y=\sin x$.

習題 5.　$(D-1)^2y=\frac{e^x}{(1-x)^2}$.

48. **求特別積分之又一法.*** 47節之通法,有時運算頗費時間,其第一積分雖或易求,其後積分則求之往往費事.若遇此等困難,則下法可以引用:

設　$$(D-m_1)(D-m_2)\cdots\cdots\cdots(D-m_n)y=X,$$

此式亦可用新符號書爲

$$y=\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}X,$$

內 $\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}$ 運算符號,係 $(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$ 符號之倒式.猶之 $\sin^{-1}x$ 之意義,卽表示一個函數,若將 sin 運算符號施於其上,可得 x,故吾人若將 $(D-m_1)(D-m_2)\cdots\cdots(D-m_n)$ 施

用於　$$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}X$$

上,當可得 X.再,符號 $(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$ 之施用,吾人已知其等於各符號 $(D-m_1),(D-m_2),\cdots(D-m_n)$ 之連續施用,且又知其施用之先後無關於事.

將　$$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}$$

視作代數式,其式可化爲偏分數[1]之等式,如

$$\frac{a_1}{D-m_1}+\frac{a_2}{D-m_2}+\cdots+\frac{a_n}{D-m_n}$$

其中輔助方程之根,係設各異其值.

*此法係首由 Lobatto 在 Théorie des Caractéristigues, Amsterdam, 1837 發表.Boole 亦嘗自得其法,文見 Cambridge math. Journal, Ist. series, Vol, II, p.114.

1 偏分數 partial fractions.

兩分數相等之關係,即視式爲運算符號亦仍存立;因施運算符號 $(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$ 於兩式之上,可實驗其結果相同也.因上式內各因子之次序無關於事,故施用此符號後,所得各項之運算符號皆屬多項式,而可視作代數式,職是兩種符號視作代數式時之相等即猶云二種運算之相等,而原有之分數運算式符號實等於多數偏分數符號之和,即

$$y=\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}X=\frac{a_1}{D-m_1}X+\frac{a_2}{D-m_2}+\cdots$$
$$+\frac{a_n}{D-m_n}X.$$

如令 $u=\dfrac{a}{D-m}X$, 則 $(D-m)u=aX$.

求其積分則得 $ue^{-mx}=a\int e^{-mx}X\,dx$, 即 $u=ae^{mx}\int e^{-mx}X\,dx$. 故原題之特別積分,可書爲

$$\text{(II)}\quad a_1e^{m_1x}\int e^{-m_1x}X\,dx+a_2e^{m_2x}\int e^{-m_2x}X\,dx+\cdots+a_ne^{m_nx}\int e^{-m_nx}X\,dx$$

按 1.——此法即在輔助方程有一對共軛虛根 $(\alpha+i\beta,\ \alpha-i\beta)$ 時,亦得實數的特別積分,當 $\dfrac{1}{f(D)}$ 析爲偏分數之和之時,與虛根相當之偏分數爲 $\dfrac{a_1}{D-(\alpha+i\beta)}$ 及 $\dfrac{a_2}{D-(\alpha-i\beta)}$, 兩者之和等於 $\dfrac{kD+l}{(D-\alpha)+\beta^2}$, 內 k 與 l 皆係實數故 a_1 與 a_2 亦當爲一共軛複數(設爲 $\lambda+i\mu$ 與 $\lambda-i\mu$).

按 $\dfrac{\lambda+i\mu}{D-(\alpha+i\beta)}X=(\lambda+i\mu)e^{(\alpha+i\beta)x}\int e^{-(\alpha+i\beta)}X\,dx$

$$=(\lambda+i\mu)e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\int e^{-\alpha x}X(\cos\beta x-\sin\beta x)dx.$$

因 $\frac{\lambda-i\mu}{D-(\alpha-i\beta)}X$ 可由前式中換 i 項之符號而得,故兩式中之實數部份已皆相同,而其虛數部份則同式而異號.故二者之和等於其實數項之兩倍,即

$$\frac{\lambda+i\mu}{D-(\alpha-i\beta)}X+\frac{\lambda-i\mu}{D-(\alpha-i\beta)}X=2e^{\alpha x}(\lambda\cos\beta x-\mu\sin\beta x)\int e^{-\alpha x}X\cos\beta x\,dx$$

$$+2e^{\alpha x}(\lambda\sin\beta x+\mu\cos\beta x)\int e^{-\alpha x}X\sin\beta x\,dx.$$

按 2.—— 如遇重根,則立論宜稍變更如下:

例如設有一根 m_1, 重複三次,則與此三根之相當的偏分數,應有三分數式如 $\frac{a_1}{D-m_1}+\frac{a_2}{(D-m_1)^2}+\frac{a_3}{(D-m_1)^3}$, 故 (I) 式中之相當三項應爲

$$a_1e^{m_1x}\int e^{-m_1x}X\,dx+a_2e^{m_1x}\int\int e^{-m_1x}X(dx)^2+a_3e^{m_1x}\int\int\int e^{-m_1x}X(dx)^3.$$

習題 1. $(D^2-3D+2)y=e^x.$

習題 2. $(D^3-3D^2-D+3)y=x^2.$

習題 3. $(D^2+1)y=\sec x.$

習題 4. $(D^3-4D^2+5D-2)y=x.$

49. 參數變動法*. 參數變動法[1]亦爲普通適用之法,有時應用頗便,而遇方程之級次不高時尤見其効.其法係將補充函數中之常數不復視爲常數而視之爲未定的[2] x 之函數,此函數者如代入 $f(D)y$ 之後,吾人得其結果爲 X,而不復如視爲常數時化式爲零.

*此法係創自拉果蘭諸 Joseph Louis Lagrange (1736–1813).

---

1 參數變動法 variation of parameter.

2 未定的 undetermined.

今待定函數有 n 個而其必須滿足之條件祇有一個,在理論方面,吾人可任合 $n-1$ 其他條件以使其滿足此必要條件,故其滿足之法其數無限.在實際方面,吾人所取其餘之條件,將以運算上作最能化爲簡易爲斷.

今將取一個三級方程式作例,以示此方法之如何運用(其理論之可以推用於各級之方程,視例自易明瞭).

令方程爲

(1) $$(k_0D^3+k_1D^2+k_2D+k_3)\,y=X,$$

其補充函數爲

(2) $$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+c_3e^{m_3x}*.$$

吾人今須求 c_1, c_2, c_3, 三函數使(2)成爲(1)之通解.故吾人倘可加二種條件於 c_1, c_2, c_3 之上.

求(2)之微分,得

$$Dy=m_1c_1e^{m_1x}+m_2c_2e^{m_2x}+m_3c_3e^{m_3x}+e^{m_1x}\frac{dc_1}{dx}+e^{m_2x}\frac{dc_2}{dx}+e^{m_3x}\frac{dc_3}{dx}.$$

令

(3) $$e^{m_1x}\frac{dc_1}{dx}+e^{m_2x}\frac{dc_2}{dx}+e^{m_3x}\frac{dc_3}{dx}=0,$$

爲吾人任意所取兩種條件之一;因是上論微分式變爲

(4) $$Dy=m_1c_1e^{m_1x}+m_2c_2e^{m_2x}+m_3c_3e^{m_3x}.$$

*如遇輔助方程之根爲重根或虛根時,則將補充函數之相當項予以相當變更後,本法程序依然適用.

再求微分,得

$$D^2y=m_1^2c_1e^{m_1x}+m_2^2c_2e^{m_2x}+m_3^2c_3e^{m_3x}+m_1e^{m_1x}\frac{dc_1}{dx}+m_2e^{m_2x}\frac{dc_2}{dx}$$

$$+m_3e^{m_3x}\frac{dc_3}{dx}.$$

利用吾人尙餘任意選取一第二條件之權,令

(5) $$m_1e^{m_1x}\frac{dc_1}{dx}+m_2e^{m_2x}\frac{dc_2}{dx}+m_3e^{m_3x}\frac{dc_3}{dx}=0,$$

則

(6) $$D^2y=m_1^2c_1e^{m_1x}+m_2^2c_2e^{m_2x}+m_3^2c_3e^{m_3x}.$$

再求微分,得

(7) $$D^3y=m_1^3c_1e^{m_1x}+m_2^3c_2e^{m_2x}+m_3^3c_3e^{m_3x}+m_1^2e^{m_1x}\frac{dc_1}{dx}$$

$$+m_2^2e^{m_2x}\frac{dc_2}{dx}+m_3^2e^{m_3x}\frac{dc_3}{dx}.$$

代(2),(4),(6),(7)入(1)內,同時注意視 c_1, c_2, c_3 爲常數時(2)爲一補充函數,因得

(8) $$k_0m_1^2e^{m_1x}\frac{dc_1}{dx}+k_0m_2^2e^{m_2x}\frac{dc_2}{dx}+k_0m_3^2e^{m_3x}\frac{dc_3}{dx}=X.$$

由(3),(5),(8)三方程吾人可定 $\frac{dc_1}{dx}, \frac{dc_2}{dx}, \frac{dc_3}{dx}$ 各函數,再由分求積分,吾人卽得 c_1, c_2, c_3 三個應求之函數,使(2)成爲(1)之通解,此時所得之積分常數復予吾人以題之補充函數

參數變動之法可適用於各種線性方程,無論其係數或爲常數或含變數,均可適用(53節,習題4).茲將取一級普通線性微分方程(13節)爲例,用此法解答,以見一斑.

按式爲

(1) $$\frac{dy}{dx}+Py=Q.$$

內 P 與 Q 爲 x 之函數.先論 Q 爲零之式,

(2) $$\frac{dy}{dx}+Py=0,$$

卽 $$\frac{dy}{y}+Pdx=0.$$

求積分,得

$$\log y+\int Pdx=C, \text{ 卽}$$

(3) $$ye^{\int Pdx}=e^C=c.$$

次改視 c 爲 x 之函數.今當求出其函數之式,以使(3)滿足(1)式,求其微分,得

$$e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)=\frac{dc}{dx}.$$

與(1)相比,得

$$\frac{dc}{dx}=Qe^{\int Pdx}, \text{ 卽 } c=\int Qe^{\int Pdx}\,dx+c'.$$

$\therefore ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+c'$ 爲題之解案(與13節所得同).

習題 1. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sec x$.(48節,習題3.)

輔助方程之根爲 $\pm i$.故其補充函數爲

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

$$Dy=-c_1\sin x+c_2\cos x+\left|\cos x\frac{dc_1}{dx}+\sin x\frac{dc_2}{dx}=0.\right.$$

$$D^2y=-c_1\cos x-c_2\sin x-\sin x\frac{dc_1}{dx}+\cos x\frac{dc_2}{dx}.$$

代入微分方程,得

$$-\sin x\frac{dc_1}{dx}+\cos x\frac{dc_2}{dx}=\sec x.$$

再,吾人尙有 $\cos x\frac{dc_1}{dx}+\sin x\frac{dc_2}{dx}=0.$

$$\therefore\ \frac{dc_1}{dx}=-\sin x\sec x=-\frac{\sin x}{\cos x},\qquad c_1=\log\cos x+C_1,$$

$$\frac{dc_2}{dx}=1,\qquad c_2=x+C_2.$$

故其全解爲

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\log\cos x+x\sin x.$$

習題 2. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\tan x.$

50. 待定係數法[1]. 特別積分之推求,尙有一法,雖非普通適用,然能用之時,則法至便利,今將取而陳述之,以結束此問題.此法如遇方程右端祇含具有有盡式樣之微係數者[2],(例如 x^h, e^{lx}, $\sin mx$, $\cos nx$, 及其乘積, h l, m, n 俱爲常數)均皆適用.

在此法中之特別積分 U,係用視察[3]法(或用試驗[4]法)求得之.如吾人先取 X 中各項各冠以一未定之係數,代入左端 $f(D)y$

1 待定係數法 method of undetermined coefficients

2 原文云 which have a finite number of distinct derivatives.

3 視察 inspection.

4 試驗 trial.

中,則見所得結果,因經過微分運算之關係,有新式項之發現.職是之故,吾人所取U,應含除已見於X中之項外,並兼含各種新項為微分運算所可發生者,一一冠以一未定係數,然後取其代入右端後之結果,使之全等[1]於右端X(即是取二端相當項之係數,使之一一相等之意).如是吾人當得未定係數之各種關係方程,其數一如$f(D)U$中所含各種不同的項數[2]之數.此數與未定係數之數,或屬相等或屬較少(緣由求U微分所可得之項,不必盡皆存在)而各未定係數之值亦因之可定.

習題 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=x^2+\cos x.$

輔助方程之根為$\pm 2i$,

$$\therefore Y=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

為求特別積分起見,設

$$U=ax^2+bx+c+f\cos x+g\sin x.$$

則 $$D^2U=\qquad 2a-f\cos x-g\sin x.$$

$$\therefore f(D)U=4ax^2+4bx+2a+4c+3f\cos x+3g\sin x.$$

取式中各係數一一使與X中相當係數相等,則有

$$4a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4},$$

$$4b=0 \qquad b=0$$

$$2a+4c=0 \qquad c=-\frac{1}{8},$$

$$3f=1 \qquad f=\frac{1}{3},$$

$$3g=0 \qquad g=0.$$

---

1 使之全等 equate identically.

2 不同的項數 distinct terms.

故其通解爲

$$y=A\cos 2x+B\sin 2x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\cos x.$$

習題 2. $(D^2-2D+1)y=2xe^{2x}-\sin^2 x$

其補充函數,易見其爲

$$Y=(c_1+c_2x)e^x.$$

爲求特別積分起見,先將 $-\sin^2 x$ 一項變爲 $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}$ 兩項爲便.故令

$$U=axe^{2x}+be^{2x}+c\cos 2x+f\sin 2x+g.$$

$$\therefore DU=2axe^{2x}+(a+2b)e^{2x}+2f\cos 2x-2c\sin 2x.$$

$$D^2U=4axe^{2x}+4(a+2b)e^{2x}-4c\cos 2x-4f\sin 2x.$$

$$f(D)U=axe^{2x}+(2a+b)e^{2x}-(3c+4f)\cos 2x-(3f-4c)\sin 2x+g.$$

故得

$$\begin{aligned} a&=2 & \therefore a&=2, \\ 2a+b&=0 & b&=-4 \\ 3c+4f&=-\frac{1}{2} & c&=-\frac{3}{50}, \\ 3f-4c&=0 & f&=-\frac{2}{25}, \\ g&=-\frac{1}{2} & g&=\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因得題之通解爲

$$y=(c_1+c_2x)e^x+2xe^{2x}-4e^{2x}-\frac{3}{50}\cos 2x-\frac{2}{25}\sin 2x-\frac{1}{2}.$$

習題 3. $(D^2+1)y=2e^x+x^3-x.$

習題 4. $(D^2+2D+1)y=3e^{2x}-\cos x.$

習題 5. $(D^3-1)y=x^2.$

此法遇下列二例時,却易致誤:

1° 如方程右邊某項係與補充函數中之一項相同,則凡此等之項(或其微係數)代入$f(D)y$後,結果必不能復得此項而却得零.

今假定與此項相當之根,在輔助方程中爲一單根,設爲u,如是則

$$f(D)u=0,\ 而\ f'(D)u\neq 0,$$

內 $f'(D)$ 即 $\dfrac{df(D)}{dD}$* 之意.

但$f(D)$既係D之多項式,且$D^k(xu)=xD^ku+kD^{k-1}u$準是吾人故知 $f(D)(xu)=xf(D)u+f'(D)u.$

但 $f'(D)u$ 原設不等於零,故如以xu及其微係數所成之各項[1]代 $f(D)y$ 中之 y, 則吾人必得 u 及其微係數所成之各項,而更無他項.

由此推論,吾人可知若u爲補充函數中一項,而與此項相當之根在輔助方程中,係爲r次重根,則

$$f(D)u=0,\ f'(D)u=0,\ \cdots,f^{(r-1)}(D)u=0,\ 而\ f^{(u)}(D)u\neq 0.$$

*設m爲與u項相當之根值,則m若爲$f(m)=0$之一單根,按31節,吾人知$f'(m)\neq 0$. 故n不爲$f'(D)y=0$之積分.

---

1 原文云 $xu+$terms derived from this by differentiation.

因 $$D^k(x^r u)=x^r D^k u+krx^{r-1}D^{k-1}u+\frac{k(k-1)}{2}r(r-1)x^{r-2}D^{k-2}u+$$
$$+\frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{s!}r(r-1)\cdots(r-s+1)x^{r-s}D^{k-s}u+\cdots$$
$$+k(k-1)\cdots(k-r+1)D^{k-r}u,$$

且 $f(D)$ 係 D 之常係數多項式,故

$$f(D)(x^r u)=x^r f(D)u+rx^{r-1}f'(D)u+\frac{r(r-1)}{2}x^{r-2}f''(D)u+\cdots$$
$$+\frac{r(r-1)\cdots3\cdot2}{(r-1)\cdots!}xf^{(r-1)}(D)u+f^{(r)}(D)u.$$

右端除 $f^{(r)}(D)u$ 不能爲零外,其餘各項俱皆爲零.故如以 $x^r u$ 及其微係數所成之項代入 $f(D)y$ 中,則吾人必得 u 及其微係數所成之項而更無他項.

2° 原法致誤之第二例,爲右端有 $x^t u$ 類項之存在而 u 乃係補充函數中之一項.解之之道,可用一與上段類似之法,而稍加以變化.設 u 爲與輔助方程一個 r 次重根相當之項*.則如前例,吾人有

$$f(D)(x^{t+r}u)=x^{t+r}f(D)u+(t+r)x^{t+r-1}f'(D)u$$
$$+\frac{(t+r)(t+r-1)}{2!}x^{t+r-2}f''(D)u+\cdots$$
$$+\frac{(t+r)(t+r-1)\cdots(t+2)}{(r-1)!}x^{t+1}f^{(r-1)}(D)u$$
$$+\frac{(t+r)(t+r-1)\cdots(t+1)}{r!}x^t f^{(r)}D(u).$$

*既云與 r 次重根相當 $xu, x^2u, \ldots\ldots x^{r-1}u$. 自皆爲補充函數中之項.再本文中所設之 u, 係原設其不含 x 爲因子,否則指數 t 成一無定之值,討論卽生困難矣.

右端各項除 $f^{(r)}(D)u$ 不能爲零外,餘項皆爲零.故吾人若以 $x^{t+r}u$ 及其微係數所成之項代入 $f(D)y$ 中,則結果必得 $x^t u$ 及其微係數所成之項而更無他項.

由是吾人推得下舉之通律:

若微分方程右端所含僅爲式之祇含有盡式的徵係數之項[1],則可取此類之項及其微係數所成之項一一冠以未定係數以爲題之特別積分.各項係數之值,可由將此試設之特別積分代入微分方程,比其兩端之係數而定之.若右端某項亦見於補充函數中,或右端某項爲補充函數中某項與 x 某次方(其指數爲一整數)之乘積[2],而輔助方程之根與此項相當者,係一 r 次重根,則在試設特別積分中所立之項,應爲 x^r 乘補助方程中此項之積.

按.——通律所舉之項有時不必一一盡設.此可由察閱而預知之.例如在習題 1 中,因 $\dfrac{dy}{dx}$ 之係數爲零,故在試設特別積分中,x 與 $\sin x$ 兩項之設可以從省,緣代 $ax^2+f\cos x$ 於方程之後,不能發生此類之項也.但如一可省之項已立於試設特別積分之中,則其結果必得一零爲其係數之值.故在試設積分中,多設額外之項一事,不過多費推算之勞,並無傷於大體.在補充積分中所已見之項亦易知其無庸再設.(若果設立,則其係數必不見於比較二端係數時所得各方程之中.故此係數之值可以任意賦與,此正亦一應有之事也.)職是之故,若在通律中兩例外之

1 祇含有盡式樣的微係數之項 terms which have a finite number of distinct derivatives.

2 爲補充函數中某項與 x 某次方之乘積 A term in it (指補充函數) multiplied by an integral power of x.

中,即右端某項以 x^r 相乘之積代替之時,祇須將此積之微係數未曾見於補充函數中者加以設立,其餘概可從省.

習題 6.　$(D^3-2D^2-3D)y=3x^2+\sin x.$

點題[1].——輔助方程中既有一單根爲 o,補充函數中因有一項爲 1,故吾人應試設 ax^3+bx^2+cx 三項以求 x^2 之項.又補充函數中無 $\sin x$ 一項.故本題應立之試設積分當爲

$$U=ax^3+bx^2+cx+f\sin x+g\cos x.$$

習題 7.　$(D^4-2D^2+1)y=e^x+4.$

習題 8.　$(D^2-2D)y=e^{2x}+1.$

習題 9.　$(D^4+2D^2+1)y=\cos x.$

51. 歌西線性方程式. 線性方程如下舉者

$$k_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+k_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+k_{n-1}x\frac{dy}{dx}+k_ny=X^*, \tag{1}$$

內 $\frac{d^ry}{dx^r}$ 之係數係一常數與 x^r 之積,可由 $x=e^z$ 之代替化爲一常係數線性方程式.因

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\qquad=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right),$$

*此類線性方程有時亦稱爲齊次線性方程.此實係一不幸之事.著者率從多數本學術著作家之習慣,將此名留作線性方程之 y 及其微係數屬齊次者之名稱,而將本節(1)式稱爲歌西線性方程式,取名從主人 Augustin Lovis Cauchy (1789—1857) 之意.參閱歌西著 Exercise d' analyse.

1 點題 hint.

$$\frac{d^3y}{dx^3}= \qquad =\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dz^3}-3\frac{d^2y}{dy^2}+2\frac{dy}{dz}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}= \qquad =\frac{1}{x^n}\left[\frac{d^ny}{dz^n}-\frac{n\,(n-1)}{2}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}\right.$$
$$\left.+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{dy}{dz}\right];$$

若將 $\frac{dy}{dz}$ 書作 ϑy, 則有

$$xDy=\vartheta$$
$$x^2D^2y=\vartheta(\vartheta-1)y,$$
$$x^3D^3y=\vartheta(\vartheta-1)(\vartheta-2)y,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^nD^ny=\vartheta(\vartheta-1)(\vartheta-2)\cdots(\vartheta-n+1)y;$$

而(1)式變爲

$$(2)\qquad [k_0\vartheta(\vartheta-1)\cdots(\vartheta-n+1)+k_1\vartheta(\vartheta-1)\cdots(\vartheta-n+2)$$
$$+\cdots+k_{n-1}\vartheta+k_n]y=Z,$$

內 Z 爲變換變數後,前之 X 所化成之式*.

略審(2)式,卽易見其爲一常係數線性方程式.

再,方程式如下式者,

$$k_0(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n}+k_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+k_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+k_ny=X\dagger$$

亦可由 $a+bx=e^z$ 之代替,變爲一常係數線性方程式.

*解歇西線性方程式之又一通法,見71節注中.

† 此類線性方程式稱爲 Legendre's linear equation, 式蓋從 Adrien Marie Legendre (1752—1833) 而得名.

1　如將 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$ 書作 $\frac{1}{x}\frac{d}{dz}y$, 則同樣有 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dy^2}-\frac{dy}{dz}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2}{dz^2}-\frac{d}{dz}\right)y$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3}{dz^3}+(-1)(1+2)\frac{d^2}{dz^2}+(-1)^2 2!\frac{d}{dz}\right)y$ 等式,因是 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 之普通公式卽易證其成立.

習題 1. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}-y=x\log-x$

令 $x=e^z$,式變為

$$[\vartheta(\vartheta-1)(\vartheta-2)+\vartheta-1]y=e^z z,$$

即
$$(\vartheta^3-3\vartheta^2+3\vartheta-1)y=ze^z.$$

輔助方程之根為1,1,1.

故補充函數為$Y=(c_1+c_2z+c_3z^2)e^z$.

此例之特別積分可由47節法,立求得之,其式為

$$U=e^z\int\!\!\int\!\!\int e^{-z}ze^z(dz)^3=e^z\frac{z^4}{24}.$$

∴得通解為 $y=(c_1+c_2z+c_3z^2)e^z+\frac{z^4e^z}{24}$.

即
$$y=[c_1+c_2\log x+c_3(\log x)^2]x+\frac{x(\log x)^4}{24}.$$

習題 2. $(x^3D^3+2x^2D^2+2)y=10\left(x+\frac{1}{x}\right).$

習題 3. $(x^2D^2+3xD+1)y=\frac{1}{(1-x)^2}.$

習題 4. $(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+1)\frac{dy}{dx}+6y=x.$

52. **本章提要.** 線性微分方程之推解,其事有二,求補充函數及求特別積分是(42節).

如方程 $f(D)y=X$ 為一常係數線性式,則補充函數之推求為一代數的問題即為 $f(m)=0$ 式之求根一事.因 m 之根,有時

爲實數而各異,有時爲實數而同値,有時或含複數,故補充函數之式有如43,44,45,各節所示不同之式.特別積分之推求,可就47,48,49,50,各節所示之法,酌用以求之.

比較推求特別積分各法之利便,可約言之如下:47及48節兩法(以下將稱之曰 I 法及 II 法)及49節之參數變動法,俱有絕對通用之益.但應用之際,運算工作往往長而且繁.除幾個例外情形外稍有經驗後卽可見 II 法簡於 I 法,蓋前者所事爲求多個同類之一次積分,而後者所事乃求一個多重積分也.參數變動之法有易於記憶之便,但往往長而且繁,遇題之級數高過二級時其繁尤甚.待定係數法(50節)雖非絕對通用,却於實際所遇之題大多可以適用,在可用之時則此法有將運算工作化爲祇含推求微分及推解聯立方程二事之便利,積分之求完全省去,且亦極便於記憶,實際運算之際,其途徑直而且易,有時工作或長,但亦絕少比他法更長之事.

故待定係數一法苟能應用,大概卽爲最宜之法.爲此說之例外者爲51節,習題1之類[通常右端含 e^{lx} 項或 $e^{lx}f(x)$ 項(內 $f(x)$ 爲一易於推求多次積分之式)時,及輔助方程爲 $(m-l)^r=0$ 時,吾人可云 I 法最便於應用.]若右端各項由察閱卽明其各有逕捷之法,則宜分別採用各法,以求各項之相當積分,然後彙合結果以爲題之全解.下列習題11,卽宜應用此理以求其解也

再,方程式如下式者.

$$k_0(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n}+k_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+k_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+k_ny=X,$$

(包括歌西式特例在內,蓋由令 $a=0$, $b=1$, 即得歌西線性式也),可由 $a+bx=e^z$ 代替(51節)變爲一個常係數線性式.

習題 1.　$(D^2-5D+6)y=\cos x-e^{2x}$.

習題 2.　$(D^4-1)y=e^x\cos x$.

習題 3.　$(D^2+2D+1)y=2x^3-xe^{3x}$.

習題 4.　$(D+1)^3y=xe^{-x}$.

習題 5.　$(D^3-4D)y=x^2-3e^{2x}$.

習題 6.　$(D^4-2D^2+1)y=\cos x$.

習題 7.　$(x^4D^4+6x^3D^3+9x^2D^2+3xD+1)y=(1+\log x)^2$.

習題 8.　$(D^3+2D^2+D)y=x^2-x$.

習題 9.　$(D^2+4)y=\sin^2x$.

習題 10.　$(D^2+1)y=\sec^2x$.

習題 11.　$(D-1)^3y=x-x^3e^x$.

習題 12.　$(D^4-D^3-3D^2+5D-2)y=e^{3x}$.

習題 13.　$(D^2+1)y=x\cos x$.

習題 14.　$(x^3D^3+2x^2D^2-xD+1)y=\dfrac{1}{x}$.

習題 15.　$(D^3-1)y=xe^x+\cos^2x$.

習題 16　$(D-1)^2y=\cos x+e^x+x^2e^x$.

習題 17.　一簡單之擺[1],長爲 l, 物質爲 m,在眞空中擺動,求其運動之公式.

---

1 簡單之擺 simple pendulum 或曰單擺.

本題中所有之力,祇地心吸力一事;其方向係垂直下行其濃度[1]爲 $-mg$, 若令 s 爲自擺之最低點起擺後所經過之弧長則擺與垂直線成角 θ 之時,$s=l\theta$,而其加速度爲 $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. 沿擺弧切線上之地心吸力之支力爲 $-mg\sin\theta$, 故其運動之公式爲

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta.$$

若運動自始至終之間,θ 常爲一極小之角,則吾人可以一近似值之 θ 代替 $\sin\theta$,而式變爲

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

[此係單位振動[2]之微分方程式.]

解此式得 $\theta=A\cos\left(\frac{g}{l}t+B\right)$,

內 A 及 B 爲二常數,視 θ 與 $\frac{d\theta}{dt}$ 之原始之值[3]而定之.

A 定擺之振幅,[4] B 定其相位.

擺之週期[5]爲 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 故動之情狀,在兩個 t 值,其差等於此週期值之整倍數時,完全相同.

習題18. 有一簡單之擺,在有阻力之媒介體中擺動,媒介體中所生之阻力,係與擺之速度成比$\left(設爲-2km\frac{ds}{dt}\right)$,求其運動之公式.

---

1 濃度 intensity.

2 單位振動 simple harmonic motion.

3 原始之值 initial value, 亦曰初值,曰最初之值.

4 振幅 amplitude 亦曰幅度.

5 週期 period.

今 $\frac{g}{l}=n^2$, 則得題之微分方程爲

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2k\frac{d\theta}{dt}+n^2\theta=0.$$

[按電流表[1]針之沈弱振動[2],亦生此微分方程.]

習題19. 凡遇強迫振動[3],例如磁石按週期時間移近一振動的音叉時,則若域內無阻力發生,其運動之公式爲

$$(a)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}+n^2\theta=C\cos mt,$$

($m\neq n$ 及 $m=n$ 兩例,須分別討論),試解之.

如有阻力發生與其運動速力成比,則運動之公式

$$(b)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}+2k\frac{d\theta}{dt}+n^2\theta=C\cos mt,$$

試解之.

習題20. 一物質受速度 v_0 力而上射與,其吸力之心背道而行,若物質受力後之加速度,與其經行距離成比,其運動如何?

習題21 若上題中吸力改爲抵力[4]而物質受速度 v_0 力而向心直射,則其運動如何?

習題22 一重體沿一無阻力無質量之直線上運動,此直線者,依其線中一點在一直平面上,作一等於一常角速度之旋轉運動[5],爾時他力祇有地心吸力一種,求其運動之式.

---

1 電流表 galvanometer.

2 沈弱振動 damped vibration, 或曰減弱顫動.

3 強迫振動 forced vibration.

4 抵力 repellent force.

5 原文云 rotates about one of its points in a vertical plane with constant velocity.

若 r 爲自物質至直線旋轉時定點之距離,ω 爲直線之角度旋轉速度,則得拉格蘭方程爲

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\omega^2t=-g\sin\omega t$$

習題23. 若將一容量爲 S, 已受有 Q 量之蓄電器[1]置入一電路[2]之內,則是器卽在電路內放電[3].設 g 爲是器在放電期中任何時之電量,則 g 之値可由下式定之,

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LS}=0,$$

內 L 爲自感作用[4].常數 R 爲電路間之阻力.

式之輔助方程爲

$$m^2+\frac{R}{L}m+\frac{1}{LS}=0,$$

$$\therefore m_1, m_2,=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LS}}.$$

1° 若 $$R^2>\frac{4L}{S},$$

則 $$g=Ae^{m_1t}+Be^{m_2t}.$$

次求 A 及 B.因在 $t=0$ 時,吾人知 $q=Q$, 而 $-\frac{dq}{dt}\equiv i=0$ (內 i 爲電流); 卽

$$A+B=Q \text{ 且 } m_1A+m_2B=0,$$

1 蓄電器 condenser 亦曰凝電器.

2 電路 circiut.

3 電放 discharge.

4 自感作用 self-inductance.

故得 $$A=-\frac{m_2Q}{m_1-m_2},\ B=\frac{m_1Q}{m_1-m_2},$$

而 $$q=\frac{Q}{m_1-m_2}(m_1e^{m_2t}-m_2e^{m_1t}),$$

$$i=-\frac{dq}{dt}=\frac{m_1m_2Q}{m_1-m_2}(e^{m_1t}-e^{m_2t}).$$

觀m_1及m_2之值,吾人見 q 與 i 皆係繼續變小,但在 t 為有盡數時,若$\frac{R}{L}$為一大數(按通例此係如是)兩者之值雖變小極速,不久即小至可以忽略,却並不變為o.

2° 若 $$R^2=\frac{4L}{S},$$

$$q=e^{-\frac{R}{2L}t}(A+Bt).$$

次求A及B,因有

$$A=Q,\ \frac{R}{2L}A-B=0,\ 即\ B=\frac{QR}{2L},$$

故得 $$q=\frac{Q}{2L}(2L+Rt)e^{-\frac{R}{2L}t},$$

$$i=-\frac{dq}{dt}=\frac{QR^2t}{4L^2}e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

此處之 q 及 i 亦變小極速,但在 t 為有盡數時,雖通常皆即變小至可忽略却並不變為零.

3° 若 $$R^2<\frac{4L}{S},\ 則\ m_1,m_2=-\frac{R}{2L}\pm i\sqrt{\frac{1}{LS}-\frac{R}{4L^2}}$$

$$=\alpha\pm i\beta$$

$$\therefore q=e^{\alpha t}(A\cos\beta t+B\sin\beta t),$$

而 $$i=-\frac{dq}{dt}=-e^{\alpha t}[(\alpha A+\beta B)\cos\beta t+(\alpha B-\beta A)\sin\beta t].$$

次求 A 及 B,因有

$$A=Q, \alpha A+\beta B=o, \text{ 即 } B=-\frac{\alpha Q}{\beta},$$

故得

$$q=Qe^{-\frac{R}{2L}t}\left(\cos t\sqrt{\frac{1}{LS}-\frac{R^2}{4L^2}}+\frac{\frac{R}{2L}}{\sqrt{\frac{1}{LS}-\frac{R^2}{4L^2}}}\sin t\sqrt{\frac{1}{LS}-\frac{R^2}{4L^2}}\right),$$

$$i=\frac{Q}{LS\sqrt{\frac{1}{LS}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin t\sqrt{\frac{1}{LS}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

此處 q 與 i 俱爲週期函數,其週期爲 $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LS}-\frac{R^2}{4L^2}}}$,故其值時正時負.兩者之幅度[1]均爲一常數乘 $e^{-\frac{R}{2L}t}$ 之積,而其值常因 t 增大而變小極速.但在特製之電路中,其 R 比 L 甚小時,則得一擺動放電[2]之結果,亦屬可能.(參閱 I. C. and J. P. Jachson, Alternating Currents and Alternating Current machinery.)

---

1 幅度 amplitude

2 擺動放電 oscillatory discharge.

第八章

二級線性微分方程*

53. **應變數變換法**[1]. 一級之線性方程雖皆可解(言即可化爲求積式之意,13節),二級之方程則可解者僅屬少數.

二級線性方程之通式爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=X, \tag{1}$$

內 P, Q, X 皆爲單含 x 之函數.

今試以下舉關係變更其應變數.介

$$y=y_1v. \tag{2}$$

如是則有 $\quad \dfrac{dy}{dx}=y_1\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{dy_1}{dx}v,\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=y_1\dfrac{d^2v}{dx^2}+2\dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{d^2y}{dx^2}v;$

(1)式因變爲

$$\frac{d^2v}{dx^2}+P_1\frac{dv}{dx}+Q_1v=X_1, \tag{3}$$

*本章專論對於二級線性方程特別適用之方法.下章所論通法當然亦多適用於二級方程.但因下章56節高級方程解法通則所云關係,本章之法宜先熟習備用.

---

1 應變數變換法 change of dependent variable.

內 $$P_1=\frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+P,\quad Q_1=\frac{\dfrac{d^2y_1}{dx^2}+P\dfrac{dy_1}{dx}+Qy_1}{y_1},\quad X_1=\frac{X}{y_1}.$$

此數方程之用處有二.

1° 由察閱或他法,有時卽可見 $X=0$ 時之一個特別積分*,(設此積分爲 y_1)故 $Q_1=0$,而(3)式變爲

$$\frac{d^2v}{dx^2}+P_1\frac{dv}{dx}=X_1.$$

再令 $\dfrac{dv}{dx}=p$,則式又變爲一級線性方程如下式,

$$\frac{dp}{dx}+P_1p=X_1,$$

其解可用13節法求之.由此用求積法,y 卽可求得.

習題 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-x^2\dfrac{dy}{dx}+xy=x.$

因題中 $P=-Qx$,故知 x 爲一特別積分.令 $y=xv$,則有

$$x\frac{d^2v}{dx^2}+(2-x^3)\frac{dv}{dx}=x,\text{再令}\frac{dv}{dx}=p,\text{卽得}$$

$$\frac{dp}{dx}+\left(\frac{2}{x}-x^2\right)p=1.$$

*例如若 $P=-Qx$,卽易見 x 爲一特別積分.又,若 $1+p+Q=0$,則 e^x 爲一特別積分;又,若 $1-p+Q=0$ 則 e^{-x} 爲一特別積分;推廣其義,若有 m 一數具有 $m^2+Pm+Q=0$ 之關係,則 e^{mx} 爲一特別積分.

因積分因子爲 $e^{\int\left(\frac{2}{x}-x^2\right)dx}$ 即 $x^2e^{-\frac{x^3}{3}}$.

$$\therefore px^2e^{-\frac{x^3}{3}}=\int x^2e^{-\frac{x^3}{3}}dx=-e^{-\frac{x^3}{3}}+c_1,$$

即
$$p=\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x^2}+c_1x^{-2}e^{\frac{x^3}{3}},$$

而
$$v=\frac{1}{x}+c_1\int x^{-2}e^{\frac{x^3}{3}}dx+c_2;$$

故
$$y=1+c_1x\int x^{-2}e^{\frac{x^3}{3}}dx+c_2x.$$

習題 2. $x\frac{d^2y}{dx^2}-(2x+1)\frac{dy}{dx}+(x+1)y=x^2-x-1.$

習題 3. $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-2y=0.$

習題 4. $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=(1-x)^2.$

題中右端若令爲零,則見 x 與 e^x 皆爲特別積分,故由42節 A 之原理得題之補充函數爲 $c_1x+c_2e^x$. 補充函數外之特別積分,可用49節參數變動法求之*.

*除用參數變動法外,吾人有時可用Lie之特別積分通式一法(見Lie's Differentialgleichungen, p. 429). 此通式亦見於著者所著之 Lie Theory of one-Parameter Groups p. 174.

2° 若令 $P_1=0$, 即 $\frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+P=0$,

則有 $$\log y_1=-\frac{1}{2}\int P\,dx,\text{ 即}$$

(4) $$y_1=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}.$$

用此 y_1,則有

$$Q_1=Q-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}P^2,\ X_1=Xe^{\frac{1}{2}\int Pdx}.$$

$Q-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}P^2$ 式,時或等一常數,如是則(3)式變爲一常係數方程;或等於一常數被 x^2 所除之式,如是則式爲歌西方程式,將由 $x=e^z$ 之變換,即可變式爲一常係數方程式(51節).

習題 5. $\sin x\frac{d^2y}{dx^2}+2\cos x\frac{dy}{dx}+3\sin x\cdot y=e^x.$

題式可書爲 $$\frac{d^2y}{dx^2}+2\cot x\frac{dy}{dx}+3y=e^x\csc x.$$

因 $$Q-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}P^2=3+\csc^2x-\cot^2x=4.$$

故用 $y=ve^{-\frac{1}{2}\int Pdx}=v\csc x$ 變換後,式即變爲

$$\frac{d^2v}{dx^2}+4v=e^x.\text{*}$$

求積分,得 $$v=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{5}e^x,$$

故 $$y=c_1(\cos x\cot x-\sin x)+c_2\cos x+\frac{1}{5}e^x\csc x.$$

*此結果可逕行寫出,不必由變換變數而得[1].

---

1 其理由如下:P_1 當然爲零,Q_1 已知其爲 4, 且 $X_1=Xe^{\frac{1}{2}\int Pdx}$ 亦易證其爲 e^x 也.

習題 6. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\tan x\frac{dy}{dx}-(a^2+1)y=0.$

習題 7. $4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+(x^2+1)^2y=0.$

習題 8. $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-xy=2e^x.$

54. 自變數變換法[1] 若吾人引用一新自變數 z 於題內,則

因
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2},$$

故(1)變爲

(5)
$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\frac{dy}{dz}+\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}y=\frac{X}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

有時,吾人若令 $\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\pm 1$, 即 $\frac{dz}{dx}=\sqrt{\pm Q}$ (符號之選取,以能使方程根成爲實數爲斷), 則 $\frac{dy}{dx}$ 之係數化爲一常數.如是則(5)式變爲一常係數線性式,而可以第七章之方法解出之.

---

1 自變數變換法 change of independent variable.

按.—— $\dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}=\pm1$ 之變換,若可使原式變成 $\dfrac{d^2y}{dz^2}+K\dfrac{dy}{dz}\pm y=0$, 則 $\dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}\pm a$ 之變換(a 為任一常數),可使原式變為 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sqrt{a}\,K\dfrac{dy}{dx}\pm ay=0$. 若 K 中原有一平方根式之因子在內,則吾人可選一合宜之 a 使 $\sqrt{a}\,K$ 成為一有理數,而實際運算工作,因之可以化簡.下列習題 5, 即屬此類之問題.

習題 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+(2e^x-1)\dfrac{dy}{dx}+e^{2x}y=e^{4x}$.

若 $\dfrac{dz}{dx}=e^x$, 則 $\dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2}+(2e^x-1)\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}=2$.

故引用一新自變數 $z=e^x$ 後,則原式變為

$$\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}+y=z^2.^*$$

其解為 $$y=(c_1+c_2z)e^{-z}+z^2-4z+6.$$

將 z 變還 x, 則得

$$y=(c_1+c_2e^x)e^{-e^x}+e^{2x}-4e^x+6.$$

習題 2. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+4y=0$.

習題 3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\tan x\dfrac{dy}{dx}+\cos^2x\cdot y=0$.

習題 4 $x^6\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x^5\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{x^2}$.

習題 5. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}-(2x^2+1)\dfrac{dy}{dx}-8x^3y=4x^3e^{-x^2}$.

---

*此結果可逕行書出不必由變換變數始能求出.

55. 本章提要. 解二級線性微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=X$無通法.實際工作,可循下說進行:

1° 若由察閱或他法,吾人可得一右端等零時之特別積分,則由 $y=y_1v$ 之代替,可將原方程化爲一級線性式,爾時$\frac{dv}{dx}$可視爲一新變數(53節1°).

2° 若此類之特別積分不能先知,則試求$Q-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}P^2$之值.如此爲常數,或一常數被$x^2$所除,則原式可用 $y=y_1v$ 之變換,化爲一常係數線性式或歐西式, $y_1=e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$ 之值,吾人至此,始須將其求出(53節2°).*

3° 若前法不適用,命$\frac{dz}{dx}=\sqrt{\pm Q}$(符號之選取以便此方根式成爲實數爲度);然後代入$\dfrac{\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$中.如後者變爲常數,則此變換法可用,而 z 之函數始應於$\frac{dz}{dx}=\sqrt{\pm Q}$關係中求出(54節).*

習題 1. $x\frac{d^2y}{dx^2}-(x+3)\frac{dy}{dx}+3y=$.

習題 2. $(x-3)\frac{d^2y}{dx^2}-(4x-9)\frac{dy}{dx}+(3x-6)y=0$.

習題 3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+(2-x^2)y=0$.

*試驗一法能否可用之先,須注意積分之推求無須先爲進行.必俟試驗結果已經證明方法可用後,然後方行求出其新變數,以免耗費無謂之工作.

習題 4. $(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0.$

習題 5. $x\frac{d^2y}{dx^2}-(2x-1)\frac{dy}{dx}+(x-1)y=0.$

習題 6. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+(6+x^2)y=0$

習題 7. $(2x^3-1)\frac{d^2y}{dx^2}-6x^2\frac{dy}{dx}+6xy=0.$

習題 8. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=x^3.$

習題 9. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2nx\frac{dy}{dx}+(n^2+n+a^2x^2)y=0.$

習題 10. $x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}+n^2y=0.$

第九章

解一級以上高級方程之雜法[1]

56. **解題通則**[2]. 一級微分方程並無直解通法,惟常係數線性方程式及他種方程之可化為此式者係屬例外(第七章).解法之公共原則,乃在設法使將原方程化為一低級之方程.茲將數種方程之可以應用此法者,分別列論於後.

57. **缺應變數之方程**[3]. 如式中無 y,則方程必屬式之如下列者.

$$f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \cdots, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right)=0.$$

若令 $\frac{dy}{dx}=p$, 則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx} \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}},$$

而原式化為

$$f\left(\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}p}{dx^{n-2}}, \cdots, \frac{dp}{dx}, p, x\right)=0,$$

為一 $(n-1)$ 級之方程.如方程之 p 可以解出,則有 $p=\phi(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})$, 而 y 可由求積以求之,即

$$y=\int \phi(x_1 c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})\, dx+c_n.$$

---

1 解一級以上高級方程之雜法 Miscellaneous methods for solving equations of higher order than the first.

2 解題通則 general plan, 或曰普通計劃.

3 缺應變數 dependent variable absent.

推廣其理,若 y 及其各微係數至 $(r-1)$ 次,俱不見於原式之中,則式可設爲

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \cdots, \frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}, \frac{d^r y}{dx^r}, x\right)=0,$$

由令 $\frac{d^r y}{dx^r}=v$,則原式化爲

$$f\left(\frac{d^{n-r}v}{dx^{n-r}}, \cdots, \frac{dv}{dx}, v, x\right)=0,$$

爲一 $(n-r)$ 級方程.若 v 可以解出,則有 $x=\phi(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-r})$,而 y 可由 r 次重疊求積[1]以求得之,即

$$y=\int\int\cdots\int\phi(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-r})\,dx^r$$
$$+c_{n-r+1}x^{r-1}+c_{n-r+2}x^{r-2}+\cdots+c_{n-1}x+c_n.$$

若 y 與其各次微係數,除其最高次之微係數外,俱皆不見於原式之中,則原式可書爲

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x),$$

其解可由 n 次重疊求積直接求得之.緣 $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int f(x)\,dx+a_1$,則再求積分即有 $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\int\int f(x)dx^2+a_1x+a_2$. 依此類推,最後必得

$$y=\int\int\cdots\int f(x)dx^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}x+c_n.$$

習題 1. $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

---

1 由 r 次重疊求積 by r successive quadratures.

令 $\frac{dy}{dx}=p$, 則有

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx}+p^2=0,\ 即\ \frac{dp}{1+p^2}+\frac{dx}{1+x^2}=0.$$

$$\therefore \tan^{-1}p=c-\tan^{-1}x,\ 即\ p=\frac{c_1-x}{1+c_1x},\ 內\ c_1=\tan c.$$

求積分,得 $$c_1^2y=(c_1^2+1)\log(1+c_1x)-c_1x+c_2.$$

習題 2. $\left(x\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+1.$

令 $\frac{d^2y}{dx^2}=v$, 並解其 v, 則

$$v=x\frac{dv}{dx}\pm\sqrt{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+1}.$$

此係克雷勞式(27 節),故其解為

$$v=\frac{d^2y}{dx^2}=cx\pm\sqrt{c^2+1}.$$

求其積分,得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{c}{2}x^2\pm x\sqrt{c^2+1}+c'.$$

再求積分,得 $$y=\frac{c}{6}x^3\pm\frac{x^2}{2}\sqrt{c^2+1}+c'x+c''.$$

習題 3. $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=x.$

習題 4. $\frac{d^2y}{dx^2}=xe^x.$

習題 5. $\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=1+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2.$

58. 缺自變數之方程. 如式中無 x,吾人可取 y 作自變數而令 $\frac{dy}{dx}\equiv p$ 爲應變數.由下列各種關係

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=p^3\frac{d^3p}{dy^3}+4p^2\frac{dp}{dy}\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^3,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=p^4\frac{d^4p}{dy^4}+7p^3\frac{dp}{dy}\frac{d^3p}{dy^3}+11p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\frac{d^2p}{dy^2}+4p^3\left(\frac{d^2}{dy^2}\right)^2+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^4,$$

....

原式可變爲一個 $n-1$ 級的方程.如方程中之 p 可以解出,則有 $p=\phi(y,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})$,而 y 可由下式求積得之.

$$\int\frac{dy}{\phi(y,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})}=x+c_n.$$

按.——方程之爲 $\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$ 者(亦屬本論之方程類中),甚易見其顯有一積分因子爲 $2\frac{dy}{dx}dx$.引用以後,得

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx=2f(y)dy.$$

求積分,得 $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int f(y)dy+c_1,$$

因得 $$\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy+c_1}}=x+c_2.$$

按本題若用本節通法,其結果亦化入此法.

習題 1. $y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y^2\frac{dy}{dx}=0.$

令 $$\frac{dy}{dx}=p,\ \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy},$$ 故得

$$p\left(y\frac{dp}{dy}-p-y^2\right)=0.$$

由 $p=0$,得 $y=c$ 爲一特解.

由 $y\frac{dp}{dy}-p-y^2=0$,知其式有一積分因子爲$\frac{1}{y^2}$,引用後得解爲 $\frac{p}{y}=y+c$.重易 p 爲$\frac{dy}{dx}$,得

$$\frac{dy}{y(y+c)}=dx,$$

由是得 $$\log\frac{y}{y+c}=cx+c',$$

即 $$\frac{y}{y+c}=ke^{cx}.$$

習題 2. $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0.$

習題 3. $2\frac{d^2y}{dx^2}=e^y.$

習題 4. $y\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

59. 線性方程而其特別積分有爲已知者. 如方程爲某級線性式,而其右端等零時有一特別積分已經先知,則53節1°段中之法可以適用*.設方程爲

$$(P_0D^n+P_1D^{n-1}+\cdots+P_{n-1}D+P_n)y=X.$$

*該節下小註所引如何可以察閱特別積分之理,亦適用於本節.

令 $y=y_1v$, 則有

$$Dy=Dy_1.v+\cdots,^*$$

$$D^2y=D^2y_1.v+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^ny=D^ny_1.v+\cdots.$$

代入原式,得

$$\cdots+(P_0D^n+P_1D^{n-1}+\cdots+P_n)\,y_1.v=X.$$

v 之係數原設為零,故令 $\frac{dv}{dx}=p$ 後,原式化為 $n-1$ 級之方程.

習題 1. $[(x^2-2x+2)D^3-x^2D^2+2xD+2xD-2]\,y=0.$

$y=x$ 為一特別積分. 令 $y=xv$, 得

$$(x^3-2x^2+2x)D^3v-(x^3-3x^2+6x-6)D^2v=0.$$

令 $D^2v=q$, 則式變為

$$\frac{dq}{q}=\frac{x^3-3x^2+6x-6}{x^3-2x^2+2x}dx=dx-\frac{3dx}{x}+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx.$$

因得 $$\log q=x-3\log x+\log(x^2-2x+2)+c.$$

$$\therefore q=\frac{d^2v}{dx^2}=c_1e^x\frac{x^2-2x+2}{x^3}.$$

求積分,得 $$\frac{dv}{dx}=c_1e^x\frac{x-1}{x^2}+c_2,$$

再求積分,得 $$v=c_1e^x\frac{1}{x}+c_2x+c_3.$$

故 $$y=c_1e^x+c_2x^2+c_3x.$$

* 諸點表示,所略之項內中不含有 v, 而所含 v 之微係數,其級數之高下與左邊 D 之指數相同.

習題 2.　$(xD^3-D^2-xD+1)y=1-x^2$.

由察閱可見 e^x, e^{-x} 爲題之兩個特別積分,因是知題之補充函數即爲

$$Y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3x.$$

學者可用參數變動法(49節),證明式中 c_1, c_2, c_3 若取下列各式等值時,此式即變爲通解,

$$c_1=\frac{e^{-x}}{2}(x+2-x^{-1})+k_1,$$

$$c_2=\frac{e^{x}}{2}(x^{-1}+2-x)+k_2,$$

$$c_3=x+\frac{1}{x}+k_3.$$

故知本題之解應爲

$$y=k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3x+x^2+3.$$

爲練習本節方法起見,學者宜再將此題用本節方法解出之

60. 正合方程. 積分因子. 如一方程爲一他方程之微係數[1],則逕用積分可將方程之級化低一次.實驗一方程之是否正合,並無簡便公式(線性方程除外).但其法却簡而且逕,設題作例即可指明其途徑:

試取下方程爲題,

$$P_0\frac{d^3y}{dx^3}+P_1\frac{d^2y}{dx^2}+P_2\frac{dy}{dx}+P_3y=X. \tag{1}$$

1 如一方程爲一他方程之微係數 In case the equation is the derivative of nother one.

首項 $P_0\frac{d^3y}{dx^3}$ 顯見其可由求 $P_0\frac{d^2y}{dx^2}$ 之微係數而得.如求後者之微係數則得 $P_0\frac{d^3y}{dx^3}+P'_0\frac{d^2y}{dx^2}$（茲以加撇符號指示 P 上曾施微分運算之工作）.如(1)為正合式,則下式

$$(P_1-P'_0)\frac{d^2y}{dx^2}+P_2\frac{dy}{dx}+P_3y. \tag{2}$$

亦為正合式. $(P_1-P'_0)\frac{d^2y}{dx^2}$ 可由求 $(P_1-P'_0)\frac{dy}{dx}$ 之微係數而得.求後者之微係數則得 $(P_1-P'_1)\frac{d^2y}{dx^2}+(P'_1-P''_1)\frac{dy}{dx}$.

故(2)若為正式,則下式

$$(P_2-P'_1+P''_0)\frac{dy}{dx}+P_3y. \tag{3}$$

亦為正合式. $(P_2-P'_1+P''_0)\frac{dy}{dx}$ 可由求 $(P_2-P'_1+P''_0)y$ 之微係數而得.求後者之微係數,則得

$$(P_2-P'_1+P''_0)\frac{dy}{dx}+(P'_2-P''_1+P'''_0)y.$$

故(3)式若屬正合,則吾人應有

$$P_3-P'_2+P''_1-P'''_0\equiv 0.*$$

非但如是,此條件亦顯易見為一種充分條件,而(1)式之首次積分當為

$$P_0\frac{d^2y}{dx^2}+(P_1-P'_0)\frac{dy}{dx}+(P_2-P'_1+P''_0)y=\int X\,dx+c.$$

*由此推論,可見 n 級線性方程之正合條件應為

$$P_n-P'_{n-1}+P''_{n-2}-\cdots+(-1)^rP^{(r)}_{n-r}+\cdots+(-1)^nP^{(n)}_0\equiv 0. \tag{4}$$

此法亦適用於非線性方程,但遇此類題時,吾人無簡便方法以驗其是否屬於正合;實際馭題,須取所論方程實行求其首次積分以驗其是否正合.例如設有題為

$$(y^2+x)\frac{d^3y}{dx^3}+6y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0.$$

$(y^2+x)\frac{d^2y}{dx^2}$ 之微係數為 $(y^2+x)\frac{d^3y}{dx^3}+2y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2y}{dx^2}$.

與題相減,得 $4y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

此為 $2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 之微係數.故得首次積分

$$(y^2+x)\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=c_1.$$

此式亦係正合,學者宜自證之.

按.——正合微分既由求一低級式之微分而來,故原式中之最高微係數衹能為一次式.換言之,原題中之最高級微係數,若為高於一次之式,則此題卽不能為正合式.非特如是,在運算過程之中,程中所遇之式若本節中之(2)與(3),皆應同具此條件(卽其最高級之微係數不能高於一次式).倘若此等之式,內中遇有一個含有最高級之微係數高出於一次,則正合必不可能,本法運算卽無須試行前進.

習題 1.　$(x+2)^2\frac{d^3y}{dx^3}+(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=1.$

此係線性式且合於(4)之正合條件.

$(x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2}$ 之微係數為 $(x+2)^2\frac{d^3y}{dx^3}+2(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}$.

與題相減,得 $-(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}$.

$-(x+2)\frac{dy}{dx}$之微係數爲$-(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}$,相減得$2\frac{dy}{dx}$,其積分爲$2y$.故得題之首次積分爲

$$(x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2}-(x+2)\frac{dy}{dx}+2y=x+c.$$

再以(4)驗本式正合與否,則見$2+1+2\neq 0$,故知此非正合式.

但若命$x+2=e^z$(51節),則變換變數後,得

$$\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}+2y=e^z+c',$$

爲一常係數線性方程式.

式之輔助方程之根爲$1\pm i$.

故其補充函數爲$Y=e^z(A\cos z+B\sin z)$.次求式之特別積分,試命$U=ae^z+b$,代入相比,則吾人應有$ae^z+2b\equiv e^z+c'$,故$a=1$,$b=\frac{c'}{2}$.故知本題之解應爲

$$y=e^z(A\cos z+B\sin z)+e^z+\frac{c'}{2},$$

即 $$y=(x+2)[A\cos\log(x+2)+B\sin\log(x+2)]+x+c.$$

按.——本題之中並無含有y之項,故57節之法亦屬適用.學者宜再用此法將本題重行解出之.

習題 2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=x.$

習題 3. $(x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+4(x-1)\frac{dy}{dx}+2y=\cos x.$

習題 4.　$(x^3-x)\dfrac{d^3y}{dx^3}+(8x^2-3)\dfrac{d^2y}{dx^2}+14x\dfrac{dy}{dx}+4y=0.$

習題 5.　$$2x^3y\frac{d^3y}{dx^3}+6x^3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+18x^2y\frac{d^2y}{dx^2}+18x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+36xy\frac{dy}{dx}+6y^2=0.$$

題中之積分因子有時或可求出.但求此積分因子之通法在此不能論及*.在本書所論之例中,題之積分因子大抵可用特別方法或察閱方法求出.此類中一種重要之式,時在物理學問題中發生,已曾在58節按語中提及.

習題 6.　$x^5\dfrac{d^2y}{dx^2}+(2x^4-x)\dfrac{dy}{dx}-(2x^3-1)y=0.$

因　　$-2x^3+1-8x^3+1+20x^3\neq 0,$

故知本題不爲正合方程.

但吾人或可選出一個積分因子如x^m,以化原式爲一正合方程,惟m之值須能適合於下列方程之條件,

$$-2x^{m+3}+x^m-2(m+4)x^{m+3}+(m+1)x^m$$
$$+(m+5)(m+4)x^{m+3}\equiv 0,$$

即　　$(m^2+7m+10)x^{m+3}+(m+2)x^m\equiv 0;$

即　　$m^2+7m+10=0$, 且 $m+2=0.$

故若 $m=-2$, 則兩方程均皆適合.

*關於線性方程之積分因子之求法,可參閱 Schlesinger, Differentialgleichungen, p. 147, 及其書中所列之各種參考.

故知x^{-2}為本題之一個積分因子.引用後得

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}+(2x^2-x^{-1})\frac{dy}{dx}-(2x-x^{-2})\,y=0.$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3\dfrac{dy}{dx} & x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x^2\dfrac{dy}{dx} \\
\cline{2-2}
 & \qquad -(x^2+x^{-1})\dfrac{dy}{dx}-(2x-x^{-2})y \\
-(x^2+x^{-1})y & -(x^2+x^{-1})\dfrac{dy}{dx}-(2x-x^{-2})y \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

故得首次積分為$x^3\dfrac{dy}{dx}-(x^2+x^{-1})y=c$,

即
$$\frac{dy}{dx}-(x^{-1}+x^{-4})y=cx^{-3}.$$

此係線性方程式,其積分因子為

$$e^{-\int(x^{-1}+x^{-4})dx}=x^{-1}e^{\frac{1}{3}x^{-3}}\quad(13\text{節}).$$

$$\therefore\ yx^{-1}e^{\frac{1}{3}x^{-3}}=c\int x^{-4}e^{\frac{1}{3}x^{-3}}\,dx+c'=-ce^{\frac{1}{3}x^{-3}}+c'$$

即
$$y+cx=c'xe^{-\frac{1}{3}x^{-3}}.$$

習題 7. $x^2(1-x^2)D^2y-x^3Dy-2y=0.$

習題 8. $x^2D^3y-5xD^2y+(4x^4+5)Dy-8x^3y=0.$

習題 9. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+f(x)\dfrac{dy}{dx}+\phi(y)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0.$*

*此類方程係由 Joseph Liouville (1809–1882)首加研究.學者宜自證此係 $F(y)=a\Phi(x)+b$ 之微分方程式中 F 為一個 y 的函,Φ 為一個 x 的函數,a 與 b 為應當消去之兩個任意常數.

由察閱知$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$爲一積分因子

引用後得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)+\phi(y)\frac{dy}{dx}=0,$$

因有
$$\log\left(\frac{dy}{dx}\right)+\int f(x)dx+\int\phi(y)dy=c,$$

即
$$e^{\int\phi(y)dy}dy=ce^{-\int f(x)dx}dx,$$

故
$$\int e^{\int\phi(y)dy}dy=c\int e^{-\int f(x)dx}dx+c'.$$

習題 10. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\cot x\frac{dy}{dx}+2\tan y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

61. 變數變換法[1]. 如所遇方程並不屬於以上所述之任何一類,有時或可由變換其變數,而化成爲已經論及之一類.此事亦無通法,方程之式有時或自能示人以變換之途.

習題 1. $x^2y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=0.$

$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$, 指示 $y=vx$ 之變換或可試用.用此變換後,方程化爲下式(內中公有因子x^2,已先除去),

$$xv\frac{d^2v}{dx^2}+2v\frac{dv}{dx}+x\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=0.$$

---

1 變數變換法 transformation of variables.

此係正合式,其首次積分為

$$xv\frac{dv}{dx}+\frac{1}{2}v^2=c.$$

此式亦係正合,其積分為

$$xv^2=c_1x+c_2,$$

即
$$y=c_1x^2+c_2x.$$

[$y^2=v$ 之變換,雖不易先知,於本題亦可應用.學者宜試用此法,將本題再解之.]

習題 2. $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)^2=0.$

習題 3. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=y^2\log y-x^2y^2.$ [令 $\log y=v_1$ 即 $y=e^v$.]

習題 4. $\sin^2 x\dfrac{d^2y}{dx^2}-2y=0,$ [令 $\cot x=z.$]

如用較易顯見之代替 $\sin x=z$, 則其結果亦可因用一個 z 的相當次方遍乘後,而將本題化為正合式,題之積分即因是可求.

62. **本章提要.** 一級以上之高級微分方程,可以用通法解出者為數極少,吾人由察閱可知

1° 若方程中無應變數,則可令式中之最低級微係數為一新變數,然後試解之(57節);

2° 若方程中無自變數,則可令式中應變數之初級數係數為一新變數,而視應變數為一自變數以變換其式(58節).若方

*設此微係數並非同時為方程之最高級微係數.倘若此又為最高級之微係數,則吾人當令其低一級之微係數為一新變數.

程之式屬於$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$一種特式,則其結果等於引用一顯見之積分因子$\frac{dy}{dx}dx$,題亦可由逕用此法以解之(58節,按).

3°　若方程爲一線性式,而方程右端等零時之一個特別積分y_1可以預知,則由令$y=y_1v$以變換其式,然後再令$\frac{dv}{dx}=p$可以解之(59節).

4°　若方程爲二級線性式,則第八章中所論各法可以選擇施用(55節).

如上述各情均未發生,則先取方程試驗其是否正合之法,可以施用(60節).如驗後結果,知方程不爲正合式,則特別方法,如求積分因子(60節),如用適宜的變數變換(61節)等法必須設法採用.

最後一途吾人可試用,以級數求積分的方法(74節).

習題 1.　$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1.$

習題 2.　$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2.$

習題 3.　$\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}=0.$

習題 4.　$(1+x^3)\frac{d^3y}{dx^3}+9x^2\frac{d^2y}{dx^2}+18x\frac{dy}{dx}+6y=0.$

習題 5.　$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(4x+2)\frac{dy}{dx}+2y=0.$

習題 6.　$y(1-\log y)\frac{d^2y}{dx^2}+(1+\log y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

習題 7. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=0.$

習題 8. $x(x+2y)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4(x+y)\frac{dy}{dx}+2y+x^2=0$

習題 9. $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0.$

習題 10. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+x^2=0.$

習題 11. $4x^2\frac{d^3y}{dx^3}+8x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0.$

習題 12. $\sin x\frac{d^2y}{dx^2}-\cos x\frac{dy}{dx}+2\sin x\cdot y=0.$

習題 13. 今有曲線,其曲率半徑[1]與其法線之長相等,求(*a*)二者取同向時[2]之公式,(*b*)二者取反向[3]時之公式.

曲率半徑之式爲 $\dfrac{\pm\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$. 法線之方向原係設其向 x 軸引伸,若此與曲率半徑屬同向,則 y 與 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 應取相異之號;若二者反向,則 y 與 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 應取相同之號.

---

1 曲率半徑 radius of curvature.

2 二者取同向時 when the two have the same direction.

3 反向 opposite direction.

習題 14. 今有曲線,其曲率曲徑兩倍於其法線之長,求(a)二者取同向時之公式,(b)二者取反向時之公式.

習題 15. 今有曲線,其曲率半徑 k 倍於其法線之長之立方求其公式.

習題 16. 有一物質,由 x 軸上一點在原點 a 遠之處起行,其行動方向係與 y 軸平行.另一物質自原點同時起程,向前物質追縱而行,其行動速度 n 倍於前物質之速度.試求後述物質之行程曲線[1].

[此路程卽通常所稱之追縱曲線[2].其微分方程之式,可由推論下述各事以求之:設(x, y)爲追點之坐標,(ξ, η)爲被追點之坐標.後者之行程本屬已知,設其方程爲[1] $f(\xi, \eta)=0$.因被追之點常與追縱曲線相切,故吾人常有(2) $\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x)$ 之關係.由(1)與(2)式,ξ 與 η 二者之爲何種的 $x, y, \frac{dy}{dx}$ 的函數等式,可以推定.若被追點與追點之速度爲 $1:n$ 之比,則有

$$n\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}=\sqrt{dx^2+dy^2};$$

亦卽

$$n\sqrt{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

在此式之中,x 係視爲自變數.如將由(1)與(2)所求得之 ξ 與 η 的等式代入此式,則吾人卽得追縱曲線之微分方程.

習題 17. 有一底端有重的簡單之擺,其長爲 l,擺動於眞空之中.若在 $t=0$ 時,$v=0$ 而 $\theta=\alpha$(α 爲非一小至可用 α 代替 $\sin\alpha$ 之值),試求其擺底之速度(參閱52節,習題17).

---

1 行程曲線 path,或曰路程,曰行程.

2 追縱曲線 curve of pursuit,或曰追縱路程.

習題18. 有一物質爲一他力所吸依沿一直線進行,其吸力之量係與距離之方成倒比.[運動公式爲$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k^2}{x^2}$.]若其行動之始,速度爲零而其與吸力中心之距離爲 a,

(*a*)試求此物質在行程中任一點處之速度,

(*b*)求其達到此點所需之時間,

(*c*)若物質係自無窮遠處以零的最初速度開始運動,問此物質須經過若干路程,方能得速度與其到 a 處之速度相同.

(*d*)重力作用既如上述之律,求一物質自 h 高處下墜至地時之速度(例如隕石等物).

[地面上之重力的加速度常用 g 代替.若 R 爲地球半徑之長,則 $k^2=gR^2$.]

第十章

聯立方程組

63. 解題通則[1]. 含有 n 應變數之 n 個方程所成之聯立方程組,按微分方程理論,普通皆屬可以解出,此在學理上蓋爲已經證明之事也(70節).

茲將取 $n=2$ 爲例,以示運算之道,其法卽在 n 爲任何數時皆屬可以同樣施用也.設二方程爲

(1) $$f_1[(x)_m,(y)_r,t]=0,$$

(2) $$f_2[(x)_{m+p},(y)_r,t]=0,$$

內中 x 之最高級微係數在(1)與(2)式所發現者爲 m 級及 $m+p$ 級,y 之最高級微係數在兩式中所發現者爲 r 級及 s 級,t 爲自變數,p 有時或等於零.

求(1)之微分 p 次,則得下列各式

(3) $$f_3[(x)_{m+1},(y)_{r+1},t]=0,$$

(4) $$f_4[(x)_{m+2},(y)_{r+2},t]=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$(p+2)$ $$f_{p+2}[(x)_{m+p},(y)_{r+p},t]=0.$$

如是共得 $p+2$ 方程,由此應將 x 及其各微係數消去.在通常情形之下(除非是 $m=0$),以上方程之數不足應用,緣吾人所需

(1) 解題通則 general method of solution.

方程之數比之應行消去之數,應多一個也.故吾人由此,應將(2)與$(p+2)$兩式均取而再求其微分.如是將有新得之方程有二,而x之新微係數所增祇一個.故吾人可見,若將此法繼續施用,則必有一時,所得方程之數比應消之數更多一個.由此施用消去工作,卽得一單含y之方程,解此方程再將y代入(1)式,則得一單含x之方程,因之x亦由此可以解出.

按.——先消y及其微係數,以求x亦無不可,其法悉相同也.或則將x與y分別解出亦可,但如是所得x與y二式中之常數,並非各各獨立,其間關係可由代x與y入(1)式或(2)式,比其係數以定之.

64. 常係數線性方程組. 本法遇方程爲常係數線性式時,施用極便捷.例如,設方程爲

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+x=\cos t,\\[2ex] \dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}+3xy=e^{2t}.\end{cases}$$

二式可書爲

(1) $$(D+1)x-Dy=\cos t,$$

(2) $$(D^2+3)x-(D+1)y=e^{2t}.$$

求(1)之微分,得

(3) $$(D^2+D)x-D^2y=-\sin t.$$

今須將x, Dx, D^2x消去;但此必須先有四個方程.

故吾人取(2)與(3)再求其積分,得

(4) $$(D^3+3D)x-(D^2+D)y=2e^{2t},$$

(5) $$(D^3+D^2)x-D^3y=-\cos t.$$

至此得方程之數五而應消之數有 x, Dx, D^2x, D^3x 四個.將 $-3\times(1), 1\times(2), 1\times(4), -1\times(5)$, 加之,得

(6) $$(D^3-D^2+D-1)\,y=3e^{2t}-2\cos t.$$

此係 y 的線性方程,其解可還行求得也.

(6)式可由(1)與(2)直接求出.緣吾人若以代數方法處置各係數之微分符號,則見(3)可由 D 乘(1)而得,(5)可由 D^2 乘(1)而得,而(4)可由 D 乘(2)而得(各式右端均先暫視爲零),故上述之消去方法,等於以$(D+1)$乘(2)減(D^2+3)乘(1)之結果.但此與將(1)與(2)中各級之 D 視爲代數係數(不視爲微分符號),因而消 x 之步驟,正復相同.使題中各方程皆屬常係數線性式,則消去 x 之步驟中旣祇含 D 字之加減乘三事,故此法常可適用.故吾人祇須將題中方程,以 D 字符號書作(1),(2)兩式,視之各尋常代數方程,以消去其 x,所要注意者,D 在右端各項之上係屬微分符號,施用宜照此運算耳.實際運算,若採用行列式,則其事至便.例如若欲將(1)與(2)中之 y 消去,則吾人有

$$\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D^2+3 & -(D+1) \end{vmatrix} y=\begin{vmatrix} D+1 & \cos t \\ D^2+3 & e^{2t} \end{vmatrix},\text{即}$$

(6) $$(D^3-D^2+D+1)y=3e^{2t}-2\cos t.$$

式之補充函數,故爲 $Y=c_1e^t+c_2\sin t+c_3\cos t.$

次求特別積分,試設 $U=ae^{2t}+bt\sin t+ct\cos t.$

代此入(6)並比係數,得 $a=\dfrac{3}{5}, b=\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{1}{2}.$

(7) $$\therefore\ y=c_1e^t+c_2\sin t+c_3\cos t+\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{1}{2}t\sin t+\frac{1}{2}t\cos t.$$

x 之推求,可由代此 y 入(1)或(2)中,解其方程以得之*.或則用同樣之法求出 x (即解(1),(2)聯立式,以直求 x).如是則有

$$\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D^2+3 & -(D+1) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \cos t & -D \\ e^{2t} & -(D+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & \cos t \\ D+1 & e^{2t} \end{vmatrix}, \text{即}$$

$$(8) \qquad (D^3-D^2+D-1)x=2e^{2t}-\sin t-\cos t.\dagger$$

將式解之,得

$$(9) \qquad x=c'_1 e^t+c'_2 \sin t+c'_3 \cos t+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{1}{2}t\cos t.$$

式中各常數,並非與(7)常數中互相獨立.兩者關係可由代(7)與(9)入原題中任一方程,比其係數而定之,如是,得結果爲 $c'_1=\frac{1}{2}c_1, c'_2=\frac{1}{2}(c_2-c_3)+\frac{3}{4}, c'_3=\frac{1}{2}(c_2+c_3)+\frac{1}{4}$.

*求第一次消去的變數之值時,普通須解一微分方程.例如若以(7)之 y 代入(1)式則須解一個一級微分方程;若以之代入(2)式則須解一個二級方程.此後所得之積分常數並非任意常數,須以能適合又一方程爲斷.此可由代 x 及 y 入又一方程比其係數以定之.在本題特殊情形之下,先解 x 實較便易,y 之值可逕由 x 值代入(1),(2)後,兩者將減而得之(即言由(2)減(1)).學者宜按序自行試解之.

†由此可見,消去一變數後所得之微分方程,其左端之式樣係屬相同.故其補充函數式樣二者亦同.此事不獨在含有兩變數之兩微分方程例下如是,即在含有 n 變數之 n 個微分方程例下,亦易見其仍屬相同也.

故得本組之通解爲

$$4x=2c_1e^t+(2c_2-2c_3+3)\sin t+(2c_2+2c_3+1)\cos t$$

$$+\frac{8}{5}e^{2t}+2t\cos t,$$

而 $y=c_1e^t+c_2\sin t+c_3\cos t+\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{1}{2}t(\sin t+\cos t).$

習題 1. $\begin{cases}3\dfrac{dx}{dt}+3x+2y=e^t,\\[2ex] 4x-3\dfrac{dy}{dt}+3y=3t.\end{cases}$

習題 2. $\begin{cases}2\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-4y=2t,\\[2ex] 4\dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dy}{dt}-3x=0.\end{cases}$

習題 3. $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}-3x-4y=0,\\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}+x+y=0.\end{cases}$

65. 一級方程組[1]. 若所遇方程皆爲一級,則吾人可設其皆能化爲各應變數之一級微係數之等式.[茲將取一含有二個應變數之題爲例.例中方法却易見其實能同樣的適用於 n 個應變數之題.]設方程組爲

$$(1)\qquad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{P(x,y,t)}{R(x,y,t)},\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{Q(x,y,t)}{R(x,y,t)}.\end{cases}$$

1 一級方程組 systems of equations of the first order.

63節之法於此適用.但有時題之解案可以更簡之法得之.以當將此類之題加以討論.(1)亦可書爲更形對稱之式如下,

(2) $$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dt}{R}.$$

1° 有時方程之一,或祇含兩個變數,或則經相當的選擇去一公共因子後,可以得一祇含兩個變數之方程.設 t 變數係未見於 $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}$ (或可以消去).則解出此式,可得有一方程如下,

(3) $$\phi(x,y)=c_1;$$

如有第二方程亦可應用此法,則又得一方程爲

(4) $$\psi(y,t)=c_2.$$

因得題之全解爲(3),(4)兩方程.

習題 1. $\frac{dx}{yt}=\frac{dy}{tx}=\frac{dt}{xy}.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{由首兩式之方程,得 } x^2-y^2=c_1.\\ \text{由末兩式之方程得 } y^2-t^2=c_2.\end{array}\right\}$$

(若取首末兩式之方程,則得 $t^2-x^2=c$. 但此亦可由前二式變出,顯非爲一獨立式.)

2° 若上段所言結果,祇有一個可得,設爲(3),則吾人可利用(3)式使變數之一變爲含 c_1 及含有又一變數之式;例如(3)之 x 可以解爲一個含 c_1 及 y 之等式.代此 x 入 $\frac{dy}{Q}=\frac{dt}{R}$ 後,則吾人得

一含 y, t, 及常數 c_1 之方程.解之得第二方程爲

$$(5)\qquad \psi(y, t, c_1)=c_2.$$

合(3)與(5)爲題之通解.

有時(5)中之 c_1, 或以用其相當的 x, y 之項代替爲便.如是則解可書爲

$$\begin{cases}\phi(x, y)=c_1,\\ \psi(y, t, \phi)=c_2.\end{cases}$$

習題 2. $\dfrac{dx}{xt}=\dfrac{dy}{yt}=\dfrac{dt}{xy}$.

由 $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$, 得 $\dfrac{x}{y}=c_1$.

$\therefore x=c_1y$; 利用此式則有

$$\frac{dy}{yt}=\frac{dt}{c_1y^2},\ \text{即}\ c_1y\,dy=t\,dt,$$

故 $$c_1y^2-t^2=c_2,$$

即 $$xy-t^2=c_2.$$

$\therefore$ 題解爲 $\begin{cases}x-c_1y=0,\\ xy-t^2=c_2.\end{cases}$

3° 有時吾人或可覓得合宜乘數,如 $\lambda(x, y, t)$, $\mu(x, y, t)$, $\nu(x, y, t)$ 使原式有下列關係

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dt}{R}=\frac{\lambda dx+\mu dy+\nu dt}{\lambda P+\mu Q+\nu R},$$

爾時有下舉三種情形可以發生:

(a) 末式與他式可以合成一可解之方程;或

此猶云與 c_1 相等之含有 x, y 項之函數,如本節之(3)式.

(b) $\lambda P+\mu Q+\nu R$ 或等於零,同時 $\lambda dx+\mu dy+\nu dt=0$ 又滿足可求積分之條件(35節);或

(c) 兩組乘數可以選出,使

$$\frac{\lambda_1 dx+\mu_1 dy+\nu_1 dt}{\lambda_1 P+\mu_1 Q+\nu_1 R}=\frac{\lambda_2 dx+\mu_2 dy+\nu_2 dt}{\lambda_2 P+\mu_2 Q+\nu_2 R}$$

成一可解之式.

若由上諸法,可以求得兩個獨立的方程,各含一個任意常數,則此兩式卽爲題之通解.

習題 3. $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dt}{t}$.

由 $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}$, 得 $x^2-y^2=c_1$.

令 $\lambda=\mu=1,\ \nu=0$ 得

$$\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{dt}{t},\ 故\ x+y=c_2t.$$

習題 4. $\dfrac{dx}{cy-bt}=\dfrac{dy}{at-cx}=\dfrac{dt}{bx-ay}$.

令 $\lambda=a,\ \mu=b,\ \nu=c$, 倂之,得其公比之等式爲

$$\frac{a\,dx+b\,dy+c\,dt}{0}.$$

$$\therefore a\,dx+b\,dy+c\,dt=0,\ 故\ ax+by+ct=c_1.$$

同樣,令 $\lambda=x,\ \mu=y,\ \nu=t$, 得

$$x\,dx+y\,dy+t\,dt=0,\ 故\ x^2+y^2+t^2=c_2.$$

習題 5. $\dfrac{dx}{x^2+y^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dt}{(x+y)t}$.

令 $\lambda_1=1, \mu_1=1, \nu_1=0$; 又令 $\lambda_2=1, \mu_2=-1, \nu=0$ 得

$$\frac{dx+dy}{(x+y)^2}=\frac{dx-dy}{(x-y)^2}, \text{因得} \frac{1}{x+y}=\frac{1}{x-y}-c_1,$$

即 $$2y=c_1(x^2-y^2).$$

又 $$\frac{dx+dy}{(x+y)^2}=\frac{dt}{(x+y)t}, \text{故又得} x+y=c_2t.$$

習題 6. $\dfrac{x\,dx}{yt}=\dfrac{y\,dy}{xt}=\dfrac{dt}{y}$.

習題 7. $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dt}{1+t^2}$.

習題 8. $\dfrac{dx}{yt}=\dfrac{dy}{xt}=\dfrac{dt}{x+y}$.

習題 9. $\dfrac{dx}{x^2-y^2-t^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dt}{2xt}$.

習題 10. $\dfrac{dx}{y+t}=\dfrac{dy}{t+x}=\dfrac{dt}{x+y}$.

習題 11. $\dfrac{dx}{x^2+y^2+yt}=\dfrac{dy}{x^2+y^2-xt}=\dfrac{dt}{(x+y)t}$.

習題 12. $\dfrac{dx}{y^3x-2x^4}=\dfrac{dy}{2y^4-x^3y}=\dfrac{dt}{9t(x^3-y^3)}$.

66. 幾何的解釋. 令經過空間一點(x,y,z)之直線方程為 $\dfrac{X-x}{P}=\dfrac{X-y}{Q}=\dfrac{Z-z}{R}$, 則 $P(x,y,z)$*, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 可視為規定此線之三個函數.故方程組 $\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ 之積分曲線,在其線

---

* 在以下各節中吾人將用 x, y, z 代替 x, y, t 以便討論.

上任一點處,與P,Q,R所規定的經過此點之線相切.題之通解前已言爲兩個方程,如$u(x\ y,z)=c_1$及$v(x,y,z)=c_2$所組成,內中共含任意常數兩個.換言之,通解所表爲一個雙重無盡的曲線組[1],係兩個單重無盡的曲面組之交線*.例如65節,習題3之積分,實爲圓柱羣$x^2-y^2=c_1$與平面羣$x+y-c_2z=0$之交線.在40節中,吾人曾言全微分方程$Pdx+Qdy+Rdz=0$之解爲一羣曲面,在其面上任一點(x,y,z)處,與平面$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0$(此面之法線的指向餘弦[2]係與P,Q,R成比)相切.故知$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$之積分曲線與$Pdx+Qdy+Rdz=0$之積分曲面互成正交.但欲使$Pdx+Qdy+Rdz=0$之有積分曲面,$P,Q,R$必須先能滿足可求積分之條件[35節,(3)],如是方能有一羣曲面與$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$一羣積分曲線成正交.例如$yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz=0$既有$xyz=c$爲其通解,故吾人由65節,習題1,知兩圓柱羣$x^2-y^2=c_1$,$y^2-z^2=c_2$相交之曲線羣與曲面羣$xyz=c$成正交.反之,因$xzdx$

*若P,Q,R爲x,y,z之單值函數[3],則因方程所定經過空間一點之方向祇有一個,故過(x_0,y_0,z_0)之曲線祇有$u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$,$v(x,y,z)=v(x_0,y_0,z_0)$一個.若P,Q,R不盡爲單值函數(言即若微分方程不盡爲一次式),則與(u,y,z)一點相當之直線(即方向)可得者不止一個,而經過一點之積分曲線因亦不止一個.在此狀下,u與v不能爲單值函數(言即式中分數及無理數化去後,式中所含積分常數不復爲一次式).此事與20節所論關於一個含兩變數之一級方程之情形蓋相類.

1 一個雙重無盡的曲線組 a doublely infinite system of curves.

2 指向變弦 direction cosines.

3 單值函數 single-valued functions.

$+yzdy+xydz=0$ 並不滿足可求積分之條件,故知 $x-c_1y=0$ 與 $xy-z^2=c_2$ 兩式所表之曲線羣(65節,習題 2)不能有曲面羣與之成正交.至於由一羣曲面 $f(x,y,z)=c$ 以求其正交曲面之逆推問題[1],則却係一常能之事.蓋此事所需祇在解下列方程組一事,

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

習題. 求 $xy=cz$ 曲面羣之正交曲線.

67. 全微分方程組. 如有兩個含有三變數之全微分方程*

(1)
$$\begin{cases}P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1\,dz=0,\\ P_2\,dx+Q_2\,dy+R_2\,dz=0,\end{cases}$$

則此組之通解可以證明其爲含有兩個任意常數之兩個關係(惟證明之法非本書範圍所能載).實際施算,吾人依下述之程序以進行:

如(1)組之二式,各各滿足可求積分性之條件[35節,(3)],則吾人可分別解出其式,因得(1)組之解案.

如(1)中祇有一式,滿足可求積分性之條件,則吾人可先取此式求其解案,得一關係如 $\phi(x,y,z)=c_1$.次任取此解中一變數解其等式[2],代之入(1)組中未解之式內,如是得一祇含兩變數之微分方程.此最後方程之解,與前得之解 $\phi(x,y,z)=c_1$ 並舉,即成爲(1)組之解案.

* 本節所論之理,可以推論至 n 個 $n+1$ 的變數方程[3],依然適用.

1 逆推問題 the converse problem.

2 原文云 solve this for one of the variables.

3 n 個 $n+1$ 的變數方程 n equations in $n+1$ variables.

如(1)組兩式均不能單獨解出,有時或宜將(1)組先化式如

(2) $$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

式中 $P=Q_1R_2-Q_2R_1$, $Q=R_1P_2-R_2P_1$, $R=P_1Q_2-P_2Q_1$.

65節之法於此或可施用.如若不能,則可取變數之一,設為 z,為一自變數,因將上式改書為

(3) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{P}{R},\\[2ex] \dfrac{dy}{dz}=\dfrac{Q}{R}.\end{cases}$$

63節之通法,於此可以施用.

68. **高級微分方程常可化為一級方程.** 已知一個含有一個自變數之方程,吾人可設其最高級微係數可以解出,例如一公式如下,

(1) $$\frac{d^3y}{dx^3}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

設令 $$\frac{dy}{dx}=y_1,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy_1}{dx}=y_2,$$

則(1)可書為三個一級方程所成之組如

(2) $$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y_1,\\[2ex] \dfrac{dy_1}{dx}=y_2,\\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx}=f(x, y, y_1, y_2).\end{cases}$$

例如 $$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

實同於下組 $\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=y_1,\\ \frac{dy_1}{dx}&=-y,\end{aligned}\right\}$, 即 $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{y_1}=\frac{dy_1}{-y}.$

由後兩項,得 $y^2+y_1^2=c_1^2$, 即 $y_1=\sqrt{c_1^2-y^2}$.

$$\therefore\quad \frac{dy}{\sqrt{c_1^2-y^2}}=dx,\text{ 即 }\sin^{-1}\frac{y}{c_1}=x+c_2,$$

故 $$y=c_1\sin(x+c_2).$$

由同樣之法,可將一組 n 個方程,內含有 n 個自變數者(不論其方程為何級),由令應變數之微係數為一新係數,因而推令其各級微係數(至最高級之前一級為止)各為新變數,化為一個一級方程組.例如由令 $\frac{dx}{dt}=x_1$, 則64節之組可書為

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x_1,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=x_1+x-\cos t,\\[2ex] \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-2x+y+e^{2t}-\cos t,\end{cases}$$

即 $$\frac{dx}{x_1}=\frac{dy}{x_1+x-\cos t}=\frac{dx_1}{x_1-2x+y+e^{2t}-\cos t}=\frac{dt}{1}.$$

69. 本章提要. 解含有 n 個應變數之 n 個常微分方程組之法,吾人可將所有微分方程,繼續求其高級微分方程,至所得方程之數,足以將 $n-1$ 個應變數及其各級微係數一一消去為度,如是得一單含一個應變數之方程.解此方程,將其應變數之等式及其各級微係數之等式,代入原組中任 $n-1$ 個方程中,如

是得一新組爲含有$n-1$個應變數之$n-1$個方程所組成.重用此法,求出第二應變數之等式,因是又可得一新方程組,爲含有$n-2$個應變數之$n-2$個方程所組成,次復依法推進,直至將所有應變數悉行解出爲度.又法,將所有應變數均視如在對稱地位,用同樣手續將其一一解出,次取各應變數之等式,代入一個原方程中,因而定其各個積分常數間之關係(63節).

上法雖於實際有時不甚適用,但遇方程組爲常係數線性式時,則應用頗便(64節).

若方程均屬一級,則65節方法有時可用.

含有$n+1$個變數之n個全微分方程組可改書爲一個常微分方程組,因而使63節及65節之法可以施用(67節).

一個單含一個應變數之高級方程及一組n個應變數之n個此類方程,均可由68節方法,化爲一個相當的一級方程組,爾時65節之法或可施用.

若組中方程,各各單含一個應變數,則各個方程均可自行單獨解出,毋待煩言.以下1,2,3,4諸題,均屬此例.

習題 1. 有一物質,單受地心吸力作用,在眞空中運動,設其最初速度爲v_0而其初動方向係與水平線成α度角,試求其行程之曲線.

習題 2. 若上題中物質,係在一媒介體中運動,後者所施阻力係與物質之速度成比,試求其行程之曲線.

習題 3. 一物質在一吸力中心旁運動,吸力大小係與物質離心之距成正比;設此物質運動係在x軸離心a距離處發動,最初速度爲v_0,方向係與x軸成α角,試求其運動之公式.

[設吸力爲 P, r 爲物質離吸力中心之距離,則運動方程爲

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-P\frac{x}{r},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-P\frac{y}{r},\ \text{題中}\ P=k^2r.]$$

習題 4. 設上題吸力改爲拒力,試亦求其運動之公式.

習題 5. 一旋形立體[1],其對稱軸上有一點係屬固定,受地心吸力而運動.試求其旋角速度及其體中臨時旋軸之地位[2].

[設對於固定之點,物體在任何時之暫成橢體的三主軸上之惰性能率爲 A, B, C 而其旋角速度在此三軸上之分力爲 p, q, r, 則按尤拉方程,得[3]

$$A\frac{dp}{dt}+(c-A)qr=0,$$

$$A\frac{dq}{dt}-(c-A)rp=0,$$

$$C\frac{dr}{dt}=0,\ \text{因係旋轉體形,故}\ B=A.]$$

習題 6. 一物質速力之分力與任一坐標軸平行者與其他兩坐標之積成比.試求其行程,若行程經過原點.再求其物質所過任一段行程之所費時間.

---

1 原文云 A solid of revolution, 或稱回轉面,或曰曲線旋轉所成立體形.

2 原文云 Find its angular velocity and the position of the instantaneous axis of rotation in the body.

3 原文云 If A,B,C are the moments of inertia of the body with respect to the principal axes of the momental ellipsoid about the fixed point, and p, q, r are the components of the angular vebocity on the axes at any instant, Euler's equations are,

第十一章

以級數求積分[1]

70. 存在定理[2]. 微分方程之可由直接求積而解者,及其可用他種純粹的初步方法[3]而解者,與一切可遇之微分方程相比,爲數至少.凡常數微分方程之含有一個應變數者(及一組 n 個方程之含有 n 個應變數者),在微分方程理論中,曾證明其均有一解,解中嘗含有有盡數的任意常數.欲明此理之證法,應先具有函數論之知識,故兹姑存而不論.關於此論證法,凡討論本問題之書,大概均有記載,但皆預設讀者已有初等函數論之知識*.

1° 若方程屬於一級如 $\frac{dy}{dx}=F(x, y)$,† 則式之存在定理略如下述:

*歌西 Cauchy (1789—1857) 爲首證此論之人.其證法有二,今已成爲經典[4].欲知此定理之證法者,凡已知函數論原則之學者可參閱下列各書.Murray, Dfferential Equations, p.190; Schlesinger, Differeutialgleichungen, Chapter I; Picard, Traité d' Analyse, Vol II, Chapter XI. 近年 Picard (1856—) 又立一證,載 Traité d' Analyse, Vol. II, p.301, and Vol. III, p.88及The Bulletin of the New York Mathematical Society, Vol. I, pp. 12—16.

† 一級微分方程如 $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$, 可設其 $\frac{dy}{dx}$ 解出後之式爲 $\frac{dy}{dx}=F(x, y)$.

---

1 以級數求積分 integration in series.

2 存在定理 the existence theorem.

3 純粹的初步方法 purely elementary means.

4 成爲經典 become classic.

如 $F(x, y)$ 爲一有盡的,連續的,及單值*的函數,且有一有盡的 y 之偏微分(閱 Picard, Vol II, p.292),則凡 x, y 限於固定區域內後,苟使 x_0, y_0 爲在域內的一對之值時,吾人恆可求得一積分,且祇有此一個,其值在 x 等於 x_0 時恰等於 y_0.

在此說證論之中,所得 y 係取一無盡級數式如

$$y_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

此級數代替 y 後,應適合於原方程,且在 x 值與 x_0 相近之時其級數係屬斂性式.若用 $\bar{x}=x-x_0$ 關係易其變數,則方程變爲

$$\frac{dy}{dx}=\bar{F}(\bar{x}, y),$$

而解變爲 $y=y_0+c_1\bar{x}+c_2\bar{x}^2+\cdots+c_n\bar{x}^n.$

因 y_0 之值可隨意選取(但祇在相當限制之下),故知在一級微分方程例中,解中含有一個任意常數.

按.——按存在定理嘗予吾人以可求積分之充分條件.且又予吾人以一積分可書之式.但此却非必要條件.方程之不全合於此定理之條件者亦或可有積分.此種積分,大概(却非盡然[1])不能用戴勞定理[2]展開,或則其式係非純一者.茲引數例以明其事:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \text{ 內 } \frac{y}{x} \text{ 在 } x=o, y=o \text{ 處爲一不定式,其解爲 } y=cx.$$

*此處所云單值係取廣義.$F(x, y)$對於一對 x, y 之值雖或可有數值,但使 x, y 限於固定區域之後,則$F(x, y)$對於域內一對x, y之值祇具一值.如是,則此函數仍稱爲單值函數.

例如 $F\equiv\pm\sqrt{x+y}$ 對於一對x, y之值可有兩值,但如當$x=1, y=1$時,吾人選取$+\sqrt{2}$後,則 F 在 x, y 各限於正數區域內時,皆有一定之值.

---

1 却非盡然 but not necessarily always.

2 戴勞定理 Taylor's theorem, 戴勞或稱台勞.

若 $x=0$，則 $y=c$. 此係一有盡項的戴勞級數,但式中 c 值不能由令 $y=0$ $x=0$ 時而定;換言之,本解與一般在存在定理下所遇者不同,本解蓋實可有無限數的式樣可以合乎題之最初情形[1].非特如是,吾人又見,如欲覓一有限值的 c,使 y 在 $x=0$ 時不等於零,為不可能之事.

又例,$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$（內 $\frac{x+y}{x}$ 在 $x=0,y=0$ 時為無定式）之解為 $y=x\log x+cx$. 若 $x=0$，則 $y=0$. 但此解不能展為 x 各次方之戴勞級數.在此例中,若令初值[2]為零,則積分之式無窮,若令 y 取其他初值,則本題即不能有積分.

又，$2\frac{dy}{dx}=\frac{1+2x}{y}$ 之解為 $y=\sqrt{c+x+x^2}$. 若 $x=0$, $y=0$, 則 $\frac{1+2x}{y}=\infty$. 若欲令 $x=0$ 時，$y=0$，則吾人應有 $c=0$. 故吾人得一單解為 $y=\sqrt{x+x^2}$. 此式雖可由戴勞定理展為 $\sqrt{x}$ 各次方之級數,但不能展為 x 各次方之級數.

2° 如有一組方程,為含有 n 應變數之 n 個一級方程所組成,則吾人可設其微係數一一解出後之式如下:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,y,z\cdots,w),$$

$$\frac{dz}{dx}=f_2(x,y,z,\cdots,w),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dw}{dx}=f_n(x,y,z,\cdots,w).$$

此例下之存在定理可述如下:若 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 當 $x,y,z,\cdots,w$ 在固定區域內[3]時皆為有法函數*,則若 $x_0,y_0,z_0,\cdots,w_0$ 為區內一組值時,吾人常可求得一個單一組[4]之 $y,z,\cdots,w$ 各函數適合於所遇方程組,而當 $x=x_0$ 時,此各函數分別取 $y_0,z_0,\cdots,w_0$ 諸值.

* 有法二字定義可參閱78節下之註釋.

1 最初情形 initial condition.. 2 初值 initial value, 或曰最初之值.

3 在固定區域內 in certain regions. 4 單一組 a single set.

在此定理之證中,此各函數嘗書作級數式如下:

$$y=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

$$z=z_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w=w_0+k_1(x-x_0)+k_2(x-x_0)^2+\cdots+k_n(x-x_0)^n+\cdots$$

此各級數,當 x 值與 x_0 甚近時,皆屬斂性式.

如前,用 $\bar{x}=x-x_0$ 關係,變換其變數,各級數因均變爲 $\bar{x}$ 的各冪的級數式中 $y_0, z_0, \cdots, w_0$ 諸值均可任意選擇(在相當限制之下).故知凡一組含有 n 應變數的 n 個一級方程,其通解中常含有 n 個任意常數.在68節曾云,含一個應變之 n 級方程可變爲一組 n 個一級方程,故知一個 n 級微分方程之通解,含有 n 個任意常數.由一級方程之解題經驗,吾人知在解一個 n 級方程時,對於一個已定自變數之值,應變數與其各級微係數(至 $n-1$ 級爲止)所取之值,俱可任意選擇以當題中之任意常數.故此時應變數與其微係數之值,在任何題中,通常可由吾人任意賦與.

在幾何方面,上述之理猶言:

與一級一次微分方程相當之單重無盡[1]積分曲線中,經過一個定點,必有一個曲線.

與二級一次微分方程相當之雙重無盡積分曲線中,經過一個定點且沿一個定向,必有一個曲線.

與三級一次微分方程相當之三重無盡積分曲線中,經過一個定點且沿一個定向並取一個一定曲率,必有一個曲線.

---

1 單重無盡 single infinity.

71. 異解. 在上節存在定理之中,吾人須注重:$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ 之積分的存在,必先有 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 區域之中為一有盡的,連續的,及單值的函數.今設所遇之微分方程為

$$f(x,y,y')=0,\ 內\ y'=\frac{dy}{dx}.$$

吾人知 y' 之式,在 (x_0,y_0) 區域內,大概可以用一有盡的,連續的,及單值的 x,與 y 之函數表示之,且在 $x=x_0$, $y=y_0$ 時 y' 取一固定的有限之值如 y_0.此理在

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}\neq 0$$

時,其事常確*.但若

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=0,$$

則 y' 所表之 x 與 y 的函數式,在 (x_0,y_0) 之內,不一定為一單一值之函數.故在此等 x,y 值之區域中,存在定理,並不一定予吾人以一解案.實則解案之存在係非恆有之事.緣由

$$f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y'}=0,$$

吾人可將 y 與 y' 解出,得式如

$$y=\phi(x),\quad y'=\phi_1(x),$$

但二式之間,祇能在極罕有之例外時,纔能有一種關係如

$$\phi_1(x)=\frac{d\phi(x)}{dx}.$$

---

* 此理之證,見於分析書中頗多;例如 Liebmann, Lehrbuck der Differentialgleichungen, p.8 中,亦載其證.

若使 $\phi_1(x)=\frac{d\phi(x)}{dx}$, 則 $y=\phi(x)$ 爲題之一解;又因此解與通解常各不同,故此係一異解.非特如是,此解與第五章所述之異解實完全相同.

同樣,在高級微分方程中,異解亦有時發現.例如設對 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 之一解 $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ 亦等於零,則此解亦常爲一異解.*

更廣言之,凡一組一級方程如

$$f_1\left(x, y, z, \cdots w, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{dw}{dx}\right)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n\left(x, y, z, \cdots w, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{dw}{dx}\right)=0,$$

(凡一組含有 m 個應變數之 m 個方程,常可化爲此式,參閱68節.)在相當情形之下,時能具有異解.參閱 Picard, Vol. III, p. 52.

72. 以級數求一級方程之積分. 如方程

$$\frac{dy}{ax}=F(x,y) \tag{1}$$

不能以已知之初步方法解出,則存在定理實告吾人以:$F(x,y)$ 如在 $x=0, y=c_0$, 區域內,(按假定 $x=0$ 於理論實無所失,緣如此假設,如 $x\neq 0$ 實等於已用 $\bar{x}=x-x_0$ 之代替,變換其變數.)爲一有盡的,連續的,及單值的函數,則方程必有一個且祇有一個解案其值當 $x=0$ 時等於 c_0. 但此存在定理所予之解取一無盡級數

* Liebnamn, loc. cit p. 113 Boole, Differential Equations, p. 229.

之式.實際運算,吾人先假設

(2) $$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

次代其值於(1)式微分方程中,然後比其係數.計其各 c 之值,至足應需之數爲止.存在定理實自保證(2)式之爲斂性式.例別大致蓋有三種:

1° (2)中係數並無通則可求;遇此例時,實際上祇能將相當數之 c 計出,以得一近似之解*.

2° (2)中係數有一通則可求;遇此例時,吾人可將級數中通項寫出,其效與書出其全部無殊.

3° 經過數項之後,其餘之項均等於零;在此例中,其級數實爲一有盡級式.

按.——例(2)與(3),除在其解時亦可由方程直接求出之外,殊少發現.故於此法解一級方程之題,若就求得積分爲目的而論,此法殊非重要.但就理論方面而論,法却極屬重要.一級線性方程雖皆可以求積之法解出,但其結果,有時不能以簡單函數表示.此際本節及74節之法,時可施用.

習題 1. $\dfrac{dy}{dx}=x+y^2.$

此題中 $x+y^2$ 在 x 與 y 爲任何值時,皆爲一有盡的,連續的及單值的函數.

令 $$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots.$$

*存在定理雖告吾人以如是所得之級數(苟使其變數之值常限於相當範圍之下)係屬斂性式,但其收斂情形當某種值時有時甚緩,故雖計出之係數已極多,而其與真值近似之程度猶甚遠.此種情事遇 $F(x,y)$ 當其變數趨近某值時,漸失有盡連續單一本性者,時屬可能.

代入原式,得

$$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots\equiv x+(c_0+c_1x+\cdots)^2.$$

比其係數,得

$$c_1=c_0^2 \qquad \therefore\ c_1=c_0^2$$

$$2c_2=2c_0c_1+1 \qquad \therefore\ c_2=\frac{1}{2}+c_0^3,$$

$$3c_3=2c_0c_1+c_1^2 \qquad \therefore\ c_3=\frac{1}{3}c_0+c_0^4,$$

$$4c_4=2c_0c_1+2c_1c_2 \qquad \therefore\ c_4=\frac{5}{12}c_0^2+c_0^5,$$

....

$$2kc_{2k}=2c_0c_{2k-1}+2c_1c_{2k-2}+\cdots+2c_{k-1}c_k,$$

$$(2k+1)c_{2k+1}=2c_0c_{2k}+2c_1c_{2k-1}+\cdots 2c_{k-1}c_{k+1}+c_k^2.$$

....

題中每一係數,均可以前項之係數表出,故最後皆能以 c_0 字所成之項表示之.係數之數,不論多少項,吾人皆可計出,但係數之間並無通則可見,故不能以一通式表示之.故本題之解中

$$y=c_0+c_0^2x+\left(\frac{1}{2}+c_0^3\right)x^2+\left(\frac{1}{3}c_0+c_0^4\right)x^3+\cdots,$$

雖其後繼之項可以續行書出,多少一如吾人所欲,但無論如何,祇爲題解之一近似式.

習題 2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{1-x^2}.$

題中 $\dfrac{2y}{1-x^2}$ 在 $(0, c_0)$ 區域內(內 c_0 爲 y 之一任意値),係一有盡的,連續的,及單値的函數.

令 $y=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$ 代入原方程去其分數,得

$$(1-x^2)(c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots)\equiv$$
$$2(c_0+c_1x+c_2x^2\cdots+c_nx^n+\cdots).$$

比其係數,得

$$c_1=2c_0$$

$$2c_2=2c_1=4c_0, \qquad \therefore c_2=2c_0.$$

$$3c_3-c_1=2c_2=4c_0, \qquad \therefore c_3=2c_0.$$

係數通式,由此易見其爲 $c_n=2c_0$, 此可由先假定 c_n 若合通則,則 c_{n+1} 亦可證其同合通則,因以證明此理之成立.緣

$$(n+1)c_{n+1}-(n-1)c_{n-1}=2c_n.$$

今既有 $\qquad c_{n-1}=c_n=2c_0.$

$$\therefore (n+1)c_{n+1}=2(n-1)c_0+4c_0=2(n+1)c_0,$$

卽 $\qquad c_{n+1}=2c_0.$

故知題解書爲無盡級數時,式爲

$$y=c_0(1+2x+2x^2+2x^3+\cdots+2x^n+\cdots).$$

[本題亦可用第二章法解出.學者宜自證其事,並將兩法所得之結果,一比其形式.]

若 $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ 中之 F 的各微係數,對於 x,y 取一種特別值[1]時,其值均易於計算,則下法有時頗便應用:

吾人已知由存在定理所得之解,式爲

$$y=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots.$$

1　原文云 For special values of x and y

用戴勞級數之通項相比,則見若

$$c_0 = y_0,\ c_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0,\ \cdots,\ c_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0,\ \cdots,$$

則當 $x = x_0$ 時,題解取 y_0 之值.

由微分方程,得

$$c_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = F(x_0, y_0).$$

由其微分式,得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

故

$$c_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2!}c_1\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0.$$

由再求此式之微分,吾人可得以 c_1 與 c_2 表示 c_3 之式.其餘係數,亦由此可類推.

學者將見,此法若用於上述諸題,在習題 1 例中,其計算甚爲便捷.

73. 里卡提方程[1]. 里卡提伯爵所研究之方程(方程因是從渠名),其式爲

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m,$$

內 b, c, m 俱爲常數*.72節之習題1卽屬此類.若 b, c, m 取某種特別值時,則題之積分可以一有盡項式表示之.(參閱18節,習

* $x\frac{dy}{dx} - \alpha y + \beta y^2 = \gamma x^n$ 之式,有時亦祗爲屬於里卡提方程類.緣此式若用 $z = x^\alpha$, $y = uz$ 變換後,顯見其可化爲上式也.

(1) 里卡提方程 Riccati's equation.

題 4; 又 Forsyth, p. 170; Boole, Chapter VI; Johnson, Chapter IX.)但在普通情形之下,此解祇能由級數求積分法求得之.

里卡提方程,發生之時頗多;且有時雖不知其解之式,而却時願利用其所具之性質.反之,若解中情形已有所知,則通解之求出,有時可以僅由直接求積法或純粹代數法求得之.下舉諸種性質,有時頗有用處:

茲將先取一普通之式加以討論,此式蓋常視爲里卡提方程之一類.式爲

$$\frac{dy}{dx}=X_0+X_1y+X_2y^2,$$

內 X_0, X_1, X_2 皆爲 x 之函數或爲常數.

1° 若已知一個特別積分爲 y_1, 則用 $y=\frac{1}{z}+y_1$ 代替後,原式化爲 $\frac{dz}{dx}+(X_1+2y_1X_2)z=-X_2$, 此係一線性式,可由用直接求積法兩次以得其解.吾人故有,若一個特別積分 y_1 爲已知,則由 $y=\frac{1}{z}+y_1$ 之變換,原式可易爲一個 z 的線性方程式,其解可由用兩回求積法以得之.

2° 因一級線性方程可書爲 $z=\gamma(x)+C\delta(x)$, 其中任意常數之發現係屬線性形式,吾人故有

$$y=\frac{1}{z}+y_1(x)=\frac{1}{\gamma(x)+C\delta(x)}+y_1(x)$$

$$=\frac{\alpha(x)+C\beta(x)}{\gamma(x)+C\delta(x)}.$$

故知在里卡提方程通解中,積分常數之發現係取雙線性[1]式.

3°　$y=\dfrac{\alpha+\beta C}{\gamma+\delta C}$ 方程,可視爲一易 C 爲 y 之雙線性變換法,此 y 在一 C 值爲已知時,卽爲一特別積分.凡與 C 之任四個值,如 C_1, C_2, C_3, C_4 相當,吾人恆有四個 y 之值如 y_1, y_2, y_3, y_4. 因重比[2]之值,經雙線性變換後,並不變更,故吾人有

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}=\text{一常數}.$$

故知,若 y_1, y_2, y_3, y_4 爲四個特別積分,則函數 $\dfrac{(y_4-y_3)(y_2-y_1)}{(y_4-y_1)(y_2-y_3)}$ 在 x 任取何值時均等於一個常數.

4°　由3°推論,更得下述結果,若三個特別積分 y_1, y_2, y_3 爲已知,則通解可卽由 $\dfrac{y-y_3}{y-y_1}=c\dfrac{y_2-y_3}{y_2-y_1}$;

求得,故通解 y 可以純粹代數方法求出如下,

$$y=\frac{y_3(y_2-y_1)-cy_1(y_2-y_3)}{y_2-y_1-c(y_2-y_3)}.$$

5°　若兩個特別積分 y_1, y_2 爲已知,令 $z=\dfrac{y-y_1}{y-y_2}$ 且求兩端對數式之微分,則有 $\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{y-y_1}\left(\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy_1}{dx}\right)-\dfrac{1}{y-y_2}\left(\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy_2}{dx}\right)$.

因

$$\frac{dy}{dx}=X_0+X_1y+X_2y^2,$$

$$\frac{dy_1}{dx}=X_0+X_1y_1+X_2y_1^2,$$

$$\frac{dy_2}{dx}=X_0+X_1y_2+X_2y_2^2,$$

1　雙線性 bilinear.

2　重比 double ratio 卽 cross ratio 或 anharmonic ratio, 或曰連比,曰叠比,曰非調和比

故有 $$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}=X_2(y_1-y_2);$$

故 $$z=Ce^{\int X_2(y_1-y_2)dx},$$

即 $$\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{\int X_2(y_1-y_2)dx},$$

由是,y 即立可求得.故知,若有兩個特別積分 y_1, y_2 爲係已知,則由 $z=\frac{y-y_1}{y-y_2}$ 之變換,可易原式爲一變數已經分離之式,而其解案可由一次求積求得之.

由 1°,4°,5° 三節所述之性質,吾人宜注意里卡提方程頗有近似線性方程之處;緣吾人每多知一個特別積分,則通之得即走近一步.例如,若一個特別積分爲已知,則里卡提方程之解決即化爲一個一級線性方程解決問題,即一個需用兩次求積問題;若兩個特別積分爲已知,則通解之求出,變爲含有一個需用一次求積之問題;若有三個特別積分爲已知,則通解可即由一簡單的代數手續求得之.

6° 按由

$$y=-\frac{1}{X_2z}\frac{dz}{dx}$$

之代替,里卡提方程實即變爲一個二級齊次線性式,如

$$X_2\frac{d^2z}{dx^2}-(X_1X_2+X'_2)\frac{dz}{dx}+X_0X_2^2z=0,$$

內 $X'_2=\frac{dX_2}{dx}$.

[反之,由 $y=e^{\int z dx}$ 之代替,一個二級齊次線性式亦可化爲一個里卡提方程.此事學者宜自證之.]

74. 以級數求高級方程之積分[1]. 如取微分方程中最高級微係數化爲等式如

$$\frac{d^3y}{dx^3}=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

後,其 F 之各級微係數,在

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2},$$

取某種特別值時,均易計其數值,則用72節末類似之法時可求得其解案.

按存在定理,解案之式係取

$$y=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

吾人由戴劵級數之通式,故知有

$$c_0=y_0,\quad c_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,\quad c_2=\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0,\quad \cdots,\quad c_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0,\quad \cdots$$

按本題通解中之任意常數應有三個,由70節末吾人又知在 $x=x_0$ 時,若將 $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 各定其值,則一個特別積分即可求出;茲試令三者之定值爲 y_0, y'_0, y''_0.

*本節所論方法,無論方程屬何一級均屬適用,茲爲便於討論依據起見,故取一三級式以爲例.

1 原文爲 Integration, in series, of equations of higher order than the first.

合原微分方程,即得

$$c_3=\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0=\frac{1}{3!}F(x_0,y_0,y'_0,y''_0).$$

再求此式之微分方程,由是可$\frac{d^4y}{dx^4}$求出,係一含有

$$x_0,\ y_0,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0,\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0.$$

之式;故知c_4之式可以化爲含有c_0, c_1, c_2, c_3諸項之式.由此類推,其餘係數均可求出.

此法若施用不便,吾人可改用72節第一法以求其解.但在實際,後法亦祇在少數例中稱便.下舉之法,係由此法變化而出,遇線性方程之係數爲x之多項式,且在多$y=x^m$代替後左端化爲祇含少數x冪(最好不過兩個)時,施用殊便.若遇歌西方程式(51節)則代替結果爲一單含一個x冪之式,故其方程可用純粹代數法解出之*.

設原式爲 $$\frac{d^2y}{dx^2}-xy=0,$$

用$y=x^m$代入左端後,其結果爲

$$m(m-1)x^{m-2}-x^{m+1}.$$

*例如,用$y=x^m$代入51節(1)式左端後,吾人得

$$[k_0m(m-1)\cdots(m-n+1)+k_1m(m-1)\cdots(m-n+2)+\cdots+k_{n-1}m+k_n]x^m.$$

由令x^m之係數等於零以求m之各根,吾人常得n個不同的特別積分,因是得題之補充函數.此與51節所得結果可易見其相同.如遇m之根有重複或複數時,則與解常係數線性方程之相類方法,可以仿採施用.

從數種方面看來,歌西方程可云比常係數線性方程更簡單.但在實際推求解案時,尤其是在式之右端爲一函數時,51節所述先化原式爲一常係數線性方程之法,時屬比較的簡便.

式中有不同的 x 冪兩個,其指數之差爲 3,而 $n-2$ 爲其稍小之指數,故吾人若命

$$y=c_0x^m+c_1x^{m+3}+c_2x^{m+6}+\cdots+c_rx^{m+3r}+\cdots$$

則吾人可得一解,苟使

1° m 之值合於 $m(m-1)=0$ 之關係,即 $m=0$, 或 1,

2° 各 c 之值之選出,以能使其餘諸項(前述兩項除外)成對的互銷爲準,換言之,即吾人應有

$$(m+3)(m+2)c_1-c_0=0,$$

$$(m+6)(m+5)c_2-c_1=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(m+3r)(m+3r-1)c_r-c_{r-1}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore c_r=\frac{1}{(m+3r)(m+3r-1)}c_{r-1}.$$

若 $m=0$, 則有
$$c_1=\frac{1}{3\cdot2}c_0\quad=\frac{1}{3!}c_0,$$

$$c_2=\frac{1}{6\cdot5}c_1\quad=\frac{1\cdot4}{6!}c_0,$$

$$c_3=\frac{1}{9\cdot8}c_2\quad=\frac{1\cdot4\cdot7}{9!}c_0,$$

$$c_4=\frac{1}{12\cdot11}c_3\quad=\frac{1\cdot4\cdot710}{12!}c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_r=\qquad\qquad=\frac{1\cdot4\cdot7\cdots[1+3(r-1)]}{(3r)!}c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore c_0\left(1+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot4}{6!}x^6+\frac{1\cdot4\cdot7}{9!}x^9+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot4\cdot7\cdots[1+3(r-1)]}{(3r)!}x^{3r}+\cdots\right)$$

爲一積分.命此爲 Ay_1, 內 A 猶如前之 c_0, 爲一任意常數.

若 $m=1$, 則有 $c_1=\frac{1}{4\cdot3}c_0 \quad =\frac{2}{4!}c_0,$

$$c_2=\frac{1}{7\cdot6}c_1 \quad =\frac{2\cdot5}{7!}c_0,$$

$$c_3=\frac{1}{10\cdot9}c_2 \quad =\frac{2\cdot5\cdot8}{10!}c_0.$$

....

$$c_r= \qquad\qquad =\frac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(r-1)]}{(1+3r)!}c_0.$$

....

$$\therefore c_0x\left(1+\frac{2}{4!}x^3+\frac{2\cdot5}{7!}x^6+\cdots+\frac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(r-1)]}{(1+3r)!}x^{3r}+\cdots\right)$$

亦爲一積分.命此爲 By_2, 內 B 爲一任意常數. y_1 與 y_2 顯係互相獨立.且按存在定理,二式俱爲斂級數.故 $y=Ay_1+By_2$ 爲題之通解,因其式中已含有兩個任意常數也.

如方程右端並非爲零,則吾人須再用一類似之法以求其相當的特別積分.例如,設有方程爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}-xy=2x^{-3}.$$

因令 $y=c_0x^m$ 代入方程左端後,其式成爲

$$c_0m(m-1)x^{m-2}-c_0x^{m+1},$$

故苟使 $c_0m(m-1)x^{m-2}=2x^3$,且其餘諸項皆一對一對的互相銷去,則一個特別積分,當爲 $c_0x^m+c_1x^{m+3}+\cdots+c_rx^{m+3r}+\cdots$.

上所云第一事若確,則吾人應有

$$m-2=-3 \qquad \therefore m=-1,$$

及

$$c_0m(m-1)=2 \qquad \therefore c_0=1.$$

第二說(即餘項成對銷除)若確,則吾人應有

$$c_1=\frac{1}{2\cdot 1}c_0 \qquad \therefore c_1=\frac{1}{2}$$

$$c_2=\frac{1}{5\cdot 4}c_1 \qquad \therefore c_2=\frac{3}{5!}$$

$$c_3=\frac{1}{8\cdot 7}c_2 \qquad \therefore c_3=\frac{3\cdot 6}{8!}$$

....

$$c_r=\frac{1}{(3r-1)(3r-2)}c_{r-1} \qquad \therefore c_r=\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3(r-1)}{(3r-1)!}$$

....

故得一特別積分爲

$$x^{-1}+\frac{1}{2!}x^2+\frac{3}{5!}x^5+\cdots+\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3(r-1)}{(3r-1)!}x^{3r-1}+\cdots.$$

上例實示吾人以一通法*,緣用 $y=x^m$ 代替之後,如吾人所得

*此法如72節所云,不特可施用於一級線性方程,且可同樣適用於高級線性方程.

左式結果,祇含有兩個不同之冪,如 $f(m)x^h+\phi(m)x^{h+l}$ (內 l 爲正整數),則化出之式頗有通則可求.茲分別討論之於後.

由 $f(m)$ 與 $\phi(m)$ 產生之方式,吾人知此二函數,至少應有一個屬於 m 的 n 次式.

I. 求補充函數之法,可進行如下:

(a) 若 $f(m)$ 爲 m 的 n 次式,故在 $f(m)=0$ 下,有 n 個根,如 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$. 各根值或不同值亦或有重複.

令 $y=c_0x^m+c_1x^{m+l}+\cdots+c_rx^{m+rl}+\cdots$. 代入方程左端後,吾人有

$$
\begin{aligned}
&c_0f(m)x^h+c_0\phi(m)x^{h+l}\\
&+c_1f(m+l)x^{h+l}+c_1\phi(m+l)x^{h+2l}\\
&+c_2f(m+2l)x^{h+2l}+c_2\phi(m+2l)x^{h+3l}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+c_{r-1}f(m+[r-1]l)x^{h+(r-1)l}+c_{r-1}\phi(m+[r-1]l)x^{h+rl}\\
&+c_rf(m+rl)x^{h+rl}+c_r\phi(m+rl)x^{h+(r+1)l}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

此式可等於零,若使先有

1° $f(m)=0$, 此即 $m=m_1, m_2, \cdots, m_n$;

2° $c_rf(m+rl)+c_{r-1}\phi(m+[r-1]l)=0$,在 $\begin{Bmatrix} r=1, 2, 3, \cdots, \infty \\ m=m_1, m_2, \cdots, m_n \end{Bmatrix}$ 時.

此即

$$
\begin{aligned}
c_r&=-\frac{\phi(m+[r-1]l)}{f(m+rl)}c_{r-1}\\
&=(-1)^r\frac{\phi(m+[r-1]l)\phi(m+[r-2]l)\cdots\phi(m+l)\phi(m)}{f(m+rl)f(m+[r-1]l)\cdots f(m+2l)f(m+l)}c_0.
\end{aligned}
$$

*如 x 羃不止兩個時,同樣之法可以推出使用.茲因羃多時式繁從略.

故與每一m值相當,普通均有一個特別積分*.若有一c化為零,則復繼諸c俱化為零,而其相當積分為一有盡式的函數.

設m有兩值相等,則與此相當之特別積分祗有一個.非但如是,設m兩值相差係一l的倍數,如$m_2=m_1+gl$,則與較小之值m_1相當的係數c_g,除非其分子亦為零,必為一無盡之式[因$f(m_2)=f(m_1+gl)=0$].故本節之法,祗能對於$f(m)=0$之各根,俱各不同且其相差非為l的倍數者,方與吾人以相當之特別積分.所缺部份,須稍變方法以求之.†

若$f(m)$之次數低於n,則上法結果雖可得一無盡級數適合於微分方程,但就普通理論觀察,知其級數並不能保其必為收斂式.故若解案不取有盡項式樣,則最好利用$f(m)$不為n次式時,$\phi(m)$必為n次式之原則,以馭其題.

(b)若$\phi(m)$為m之n次式,則$\phi(m)=0$當有n個m之值為其根設其各值為$m'_1, m'_2, \cdots, m'_n$.

令$y=c_0x^m+c_{-1}x^{m-l}+c_{-2}x^{m-2l}+\cdots+c_{-r}x^{m-rl}$,代入原式左端後,得

$$\begin{aligned}&c_0\phi(m)x^{h+l}+c_0f(m)x^h\\&+c_{-1}\phi(m-l)x^h+c_{-1}f(m-l)x^{h-l}\\&+c_{-2}\phi(m-2l)x^{h-l}+c_2f(m-2l)x^{h-2l}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

*若一m值非正整數,則與此相當之解不能為一個羃式級數而為x^m乘一羃式級數之積.

在最高係數為一時,因各係數當$x=0$時不定為有盡數,故存在定理於此不復適用,但按線性方程通理却能保證此類級數在x取某種值時為斂式.(參閱Schlesinger, Differentialgleichungen, §24.)

†爾時之特別積分(其式不能由通則求得)常含對數項.見習題2.

$$+c_{-r+1}\phi(m-[r-1]l)x^{h-(r-2)l}+c_{-r+1}f(m-[r-1]l)x^{h-(r-1)l}$$

$$+c_{-r}\phi(m-rl)x^{h-(r-1)l}+c_{-r}f(m-rl)x^{h-rl}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此式應等於零,若

1° $\phi(m)=0$, 即 $m=m'_1, m'_2, \cdots, m'_n$,

2° $c_{-r}=-\dfrac{f(m-[r-1]l)}{\phi(m-rl)}c_{-r+1}$ 當 $\left\{\begin{matrix} r=1,2,3,\cdots,\infty \\ m=m'_1, m'_2, \cdots, m'_n \end{matrix}\right\}$ 時

$$=(-1)^{-r}\frac{f(m-[r-1]l)f(m-[r-2]l)\cdots f(m-l)f(m)}{\phi(m-rl)\phi(m-[r-1]l)\cdots\phi(m-2l)\phi(m-l)}c_0.$$

與每一 m 之值相當,通常得一特別積分,如 $x^m(c_0+c_{-1}x^{-l}+c_{-2}x^{-2l}+\cdots+c_{-r}x^{-rl}+\cdots)$

此係由 x^m 乘一冪式級數(其指數係按一負數逐次遞減)而得.若令 $t=\dfrac{1}{x}$,則此式化為一個 t 的尋常冪級數.若 $\phi(m)=0$ 之根有重複者,或相差為 l 之倍數者,則由此所得之積分之式,其數當少於 n.

若 $f(m)$ 與 $\phi(m)$ 同為 n 次,則 (a),(b) 兩法所得積分並非各異[1].其式大致不同(亦並非必然),但其中祇能有 n 個函數係互成線性獨立[2]式*.

*按一級數祇能在其式具有收斂性時代表一函數,吾人由 (a), (b) 兩法所得級數,因一係在原點區域內發展,一係在 ∞ 區域內展出,故大概不能在同一 x 值時,同為收斂式.故凡級數取無盡式時,大概即無法比較.但如每一級數所表之函數,當其由一區域以入他區域之際仍能保持其連續性質[3],則在每 $n+1$ 個函數之間,當皆有一種線性的關係存在其間.

1 各異 distinct　　2 線性獨立 linearly independent.

3 原文云 can be continued into the region of the other.

II. 如方程右端爲一x冪如Ax^s則求其相當的特別積分時,吾人之運算程序如下:

如$f(m)$之次數爲n,則吾人由利用(a)節中結果,得有:

1°　$h=s$.因h爲m的一個線式函數,故此當決定一個m的單值,設爲m_s.

2°　$c_0f(m_s)=A$.

3°　其他係數,均當如(a)節之法,次第可以決定,惟昔之m今均易爲m_s.

此法有時致誤.如$f(m_s)=0$.

吾人亦可用(b)節中結果*,以求m與各係數,如是則有

1°　$h+l=s$.此當決定m之一值,設爲m'_s.

2°　$c_0\phi(m'_s)=A$.

3°　其他係數可仿(b)法依次求出,惟昔之m今皆易爲m'_s.

如$\phi(m'_s)=0$同時又$f(m_s)=0$,則特別積分之式不能求得如本節中之式.推求之法須另覓他途.

學者如欲知最普通之特別積分求法,可參考 Schlesinger 書第54節.

習題 1.　$(x-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=x+3x^4$.

以x^m代y於式之左端,則得

$$m(m-4)x^{m-1}-[m(m-1)-2]x^m.$$

*無論$\phi(m)$爲n次與非爲n次之時均可.若$f(m)$[(或$\phi(m)$]不爲n次,則(a)法[或(b)法]爲不宜用,緣如是所得之解若爲一無盡級數時,其性質之是否爲收斂,却不能預必,故若解案爲一有盡式,則前法完全適用;否則,則式之是否收斂須加以測驗.按習題1中之右端,若祇有x一項,則(a)法所予之特別積分爲一無盡級數而式爲y_1-1.若用(b)法,則得特別積分爲-1.

$$\therefore l=1,$$

$$f(m)=m(m-4),$$

$$\phi(m)=-(m+1)(m-2).$$

因$f(m)$之次數為2,故吾人可採用(a)法.

如是得$m=0$或4,

而 $$c_r=-\frac{\phi(m+[r-1])}{f(m+r}c_{r-1}=\frac{m+r-3}{m+r-4}c_{r-1}.$$

若$m=0$,則 $$c_1=\frac{1-3}{1-4}c_0=\frac{2}{3}c_0,$$

$$c_2=\frac{2-3}{2-4}c_1=\frac{1}{3}c_0,$$

$$c_3=\frac{3-3}{3-4}c_2=0,$$

$$c_4\qquad=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore c_0\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2\right)$,即$A(3+2x+x^2)$為一積分.茲稱之為$Ay_1$.

若$m=4$,則 $$c_1=\frac{1+1}{1}c_0=2c_0,$$

$$c_2=\frac{2+1}{2}c_1=3c_0,$$

$$c_3=\frac{3+1}{3}c_2=4c_0,$$

$$c_4=\frac{4+1}{4}c_3=5c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore c_0(x^4-2x^5+3x^3+\cdots+nx^{n+3}+\cdots)$ 爲一積分茲稱之爲 By_2

故 Ay_1+By_2 爲題之補充函數.

因 $\phi(m)$ 亦屬二次式,故本題亦可用(b)法以解之.

如是得 $m=2$, 或 -1,

而
$$c_{-r}=\frac{-fm(-[r-1])}{\phi(m-r)}c_{-r+1}=\frac{m-r-3}{m-r-2}c_{-r+1}.$$

若 $m=2$, 則

$$c_{-1}=\frac{-1-1}{-1}c_{-0}=2\,c_0,$$

$$c_{-2}=\frac{-2-1}{-2}c_{-1}=3\,c_0,$$

$$c_{-3}=\frac{-3-1}{-3}c_{-2}=4\,c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore c_0(x^2+2x+3+4x^{-1}+5x^{-} \quad \cdots+nx^{3-n}+\cdots)$ 爲一積分.茲令爲 $A'y_1'$.

若 $m=-1$, 則

$$c_{-1}=\frac{-1-4}{-1-3}c_0=\frac{5}{4}c_0,$$

$$c_{-2}=\frac{-2-4}{-2-3}c_{-1}=\frac{6}{4}c_0,$$

$$c_{-3}=\frac{-3-4}{-3-3}c_{-2}=\frac{7}{4}c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore \frac{c_0}{4}(4x^{-1}+5x^{-2}+6x^{-3}+\cdots+(n+3)x^{-n}+\cdots)$ 爲一積分.茲令爲 $B'y'_2$

故 $A'y'_1+B'y'_2$ 爲題之補充積分.

比較兩種結果,易見 $y'_1-y'_2=y_1$.

求特別積分時,吾人取右端各項,分別討論,一一分求其相當的特別積分.

對於右端 x 項,吾人令

$$c_0m(m-4)x^{m-1}=x,$$

因有 $$m_2=2, \text{ 而 } c_0=-\frac{1}{4}.$$

若 $m=2$ $$c_r=\frac{r-1}{r-2}c_{r-1}.$$

$\therefore c_r=0$,故其餘各係數俱皆爲零.

故 $-\frac{1}{4}x^2$ 爲與 x 項相當的特別積分.

對於 $3x^4$,吾人令

$$c_0m(m-4)x^{m-1}=3x^4,$$

因有 $$m=5, \text{ 而 } c_0=\frac{3}{5}.$$

若 $m=5$ $$c_r=\frac{r+2}{r+1}c_{r-1}.$$

$$\therefore c_1=\frac{3}{2}c_0=\frac{3}{10}\cdot 3,$$

$$c_2=\frac{4}{3}c_1=\frac{3}{10}\cdot 4,$$

$$c_3=\frac{5}{4}c_2=\frac{3}{10}\cdot 5,$$

$$c_4=\frac{6}{5}c_3=\frac{3}{10}\cdot 6,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $$\frac{3}{10}\left[2x^5-3x^6+4x^7+\cdots+(n+1)x^{n+4}+\cdots\right]$$

爲與 $3x^4$ 項相當之特別積分.如與前之 y_2 相比,則見此次所得積分等於 $\frac{3}{10}(y_2-x^4)$.

故得一特別積分爲 $-\frac{3}{10}x^4$.*

故題之全解爲

$$y=Ay_1+By_2-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{10}x^4$$

習題 2.　$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$.

命 $y=x^m$ 後之結果爲

$$m^2x^{m-1}+x^m.$$

$$\therefore l=1,$$

$$f(m)=m^2,\ \phi(m)=1.$$

故本題宜用(a)法.　$m=0, 0,$

$$c_r=-\frac{1}{f(m+r)}c_{r-1}=-\frac{1}{r^2}c_{r-1}.$$

因 $m=0$ 爲惟一之值可選用.

$$\therefore c_1=-\frac{1}{1^2}c_0=-c_0,$$

$$c_2=-\frac{1}{2^2}c_1=\frac{1}{2^2}c_0,$$

$$c_3=-\frac{1}{3^3}c_2=\frac{1}{(3!)^2}c_0,$$

....

$$\therefore c_0\left(1-\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}-\frac{x^3}{(3!)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(n!)^2}+\cdots\right)$$

爲一積分,茲命爲 cy,

* 按此可由 $c_0\phi(m)x^m$ 與 $3x^4$ 相比,逕自求出.

求第二個積分時,令 $y=y_1v+w$, 內 v 及 w 爲待定之函數.因吾人對於兩個函數,祇有所求 y 須適合原予方程之一個條件,故尙有一個第二關係不妨隨便取擇.今之所事,卽選擇此第二關係以使進行工作得最多之便利爲目的.

代此 y 之值於原式,並利用 y_1 爲一積分之關係,則見

$$x\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dw}{dx}+w+y_1\left(x\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}\right)+2x\frac{dy_1}{dx}\frac{dv}{dx}=0.$$

$$\therefore \qquad x\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}=0$$

(此卽吾人可任意選擇之第二條件),則有

$$v=A+B\log x.$$

而前列 w 待定之式化爲

$$x\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dw}{dx}+w=-2B\frac{dy_1}{dx}$$

$$=2B-\frac{2Bx}{2!}+\frac{2Bx^2}{2!3!}-\frac{2Bx^3}{3!4!}+\cdots+\frac{2Bx^n}{n!(n+1)!}+\cdots.$$

令 $\qquad w=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$

則有 $\qquad \dfrac{dw}{dx}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots+(n+1)c_{n+1}x^n+\cdots,$

$$x\frac{d^2w}{dx^2}=2c_2x+6c_3x^2+\cdots+n(n-1)c_{n+1}x^n+\cdots,$$

比其係數,則有

$$c_0+\ c_1=2B,$$

$$c_1+4c_2=\frac{2B}{2!},$$

$$c_2+9c_3=\frac{2B}{2!3!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n+(n+1)^2c_{n+1}=(-1)\frac{2B}{n!(n+1)!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因吾人所求積分,其式以愈簡爲妙;故吾人於此若設令 $c_0=0$,結果並無所失;如是則有

$$c_1=2B,$$

$$c_2=-\frac{1}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)2B,$$

$$c_3=\frac{1}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)2B,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)2B.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故得題之通解爲

$$y=(A+B\log x)\left[1-\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}+\frac{x^3}{(3!)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x}{(n!)^2}+\cdots\right]$$

$$+2B\left[\frac{x}{(1!)^2}-\frac{x}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^3}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{x}{(n!)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots\right].$$

習題 3. $(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+2y=0.$

習題 4. $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+(1-x^2)y=x^2.$

習題 5. $(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0.$

75. 高思方程[1]. 超比級數[2]. 下式

$$(Az^2+Bz+c)\frac{d^2y}{dz^2}+(Dz+E)\frac{dy}{dz}+Fy=0,$$

內 A, B, C, D, E 爲常數,且 $B^2-4AC\neq 0$, 實引起一著名之級數,曾經高思予以極充分之研究.此級數與微分方程係出尤拉[3]之發明.令 $z=ax+b$, 則式化爲

$[Aa^2x^2+(2Aab+Ba)x+Ab^2+Bb+c]\frac{d^2y}{dx^2}+(D'x+E')\frac{dy}{dx}+F'y=0$, 內 D', E', F' 俱爲常數.

令 $\quad Ab^2+Bb+c=0$

且 $\quad 2Ab+B=-Aa\neq 0,$

以選出 a, b 之值,然後以 $(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}$ 除其式,則有

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(Px+Q)\frac{dy}{dx}+Ry=0,$$

內 P, Q, R 俱爲常數.

---

1 高思方程 Gauss's equation, 高思 Karl Friedrich Gauss 1777—1855.

2 超比級數 Hypergeometric series.

3 尤拉 Euler 1707—1783.

以 x^m 代 y 於式之左端,則有

$$-m(m-1-Q)x^{m-1}+[m^2-(1-P)m+R]x^m.$$

介 $Q=-\gamma,\ 1-P=-(\alpha+\beta),\ R=\alpha\beta,$

則方程化爲

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0^*,$$

而 $y=x^m$ 代替之結果,使右端化爲

$$f(m)x^{m-1}+\phi(m)x^m,$$

內 $f(m)=-m(m-1+\gamma),\ \ \phi(m)=(m+\alpha)(m+\beta).$

用74節(a)法,則有

$$m=0,\ 或\ 1-\gamma.$$

$$c_r=-\frac{\phi(m+r-1)}{f(m+r)}c_{r-1}=\frac{(m+r+\alpha-1)(m+r+\beta-1)}{(m+r)(m+c+\gamma-1)}c_{r-1}.$$

若 $m=0$, 則有

$$c_1=\qquad\qquad=\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}c_0,$$

$$c_2=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}c_1=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}c_0,$$

....

$$c_n=\qquad\qquad=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}c_0,$$

....

*此式常稱爲高思方程 Gauss's e uation.

令$c_0=1$,則得特別積分為

$$y_1=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots.$$

此為超比級數,常以下舉簡式表之

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

若$m=1-\gamma$,則其積為c_0y_2,內$y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$,學者可自證之.

若α或β為一負整數而γ則非是,則y_1化為一多項式.

若γ為一負整數(及零),設$\gamma=-g\leqq0$,而α與β各不為$-g$至0間之一個整數,則y_1中之係數,自g項起俱變為無限大,故此式之y_1不適應用.(另有包含$\log x$之一式可以他法[1]求得,此式合y_2同用,即為題之通解.)

若$\gamma=-g\leqq0$(內g為一整數),而α或β為一g至0間之一整數,則y_1化為一多項式.(惟α或β等於γ時之例應屬除外;此時分子與分母之中皆有一分子變為零;但此種等零分子互相銷除,故其結果仍予吾人以一可用之y_1式.*)在此例中,$f(m)=0$之兩根雖祇差一整數,但在通式中並無對數項之發現.

若γ為一正數,設$\gamma=g>0$,而α與β俱不為1至g間之一整數,則y_2之係數變為無窮大,在此例下,另有包含$\log x$之y_2新式,可由他法[2]求得之.

*參閱 Schlesinger, Differentialgleichungen, §34.

1, 2 此處所云之法即190頁所舉之法.

若 $\gamma=g>0$ 內 g 爲一整數,而 α 或 β 爲 1 至 g 間之一整數,則 y_2 變爲一多項式.(惟 α 或 β 等於 γ 例時,應屬除外,其處置之法,與兩節前 γ 爲負整數或零之例外,同樣解決之.)故此例之下,通解之中並無對數項之發現.

如採用74節之(b)法,則有

$$y'_1=\frac{1}{x^{\alpha}}F\left(x, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{x}\right),$$

$$y'_2=\frac{1}{x^{\beta}}F\left(\beta, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\alpha, \frac{1}{x}\right).$$

爲一對線性獨立的積分.此事學者可依法自證之.

若 y_1 與 y_2 爲有盡係數之無盡級數,則在 x 之絕對值小於 1 時,兩者皆爲歛性式,在 x 之絕對值不大過於 1 時,則兩者皆屬發散式;而 y'_1 與 y'_2,則在 x 之絕對值大於 1 時,爲收歛式,小於 1 時爲發散式.

按超比級數時或代表著名之函數.下列各關係學者宜自證之:

習題 1. $F(-n, \beta, \beta, -x)=(1+x)^n$, 內 n 爲一常數.

習題 2. $xF(1, 1, 2, -x)=\log(1+x)$.

習題 3. $\text{Limit}_{\beta=\infty}F\left(1, \beta, 1, \frac{x}{\beta}\right)=e^x$.

習題 4. $\text{Limit}_{\alpha,\beta=\infty}xF\left(\alpha, \beta, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)=\sin x$.

習題 5. 以超比級數表示下列各函數:

$\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^n+(1-x)^n$, $(1+x)^n-(1-x)^n$, $\cos x$, e^x+e^{-x}.

讀者如欲參觀他例,可閱高思集 Gauss, Collected Works, Vol. III, p. 127.

第十二章

偏微分方程

76. 根式之含任意常數者[1]. 偏微分方程常可由根式之含任意常數或任意函數者而得之.例如若有一羣定長半徑 R 之球形.其中心常在 $z=0$ 平面之上,則其公式應爲

(1) $$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2,$$

內 a 與 b 爲任意常數.

取 x 與 y 爲自變數,並令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

先後求(1)之 x 的微係數及 y 的微係數,則有

(2) $$x-a+zp=0,$$

(3) $$y-b+zq=0.$$

由(1),(2),(3)三式消去 a 與 b,則得

(4) $$z^2(p^2+q^2+1)=R^2,$$

爲根式(1)之微分方程;反之(1)式亦爲(4)之一解案.

---

1 根式之含任意常數者 Primitives involving arbitrary constants.

推而廣之,若初時有一式爲爲兩任意常數與三變數(內二二變數爲自變數)之一種關係如下.

(1) $$\phi(x, y, z, a, b)=0,$$

內 z 爲應變數,則由求式之 x 的微係數與 y 的微係數,先後應得

(2) $$\frac{\partial\phi}{\partial x}+p\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,$$

(3) $$\frac{\partial\phi}{\partial y}+q\frac{\partial\phi}{\partial z}=0.$$

由此三式吾人可將 a 與 b 消去,因得一消後之結果爲

(4) $$f(x, y, z, p, q)=0,$$

爲一個一級微分方程,而(1)爲其根式,

如根式所含任意常數不止兩個,則所需方程(以消此各個任意常數)之數亦不止三個.故如式中自變數祇有兩個,則消去常數後所得之微分方程亦當高出於一級,例如,設有

(5) $$ax^2+by^2+cz^2=1.$$

求其 x 與 y 的微係數,則有

(6) $$ax+czp=0,$$

(7) $$by+czq=0.$$

吾人至此,祇有三個方程,不足以消去 a, b, c 三常數,故須繼續求其微係數,若取(6)式求 x 的微係數,則有

(8) $$a+c(zr+p^2)=0.$$

由(5),(6),(7),(8)消 a, b, c,得

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & -1 \\ x & 0 & zp & 0 \\ 0 & y & zq & 0 \\ 1 & 0 & zr+p^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \text{即}$$

(9) $$(xzr+xp^2-zp)=0$$

爲一微分方程而(5)爲其根式.若吾人第二次求微係數時,所求者爲(6)之 y 的微係數,則有

(8′) $$czs+cpq=0.$$

如是,則由(5),(6),(7),(8′)消去 a, b, c 之結果,得

(9′) $$zs+pq=0.$$

爲又一式之微分方程而(5)亦爲其根式.再若二次所求之微係數爲(7)之 y 的微係數,則有

(8″) $$b+c(zt+q^2)=0.$$

由(5),(6),(7),(8″)消 a, b, c 之結果,得

(9″) $$yzt+yq^2-zq=0,$$

爲又一微分方程而(5)亦爲其根式.

(9),(9′),(9″)三式皆爲二級微分方程,對於應用,其便相若,故三式之間無可選擇,因之吾人視此三式均爲(5)之微分方程*.

* 吾人須注意若根式所含常數若祇兩個,則其所生之一級微分方程,其式恆有一定,故不復有此類似之疑惑.再,z 之 k 次微係數,既因吾人求其微分時,對於 x 及 y 之次數可有多種不同之組合,而有 $k+1$ 個之數,故吾人若欲一個根式發生一個純一的 n 級之偏微分方程,則此根式中所含任意常數之數應爲 2 至 $n+1$ 間各整數之和,換言之,即應爲 $\frac{n(n+3)}{2}$ 之數.

由下列各方程,求其各式之微分方程.內中 a, b, c 爲應行消去之任意常數:

習題 1.　$(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=b^2$.

習題 2.　$a(x^2+y^2)+bz^2=1$

習題 3.　$z=ax+by+\sqrt{a^2+b^2}$

習題 4.　$z=(x+a)(y+b)$.

習題 5.　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$.

習題 6.　$z=ax+by+cxy$.

習題 7.　$ax+by+cz=1$.

77. **根式之含任意函數者**[1]. 設 u 與 v 爲兩個含 x, y, z 之已知函數,而 u 與 v 之間有一任意的關係如

(1)　$$\phi(u, v)=0.$$

求此式之 x 的與 y 的微係數,則有

(2)　$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0,$$

(3)　$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)=0.$$

若(2)與(3)兩式同時成立,則吾人應有

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p & \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}q \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}p & \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}q \end{vmatrix}=0.$$ 即

(4)　$$Pp+Qq=R,$$

---

1 根式之含任意函數者 primitives involving arbitrary functions.

內

$$P=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix},\quad Q=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix},\quad R=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}$$

此係一線性式一級偏微分方程.吾人稱偏微分方程爲一級線性式者,乃一方程,其中所有應變數之微係數均屬線性式者之謂.(至其應變數之情形如何,却可置諸不論.)*

若u與v爲含x,y,z之兩個已知的函數,且吾人有一已知函數如

(1) $$f[x,y,z,\phi(u),\psi(v)]=0,$$

內中ϕ與ψ爲兩個任意函數,則由求微分後,得

(2) $$\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial \phi}\phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)+\frac{\partial f}{\partial \psi}\psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0,$$

(3) $$\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial \phi}\phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)+\frac{\partial f}{\partial \psi}\psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)=0.$$

因(2)與(3)引出$\phi'(u)$, $\psi'(v)$,兩新函數,故吾人須有五個方程方能將$\phi(u)$, $\psi(v)$, $\phi'(u)$, $\psi'(v)$四個函數消去.

故吾人須將(2)與(3)式再求微分,如是得新方程三個,同時却引出新函數$\phi''(u)$及$\psi''(v)$兩個,吾人至此共得方程六個.在通常情形之下不足以消去六個任意函數,故遇此類情形時,吾人須再進求微分,如是得含有z之三級微係數之新方程四個,而

*學者須辨別此處定義,與13節所與一級線性常微分方程之定義之區別.同時參閱87節.

同時引起之新函數則有 $\phi'''(u)$ 與 $\psi'''(v)$ 兩個.總計之,吾人至此共得方程十個.由是以消去八個函數之法,實屬不同者,計有兩途,故在常情之下,吾人可得兩個不同的三級偏微分方程.

在 f 函數取一特別形式之下,吾人時或能將 $\phi(u)$, $\phi'(u)$, $\phi'''(u)$, $\psi(v)$, $\psi'(v)$, $\psi''(v)$ 六個函數,由首得之六個方程中消去.例如,設 $f\equiv w-[\phi(u)+\psi(v)]=o$, 內 w 為一含 x, y, z 之已知函數,則

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}p-\left[\phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)+\psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)\right]=o,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}q-\left[\phi'(u)\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)+\psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)\right]=o.$$

此兩方程祇含 $\phi'(u)$ 與 $\psi'(v)$ 而不含 $\phi(u)$,與 $\psi(v)$,故再求微分時所得之三個方程祇含 $\phi'(u)$, $\phi''(u)$, $\psi'(v)$, $\psi''(v)$ 四函數.因是匯合此三式與上二式後,吾人可由五個方程將此四個函數消去以得一個純一的二級微分方程,而其根式為 $w=\phi(u)+\psi(v)$,內 ϕ 與 ψ 為兩個任意函數.*

求下列各根式所生之微分方程:

習題 1.　$\phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=o$.

令 $x+y+z=u$, $x^2+y^2+z^2=v$. 則原式取 $\phi(u, v)=o$ 之式.

*此五個方程係屬 $\phi'(u)$, $\phi''(u)$, $\psi'(v)$, $\psi''(v)$ 之線性式.故消去以上諸函數之事至為便捷,再 r, s, t 之發生亦屬線性式,且就其發生之情狀,知消去任意函數後之結果,亦取 r, s, t 各微係數之線性式,故此式可書為 $Rr+Ss+Tt=V$. 內 R, S, T, V 係含有 x, y, z, p, q 之函數.

求微分,得

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(1+p)+\frac{\partial \phi}{\partial v}(2x+2zp)=0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(1+q)+\frac{\partial \phi}{\partial v}(2y+2zq)=0.$$

$$\therefore (1+p)(y+zq)-(1+q)(x+zp)=0,$$

即

$$(y-z)p+(z-x)q=x-y.$$

習題 2. $\phi\left(z^2-xy, \dfrac{y}{x}\right)=0.$

習題 3. $\phi(x^2+y^2, z-xy)=0.$

習題 4. $z=\phi(x+y)+\psi(x-y).$

習題 5. $z=\phi(x+y)+\psi(xy).$

78. 偏微分方程之解案. 一微分方程既由一根式而生,根式故即爲其解案,解中所含按前所論,可知其能爲任意函數不必僅爲任意常數.按偏微分方程之存在定理*,凡一偏微分方程或一組偏微分方程均有一解,内含一定數之任意函數.因一個任意函數所含任意常數可以多至無限,故含一任意函數之解,比之含任何數之任意常數之解更爲普通.因是,吾人稱此由存在定理所出之解(内含一個或多個任意常數)爲題之通解.

*此與以前所引常微分方程之存在定理同爲歌西 Cauchy 所立.此理論之證法,在 Darboux and Mme. Sophie de Kowalewski 書中均有載錄.後書所述之證最爲易讀,故常爲各書所引用.參閱 Goursat-Bourlet, Équation aux Dérivées Partielles du Premier Ordre, Chapter I; also Picard, Traité d' Analyse, Vol. II, p. 318.

對於一組任一級之微分方程,其存在定理頗不易述.茲僅將一個含有三變數之一級或二級方程之存在定理陳述如下.

1° 設有方程爲 $f(x, y, z, p, q)=0$. 並設 p 嘗實現於題中*.解之得

$$p=F(x, y, z, q).$$

如是則題之存在定理爲:若 $F(x, y, z, q)$ 在 $x=x_0, y=y_0, z=z_0, q=q_0$ 域內係屬一有法函數,† 又若 $\phi(y)$ 爲一任意選取之函數,在 $y=y_0$ 域內爲一有法函數而且 $\phi(y_0)=z_0$, $\phi'(y_0)=q_0$, 則本題必有一解且祇有一解如 $z=\psi(x, y)$, 在 $x=x_0, y=y_0$ 域內係屬有法函數,而且在 $x=x_0$ 時其式化爲 $z=\phi(y)$.

在幾何方面此猶言:若在 $x=x_0$ 平面內,已知一曲線 $z=\phi(y)$, 則吾人必有一曲面且祇有一曲面(在任何區域內均可,祇須此域內並不含有本微分方程之異點)經過此曲線.

此說可以推廣無礙.用適宜方法選取坐標後,吾人可證明,經過任一曲線(此曲線爲平面的或空間的[1]均可,惟域中須無異點‡),均可過一積分曲面,且此曲面祇有一個.參閱 Goursat-Bourlet, p 21.

2° 設有方程爲 $f(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$. 若題中原無 r 及 t, 則由一種線性變換法,[2]可易其變數以使二者之一或二者同時發現於方程之中.故吾人不妨假定二者之一實常存在,且竟不妨設此存在者實爲 r 亦復無碍於理

*若題中無 p, 則題中應有 q, 故由互換 p 與 q 及 x 與 y 之關係,上述理論俱仍適用.

† $F(x, y, z, q)$ 函數,若在 $x=x_0, y=y_0, z=z_0, q=q_0$ 域內,可依戴勞定理展爲一個 $x-x_0, y-y_0, z-z_0, q-q_0$ 各羃之收斂的級數,則此函數稱爲此區域內之一個有法函數.

‡異點云者,乃點之坐標及其相當之 q, 成一組值,使 F 在此域內失其有法性質之謂.

---

1 平面的或空間的 plane or twisted.

2 線性變換法 a linear transformation.

論.將此解出,則得

$$r=F(x, y, z, p, q, s, t)=o.$$

如是則存在定理實爲:若 F 在 $x=x_0, y=y_0, z=z_0, p=p_0, q=q_0, s=s_0, t=t_0$ 域內爲一有法函數,又若 $\phi(y)$ 及 $\psi(y)$ 爲兩任意選出之 y 的函數,在$y=y_0$域內係屬有法而且 $\phi(y_0)=z_0, \phi'(y_0)=q_0, \phi''(y_0)=t_0, \psi(y_0)=p_0, \psi'(y_0)=s_0$,則本題必有一解而且祇有一解如$z$,爲 x 與 y 之函數,在$x=x_0, y=y_0$域內係屬有法,而且在$x=x_0$時,$z=\phi(y), p=\psi(y)$.

在幾何方面此猶言:在 $x=x_0$ 平面內,如有一已知曲線 $z=\phi(y)$,則吾人必有無窮數之積分曲面經過此曲線.但如在曲線上每一點之處,吾人擇定一切面,則積分曲面之經過此線且與切面相切者能有一個而亦祇能有一個.緣切面之法線的指向餘弦[1]係與$p, q, -1$成比.如曲線爲已知,則 $\phi(y)$ 亦即定.此線上每一點處之 q 即爲 $\phi'(y)$ 故亦屬已知.故在任一點處之切面,祇須由再求其 p 而可定,而此 p 實即 $\psi(y)$.職是故云,若 $\phi(y)$ 與 $\psi(y)$ 爲已知,則存在定理猶云,積分曲面已經純一的確定.

此說如前理亦可以推廣無礙,不問所論曲線係在平面抑在空間,其理均可以適合應用.

再,在上述理論中,吾人亦假定,在所求積分區域中,並無異點發生之理.

---

1 法線的指向餘弦 the direction cosines of the normal.

第十三章

一級偏微分方程[1]

79. 一級線性偏微分方程[2]. 拉果蘭諸法[3]. 下舉解一級線性偏微分方程之法係拉果蘭諸所創.凡此類方程之含一應變數與二自變數者其通式可書爲

$$(1)\qquad Pp+Qq=R,$$

內 P, Q, R 爲 x, y, z 之函數.

下爲一含 x, y, z, 三自變數之線性方程,

$$(2)\qquad P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

此係一齊次式(即云右端爲零),其係數爲祇含自變數之函數.

若 $u=c$ 適合於(1)式,則 u 爲(2)之一解;緣吾人求其微分之後,則有

$$P=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}},\qquad q=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

代入(1)式,吾人即得(2)式也.

---

1 一級偏微分方程 partial differential equations of the first order.

2 一級線性偏微分方程 linear partial differential equations of the first order.

3 拉果蘭諸法 Method of Lagrange.

反之,若 u 爲(2)之一解,則 $u=c$ 亦必適合於(1)式,緣吾人由(2)解 R,得有

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}P-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}Q=R.$$

但在 $u=c$ 時,
$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}=p,\quad -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}=q$$

故上式卽化爲(1)式.由此討論,吾人因知解(1)式之問題實同於解(2)之問題.

今再更論下列常微分方程組,

(3)
$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

若 u 爲(2)之一解,則 $u=c$ 亦適合於(3)式;緣吾人若將(3)式各端[1]分別用 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 同時乘其分子與分母,則由組合[2]各端,則得(3)之各分數均等於

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz}{P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

此式之分母旣按原設係等於零,故其分子(卽 du)亦應等於零.故 $u=c$ 亦爲(3)之一解[參閱65節,3°,(b)].

反之,若 $u=c$ 爲(3)之一解,則 u 亦必適合於(2)式,緣由推求微分,吾人可得

(4)
$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0.$$

---

1 端 member. 2 組合 composition.

今云 $u=c$ 適合(3)式,實猶言

$$dx:dy:dz=P:Q:R.$$

故將此比例關係代入(4)後;即得

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

此實示(2)式亦嘗適合.解(2)式之問題,因此變爲解(3)式之問題.

因是,解(1)之問題實可變爲解(3)之問題,緣後者之解卽爲前者之解,而前者之解亦必爲後者之解,其結果蓋相同也.

非特如是,若 $u=c_1$, $v=c_2$ 爲(3)之兩個獨立的解案,則任一 u 與 v 之函數如 $\phi(u,v)$ 亦適合於(3)式.緣吾人若將 ϕ 代入(2)之左端,則有

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

因 u 與 v 各適合於(2)式,故此式亦當爲零.因之 $\phi(u,v)$ 亦當爲(2)之一解,此 ϕ 函數之如何選出可不問也.

此 $\phi(u,v)$ 旣含有任意函數,故按78節,此實爲(1)之通解*.內 ϕ 爲一任意函數,故式之右端可書爲零而不必令其等於一任意常數,蓋如此書法於實際並無所失也.

如一線性方程含有 n 個自變數,上述方法亦可由逐句推廣而應用之.吾人因此可立通則如下:

凡求
$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R,$$

之通解,先解方程組

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{R}.$$

* 此解亦可書爲 $u=f(v)$, 或 $v=\psi(u)$.

若此組之通解為

$$u_1=c_1,\ u_2=c_2,\ \cdots,\ u_n=c_n.$$

則 $\phi({}_1u, u_2\cdots u_n)=0$($\phi$ 為 $u_1, u_2\cdots u_n$ 之任意函數)即為(1)之通解.

習題 1. $xzp+yzp=xy.$

今有 $$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dx}{xy}.$$

以$y,x,-2z$,分乘三式之分子與分母,再組合之,則得一新分數其分母為零,因得

$$ydx+xdy-2z\,dz=0.\ (65\text{節},3^\circ(b)\text{法})$$

$$\therefore xy-z^2=c_1.$$

再由 $$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz},$$

即 $$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\text{因得}\ \frac{y}{x}=c_2.$$

$$\therefore \phi\left(xy-z^2,\frac{y}{x}\right)=0\ \text{為題之通解.}$$

習題 2. $-y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}+(1+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

今有 $$\frac{dx}{y}=\frac{\partial y}{x}=\frac{dz}{1+z^2}=\frac{du}{0}.$$

因得 $$x\,dx+y\,dy=0,$$

故 $$x^2+y^2=c_1.$$

又,另得 $$u=c_2.$$

以$-y$及x分乘首兩端之分子與分母,則由組合結果得

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\frac{dz}{1+z^2}.\quad (65\text{節},3^\circ\,(a)\text{法})$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{y}{x}-\tan^{-1}z=c,$$

即
$$\frac{y-xz}{x+yz}=c_3.$$

$$\therefore\ \phi\left(u,x^2+y^2,\frac{y-xz}{x+yz}\right)=0,$$

即
$$u=f\left(x^2+y^2,\frac{y-xz}{x+yz}\right)\text{為題之通解.}$$

習題 3.　$yp-xq=x^2-y^2$.

習題 4.　$(y-z)p+(z-x)q=x-y$.

80. 常微分方程$Mdx+Ndy=0$之積分因子. 一級一次常微分方程之積分因子,吾人至此可以詳論其推求之道矣.吾人曾見(7節)$M\,dx+N\,dy=0$之可有一積分因子如μ,其必要與充分條件為

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}-\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=0,$$

即
$$\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)+N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=0,$$

(1)
$$\frac{N}{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{M}{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu.^*$$

*因此偏微分方程之解案為數無窮,故吾人於此又見一級一次常微分方程可有無窮數積分因子之理(參閱5節).

求適合(1)式之 μ 時,吾人可取下組方程,審度各種情形一一討論之,

$$(2)\qquad \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy=\frac{d\mu}{\mu}.$$

按.——在實際運算,當求 $Mdx+Ndy=0$ 之積分時,吾人並不欲得一最普通式之 μ 而却願求得之式,以愈簡爲愈妙,故凡(2)之任一解案雖皆足應用.但此法解題有時或非便利,惟在 M 與 N 取特別形式之下,則(2)之解案可易求出.下列各則爲幾種普通方程之(2)式解案可易求得者.*

1° 若 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ 爲一單含 x 之函數,設爲 $f_1(x)$,則由(2)可得一積分因子爲 $\mu=e^{\int f_1(x)dx}$(17節).

2° 若 $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ 爲一單含 y 之函數,設爲 $f_2(y)$,則由同樣理由,可見一積分因子爲 $\mu=e^{\int f_2(y)dy}$(17節).

3° 若方程爲線性式,則 $M=Py-Q$, $N=1$, 而(2)變爲 $P\,dx=\dfrac{-P}{Py-Q}dy=\dfrac{d\mu}{\mu}$ 故 $\mu=e^{\int Pdx}$ 爲一積分因子(13節).

4° 若 M 與 N 爲齊次而又同爲 n 次之式,則由以 y 及 x 分乘前兩端之分子分母然後組合,可得式如

$$(3)\qquad \frac{\left(y\frac{\partial M}{\partial y}-y\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx+\left(x\frac{\partial N}{\partial x}-x\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{xM+yN}=\frac{d\mu}{\mu}.$$

*各類方程,曾在第二章論積分因子各條中,一一論列之.

由尤拉之齊次方程理論,知

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=nM,\quad \therefore y\frac{\partial M}{\partial y}=nM-x\frac{\partial M}{\partial x},$$

$$x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=nN,\quad \therefore x\frac{\partial N}{\partial x}=nN-y\frac{\partial N}{\partial y},$$

故(3)可書爲

$$\frac{x\left(\frac{\partial M}{\partial x}dx+\frac{\partial M}{\partial y}dy\right)+y\left(\frac{\partial N}{\partial x}dx+\frac{\partial N}{\partial y}dy\right)-n(M\,dx+N\,dy)}{xM+yN}=-\frac{d\mu}{\mu}.$$

但 $M\,dx+N\,dy=0$. 故吾人可將 $(n+1)(M\,dx+N\,dy)$ 加入左端而不變其值.加後結果,得

$$\frac{d(xM+yN)}{xM+yN}=-\frac{d\mu}{\mu}.$$

求積分,得　　$\mu=\dfrac{1}{xM+yN}$ (17 節).

5°　若 $M=yf_1(xy)$, $N=xf_2(xy)$, 則由以 y 及 $-x$ 分乘首兩端,再組合而變化之,得

$$-\frac{d(xM-yN)}{xM-yN}=\frac{d\mu}{\mu}.$$

求積分,得　　$\mu=\dfrac{1}{xM-yN}$ (17 節).

81. 一級非線性偏微分方程. 全解. 通解. 異解. 吾人在76節曾見由根式

(1)　　$\phi(x,y,z,a,b)=0.$

---

1 一級非線性偏微分方程 non-linear partial differential equations of first order.

(式內含兩個任意常數),可得一純一的一級偏微分方程[1]如

$$(2)\qquad f(x,y,z,p,q)=0.$$

此微分方程係由(1)式及其 x 與 y 的微係數,即

$$(3)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+p\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial y}+q\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0.\end{cases}$$

消去 $a,b,$ 而得.(1)式稱爲(2)之一解案.其中 $a,b,$ 均爲常數,今若視 a,b 作參數,則由(1)之微分式並利用(3)之關係,得有

$$(4)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial x}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial y}+\dfrac{\partial\phi}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial y}=0.\end{cases}$$

此諸方程祇能在下列兩種情形之下,同時成立,即或

$$(5)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial a}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial b}=0,\end{cases}$$

或

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial b}{\partial y}\end{vmatrix}=0.$$

---

1 純一的一級偏微分方程 a unique partial differential equation of the first order.

如此行列式化爲零,則 b 爲 a 之一種函數,設爲 $\psi(a)$〔附錄 I〕.由是(4)可書爲

$$(6)\qquad \begin{cases} b=\psi(a) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial a}+\psi'(a)\dfrac{\partial\phi}{\partial b}=0. \end{cases}$$

(5)與(6)旣由先設(3)式成立而來,故吾人如將 $a, b,$ 由(1),(5)兩式〔或(1),(6)兩式〕中消去,則適合(2)式之 x, y, z 的關係可以求得故此等關係亦爲題之解案.

由是故知一級偏微分方程之解案不僅爲其根式.但其他之解因俱由此而得,故拉果蘭諸稱之曰全解.

在78節論偏微分方程存在定理時,曾證一級方程通解之中含有一個任意函數.今(6)中之 $\psi(a)$ 旣爲(a)的任意函數,故拉果蘭諸稱由(1),(6),消 $a, b,$ 所得之結果爲通解.

由全解中指定 $a, b,$ 之值,或指定 $\psi(a)$ 之函數然後從而消去(1),(6)中之 $a, b,$ 如是所得之結果稱爲特解.

若由(1),(5)兩式消去 $a, b,$ 則結果所得不復含有 $a, b,$ 此類解案稱曰異解.此異解與常微分方程所見異解完全同類.就幾何方面而論,此係(1)式所表雙重無窮數之曲面的包面,由此通解所表,爲上述曲面中一組任意選擇的單重無窮曲面的包面[1].異解之推出,亦可證其能由

$$f(x, y, z, p, q)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial p}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

---

1 本句原文爲 just as the general solution is the envelope of an arbitrary choson single infinity of those sufaces.

各式消其p, q而得,*與常微分方程中求法完全相同.其他理論本書因爲篇幅所限,不再進論.茲僅將下舉易見之理分條匯述以結吾論:

1° 題中不必定有異解,此在(1)與(5)爲矛盾[1]式時發生其事,就幾何方面言,猶言(1)式所表曲面並無包面.

2° 通式係不能寫定.緣$\psi(a)$係一任意可選之函數,而此函數未定以前,則a, b,無從由(1),(6)消去;且在此函數一經寫定以後,則吾人所得消去常數之結果又成爲一特解也.

3° 全解無純一之式.凡含有兩任意常數之解皆爲一全解.解案之數無窮其理甚易明.緣吾人一經選定$\psi(a)$之式(內含h, k兩任意常數),則由(1),(6),消去a, b後,吾人得一含有h, k兩任意常數之結果,此式悉合全解條件故亦爲一全解也.

在75節,曾見$z^2(p^2+q^2+1)=R^2$之全解爲

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2,$$

代表一羣球面,其半徑爲R,球心在$z=o$上,其包面爲一對平面$z^2=R$.後者可由

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2,\ x-a=o,\ y-b=o$$

消去a, b而得,或由

$$z^2(p^2+q^2+1)=R^2,\ z^2p=o,\ z^2q=o$$

消去p, q亦可.此$z^2=R^2$乃其異解也.

選擇$b=\psi(a)$之結果,乃爲選取一羣球面使其中心移動於在$z=o$平面中$y=\psi(x)$的曲線之上.此羣球面之包面,乃一管形之面,係由一球體移動而成此球之半徑爲R,其心係移動於$y=\psi(x)$曲線全身之上.

*參閱 Goursat-Bourlet, p. 24, and p. 199 and foll.

1 矛盾 inconsistent.

若 $\psi(x)$ 係一 x 的線性函數,則其包面乃一圓柱形.

設
$$b=ha+k,$$

求解案時,須將 a 消去,消法可進行如下:由
$$(x-a)^2+(y-ha-k)^2+z^2=R^2,$$

得微分式爲
$$(x-a)+h(y-ha-k)=0.$$

由後式解 a 得
$$a=\frac{x+hy-hk}{1+h^2}$$

代入前式,得
$$\frac{h^2(hx-y+k)^2+(hx-y+k)^2}{(1+h^2)^2}=R^2-z^2,$$

卽
$$(hx-y+k)^2=(1+h^2)(R^2-z^2),$$

爲一圓柱形之方程,其軸爲下二方程所表示之式
$$y=hx+k,\ z=0.$$

此解有二任意常數,故係一全解(參閱83節,習題 6.).

學者可取
$$(hx-y+k)^2=(1+h)^2(R^2-z^2).$$

作根式,以證若視 h,k 作任意常數,則由此所得之偏微分方程,仍爲
$$z^2(p^2+q^2+1)=R^2.$$

82. 拉果蘭諸及嘉畢法[1]. 一題之各種解案旣可由一全解推出,故全解如屬可尋,吾人自當先行求出之.拉果蘭諸於此曾立有下法.

設方程爲

(1)
$$f(x,y,z,p,q)=0.$$

---

1 拉果蘭諸及嘉畢法 Method of Lagrange and Charpit.

試求一第二關係如

(2) $$\phi(x,y,z,p,q,a)=0.$$

內含 p,或含 q,或兼含兩者,此外又含一任意常數,且由(2)與(1)解得 p 與 q 後代入下全微分方程時,

(3) $$dz=p\,dx+q\,dy$$

須爲可解之式;如是則(3)之解卽爲(1)之全解,緣由上述各步,此式實定一 x,y 的函數 z,且由此所得之 p,q 與此 z 匯合後,實可適合(1)式方程,且其中已含有兩個任意常數也.求此 ϕ 之法,其程序如下:

先求(1)與(2)之 x 的微分,則有

(4) $$\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dx}=0,^*$$

(5) $$\frac{\partial \phi}{\partial x}+p\frac{\partial \phi}{\partial z}+\frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{dq}{dx}=0.$$

同樣,求 y 的微分,則有

(6) $$\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dy}=0,$$

(7) $$\frac{\partial \phi}{\partial y}+q\frac{\partial \phi}{\partial z}+\frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{dp}{dy}+\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{dq}{dy}=0.$$

按(3)之可求積分的條件爲

(8) $$\frac{dp}{dy}-\frac{dq}{dx}=0.$$

*本節中,俱以 $\frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{d}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}$ 關係,代替偏微分符號.

由(4),(5),(6),(7),(8)諸方程,吾人可將$\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dq}{dx}, \frac{dq}{dy}$四式消去.如以

$\frac{\partial \phi}{\partial p}$乘(4),$\frac{\partial f}{\partial p}$乘(5)然後相減,則$\frac{dp}{dx}$即消去,而得式如下,

$$(9)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi}{\partial p}-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}+p\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p}-\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dq}{dx}=0.$$

如以$\frac{\partial \phi}{\partial q}$乘(6),以$\frac{\partial f}{\partial q}$乘(7),然後相減,則$\frac{dq}{dy}$即消去,而得式如下,

$$(10)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi}{\partial q}-\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}+q\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}+\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}-\frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{dp}{dy}=0.$$

利用(8)之關係,將上兩式相加,並依ϕ之微係數書列各行,則得

$$(11)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$
$$-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial \phi}{\partial z}=0.$$

此係線性式,故ϕ之推解,可由下列方程組求得之:

$$(12)\qquad \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)}=\frac{\partial \phi}{0}.$$

吾人目的,不在求一最普通之ϕ*,而祇在求一含有 p 或 q 及一任意常數之任一關係.故在實際,實以求一最簡之式爲目的.

按.——(11)或(12)以能熟記爲宜.

如令
$$\frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{d}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z},$$

則(12)成爲

$$(12')\qquad \frac{dp}{\dfrac{df}{dx}}=-\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dq}{\dfrac{df}{dy}}=-\frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial q}};$$

其再次一項,卽 $\dfrac{dz}{-\left(p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)}$, 可由 $\dfrac{dx}{-\dfrac{\partial f}{\partial p}}=\dfrac{dy}{-\dfrac{\partial f}{\partial q}}$ 等式,以 p 乘前項分母及分子,以 q 乘後項分母分子兩者相加組合得之(同時利用(3)式關係).

再,若仍用 $\dfrac{d}{dx}$, $\dfrac{d}{dy}$ 之義,而命

$$\frac{\partial f}{dx}\frac{\partial\phi}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{d\phi}{dx}=[f,\phi]_{x,p},$$

$$\frac{df}{dx}\frac{\partial\phi}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{d\phi}{dy}=[f,\phi]_{y,q},$$

則(11)可書爲簡式如

$$(11')\qquad [f,\phi]_{x,p}+[f,\phi]_{y,p}=0.$$

*拉果蘭諸本思由此法求ϕ之通式(內含一任意常數),因以求本題之通解.但此係一不適實用之法.後嘉半(在1781年六月間,在彼所呈與Academie des Sciences論文中)改爲採用任一式之含 p 或 q 及一任意常數之ϕ函數,但由此所得係一全解而非通解.

習題 1.　$z-pq=0$.

由方程組

$$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}=\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}=\cdots,$$

之前兩項,得一 ϕ 為

$$\phi\equiv p-aq=0.$$

與原式合用,得

$$p=a\sqrt{\frac{z}{a}},\quad q=\sqrt{\frac{z}{a}}.$$

而(3)成為　$$dz=a\sqrt{\frac{z}{a}}dx+\sqrt{\frac{z}{a}}dy,$$

即　$$\frac{\sqrt{a}\,dz}{\sqrt{z}}=a\,dx+dy.$$

求積分,得　$$2\sqrt{az}=ax+y+b,$$

即　$$4\,az=(ax+y+b)^2,$$

為一全解.

如初時用二,三,兩項關係,則有

$$\phi\equiv q-x-a=0.$$

因得　$$q=x+a,\quad 及\ p=\frac{z}{x+a},$$

而(3)成為　$$dz=\frac{z}{x+a}dx+(x+a)dy,$$

即　$$dy=\frac{(x+a)dz-z\,dx}{(x+a)^2}.$$

求積分得 $$y+b=\frac{z}{x+a},$$

即 $$z=(x+a)(y+b),$$

爲又一全解.

通解與異解,可由任一全解推出.如用第二全解,則吾人可由

$z=(x+a)[y+\psi(a)]$,(內 $\psi(a)$ 爲 a 之一任意函數)

及 $$y+\psi(a)+\psi'(a)(x+a)=0,$$

消 a 而得其通解.

下列特情,學者可自證之.如令

$$\psi(a)=k-ha,$$

內 h 及 k 爲兩任意常數,則其相當之解應爲 $4hz=(hx+y+k)^2$,與第一全解其式相同也.

異解之求,可由

$$z=(x+a)(y+b),$$

$$y+b=0,$$

$$x+a=0,$$

消其 a,b,而得之,其式蓋爲 $z=0$.

學者可自證由第一全解亦可推出此同樣結果.

習題 2. $p=(z+yf)^2$.

習題 3. $\sqrt{p}+\sqrt{q}=2x$.

83. 特別解法[1]. 在微分方程屬於多種形式之時,有時用特別方法解題;反較82節之常法爲簡(雖此種方法原皆由常法推出).茲舉數法如下:

1° 設式中無變數,則式可書爲

(1) $$f(p,q)=0,$$

而求 ϕ 之方程組應爲

(2) $$\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\cdots.$$

由第一項得 $p=a$.

將此 p 值代入(1)得 q. 設 $q=b$, 易見 a,b 兩值當合 $f(a,b)=0$ 方程之關係.

由是故得 $dz=a\,dx+b\,dy,$

故 $z=ax+by+c$, 內 $f(a,b)=0$.

因此得一特法:

凡方程之式屬 $f(p,q)=0$ 一類者,其全解爲

$$z=ax+by+c,\ \text{內}\ f(ab)=0.^*$$

由簡單的變換變數,數種方程可化爲上論之式:

令 $\log z=Z$, 即 $z=e^Z$, 則 $p=\frac{\partial z}{\partial x}=e^Z\frac{\partial Z}{\partial x}=z\frac{\partial Z}{\partial x}$; 故

$$\frac{p}{z}=\frac{\partial Z}{\partial x}.\ \text{同理,得}\ \frac{q}{z}=\frac{\partial Z}{\partial y}.$$

*此全解代表一雙重無盡平面組[2].任一特解均代表一選定的單重無盡組之包面.此爲一可展之曲面[3].本題無異解,具理學者可自證之.

---

1 特別解法 special method.

2 一雙重無盡平面組 a doubly infinite set of planes.

3 原文云 this is a developable surface.

故若方程原式爲 $f\left(\frac{p}{z}, \frac{q}{z}\right)=0$,則由 $\log z=Z$ 之變換,式卽化爲

$$f\left(\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right)=0$$

再,如令 $\log x=X$, 卽 $x=e^X$, 則

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X};\ \text{卽}\ xp=\frac{\partial z}{\partial X}.$$

同樣,如令 $\log y=Y$, 則有 $yq=\frac{\partial z}{\partial Y}$.

故如式爲:

$f(xp, q)=0$ 者可由令 $\log x=X$ 化爲 $f\left(\frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$;

$f(p, yq)=0$ 者可由令 $\log y=Y$ 化爲 $f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right)=0$;

$f(xp, yp)=0$ 者可由令 $\log x=X$, $\log y=Y$ 化爲 $f\left(\frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right)=0$;

$f\left(\frac{xp}{z}, \frac{q}{z}\right)=0$ 者可由令 $\log x=X$, $\log z=Z$ 化爲 $f\left(\frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right)=0$;

餘類推.

習題 1. $pq=1$.

其全解爲 $z=ax+by+c$, 內 $ab=1$,

卽 $$z=ax+\frac{1}{a}y+c,$$

習題 2. $q=z+px$.

書此式爲 $\frac{q}{z}=1+\frac{px}{z}$, 則見此式由令 $X=\log x, Z=\log z$ 變換後,

式化爲

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=1+\frac{\partial Z}{\partial X}.$$

其全解為 $Z=aX+(1+a)y+c$. 變還原變數,得

$$\log z=a\log x+(1+a)y+c,$$

即 $$z=bx^a e^{(1+a)}y.$$

習題 3. $px+qy=1$.

習題 4. $x^2p^2+y^2q^2=z^2$.

習題 5. $yq=p$.

2° 如式中無 x, y 則式可書為

(1) $$f(z, p, q)=0,$$

而求 ϕ 之方程組因為

(2) $$\frac{dp}{p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{q\frac{\partial f}{\partial z}}=\cdots$$

$$\therefore \frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}, \text{因得 } q=ap$$

代入(1)式得 $f(z, p, ap)=0$, 因得 $p=\psi(z, a)$, 而 $dz=pdx+qdy$ 變為 $\frac{dz}{\psi(z, a)}=dx+ady$, 其變數已分離矣.

為便記憶起見,吾人須注意 $q=ap$ 云云,按79節通法,猶言 z 為 $x+ay$ 之一函數.若令 $x+ay=t$, 則得

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}, q=\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial t},$$

故(1)式變為一常微分方程如

$$f\left(z\frac{dz}{dt}, a\frac{dz}{dt}\right)=0,$$

其式中不含自變數.故由將$\frac{dz}{dt}$解出後,其變數可立卽分離.吾人因此得法如下述:

待解方程之式爲$f(z, p, q)=0$時,可令$x+ay=t$,由此,p將易爲$\frac{dz}{dt}$,q易爲$a\frac{dz}{dt}$.代此二值入原式,再解出其$\frac{dz}{dt}$.

若方程之式爲

$$f(z, xp, q)=0,\ f(z, p, yq)=0,\ f(z, xp, yq)=0$$

各式,則由$\log x=X$, $\log y=Y$之變換(用其一或兼用二式視題而定),式卽化本節所論之式.

習題 6. $z^2(p^2+q^2+1)=R^2$

令$x+ay=t$, $p=\frac{dz}{dt}$, $q=a\frac{dz}{dt}$,則式化爲

$$z^2\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2(1+a^2)+1\right]=R^2,$$

卽
$$\frac{\sqrt{1+a^2}\,zdz}{\sqrt{R^2-z^2}}=dt.$$

$$\therefore -\sqrt{1+a^2}\sqrt{R^2-z^2}=t+b=x+ay+b,$$

卽
$$(1+a^2)(R^2-z^2)=(x+ay+b)^2.$$

習題 7. $xp(1+q)=qz$.

習題 8. $z=pq$.

3° 若原式不含應變數,且其式可書爲

(1) $$f_1(x, p)=f_2(y, q)$$

（一種分離係數式），其求 ϕ 之方程組為，

(2) $$\frac{dp}{\frac{\partial f_1}{\partial x}}=\cdots=\frac{dx}{-\frac{\partial f_1}{\partial p}}=\cdots.$$

$$\therefore \frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial p}dp=0,\text{ 即 } df_1=0.\text{ 故得}$$

$$f_1=a.$$

$$\therefore f_2=a.$$

解之，得 $p=\psi_1(x,a)$, $q=\psi_2(y,a)$,

而 $dz=p\,dx+q\,dy$ 化為

$$dz=\psi_1(x,a)dx+\psi_2(y,a)dy.$$

內中變數已分離矣。本法可述如下：

若式中無應變數而其他變數可以分離，如 $f_1(x,p)=f_2(y,q)$ 式，令各項分別等於一常數，解其 p 與 q，再代入 $dz=p\,dx+q\,dy$，求其積分，即得解案。

如原式可書為 $f_1\left(x,\frac{p}{z}\right)=f_2\left(y,\frac{q}{z}\right)$，則由令 $\log z=Z$，原式即可化為本節所論之式。

習題 9. $q=2yp^2$.

習題 10. $2(zx-zy)-p+q=0$.

4° 如式為 $z=px+qy+f(p,y)$（此常稱為克雷勞廣式[1]），則易見其可由令 $p=a$, $q=b$ 而解出，吾人因知本式之全解為

$$z=ax+by+f(a,b).$$

---

1 克雷勞廣式 extended Clairaut equation 或曰廣克雷勞式.

82節通法,雖亦可用於本題,然所得解式並不簡單.由該法,吾人可用 $p=a$ 或 $q=b$ 之關係,但二者不能同用.蓋實際由 (12) 所得 p 與 q 之值代入原式後,其能得一全解者係一偶然之事.但此事却亦有時能發生(如本題).惟發生與否不可必,且亦不易有之事.

習題11.　解 $z=px+qy+\sqrt{p^2+q^2+1}$,並驗其異解.

5°　若式爲 $f(x+y, p, q)=o$ 令 $q=p+a$,則由解 $f(x+y, p, p+a)=o$ 得 $p=\phi(x+y, a)$,因得

$$q=\phi(x+y, a)+a,$$

而 $dz=pdx+qdy$ 化爲

$$dz=\phi(x+y, a)(dx+dy)+ady.$$

學者宜自證,此式可由82節通法解得之.

若原式爲 $f\left(x+y, \frac{p}{z}, \frac{q}{z}\right)=o$,則由令 $\log z=Z$ 之變換卽可將原式化爲本段所論之式.

習題12.　$p(x+y)-q=o$.

習題13.　$zp(x+y)+p(q-p)=z^2$.

6°　如式中無 p 或無 q,則解法易由察閱而得.如無 p,則由視 x 爲常數以求積分,而其所得積分常數應爲一含有 x 之任意函數.如無 q,則可以 y 作常數以求積而其所得積分常數應爲一含有 y 之任意函數.此種解案,內含任意函數,皆通解也.*

*如此等之微係數係屬一次,則其式係屬線性方程一類.本處所舉之法與拉格蘭諸用於此類方程之法,完全相同(參閱79節).

習題 14. $(x-y)q-(x+z)=0$.

視 x 如常數,吾人可書 $q=\frac{dz}{dy}$.

$$\therefore \frac{dz}{x+z}-\frac{dy}{x-y}=0.$$

求積分,並用兩端之指數關係,得

$$(x+z)(x-y)=\phi(x),$$

內 $\phi(x)$ 爲一含 x 之任意函數.

習題 15. $xp^2-2zp+xy=0$.

習題 16. $p+y(z-x)=0$.

習題 17. $y^2(p^2-1)=x^2p^2$.

84. **本章提要.** 一級偏微分方程分爲兩通類:其應變數之微係數屬於線性式者爲一類,其他爲又一類.

1° 對於一級非線性方程式,拉格蘭諸法可應用,所得之解爲通解(79節).

2° 對於一級非線性方程式,拉格蘭諸與嘉畢法(82節)可應用,所得之解爲一全解.其他之解由此可化出(81節).

83節之特別解法有時較82節之通法爲便捷.

變換變數有時可助方程之推解.

習題 1. $x^2p+y^2q=z^2$.

習題 2. $q=p^2+1$.

習題 3. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$.

習題 4. $z=px+qy+(p+q)^2$.

習題 5. $xypq=z^2$.

習題 6. $y^2zp+x^2zq=y^2x$.

習題 7. $q=xp+p^2$.

習題 8. $(p+q)(px+qy)=1$.

習題 9. $(x+y)(p+q)^2+(x-y)(p-q)^2=1$. [令 $x+y=u^2$, $x-y=v^2$.]

習題 10. $(p^2+q^2)x-pz=0$.

習題 11. $(x^2+y^2)(p^2+q^2)=1$. [令 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.]

習題 12. $(y^2+z^2-x^2)p-2xyq+2xz=0$.

習題 13. $q^2=z^2(p-q)$.

習題 14. $(y-x)(qy-px)=(p-q)^2$. [令 $xy=u$, $x+y=v$.]

習題 15. $z-xp-yq=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

習題 16. $pq=px+qy$.

習題 17. $(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+u+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$.

習題18. 有一曲面羣,其每點之法線與xy平面,常成一定量之角,求其公式.

習題19. 有一曲面羣,其法線與xy平面交點之坐標,與其曲面上相當點之坐標成比例,求其公式.

習題20. 有一曲面羣,其切面與兩定點之距離之乘積,等一常數,求其公式.

第十四章

高級偏微分方程[1]

85. 第二微分爲線性的二級偏微分方程者. 蒙奇法[2]. 二級偏微分方程而其所含二級微係數又屬線性式者,其通式爲

(1) $$Rr+Ss+Tt=V,$$

內 R, S, T, V 爲 x, y, z, p, q 之函數.蒙奇曾議有一法(其法即以名傳),其法係先求一含一任意函數之一級偏分微方程爲其初次積分亦曰中級積分[3],次用十三章各法或他術再求後者之解案爲原式之通解.此法能否應用雖有賴於 R, S, T, V 是否合於某種條件,然就其習見之數而論,足有於此引述其法之需要(至少總有引述其解案所由出之理由)*.按吾人有

(2) $$dz=p\,dx+q\,dy,$$

關係外,尙有

(3) $$\begin{cases} dp=r\,dx+s\,dy, \\ dq=s\,dx+t\,dy, \end{cases}$$

由(1)與(3)消去 r 及 t,得

(4) $$s(R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2)-(R\,dy\,dp+T\,dx\,dq-V\,dx\,dy)=0.$$

*欲知本問題詳論者,可閱 Forsyth, p.358 and foll, 或 Boole, Chapter XV.

---

1 高級偏微分方程 partial differential equations of higher order than the first.

2 第二微分爲線性的二級偏微分方程者.蒙奇法 partial differential equations of the second order, linear in the second derivatives. Monge's method. 蒙奇 Gaspard Monge 1746—1818.

3 初次積分亦曰中級積分 a first or intermediary integral.

如下列兩條件同時可以滿足,

(5) $$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0,$$

(6) $$R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0,^*$$

則(4)亦滿足而(1)亦然.(5)式關係,實等於兩個一級關係如

(7) $$dy - W_1(x, y, z, p, q)dx = 0,\ dy - W_2(x, y, z, p, q)dx = 0,$$

兩式遇下列情形時,成爲完全相同的關係,

(8) $$4RT = S^2.$$

(2),(6)及(7)之一式,成爲一含 x, y, z, p, q 五變數之三個全微分方程組.此類方程組祇能在多種條件滿足時方能解出,故蒙奇之法有時不能應用.倘若可用,則吾人當可求出兩個獨立的解案.如

$$u_1(x, y, z, p, q) = c_1, \quad u_2(x, y, z, p, q) = c_2.$$

如是則有

(9) $$u_1 = \phi(u_2),$$

內 ϕ 爲一任意函數,爲本題中之中等積分[1].視(9)爲一個一級偏微分方程,再求其積分,所得通解即爲(1)之解案.

如(7)中二個方程,均可與(2),(6)成組以各出一解,則吾人可得

*(5),(6)兩式常稱爲蒙奇方程.

---

1 中等積分 an intermediary or interdediate integral.

如(9)式之中等積分兩個.合而解其 p 與 q,代其值於 $dz=p\,dx+q\,dy$ 中,由此所得之積分即爲(1)之通解.

習題 1. $q^2r-2\,p\,qs+p^2t=0$.

蒙奇方程爲

$$q^2dy^2+2\,pq\,dx\,dy+p^2dx^2=0.$$

$$q^2dy\,dp+p^2dx\,dq=0.$$

第一方程係一整方,即

$$(q\,dy+p\,dx)^2=0.$$

代此入第二方程,則式化爲

$$q\,dp-p\,dq=0.$$

因得

$$\frac{p}{q}=c_1.$$

第一方程與 $dz=p\,dx+q\,dy$ 合後,得

$$dz=0,$$

$$z=c_2.$$

故得一中級積分爲

$$p=q\phi(z).$$

本題中中級積分祇此一個,故吾人須即求此式之積分,此式係一線性式,故79節拉格蘭法可以適用,由此推求,得題之通解爲

$$x\phi(z)+y=\psi(z).$$

習題 2. $r-a^2t=0$.*

蒙奇方程爲

$$dy^2-a^2dx^2=0, \text{ 即 } dy-adx=0 \text{ 與 } dy+adx=0,$$

及 $$dydp-a^2dxdq=0.$$

用 $dy-adx=0$, 得 $y-ax=c_1$.

合入第二方程,則有

$$dp-adq=0; \text{ 因得 } p-aq=c_2.$$

故得一中級積分爲

$$p-aq=\psi(y-ax).$$

再用 $dy+adx=0$, 則得又一中級積分爲

$$p+aq=\phi(y+ax).$$

由二中級積分,解 p 與 q, 得

$$p=\frac{1}{2}[\phi(y+ax)+\psi(y-ax)],$$

$$q=\frac{1}{2a}[\phi(y+ax)-\psi(y-ax)].$$

* 88 節又示解此題之簡法,此方程在數理物理中甚爲重要,首解此式者爲 Jean-le-Rond D' Alembert (1717—1783). 法見渠論文 Récherches sur les vabrations des cordes sonores, presented in 1747 to the Berlin Academy. 按渠當研究弓張的彈性弦線顫動時[1], 曾對 $\frac{\partial^2y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=0$ 方程,討論其解.在此式中, t 爲時間, x, y 爲弦上之一點之坐標,所用之坐標軸係一對直角坐標軸, x 即沿聯弦兩端之線所量得之坐標, y 即顫動點當顫動時離開平衡地位之過程.[2] Marie 曾述其證,其文載 Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques, t. VIII, p. 217.

1 原文云 the vibration of a stretched elastic string.

2 原文云 the coordinate measured along the line joining the extremities of the string, and y the displacement of the point from the position of equilibrium.

由是得一應解之式爲

$$dz=\frac{1}{2}[\phi(y+ax)+\psi(y-ax)]dx+\frac{1}{2a}[\phi(y+ax)-\psi(y-ax)]dy$$

$$=\frac{1}{2}\phi(y+ax)(dy+a\,dx)+\frac{1}{2}\psi(y-ax)(dy-a\,dx),$$

爲一正合方程.

因 ϕ 與 ψ 原爲任意函數,故吾人不妨將答案改書爲

$$z=\phi(y+ax)+\psi(y-ax).$$

式中無須再加任意常數,緣任一任意函數中,可設其已含此常數,故不加亦無所失也.

習題 3. $r-t=-\frac{4p}{x+y}$.

蒙奇方程爲

$$dy^2-dx^2=0,\text{ 即 } dy-dx=0 \text{ 與 } dy+dx=0,$$

及 $$dydp-dxdq+\frac{4p}{x+y}dxdy=0.$$

用 $dy-dx=0$, 則得 $y-x=c_1$.

合蒙奇第二方程,則有

$$2xdp+4pdx-2xdq+c_1(dp-dq)=0.$$

又 $$dz=pdx+qdy$$

今變爲 $$dz=pdx+qdx.$$

以 2 乘後式與前式相減,得

$$2(xdp+pdx)-2(xdq+qdx)+c_1(dp-dq)+2dz=0.$$

此係正合式,其解爲

$$(2x+c_1)(p-q)+2z=c_2,$$

即 $$(x+y)(p-q)+2z=c_2.$$

故得一中級積分爲

$$(x+y)(p-q)+2z=\phi(y-x).$$

如用 $dy+dx=0$,吾人得一不能求積分之全微分方程組.故吾人祇能取上得之中級積分再行求積.此係一線性式,故拉格闌法可以應用.因有

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{-dy}{x+y}=\frac{dz}{\phi(y-x)-2z}.$$

由前兩項,得

$$x+y=a.$$

以 $a-x$ 代 y,則一項三項成爲

$$\frac{dx}{a}=\frac{dz}{\phi(a-2x)-2z},$$

即 $$\frac{dz}{dx}+\frac{2}{a}z=\frac{1}{a}\phi(a-2x).$$

此係一級線性常微分方程.其積分因子爲 $e^{\frac{2}{a}\int dx}=e^{\frac{2x}{a}}$ (13節).其解案爲

$$aze^{\frac{2x}{a}}=\int e^{\frac{2x}{a}}\phi(a-2x)dx+b.$$

易 a 爲 $x+y$,則得通解爲

$$(x+yz)e^{\frac{2x}{x+y}}-\int e^{\frac{2x}{a}}\phi(a-2x)dx=\psi(x+y)$$

通解之書出,在此題及一級非線性偏微分方程中(81節),爲不可能,緣 ϕ 若非先知,則上式中之積分無從推求也.在習題之中(其中 ϕ 係由初知條件[1]決定),凡在積分中所見之 a,俱應於在積分求出之後,易爲 $x+y$.

習題 4. $q(1+q)r-(p+q+2pq)s+p(1+p)t=o$.

習題 5. $ps-qr=o$.

習題 6. $(b+cq)^2r-2(b+cq)(a+cp)s+(a+cp)^2t=o$.

86. **特別解法**[2]. 有時由暫視自變數之一爲常數,所與方程可視爲一常微分方程.如是推出之解,內中所含任意常數應易爲前曾視爲常數之自變數的任意函數.下列數題詳解其事:

習題 1. $xr=p$.

暫視 y 作常數,其式可書爲

$$\frac{dp}{dx}=p,\ \text{即}\ \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}.$$

解之得 $p=xf(y)$, 內 $f(y)$ 爲一任意函數.

仍視 y 作常數,則有

$$\frac{dz}{dx}=xf(y).$$

因得解爲 $z=x^2f(y)+\phi(y)$, 內 $\phi(y)$ 爲又一任意函數.按解案右端原有一因子 $\frac{1}{2}$,因已併入在 $f(y)$ 之中,故從省略.

1 初知條件 initial conditions 或曰最初條件曰原始條件.

2 特別解法 special method.

習題 2. $r+s+p=0$.

視 y 作常數以求積分,得

$$p+q+z=f(y).$$

此係一級線性式.拉格蘭法可引用.

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{f(y)-z}.$$

由前二項,得

$$x-y=a.$$

由後二項得一線性常微分方程,爲

$$\frac{dz}{dy}+z=f(y).$$

其積分因子爲 e^y (13 節),其解爲

$$ze^y=\int f(y)e^y dy+b.$$

$$=\phi(y)+b.$$

故得本題通解,爲

$$ze^y-\phi(y)=\psi(x-y),$$

即 $$z=\phi(y)+e^{-y}\psi(x-y),$$

內 e^{-y} 因子,已併入在 $\phi(y)$ 中矣.

習題 3. $yt-q=xy^2$.

習題 4. $s=xy$.

習題 5. $r+p=xy$.

87. 線性偏微分方程通式[1]. 茲將討論偏微分方程之應變數及其各級微係數俱爲線性式者.此類方程之通式可書如下:

$$(1)\qquad P_{n,0}\frac{\partial^n z}{\partial x^n}+P_{n-1,1}\frac{\partial^n z}{\partial^{n-1}x\,\partial y}+P_{n-2,2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}+\cdots+P_{0,n}\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$$

$$+P_{n-1,0}\frac{\partial^{n-1}z}{\partial x^{n-1}}+\cdots+P_{s,r}\frac{\partial^{r+s}z}{\partial x^s\partial y^r}+\cdots+P_{1,0}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+P_{0,1}\frac{\partial z}{\partial y}+P_{0,0}z=f(x,y),$$

內各項係數爲 x,y 之函數或有多個係數爲常數.

如令 $D=\frac{\partial}{\partial x}$, $\mathcal{D}=\frac{\partial}{\partial y}$, 則(1)可書爲

$$(P_{n,0}D^n+P_{n-1,1}D^{n-1}\mathcal{D}+P_{n-2,2}D^{n-2}\mathcal{D}^2+\cdots+P_{0,n}\mathcal{D}^n+P_{n-1,0}D^{n-1}$$

$$+\cdots+P_{s,r}D^s\mathcal{D}^r+\cdots+P_{1,0}D+P_{0,1}\mathcal{D}+P_{0,0})z=f(x,y),$$

或簡書之爲

$$(1)\qquad F(D,\mathcal{D})z=f(x,y),$$

內 $F(D,\mathcal{D})$ 係一運算符號,視作一代數式時,乃一 D 與 $\mathcal{D}$ 之 n 次多項式也.此式與42節所論 n 級線性常微分方程頗多相似之點.

一顯見之理爲 $F(D,\mathcal{D})(u+v)=F(D,\mathcal{D})u+F(D,\mathcal{D})v$.

---

1 線性偏微分方程通式 general linear partial differential equations.

故(1)之推解問題,可書爲兩部,一爲求

(2) $$F(D, \mathcal{D})z=o,$$

之積分通式.此可名爲(1)之補充函數,二爲求其特別積分,兩者之和卽爲(1)之通解.

88. 常係數齊級一次方程[1]. 茲按習慣通例,稱方程之各微係數俱屬同級者謂之齊級式.在此例下,$F(D, \mathcal{D})$ 之符號係爲 D 與 $\mathcal{D}$ 之齊次式.茲設方程情形除此以外,其各項之係數又知皆爲常數,且方程右端係等於零,如是則所遇方程取式如下:

(1) $$(k_0D^n+k_1D^{n-1}\mathcal{D}+\cdots+k_{n-1}D\mathcal{D}^{n-1}+k_n\mathcal{D}^n)z=o,$$

$$F(D, \mathcal{D})z=o.$$

因不論 ϕ 之形式如何,吾人常有

$$D^r\mathcal{D}^s\phi(y+mx)=m^r\phi^{(r+s)}(y+mx),$$

內 $\phi^{(r+s)}(y+mx)$ 卽 $\dfrac{d^{r+s}\phi(y+mx)}{[d(y+mx)]^{r+s}}$ 之意,故知以 $z=\phi(y+mx)$ 代入(1)之結果爲

$$\phi^{(n)}(y+mx)F(m,1)=o.$$

故 $z=\phi(y+mx)$, 在 $F(m,1)=o$ 時,當爲題之解案;故此解案之產生,實有賴於下列方程之成立:

(2) $$k_0m^n+k_1m^{n-1}+\cdots+k_{n-1}m+k_n=o.$$

---

(1) 常係數齊級一次方程 homogenous linear equations with constant coefficients.

(2)式稱爲輔助方程,如其各根 $m_1, m_2 \cdots m_n$, 値各不同,則

$$z=\phi_1(y+m_1x)+\phi_2(y+m_2x)+\cdots+\phi_n(y+m_nx)$$

爲題之一解.且此式含有 n 任意函數,故卽爲題之通解.*

例如,設取85節,習題 2 之題而論,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

其輔助方程爲

$$m^2-a^2=0, \quad \therefore m=\pm a.$$

因得通解爲

$$z=\phi(y+ax)+\psi(y-ax).$$

習題 1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

習題 2. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}-7\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+10\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=0.$

89. 輔助方程之根有重複者. 如輔助方程之根有重複者,則由上節之法不能求得通解.馭題之道,可用一類似47節之法以推解之.

*如 $F(D, \mathcal{D})$ 中有一因子爲 $\mathcal{D}$,則 $F(m, 1)$ 祇爲一個 $n-1$ 次之式.此中所漏之根係等於 ∞,其相當之積分爲 $\phi(x)$. 此理在本例中,卽就微分方程之形式而論,亦已知其顯然.緣吾人云 $\mathcal{D}$ 爲 $F(D, \mathcal{D})$中一因子之事,無異云每一 z 的微係數至少曾經一度爲對於 y 之微係數.故 $z=\phi(x)$ 必經此一度微分作用而爲 0.同理,吾人若見在$F(D, \mathcal{D})$中有一因子如 $\mathcal{D}^r$,則 $\phi_1(x), y\phi_2(x), \cdots, y^{r-1}\phi_r(x)$各式,亦皆易見其爲本題之積分.

$F(D_1 \mathcal{D})$ 符號可書爲因子乘式如

$$(D-m_1\mathcal{D})(D-m_2\mathcal{D})\cdots(D-m_n\mathcal{D}).$$

再,由46節易知因子次序之更換不生影響.若 m_1 爲一複根.吾人須求下式之解案

$$(D-m_1\mathcal{D})(D-m_1\mathcal{D})z=0.$$

令 $(D-m_1\mathcal{D})z=v$, 則式化爲

$$(D-m_1\mathcal{D})v=0.$$

由88節法,得　$v=\phi(y+m_1x)$.

由此須進求下式之積分,　$(D-m_1\mathcal{D})z=\phi(y+m_2x)$.

此係一級線性式,

$$p-m_1q=\phi(y+m_1x),$$

故拉格蘭法可應用(79節),因有

$$\frac{dx}{1}=-\frac{dy}{m_1}=\frac{dz}{\phi(y+m_1x)}.$$

由前二項,得

$$y+m_1x=a.$$

代入第三項,得

$$dx=\frac{dz}{\phi(a)}.$$

$$\therefore x\phi(a)-z=b.$$

故題之通解,爲

$$x\phi(y+m_1x)-z=\psi(y+m_1x),$$

即

$$z=\psi(y+m_1x)+x\phi(y+m_1x).$$

換言之,即 m_1 若為輔助方程之一重根,則非特 $\phi(y+m_1x)$ 為一積分,且 $x\psi(y+m_1x)$ 亦為一積分,由完全類似之法,吾人可證,若 m_1 為一 r 次之重根,則

$$\phi_1(y+m_1x),\ x\phi_2(y+m_1x),\ x^2\phi_3(y+m_1x)\cdots x^{r-1}\phi_r(y+m_1x)$$

皆為題之積分.

習題 1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

習題 2. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}-\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}-\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$

習題 3. $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4}-2\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^4}=0.$

91. 輔助方程之根為複數者. 若方程之各係數皆為實數,則輔助方程有複數根時,其根必為共軛式.故 $\alpha+i\beta$ 若為方程之一根,則 $\alpha-i\beta$ 亦必為一根.在補充函數中與此兩根相當之項為

$$\phi(y+\alpha x+i\beta x)+\psi(y+\alpha x+i\beta x).$$

取 ϕ_1 及 ψ_1 為兩個任意選擇之函數,吾人可令

$$\phi=\phi_1+i\psi,\quad \psi=\phi_1-i\psi_1.$$

如是則上舉之積分式,化為

$$\phi_1(y+\alpha x+i\beta x)+\phi_1(y+\alpha x-i\beta x)$$
$$+i[\psi_1(y+\alpha x+i\beta x)-\psi_1(y+\alpha x-i\beta x)].$$

因 ϕ_1 與 ψ_1 俱為實函數,故此亦係實函數.

習題　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

補助方程爲

$$m^2-2m+2=0. \qquad \therefore m=1\pm i.$$

通解爲　$$z=\phi(y+x+ix)+\psi(y+x-ix).$$

此可化爲實式如

$$z=\phi_1(y+x+ix)+\phi_1(y+x-ix)$$
$$+i[\psi_1(y+x+ix)-\psi_1(y+x-ix)],$$

緣ϕ_1與ψ_1皆屬實函數也.

特列如下.設令$\phi_1(u)$爲$\cos u$, $\psi_1(u)$爲e^u,則有

$$\cos(y+x+ix)=\cos(x+y)\cos ix-\sin(x+y)\sin ix$$
$$=\cos(x+y)\cosh x-i\sin(x+y)\sinh x,$$
$$\cos(y+x-ix)=\cos(x+y)\cos ix+\sin(x+y)\sin ix$$
$$=\cos(x+y)\cosh x+i\sin(x+y)\sinh x.$$
$$e^{y+x+ix}-e^{y+x-ix}=e^{y+x}(e^{ix}-e^{-ix})=2\,ie^{y+x}\sin x.$$
$$\therefore z=2\cos(x+y)\cosh x-2\,e^{x+y}\sin x.$$

91. 特別積分. 如方程右端並不等於零,則除已得之補充函數外,尙須更求其相當之特別積分,求此積分之通法,大抵可依仿47及48兩節所論關於常係數線性常微分方程之特別積分各求法,照樣施用*.在多數例下,此等特別積分之求出,可用試擬方法,如50節所述之待定係數法.茲舉數例以明其術:

* 可參閱 Forsyth, §250, Johnson, §230 and foll., Murray, § 30 等書.

習題 1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin(x+2y)-2\sin(x+y)+x+xy.$

補充積分為 $\phi(y+x)+\psi(y-2x)$.

求 $\sin(x+2y)$ 之相當的特別積分時,因題中祇有二級積分,故試擬 $z=a\sin(x+2y)$.

如是則得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=5a\sin(x+2y)$.

若 $a=\frac{1}{5}$,則結果化為 $\sin(x+2y)$. 故得本項之相當的特別積分為 $\frac{1}{5}\sin(x+2y)$.

因 $\sin(x+y)$ 係補充函數中之一部分,故不必再試 $z=b\sin(x+y)$ 一項.若試以 $z=bx\sin(x+y)$,則代入左端之結果為 $3b\cos(x+y)$. 故改試以 $z=bx\cos(x+y)$. 由此得結果為 $-3b\sin(x+y)$. 與 $-2\sin(x+y)$ 相比,得 $b=\frac{2}{3}$. 故得 $\frac{2}{3}x\cos(x+y)$ 為又一特別積分. [按所擬積分亦可設為 $z=by\cos(x+y)$,其理亦甚顯然.] 求 x 項時,可試擬 $z=cx^3$,代入原式得 $6cx$. 若 $6c=1$,則式等於 x,故知此項之相當的特別積分為 $\frac{x^3}{6}$. 求 xy 項時,可試擬 $z=fx^3y$, 如是則得 $6fxy+3fx^2$. 故改試以 $z=fx^3y+gx^4$. 由此得結果為 $6fxy+(3f+12g)x^2$. 若 $f=\frac{1}{6}$, $g=-\frac{1}{24}$, 則此式化為 xy. 故知此項之相當的特別積分為 $\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{2x}x^4$. 故得本題之通解為

$$z=\phi(y+x)+\psi(y-2x)+\frac{1}{5}\sin(x+2y)+\frac{2}{3}x\cos(x+y)$$
$$+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{24}x^4$$

習題 2.　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x+2y}+e^{x+y}.$

補充函數爲 $\phi(y+x)+\psi(y+2x)$.

求 e^{x+2y} 時,試擬以 $z=ae^{x+2y}$. 由此得 $3ae^{x+2y}$.

故 $\dfrac{1}{3}e^{x+2y}$ 爲其相當之特別積分.

因 e^{x+y} 爲補充函數中之一部分,故試令 $z=bxe^{x+y}$. 由此可得 $-be^{x+y}$. 故 $-xe^{x+y}$ 爲其相當之特別積分. [如試擬 $z=bye^{x+y}$ 亦無不可.] 故得本題通解爲

$$z=\phi(y+x)+\psi(y+2x)+\frac{1}{3}e^{x+2y}-xe^{x+y}.$$

習題 3.　$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}-2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\dfrac{1}{x^2}.$

輔助方程爲 $m^2-2m+1=0$.　$\therefore m=1,1$.

[此例屬88節註下所舉之類.]

故其補充函數爲 $\phi(x)+\psi(y+x)+x\chi(y+x)$.

因題中無 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ 項,故爲求 $\dfrac{1}{x^2}$ 計,吾人取一 x 之函數與 y 相乘之積式,此 x 函數,經二度微分運算後,須予吾人以 $\dfrac{1}{x^2}$;因是試令 $z=ay\log x$. 由此知若令 $a=-1$, 則其結果爲 $\dfrac{1}{x^2}$.

故得題之通解爲

$$z=\phi(x)+\psi(y+x)+x\chi(y+x)-y\log x.$$

習題 4.　$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin(x+y)+3x^2y.$

習題 5.　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x-y.$

92. 常係數非齊級線性方程. 如87節中之 $F(D, \mathcal{D})$ 並不爲 D 與 $\mathcal{D}$ 之齊次式,而其各項係數却皆爲常數,則其解案祇能在數種情形之下爲含任意函數之式,雖其解案之含無限數常數之式,却屬隨時可以求得.

因 $D^r e^{ax+by} = a^r e^{ax+by}$, $\mathcal{D}^s e^{ax+by} = b^s e^{ax+by}$, 故 $z = ce^{ax+by}$ 代入下列

(1) $$F(D, \mathcal{D}) = 0$$

之結果爲 ce^{ax+by}.若 a 與 b 適合下方程

(2) $$F(a,b) = 0,$$

(此名爲輔助方程),則 $z = ce^{ax+by}$ 爲(1)之一解,內 c 爲一任意常數.對(2)之 b 之任一值,當有一定數之 a 根,其值各各適合於(2)方程.故吾人由令 b 取各種之值,可得無數之特別積分,一如吾人所欲.按(1)式之各個積分之和亦爲(1)之積分.故

(3) $$z = \Sigma ce^{ax+by}$$

爲題之一解,式中各 c 與各 b 皆爲任意常數,其數無限,式之 a 係由每一 b 值選定,就(2)求出,其條件爲與其相當之 b 須同時適合於(2)式.

如對於任一 b 值,a 值之適合(2)式者有 k 數,其式爲 $f_1(b)$, $f_2(b), \cdots f_k(b)$, 則(3)可書爲

(4) $$z = \Sigma ce^{f_1(b)x+by} + \Sigma ce^{f_2(b)x+by} + \cdots + \Sigma ce^{f_k(b)x+by},$$

內各項之 c 與 b 俱爲任意常數.

在常情之下, $F(D, \mathcal{D})$ 未必有有理因子.如若有一線性因子

如 $D-\lambda\mathcal{D}-\mu$,則(2)式有一因子如 $a-\lambda b-\mu$,即 $a=\lambda b+\mu$.故各 f 之一函數,設爲 $f_1(b)$,化爲 $\lambda b+\mu$,而(4)式中與此相當之項可書爲

(5) $$z=\Sigma ce^{b(\lambda x+y)+\mu x}=e^{\mu x}\Sigma ce^{b(\lambda x+y)}.$$

因各 c 與 b 俱爲任意常數,故 $\Sigma ce^{b(\lambda x+y)}$ 係 $\lambda x+y$ 之一任意函數,設爲 $\phi(\lambda x+y)$.故(5)可書爲

(6) $$z=e^{\mu x}\phi(\lambda x+y).$$

職是故知,與(2)中每一線性因子相當,吾人恆有一解如(6)式.*

如 $F(D,\mathcal{D})$ 有一無 D 之線性因子,則(2)必有一無 a 之相當因子,設爲 $b-\mu$.如是則(4)式中與此相當之項可書爲

(5′) $$z=\Sigma ce^{ax+\mu y}=e^{\mu y}\Sigma ce^{ax}.$$

因各 c 與 a 俱爲任意常數,故 Σce^{ax} 係一 x 的任意函數,而(5′)可書爲

(6′) $$z=e^{\mu y}\phi(x).$$

如方程之右端並不爲零,則其相當之特別積分,有時可用91節之試擬方法求得之.

習題 1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=\sin(x+2y)$.

輔助方程(2)爲

$$a^2+ab+b-1=0.$$

即 $$(a+1)(a+b-1)=0.$$

*在88節各級方程例中,所有因子俱爲線性式.且 $\mu=0$,故其所得結果,正與本節所得結果,恰相符合.

用 $a+1=0$ 式,則 $\lambda=0, \mu=-1$, 故由(6)式得一解爲 $z=e^{-x}\phi(y)$.

用 $a+b-1=0$ 式,則 $\lambda=-1, \mu=1$, 故得一解爲 $z=e^{x}\psi(y-x)$. 題之補充函數故爲

$$e^{-x}\phi(y)+e^{x}\psi(y-x).$$

求特別積時,試令 $z=\alpha\sin(x+2y)+\beta\cos(x+2y)$.

代入左端,得

$$(-4\alpha-2\beta)\sin(x+2y)+(-4\beta+2\alpha)\cos(x+2y).$$

如 $\alpha=-\frac{1}{5}, \beta=-\frac{1}{10}$, 則此式化爲 $\sin(x+2y)$. 故得特別積分爲

$$-\frac{1}{5}\sin(x+2y)-\frac{1}{10}\cos(x+2y),$$

故得題之通解爲

$$z=e^{-x}\phi(y)+e^{x}\psi(y-x)-\frac{1}{10}[2\sin(x+2y)+\cos(x+2y)].$$

習題 2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial x}+z=e^{-x}$.

輔助方程(2)爲

$$a^2-b^2+2a+1=0,$$

即 $$(a+b+1)(a-b+1)=0.$$

故得補充函數爲

$$e^{-x}[\phi(y-x)+\psi(y+x)].$$

因 e^{-x} 爲補充函數之一部分,故試擬以 $z=\alpha xe^{-x}$. 但此實亦係補充函數之一部份,蓋在 $\phi=-\frac{y-x}{2}$, $\psi=\frac{y-x}{2}$ 時,實得此項也.

故改擬 $z=\alpha x^2e^{-x}$. 代此入左端,得 $2\alpha e^{-x}$. 故知 $\alpha=\frac{1}{2}$, 而特別積分爲 $\frac{1}{2}x^2e^{-x}$. 故本題通解爲

$$z=e^{-x}\left[\phi(y-x)+\psi(y+x)+\frac{1}{2}x^2\right].$$

習題 3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x+3y}+\sin(2x+y).$

習題 4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}-z=\cos(x+2y)+e^y.$

93. 方程之可化爲常係數線性方程者. 如87節 $F(D,\mathcal{D})$ 式中 $D^r\mathcal{D}^s$ 項之係數,爲一常數與 x^ry^s 之乘積,則此方程可由用 $\log x=X$, $\log y=Y$ 之變換,而化爲一常係數方程(參閱51節,歐西線性方程式).緣

$$Dz=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X},\qquad \therefore x^2Dz=\frac{\partial^2 z}{\partial X}$$

$$D^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial X},\qquad \therefore x^2D^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}-\frac{\partial z}{\partial X}.$$

$$\mathcal{D}z=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial Y},\qquad \therefore y\mathcal{D}z=\frac{\partial z}{\partial Y}.$$

$$\mathcal{D}^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial Y},\qquad \therefore y^2\mathcal{D}^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial Y}-\frac{\partial z}{\partial Y}.$$

$$D\mathcal{D}z=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y},\qquad \therefore xyD\mathcal{D}z=\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y}.$$

習題 1. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2.$

用 $\log=X$, $\log y=Y$ 代換後,原式化爲一常係數方程,如

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial X^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial Y}-\dfrac{\partial z}{\partial X}-\dfrac{\partial z}{\partial Y}=e^{2X}+e^{2Y}$. 按92節,(2),輔助方程爲

$$a^2+2ab+b^2-a-b=0,\ \text{即}\ (a+b)(a+b-1)=0.$$

故得補充函數爲 $\phi(Y-X)+e^X\psi(Y-X)$.

特別積分可擬爲 $z=\alpha e^{2X}+\beta e^{2Y}$. 代入相比,得 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$. 故得本題通解爲

$$z=\phi(Y-X)+e^X\psi(Y-X)+\frac{1}{2}(e^{2X}+e^{2Y}).$$

換還 x 與 y, 並注意 $Y-X=\log\dfrac{y}{x}$, 得通解式爲

$$z=\phi\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

[本方程中之 r, s, t, 既皆爲線性式,故本題亦屬於85節所論之類.學者宜用蒙奇氏法再解此題,以資練習.]

習題 2. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

習題 3. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+6y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3y^4.$

亦有他種方程可化爲常係數線性方程式.(但其變換方法常不若上節所述一類之易見.)學者可用 $X=\frac{1}{2}x^2, Y=\frac{1}{2}y^2$ 之變換,以解下題,

習題 4. $\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}$.

94. 本章提要. 高於一級之偏微分方程,其可以用初步方法解出者,其類甚少.本章所論祇及方程之應變類與其各微係數之爲線性式者,或其最高級(所論之題皆爲第二級)微係數爲線性式者.後者一類,時可以蒙奇法解之.

如方程之應變數與其所有微係數俱係線性式,且其係數均爲常數,則92節通法可以適用.

如常係數線性方法亦爲齊級者(言卽式中無應變數,而其所有之各級微係數均爲同級者),則88節之法可以應用.

如方程屬線性式,而其係數非爲常數,則由變換方法,有時可化之爲常係數式(參閱93節).

亦有方程,有時可逕用86節之特別解法出之.

習題 1. $ys=x+y$.

習題 2. $r-s-6t=xy$.

習題 3. $zr+p^2=3xy^2$.

習題 4. $xr-(x+y)s+yt=\frac{x+y}{x-y}(p-q)$.

習題 5. $xr-p=xy.$

習題 6. $r-t-3p+3q=e^{x+2y}.$

習題 7. $x^2r-y^2t=(x+1)y.$

習題 8. $x^2r+2xys-y^2t+xp+yq-z=0.$

習題 9. $xr+p=9x^2y^2.$

習題 10. $s-t=\dfrac{x}{y^2}.$

附 錄

包含兩個相同變數之兩函數可有關係存在之條件 Condition that a relation exist between Two Functions of Two Variables 如 u 與 v 皆爲 x 與 y 之函數,則二者能有關係之必要與充分條件爲下列行列式(稱爲耶柯皮式 Jacobion)之須化爲零,即

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=J_{x,y}(u, v)=(u, v)_{x,y}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0.$$

1° 先證其爲必要.

若 $u=\phi(v)$,求微分得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d\phi}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{d\phi}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

若此二個含有 $\frac{d\phi}{dv}$ 之方程爲聯立之式,則所需條件祇要

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0,$$

由是故知此條件爲必要.

2° 次證此條件亦爲充分.

設 u 與 v 兩函數爲 $u=f_1(x, y)$, $v=f_2(x, y)$.

由此可將 y 消去而得一個關係之式,設其 u 化出後之式爲

$$u=\phi(x, v).$$

求微分,並注意 x 與 y 爲二個自變數,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

若 $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=0$, 則上二式祇能在 $\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$ 時可成聯立方程.

但 $\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$ 云云,即 ϕ 中無 x 之意.故若耶柯皮式化爲零時,則 $u=\phi(v)$, 充分條件之理因之亦成立.

按.——本節之理可以推廣應用於 n 個含有 n 自變數函數間之關係.

附錄 II

本書提要. 下爲本書所述各種微分方程解法之提綱:

如題爲一個常微分方程,

而爲一級一次者,法見19節;

而爲一級高次者,求通解之法見28節,求異解之法見34節;

而爲高級線性常係數式者,法見52節(注意該節所論兼及他種線式之可化爲常係數者在內);

而爲二級線性式者;法見55, 62, 及 74節;

而爲高級且不屬於以上各類者,法見62節;

如題爲一常微分方程組,法見69節.

無論題爲一個或一組常微分方程式,第十一章之用級數求積分通法,均可用爲最後試用之解法.

如爲一個含有二個變數以上之全微分方程,法見41節.

如爲一個一級偏微分方程,法見84節.

如爲一個高級偏微分方程,法見94節.

以上所述亦可列表如次,以備參考:

一個微分方程

- 常微分式
  - 一級
    - 一次（19節）
    - 高次
      - 通解（28節）
      - 異解（34節）
  - 高級
    - 線性常係數式（52節）
    - 二級線性式（55，62，74節）
    - 其他方程（62節）
- 兩個變數以上之全微分式（41節）
- 偏微分式
  - 一級（84節）
  - 高級（94節）

一組常微分方程（69節）

第十一章之級數通法可適用於一個及一組常微分方程式.

索引 Index

下用數字均指頁次.縮寫意義爲 c. c.= 常係數, d. e.= 微分方程, l.= 線性式, o. d. e.= 常微分方程, p. d. e.=偏微分方程, t. d. e.= 全微分方程.

增 錄

目 錄

增　錄

I. 求特別積分另法

按本書所載求特別積分法已詳47至50各節及91節.惟他書所採方法有與本書大不相同者,雖原則應用未必能若本書之簡便,然通用頗廣,為便利將來讀書計,宜亦兼明其理,茲故採用 Murrary's Introductory Course in Differential Equations 及 Piaggio's Differential Equations 所載各法分述於後以供參考.

A. 常微分方程 (Murray § § 60−64)

1. 方程右端含有 e^{ax} 項時之特別積分求法.

如 $f(D)y=X$ 之右端含有 e^{ax} 項則與此相當之積分由 $\frac{1}{f(D)}e^{ax}$ 推求,可知其當為 $\frac{1}{f(a)}e^{ax}$ 其理可述如下.

按 $D^n e^{ax}=a^n e^{ax}$; 故若 $f(D)$ 中之各項為 D^n 式 (n 係一整數),

則
$$f(D)e^{ax}=f(a)e^{ax}.$$

兩端俱加以 $\frac{1}{f(D)}$ 之運算後,則

$$\frac{1}{f(D)}f(D)e^{ax}=\frac{1}{f(D)}f(a)e^{ax};$$

即
$$e^{ax}=f(a)\frac{1}{f(D)}e^{ax},$$

故
$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{f(a)}e^{ax}.$$

本法遇$f(D)=0$時,$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\infty e^{ax}$ 故不能適用,遇此困難時宜稍變如下:

若 a 爲 $f(D)=0$ 之一單根,則$(D-a)$爲$f(D)$之一因子,故$f(D)=(D-a)\phi(a)$;如是則

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{D-a}\,\frac{1}{\phi(D)}e^{ax}=\frac{1}{D-a}\,\frac{1}{\phi(a)}e^{ax}=\frac{xe^{ax}}{\phi(a)}$$

蓋$\frac{e^{ax}}{D-a}$由本書49節之法可知其等於xe^{ax}也.

若 a 爲 $f(D)$ 之重根,則 $f(D)=(D-a)^2\psi(D)$,而

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^2}\,\frac{1}{\psi(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^2}\,\frac{e^{ax}}{\psi(a)}=\frac{x^2e^{ax}}{2\psi(a)}.$$

$\frac{e^{ax}}{(D-a)^2}=\frac{x^2e^{ax}}{2}$之理,亦可由本書49節證明.

例題 $\frac{d^3y}{dx^3}+y=3+e^{-x}+5e^{2x}$.

題之補充函數爲 $ce^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+c_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

次求特別積分,由

$$\frac{1}{D^3+1}(3e^{0x}+e^{-x}+5e^{2x}).$$

得第一第三兩項之積分爲3與$\frac{5}{9}e^{2x}$. 但 -1 係 D^3+1 之一根,故第二項e^{-x}已見補充函數,故其特別積分之求法須略變,由

$$\frac{1}{D^3+1}e^{-x}=\frac{1}{D+1}\,\frac{1}{D^2-D+1}e^{-x}=\frac{1}{D+1}\,\frac{e^{-x}}{3}.$$

求末式積分,得$\frac{xe^{-x}}{3}$.故得本題全解為

$$y=ce^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+c_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+3+\frac{5}{9}e^{2x}+\frac{xe^{-x}}{3}.$$

2. 方程右端含有x^m時之特別積分求法,內m係一正整數.

求$\frac{1}{f(D)}x^m$之值時,展$[f(D)]^{-1}$為D之升級數,然後將級數中各項一一運算於x^m之上,併其結果即為所求之特別積分.

級數中D項之指數大於m者,均可從略,緣此類之項運算於x^m後,所得皆為零也.

例題　$(D^3+3D^2+2D)y=x^2$.

題之補充函數為$c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{-x}$.

特別積分$=\frac{1}{2D+3D^2+D^3}x^2=\frac{1}{2D}\left(1+\frac{3}{2}D+\frac{D^2}{1}\right)^{-1}x^2$.

$$=\frac{1}{2D}\left(1-\frac{3}{2}D+\frac{7}{4}D^2+\cdots\right)x^{2*}.$$

$$=\frac{1}{2D}\left(x^2-3x+\frac{7}{2}\right)=\frac{x}{12}(2x^2-9x+21),$$

內$\frac{1}{D}x$即$\int x\,dx$之意.

故題之全解為$y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{-x}+\frac{x}{12}(2x^2-9x+21)$.

* x^2前之運算符號亦可書為$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{D}-\frac{3}{2}+\frac{7}{4}D+\cdots\right)x^2$,由此推算亦得同樣結果.式中$D^2$之項係亦屬於可略之列,蓋由此所得積分係一常數,已包含在補充積分中矣.

3. 方程右端含有$\cos ax$或$\sin ax$時之特別積分求法.

按　$D\sin ax=a\cos ax,$

$$D^2 \sin ax = -a^2 \sin ax,$$

$$D^3 \sin ax = -a^3 \cos ax,$$

$$D^4 \sin ax = a^4 \sin ax = (-a^2)^2 \sin ax,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $(D^2)^n \sin ax = (-a^2)^n \sin x.$

故若 $\phi(D^2)$ 爲一 D^2 之有理整函數 A Rational Integral Function of D^2, 則

$$\phi(D^2)\sin ax = \phi(-a^2)\sin ax.$$

因是故知 $\dfrac{1}{\phi(D^2)}\sin ax = \dfrac{1}{\phi(-a^2)}\sin ax.$

同理易知 $\dfrac{1}{\phi(D^2)}\cos ax = \dfrac{1}{\phi(-a^2)}\cos ax.$

$$\frac{1}{\phi(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{\phi(-a^2)}\sin(ax+b),$$

$$\frac{1}{\phi(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{\phi(-a^2)}\cos(ax+b).$$

例題 1. $(D^3+D^2-D-1)y = \cos 2x.$

補充函數爲 $c_1e^x + e^{-x}(c_2+c_3x)$,

特別積分 $= \dfrac{1}{D^3+D^2-D-1}\cos 2x = \dfrac{1}{D+1}\,\dfrac{1}{D^2-1}\cos 2x$

$$= \frac{D-1}{(D^2-1)^2}\cos 2x = \frac{D-1}{25}\cos 2x = -\frac{2}{25}\sin 2x - \frac{\cos 2x}{25}.$$

式中各節中之 D^2 隨時可易以 -4, 其結果皆相同也.

例題 2. $(D^2+a^2)y = \cos ax.$

補充函數爲 $c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$. 特別積分不能由 $\dfrac{1}{D^2+a^2}\cos ax$ $= \dfrac{1}{-a^2+a^2}\cos ax$ 求得,故須另易他法.茲令 a 改爲 $a+h$, 如是並

用本節原則及戴勞級數 Taylor's series 之理,得

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cos(a+h)x=\frac{1}{-(a+h)^2+a^2}\left(\cos ax-\sin ax\cdot hx\right.$$
$$\left.-\cos ax\cdot\frac{h^2x^2}{2!}+\cdots\right)$$

式中首項已見補充積分,故無須再取,故所求之特別積分可書爲

$$\frac{1}{2a+h}\left(x\sin ax+\frac{hx^2}{2!}\cos ax+\cdots\right),$$

令 h 變爲零,上項結果化爲 $\dfrac{x\sin ax}{2a}$.

故本題全解爲 $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax+\dfrac{x\sin ax}{2a}$.

4. 方程右端含 $e^{ax}V$ 時之特別積分求法,V 爲 x 之任一函數.

因 $$De^{ax}V=e^{ax}DV+ae^{ax}V=e^{ax}(D+a)V,$$
$$D^2e^{ax}V=ae^{ax}(D+a)V+e^{ax}D(D+a)V=e^{ax}(D+a)^2V,$$
$$D^ne^{ax}V=e^{ax}(D+a)^nV,$$

故 $$f(D)e^{ax}V=e^{ax}f(D+a)V.$$

令 $f(D+a)V=V_1$,則 $V=\dfrac{1}{f(D+a)}V_1$. 因 V 爲 x 之一任一函數,故 V_1 亦爲 x 之任一函數.代入上式得

$$f(D)e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V_1=e^{ax}V_1,$$

施 $\dfrac{1}{f(D)}$ 運算於兩端,移項得

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}V_1=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V_1,$$

內 V_1 爲 x 之任一函數.

例題 $(D^2+1)y=xe^{2x}$.

本題全解爲

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{D^2+1}xe^{2x}.$$

內
$$\frac{1}{D^2+1}xe^{2x}=e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+1}x=e^{2x}\frac{1}{5+4D+D^2}x$$

$$=\frac{e^{2x}}{25}(5x-4).\text{（參閱 2 節方法）.}$$

5. 方程右端含有 xV 時之特別積分求法, V 爲 x 之任一函數.

設 $f(D)y=V$ 之右端有 xV 一項.因

$$DxV=xDV+V$$

$$D^2xV=xD^2V+2DV$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^nxV=xD^nV+nD^{n-1}V=xD^nV+\left(\frac{d}{dD}D^n\right)V,$$

故
$$f(D)xV=xf(D)V+f'(D)V.$$

令 $f(D)V=V_1$, 則 $V=\frac{1}{f(D)}V$, 代入上式得

$$f(D)x\frac{1}{f(D)}V_1=xV_1+f'(D)\frac{1}{f(D)}V_1,$$

施 $\frac{1}{f(D)}$ 於兩端並移其項,得

$$\frac{1}{f(D)}xV_1=x\frac{1}{f(D)}V_1-\frac{1}{f(D)}\cdot f'(D)\frac{1}{f(D)}V_1=\left\{x-\frac{1}{f(D)}\cdot f'(D)\right\}\frac{1}{f(D)}V_1$$

內 V_1 因 V 爲 x 之任一函數,故亦爲 x 之任一函數.如右端有項如 x^rV 內 r 爲一正整數,則由連續施用上法卽可求得相當之

積分,各部所得之積分常數應皆除去不論,

例題. 用本法求上題之特別積分.

$$\text{特別積分}=\frac{1}{D^2+1}xe^{2x}=\left(x-\frac{1}{D^2+1}\cdot 2D\right)\frac{1}{D^2+1}e^{2x}=\frac{xe^{2x}}{5}$$

$$-\frac{1}{D^2+1}\cdot 2D\frac{e^{2x}}{5}=\frac{xe^{2x}}{5}-\frac{1}{D^2+1}\frac{4e^{2x}}{5}=\frac{e^{2x}}{25}(5x-4).$$

B. 偏微分方程 (Piaggio, §§147—151)

1. 常係數齊次線性方程.

特別積分在此類題下之求法,可觀下題演法自明.

例題. $(D^2-6D\mathscr{D}+9\mathscr{D}^2)z=12x^2+36xy.$

$$\text{特別積分}=\frac{1}{D^2-6D\mathscr{D}+9\mathscr{D}^2}(12x^2+36xy)$$

$$=\frac{1}{D^2}\left(1-\frac{3\mathscr{D}}{D}\right)^{-2}(12x^2+36xy)$$

$$=\frac{1}{D^2}\left(1+\frac{6\mathscr{D}}{D}+27\frac{\mathscr{D}^2}{D^2}+\cdots\right)(12x^2+36xy)$$

$$=\frac{1}{D^2}(12x^2+36xy)+\frac{1}{D^3}36x$$

$$=x^4+6x^3y+9x^4=10x^4+6x^3y.$$

故題之全解爲　$z=\phi(y+3x)+x\psi(y+3x)+10x^4+6x^3y.$

2. 簡法.

如 $z=f(x,y)$ 係一個 $ax+by$ 之函數,則有簡法可用如下例.

按 $D\phi(ax+by)=a\phi'(ax+by)$; $\mathscr{D}\phi(ax+by)=b\phi'(ax+by)$.

故　$F(D,\mathscr{D})\phi(ax+by)=F(a,b)\phi^{(n)}(ax+by)$,

內 $\phi^{(n)}$ 爲 ϕ 之 n 級微係數, n 乃 $F(D,\mathscr{D})$ 之次數.

反之　$$\frac{1}{F(D,\mathscr{D})}\phi^{(n)}(ax+by)=\frac{1}{F(a,b)}\phi(ax+by). \qquad (A)$$

惟須$F(a,b)\neq 0$,例如

$$\frac{1}{D^3-4D^2\mathcal{D}+4D\mathcal{D}}\cos(2x+3y)=\frac{-\sin(2x+3y)}{2^3-4\cdot 2^2\cdot 3+4\cdot 2\cdot 3^2}=$$

$$-\frac{1}{32}\sin(2x+3y)$$

因若使$\phi'''(2x+3y)=\cos(2x+3y)$,則$\phi(2x+3y)$應爲$-\sin(2x+3y)$也.

若$F(a,b)=0$,則吾人由下式關係

$$(D-m\mathcal{D})z\equiv p-mq=x^r\psi(y+mx),$$

易知其解爲$z=\frac{x^{r+1}}{r+1}\psi(y+mx)+\phi(y+mx)$.故若令

$$\frac{1}{D-m\mathcal{D}}x^r\psi(y+mx)=\frac{x^{r+1}}{r+1}\psi(y+mx),$$

則得 $$\frac{1}{(D-m\mathcal{D})^n}\psi(y+mx)=\frac{1}{(D-m\mathcal{D})^{n-1}}x\psi(y+mx)=\cdots$$

$$=\frac{x^n}{n!}\psi(y+mx). \qquad (B)$$

例如$\frac{1}{D^2-2D\mathcal{D}+\mathcal{D}^2}\tan(y+x)=\frac{x^2}{2}\tan(y+x)$.

而$\frac{1}{D^2-5D\mathcal{D}+4\mathcal{D}}\sin(4x+y)=\frac{1}{D-4\mathcal{D}}\cdot\frac{1}{D-\mathcal{D}}\sin(4x+y)$

$$=\frac{1}{D-4\mathcal{D}}\cdot-\frac{1}{3}\cos(4x+y) \text{ [由 (A)]}$$

$$=-\frac{1}{3}x\cos(4x+y). \text{ [由 (B)]}$$

3. 通法.

設 $(D-m\mathcal{D})z\equiv p-mq=f(x,y)$.

由拉格蘭諸法,得 $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-m}=\frac{dz}{f(x,y)}$.

由首次兩項得 $y+mx=c$. 利用此關係由首三兩項得

$$dz=f(x,c-mx)dx, \qquad \therefore z=\int f(x,c-mx)dx+(\text{一常數}),$$

中所有之 c 應於求出積分後,易爲 $y+mx$.

職是故知 $\dfrac{1}{D-m\mathcal{D}}f(x,y)$ 之積分,可書作 $\int f(x,c-mx)dx$ 內 c 應於求出積分積後,易爲 $y+mx$.

例題. $(D-2\mathcal{D})(D+\mathcal{D})z=(y-1)e^x$.

按　$$\int f(x,c-2x)dx=\int(c-2x-1)e^x dx=(c-2x+1)e^x,$$

故由易 c 爲 $y+2x$, 得 $\dfrac{1}{D-2\mathcal{D}}(y-1)e^x=(y+1)e^x$.

同理,由　$\int(c+x+1)e^x dx=(c+x)e^x$.

故題之全解爲

$$z=\phi(y+2x)+\psi(y-x)+ye^x.$$

4. 非齊次線性方程.

馭題之道詳見下例.

例題 1. $(D^3-3D\mathcal{D}+D+1)z=e^{2x+3y}$.

$$\frac{1}{D^3-3D\mathcal{D}+D+1}e^{2x+3y}=\frac{e^{2x+3y}}{2^3-3\cdot2\cdot3+2+1}=-\frac{1}{7}e^{2x+3y}.$$

故題之全解爲　$z=-\dfrac{e^{2x+3y}}{7}+\Sigma Ae^{hx+ky}$, 內 $h^3-3hk+h+1=0$.

例題 2. $(D+\mathcal{D}-1)(D+2\mathcal{D}-3)z=4+3x+6y$

$$\frac{1}{D+\mathcal{D}-1}\,\frac{1}{D+2\mathcal{D}-3}=\frac{1}{3}\{1-(D+\mathcal{D})\}^{-1}\left\{1-\frac{D+2\mathcal{D}}{3}\right\}^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}(1+D+\mathcal{D}+\cdots)\left(1+\frac{D+\mathcal{D}}{3}+\cdots\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{4D+5\mathcal{D}}{3}+\cdots\right)$$

而 $$\frac{1}{3}\left(1+\frac{4D+5\mathcal{D}}{3}+\cdots\right)(4+3x+6y)=\frac{1}{3}(4+3x+6y+4+10)$$

$$=6+x+2y.$$

故題之全解爲 $$z=e^{x}f(y-x)+e^{3x}F(y-2x)+6+x+2y.$$

例題 3. $(D^2-D\mathcal{D}-2D)z=\sin(3x+4y).$

$$\frac{1}{D^2-D\mathcal{D}-2D}\sin(3x+4y)=\frac{1}{-3^2-(-3\cdot4)-2D}\sin(3x+4y).$$

$$=\frac{1}{3-2D}\sin(3x+4y)=\frac{3+2D}{9-4D^2}\sin(3x+4y)$$

$$=\frac{3\sin(3x+4y)+6\cos(3x+4y)}{9-4(-3)^2}=\frac{1}{15}\sin(3x+4y)$$

$$+\frac{2}{15}\cos(3x+4y).$$

故題之全解爲 $$z=\Sigma Ae^{hx+ky}+\frac{1}{15}\sin(3x+4y)+\frac{2}{15}\cos(3x+4y),$$

內 $h^2-hk-2h=0$。

II. 弗洛白尼司法 Method of Frobenius (Piaggio Chap. IX)

按 $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ 之解案常取 $y=af(x)+bF(x)$ 之式,內 a

為兩個任意常數,而 $f(x)$ 與 $F(x)$ 常為 x 之整數或分數乘冪,及其正弦函數,餘弦函數,指數函數,對數函數等所組成,如 $(1+2x)e^x$, $\sin x+x\cos x$, $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$, $x+\log x$, $e^{\frac{1}{x}}$ 之類是.

上述各函數之首次兩式可用馬氏定理 Maclaurin's theory 展為 x 之升冪級數;其餘各類則俱不能,惟末式却可展為 $\frac{1}{x}$ 之冪式.

下法為柏林之 F. G. Frobenius(弗洛白尼司)所創,係由假定解案為 $y=x^m(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots)$ 入手.式中各 c 俱為常數.

指數 m 係由一個二次方程推定,此方程稱為指數方程(Indi Equation).此方程之根或屬相等或屬相差一整數,或相差為一非整數.以上各例當分別討論之.

弗氏法之特長處,在由此方法,遇方程解案含有 $\log x$ 之式者,可以捷法求得之.

下列多例係以指明敏題方法為目的,至於理論之正式證明,實有待於先明存在定理之理,茲不具論.

1. 指數方程之兩根不等而相差不爲一整數者.

例題. $(2x+x^3)\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-6xy=0$ ……………………………(1)

假令 $y=x^m(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots)$, 內 $c_0\neq 0$,

則 $$\frac{dy}{dx}=c_0(m)x^{m-1}+c_1(m+1)x^m+c_2(m+2)x^{m+1}+\cdots,$$

而 $$\frac{d^2y}{dx^2}=c_0(m)(m-1)x^{m-2}+c_1(m+1)(m)x^{m-1}$$
$$+c_2(m+2)(m+1)x^m+\cdots$$

代入(1)式並比其係數,得指數方程爲

$$c_0\left\{2m(m-1)-m\right\}=0,\qquad 即\ m(2m-3)=0\cdots\cdots(2)$$

及 $$c_1\left\{2(m+1)m-(m+1)\right\}=0,\qquad 即\qquad c_1=0\cdots\cdots(3)$$

$$c_2\left\{2(m+2)(m+1)-(m+2)\right\}+c_0\left\{m(m-1)-6\right\},$$

$$即\ c_2(2m+1)=c_0(m-3)\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同樣得 $$c_3(2m+3)+c_1(m-2)=0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$c_4(2m+5)+c_2(m-1)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

等種種關係.

由(3),(5)等式,得 $0=c_1=c_3=c_5=\cdots\cdots\cdots\cdots=c_{2n+1}.$

由(4),(5)等式,得 $c_2=-\dfrac{m-3}{2m+1}c_0,\ c_4=-\dfrac{m-1}{2m+5}c_2,\ c_6=-\dfrac{m+1}{2m+9}c_4,$

$$c_m=-\frac{m+2n-5}{2m+4n-3}c_{2n-2}.$$

但由(2), $$m=0\ 或\ \frac{3}{2}.$$

若 $m=0$, 則 $y=c_0(1+3x^2+\dfrac{3}{5}x^4-\dfrac{1}{15}x^6+\dfrac{1}{65}x^8\cdots\cdots)=Ay_1,$

若 $m=\frac{3}{2}$,則 $$y=c_0\left(1+\frac{3}{8}x^2-\frac{1\cdot3}{8\cdot16}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{8\cdot16\cdot24}x^6\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot9}{8\cdot16\cdot24\cdot32}x^8\cdots\right)=By_2.$$

故 $y=Ay_1+By_2$ 係題之一解,且式中含有兩個任意常數,故可謂題之根式.

通例,凡指數方程之兩根 α 與 β,值不相等而相差不爲一整數,則吾人由取 m 不同之根,分別代入假定之級數,常得兩個獨立的解案.

2. 指數方程之兩根其值相等者.

例題. $(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-5x)\frac{dy}{dx}-4y=o$

代 $y=x^m(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots)$ 入上式且比其係數,得

$$c_0\left\{m(m-1)+m\right\}=o, \qquad \text{即 } m^2=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$c_1\left\{(m+1)m+(m+1)\right\}-c_0\left\{m(m-1)+5m+4\right\}=o,$$

$$\text{即 } c_1(m+1)^2-c_0(m+2)^2=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同理得 $$c_2(m+2)^2-c_1(m+3)^2=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$c_3(m+3)^2-c_2(m+4)^2=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

等式.故若 $m=o$, $y=c_0x^m\left\{+1\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2x+\left(\frac{m+3}{m+1}\right)^2x^2+\left(\frac{m+4}{m+1}\right)^2x^3+\cdots\right\}$.

但吾人於此祇得一個級數,而題之全解却應有兩個.

因將級數代入本題後之結果(却不令 $m=o$)爲一單項式如 $c_0m^2x^{m-1}$.內含 x 之方,故其 m 之偏微係數,即 $2c_0mx^{m-1}+c_0m^2x^{m-1}\log x$ 在 $m=o$ 時亦化爲零即

$$\frac{\partial}{\partial m}\left[(x-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-5x)\frac{d}{dx}-4\right]y=2c_0mx^{m-1}+c_0m^2x^{m-1}\log x,$$

即 $$\left[(x-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-5x)\frac{d}{dx}-4\right]\frac{\partial y}{\partial m}=2c_0mx^{m-1}+c_0m^2x^{m-1}\log x.$$

故 $\frac{\partial y}{\partial m}$（如在其微係數中令 $m=0$）亦為題之一解.

求微分,得

$$\frac{\partial y}{\partial m}=y\log x+c_0x^m\left\{2\left(\frac{m+2}{m+1}\right)\cdot\frac{-1}{(m+1)^2}x+2\left(\frac{m+3}{m+1}\right)\cdot\frac{-2}{(m+1)^2}x^2\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{m+4}{m+1}\right)\cdot\frac{-3}{(m+1)^2}x^3+\cdots\right\}.$$

令 $m=0$,得兩級數如

$$y=A\left\{1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\right\}=Ay_1,$$

及 $$\frac{\partial y}{\partial m}=By_1\log x-2B\left\{1\cdot2\,x+2\cdot3\,x^2+3\cdot4\,x^3+\cdots\right\}=By_2$$

故得題之全解為 Ay_1+By_2 如上所得.

通例,凡指數方程有兩根 $m=\alpha$ 相等者,則吾人由代此 m 之值於 y 及 $\frac{\partial y}{\partial m}$ 式中,得兩個獨立之解案.

3. 指數方程之兩根相差為一整數,因而 y 級數中之係數有變為無窮大者.

例題. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-1)y=0.$

用前法,得

$$c_0\left\{m(m-1)+m-1\right\}=0,\quad 即\ m^2-1=0\cdots\cdots(1)$$

$$c_1\left\{(m+1)^2-1\right\}=0,\quad 即\ c_1=0\cdots\cdots(2)$$

$$c_2\left\{(m+1)^2-1\right\}+c_0=0,\cdots\cdots(3)$$

$$c_n\left\{(m+n)^2-1\right\}+c_{n-2}=0,\cdots\cdots(4)$$

故 $$y=c_0x^m\left\{1-\frac{1}{(m+1)(m+3)}x^2+\frac{1}{(m+1)(m+3)^2(m+5)}x^4\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(m+1)(m+3)^2(m+5)^2(m+7)}x^6+\cdots\right\}.$$

如令 $m=-1$,則級數係數之含 $m+1$ 因子在分母內者,俱變為無窮大,如欲免此困難,令 c_0 易為 $(m+1)k$, 則有

$$y=kx^m\left\{(m+1)-\frac{1}{(m+3)}x^2+\frac{1}{(m+3)^2(m+5)}x^4\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(m+3)^2(m+5)^2(m+7)}x^6+\cdots\right\},\cdots\cdots\cdots(5)$$

而 $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-1)y=kx^m(m+1)(m^2-1)$$
$$=kx^m(m^2+1)(m-1)$$

上式中因子 $(m+1)^2$ 之存在,實示在 $m=-1$時,y 若適合於原有之微分方程,則 $\frac{\partial y}{\partial m}$ 亦應適合其式,故在 $m=-1$時,吾人得

$$kx^{-1}\left\{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot4}x^4-\frac{1}{2^2\cdot4^2\cdot6}x^6+\cdots\right\}=k_1y_1,$$

及 $$ky_1\log x+kx^{-1}\left\{1+\frac{1}{2^2}x^2-\frac{1}{2^2\cdot4}\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right)x^4\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^2\cdot4^2\cdot6}\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)x^6+\cdots\right\}=k_2y_2,$$

又在 $m=1$ 時,得

$$kx\left\{2-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4^2\cdot6}x^4-\frac{1}{4^2\cdot6^2\cdot8}x^6+\cdots\right\}=k_3y_3.$$

各式相比,易見 $y_3=-4y_1$,故吾人所得獨立之解案祇有兩個而題之全解應為 $k_1y+k_2y_2$.

通例,凡指數方程之兩根 α 及 β.(設 $\alpha>\beta$) 相差為一整數,且 y 級數中之係數有在 $m=\beta$ 時變為無窮大者,則吾人須改 c_0 為

$k(m-\beta)$ 以稍變 y 之式.如是,則令 $m=\beta$ 後,可由新變之 y 及 $\frac{\partial y}{\partial m}$ 兩式中,得有兩個獨立的解案.至$m=\alpha$時所得之解案,則實等於$m=\beta$時所得解案之一種倍數.

4. 指數方程之兩根相差為一整數,因而 y 級數中之係數有變為無定式者.

例題. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+y=0.$

用前法,得 $m(m-1)=0\cdots\cdots(1)$

$$c_1(m+1)m=0\cdots\cdots(2)$$

$$c_2(m+2)(m+1)+c_0\Big\{-m(m+1)+2m+1\Big\}=0\cdots\cdots(3)$$

$$c_3(m+3)(m+2)+c_1\Big\{-(m+1)m+2(m+1)+1\Big\}=0\cdots(4)$$

(2)式 c_1 之係數,在 $m=0$ 時等於零,但式中並無他項能令 c_1 變為無定式(卻有可使之變為無窮大者).若 $m=1$, 則 $c_1=0$.

故,若 $m=0$, 則由(3),(4)等式,吾人得

$2c_2+c_0=0$, $6c_3+3c_1=0$, $12c_4+3c_2=0$ 等種種關係,因得

$$y_{m=0}=c_0\Big\{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{80}x^6+\cdots\Big\}+c_1\Big\{x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{40}x^5+\frac{3}{560}x^7+\cdots\Big\}.$$

此式中有兩個任意常數,故可視為原式之全解.

若令 $m=1$, 則吾人又得一解為

$$y_{m=1}=c_0x\Big\{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{40}x^4+\frac{3}{560}x^6\cdots\Big\},$$

係上所述 $y_{m=0}$ 式中第二級數之一種倍數.

通例,若指數方程之兩根 α 與 β(設 $\alpha>\beta$)相差為一整數,而

y 級數中之係數有在 $m=\beta$ 時變爲無定式者,則由令 $m=\beta$,即得一個 y 之式,內包兩個任意常數,故即爲題之全解.至 $m=\alpha$ 時所得之解,則實等於前者兩級數中之一個級數的倍數.

III. 含三個(或三個以上)自變數之偏微分方程之解法. 耶柯皮法. Partial differential equations containing three or more independant variables. Jacobi's method (Piaggio, §§ 140—141 and appendix C).

設方程式爲

$$F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)=0, \tag{1}$$

內應變數 z 並不見於式中, p_1, p_2, p_3 爲對於 x_1, x_2, x_3 之偏微係數. 耶氏之法與嘉畢立法大致相同. 先設由下列二式(內 a_1 與 a_2 爲兩任意常數)

$$F_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)=a_1, \tag{2}$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)=a_2, \tag{3}$$

合原式,可將 p_1, p_2, p_3 解出;且使

$$dz=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+p_3\,dx_3 \tag{4}$$

之積分可以求得;因附得(4)式之積分可求性條件爲

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}=\frac{\partial p_1}{\partial x_2};\quad \frac{\partial p_3}{\partial x_1}=\frac{\partial p_1}{\partial x_3};\quad \frac{\partial p_3}{\partial x_2}=\frac{\partial p_2}{\partial x_3} \tag{5}$$

求(1)式對於 x_1 之偏微分,得

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0, \tag{6}$$

同理得, $$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0. \tag{7}$$

由(6)及(7)得 $$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_1,p_1)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_1)}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial(E,F_1)}{\partial(p_3,p_1)}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}, \tag{8}$$

內 $\dfrac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_1,p_1)}$ 爲 $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial p_1}-\dfrac{\partial F}{\partial p_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}$ 之簡式.

同理得 $$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_2,p_2)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_3,p_2)}\frac{\partial p_3}{\partial x_2}=0, \tag{9}$$

及 $$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_3,p_3)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_3)}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_3)}\frac{\partial p_2}{\partial x_3}=0. \tag{10}$$

將(8),(9),(10)相加,因內有

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_1)}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}\left\{\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_1)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\right\}=0,$$

及類此之式二個皆等於零,故得

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_1,p_1)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_2,p_2)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_3,p_3)}=0, \tag{11}$$

即 $$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_1}-\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial p_2}-\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial F_1}{\partial p_3}-\frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial F_1}{\partial x_3}=0. \tag{12}$$

此式常以 $(F,F_1)=0$ 表之.

同理又得 $(F,F_2)=0$ 及 $(F_1,F_2)=0$.

此諸式均屬拉格蘭諸法可解之式,故得通法如下.

由下列方程組

$$\frac{dx_1}{-\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dp_1}{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}=\frac{dx_2}{-\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}=\frac{dp_2}{\dfrac{\partial F}{\partial x_2}}=\frac{dx_3}{-\dfrac{\partial F}{\partial p_3}}=\frac{\partial p_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_3}}$$

求二個獨立的函數如 $F_1=a_1$ 及 $F_2=a_2$. 如此兩函數適合於下列條件

$$(F_1,F_2)\equiv\Sigma\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_r}\frac{\partial F_2}{\partial p_r}-\frac{\partial F_1}{\partial p_r}\frac{\partial F_2}{\partial x_r}\right)=0,$$

且由$F=F_1-a_1=F_2-a_2=0$,可求出各p之各x的函數,則原題所求之解,可由求

$$dz=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+p_3\,dx_3 \tag{13}$$

之積分而求得之.

按本法所得之各p,恆可使(13)之積分可以求出.蓋此各p,必能適合於(13)之積分可求性條件(即下列諸方程),

$$L=M=N=0, \tag{A}$$

內 $$L\equiv\frac{\partial p_2}{\partial x_3}-\frac{\partial p_3}{\partial x_2},\quad M\equiv\frac{\partial p_3}{\partial x_1}-\frac{\partial p_1}{\partial x_2},\quad N\equiv\frac{\partial p_1}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_1}.$$

此理可解釋之如下.設將(8),(9),(10)相加,並利用$(F,F_1)=0$之關係,則

$$L\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_3)}+M\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_3,p_1)}+N\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}=0. \tag{B}$$

同理得 $$L\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(p_2,p_3)}+M\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(p_3,p_1)}+N\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(p_1,p_2)}=0. \tag{C}$$

及 $$L\frac{\partial(F_2,F)}{\partial(p_2,p_3)}+M\frac{\partial(F_2,F)}{\partial(p_3,p_1)}+N\frac{\partial(F_2,F)}{\partial(p_1,p_2)}=0 \tag{D}$$

(B),(C),(D)若皆成立,則苟非$L=M=N=0$,必$\Delta=0$,即此各係數所成之行列式係等於零.但此各字之係數實同於$J=\frac{\partial(F_2,F,F_1)}{\partial(p_1,p_2,p_3)}$行列式之各元相餘式 cofactor,而由行列式理論吾人又知$\Delta=J^2$.此J行列式之値固係不能等於零者.緣苟若如是,則各p之間將有一種方程的關係,而此與上通法所設:由$F=F_1-a_1=F_2-a_2=0$所求之各p,係爲(祇爲)各x之函數云云,兩相矛盾也.故

$$\Delta\neq0;\ 而\ L=M=N=0.$$

例題 1. $2p_1x_1x_3+3p_2x_2^2+p_2^2p_3=0.$ (1)

按法得方程組爲

$$\frac{dx_1}{-2x_1x_3}=\frac{dp_1}{2p_1x_3}=\frac{dx_2}{-3x_3^2-2p_2p_3}=\frac{dp_2}{0}=\frac{dx_3}{-p_2^2}=\frac{dp_3}{2p_1x_1+6p_2x_3},$$

由此二積分式,得 $F_1\equiv p_1x_1=a_1$ (2)

及 $F_2\equiv p_2=a_2$ (3)

且此二值亦適合於$(F_1,F_2)=0$. 由 (1),(2),(3) 解各 p 之值,得

$$p_1=a_1x_1^{-1},\ p_2=a_2,\ p_3=-a_2^{-2}(2a_1x_3+3a_2x_2^2),$$

故 $dz=a_1x_1^{-1}dx_1+a_2dx_2-a_2^{-2}(2a_1x_3+3a_2x_3^2)dx_3$

因得全解,爲 $z=a_1\log x_1+a_2x_2-a_2^{-2}(a_1x_3^2+a_2x_3^3)+a_3.$

例題 2. $(x_2+x_3)(p_2+p_3)^2+zp_1=0.$ (4)

本式中含有 z,與本章所討論之式略異,但若令

$$z=x_4,\ 則\ p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1}=\frac{\partial x_4}{\partial x_1}=-\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_4}=-\frac{P_1}{P_4},$$

內 u 爲(4)之積分.同理又得, $p_2=-\dfrac{P_2}{P_4}$; $p_3=-\dfrac{P_3}{P_4}$. 如是則(4)式化爲

$$(x_2+x_3)(P_2+P_3)^2-x_4P_1P_4=0, \tag{5}$$

爲一含有四個自變之方程,內中不復有應變數 u. 由是得待解之方程組爲

$$\frac{dx_1}{x_4P_4}=\frac{dP_1}{0}=\frac{dx_2}{-2(x_2+x_3)(P_2+P_3)}=\frac{dP_2}{(P_2+P_3)^2}$$

$$=\frac{dx_3}{-2(x_2+x_3)(P_2+P_3)}=\frac{dP_3}{(P_2+P_3)^2}=\frac{dx_4}{x_4P_1}=\frac{dP_4}{-P_1P_4}.$$

由此得三個積分爲 $F_1\equiv P_1=a_1$ (6)

$F_2\equiv P_2-P_3=a_2$ (7)

$$F_3 \equiv x_1 P_1 = a_3 \qquad (8)$$

以上諸值,亦易驗其一一悉合於$(F_r, F_s)=0$之關係(r, s可代表1,2,3三數之任二數).故知其式皆合用,由(5),(6),(7),(8)解各P,得

$$P_1 = a_1;\ P_4 = a_3 x_4^{-1};\ 2P_1 = a_1 \pm \sqrt{a_1 a_3/(x_1+x_3)};\ P_3 = P_1 - a_1;$$

故
$$du = a_1 dx_1 + a_3 x_4^{-1} dx_4 + \frac{a_2}{2}(dx_2 - dx_3)$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{a_1 a_3/(x_2+x_3)}\,(dx_2 + dx_3),$$

因得
$$u = ax_1 + a_3 \log x_4 + \frac{a_2}{2}(x_2 - x_3) \pm \sqrt{a_1 a_3 (x_2 + x_3)} + a_4.$$

易x_4爲z,並命$\frac{a_1}{a_3} = A_1, \frac{a_2}{2a_3} = A_2, \frac{a_4}{a_3} = A_3$,得

$$\log z + A_1 x_1 + A_2(x_2 - x_3) \pm \sqrt{A_1(x_2 + x_3)} + A_3 = 0,$$

爲(4)之全解。

IV. 解 $Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ 之蒙奇法. **Monge's method of integrating $Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ (Piaggio §§1.5—8).**

此法實由安培爾(André Marie Ampère of Lyons 1775—1836)推廣蒙奇之法而成,其解法所經之過程可分爲兩段,(1)求原式之中級積分,(2)求後者之積分.茲逐步分論之如下.

1. 求中級積分.

由 $$r=(dp-s\,dy)/dx$$

及 $$t=(dq-s\,dx)/dy$$

代入 $$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V,$$

再以 dx 及 dy 乘其兩端,則得

$$Rdpdy+T\,dqdx+U\,dpdq-V\,dxdy$$
$$-s(Rdy^2-Sdx\,dy+T\,dx^2+U\,dpdx+U\,dqdy)=0,$$

茲簡稱之曰, $N-sM=0$.

今所欲求者爲得

$$M=0 \text{ 及 } N=0$$

兩聯立方程之解案.茲因 M 中含有 $U\,dpdx+U\,dqdy$ 故分子不能如通法之可分解出,故吾人對於 M 或 N 之析爲分子一事已經無望,今因稍變其法,以求出 $M+\lambda N$ 之分子爲目的,式中之 λ 乃

今所待求之式也.

按 $M+\lambda N$ 之全式,即

$$R\,dy^2+T\,dx^2-(S+\lambda V)dx\,dy+U\,dp\,dx+U\,dq\,dy$$
$$+\lambda R\,dp\,dy+\lambda T\,dq\,dx+\lambda U\,dp\,dq.$$

因內無 dp^2 或 dq^2 項,故 dp 若發現於一分子之中,則 dq 祇能發現於又一分子之中.設兩分子之式爲

$$A\,dy+B\,dx+C\,dp \text{ 及 } E\,dy+F\,dx+G\,dq.$$

由比較 $dy^2, dx^2, dp\,dq$ 之係數,得

$$AE=R;\ BF=T;\ CG=\lambda U.$$

令 $$A=R, E=1, B=kT, F=1/k, c=mU, G=\lambda/m.$$

再比其餘五項之係數,得

$$kT+R/k=-(S+\lambda V),\qquad(1)$$

$$\lambda R/m=U,\qquad(2)$$

$$kT\lambda/m=\lambda T,\qquad(3)$$

$$mU=\lambda R,\qquad(4)$$

$$mU/k=U.\qquad(5)$$

由(3)或(5)得 $m=k$,由(2)或(4)得 $m=\lambda R/U$.故由(1)得

$$\lambda^2(RT+UV)+\lambda US+U^2=0.\qquad(6)$$

設 λ 爲(6)之根式,則兩分子之式可書爲

$$\left(R\,dy+\lambda\frac{RT}{U}dx+\lambda R\,dp\right)\left(dy+\frac{U}{\lambda R}dx+\frac{U}{R}dq\right),$$

即 $$\frac{R}{U}(U\,dy+\lambda T\,dx+\lambda U\,dp)\cdot\frac{1}{\lambda R}(\lambda R\,dy+U\,dx+\lambda U\,dq).$$

今之所事,乃在求下二式之積分

$$U\,dy+\lambda T\,dx+\lambda U\,dp=0,\ \cdots\cdots$$

及　$\lambda Rdy+Udx+\lambda Udq=0,$ ……………………………(8)

內λ須適合於(6)式.

茲引例題數則,以明演算之手續.

例題 1.　$2s+(rt-s^2)=1.$

代$R=T=0, S=2, U=V=1$於(6),得$\lambda^2+2\lambda+1=0$,其根為-1與-1. 用此根值,得(7),(8)二式化為

$$dy-dp=0,$$

及

$$dx-dq=0.$$

因得兩積分式為

$$y-p=\text{一常數}$$

及

$$x-q=\text{一常數}.$$

合之,得中級積分為

$$y-p=f(x-q).$$

例題 2.　$r+3s+t+(rt-s^2)=1.$

題中應求之λ,由$2\lambda^2+3\lambda+1=0$,得其根值為-1或$-\frac{1}{2}$.用$\lambda=-1$,則(7),(8)化為$dy-dx-dp=0$及$-dy+dx-dq=0$.

其積分為　$p+x-y=\text{一常數}$ ……………………(1)

及　$q-x+y=\text{一常數}$ ……………………(2)

同理由$\lambda=-\frac{1}{2}$,得　$p+x-2y=\text{一常數}$ ……………………(3)

及　$q-2x+y=\text{一常數}$ ……………………(4)

按某值若能同時適合$M=0$與$N=0$,則此值亦必同時適合於$M+\lambda_1 N=0$與$M+\lambda_2 N=0$.故一分子式若在$\lambda=\lambda_1$時化為零,則又一分子當在$\lambda=\lambda_2$時化為零(按此必為又一分子,蓋否則將

得 $dy=0$ 也).故吾人由合(1)與(4)及合(2)與(3),而得兩中級積分為

$$p+x-y=f(q-2x+y)$$

及 $$p+x-2y=F(q-x+y).$$

例題 3.　$2yr+(px+qy)s+xt-xy(rt-s^2)=2-pq.$

由 $\lambda^2xypq-\lambda xy(px+qy)+x^2y^2=0$, 得 $\lambda=y/p$ 或 x/q.

代此二值入(7),(8),得

$$pdy-dx+ydp=0, \quad \cdots\cdots(5)$$

$$2ydy-pxdx-xydq=0, \quad \cdots\cdots(6)$$

$$-qydy+xdx-xydp=0, \quad \cdots\cdots(7)$$

及 $$-2dy+qdx+xdq=0. \quad \cdots\cdots(8)$$

由(5)與(8)得一中級積分為

$$yp-x=f(-2y+qx).$$

按(6),(7)所合成之中級積分式係屬不可解,此可由其 p 與 q 之發現情形而知之.故題中 λ 之值雖常有二,可用之中級積分祇有一個.

2. 求中級積分式之積分.

茲亦設例以明其演算之程序.

例題 4.　取例題 1 之中級積分 $y-p=f(x-q)$, 命

$$(x-q)=a \text{ 及 } y-p=f(a)=b,$$

則有 $$dz=pdx+qdy=(y-b)dx+(x-a)dy.$$

因得一全解為 $z=xy-bx-ay+c.$

較此更為普通之解案,可由假定中級積分之 f 任意函數式係屬線性形式而得之.如是則因

$$y-p=m(x-q)+n,$$

故由拉格蘭諸法,得解爲

$$z=xy+\phi(y+mx)-nx.$$

例題 5. 試解例題 2 之兩中級積分,

$$p+x-y=f(q-2x+y) \text{ 及 } p+x-2y=F(q-x+y).$$

若沿用上題方法則有

$$q-2x+y=\alpha,$$

$$q-x+y=\beta,$$

$$p+x-y=f(\alpha),$$

$$p+x-2y=F(\beta).$$

若右端之值俱視爲常數,則x, y, p, q之值皆亦等於常數,於題不通.

若視α及β爲可變之參數 Parameter. 則由此四式,解得

$$x=\beta-\alpha$$

$$y=f(\alpha)-F(\beta),$$

$$p=y-x+f(\alpha),$$

$$q=x-y+\beta.$$

因得
$$dz=p\,dx+dy$$
$$=(y-x)(dx-dy)+f(\alpha)dx+\beta\,dy$$
$$=-\frac{1}{2}d(x-y)^2+f(\alpha)d\beta-f(\alpha)d\alpha+\beta f'(\alpha)d\alpha-\beta F'(\beta)d\beta;$$

故
$$z=-\frac{1}{2}(x-y)^2-\int f(\alpha)d\alpha-\int \beta F'(\beta)d\beta+\beta f(\alpha).$$

式中積分符號可設法銷去之.命

$$\int f(\alpha)d\alpha=\phi(\alpha) \quad \text{又} \quad \int F(\beta)d\beta=\psi(\beta)$$

用分部求積分法 (integration by parts), 則有

$$\int \beta F'(\beta)d\beta = \beta F(\beta) - \int F(\beta)d\beta = \beta\psi'(\beta) - \psi(\beta)$$

故 $$z = -\frac{1}{2}(x-y)^2 - \phi(\alpha) - \beta\psi'(\beta) + \psi(\beta) + \beta\phi'(\alpha),$$

或 $$\begin{cases} z = -\frac{1}{2}(x-y)^2 - \phi(\alpha) + \psi(\beta) + \beta y, \\ x = \beta - \alpha \\ y = \phi'(\alpha) - \psi'(\beta). \end{cases}$$

此三方程爲一曲面之參數方程式,內中含有任意常數兩個,故可視爲題之最普通式之解案.

3. 附言.

按本章所論之二級偏微分方程,即係銷去一級偏微分方程中之任意函數的通常結果.茲演證之如下.

設一級偏微方程爲 $u=\phi(v)$, 內 u 與 v 皆爲 x, y, z, p, q 之函數.求其 x 及 y 之偏微分得

$$r\frac{\partial u}{\partial p} + s\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} = \left(r\frac{\partial v}{\partial p} + s\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot\phi'(v),$$

及 $$s\frac{\partial u}{\partial p} + t\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} = \left(s\frac{\partial v}{\partial p} + t\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot\phi'(v).$$

銷其 $\phi'(v)$ 得

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V,$$

內 R, S, T, U, V, 各式中包含 p, q 及 u 與 v 之對於 x, y, z, p, q 之各微係數.式中無 rs 與 st,已自行銷去故也,式中 $U = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}$, 在 v 爲單含 x, y, z 而不含 p 或 q 時化爲零,此時方程式化爲 $Rr + Ss + Tt = V$,爲蒙奇常法所解之方程.

V. 福里哀之半段級數 **Fourier's Half-Range Series** (Piaggio §§ 47, 48).

凡 x 函數適合某種條件後,皆可展爲一收斂級數如下式.

$$f(x)=a_1 \sin x+a_2 \sin 2x+a_3 \sin 3x+\cdots,$$

內 x 之值可賦以 o 與 π 間之任一值)惟其兩端之值 $x=0$ 及 $x=\pi$,不定可以賦予).此式名謂福氏半段正弦級數.同樣,$f(x)$ 可展爲半段餘弦級數如下式,

$$f(x)=b_0+b_1 \cos x+b_2 \cos 2x+b_3 \cos 3x+\cdots$$

上二級數之所以稱爲半段者,乃與級數之兼含正弦餘弦各項且在 o 與 2π 全段之間悉屬正確者,對待之意也.

本式之理論證明,長而且艱.惟若假定其展式爲可能,則其各項係數之推定,却並不難.

以 $\sin nx$ 分乘兩端,並逐項求其積分,則有

$$\int_0^\pi f(x)\sin nx\, dx=a_1\int_0^\pi \sin x \sin nx\, dx+a_2\int_0^\pi \sin 2x \sin nx\, dx+\cdots.$$

此中含有 a_n 係數之項,爲

$$a_n\int_0^\pi \sin^2 nx\, dx=\frac{a_n}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2nx)\,dx=\frac{a_n}{2}\Big[x-\frac{1}{2n}\sin 2x\Big]_0^\pi=\frac{1}{2}a_n\pi,$$

其含他種係數如 a_r 之項,爲

$$a_r\int_0^\pi \sin rx \sin nx\, dx = \frac{a_r}{2}\int_0^\pi \left\{\cos(n-r)x - \cos(n+r)x\right\} dx$$

$$= \frac{a_r}{2}\left[\frac{\sin(n-r)x}{n-r} - \frac{\sin(n+r)x}{n+r}\right]_0^\pi = 0.$$

故方程右端除一項外,他項俱化爲零.

故 $$\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{2}a_n\pi,$$

即 $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\, dx.$$

同法可證,當 x 在 o 與 π 間時,若

$$f(x) = b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots$$

之關係,係屬正確,則 $b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$

而在 n 爲任一值時(惟爲零時除外),常有

$$b_n = \frac{2}{n}\int_0^\pi f(x)\cos nx\, dx.$$

例題 1. 展 $\pi x - x^2$ 爲半段正弦級數,須在 $x=0$ 至 $x=\pi$ 之間確能代表其值.

此類題,不必用已得之公式,可先令

$$\pi x - x^2 = a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \cdots$$

以 $\sin nx$ 乘兩端並求其 o 至 π 間之積分,得結果(如上例)爲

$$\int_0^\pi(\pi x - x^2)\sin nx dx = a_n\int_0^\pi \sin^2 nx dx = \frac{\pi}{2}a_n.$$

用分部求積分法(integration by parts),得

$$\int_0^\pi(\pi x-x^2)\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}(\pi x-x^2)\cos nx\right]_0^\pi$$

$$+\frac{1}{n}\int_0^\pi(\pi-2x)\cos nx\,dx$$

$$=0+\left[\frac{1}{n^2}(\pi-2x)\sin nx\right]_0^\pi+\frac{2}{n^2}\int_0^\pi\sin nx\,dx$$

$$=0-\frac{2}{n^3}\left[\cos nx\right]_0^\pi=\frac{4}{n^3}\quad \text{如 } n \text{ 爲一奇數,}$$

$$\text{或}\quad =0\quad \text{如 } n \text{ 爲一偶數.}$$

職是故知如 n 爲奇數則 $a_n=\frac{8}{\pi n^3}$ 而若 n 爲偶數則 a_n 等於 0,

故得

$$\pi x-x^2=\frac{8}{\pi}(\sin x+\frac{1}{27}\sin 3x+\frac{1}{125}\sin 5x+\cdots)$$

例題 2. 展 $f(x)$ 爲一半段級數須在 $x=0$ 至 $x=\pi$ 之間確能代表其值,內 $f(x)$ 之式在 $x=0$ 至 $x=\frac{\pi}{2}$ 之間等於 mx 而在 $x=\frac{\pi}{2}$ 至 $x=\pi$ 之間等於 $m(\pi-x)$.

本題之 $f(x)$ 在段中二處係爲不相同之解析式.解題特別之處,乃在積分之求法.按

$$\frac{4m}{\pi}(\sin x-\frac{1}{9}\sin 3x+\frac{1}{25}\sin 5x-\frac{1}{49}\sin 7x+\cdots).$$

學者可將題中原有函數,繪其軌跡,然後取本級首項之軌跡與首兩項之和之軌跡,互相比較. (Carslaw's Fourier's Series and Integrals, 2nd ed., Chap. VII, 載有多圖可供參考).

世界