Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 13

Aufgaben

Aufgabe 13.1. Sei R ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Ordnung

$$\operatorname{ord}(q) \in \mathbb{Z}\,.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus R übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe 13.2. Es sei R ein Dedekindbereich. Zeige, dass die Abbildung, die einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, den Hauptdivisor $\operatorname{div}(q)$ zuordnet, folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $\operatorname{div}(q_1 q_2) = \operatorname{div}(q_1) + \operatorname{div}(q_2)$.
(2) Es ist $\operatorname{div}(q_1 + q_2) \geq \min\{\operatorname{div}(q_1), \operatorname{div}(q_2)\}$.

Zeige insbesondere, dass diese Zuordnung einen Gruppenhomomorphismus

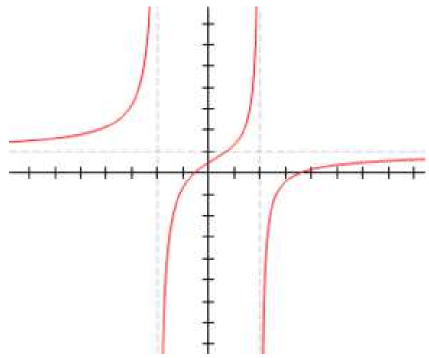
$$Q(R) \setminus \{0\} \longrightarrow \operatorname{Div}(R)$$

definiert und dass die Hauptdivisoren eine Untergruppe der Divisoren bilden.

Aufgabe 13.3.*

Es sei R ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper $Q(R)$ und sei $q \in Q(R) \setminus \{0\}$. Zeige, dass $q \in R$ genau dann gilt, wenn der Hauptdivisor $\operatorname{div}(q)$ effektiv ist.

Aufgabe 13.4. Es sei R ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper $Q(R)$ und sei D ein Divisor. Zeige, dass es ein $q \in R$ derart gibt, dass $D + \operatorname{div}(q)$ effektiv ist.



Aufgabe 13.5. Bestimme eine rationale Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die an der Stelle $2 - \mathrm{i}$ einen Pol der Ordnung 4, in $-3 + 5\mathrm{i}$ eine Nullstelle der Ordnung 2 und in -3 einen Pol der Ordnung 3 besitzt.

Aufgabe 13.6. Es sei $f \neq 0$ eine rationale Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Zeige, dass f in $a \in \mathbb{C}$ genau dann eine Nullstelle der Ordnung n besitzt, wenn f^{-1} in a einen Pol der Ordnung n besitzt.

Aufgabe 13.7. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich. Definiere zu einem Divisor D den „konjugierten Divisor“ $\overline{D}$. Zeige, dass für $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Beziehung

$$\overline{\operatorname{div}(q)} = \operatorname{div}(\overline{q})$$

gilt.

Aufgabe 13.8. Beweise, dass es zu einem Zahlbereich R einen Gruppenisomorphismus

$$Q(R)^\times / R^\times \longrightarrow H$$

gibt, wobei H die Gruppe der Hauptdivisoren bezeichnet.

Aufgabe 13.9. Bestimme in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ einen größten gemeinsamen Teiler für $22 + 25\sqrt{-2}$ und $43 - 23\sqrt{-2}$.

Aufgabe 13.10. Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 6)$. Berechne den Hauptdivisor zu

$$q = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{-6}.$$

Aufgabe 13.11.*

Es sei

$$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2+6).$$

Berechne den Hauptdivisor zu

$$q = \frac{4}{5} + \frac{2}{3}\sqrt{-6}.$$

Aufgabe 13.12.*

Es sei $R = A_{14} = \mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = 14$. Berechne zu

$$q = \frac{3}{5} - \frac{1}{7}\sqrt{14}$$

den zugehörigen Hauptdivisor.

Aufgabe 13.13. Sei $R = A_{-15} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-15}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -15$. Berechne zu

$$q = \frac{3}{10} - \frac{5}{6}\sqrt{-15}$$

den zugehörigen Hauptdivisor und stelle ihn als Differenz zweier effektiver Divisoren dar.

Aufgabe 13.14. Sei $R = A_{-11} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -11$. Berechne mittels des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von

$$35 + \sqrt{-11} \text{ und } -89 + 21\sqrt{-11}\,.$$

Aufgabe 13.15. Sei $R = A_{-7} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -7$. Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$4 + 9\sqrt{-7}\,.$$

Aufgabe 13.16. Sei D quadratfrei mit $D = 3 \mod 4$ und $D < -1$. Zeige, dass $(2, 1+\sqrt{D})$ ein Primideal im quadratischen Zahlbereich A_D ist, aber kein Hauptideal. Folgere, dass diese Ringe nicht faktoriell sind.

Aufgabe 13.17. Im quadratischen Zahlbereich $A_6 \cong \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ gilt

$$2 \cdot 3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}\,.$$

Finde die Primfaktorzerlegungen (?) der beteiligten Faktoren und des Produktes.

Aufgabe 13.18. Im quadratischen Zahlbereich $A_{-6} \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ gilt

$$-2 \cdot 3 = \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-6}\,.$$

Kann man diese Produkte weiter zerlegen, sind die beteiligten Faktoren prim?

Aufgabe 13.19. Sei D quadratfrei und betrachte $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq A_D$. Charakterisiere für die beiden Ringe, wann $\sqrt{D}$ prim ist.

Aufgabe 13.20. Bestimme in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ einen größten gemeinsamen Teiler für $-169 + 2\sqrt{-2}$ und $-70 + 113\sqrt{-2}$.

Aufgabe 13.21. Sei $D \leq -2$ quadratfrei und betrachte $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Zeige, dass die einzige Faktorisierung (bis auf Einheiten) von D durch

$$D \;=\; \sqrt{D}\sqrt{D}$$

gegeben ist. Zeige damit, dass $\sqrt{D}$ irreduzibel ist. Zeige ferner, dass falls $-D$ keine Primzahl ist, dann auch $\sqrt{D}$ nicht prim in R ist.

Aufgabe 13.22. Bestimme einen Erzeuger für das gebrochene Ideal $\mathfrak{f} \subseteq \mathbb{Q}$, das durch die rationalen Zahlen

$$\frac{4}{7}, \frac{7}{10}, \frac{13}{8}$$

erzeugt wird.

Aufgabe 13.23. Der Floh Kurt lebt auf einem unendlichen Lineal und befindet sich in der Nullposition. Er verfügt über drei Sprünge, nämlich

$$\frac{11}{77}, \frac{25}{49}, \frac{82}{15}\,.$$

Berechne das zugehörige gebrochene Ideal, das seinem Lebensraum entspricht.

Aufgabe 13.24.*

Es sei $R = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Berechne einen Erzeuger für das gebrochene Ideal aus $Q(R) = \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$, das durch die beiden Erzeuger

$$\frac{5}{7} \text{ und } \frac{-8+6\mathrm{i}}{5}$$

gegeben ist.

Aufgabe 13.25. Die Flöhin Paola lebt in der komplexen Ebene und befindet sich im Nullpunkt. Sie verfügt über drei Sprünge, nämlich

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\mathrm{i},\ 2 + \frac{2}{3}\mathrm{i},\ \frac{1}{7} + 7\mathrm{i}\,.$$

Man gebe eine einfache Beschreibung des gebrochenen Ideals, das ihrem Lebensraum entspricht.

Aufgabe 13.26. Sei $R = A_{-13} = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -13$. Berechne zu

$$q = \frac{2}{3} - \frac{5}{7}\sqrt{-13}$$

den zugehörigen Hauptdivisor und stelle ihn als Differenz zweier effektiver Divisoren dar.

Aufgabe 13.27.*

Es seien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ gebrochene Ideale in einem Dedekindbereich R. Es gelte

$$\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} \,=\, R.$$

Zeige, dass dann

$$\mathfrak{f} \,=\, \mathfrak{g}^{-1}$$

ist.

Aufgabe 13.28. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem Dedekindbereich R mit dem zugehörigen effektiven Divisor E. Zeige, dass das inverse gebrochene Ideal

$$\mathfrak{a}^{-1} \,=\, \{q \in Q(R) \mid q \cdot \mathfrak{a} \subseteq R\}$$

gleich dem zu $-E$ gehörenden gebrochenen Ideal $\mathrm{Id}(-E)$ ist.

Aufgabe 13.29. Es sei R ein Zahlbereich und es seien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ gebrochene Ideale.

(1) Zeige, dass wenn es ein $r \in Q(R)$, $r \neq 0$, mit

$$\mathfrak{g} \,=\, r\mathfrak{f}$$

gibt, dass dann die Multiplikation mit r, also

$$Q(R) \longrightarrow Q(R),\ f \longmapsto rf,$$

einen R-Modulisomorphismus

$$\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

induziert.

(2) Zeige, dass wenn es irgendeinen R-Modulisomorphismus

$$\varphi\colon \mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

gibt, dass es dann schon ein $r \in Q(R)$ mit

$$\mathfrak{g} = r\mathfrak{f}$$

gibt, und dass der Isomorphismus eine Multiplikation ist.

Aufgabe 13.30. Zeige direkt, dass die gebrochenen Ideale $\neq 0$ eine Gruppe bilden, und dass die gebrochenen Hauptideale darin eine Untergruppe bilden.

Aufgabe 13.31. Zeige, dass man jedes gebrochene Ideal $\mathfrak{f}$ in einem Dedekindbereich R in der Form

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1}$$

mit Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ darstellen kann.

Aufgabe 13.32. Es sei K ein Körper und $K[X,Y]$ der Polynomring in zwei Variablen und $\mathfrak{m} = (X,Y)$. Zeige

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \cdot (X^2, Y^2).$$

Man folgere, dass die gebrochenen Ideale $\neq 0$ zu diesem Ring keine Gruppe bezüglich der Multiplikation von Idealen bilden kann.

Aufgabe 13.33. Es sei R ein Dedekindbereich. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es sei $\mathfrak{f}$ ein gebrochenes Ideal mit einer Darstellung $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{a}}{h}$ mit $h \in R$ und einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$. Dann ist

$$\operatorname{div}(\mathfrak{f}) = \operatorname{div}(\mathfrak{a}) - \operatorname{div}(h).$$

(2) Zu einem Divisor D mit $E = D + \operatorname{div}(h)$ effektiv ist

$$\operatorname{Id}(D) = \frac{\operatorname{Id}(E)}{h}.$$

Aufgabe 13.34. Führe die Einzelheiten im Beweis zu Satz 13.16 aus.

Aufgabe 13.35. Es sei $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$ (mit $f_i \neq 0$) ein Ideal in einem Zahlbereich R und sei vorausgesetzt, dass das inverse gebrochene Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ die Gestalt

$$\mathfrak{a}^{-1} = (f_1^{-1}, \ldots, f_n^{-1})$$

hat. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal sein muss.

Aufgabe 13.36. Es sei R ein Zahlbereich. Erweitere die (multiplikative) Normabbildung

$$\text{Ideale}\,(R) \longrightarrow (\mathbb{N}_+, \cdot),\ \mathfrak{a} \longmapsto N(\mathfrak{a}),$$

zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\text{Gebrochene Ideale}\,(R) \longrightarrow \mathbb{Q}^\times .$$

Aufgabe 13.37. Finde eine (additive) Gruppe G und Gruppenhomomorphismen φ und ψ derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Gebrochene Ideale}\,(R) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \text{Div}\,(R) \\ \text{Norm} \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{Q}^\times & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & G \end{array}$$

kommutiert und dass φ injektiv ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = RationalDegree2byXedi.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 2

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9